Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Giorgio Laguzzi

Universität Freiburg
SS 2018

Übungen zur Elementargeometrie – Blatt 4

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß sich die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks in einem Punkt schneiden, dessen baryzentrische Koordinaten in Bezug auf die drei Ecken des Dreiecks jeweils $(1/3)$ sind, und daß dieser Punkt alle drei Seitenhalbierenden in zwei Stücke teilt, von denen eines doppelt so lang ist wie das Andere. Kür: Rechnen Sie nach, daß dieser Punkt auch der Schwerpunkt des Dreiecks ist, wenn sie es aus Papier ausschneiden. Das braucht aber eher analytische Fertigkeiten.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die baryzentrischen Koordinaten des Punktes $(1, 1, 1)$ in Bezug auf die drei Vektoren der Standardbasis und den Ursprung.

Aufgabe 3. Seien E ein endlichdimensionaler affiner Raum und $H \subset E$ eine Hyperebene und $q \in E \backslash H$ ein Punkt und ζ_q die Zentralprojektion auf H. Gegeben eine Ebene $A \subset E \backslash q$ mit $\vec{A} \not\subset \vec{H}$ zeigen Sie, daß in H die Menge der Fluchtpunkte zu Geraden aus A ihrerseits eine Gerade bildet. Sie heißt der „Horizont" unserer Ebene A.

Aufgabe 4 (**Projektive Vervollständigung affiner Inzidenzebenen**)**.** Eine „projektive Inzidenzebene" ist eine Inzidenzgeometrie derart, daß sich je zwei verschiedene Geraden in genau einem Punkt schneiden und daß es eine Menge von vier Punkten gibt, von denen keine Drei kollinear sind. Man zeige:

1. Das Komplement einer projektiven Gerade in einer projektiven Inzidenzebene wird eine affine Inzidenzebene, wenn man als affine Geraden in unserem Komplement die Schnitte der anderen projektiven Geraden mit besagtem Komplement erklärt;
2. Geht man von einer affinen Inzidenzebene (X, G) aus und bezeichnet mit $\mathbb{S}X$ die Äquivalenzklassen von G unter der Äquivalenzrelation $\|$, so wird
$$\mathbb{V}X := X \sqcup \mathbb{S}X$$
zu einer projektiven Inzidenzebene, indem man zu jedem $g \in G$ die Menge $\bar{g} := g \sqcup [g]$ mit $[g] \in \mathbb{S}X$ der Äquivalenzklasse von g betrachtet und dann die Menge $\bar{G} \subset \mathcal{P}(\mathbb{V}X)$ der projektiven Geraden erklärt als $\bar{G} := \{\bar{g} \mid g \in G\} \sqcup \{\mathbb{S}X\}$;
3. Diese beiden Konstruktionen sind zueinander invers.

Abgabefrist: 29.5.2018, *vor* 14 Uhr, im Logik-Flur (3. Stock) in der Ernst-Zermelo-Straße.