4. Übungsblatt
Lineare Algebra I
im WS 2025/26 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe bis Montag 10.11, 10:15 in den Briefkästen.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie dürfen in Zweiergruppen abgeben.

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{2}\big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big).$$

(b) Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit den Eigenschaften

(i) $F(ax + by) = aF(x) + bF(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$,

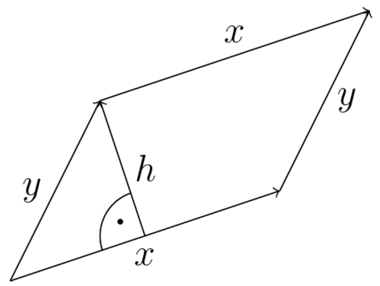
(ii) $\|F(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Dann gilt auch

$$\langle F(x), F(y)\rangle = \langle x, y\rangle \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 2 (3+3+4 Punkte)

Gegeben sei ein Parallelogramm in $\mathbb{R}^n$ mit den Seitenvektoren x und y (s. Skizze).



Zeigen Sie:

(a) Die Höhe des Parallelogramms wird beschrieben durch den Vektor $h = y - \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}\, x$.

(b) Für den Flächeninhalt $A = \|x\|\,\|h\|$ gilt: $A^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2$.

(c) Im $\mathbb{R}^2$ mit $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ gilt $A = |x_1y_2 - x_2y_1|$.

Aufgabe 3 (4+2+2+2 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{i-1}{\sqrt{2}} \cdot z + \sqrt{2} + 1 + i.$$

(a) Bestimmen Sie $z_0 \in \mathbb{C}$, so dass $f(z_0) = z_0$ gilt, und zeigen Sie, dass es nur eine Lösung gibt.

(b) Zeigen Sie: Es gibt genau ein $w \in \mathbb{C}$, so dass sich f schreiben lässt als

$$f(z) = z_0 + w \cdot (z - z_0).$$

(c) Berechnen Sie außerdem $f(z_1)$ und $f(z_2)$ für $z_1 = 0$ und $z_2 = 2$. Tragen Sie die Dreiecke mit den Ecken z_0, z_1, z_2 und $f(z_0), f(z_1), f(z_2)$ in eine Skizze ein.

(d) Was für eine Art Abbildung der Ebene in sich stellt f dar? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe von (b).

Aufgabe 4 (5+5 Punkte)

Lösen Sie die folgende Aufgabe aus einem Schulbuch für die 12. Klasse, Basiskurs.

> Die Grundkanten einer 6 m hohen regelmaßigen Pyramide mit quadratischer Grundfläche sind 5 m lang.
>
> (a) Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Seitenflächen der Pyramide mit der Grundfläche bilden.
>
> (b) Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen einer Kante und der Grundfläche.

Erklären Sie Ihre Rechnungen: Geben Sie Vektoren in $\mathbb{R}^3$ an, zwischen denen Sie Winkel bestimmen, und begründen Sie jeweils, warum Sie das richtige Ergebnis erhalten.

4. Präsenzaufgaben

Lineare Algebra I

im WS 2025/26 bei Prof. Dr. S. Goette

Aufgabe 1

Wir betrachten $\mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/\sim$, wobei "$\sim$" wie in Aufgabe 2 von Blatt 3 definiert sei. Unter einer Primzahl verstehen wir eine Zahl $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ mit folgender Eigenschaft: Wenn p ein Produkt $k \cdot l$ ganzer Zahlen teilt, dann teilt p die Zahl k oder die Zahl l. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

(a) Für $n = 6$ gibt es $[k], [l] \in (\mathbb{Z}/6) \setminus \{[0]\}$ mit $[k]\,[l] = [0]$.

(b) In $\mathbb{Z}/6$ gilt die Kürzungsregel für die Multiplikation.

(c) Wenn $n = p$ eine Primzahl ist, gilt die Kürzungsregel für die Multiplikation in $\mathbb{Z}/p$.

(d) Für $n = 3$ und $k, l \in \mathbb{N}$ gilt $[m]^k = [m]^l$ für alle $[m] \in \mathbb{Z}/3$, falls $[k] = [l] \in \mathbb{Z}/3$.

(e) Für $n = 3$ gilt $[m]^k = [m]$ für alle ungeraden Zahlen $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: die Gleichung $(a + b\,i)^2 = c + d\,i$ ist äquivalent zum Gleichungssystem

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = c, \\ 2ab = d. \end{cases} \tag{1}$$

(b) Gegeben seien c und d. Finden Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, die das Gleichungssystem (1) lösen. Wieviele Lösungen gibt es?

Achtung: Bei der Lösung des Gleichungssystems (1) sind mehrmals Quadratwurzeln zu ziehen. Achten Sie dabei genau auf die Vorzeichen.

Erstsemester-Hütte

Bald ist es endlich wieder soweit und es geht auf die Erstihütte. Alles, was ihr dazu wissen müsst, erfahrt ihr hier:

Wann geht's los?

Am Freitag, den **27.11.2025** (ca. 9 – 10 Uhr für die Wanderung zur Hütte, ca. 14 Uhr für alle Anderen)

Zurück kommen wir am Sonntag, dem **30.11.2025.** (ca. 15 Uhr)

Wo geht es eigentlich hin?

Wir fahren ins Dekan-Strohmeyer-Haus im Münstertal im Schwarzwald.

Was macht man denn eigentlich auf so einer Hütte?

Sich entspannen, Mitstudierende kennenlernen, an lustigen Workshops teilnehmen, Spiele spielen, lecker essen, …

Und was kostet das?

Der Teilnehmer:innen-Beitrag beläuft sich auf 45 € p.P. . Inklusive sind hierbei Übernachtung, Essen und viele Freizeitaktivitäten. (Zusätzliche Getränke können auf der Hütte erworben werden, wie sonst auch in FS-Raum). Sollte es dir aus persönlichen Gründen nicht möglich sein den Beitrag zuzahlen, komm gerne auf uns zu.

Wie meldet man sich an?

Am Montag, dem 17. November, könnt ihr euch **ab 10:00 Uhr vor dem Fachschaftsraum** verbindlich anmelden - bitte bringt den Teilnehmer:innen-Beitrag passend mit!
Falls ihr selbst nicht dort sein könnt, könnt ihr auch eine:n Kommiliton:in mit dem passenden Bargeld schicken:)

Die bezahlte Anmeldung ist **verbindlich**! Das heißt, wenn ihr doch nicht mitkommt, werden wir euch den Beitrag nicht erstatten können, da dieser nicht kostendeckend ist.

Bei der Anmeldung brauchen wir von euch unter anderem folgende Infos:

- Könnt ihr ein Auto zur Verfügung stellen um damit zu Hütte zufahren?
- Wie viele Kuchen bringt ihr mit?
- Wollt ihr zur Hütte wandern oder hab ihr ein Deutschlandticket??

Und mein Mathe-Zettel?

Auch auf der Hütte wird es Möglichkeiten geben sich mit den Abgaben zu beschäftigen, also keine Sorge:))

Zukünftige Infos?

Infos wie diese werden wir zukünftig über den „Jahrgangsverteiler" schicken. Falls ihr während der ESE nicht schon eure Mail-Adresse auf die Liste eingetragen habt, könnt ihr euch dort anmelden indem ihr eine leere Mail an jahrgang2025-on@math.uni-freiburg.de schreibt. Über diesen Verteiler werden wir die nächsten Tage auch weitere Informationen leiten.

Wenn ihr noch Fragen habt oder ihr Schwierigkeiten habt, dann mailt uns an **erstis@math.uni-freiburg.de**

Viele Grüße

Leon und Emilia von der Fachschaft