9. Übungsblatt
Lineare Algebra I
im WS 2025/26 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe bis Montag 15.12, 10:15 in den Briefkästen. Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie dürfen in Zweiergruppen abgeben.

Begründen Sie alle Aussagen. Sie dürfen Behauptungen aus der Aufgabenstellung vorangegangener Teilaufgaben benutzen, auch wenn Sie sie nicht bewiesen haben.

Aufgabe 1

Es sei $M = \mathbb{R}^3$. Gegeben seien die Unterräume

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 5x \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\}, \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ 3z \end{pmatrix} \middle| \, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimmen Sie die Unterräume

$$W \cap (U + V) \quad \text{und} \quad (W \cap U) + (W \cap V).$$

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)

Seien M und N Rechts-R-Moduln, $F \colon M \to N$ linear. Zeigen Sie:

(a) Wenn $U \subset M$ Untermodul ist, ist $F(U) = \{F(u) \mid u \in U\}$ Untermodul.

(b) Wenn $V \subset N$ Untermodul ist, ist $F^{-1}(V) = \{m \in M \mid F(m) \in V\}$ Untermodul.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie: es gibt eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung

$$F \colon \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

mit $F([x]) = ([x], [x])$ für alle $x \in \mathbb{Z}$.

(b) Zeigen Sie, dass F ein $\mathbb{Z}$-Modul-Isomorphismus ist, wenn m, n teilerfremd sind, und geben Sie die Umkehrabbildung an.

Hinweis: nach Satz 2.18 existieren $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $rm + sn = \operatorname{ggT}(m, n)$.

Aufgabe 4 (6+2+2 Punkte)

In einem Schulbuch findet sich folgende Aufgabe.

> Zeigen Sie: Die Menge aller reellen Zahlenfolgen bildet zusammen mit der Addition $(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n)$ und der Multiplikation $r \,.\, (a_n) := (ra_n)$ einen Vektorraum.

(a) Lösen Sie die Aufgabe.

(b) Es sei V der Vektorraum aus (a). Zeigen Sie, dass $L, R \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$, wobei das i-te Glied von $L(a_n)$ und $R(a_n)$ jeweils gegeben sei durch

$$(L(a_n))(i) = a_{i+1},$$

$$(R(a_n))(i) = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ a_{i-1}, & i \geq 1. \end{cases}$$

(c) Berechnen Sie $L \circ R$, sowie $R \circ L$.

9. PRÄSENZAUFGABEN
LINEARE ALGEBRA I
IM WS 2025/26 BEI PROF. DR. S. GOETTE

Aufgabe 1

Welche Aussagen sind wahr, welche falsch? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

(a) Es sei R ein Ring und $S \subset R$ ein Unterring (d. h., $0 \in S$, und für $s, t \in S$ gilt $s + t \in S$ und $st \in S$). Dann ist R ein Rechts-S-Modul mit $r \,.\, s = rs$.

(b) Der Quotient $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ von $\mathbb{Z}$-Modulen ist ein Ring mit $[a][b] = [ab]$.

(c) Sei $E \subset \mathbb{R}^3$ eine Ebene durch 0 und $G \subset \mathbb{R}^3$ eine Gerade durch 0, dann gilt $\mathbb{R}^3 = E \oplus G$.

(d) Sei $E \subset \mathbb{R}^3$ eine Ebene durch 0, dann existiert genau ein komplementärer Unterraum zu E.

(e) Sei M ein Rechts-R-Modul, dann ist die Abbildung $R \to \operatorname{End}_R(M)$ mit $r \mapsto \mathrm{id}_M \,.\, r$ ein Ringhomomorphismus.

Aufgabe 2

Es seien M, N Rechts-R-Moduln, $f\colon M \to N$ linear, $n \in \mathbb{N}$, $a_i, b_i \in M$ für $i = 1, \dots, n$ und $r \in R$. Beweisen Sie durch Induktion:

(a)

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i,$$

(b)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) . \, r = \sum_{i=1}^{n}(a_i \,.\, r),$$

(c)

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i).$$