Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Giorgio Laguzzi

Universität Freiburg
SS 2018

Probeklausur zur Elementargeometrie

Aufgabe 1. Man betrachte $\mathbb{R}^3$ als affinen Raum. Bestimmen Sie die baryzentrischen Koordinaten von $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ in Bezug auf $(1,1,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ und $(0,1,1)$.

Aufgabe 2. Gegeben ein affiner Raum E und affine Teilräume $F, G \subset E$ gilt $\vec{F} + \vec{G} = \vec{E} \Rightarrow F \cap G \neq \emptyset$.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Abbildung mit:

$$f(v) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{22}{5} \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass es sich um eine Euklidische Bewegung handelt und beschreiben Sie diese geometrisch. Das heißt, bestimmen Sie Fixpunkt und Drehwinkel für eine Drehung und die invariante Gerade sowie die Größe der Verschiebung entlang der Geraden für eine Gleitspiegelung.

Aufgabe 4. Wieviele Vierecke gibt es in der projektiven Standardinzidenzebene über einem endlichen Körper mit q Elementen? Unter einem Viereck verstehen wir dabei eine Menge von vier Punkte, von denen keine drei kollinear sind. Es komme dabei also nicht auf die Reihenfolge der vier Punkte an.

Aufgabe 5. Gegeben ein zusammenhängender ebener endlich Graph, bei dem an jeder Ecke genau vier Kanten ankommen, zeige man, dass es eine Fläche gibt, die von genau drei Kanten begrenzt wir. *Hinweis: Benutzen Sie die Eulersche Formel $E - K + F = 2$, wobei die unbeschränkte Fläche mitgezählt ist.*

Aufgabe 6. Schreiben Sie die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto 5z + 3$ als Einschränkung einer Verknüpfung von Spiegelungen an verallgemeinerten Kreisen.

Aufgabe 7. Wir projizieren den Würfel mit Ecken (a, b, c) für $a, b, c \in \{1, -1\}$ zentral vom Punkt $(0, 0, 3)$ auf die xy-Ebene. Was sind die Bilder der Ecken? Welche Winkel entstehen zwischen Bildern von Kanten?

Aufgabe 8. Bestimmen Sie die Standardform der reellen Quadrik $5xy + 7x^2 + 13x + 5$. Es ist nicht gefordert, eine Isometrie der Ebene zu bestimmen, unter der unsere Quadrik in ihre Standardform übergeht. *Standardformen sind $ax^2 + by^2 + c$ sowie $ax^2 + by$.*

Aufgabe 9. Gegeben ein $c \in \mathbb{R}$ definieren wir die *c-Moulton Ebene* $\mathbb{M}(c)$ wie folgt: $\mathbb{R}^2$ ist die Menge von Punkte und die Geraden sind der Form $x = a$ (mit $a \in \mathbb{R}$ Konstante) oder $y = m \circ x + b$, für $m, b \in \mathbb{R}$, wobei ist $m \circ x$ definiert durch

$$m \circ x := \begin{cases} mx & \text{wenn } m \leq 0 \text{ oder } x \leq 0 \\ cmx & \text{wenn } m > 0 \text{ and } x > 0. \end{cases}$$

(a) Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist $\mathbb{M}(c)$ eine Inzidenzebene?
(b) Für welche $c, d \in \mathbb{R}$ sind $\mathbb{M}(c)$ und $\mathbb{M}(d)$ isomorph?

Begründen Sie Ihre Antworten.