8. Übungsblatt
Lineare Algebra I
im WS 2025/26 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe bis Montag 8.12, 10:15 in den Briefkästen. Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie dürfen in Zweiergruppen abgeben.

Begründen Sie alle Aussagen. Sie dürfen Behauptungen aus der Aufgabenstellung vorangegangener Teilaufgaben benutzen, auch wenn Sie sie nicht bewiesen haben.

Aufgabe 1 (3+3+4 Punkte)

Sei M ein $\mathbb{Z}$-Modul. Zeigen Sie:

(a) Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to M$ mit $f(1) = m \in M$ existiert genau dann, wenn $m \cdot n = 0 \in M$.

(b) Wenn eine lineare Abbildung $f : \mathbb{Q} \to M$ mit $f(1) = m \in M$ existiert, gibt es für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ein Element $m_n \in M$, so dass $m = m_n \cdot n$.

(c) Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Bestimmen Sie $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z})$ und $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$.

Aufgabe 2 (4+3+3 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum. Seien $U, W \subset V$ zwei Unterräume.

(a) Zeigen Sie: der Durchschnitt $U \cap W$ ist immer ein Unterraum.

(b) Zeigen Sie: die Vereinigung $U \cup W$ ist nicht unbedingt ein Unterraum.

(c) Unter welchen Bedingungen ist die Vereinigung $U \cup W$ ein Unterraum?

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)

Es sei R ein Ring, und M und N seien Rechts-R-Moduln. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{Hom}_R(M, N)$ ist ein unitärer Rechts-$\operatorname{End}_R M$-Modul.

(b) $\operatorname{Hom}_R(M, N)$ ist ein unitärer Links-$\operatorname{End}_R N$-Modul.

Dabei wirken $f \in \operatorname{End}_R M$ und $g \in \operatorname{End}_R N$ auf $h \in \operatorname{Hom}_R(M, N)$ jeweils durch $h \cdot f = h \circ f$ beziehungsweise $g \cdot h = g \circ h$.

Aufgabe 4 (4+6 Punkte)

In einem Schulbuch findet sich sinngemäß folgende Aufgabe.

> Welche dieser Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ ist zusammen mit der für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ definierten Addition und Multiplikation jeweils ein Vektorraum?

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x + y = 0 \right\}$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x + y = 1 \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x + y > 0 \right\}$$

(a) Mit welchem Begriff aus der Vorlesung lässt sich diese Aufgabe am besten bearbeiten? Geben Sie eine kurze Begründung.

Hinweis: Ist es nötig oder sinnvoll, jeweils die Axiome (G1)–(G4) und (M1)–(M4) zu überprüfen?

(b) Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe der in (a) gefundenen Methoden.

8. Präsenzaufgaben

Lineare Algebra I

im WS 2025/26 bei Prof. Dr. S. Goette

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aufgaben sind wahr, welche falsch? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

(a) Jede abelsche Gruppe lässt sich als unitärer $\mathbb{Z}$-Modul auffassen.

(b) Es sei $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Es gibt eine skalare Multiplikation $* : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, so dass $(\mathbb{R}_+, \cdot, *)$ einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.

(c) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und V der Vektorraum der Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$. Für jedes $x \in I$ ist $f \mapsto f(x)$ eine lineare Abbildung $V \to \mathbb{R}$.

(d) Jede Ebene in $\mathbb{R}^3$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie, das heißt, für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gelte

$$\|f(x) - f(y)\| \;=\; \|x - y\|.$$

Wir wollen verstehen, warum f linear ist, wenn ausserdem $f(0) = 0$ gilt.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung: wenn $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ auf einer Geraden liegen, dann liegen auch $f(x), f(y), f(z)$ auf einer Geraden.

(b) Folgern Sie aus (a): wenn $f(0) = 0$ gilt, ist f homogen (L2).

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von Kongruenzüberlegungen, dass f Parallelogramme auf Parallelogramme abbildet.

(d) Folgern Sie aus (c): wenn $f(0) = 0$ gilt, ist f additiv (L1).