5. Übungsblatt
Lineare Algebra I
im WS 2025/26 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe bis Montag 17.10, 10:15 in den Briefkästen.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie dürfen in Zweiergruppen abgeben.

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2 Punkte)

Geben Sie jeweils Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen (a-c) beziehungsweise Quaternionen (d,e) an.

(a) $\dfrac{5}{3-4i}$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$

(c) $e^{\frac{\pi i}{6}} + \dfrac{1}{2} e^{\frac{2\pi i}{3}}$

(d) $(1+i)j(1-i)$

(e) $(1+i)(1-j)^{-1}$

Aufgabe 2 (4+3+3 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen der folgenden Gleichungen in $\mathbb{C}$.

(a) $z^2+z+1=0$

(b) $\bar{z}-z-i=0$

(c) $(z-i)(\bar{z}+i)=1$

Aufgabe 3 (2+2+2+4 Punkte)

Es sei $g \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ die euklidische Gerade durch den Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ mit Richtungsvektor $e^{i\varphi}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $h(z) = e^{i\varphi} \cdot z + z_0$ die reelle Achse auf die Gerade g abbildet.

(b) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung $k\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von h.

(c) Geben Sie die Abbildung $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = h(\overline{k(z)})$ in der Form $f(z) = a \cdot \overline{z} + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ an.

(d) Begründen Sie mit (a)–(c), dass f eine Spiegelung an der Geraden g beschreibt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

In einem Schulbuch für den Vertiefungskurs in der Oberstufe findet sich die Aufgabe:

> Lösen Sie die Gleichung $z^6 = 1$.

Geben Sie möglichst alle Lösungen in Polardarstellung an, und tragen Sie sie in eine Skizze ein.

5. PRÄSENZAUFGABEN

LINEARE ALGEBRA I

IM WS 2025/26 BEI PROF. DR. S. GOETTE

Aufgabe 1 (aus einem Schulbuch)

Eine Gerade g wird an einer Ebene E gespiegelt. Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Die Gerade g und die Bildgerade g' schneiden sich in der Ebene E.

(b) Der Schnittwinkel zwischen der Geraden g und der Ebene E ist immer halb so groß, wie der Schnittwinkel zwischen g und der Bildgeraden g'.

(c) Wenn die Gerade g orthogonal zur Ebene E liegt, dann ist g identisch zu ihrer Bildgeraden g'.

(d) Wenn die Gerade g in der Ebene E liegt, dann ist die Bildgerade g' orthogonal zu g.

(e) Wenn die Gerade g und die Ebene E sich unter einem Winkel von 45° schneiden, dann sind g und die Bildgerade g' zueinander orthogonal.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Drehung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um die Achse $\{\, u + tv \mid r \in \mathbb{R} \,\}$ mit $u, v \in \mathbb{R}^3$ um den Winkel $2\varphi \in [0, 2\pi)$.
Bestimmen Sie $z, q \in \mathbb{H}$ in Abhängigkeit von u, v und φ, so dass die Abbildung F die Form

$$F(w) = z + qw\bar{q}$$

mit $z, q \in \mathbb{H}$ hat.