

7. ÜBUNGSBLATT

LINEARE ALGEBRA I

IM WS 2025/26 BEI PROF. DR. S. GOETTE

Abgabe bis Montag 1.12, 10:15 in den Briefkästen.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie dürfen in Zweiergruppen abgeben.

Aufgabe 1 (2+3+3+2 Punkte)

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper der Charakteristik 2 und $f: K \rightarrow K$ gegeben durch $f(x) = x^2$. Zeigen Sie, dass f die folgenden Eigenschaften hat:

- (a) $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$
- (b) $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- (c) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$
- (d) Aus $f(a) = a$ folgt $a = 0$ oder $a = 1$.

Hinweis: K kann mehr Elemente als nur 0 und 1 enthalten.

Aufgabe 2 (4+6 Punkte)

- (a) Geben Sie die Additions- und Multiplikationstabellen von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ an.
- (b) Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$(i) [3]x + [4] = [0], \quad (ii) x^2 + [2]x + [4] = [0], \quad (iii) [3]x^2 + x + [1] = [0].$$

Aufgabe 3 (8+2 Punkte)

Es sei M eine beliebige Menge mit Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$. Auf $\mathcal{P}(M)$ definiere die symmetrische Differenz durch

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

- (a) Zeigen Sie: $(\mathcal{P}(M), \triangle, \cap)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.
- (b) Bestimmen Sie alle Nullteiler.

Aufgabe 4 (8+2 Punkte)

In einem Schulbuch findet sich die folgende Aufgabe.

Stellen Sie den ggT mit einem Term der Form $r \cdot a + s \cdot b$ dar. Verwenden Sie den erweiterten Euklidischen Algorithmus.

(i) $\text{ggT}(381; 57)$

(ii) $\text{ggT}(846; 81)$

(iii) $\text{ggT}(588; 68)$

(iv) $\text{ggT}(1056; 224)$

(a) Bearbeiten Sie zwei der vier Teilaufgaben.

(b) Erklären Sie jeweils, ob b in \mathbb{Z}/a ein multiplikatives Inverses besitzt, und ob b ein Nullteiler in \mathbb{Z}/a ist.

7. PRÄSENZAUFGABEN

LINEARE ALGEBRA I

IM WS 2025/26 BEI PROF. DR. S. GOETTE

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

- (a) In einem Ring R mit Eins ist jedes Element entweder Nullteiler, oder besitzt ein multiplikatives Inverses.
- (b) Die invertierbaren Elemente in einem Ring mit Eins bilden immer eine Gruppe.
- (c) Wenn $\text{ggT}(a, b) = 1$ gilt, ist $[a]$ im Ring \mathbb{Z}/b invertierbar.

Aufgabe 2

Es seien $a, b, c, p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Wir schreiben $a \mid b$, wenn a Teiler von b ist, das heißt, wenn $n \in \mathbb{N}$ mit $b = an$ existiert. Zeigen Sie:

- (a) Wenn $a \mid b$ und $b \mid a$ gilt, folgt $a = b$.
- (b) Für alle a, b folgt aus $p \mid ab$ entweder $p \mid a$ oder $p \mid b$. Dann folgt aus $c \mid p$ entweder $c = 1$ oder $c = p$.
- (c) Aus $c \mid p$ folgt $c = 1$ oder $c = p$. Dann folgt aus $p \mid ab$ entweder $p \mid a$ oder $p \mid b$.

Hinweis zu (c): betrachten Sie $\text{ggT}(p, a)$.