6. Übungsblatt
Lineare Algebra I
im WS 2025/26 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe bis Montag 24.10, 10:15 in den Briefkästen.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie dürfen in Zweiergruppen abgeben.

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Menge G der Isometrien des $\mathbb{R}^2$ aus Bemerkung 1.66, also Abbildungen der Form

$$F(w) = u + zw \quad \text{oder} \quad F(w) = u + z\overline{w},$$

wobei $u, z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ sind.
Zeigen Sie: Mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung bildet G eine Gruppe.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) In jeder Gruppe $(G, *)$ gilt $(g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}$ und $(g^{-1})^{-1} = g$ für alle $g, h \in G$.

(b) Für bijektive Abbildungen $F \colon M \to N$ und $G \colon N \to L$ gilt $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$ und $(F^{-1})^{-1} = F$.

Aufgabe 3

Sei M eine endliche Menge mit $\#M \geq 3$, und sei $(\mathrm{Aut}(M), \circ)$ die Gruppe der Automorphismen von M aus Beispiel 2.5 der Vorlesung. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(M)$ nicht kommutativ ist. Betrachten Sie zunächst den Fall $\#M = 3$.

Aufgabe 4 (1+3+3+3 Punkte)

Legen Sie einen Würfel so vor sich auf den Tisch, dass die Eins nach oben und die Zwei zu Ihnen zeigt. Es bezeichne A eine Vierteldrehung entgegen dem Uhrzeigersinn um die vertikale Achse, und B eine Vierteldrehung nach links um die zu Ihnen weisende Achse.

(a) Führen Sie zuerst die Drehung A, dann B aus, und skizzieren Sie das Ergebnis. Legen Sie den Würfel wieder in die Ausgangsposition, führen Sie erst B und dann A aus, und skizzieren Sie wieder das Ergebnis.

(b) Beschreiben Sie die Drehungen A und B durch Quaternionen $p, q \in \mathbb{H}$ wie in Satz 1.75.

(c) Welche Quaternionen beschreiben die Verkettungen $A \circ B$ sowie $B \circ A$?

(d) Zeigen Sie, dass $A \circ B$ und $B \circ A$ wieder Drehungen sind, und bestimmen Sie jeweils Drehachse und -winkel. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit (a).

6. Präsenzaufgaben
Lineare Algebra I
im WS 2025/26 bei Prof. Dr. S. Goette

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

(a) Für $p, q \in \mathbb{H}$ gilt $|pq| = |p|\,|q|$.

(b) Für $m, n \in \mathbb{N}$ gelte $m \sim n$ genau dann, wenn 3 die Zahl $m + n$ teilt. Dann ist "$\sim$" eine Äquivalenzrelation.

(c) Die Symmetrien eines gegebenen n-Ecks in der Ebene bilden eine Gruppe.

(d) Die Spiegelungen an den drei Achsen eines gleichseitigen Dreiecks bilden eine Gruppe.

(e) Die Menge $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ bildet eine Gruppe mit der komplexen Multiplikation.

Aufgabe 2

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) Es sei a ein Teiler von n, dann gilt entweder $a = 1$ oder $a = n$.

(b) Es sei n ein Teiler von ab, dann ist n Teiler von a oder von b.

(c) Der Ring $\mathbb{Z}/n$ aus Bsp. 2.9 (siehe Aufgabe 2 von Blatt 3) ist nullteilerfrei, d.h. $[a][b] = 0$ impliziert $[a] = [0]$ oder $[b] = [0]$.

(d) Der Ring $\mathbb{Z}/n$ ist ein Körper.

Hinweise:
Für (a) $\Rightarrow$ (b) benutze die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegungen von a und b.
Für (c) $\Rightarrow$ (d) zeigen Sie zunächst, dass Multiplikation mit $[a] \neq [0]$ injektiv ist.