Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Zahlen

Die Analysis I ist die Lehre von den „Funktionen einer Veränderlichen“. Aus der Schulzeit kennen wir bereits Beispiele wie

$$f(x) = \sin x,$$

und Aussagen wie

$$f'(x) = \cos x.$$

In dieser Vorlesung wollen wir verstehen, was solche Aussagen bedeuten, und wozu sie gut sind. Im obigen Ausdruck „$f(x)$“ ist x eine Variable oder „Veränderliche“, und wir dürfen für x reelle Zahlen einsetzen. Wenn wir das tun, ordnen wir einer reellen Zahl x eine neue reelle Zahl $f(x)$ zu. Später werden wir sehen, dass die Funktion $f(x) = \sin x$ *stetig* und sogar *differenzierbar* ist, und dass ihre *Ableitung* durch $f'(x) = \cos x$ gegeben wird. Dazu müssen wir die drei kursiven Begriffe definieren und gut verstehen — und noch einiges mehr.

In diesem ersten Kapitel legen wir dazu die Grundlagen. Zuerst führen wir Sprechweisen für Mengen, Abbildungen und natürliche Zahlen ein. Danach konstruieren wir ein Modell für die reellen Zahlen. Wir lernen einige wichtige Eigenschaften der reellen Zahlen kennen, die wir später beim Betrachten stetiger und differenzierbarer Funktionen immer wieder ausnutzen werden.

1.1. Mengen

Wenn man möchte, kann man fast die gesamte Mathematik auf das Studium von Mengen und ihren Elementen zurückführen. Das ist aber leider recht mühsam, und man muss sehr sorgfältig sein, um nicht in Widersprüche zu geraten. Wenn Sie wissen möchten, wie das geht, sollten Sie später im Verlauf Ihres Studiums eine Vorlesung über Mengenlehre besuchen. Wir wollen die Mengenlehre als eine Sprache benutzen, in der man sehr elegant über mathematische Sachverhalte sprechen kann. Dazu lernen wir jetzt die ersten Vokabeln und grammatikalischen Regeln.

Georg Cantor hat den Mengenbegriff als erster eingeführt.

„Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unseres Denkens oder unserer Anschauung zu einem Ganzen.“

1.1. Beispiel. Zahlen sind Objekte unserer Anschauung, also ist $\{1,2,3\}$ eine Menge. Die Menge $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ der natürlichen Zahlen lernen wir im Abschnitt 1.3 kennen.

Die „Objekte" in einer Menge heißen *Elemente*. Wenn ein Objekt a in einer Menge M enthalten ist, schreiben wir

$$a \in M,$$

ansonsten $a \notin M$.

1.2. Definition. Zwei Mengen heißen gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.

1.3. Bemerkung. Wenn man Mengen als Aufzählung $M = \{a_1, \dots, a_n\}$ angibt, kann es passieren, dass $a_i = a_j$ für zwei Indizes i und j. Trotzdem ist a_i dadurch nicht „zweimal" in M enthalten. Also zum Beispiel

$$\{1,1,2\} = \{2,1\} = \{1,2\},$$

denn alle drei Mengen enthalten die gleichen Elemente, nämlich 1 und 2. Aber natürlich gilt

$$\{1,2\} \neq \{1,2,3\}.$$

1.4. Beispiel. Besonders wichtig ist die *leere Menge*, die gar kein Element enthält. Wir schreiben

$$\emptyset = \{\,\}.$$

Inzwischen sind auch Mengen „Objekte unseres Denkens oder unserer Anschauung" geworden. Also kann man auch Mengen betrachten, deren Elemente selbst wieder Mengen sind. In der Tat kann man ausgehend von der leeren Menge bereits sehr viele andere Mengen konstruieren, etwa

$$\emptyset = \{\,\}, \qquad \{\emptyset\}, \qquad \{\{\emptyset\},\emptyset\} \qquad \text{usw.}\dots,$$

genug, um alle Objekte dieser Vorlesung zu beschreiben.

Wir stoßen jetzt auf das erste Problem mit Cantors Mengenbegriff.

1.5. Satz (Russellsche Antinomie). *Es gibt keine Menge M, deren Elemente genau diejenigen Mengen sind, die sich nicht selbst enthalten.*

Wir formulieren die Russellsche Antinomie hier wie selbstverständlich als einen *Satz*, also als eine bewiesene mathematische Aussage. Zu ihrer Zeit war die Russellsche Antinomie ein Widerspruch im mathematischen Denkgebäude — so etwas darf es nicht geben, denn aus einem Widerspruch lässt sich alles folgern, man könnte als Mathematiker nicht mehr zwischen „richtig" und „falsch" unterscheiden, und dadurch würde Mathematik als Ganzes bedeutungslos. Man hat einige Zeit gebraucht, um eine handhabbare Version der Mengenlehre zu formulieren, in der aus dem fatalen Widerspruch ein harmloser Satz wird.

Beweis. Würde es eine solche Menge M geben, dann müsste entweder $M \in M$ oder $M \notin M$ gelten. Aber nach Definition von M gilt $M \in M$ genau dann, wenn $M \notin M$, und das ist ein Widerspruch. Also gibt es keine Menge M. □

1.6. Bemerkung. Wir haben gerade unseren ersten *indirekten Beweis* kennengelernt. Bei einem indirekten Beweis nimmt man an, dass die Aussage, die man beweisen möchte, falsch ist, und leitet daraus einen Widerspruch her. Manchmal ist das die einfachste Weise, einen Satz zu beweisen. Der Nachteil ist aber, dass man — wie im obigen Beweis — nicht auf Anhieb versteht, warum der Satz gilt. Wenn möglich, wollen wir daher indirekte Beweise vermeiden.

Zurück zu Cantors Mengenbegriff und zur Russellschen Antinomie. Wir sehen, dass nicht jede „Zusammenfassung von Objekten unseres Denkens und unserer Anschauung“ eine Menge sein kann. Wir werden daher die Existenz einiger nützlicher Mengen annehmen, und wir werden einige Konstruktionen angeben, die neue Mengen aus alten erzeugen. Die gesamte Mathematik basiert auf der Annahme, dass man das ohne Widersprüche machen kann — aber aus prinzipiellen Gründen lässt sich die Widerspruchsfreiheit der Mengenlehre nicht beweisen.

1.7. Definition. Seien M und N Mengen, dann heißt M eine *Teilmenge* von N, wenn alle Elemente a von M auch in N enthalten sind. Dafür schreiben wir

$$M \subset N \; .$$

1.8. Bemerkung. (1) Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge M.
(2) Es gilt $\{x\} \subset M$ genau dann, wenn $x \in M$.
(3) Es gilt immer $M \subset M$.
(4) Wenn $M \subset N$ und $M \neq N$ gilt, heißt M auch *echte Teilmenge* von N.

In den meisten Mathebüchern wird das Symbol „$\subset$“ so verwendet wie hier. Es gibt zwar eine internationale Norm, nach der nur echte Teilmengen mit „$\subset$“ bezeichnet werden sollen, aber in der Mathematik benötigt man das Symbol für beliebige Teilmengen weitaus häufiger, und schreibt daher „$\subset$“. Für echte Teilmengen verwenden wir das Symbol „$\subsetneqq$“. Falls Sie ein Mathebuch zur Hand nehmen, in dem das Symbol „$\subset$“ vorkommt, sollten Sie zur Sicherheit trotzdem herausfinden, ob der Autor damit beliebige oder nur echte Teilmengen bezeichnet. Genauso vorsichtig sollten Sie eigentlich mit allen Definitionen und Bezeichnungen verfahren.

Kommen wir jetzt zur Konstruktion neuer Mengen aus alten.

1.9. Definition. Seien M und N Mengen.

(1) Der *Durchschnitt* $M \cap N$ enthält genau die Elemente, die sowohl in M als auch in N enthalten sind.
(2) Die *Vereinigung* $M \cup N$ enthält genau die Elemente, die in M oder in N enthalten sind.
(3) Wenn $M \cap N = \emptyset$ gilt, heissen M und N *disjunkt*, und $M \cup N$ ist eine *disjunkte Vereinigung*. Um zu zeigen, dass eine Vereinigung disjunkt ist, schreiben wir $M \dot\cup N$.
(4) Die (*Mengen-*) *Differenz* $N \setminus M$ enthält genau die Elemente, die in N, aber nicht in M enthalten sind. Ist M Teilmenge von N, so nennt man $N \setminus M$ auch das *Komplement* von M in N.

(5) Das *kartesische Produkt* $M \times N$ besteht aus allen Paaren (x, y) von Elementen $x \in M$ und $y \in N$. Für das Produkt einer Menge M mit sich selbst schreibt man auch $M^2 = M \times M$.

Für den Anfang reichen uns diese Konstruktionen. Später werden wir auch Vereinigungen und Durchschnitte beliebig vieler Mengen benötigen.

Insbesondere sind $M \cap N$, $M \cup N$, $N \backslash M$ und $M \times N$ auch wieder Mengen (Bild: Ven-Diagramme).

1.10. Bemerkung. Die Notation (x, y) bezeichnet ein (geordnetes) *Paar*, allgemeiner bezeichnet $(x_1, \dots, x_n)$ ein *n-Tupel*. Hierbei kommt es auf die Reihenfolge der Einträge (nicht „Elemente"!) an, und ein und derselbe Eintrag kann mehrfach auftreten. Zum Beispiel:

$$(1, 1) \in \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\}$$

und

$$(1, 2) \neq (2, 1) \neq (2, 1, 1).$$

1.11. Definition. Die Menge aller Teilmengen von M heißt *Potenzmenge* $\mathcal{P}(M)$. Auch die Potenzmenge einer Menge ist wieder eine Menge.

1.12. Beispiel. Sei $M = \{1, 2\}$, dann gilt

$$\mathcal{P}(M) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\big\}.$$

Es sei M eine Menge. Man betrachtet oft die Teilmenge aller Elemente z von M, die eine bestimmte Eigenschaft E haben, und schreibt dafür

$$\{z \in M \mid z \text{ hat die Eigenschaft } E\}.$$

Das ist dann wieder eine Menge.

1.13. Beispiel. Die folgenden Beispiele verstehen wir später etwas besser.

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 1 = 0\} = \left\{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right\}, \\ &[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \text{ und } x \leq b\}. \end{aligned}$$

Wenn die Grundmenge klar ist, lässt man sie manchmal in der Notation weg. Anstelle von

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \text{ Es gibt } y \in \mathbb{R} \text{ mit } x = y^2 + y - 1\}$$

schreibt man auch kurz

$$\{y^2 + y - 1 \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Diese Abkürzungen sollten Sie aber nur verwenden, wenn Sie genau wissen, warum es wichtig ist, die Grundmenge anzugeben.

1.14. Folgerung. *(aus der Russellschen Antinomie 1.5). Die Gesamtheit aller Mengen ist keine Menge.*

Beweis. Wäre die Gesamtheit aller Mengen selbst eine Menge N, dann wäre auch
$$M = \{ X \in N \mid X \notin X \}$$
wieder eine Menge, was nach 1.5 aber nicht sein kann. □

Wir wollen nun einige wichtige Regeln für das Rechnen mit Mengen kennenlernen.

1.15. Proposition. *Seien M und N Mengen, dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent.*

(1) $M \subset N$,
(2) $M \cap N = M$,
(3) $M \cup N = N$.

Eine *Proposition* ist — ähnlich wie ein Satz — eine bewiesene mathematische Aussage. „Bewiesen“ heißt, es gibt einen *Beweis*, der die Aussage aus zugrundeliegenden Annahmen, den *Axiomen* und anderen bereits bewiesenen Aussagen folgert. Zwei oder mehr Aussagen heissen *äquivalent*, wenn jede von ihnen genau dann richtig ist, wenn auch die anderen Aussagen richtig sind.

Beweis. Übung. Dabei reicht es, zu zeigen:
$$(1) \Longrightarrow (2)\ , \qquad (2) \Longrightarrow (3)\ , \qquad \text{und} \qquad (3) \Longrightarrow (1)\ .$$
Dadurch lässt sich etwas Arbeit einsparen. □

1.16. Proposition. *Es seien X, Y, Z Mengen, dann gelten*

(1) *Assoziativgesetze:*
$$\begin{aligned} X \cup (Y \cup Z) &= (X \cup Y) \cup Z\ , \\ X \cap (Y \cap Z) &= (X \cap Y) \cap Z\ , \end{aligned}$$
(2) *Kommutativgesetze:*
$$\begin{aligned} X \cup Y &= Y \cup X\ , \\ X \cap Y &= Y \cap X\ , \end{aligned}$$
(3) *Idempotenzgesetze:*
$$\begin{aligned} X \cup X &= X\ , \\ X \cap X &= X\ , \end{aligned}$$
(4) *Distributivgesetze:*
$$\begin{aligned} X \cap (Y \cup Z) &= (X \cap Y) \cup (X \cap Z)\ , \\ X \cup (Y \cap Z) &= (X \cup Y) \cap (X \cup Z)\ , \end{aligned}$$
(5) *De Morgansche Regeln:*
$$\begin{aligned} X \setminus (Y \cup Z) &= (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)\ , \\ X \setminus (Y \cap Z) &= (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)\ , \end{aligned}$$

(6) *Absorptionsgesetze:*

$$\begin{aligned} X \cup (X \cap Y) &= X \,, \\ X \cap (X \cup Y) &= X \,. \end{aligned}$$

Beweis. Exemplarisch geben wir nun die Beweise für zwei Rechenregeln an.

Zur Kommutativität der Vereinigung betrachten wir Definition 1.9, (2). Wenn wir dort die Rollen von M und N vertauschen, erhalten wir die gleiche Menge $M \cup N = N \cup M$.

Die Assoziativität der Vereinigung beweisen wir durch Fallunterscheidung. Jedes Objekt a kann in X liegen oder nicht, genauso in Y oder in Z. Wir erhalten acht Fälle, die wir in einer Tabelle zusammenfassen. Dabei heißt „w“, dass eine Aussage wahr ist, und „f“, dass sie falsch ist.

$a \in X$	$a \in Y$	$a \in Z$	$a \in Y \cup Z$	$a \in X \cup (Y \cup Z)$
f	f	f	f	f
f	f	w	w	w
f	w	f	w	w
f	w	w	w	w
w	f	f	f	w
w	f	w	w	w
w	w	f	w	w
w	w	w	w	w

Der Vergleich mit einer entsprechenden Tabelle für $a \in X \cup Y$ und $a \in (X \cup Y) \cup Z$ zeigt, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:

(1) $a \in X$ oder $a \in Y$ oder $a \in Z$,
(2) $a \in X \cup (Y \cup Z)$,
(3) $a \in (X \cup Y) \cup Z$.

Nach Definition 1.2 folgt

$$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z.$$

Die anderen Aussagen lassen wir als Übung. □

Wir haben letztlich alle Aussagen über Mengen in dieser Proposition zurückgeführt auf Eigenschaften der elementaren logischen Verknüpfungen „und“ und „oder“.

1.17. Bemerkung. Sei M eine Menge, und seien $X, Y, Z \subset M$. Nach Definition 1.11 können wir genausogut X, Y, $Z \in \mathcal{P}(M)$ schreiben. Zu den Rechenregeln aus Proposition 1.16 hinzu kommen einige weitere einfache Regeln:

(7) *Neutrale Elemente:*

$$\emptyset \cup X = X \qquad M \cap X = X$$

(8) *Extremalität:*

$$M \cup X = M \qquad \emptyset \cap X = \emptyset$$

Man beachte, dass zu allen Regeln eine entsprechende Regel existiert, in der „$\cup$“ und „$\cap$“ sowie „$\emptyset$“ und „M“ vertauscht sind.

Die Menge $\mathcal{P}(M)$ bildet mit „$\cup$“, „$\cap$“, „$\emptyset$“ und „M“ eine *Boolesche Algebra.* Die Konstruktion binärer Computerchips basiert auf den Regeln der Booleschen Algebren, und somit auf der Mengenlehre und der elementaren Logik.

1.2. Abbildungen

1.18. Definition. Es seien M und N Mengen. Eine *Abbildung* $F\colon M \to N$ (lies „F von M nach N“) ordnet jedem Element $x \in M$ ein Element $F(x) \in N$ zu.

Formal fassen wir F als Tripel $(M, N, \Gamma(F))$ auf. Hierbei ist $\Gamma(F) \subset M \times N$ der *Graph* von F. Wir fordern, dass zu jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ mit $(x, y) \in \Gamma(F)$ existiert, und setzen $F(x) = y$.

1.19. Definition. Es sei $F\colon M \to N$ eine Abbildung. Dann heißt M der *Definitionsbereich* von M und N der *Wertebereich.* Die Menge aller Abbildungen von M nach N wird mit $\mathrm{Abb}(M, N)$ bezeichnet .

Zwei Abbildungen sind gleich, wenn sie den gleichen Definitions- und den gleichen Wertebereich haben, und jedem Element des Definitionsbereichs jeweils dasselbe Element des Bildbereichs zuordnen.

1.20. Definition. Es sei $F\colon M \to N$ eine Abbildung. Dann heißt die Teilmenge

$$\operatorname{im} F = \{\, y \in N \mid \text{ Es gibt } x \in M \text{ mit } F(x) = y \,\} = \{\, F(x) \mid x \in M \,\}$$

das *Bild* von F.

Sei $V \subset N$ eine Teilmenge, dann heißt

$$F^{-1}(V) = \{\, x \in M \mid F(x) \in V \,\}$$

das *Urbild* von V unter F.

Für das Urbild der einelementigen Menge $\{y\}$ schreibt man manchmal kurz $F^{-1}(y)$ statt $F^{-1}(\{y\})$. Da das zu Missverständnissen führen kann, bleiben wir erst einmal bei $F^{-1}(\{y\})$.

1.21. Definition. Eine Abbildung $F\colon M \to N$ heißt

(1) *injektiv*, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ aus $F(x_1) = F(x_2)$ schon $x_1 = x_2$ folgt,
(2) *surjektiv*, wenn für alle $y \in N$ ein $x \in M$ existiert mit $F(x) = y$, und
(3) *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

1.22. Beispiel. (1) Für alle Mengen M ist die Abbildung $\mathrm{id}_M\colon M \to M$ mit $\mathrm{id}_M(x) = x$ definiert. Sie heißt die *Identität* und ist stets bijektiv.

(2) Die Abbildung $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv, denn
$$F(-2) = F(2) = 4 \qquad \text{und} \qquad -1 \notin \operatorname{im}(F).$$

(3) Die Abbildung $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $F(x) = x^2$ ist injektiv. Die Abbildung $G\colon \mathbb{N} \to \{\, x^2 \mid x \in \mathbb{N} \,\}$ mit $G(x) = x^2$ ist bijektiv. Diese Abbildungen sind verschieden, da sie andere Wertebereiche haben.

Trotzdem werden wir später manchmal beide Abbildungen mit dem gleichen Symbol bezeichnen.

1.23. Definition. Seien L, M, N Mengen und $F\colon M \to N$, $G\colon L \to M$ Abbildungen. Die *Verkettung* $F \circ G\colon L \to N$ (lies „F nach G“) ist die durch
$$(F \circ G)(x) = F(G(x))$$
definierte Abbildung.

1.24. Bemerkung. Sei $F\colon M \to N$ eine Abbildung, und sei $U \subset M$ eine Teilmenge. Die Abbildung $G\colon U \to M$ mit $G(x) = x$ für alle $x \in U$ heißt *Inklusion*. Sie ist stets injektiv. Die Verkettung
$$F|_U = F \circ G\colon U \to N$$
(lies „F eingeschränkt auf U“) heißt *Einschränkung* von F auf U.

1.25. Bemerkung. Die Buchstaben in „$F \circ G$“ scheinen „falsch herum“ zu stehen, denn die Abbildungen verlaufen von links nach rechts geschrieben so:
$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{G} & M & \xrightarrow{F} & N \\[1ex] x & \longmapsto & G(x) & \longmapsto & F(G(x)) \end{array}$$
Aber in „$(F \circ G)(x) = F(G(x))$“ stimmt die Reihenfolge wieder. Beispielsweise seien $F, G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$F(x) = x^2 \qquad \text{und} \qquad G(x) = x + 1\ ,$$
dann ist
$$(F \circ G)(x) = (x+1)^2 \quad \text{und} \quad (G \circ F) = x^2 + 1\ .$$
Insbesondere gilt $G \circ F \neq F \circ G$.

1.26. Satz. *Seien L, M, N Mengen und $F, F'\colon M \to N$, $G, G'\colon L \to M$ Abbildungen. Dann gilt*

(1) *Sind F, G injektiv, so ist auch $F \circ G$ injektiv.*
(2) *Sind F, G surjektiv, so ist auch $F \circ G$ surjektiv.*
(3) *Sind F, G bijektiv, so ist auch $F \circ G$ bijektiv.*
(4) *Ist $F \circ G$ injektiv, so auch G.*
(5) *Ist $F \circ G$ surjektiv, so auch F.*
(6) *Ist F injektiv, so folgt aus $F \circ G = F \circ G'$ bereits $G = G'$.*
(7) *Ist G surjektiv, so folgt aus $F \circ G = F' \circ G$ bereits $F = F'$.*

Hierbei bezeichnen F' und G' beliebige Abbildungen und nicht die „Ableitungen“ von F und G.

Beweis. Zu (1) seien $x, y \in L$. Aus $(F \circ G)(x) = (F \circ G)(y)$ folgt $F(G(x)) = F(G(y))$, also $G(x) = G(y)$ wegen Injektivität von F, also $x = y$ wegen Injektivität von G, also ist $F \circ G$ ebenfalls injektiv.

Der Beweis von (2) verläuft ähnlich wie (1), und (3) folgt sofort aus (1) und (2). Der Beweis von (4), (5) bleibt als Übung. Aussage (6) folgt ähnlich wie (7).

Zu (7) sei $y \in M$. Wegen Surjektivität von G existiert $x \in L$ mit $G(x) = y$. Aus $F \circ G = F' \circ G$ folgt

$$F(y) = (F \circ G)(x) = (F' \circ G)(x) = F'(y).$$

Da das für alle $y \in M$ gilt, folgt $F = F'$. $\square$

1.27. Satz. *Sei $F: M \to N$ bijektiv. Dann existiert genau eine Abbildung $G: N \to M$ mit $G \circ F = \mathrm{id}_M$ und $F \circ G = \mathrm{id}_N$.*

1.28. Definition. Die Abbildung G aus Satz 1.27 heißt die *Umkehrabbildung* von F.

Die Umkehrabbildung von F wird manchmal mit F^{-1} bezeichnet. Auch das kann zu Missverständnissen führen, so dass wir auf diese Bezeichnung verzichten wollen.

Beweis von Satz 1.27. Wir müssen zeigen, dass G *existiert*, und dass G *eindeutig* ist.

Zur Existenz betrachte die Menge

$$X = \{(F(x), x) \mid x \in M\} \subset N \times M.$$

Zu jedem $y \in N$ existiert genau ein $x \in M$ mit $F(x) = y$, also mit $(x, y) \in \Gamma(F)$, also auch mit $(y, x) \in X$. Also ist X der Graph einer Funktion $G: N \to M$.

Für alle $x \in M$ ist $(F(x), x) \in X = \Gamma(G)$, also $G(F(x)) = x$, und somit $G \circ F = \mathrm{id}_M$. Umgekehrt sei $y \in N$, und sei $x \in M$ das eindeutige Element mit $F(x) = y$, also $G(y) = x$ und $F(G(y)) = F(x) = y$. Somit gilt auch $F \circ G = \mathrm{id}_N$. Also existiert eine Umkehrfunktion, nämlich G.

Zur Eindeutigkeit von G nehmen wir an, dass $H: N \to M$ eine weitere Umkehrfunktion ist. Zu $y \in N$ sei $x \in M$ wieder das eindeutige Element mit $F(x) = y$. Aus $H \circ F = \mathrm{id}_M$ folgt $H(F(x)) = x$, also $H(y) = x = G(y)$. Da das für alle $y \in N$ gilt, stimmen H und G auf allen Elementen von N überein, sind also gleich. $\square$

1.29. Definition. Zwei Mengen M und N heissen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $F: M \to N$ gibt.

1.30. Bemerkung. Gleichmächtige Mengen haben „gleich viele“ Elemente. Für alle Mengen L, M und N gilt (Übung):

(1) M ist gleichmächtig zu M;
(2) N ist genau dann gleichmächtig zu M, wenn M zu N gleichmächtig ist;
(3) sind L zu M und M zu N gleichmächtig, so ist auch L zu N gleichmächtig.

Das heißt, Gleichmächtigkeit verhält sich wie eine Äquivalenzrelation. Allerdings sollte eine Relation immer auf einer Menge definiert sein, und die Menge aller Mengen gibt es nach Folgerung 1.14 nicht.

1.31. Beispiel. (1) Die Mengen $M = \{1, 2, 3\}$ und $N = \{4, 7, 15\}$ sind gleichmächtig. Definiere z.B. $F \colon M \to N$ durch

$$F(1) = 7, \quad F(2) = 4, \quad F(3) = 15.$$

(2) Sei $M = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$ die Menge der Quadratzahlen. Da $F \colon \mathbb{N} \to M$ mit $F(n) = n^2$ bijektiv ist, sind M und $\mathbb{N}$ gleichmächtig, obwohl M eine echte Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist.

1.3. Natürliche Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind uns bereits seit unserer Kindheit vertraut — wir benutzen sie zum Zählen. Für den Fall, dass es nichts zu zählen gibt, haben wir die Zahl 0. Es ist erstaunlich, dass die Zahl 0 selbst erst spät als eigenständige Zahl eingeführt wurde.

Wir wollen natürliche Zahlen $0, 1, 2, \dots$ konstruieren, indem wir Mengen $\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \dots$ einführen, die entsprechend viele Elemente haben. Dazu setzen wir $\underline{0} = \emptyset$ und

$$\underline{n} = \{\underline{0}, \dots, \underline{n-1}\} = \underline{n-1} \cup \{\underline{n-1}\}.$$

Diese Definition ist *rekursiv*, das heißt, man muss alle Zahlen bis $\underline{n-1}$ kennen, um $\underline{n}$ zu konstruieren.

1.32. Beispiel. Die ersten „Zahlen" sehen so aus:

$$\begin{aligned}
\underline{0} &= \emptyset \\
\underline{1} &= \{\underline{0}\} = \{\emptyset\} \\
\underline{2} &= \{\underline{0}, \underline{1}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
\underline{3} &= \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}
\end{aligned}$$

Auf diese Weise erhalten wir alle Zahlen mit elementaren Konstruktionen aus der leeren Menge.

1.33. Bemerkung. Seien m, n natürliche Zahlen, dann sind die Mengen $\underline{m}$ und $\underline{n}$ genau dann gleichmächtig, wenn $m = n$ gilt. Insbesondere $\underline{m} \neq \underline{n}$ falls $m \neq n$.

1.34. Definition. Eine Menge M heißt *endlich*, wenn sie zu einer Menge $\underline{n}$ gleichmächtig ist. In diesem Fall heißt die Zahl n die *Mächtigkeit* von M, geschrieben $n = \#M$. Ansonsten heißt M *unendlich*.

1.35. Bemerkung. (1) Wegen Bemerkung 1.33 und Bemerkung 1.30 kann jede Menge M zu höchstens einer Menge $\underline{n}$ gleichmächtig sein. Die Schreibweise $\#M$ für endliche Mengen ist also sinnvoll.

(2) Endliche Mengen kann man immer als Aufzählung angeben. Sei etwa $F\colon \underline{n} \to M$ bijektiv, dann schreibe
$$M = \{F(0), \dots, F(n-1)\}$$
Ist M umgekehrt als $\{x_1, \dots, x_n\}$ gegeben, dann hat M höchstens n Elemente, ist also endlich.

(3) Für unendliche Mengen M führen wir die Schreibweise „$\#M = \infty$“ nicht ein, da nicht alle unendlichen Mengen gleichmächtig sind, siehe Aufgabe 4 vom Übungsblatt I.1.

1.36. Definition. Es sei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ die Menge natürlicher Zahlen

1.37. Bemerkung. (1) Aus unserer naiven Mengenlehre folgt nicht, dass $\mathbb{N}$ eine Menge ist — das ist ein Axiom, also eine Grundannahme.

(2) Wir betrachten ab jetzt die Zahlen $0, 1, 2, \dots$; die Mengen $\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \dots$ werden wir nur noch in Ausnahmefällen brauchen. Aber auch $\underline{\mathbb{N}} = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \dots\}$ ist nicht automatisch eine Menge — auch die Existenz dieser Menge ist ein Axiom.

Wir führen jetzt die Grundrechenarten auf $\mathbb{N}$ ein. Hierbei handelt es sich um *Verknüpfungen*, das heißt, um Abbildungen $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, etwa
$$+\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad +(m, n) = m + n.$$
Wir definieren sie rekursiv, hierzu brauchen wir nur die Nachfolger-Abbildung $+1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die $n \in \mathbb{N}$ auf $n + 1$ (bzw. $\underline{n} \in \underline{\mathbb{N}}$ auf $\underline{n+1} = \underline{n} \cup \{\underline{n}\}$) abbildet.

1.38. Definition. Die *Addition, Multiplikation* und *Potenzierung* sind für m, $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$m + 0 = m \quad \text{und} \quad m + (n+1) = (m+n) + 1\,, \tag{1}$$
$$m \cdot 0 = 0 \quad \text{und} \quad m \cdot (n+1) = m \cdot n + m\,, \tag{2}$$
$$m^0 = 1 \quad \text{und} \quad m^{(n+1)} = m^n \cdot m\,. \tag{3}$$

Beispiel. Zwei einfache Rechnungen:
$$3 + 2 = (3+1) + 1 = ((3+0)+1) + 1 = 4 + 1 = 5\,,$$
$$3 \cdot 2 = (3 \cdot 1) + 3 = ((3 \cdot 0) + 3) + 3 = \dots = 6\,.$$

1.39. Bemerkung. Seien M, N endliche Mengen.

(1) Falls $M \cap N = \emptyset$ ist, gilt $\#(M \dot{\cup} N) = \#M + \#N$.
(2) Es gilt $\#(M \times N) = \#M \cdot \#N$.
(3) Es gilt $\#\mathrm{Abb}(N, M) = \#M^{\#N}$.

Die Grundrechenarten hätten wir auch über diese Eigenschaften definieren können.

Bevor wir das Assoziativgesetz kennenlernen, überlegen wir uns, was „Klammern“ eigentlich bewirken. Fassen wir $+\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ als Abbildung auf, dann bedeutet $(\ell + m) + n$ gerade $+(+(\ell, m), n)$, $\ell + (m + n)$ bedeutet $+(\ell, +(m, n))$.

1.40. Satz. *Für $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ gelten die Rechenregeln*

(1) Assoziativgesetze
$$(\ell + m) + n = \ell + (m + n)$$
$$(\ell \cdot m) \cdot n = \ell \cdot (m \cdot n)$$

(2) Neutrale Elemente
$$n + 0 = n$$
$$n \cdot 1 = n$$

(3) Kommutativgesetze
$$n + m = m + n$$
$$n \cdot m = m \cdot n$$

(4) Distributivgesetz
$$\ell \cdot (m + n) = \ell \cdot m + \ell \cdot n$$

(5) Kürzungsregeln
$$\begin{aligned} \ell + n = m + n \qquad &\Longrightarrow \qquad \ell = m \\ \ell \cdot n = m \cdot n \qquad &\Longrightarrow \qquad \ell = m \textit{ oder } n = 0 \;. \end{aligned}$$

Die Aussagen (1) – (3) besagen, dass $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{N}, \cdot)$ jeweils *abelsche* (das heißt *kommutative*) *Halbgruppen* sind.

Beweis. Die Aussagen (2) folgen leicht aus Definition 1.38. Alle anderen lassen sich durch vollständige Induktion beweisen. Der Beweis von (5) ist Übung. □

In der Analysis muss man oft Zahlen vergleichen. Dazu benötigen wir den Begriff der Anordnung. Eine Anordnung einer Menge M ist eine *Relation*, das heißt eine Teilmenge $R \subset M \times M$, die einige zusätzliche Eigenschaften besitzt. Wir sagen „es gilt xRy“ für $x, y \in M$, wenn $(x, y) \in R$.

1.41. Definition. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, dann gilt m *kleiner oder gleich* n, kurz $m \le n$, genau dann, wenn es ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $m + \ell = n$ gibt. Es ist m *kleiner als* n, kurz $m < n$, wenn $m \le n$ und $m \ne n$ gilt.

1.42. Bemerkung. Etwas einfacher geht es mit Mengen:
$$\begin{aligned} m \le n \quad &\Longleftrightarrow \quad \underline{m} \subset \underline{n}\;, \\ m < n \quad &\Longleftrightarrow \quad (\underline{m} \subset \underline{n} \text{ und } \underline{m} \ne \underline{n}) \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{m} \in \underline{n}\;. \end{aligned}$$

Diese Äquivalenzen lassen sich ebenfalls beweisen, was aber nicht ganz einfach ist.

Man beachte den Unterschied in der Notation. Bei „$\subset$" ist Gleichheit erlaubt, bei „$<$" jedoch ausgeschlossen.

1.43. Definition. Eine Relation R auf eine Menge M heißt *Halbordnung*, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt:

(1) *Reflexivität:* xRx,
(2) *Antisymmetrie:* Aus xRy und yRx folgt $x = y$,
(3) *Transitivität:* Aus xRy und yRz folgt xRz.

Eine Halbordnung heißt *Ordnung*, wenn ausserdem für alle $x, y \in M$ gilt:

(4) *Totalität:* Es gilt xRy oder yRx.

Die Eigenschaften (1)–(4) heißen auch *Ordnungsaxiome.*

1.44. Beispiel. (1) Sei M eine Menge, dann definiert „$\subset$" eine Halbordnung auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$.
(2) Die Relation „$\in$" (oder auch „$\in$ oder $=$") ist im Allgemeinen keine Halbordnung, denn es gilt zum Beispiel $a \in \{a, b\}$ und $\{a, b\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\}$, aber nicht $a \in \{\{a\}, \{a, b\}\}$.
(3) Die Anordnung „$\leq$" der natürlichen Zahlen ist eine Ordnung, denn für alle $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{gathered} n \leq n, \\ m \leq n \text{ und } n \leq m \Longrightarrow m = n, \\ \ell \leq m \text{ und } m \leq n \Longrightarrow \ell \leq n, \\ m \leq n \text{ oder } n \leq m. \end{gathered}$$

Auch hier lassen wir den Beweis aus.

Zuletzt betrachten wir die vollständige Induktion — ein Beweisverfahren für Sätze über natürliche Zahlen, das gleichzeitig viel über die Struktur der Menge $\mathbb{N}$ aussagt. Als Beispiel beweisen wir ein einfaches Resultat.

1.45. Proposition. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$0 + 1 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Beweis. *Induktionsanfang*: Für $n = 0$ gilt

$$0 + 1 + \cdots + n = 0 = \frac{0\,(0+1)}{2} = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Induktionsschritt: Die Aussage in der Proposition gelte für $n - 1$. Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 + 1 + \cdots + n = (0 + 1 + \cdots + (n-1)) + n &= \frac{(n-1)\,n}{2} + n \\ &= \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n\,(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Also gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung. Wenn man diesen Satz ohne Induktion beweist, geht es einfacher, und man versteht sofort, warum die Aussage gilt:

$$\begin{aligned} & 2\cdot(0+1+\dots+n)=(0+1+\dots+n)+(n+(n-1)+\dots+0) \\ = \quad & \underbrace{n+\dots+n}_{(n+1)\text{ Summanden}} \quad = n\,(n+1). \end{aligned}$$

Wenn man eine Aussage ohne vollständig Induktion beweisen kann, sollte man das tun, falls der Beweis dadurch verständlicher wird.

Wir haben in Definition 1.38 die Grundrechenarten rekursiv eingeführt. Hier ein weiteres Beipiel für eine rekursive Definition.

1.46. Definition. Die *Fakultät* ist eine Abbildung $!\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, die durch

$$0!=1 \qquad \text{und} \qquad n!=(n-1)!\cdot n$$

definiert ist.

Wir könnten auch $n!=1\dots n$ schreiben, aber die Punkte „$\dots$“ sind kein eindeutig definiertes Symbol — trotzdem sind sie manchmal hilfreich, siehe Proposition 1.45. Um zu verstehen, was die Fakultät bedeutet, benutzen wir wieder vollständige Induktion.

1.47. Proposition. *Sei M eine endliche Menge der Mächtigkeit $n=\#M$. Dann gibt es genau $n!$ bijektive Abbildungen von $\underline{n}$ nach M.*

Also gibt es $n!$ Möglichkeiten, M in der Form $\{x_0,\dots,x_{n-1}\}$ darzustellen. Überträgt man die Ordnung von $\underline{n}$ (durch „$\le$“ oder „$\subset$“, siehe Bemerkung 1.42) auf M, so dass $x_0\le x_1\le\dots\le x_{n-1}$, dann sieht man, dass es genau $n!$ Möglichkeiten gibt, die Menge M anzuordnen.

Beweis. *Induktionsanfang.* Sei $n=0$, also $M=n=\emptyset$, dann gibt es genau eine Abbildung $F\colon\emptyset\to\emptyset$ mit Graph $\Gamma(F)=\emptyset\subset\emptyset\times\emptyset=\emptyset$, und diese ist bijektiv. Ausserdem ist $0!=1$.

Induktionsschritt. Es sei $F\colon\underline{n}\to M$ bijektiv. Da $x:=F(\underline{n-1})$ eines der n Elemente von M ist, können wir n verschiedene Fälle unterscheiden. In jedem einzelnen Fall ist $F|_{\underline{n-1}}\colon \underline{n-1}\to M\setminus\{x\}$ wieder bijektiv, insbesondere gilt $\#(M\setminus\{x\})=n-1$. Wenn unsere Aussage für Mengen der Mächtigkeit $n-1$ bereits bewiesen ist, gibt es in jedem der n Fälle genau $(n-1)!$ mögliche bijektive Abbildungen von $\underline{n-1}$ nach $M\setminus\{x\}$. Insgesamt erhalten wir also $n\cdot(n-1)!=n!$ verschiedene Bijektionen von $\underline{n}$ nach M.

Somit gilt unsere Aussage für alle endlichen Mengen M. $\square$

Wie funktioniert vollständige Induktion?

Wir erinnern uns, dass wir alle natürlichen Zahlen $n\in\mathbb{N}$ (oder alle Mengen der Form $\underline{n}\in\underline{\mathbb{N}}$) erhalten, indem wir

(1) mit 0 (bzw. $\emptyset$) starten, und

(2) zu jeder konstruierten Zahl n den *Nachfolger* $n+1$ (bzw. zu jeder bereits konstruierten Menge $\underline{n}$ den Nachfolger $\underline{n+1} = \underline{n} \cup \{\underline{n}\}$) bilden.

Also gibt es eine Abbildung „Nachfolger“ von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, die n auf $n+1$ abbildet.

Wir nehmen — wie in Bemerkung 1.37 gesagt — an, dass alle diese Zahlen eine Menge $\mathbb{N}$ bilden (bzw. alle $\underline{n}$ eine Menge $\underline{\mathbb{N}}$). Wir fassen das zusammen.

1.48. Annahme (Peano-Axiome). *Es gibt eine Menge $\mathbb{N}$, so dass gilt:*

(1) $0 \in \mathbb{N}$*, und die Nachfolger-Abbildung von* $\mathbb{N}$ *nach* $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ *ist bijektiv.*
(2) *Sei $M \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit $0 \in M$, so dass für alle $m \in M$ auch $m+1 \in M$ gilt, dann ist bereits $M = \mathbb{N}$.*

Wir nehmen sogar an, dass $\mathbb{N}$ nur die Zahlen $0, 1, 2, \dots$ und keine weiteren Elemente enthält — warum das nicht aus obiger Annahme folgt, lernen Sie erst in einer Vorlesung über Logik oder Modelltheorie.

Mit Hilfe der Annahme 1.48 können wir nun verstehen, wieso man Beweise durch vollständige Induktion führen kann.

1.49. Satz (Prinzip der *vollständigen Induktion*). *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Wenn gilt*

(1) *$A(0)$ ist wahr, und*
(2) *aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,*

dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Beweis. Betrachte

$$M = \{\, n \in \mathbb{N} \mid \text{die Aussage } A(n) \text{ ist wahr} \,\}.$$

Nach unseren Annahmen in Abschnitt 1.1 ist das wieder eine Menge, also $M \subset \mathbb{N}$. Aus den Voraussetzungen folgt

(1) $0 \in M$, und
(2) für alle $n \in M$ gilt $n+1 \in M$.

Aus den Peano-Axiomen 1.48 (2) folgt dann $M = \mathbb{N}$. Nach Definition von M gilt $A(n)$ also für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Eine andere Art der vollständigen Induktion funktioniert so: Wenn gilt

(1) $A(0)$ ist wahr, und
(2) aus $A(0) \wedge \dots \wedge A(n)$ folgt $A(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das zeigt man, indem man die Aussage

$$B(n) = A(0) \wedge \dots \wedge A(n)$$

induktiv mit Satz 1.49 beweist.

Rekursive Definitionen funktionieren ähnlich: um eine Abbildung F von $\mathbb{N}$ in eine Menge M anzugeben, reicht es $F(0) \in M$ festzulegen und eine Vorschrift anzugeben, die $F(n+1)$ aus $F(0), \dots, F(n)$ bestimmt.

1.4. Ganze und Rationale Zahlen

In diesem Abschnitt „lösen“ wir zwei Probleme: man kann in $\mathbb{N}$ nicht subtrahieren, und man kann in $\mathbb{N}$ auch nicht durch Zahlen $n \neq 0$ dividieren. Um diese „Grundrechenarten“ einführen zu können, werden wir $\mathbb{N}$ erst zu den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, und dann zu den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erweitern.

In der Schule definiert man $\mathbb{Z}$, indem man zu $\mathbb{N}$ noch negative Zahlen hinzunimmt:
$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \mathbin{\dot\cup} \{\, -n \mid n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \,\}.$$
Anschließend definiert man Addition, Subtraktion und Multiplikation. Dabei muss man immer einige Fälle unterscheiden.

Wir beschreiben ganze Zahlen als Differenzen natürlicher Zahlen, also als $m - n$ für $m, n \in \mathbb{N}$.

1.50. Bemerkung. Um die folgenden Konstruktionen zu verstehen, hier ein paar Vorüberlegungen. Für alle m, n, p, $q \in \mathbb{N}$ gilt in $\mathbb{Z}$:

$$(m-n) = (p-q) \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad m+q = n+p \in \mathbb{N}\ , \tag{1}$$
$$(m-n) + (p-q) = (m+p) - (n+q)\ , \tag{2}$$
$$-(m-n) = n-m\ , \tag{3}$$
$$(m-n)\cdot(p-q) = (m\cdot p + n\cdot q) - (m\cdot q + n\cdot p)\ , \tag{4}$$
$$(m-n) \leq (p-q) \quad \Longleftrightarrow \quad m+q \leq n+p\ . \tag{5}$$

Anstelle von $m - n \in \mathbb{Z}$ betrachten wir das Paar $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Gemäß Bemerkung 1.50 (1) definieren wir eine Relation $\sim$ auf der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch
$$(m,n) \sim (p,q) \quad \Longleftrightarrow \quad m+q = n+p \in \mathbb{N}.$$
Außerdem definieren wir Addition, Negatives und Multiplikation gemäß Bemerkung 1.50 (2) - (4) durch
$$\begin{aligned} (m,n) + (p,q) &= (m+p, n+q), \\ -(m,n) &= (n,m), \\ (m,n)\cdot(p,q) &= (mp+nq, mq+np). \end{aligned}$$
Wir definieren eine Relation „$\leq$“ durch
$$(m,n) \leq (p,q) \quad \Longleftrightarrow \quad m+q \leq n+p.$$

1.51. Proposition. *Es seien m, n, p, q, r, s, t, $u \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

(1) *„$\sim$“ ist eine Äquivalenzrelation.*
(2) *Aus $(m,n) \sim (p,q)$ und $(r,s) \sim (t,u)$ folgt*
$$\begin{aligned} (m,n) + (r,s) &\sim (p,q) + (t,u), \\ (m,n)\cdot(r,s) &\sim (p,q)\cdot(p,q) \\ \textit{und}\ -(m,n) &\sim -(p,q). \end{aligned}$$
(3) *Aus $(m,n) \sim (p,q)$ und $(r,s) \sim (t,u)$ folgt*
$$(m,n) \leq (r,s) \quad \Longrightarrow \quad (p,q) \leq (t,u).$$

Beweis. Zu (1): reflexiv, symmetrisch: klar nach Definition von „$\sim$“ und Satz 1.40.

transitiv:

$$
\begin{aligned}
& (m,n) \sim (p,q) \text{ und } (p,q) \sim (r,s) \\
\Longrightarrow\ & m+q = n+p \text{ und } p+s = q+r \\
\Longrightarrow\ & m+q+p+s = n+p+q+r \\
\Longrightarrow\ & m+s = n+r \qquad\qquad \text{wegen Kürzungsregel} \\
\Longrightarrow\ & (m,n) \sim (r,s).
\end{aligned}
$$

Zu (2): Seien $(m,n) \sim (p,q)$ und $(r,s) \sim (t,u)$, also $m+q = n+p$ und $r+u = s+t$. Wegen $m+q+r+u = n+p+s+t$ folgt

$$(m,n)+(r,s) = (m+r, n+s) \sim (p+t, q+u) = (p,q)+(t,u).$$

Außerdem gilt

$$
\begin{aligned}
mr+ns+ps+qr &= (m+q)\cdot r + (n+p)\cdot s \\
&= (n+p)\cdot r + (m+q)\cdot s = pr+qs+ms+nr,
\end{aligned}
$$

also

$$(m,n)(r,s) = (mr+ns, ms+nr) \sim (pr+qs, ps+qr) = (p,q)(r,s).$$

Genauso zeigt man $(p,q)(r,s) \sim (p,q)(t,u)$, und wegen Transitivität gilt $(m,n)(r,s) \sim (p,q)(t,u)$. Die Behauptung $-(m,n) = (n,m) \sim (q,p) = -(p,q)$ ist leicht einzusehen.

Zu (3): Mit $(m,n) \sim (p,q)$ und $(r,s) \sim (t,u)$ wie oben: Aus $(m,n) \le (r,s)$ folgt $m+s \le n+r$, also ex $k \in \mathbb{N}$ mit

$$
\begin{aligned}
& m+s+k = n+r \\
& \qquad \Longrightarrow \quad m+p+s+u+k = n+p+r+u = m+q+s+t \\
& \qquad \Longrightarrow \quad p+u+k = q+t \quad \Longrightarrow \quad p+u \le q+t \\
& \qquad \Longrightarrow \quad (p,q) \le (t,u). \qquad \Box
\end{aligned}
$$

Die Menge $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ zerfällt also in *Äquivalenzklassen*

$$[(m,n)] = \{\, (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid (p,q) \sim (m,n) \,\}.$$

Es sei

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}\times\mathbb{N}/{\sim} = \{\, [(m,n)] \mid (m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,\}$$

die Menge dieser Äquivalenzklassen. Proposition 1.51 garantiert, dass wir mit Äquivalenzklassen rechnen dürfen:

$$
\begin{aligned}
[(m,n)] + [(p,q)] &= [(m+p, n+q)], \\
[(m,n)] \cdot [(p,q)] &= [(mp+nq, mq+np)], \\
-[(m,n)] &= [(n,m)],
\end{aligned}
$$

unabhängig von den *Repräsentanten* $(m,n) \in [(m,n)]$, $(p,q) \in [(p,q)]$. Auch $[(m,n)] \le [(p,q)]$ ist wohldefiniert.

1.52. Definition. Die Menge $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ heißt Menge der *ganzen Zahlen.*

Wir identifizieren $n \in \mathbb{N}$ mit $[(n,0)] \in \mathbb{Z}$ und schreiben $-n$ für $[(0,n)] \in \mathbb{Z}$. Insbsondere schreiben wir $0 = [(0,0)]$ und $1 = [(1,0)]$.

1.53. Satz. *In $\mathbb{Z}$ gelten Assoziativ- und Kommutativgesetz sowohl für die Addition als auch für die Multiplikation. Neutrale Elemente sind 0 für die Addition und 1 für die Multiplikation. Es gilt das Distributivgesetz. Jedes Element $[(m,n)]$ besitzt ein* Inverses $-[(m,n)]$ *bezüglich der Addition, das heißt*

$$[(m,n)] + \bigl(-[(m,n)]\bigr) = [(0,0)].$$

Es gilt die Kürzungsregel für die Multiplikation

Dieser Satz besagt, dass $\mathbb{Z}$ ein kommutativer Ring mit Einselement ist.

Beweis. Das meiste folgt direkt aus Satz 1.40 und den obigen Definitionen. Die neue Gleichung

$$[(m,n)] + \bigl(-[(m,n)]\bigr) = [(m,n)] + [(n,m)] = [(0,0)]$$

ergibt sich aus

$$(m,n) + (n,m) = (m+n, n+m) \sim (0,0). \qquad \square$$

Der Einfachheit halber schreiben wir ab sofort $a, b, c, \dots \in \mathbb{Z}$, nicht mehr $[(m,n)]$.

Die Relation „$\le$“ auf $\mathbb{Z}$ ist verträglich mit den Grundrechenarten.

1.54. Proposition. *In $\mathbb{Z}$ gilt:*

(1) *Die Relation „$\le$“ ist eine Ordnung;*
(2) *Aus $a \le b$ folgt $a + c \le b + c$ für ale $a, b, c \in \mathbb{Z}$;*
(3) *Aus $0 \le a$ und $0 \le b$ folgt $0 \le ab$ für alle $0 \le ab$.*

Beweis. Aus der Definition von „$\le$“ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ folgt für alle $m, n, p, q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} [(m,n)] \le [(p,q)] \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{Es ex. } k \in \mathbb{N} \text{ mit } m + q + k = n + p \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{Es ex. } k \in \mathbb{N} \text{ mit } [(m,n)] + k = [(p,q)]. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $0 \le a \Leftrightarrow 0 + k = a$ für $k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \in \mathbb{N}$, und genauso $a \le 0 \Leftrightarrow -a \in \mathbb{N}$.

Zu (1). Reflexivität ist klar. Für alle $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ gilt

$$m + q \le n + p \text{ und } n + p \le m + q \Rightarrow n + p = m + q \Rightarrow [(m,n)] = [(p,q)],$$

also folgt Antisymmetrie. Genauso folgt Totalität, da $m + q \le n + p$ oder $n + p \le m + q$ in $\mathbb{N}$ gilt.

Zur Transitivität seien a, b, $c \in \mathbb{Z}$ mit $a \le b$ und $b \le c$ gegeben. Nach obigem existieren k, $\ell \in \mathbb{N}$ mit $a + k = b$ und $b + \ell = c$. Es folgt

$$c = b + \ell = a + k + \ell \ ,$$

also $a \leq c$. Somit ist „$\leq$" transitiv, und daher eine Ordnung nach Definition 1.43.

Zu (2). Da $a \leq b$ gilt, existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a + k = b$. Es folgt

$$a + k + c = b + c \quad \Longrightarrow \quad a + c \leq b + c\,.$$

Zu (3). Aus $0 \leq a$ und $0 \leq b$ folgt $a, b \in \mathbb{N}$, und es gilt

$$[a,0] \cdot [b,0] = [ab,0] = ab \in \mathbb{N}. \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq ab\,. \qquad \square$$

Wir haben die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zu den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ erweitert, um additive Inverse zu finden, also Zahlen $-n$ mit $n + (-n) = 0$. Dazu haben wir natürliche Zahlen durch Paare $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ersetzt, die für die Zahl $m - n \in \mathbb{Z}$ stehen. Die Zahlen $-n = [0, n]$ sind gerade die negativen Zahlen aus der Schule.

Um nun auch multiplikative Inverse $\frac{1}{n}$ mit $n \cdot \frac{1}{n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ zu erhalten, ersetzen wir ganze Zahlen durch Paare $(p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \backslash \{0\})$, die für Brüche $\frac{p}{q}$ stehen. Das ist die Bruchrechnung, wie wir sie aus der Schule kennen.

Dazu definieren wir für (p, q), $(r, s) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \backslash \{0\})$:

$$\begin{aligned}
(p,q) \sim (r,s) \quad &\Longleftrightarrow \quad p \cdot s = q \cdot r && \left(\Longleftrightarrow \quad \frac{p}{q} = \frac{r}{s}\right)\,, \\
(p,q) + (r,s) &= (ps + qr, qs) && \left(\text{da } \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs}\right)\,, \\
(p,q) \cdot (r,s) &= (pr, qs) && \left(\text{da } \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}\right)\,, \\
-(p,q) &= (-p, q) && \left(\text{da } -\frac{p}{q} = \frac{-p}{q}\right)\,, \\
(p,q) \leq (r,s) \quad &\Longleftrightarrow \quad p \cdot s \leq q \cdot r && \left(\Longleftrightarrow \quad \frac{p}{q} \leq \frac{r}{s},\ \text{da } q, s > 0\right)\,.
\end{aligned}$$

Beachte, dass $qs \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, denn aus $qs = 0 = 0 \cdot s$ würde mit der Kürzungsregel entweder $q = 0$ oder $s = 0$ folgen. Für $p \neq 0$ definieren wir:

$$(p,q)^{-1} = \begin{cases} (q,p) & \text{falls } p > 0, \\ (-q,-p) & \text{falls } p < 0. \end{cases}$$

Beachte: die rechte Seite $(\pm q, \pm p)$ liegt immer in $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \backslash \{0\})$.

1.55. Proposition. (1) *Die Relation „$\sim$" ist eine Äquivalenzrelation*

(2) *Es seiem $(m, n), (p, q), (r, s), (t, u) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \backslash \{0\})$ mit $(m, n) \sim (p, q)$ und $(r, s) \sim (t, u)$ gegeben, dann gilt*

$$\begin{aligned}
(m,n) + (r,s) &\sim (p,q) + (t,u), \\
(m,n) \cdot (r,s) &\sim (p,q) \cdot (t,u),
\end{aligned}$$

und es gilt $m \neq 0 \Rightarrow p \neq 0$, und in diesem Fall

$$(m,n)^{-1} \sim (p,q)^{-1}.$$

(3) *Unter den gleichen Voraussetzungen wie in* (2) *gilt*

$$(m,n) \le (r,s) \Rightarrow (p,q) \le (t,u).$$

Beweis. Die Beweismethode ist die gleiche wie bei Proposition 1.51, wir lassen den Beweis daher aus, ein Teil ist Übung. □

1.56. Definition. Der Quotient $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N}\backslash\{0\})/\sim$ heißt Menge der *rationalen Zahlen* und wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet. Für die Äquivalenzklasse $[(p,q)]$ schreiben wir $\frac{p}{q}$.

Wie zuvor schließen wir aus Proposition 1.55 (2), dass wir mit Brüchen so rechnen dürfen, wie wir es aus der Schule kennen. Proposition 1.55 (3) besagt, dass wir zwei Brüche vergleichen können.

Wir identifizieren eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ mit dem Bruch $\frac{n}{1} \in \mathbb{Q}$ und fassen $\mathbb{Z}$ als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ auf. Insbesondere liegen $0 = \frac{0}{1}$ und $1 = \frac{1}{1}$ in $\mathbb{Q}$.

1.57. Satz. *In $\mathbb{Q}$ gelten die folgenden Rechenregeln:*

(1) *Assoziativgesetz für Addition und Multiplikation*
(2) *neutrale Elemente:* $\frac{p}{q} + 0 = \frac{p}{q}$, $\frac{p}{q} \cdot 1 = \frac{p}{q}$ *für alle* $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$;
(3) *inverse Elemente:* $\frac{p}{q} + \frac{-p}{q} = 0$ *für alle* $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\frac{p}{q} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = 1$ *für alle* $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$;
(4) *Kommutativgesetz für Addition und Multiplikation;*
(5) *Distributivgesetz.*

Beweis. Diese Aussagen folgen aus den Sätzen 1.40 und 1.53, und aus der Konstruktion von $\mathbb{Q}$. Seien etwa $p, r, t \in \mathbb{Z}$, $q, s, u \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, dann ergibt sich das Assoziativgesetz für die Addition aus

$$\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) + \frac{t}{u} = \frac{ps+qr}{qs} + \frac{t}{u} = \frac{(ps+qr)\cdot u + qst}{qsu} = \frac{psu + qru + qst}{qsu}$$
$$= \frac{psu + q(ru+st)}{qsu} = \frac{p}{q} + \frac{ru+st}{su} = \frac{p}{q} + \left(\frac{r}{s} + \frac{t}{u}\right) .$$

Betrachten wir das *multiplikative Inverse* $\left(\frac{p}{q}\right)^{-1}$ von $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Falls $0 < p$, gilt $\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{p}$ und $\frac{p}{q} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{pq}{qp} = 1$.

Falls $p < 0$, gilt $\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{-q}{-p}$ und $\frac{p}{q} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{p(-q)}{q(-p)} = \frac{-pq}{-qp} = 1$.

Alle anderen Aussagen lassen sich ähnlich beweisen. □

Satz 1.57 besagt, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ein Körper ist. Wir wollen jetzt sehen, dass auch die Anordnung „$\le$“ mit den Rechenregeln verträglich ist. Später werden wir $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \le)$ dann einen angeordneten Körper nennen.

1.58. Satz. *In $\mathbb{Q}$ gilt:*

(1) *Die Relation „$\leq$“ ist eine Ordnung.*
(2) *Für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ gilt:*
$$a \leq b \quad \Longrightarrow \quad a + c \leq b + c$$
(3) *Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $0 \leq a$, $0 \leq b$ gilt $0 \leq ab$.*

Beweis. Zu (1): Reflexivität ist leicht einzusehen. Zur Antisymmetrie seien $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$. Nach Konstruktion gilt
$$\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s} \Longleftrightarrow ps \leq qr \quad \text{und} \quad \frac{r}{s} \leq \frac{p}{q} \Longleftrightarrow rq \leq sp.$$
Wenn $\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s}$ und $\frac{r}{s} \leq \frac{p}{q}$ gilt, folgt $rq = sp$ wegen der Antisymmetrie von „$\leq$“ auf $\mathbb{Z}$. Aber dann gilt bereits $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$.

Genauso folgern wir Totalität: es gilt $ps \leq qr$ oder $qr \leq ps$ in $\mathbb{Z}$, und daraus folgt entweder $\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s}$ oder $\frac{r}{s} \leq \frac{p}{q}$ in $\mathbb{Q}$.

Die Transitivität lassen wir als Übung. Nach Definition 1.43 ist „$\leq$“ eine Ordnung.

Zu (2) seien $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{r}{s}$, $c = \frac{t}{u} \in \mathbb{Q}$. Es gilt
$$\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s} \quad \Longleftrightarrow \quad ps \leq qr \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq qr - ps$$
nach Proposition 1.54 (2). Da $u > 0$, gilt nach Proposition 1.54 (3), dass
$$0 \leq qr - ps \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq (qr - ps)u \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq (qr - ps)u^2 ,$$
und wieder mit Proposition 1.54 (2) schließlich
$$0 \leq (qr - ps)u^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (pu + qt)\, su \leq qu\,(ru + st) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{p}{q} + \frac{t}{u} \leq \frac{r}{s} + \frac{t}{u} .$$

In ähnlicher Weise führen wir (3) auf Proposition 1.54 (3) zurück. □

Fortan schreiben wir kurz $a - b$ für $a + (-b)$ und a/b oder $\frac{a}{b}$ für $a \cdot b^{-1}$.

Wir nehmen die Ergebnisse aus den Sätzen 1.57 und 1.58 zum Anlass, um zwei neue Begriffe einzuführen.

1.59. Definition. Sei K eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+, \cdot : K \times K \to K$. Dann heißt $(K, +, \cdot)$ ein *Körper*, wenn es Elemente $0, 1 \in K$ mit $0 \neq 1$ und Abbildungen $-\colon K \to K$ und ${}^{-1}\colon K \setminus \{0\} \to K \setminus \{0\}$ gibt, so dass alle Aussagen aus Satz 1.57 gelten.

Bemerkung. Die Aussagen aus Satz 1.57 heißen auch *Körperaxiome.* Über Körper lernen Sie in der linearen Algebra noch einiges, zum Beispiel:

(1) Die Elemente 0, 1 und die Abbildungen $-$, ${}^{-1}$ in Definition 1.59 sind eindeutig bestimmt. Daher braucht man sie nicht extra anzugeben.

(2) Einige Rechenregeln folgen aus den Körperaxiomen, etwa

$$\begin{aligned}
0 \cdot a &= 0 \;, \\
(-a) \cdot b &= -(a \cdot b) \;, \\
-(-a) &= a \;, \\
(-a) \cdot (-b) &= a \cdot b \;, \\
(a^{-1})^{-1} &= a && \text{falls } a \neq 0 \;, \\
(-a)^{-1} &= -(a^{-1}) && \text{falls } a \neq 0 \;, \\
a \cdot b = 0 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad a = 0 \text{ oder } b = 0
\end{aligned}$$

usw. für alle $a, b \in K$.

Beispiel. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bilden einen Körper, die natürlichen und die ganzen Zahlen jedoch nicht, denn es fehlen Inverse.

1.60. Definition. Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, und sei $\le$ eine Ordnung auf der Menge K. Dann heißt $(K, +, \cdot, \le)$ ein *angeordneter Körper*, wenn die folgenden Axiome gelten:

(1) Für alle $a, b, c \in K$ gilt
$$a \le b \qquad \Longrightarrow \qquad a + c \le b + c;$$
(2) Für alle $a, b \in K$ gilt
$$0 \le a, 0 \le b \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \le a \cdot b.$$

Beispiel. Aus Satz 1.58 folgt, dass $\mathbb{Q}$ ein angeordneter Körper ist.

Ab sofort werden wir neben dem Symbol „$\le$“ auch die Symbole „$\ge$“, „$<$“ und „$>$“ benutzen

$$\begin{aligned}
a \ge b \qquad &\Longleftrightarrow \qquad b \le a, \\
a < b \qquad &\Longleftrightarrow \qquad a \le b \text{ und } a \neq b, \\
a > b \qquad &\Longleftrightarrow \qquad b < a.
\end{aligned}$$

1.61. Bemerkung. In jedem angeordneten Körper $(K, +, \cdot, \le)$, also auch in $\mathbb{Q}$, gelten folgende Rechenregeln für alle $a, b, c, d \in K$:

(1) Aus $a \le b$ und $c \le d$ folgt $a + c \le b + d$, denn
$$a + c \le b + c \le b + d;$$
(2) Aus $a \le b$ und $c \ge 0$ folgt $ac \le bc$, denn
$$b - a \ge 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (b - a)c \ge 0 \qquad \Longrightarrow \qquad ac \le bc;$$
(3) aus $0 \le a < b$ und $0 \le c < d$ folgt $ac < bd$, denn aus $b - a \neq 0$, $d \neq 0$ folgt $(b - a)d \neq 0$, also mit (2)
$$0 \le ac \le ad < bd;$$
(4) Aus $a \le b$ folgt $-b \le -a$, denn
$$-b = a + (-a - b) \le b + (-a - b) = -a;$$

(5) Aus $a \leq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \geq bc$, denn nach (4) ist $-c \geq 0$, also nach (2) und (4)
$$a \leq b \quad \Longrightarrow \quad -ac \leq -bc \quad \Longrightarrow \quad ac \geq bc;$$
(6) Es gilt $a^2 \geq 0$ und $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$, denn für $a \neq 0$ gilt entweder $a > 0$, also $a^2 > 0$ nach (3), oder $a < 0$, also $-a > 0$, also $a^2 = (-a)^2 > 0$ nach (3);
(7) Es gilt $1 > 0$, da $1 = 1^2$ und $1 \neq 0$;
(8) Aus $a > 0$ folgt $a^{-1} > 0$, denn $(a^{-1})^2 > 0$ nach (6), und nach (3)
$$a^{-1} = a \cdot (a^{-1})^2 > 0;$$
(9) Aus $0 < a \leq b$ folgt $0 < b^{-1} \leq a^{-1}$, denn $a^{-1} > 0$, $b^{-1} > 0$, also $a^{-1}b^{-1} > 0$ nach (3), und
$$b^{-1} = a \cdot (a^{-1}b^{-1}) \leq b \cdot (a^{-1}b^{-1}) = a^{-1}.$$

1.62. Bemerkung. Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein angeordneter Körper, und seien 0_K, 1_K die neutralen Elemente bezüglich Addition und Multiplikation. Nach Bemerkung 1.61 (7) gilt $1_K > 0_K$, also

$$(*) \qquad \dots < -1_K - 1_K < -1_K < 0_K < 1_K < 1_K + 1_K < \dots$$

Wir erhalten also eine injektive Abbildung $\iota\colon \mathbb{N} \to K$ mit
$$\iota(n) = \underbrace{1_K + \dots + 1_K}_{n \text{ Summanden}}.$$
Diese Abbildung lässt sich auf $\mathbb{Z}$ und auf $\mathbb{Q}$ erweitern durch $\iota(m-n) = \iota(m) - \iota(n)$ und $\iota\bigl(\frac{p}{q}\bigr) = \frac{\iota(p)}{\iota(q)}$. Die Abbildung $\iota\colon \mathbb{Z} \to K$ ist injektiv wegen (*). Die Abbildung $\iota\colon \mathbb{Q} \to K$ ist ebenfalls injektiv, denn für alle $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ gilt
$$\begin{aligned} && \frac{\iota(p)}{\iota(q)} &= \iota\Bigl(\frac{p}{q}\Bigr) = \iota\Bigl(\frac{r}{s}\Bigr) = \frac{\iota(r)}{\iota(s)} \\ &\Longrightarrow & \iota(ps) &= \iota(p)\iota(s) = \iota(q)\iota(r) = \iota(qr) \\ &\Longrightarrow & \frac{p}{q} &= \frac{r}{s} \end{aligned}$$
wegen der Injektivität von $\iota\colon \mathbb{Z} \to K$.

Man kann zeigen, dass dann $\iota(a+b) = \iota(a) + \iota(b)$ und $\iota(a \cdot b) = \iota(a) \cdot \iota(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt (das haben wir gerade eben bereits benutzt) sowie $\iota(1) \neq 0_K$; also ist ι sogar ein Körperhomomorphismus. Man kann auch zeigen, dass es nur diesen einen Körperhomomorphismus von $\mathbb{Q}$ nach K gibt. Der Einfachheit halber werden wir $\mathbb{Q}$ mit $\operatorname{im}(\iota) \subset K$ und $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $\iota\bigl(\frac{p}{q}\bigr) \in K$ identifizieren. Das heißt, wir fassen $\mathbb{Q}$ als Teilmenge eines jeden angeordneten Körpers auf. So gesehen, ist $\mathbb{Q}$ also der „kleinste“ angeordnete Körper.

Bemerkung. Endliche Körper K (und allgemeiner Körper endlicher Charakteristik) lassen sich nicht anordnen. Denn in diesen Körpern gibt es immer eine Primzahl $q \geq 2$, die *Charakteristik,* so dass
$$\underbrace{1_K + \dots + 1_K}_{q \text{ Summanden}} = 0\,.$$

Wäre K angeordneter Körper, so ergäbe sich aus (*) oben ein Widerspruch:

$$0_K < 1_K < \cdots < \underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{q \text{ Summanden}} = 0 \,.$$

1.63. Definition. Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein angeordneter Körper, dann definieren wir den *Absolutbetrag* oder kurz *Betrag* als Abbildung $|\ |\colon K \to K$ durch

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0, \text{ und} \\ -a & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

1.64. Bemerkung. Der Absolutbetrag hat folgende Eigenschaften. Für alle $a, b \in K$ gilt

(1) $$|a| \geq 0 \qquad \text{und} \qquad |a| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0$$

(2) $$|-a| = |a|$$

(3) $$|ab| = |a| \cdot |b|$$

(4) $$\left|a^{-1}\right| = |a|^{-1} \qquad \text{falls} \quad a \neq 0$$

(5) $$|a + b| \leq |a| + |b| \,,$$

denn aus $a \leq |a|$ und $b \leq |b|$ folgt $a + b \leq |a| + |b|$ nach Bemerkung 1.61 (1), und aus $-a \leq |a|$ und $-b \leq |b|$ folgt genauso $-(a + b) \leq |a| + |b|$, also in jedem Fall $|a + b| \leq |a| + |b|$.

(6) $$\big||a| - |b|\big| \leq |a + b| \,,$$

denn aus (5) für die Zahlen $a + b$ und $-b$ folgt

$$|a| - |b| = |(a + b) + (-b)| - |-b| \leq |a + b| \,,$$

und ebenso $|b| - |a| \leq |a + b|$.

Die Ungleichung (5) heißt auch *Dreiecksungleichung,* da sie an die Dreiecksungleichung der Euklidischen Geometrie erinnert, siehe auch Definition 2.40 (3).

1.5. Reelle Zahlen

Wir kennen jetzt die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Beim Arbeiten in $\mathbb{Q}$ stoßen wir (unter anderem) auf folgende Probleme.

(1) Manche Gleichungen lassen sich nicht in $\mathbb{Q}$ lösen. Zum Beispiel haben $x^2 = 2$ oder $x^2 = -1$ keine Lösung $x \in \mathbb{Q}$ (Wegen Bemerkung 1.62 (6) hat $x^2 = -1$ in keinem angeordneten Körper eine Lösung). Allgemeiner hat die Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$ für viele Wahlen der $a_1, \dots, a_n$ keine Lösung in $\mathbb{Q}$. Man sagt, $\mathbb{Q}$ ist nicht *algebraisch abgeschlossen.* Das ist ein algebraisches Problem, das wir hier nicht lösen können.

(2) Es gibt Folgen rationaler Zahlen, die sich immer mehr einem *Grenzwert* zu nähern scheinen, den es in $\mathbb{Q}$ aber nicht gibt. Zum Beispiel sollte die durch

$$a_0 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + 2/a_n}{2} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n}$$

rekursiv definierte Folge mit $a_0 = 2$, $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{17}{12}$, $\dots$ gegen $\sqrt{2}$ streben, aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

(3) Es gibt Teilmengen $\emptyset \neq M \subset \mathbb{Q}$, so dass $m \leq b$ für ein festes $b \in \mathbb{Q}$ und alle $m \in M$, aber es gibt kein kleinstes solches $b \in \mathbb{Q}$, also kein „Supremum“, siehe unten. Zum Beispiel sei

$$M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}.$$

Für die Zahlen $b = a_n$ aus (2) gilt $x \leq a_n$ für alle $x \in M$, denn $a_0^2 = 4 > 2$ und

$$a_{n+1}^2 = \frac{(a_n^2 + 2)^2}{4a_n^2} = \frac{(a_n^2 - 2)^2}{4a_n^2} + \frac{8a_n^2}{4a_n^2} \geq 2.$$

Gäbe es ein kleinstes b wie oben, so müsste $b^2 = 2$ gelten, aber ein solches b gibt es nach (1) nicht in $\mathbb{Q}$.

Die Probleme (2) und (3) sind analytischer Natur. Wir erweitern $\mathbb{Q}$ zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$, indem wir versuchen, das dritte Problem zu lösen. Später sehen wir, dass wir damit auch das zweite Problem in den Griff bekommen haben. Zu (1) sehen wir, dass manche Gleichungen der Form $(*)$ Lösungen in $\mathbb{R}$ haben, die es in $\mathbb{Q}$ nicht gibt, während andere in keinem angeordneten Körper eine Lösung haben können.

Wir beginnen mit einigen Definitionen. Dazu erinnern wir uns an den Begriff der Halbordnung aus Definition 1.43.

1.65. Definition. Sei R eine Halbordnung auf einer Menge M, und sei $N \subset M$ eine Teilmenge. Dann heißt $m \in M$ eine *untere Schranke* von N, wenn mRn für alle $n \in N$. Wenn N eine untere Schranke besitzt, heißt N *von unten beschränkt.* Eine untere Schranke $m \in M$ von N heißt *größte untere Schranke* oder *Infimum* von N, kurz $m = \inf(N)$, wenn für jede andere untere Schranke $p \in M$ von N bereits pRm gilt. Falls eine größte untere Schranke $m \in M$ von N existiert und bereits in N liegt, heißt m auch *kleinstes Element* oder *Minimum* von N, kurz $m = \min(N)$.

Ein Element $m \in M$ heißt *obere Schranke,* wenn nRm für alle $n \in N$, und N heißt dann *von oben beschränkt.* Eine obere Schranke $m \in M$ von N heißt *kleinste obere Schranke* oder *Supremum,* wenn mRp für alle oberen Schranken $p \in M$ von N gilt, kurz $m = \sup(N)$. Ist $m \in N$, so heißt m *größtes Element* oder *Maximum* von N, kurz $m = \max(N)$.

Wir werden in Lemma 1.68 sehen, dass $\inf N, \sup N, \min N$ und $\max N$ immer eindeutig sind, wenn sie existieren.

1.66. Beispiel. Sei $N = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$. Für alle $a \in \mathbb{Q}$ mit $a \leq 0$ gilt $a \leq \frac{1}{n}$ für alle n, also sind alle $a \leq 0$ untere Schranken von N. Für $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{p}{q} \geq \frac{1}{q} > \frac{1}{q+1} \in N ,$$

also ist kein $a \in \mathbb{Q}$ mit $a > 0$ untere Schranke von N. Somit ist 0 die größte untere Schranke von N, also das Infimum von N in $\mathbb{Q}$. Da $0 \notin N$, ist 0 jedoch nicht das Minimum von N.

1.67. Bemerkung. Es sei X eine Menge, dann ist „$\subset$" eine Halbordnung auf $M = \mathcal{P}(X)$ nach Beipiel 1.44 (1). Sei $N \subset \mathcal{P}(X)$ eine Teilmenge von M, also eine Menge von Teilmengen von X. Dann ist Y untere Schranke von N, falls $Y \subset Z$ für alle $Z \in N$; z.B. ist die leere Menge $\emptyset$ immer untere Schranke. Definiere

$$\bigcap N = \{a \in X \mid a \in Z \text{ für alle } Z \in N\} \in M = \mathcal{P}(X),$$

dann ist $\bigcap N$ untere Schranke von N. Außerdem ist $Y \subset Z$ für alle $Z \in N$ genau dann, wenn $Y \subset \bigcap N$. Also ist $\bigcap N$ ein Infimum von N in $(\mathcal{P}(X), \subset)$.

Genauso ist

$$\bigcup N = \{a \in X \mid \text{ Es gibt ein } Z \in N \text{ mit } a \in Z\}$$

ein Supremum von N in $(\mathcal{P}(X), \subset)$.

Die Symbole „$\bigcup$" und „$\bigcap$" stehen für *Durchschnitte* und *Vereinigungen* beliebig vieler Mengen. Seien A, $B \subset X$, dann gilt

$$A \cup B = \bigcup\{A, B\} \qquad \text{und} \qquad A \cap B = \bigcap\{A, B\} .$$

Wir wollen die Symbole „$\bigcup$" und „$\bigcap$" nur für Teilmengen der Potenzmenge einer gegebenen Menge (hier: X) verwenden.

Beispiel. (1) Sei $X = \{1, 2\}$, $M = \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Sei $N = \{\{1\}, \{2\}\} \subset M$, dann ist $\emptyset = \bigcap N$ ein Infimum und $X = \bigcup N$ ein Supremum von N.

(2) Sei allgemein $M = \mathcal{P}(X)$. Wir betrachten $N = \emptyset \subset \mathcal{P}(X)$. Nach obiger Definition ist

$$\bigcup \emptyset = \sup \emptyset = \emptyset \qquad \text{und} \qquad \bigcap \emptyset = \inf \emptyset = X \quad \in \quad \mathcal{P}(X) .$$

Hierzu ist offensichtlich wichtig, dass wir in einer festen Menge X arbeiten.

1.68. Lemma. *Sei M eine Menge mit einer Halbordnung. Wenn $N \subset M$ ein Infimum hat, dann ist dieses eindeutig, das gleiche gilt für das Supremum. Insbesondere sind auch Minimum und Maximum von N eindeutig, falls sie existieren.*

Ein *Lemma* ist ähnlich wie ein Satz oder eine Proposition eine bewiesene Aussage. Ein Lemma sollte eine Kernidee beinhalten, die man in vielen Beweisen wiederfinden kann.

Beweis. Sei R die Halbordnung, und seien $m, n \in M$ Infima von $N \subset M$. Da m Infimum und n untere Schranke ist, folgt nRm. Umgekehrt folgt aber auch mRn. Als Halbordnung ist R antisymmetrisch, also gilt $m = n$. Falls $m \in N$, ist m überdies Minimum von N, ansonsten hat N kein Minimum.

Der Beweis für Suprema und Maxima verläuft analog. □

1.69. Proposition. *Es sei R eine Halbordnung auf einer Menge M. Dann sind äquivalent:*

(1) *jede nicht leere, nach unten beschränkte Menge besitzt ein Infimum;*
(2) *jede nicht leere, nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum.*

1.70. Definition. Eine Halbordnung heißt *vollständig*, wenn eine der Aussagen in Proposition 1.69 gilt. Ein *vollständig angeordneter Körper* ist ein angeordneter Körper $(K, +, \cdot, \leq)$, so dass die Ordnung „$\leq$“ vollständig ist.

Dementsprechend heißt (1) auch das *Vollständigkeitsaxiom für Ordnungen.*

Beweis von Proposition 1.69. Wir zeigen nur die Richtung (1) $\Rightarrow$ (2); die Gegenrichtung folgt, indem man (1) $\Rightarrow$ (2) auf die entgegengesetzte Halbordnung S mit $xSy \Leftrightarrow yRx$ anwendet.

Es gelte (1). Sei $N \subset M$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge, dann betrachte die Teilmenge

$$P = \{\, m \in M \mid n \leq m \text{ für alle } n \in N \,\}$$

der oberen Schranken von N. Da $N \neq \emptyset$, ist P nach unten beschränkt durch jedes $n \in N$. Da N nach oben beschränkt ist, folgt $P \neq \emptyset$. Wegen (1) existiert das Infimum $p = \inf P \in M$. Nach Definition von P sind alle Elemente von N untere Schranken von P. Da p größte untere Schranke von P ist, folgt $n \leq p$ für alle $n \in N$, also ist p obere Schranke von N. Es folgt $p \in P$, also $p = \min P$, und p ist kleinste obere Schranke von N, also $p = \sup N$. □

Bemerkung. Nach Bemerkung 1.67 ist die Halbordnung „$\subset$“ vollständig auf $\mathcal{P}(X)$ für jede Menge X. Genauso bildet „$\supset$“ eine vollständige Halbordnung. Bezüglich „$\supset$“ ist das Infimum durch die Vereinigung „$\bigcup$“ und das Supremum durch den Durchschnitt „$\bigcap$“ gegeben, also genau anderherum als in Bemerkung 1.67.

Mit Hilfe von Definition 1.70 können wir die *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ wie folgt charakterisieren.

1.71. Satz. *Es gibt einen vollständig angeordneten Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$. Ist $(K, +, \cdot, \leq)$ ein weiterer vollständig angeordneter Körper, so gibt es genau eine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R} \to K$, so dass $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ und $\varphi(a) \leq \varphi(b) \Leftrightarrow a \leq b$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt, und diese Abbildung ist bijektiv.*

Man nennt eine Abbildung mit den gleichen Eigenschaften wie φ einen Körperisomorphismus. Da φ eindeutig ist, dürfen wir alle Elemente von K als reelle Zahlen auffassen.

Beweis der Existenz von $\mathbb{R}$. Wir betrachten zunächst die Menge aller „aufsteigenden" Teilmengen von $\mathbb{Q}$, die kein Minimum besitzen, also

$$(*) \qquad \overline{\mathbb{R}} = \left\{ A \subset \mathbb{Q} \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall a \in A \,\forall b \in \mathbb{Q} : a \leq b \Rightarrow b \in A \\ \forall\, a \in A \,\exists\, c \in A : c < a \end{array} \right\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \,.$$

Es gilt sicher $\emptyset, \mathbb{Q} \in \overline{\mathbb{R}}$, und wir setzen

$$\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}} \backslash \{\emptyset, \mathbb{Q}\} \,.$$

Die Elemente $A \in \mathbb{R}$ heißen *Dedekindsche Schnitte,* da sie die rationalen Zahlen in eine „obere Hälfte" A und eine „untere Hälfte" $\mathbb{Q} \setminus A$ zerlegen.

Die Halbordnung „$\supset$" auf $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ induziert eine Ordnung „$\leq$" auf $\overline{\mathbb{R}}$ und auf $\mathbb{R}$. Zu zeigen ist nur Totalität, seien dazu $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$. Entweder gilt $B \supset A$, also $B \leq A$, oder es existiert $a \in A \backslash B$. Für $b \in B$ würde $b \leq a$ nach (*) implizieren, dass $a \in B$, da $B \in \overline{\mathbb{R}}$. Es folgt $a < b$ für alle $b \in B$, insbesondere $b \in A$ wieder nach (*), also $A \supset B$. Wenn nicht $B \leq A$ gilt, gilt somit $A \leq B$, was zu zeigen war.

Um zu zeigen, dass $\mathbb{R}$ vollständig geordnet ist, sei $M \subset \mathbb{R}$ nichtleer und von unten durch $C \in \mathbb{R}$ beschränkt. Wir behaupten

$$\inf M = B := \bigcup M \,.$$

Nach Bemerkung 1.67 ist $B = \sup M$ in $\mathcal{P}(X)$ bezüglich der Halbordnung „$\subset$", also $B = \inf M$ in $\mathcal{P}(X)$ bezüglich „$\supset$". Zu zeigen ist also nur $B \in \mathbb{R}$. Sei $a \in B$, dann folgt $a \in A$ für ein $A \in M$. Sei $b \in \mathbb{Q}$, $a \leq b$, dann folgt $b \in A \Rightarrow b \in B$. Außerdem existiert $c \in A$ mit $c < a$, und es gilt $c \in B$. Aus (*) folgt $B \in \overline{\mathbb{R}}$.

Da $M \neq \emptyset$ existiert $A \in M \subset \mathbb{R}$, also $A \neq \emptyset$, wegen $A \subset B$ gilt $B \neq \emptyset$. Da C untere Schranke ist, folgt $A \subset C$ für alle $A \in M$, also auch $B \subset C \neq \mathbb{Q}$. Insbesondere gilt tatsächlich $B \in \mathbb{R}$, und wir haben die Vollständigkeit der Ordnung gezeigt.

Für A, $B \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$A + B = \{\, a + b \mid a \in A \text{ und } b \in B \,\} \,.$$

Man überprüft leicht, dass $A + B \in \mathbb{R}$. Da die Addition in $\mathbb{Q}$ assoziativ und kommutativ ist, gilt das auch für die neue Addition auf $\mathbb{R}$. Wir erhalten als neutrales Element und als additives Inverses von A:

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{R}} &= \{\, a \in \mathbb{Q} \mid a > 0 \,\} \,, \\ -A &= \{\, b \in \mathbb{Q} \mid \text{ es gibt } d > 0 \text{ so dass } a + b \geq d \text{ für alle } a \in A \,\} \,. \end{aligned}$$

Was „+" angeht, sind alle Körperaxiome erfüllt. Außerdem gilt für alle A, B, $C \in \mathbb{R}$:

$$A \leq B \quad \Rightarrow \quad A \supset B \quad \Rightarrow \quad A + C \supset B + C \quad \Rightarrow \quad A + C \leq B + C \,.$$

Es gilt $0_{\mathbb{R}} \leq A$ genau dann, wenn $0 \notin A$. Für alle $0_{\mathbb{R}} \leq A$, $0_{\mathbb{R}} \leq B$ definieren wir

$$A \cdot B = \{\, a \cdot b \mid a \in A \text{ und } b \in B \,\} \,.$$

Es folgt $0_{\mathbb{R}} \leq A \cdot B$, und die Axiome (1) und (2) in Definition 1.60 sind erfüllt.

Falls $A \leq 0_{\mathbb{R}}$ oder $B \leq 0_{\mathbb{R}}$ gilt, definieren wir $A \cdot B$ durch

$$A \cdot B = -(-A) \cdot B \quad \text{bzw.} \quad A \cdot B = -A \cdot (-B).$$

Man überprüft leicht, dass diese Multiplikation assoziativ und kommutativ ist. Als neutrales Element und als multiplikatives Inverses von $A > 0_{\mathbb{R}}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 1_{\mathbb{R}} &= \{\, a \in \mathbb{Q} \mid a > 1 \,\} , \\ A^{-1} &= \{\, b \in \mathbb{Q} \mid \text{ es gibt } d > 1 \text{ so dass } ab \geq d \text{ für alle } a \in A \,\} . \end{aligned}$$

Falls $A < 0_{\mathbb{R}}$, so erhalten wir das multiplikative Inverse durch $A^{-1} = -(-A)^{-1}$.

Da offensichtlich $0_{\mathbb{R}} \neq 1_{\mathbb{R}}$ da $1 \in 0_{\mathbb{R}} \setminus 1_{\mathbb{R}}$, bleibt nur das Distributivgesetz $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ zu zeigen. Indem man Vorzeichen ändert, kann man $0_{\mathbb{R}} \leq A$ und $0_{\mathbb{R}} \leq B + C$ annehmen. Der Fall $0_{\mathbb{R}} \leq B$, $0_{\mathbb{R}} \leq C$ ist leicht, sei also ohne Einschränkung $0_{\mathbb{R}} \leq B$, $0_{\mathbb{R}} > C$. Nach Definition folgt

$$AB = A\bigl((B + C) + \underbrace{(-C)}_{\geq 0}\bigr) = A(B + C) - AC,$$

und daraus folgt wiederum das Distributivgesetz.

Wir haben also einen vollständig angeordneten Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ konstruiert. Dieser Körper heißt auch *Dedekind-Modell der reellen Zahlen.* □

1.72. Bemerkung. Die Elemente $\emptyset$ und $\mathbb{Q}$ von $\overline{\mathbb{R}}$ erfüllen

$$\mathbb{Q} < A < \emptyset \qquad \text{für alle} \quad A \in \mathbb{R},$$

wir schreiben daher $\infty = \emptyset$ und $-\infty = \mathbb{Q}$. Außerdem kann man zeigen, dass *alle* Teilmengen $M \subset \overline{\mathbb{R}}$ ein Infimum und ein Supremum in $\overline{\mathbb{R}}$ haben. Dafür kann man aber mit ∞ und $-\infty$ nicht rechnen — außer, man weiß genau, was man tut, siehe etwa Bemerkung 2.21.

Bemerkung. Man beachte, dass $\bigcap M$ für $M \subset \mathbb{R}$ im allgemeinen nicht in $\overline{\mathbb{R}}$ liegt, da die zweite Bedingung in (*) verletzt sein kann. Wir erhalten das Supremum von $M \subset \mathbb{R}$ stattdessen mit Hilfe von Proposition 1.69.

1.73. Bemerkung. Es sei $\iota\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ die Abbildung aus Bemerkung 1.62. Im Dedekind-Modell lässt sich zeigen, dass

$$\iota(a) = \{\, b \in \mathbb{Q} \mid a < b \,\} \in \mathbb{R}$$

für alle $a \in \mathbb{Q}$ gilt. Man sieht leicht:

(1) für alle $A \in \mathbb{R}$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $A \leq \iota(n)$;
(2) für alle $A, B \in \mathbb{R}$ mit $A < B$ existiert $a \in \mathbb{Q}$ mit $A < \iota(a) < B$.

Wir wollen einsehen, dass es — wie in Satz 1.71 behauptet — für jeden vollständig angeordneten Körper $(K, +, \cdot, \leq)$ eine eindeutige bijektive Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R} \to K$ gibt, die mit den Grundrechenarten und der Ordnung verträglich ist. Wir beginnen jetzt mit der Vorarbeit. Dazu sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein beliebiger vollständig angeordneter Körper, und wir fassen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ gemäß Bemerkung 1.62 als Teilmengen von K auf.

1.74. Definition. Ein *archimedisch angeordneter Körper* ist ein angeordneter Körper $(K, +, \cdot, \leq)$, in dem zu jedem $a \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $a \leq n$.

1.75. Beispiel. Die rationalen Zahlen sind archimedisch angeordnet, denn für alle $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ gilt

$$\frac{p}{q} \leq \left|\frac{p}{q}\right| \leq p \in \mathbb{N}.$$

1.76. Satz. *Jeder vollständig angeordnete Körper ist archimedisch angeordnet.*

Beweis. Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein vollständig angeordneter Körper. Dann ist $\mathbb{N}$ als Bild der rekursiv definierten Abbildung $\iota \colon \mathbb{N} \to K$ eine nichtleere Teilmenge von K. Wir nehmen an, dass K nicht archimedisch ist. Dann existiert eine obere Schranke $a \in K$ von $\mathbb{N}$. Nach Proposition 1.69 besitzt $\mathbb{N}$ also eine kleinste obere Schranke. Also existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $b - 1 < n$, es folgt $b < n + 1$, und b ist ebenfalls keine obere Schranke im Widerspruch zur Wahl von $b = \sup \mathbb{N}$. Also kann $\mathbb{N}$ keine obere Schranke besitzen, und K ist archimedisch. $\square$

1.77. Proposition. *Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein archimedisch angeordneter Körper. Dann gilt*

(1) *Für alle $a \in K$ mit $a > 0$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < a$.*
(2) *Für alle $a, b \in K$ mit $a < b$ existiert ein $c \in \mathbb{Q}$ mit $a < c < b$.*

Man sagt auch, dass $\mathbb{Q}$ in K *dicht* liegt.

Beweis. Zu (1) wähle $n > \frac{1}{a}$.

Zu (2) wähle zunächst $q \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ mit $0 < \frac{1}{q} < b - a$, dann gilt $aq + 1 < bq$. Es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $n > |aq| + 1$, also existiert unter den endlich vielen ganzen Zahlen $-n, 1 - n, \dots, n$ eine kleinste Zahl $p \in \mathbb{Z}$ mit $p > aq$. Es folgt $p < bq$, also $a < \frac{p}{q} < b$. $\square$

Beispiel. Es sei $A \subset \mathbb{Q}$ ein Dedekindscher Schnitt, also $A \in \mathbb{R}$, so dass $A \geq 0$. Betrachte die Menge

$$B = \left\{\, b \in \mathbb{Q} \mid b > 0 \text{ und } b^2 \in A \,\right\} .$$

Dann ist auch B ein Dedekindscher Schnitt, und es gilt $B^2 = A$. Somit können wir Quadratwurzeln aus nichtnegativen Zahlen ziehen, und haben also einen kleinen Teil des Problems (1) gelöst.

Beweis der Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$ in Satz 1.71. Wir skizzieren diesen Beweis nur. Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein vollständig angeordneter Körper, und seien $\iota_{\mathbb{R}} \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ und $\iota_K \colon \mathbb{Q} \to K$ die Abbildungen aus Bemerkung 1.62. Wegen Proposition 1.77 (2) gilt

$$A = \inf\{\, \iota_{\mathbb{R}}(a) \mid a \in \mathbb{Q} \text{ und } A < \iota_{\mathbb{R}}(a) \,\}$$

für alle $A \in \mathbb{R}$, und analog für alle $k \in K$. Wir konstruieren die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R} \to K$ duch

$$\varphi(A) = \inf\{\, \iota_K(a) \mid a \in A \subset \mathbb{Q} \,\}\ ,$$

wobei wir die Vollständigkeit von K ausnutzen. Die Injektivität von φ folgt leicht aus der Injektivität von ι_K in Bemerkung 1.62, da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt nach Proposition 1.77. Für die Surjektivität nutzen wir aus, dass wegen Proposition 1.77 (2) für alle $k \in K$ gilt:

$$k = \inf\{\, \iota_K(a) \mid a \in \mathbb{Q}, k < \iota_K(a) \,\} = \varphi\big(\{\, a \in \mathbb{Q} \mid k < \iota_K(a) \,\}\big)\ .$$

Es bleibt als Übung zu zeigen, dass φ mit den Grundrechenarten und den Anordnungen von $\mathbb{R}$ und K verträglich ist.

Sei $\psi\colon \mathbb{R} \to K$ eine weitere Abbildung mit den in Satz 1.71 geforderten Eigenschaften. Aus der Eindeutigkeit von $\iota_K\colon \mathbb{Q} \to K$ folgt

$$\varphi \circ \iota_{\mathbb{R}} = \iota_K = \psi \circ \iota_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{Q} \to K\ ,$$

da alle drei Abbildungen die in Bemerkung 1.62 geforderten Eigenschaften besitzen. Da φ und ψ mit den Anordnungen verträglich sind und $\mathbb{Q}$ in K dicht liegt, folgt für alle $A \in \mathbb{R}$, dass

$$\psi(A) = \inf\{\, \iota_K(a) \mid a \in \mathbb{Q} \text{ und } A < \iota_{\mathbb{R}}(a) \,\} = \varphi(A)\ ,$$

also gilt $\psi = \varphi$ wie behauptet. □

1.78. Bemerkung. Die Anordnung von $\mathbb{R}$ ist durch die Grundrechenarten eindeutig bestimmt: es gilt

$$A \le B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{es gibt ein } C \in \mathbb{R} \text{ mit } A + C^2 = B$$

Die Richtung „$\Leftarrow$“ folgt aus Bemerkung 1.61 (6). Für die Rückrichtung betrachte

$$C = \{\, c \in \mathbb{Q} \mid c > 0 \text{ und es gibt } d \in (B - A) \text{ mit } c^2 > d \,\}\ ,$$

dann lässt sich $A + C^2 = B$ leicht zeigen.

Man beachte aber, dass es auch angeordnete Körper gibt, bei denen die Ordnung nicht eindeutig festgelegt ist.

1.79. Bemerkung. Man kann reelle Zahlen auch als *Dezimalbrüche* schreiben. Zum Beispiel bedeutet $\pi = 3,1415926\ldots$, dass

$$\pi = \sup\left\{3, \frac{31}{10}, \frac{314}{100}, \ldots\right\} = \inf\left\{4, \frac{32}{10}, \frac{315}{100}, \ldots\right\}\ .$$

Man kann zeigen:

(1) Jede Zahl in $\mathbb{R}$ wird durch einen Dezimalbruch dargestellt.
(2) Wenn zwei verschiedene Dezimalbrüche die gleiche Zahl darstellen, dann sind sie am Anfang identisch, und der eine endet auf $a9999\ldots$, der andere auf $(a+1)0000\ldots$, mit $a \in \{0, \ldots, 8\}$.

Man könnte also auf der Menge D aller Dezimalbrüche eine Äquivalenzrelation „$\sim$“ definieren und $\mathbb{R} = D/\!\sim$ setzen. Die Anordung „$\le$“ ist leicht zu definieren. Das Problem sind die Grundrechenarten. Betrachte etwa

$$\begin{array}{rl} 0{,}23718903 & \dots \\ +\ 0{,}76281096 & \dots \\ \hline ?{,}???????? & \dots \end{array}$$

Es kann beliebig lange dauern, bis man entscheiden kann, ob vor dem Komma 0 oder 1 steht: etwa könnte nach N Stellen eine der folgenden Situationen auftreten:

$$\begin{array}{c} \dots\ 237 \dots \\ \dots\ 765 \dots \\ {\scriptstyle 111?} \\ \hline \dots\ 00? \dots \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{c} \dots\ 237 \dots \\ \dots\ 761 \dots \\ {\scriptstyle 000?} \\ \hline \dots\ 99? \dots \end{array}$$

Bei der Multiplikation wird die Situation noch unübersichlicher.

1.80. Bemerkung. Unendliche Mengen, die zu $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind, heißen *abzählbar.* Zum Beispiel sind die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ abzählbar. Die Menge der reellen Zahlen ist jedoch nicht abzählbar. Man kann zeigen, dass es keine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ gibt; man sagt auch, $\mathbb{R}$ sei *überabzählbar.*

Denn sei $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, dann schreiben wir $a(n)$ als Dezimalbruch

$$a(n) = a(n)_0, a(n)_1 a(n)_2 \dots$$

mit $a(n)_0 \in \{\dots, -1, -0, 0, 1, \dots\}$ und $a(n)_1$, $a(n)_2$, $\dots \in \{0, \dots, 9\}$. Wir konstruieren einen neuen Dezimalbruch

$$b = b_0, b_1 b_2 \dots$$

mit $b_0 = a(0)_0 + 5$ und $b_n = a(n)_n \pm 5 \in \{0, \dots, 9\}$ für $n \ge 1$, wobei das Vorzeichen entsprechend gewählt sei. Es folgt $b \notin \operatorname{im}(a)$, denn b und $a(n)$ unterscheiden sich an der n-ten Stelle um ± 5, so dass beide Dezimalbrüche nicht so wie in Bemerkung 1.79 (2) äquivalent sein können, und somit $b \ne a(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist a nicht surjektiv. Die Ziffernfolge b_n heißt auch *Cantorsche Diagonalfolge.*

KAPITEL 2

Folgen, Reihen, Grenzwerte

Wir haben bei der Konstruktion der reellen Zahlen in Abschnitt 1.5 das vorher formulierte Problem (3) gelöst: In $\mathbb{R}$ hat jede von oben bzw. unten beschränkte Menge ein Supremum bzw. Infimum. Wir betrachten nun das Problem (2). Dazu werden wir Folgen und ihre Grenzwerte definieren und diese Begriffe studieren. Von nun an arbeiten wir in einem festen vollständig angeordneten Körper $\mathbb{R}$. Seine Elemente nennen wir reelle Zahlen. Wir fassen natürliche, ganze und rationale Zahlen gemäß Bemerkung 1.62 als spezielle reelle Zahlen auf, so dass also

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Wir stellen reelle Zahlen durch Dezimalbrüche dar, wenn wir sie nicht anders (zum Beispiel als $\frac{3}{2}$, $\sqrt{7}$ oder π) beschreiben können. Gleichzeitig vergessen wir, dass wir Zahlen früher durch Mengen oder Paare dargestellt hatten - jetzt sind es nur noch Zahlen. Außerdem benutzen wir die vollständig geordnete Menge

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

den *erweiterten reellen Zahlen*, die wir schon im Existenzbeweis von $\mathbb{R}$ kennengelernt haben, siehe Bemerkung 1.72.

2.1. Grenzwerte

2.1. Definition. Sei $(M, \leq)$ eine Menge mit einer Ordnung, dann ist ein *Intervall* in M eine Teilmenge $I \subset M$, die zu je zwei $x, y \in I$ mit $x \leq y$ auch alle $z \in M$ mit $x \leq z \leq y$ enthält. Ein Intervall in $(\mathbb{R}, \leq)$ heißt *reelles Intervall*, ein Intervall in $\left(\overline{\mathbb{R}}, \leq\right)$ *erweitertes reelles Intervall*.

2.2. Bemerkung. Sei $I \subset \mathbb{R}$ erweitertes reelles Intervall, dann ist I von einem der folgenden Typen:

$$\begin{aligned}
I = (a,b) &= \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} \,\middle|\, a < x < b \right\}, \\
I = [a,b) &= \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} \,\middle|\, a \leq x < b \right\}, \\
I = (a,b] &= \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} \,\middle|\, a < x \leq b \right\}, \qquad \text{oder} \\
I = [a,b] &= \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} \,\middle|\, a \leq x \leq b \right\},
\end{aligned}$$

Beachte: falls $a = b$, so besteht $[a, b]$ nur aus dem Punkt a, und $(a, b) = [a, b) = (a, b] = \emptyset$. Falls $a > b$, sind alle obigen Intervalle leer.

Zur Begründung der obigen Behauptung: Die obigen Mengen (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ und $[a,b]$ erfüllen offensichtlich die Bedingung in Definition 2.1. Sei nun umgekehrt I ein Intervall, dann setzen wir $a = \inf I$ und $b = \sup I$. Für alle $x \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $x < a$ oder $x > b$ folgt sofort $x \notin I$. Falls $a < x < b$, existieren $y, z \in I$ mit $a < y \leq x \leq z < b$, denn ansonsten wäre $x \leq \inf I = a$ oder $x \geq \sup I = b$. Aus Definition 2.1 folgt jetzt $x \in I$. Wir haben gezeigt, dass

$$(a,b) \subset I \subset [a,b].$$

Je nachdem, ob $a \in I$ oder nicht und ob $b \in I$ oder nicht, erhalten wir einen der vier obigen Typen. Die obige Begründung funktioniert übrigens sogar für das leere Intervall und liefert dann $I = (\infty, -\infty) = \emptyset$.

Man beachte, dass „(a,b)“ ab jetzt eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder ein Element von $\mathbb{R}^2$ bedeuten kann — aus dem Kontext wird das aber immer klar sein.

2.3. Definition. Es sei $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Eine *Umgebung* von x in $\overline{\mathbb{R}}$ ist eine Teilmenge $U \subset \overline{\mathbb{R}}$, die

(1) ein Intervall (a,b) mit $x \in (a,b)$ umfasst, falls $x \in \mathbb{R}$, oder
(2) ein Intervall $[-\infty, a)$ bzw. $(a, \infty]$ mit $a \in \mathbb{R}$ umfasst, falls $x = -\infty$ bzw. $x = \infty$.

Für $x \in \mathbb{R}$ ist eine *Umgebung* von x in $\mathbb{R}$ eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$, die auch in $\overline{\mathbb{R}}$ Umgebung von x ist.

Sei $x \in M$. Wenn $M \subset \mathbb{R}$ Umgebung von x ist, heißt x *innerer Punkt* von M, sonst *Randpunkt.*

Wir haben den Begriff „Randpunkt“ hier nur für Punkte innerhalb der Menge definiert. In der Literatur definiert man diesen Begriff auch für Punkte außerhalb von M, etwa als Randpunkt von $\mathbb{R} \setminus M$.

2.4. Beispiel. (1) Für $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ ist $U = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ eine Umgebung von x, die sogenannte *ε-Umgebung* von x.
(2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $[-\infty, -n)$ eine Umgebung von $-\infty$ in $\overline{\mathbb{R}}$, und $(n, \infty]$ eine Umgebung von ∞.

2.5. Bemerkung. Da $\mathbb{R}$ archimedisch ist, gilt:

(1) Jede Umgebung U von $x \in \mathbb{R}$ umfasst eine ε-Umgebung, sobei $\varepsilon = \frac{1}{n}$ für ein geeignet großes $n \in \mathbb{N}$ gewählt werden kann.
(2) Jede Umgebung U von ∞ umfasst $(n, \infty]$ für ein hinreichend großes $\mathbb{N}$; das entsprechende gilt für $-\infty$.

2.6. Bemerkung. Je zwei verschiedene Punkte in $\overline{\mathbb{R}}$ haben disjunkte Umgebungen. Zur Begründung seien x, $y \in \overline{\mathbb{R}}$ verschiedene Punkt, etwa $x < y$. Nach Proposition 1.77 existiert eine rationale Zahl q zwischen x und y. Dann sind $[-\infty, q)$ und $(q, \infty]$ disjunkte Umgebungen der beiden Punkte.

2.7. Bemerkung. Sei zunächst $-\infty < a < b < \infty$ und $x \in (a,b)$. Nach Definition 2.3 ist (a,b) Umgebung von x, also ist x innerer Punkt von (a,b), und erst recht von $[a,b), (a,b]$ und $[a,b]$. Hingegen ist a Randpunkt von $[a,b)$ und $[a,b]$ (in (a,b) ist a ja nicht enthalten), und b ist Randpunkt von $(a,b]$ und $[a,b]$.

Auf der anderen Seite ist $-\infty$ innerer Punkt von $[-\infty,b)$ und $[-\infty,b]$ für $b \in \mathbb{R}$ nach Definition 2.3, aber Randpunkt von $[-\infty,-\infty] = \{-\infty\}$. Genauso ist ∞ innerer Punkt von $(a,\infty]$ und $[a,\infty]$ für $a \in \mathbb{R}$, und Randpunkt von $[\infty,\infty] = \{\infty\}$.

2.8. Definition. Eine Teilmenge $M \subset \overline{\mathbb{R}}$ heißt *offen,* wenn jeder Punkt $x \in M$ eine Umgebung U besitzt mit $U \subset M$. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *offen,* wenn sie in $\overline{\mathbb{R}}$ offen ist.

Eine Teilmenge $M \subset \overline{\mathbb{R}}$ (bzw. $M \subset \mathbb{R}$) heißt *abgeschlossen* in $\overline{\mathbb{R}}$ (bzw. in $\mathbb{R}$), wenn $\overline{\mathbb{R}} \setminus M$ (bzw. $\mathbb{R} \setminus M$) in $\overline{\mathbb{R}}$ (bzw. in $\mathbb{R}$) offen ist.

2.9. Beispiel. Wir benutzen Bemerkung 2.7.

(1) Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist genau dann offen, wenn es vom Typ $I = (a,b)$ ist, mit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Daher heißt (a,b) etwas ungenau auch das *offene Intervall von a bis b.*
(2) In $\overline{\mathbb{R}}$ sind darüber hinaus auch $[-\infty,b), (a,\infty]$ und $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty,\infty]$ offen.
(3) In $\overline{\mathbb{R}}$ ist ein Intervall I genau dann abgeschlossen, wenn es vom Typ $I = [a,b]$ ist, mit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Daher heißt $[a,b]$ auch das *abgeschlossene Intervall von a bis b.*
(4) In $\mathbb{R}$ sind darüber hinaus auch $(-\infty,b], [a,\infty)$ und $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ abgeschlossen.

Man sieht das die Begriffe „offen“ und „abgeschlossen“ in $\mathbb{R}$ und $\overline{\mathbb{R}}$ jeweils eine etwas andere Bedeutung haben. *Wichtig*: „offen“ ist nicht das Gegenteil von „abgeschlossen“, denn die leere Menge ist immer offen und abgeschlossen, und $[a,b)$ mit $-\infty < a < b < \infty$ ist weder offen noch abgeschlossen. Man beachte die Ungenauigkeiten bei den Begriffen „offenes“ und „abgeschlossenes Intervall“ — immerhin sind offene Intervalle immer offen im Sinne von Definition 2.8, und abgeschlossene Intervalle immer abgeschlossen.

2.10. Definition. Eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in eine Menge M heißt *Folge* in M. Wir schreiben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder kurz (a_n), oder $a_0, a_1, \dots$ anstelle von $a\colon \mathbb{N} \to M$ und a_n anstelle von $a(n)$. Die a_n heißen *Folgenglieder.* Die Zahl „n“ im Ausdruck „a_n“ heißt der *Index* des Folgengliedes.

2.11. Definition. Eine Aussage A gilt für *unendlich viele* Elemente einer Menge M, wenn die Teilmenge $\{x \in M \mid A(x) \text{ ist wahr}\}$ unendlich ist. Sie gilt für *fast alle* $x \in M$ wenn sie für alle bis auf endlich viel $x \in M$ gilt, wenn also die Teilmenge $\{x \in M \mid A(x) \text{ ist falsch}\}$ endlich ist. Entsprechend gilt eine Aussage A für fast alle (unendlich viele) Glieder einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn $A(a_n)$ für fast alle (bzw. unendlich viele) $n \in \mathbb{N}$ gilt.

BEMERKUNG. Dass $A(n)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist äquivalent dazu, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt.

„$\Longrightarrow$“: Wähle $n_0 > \max\{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ gilt nicht}\}$.
„$\Longleftarrow$“: Es folgt

$$\{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ gilt nicht}\} \subset \{0, \dots, n_0 - 1\} ,$$

also ist die Menge der „Ausnahmen“ endlich.

2.12. DEFINITION. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\overline{\mathbb{R}}$, dann heißt $x \in \overline{\mathbb{R}}$ ein *Häufungspunkt* von (a_n), wenn jede Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder enthält, und *Grenzwert* oder *Limes* von (a_n), kurz

$$x = \lim_{n\to\infty} a_n ,$$

wenn jede Umgebung von x fast alle Folgenglieder enthält. Man sagt dann auch, dass (a_n) gegen x *konvergiert.* Wenn eine Folge keinen Grenzwert hat, sagt man, sie *divergiert.*

Wichtig: die Ausdrücke „unendlich viele“ und „fast alle“ in Definition 2.12 beziehen sich immer auf die Indizes $n \in \mathbb{N}$, nicht auf die Zahlen $a_n \in \overline{\mathbb{R}}$.

2.13. BEISPIEL.
(1) Für $a \in \overline{\mathbb{R}}$ heißt die Folge $(a)_{n\in\mathbb{N}}$, bei der jedes Folgenglied den Wert a hat, *konstant*. Ihr Grenzwert ist a, und a ist auch ein Häufungspunkt.
(2) Die Folge $(n)_{n\in\infty}$ konvergiert gegen ∞, da jede Umgebung U von ∞ ein Intervall $(a, \infty]$ mit $a \in \mathbb{R}$ umfasst, und $n \in (a, \infty]$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, da $\mathbb{R}$ archimedisch ist, vergleiche auch Bemerkung 2.5 (2).
(3) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen Grenzwert, aber zwei Häufungspunkte, nämlich 1 und -1.
(4) Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert 0, vergleiche Bemerkung 2.5 (1).

2.14. DEFINITION. Eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\overline{\mathbb{R}}$ heißt *Nullfolge*, wenn sie gegen 0 konvergiert.

2.15. LEMMA. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\overline{\mathbb{R}}$. Falls (a_n) konvergiert, ist der Grenzwert der einzige Häufungspunkt von (a_n), insbesondere ist der Grenzwert immer eindeutig bestimmt.*

BEWEIS. Seien x, $y \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $x \neq y$. Nach Bemerkung 2.6 gibt es Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap V = \emptyset$. Wenn x Grenzwert von (a_n) ist, liegen höchstens endlich viele der a_n nicht in U, also liegen auch nur endlich viele Folgenglieder a_n in V. Damit kann y kein Häufungspunkt mehr sein, und schon gar nicht Grenzwert. □

2.16. BEMERKUNG. Wir haben der Einfachheit halber Konvergenz und Divergenz in $\overline{\mathbb{R}}$ betrachtet. In der Literatur werden diese Begriffe oft anders verwendet: eine Folge „konvergiert“ oft nur, wenn ihr Grenzwet wieder in $\mathbb{R}$ liegt, und „divergiert bestimmt“ gegen $-\infty$ oder ∞, falls ihr Grenzwert $-\infty$ oder ∞ ist. Wir werden von *Konvergenz in* $\mathbb{R}$ sprechen, wenn wir betonen wollen, dass der Grenzwert eine reelle Zahl ist. Ansonsten bleiben wir bei unserer Terminologie, da sie etliche Fallunterscheidungen ersparen wird.

2.17. Proposition. *Es sei $a \in \mathbb{R}$. Dann divergiert die Folge $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn $a \le -1$, ansonsten gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & a > 1, \\ 1 & a = 1, \text{ und} \\ 0 & |a| < 1. \end{cases}$$

Beweis. Für $a > 1$ schreiben wir $a = 1 + x$ und benutzen die Bernoulli-Ungleichung aus Aufgabe 2 vom Blatt I.5, wonach

$$a^n = (1 + x)^n \ge 1 + nx.$$

Für alle $C > 1$ gilt also $a^n > C$, wenn $n > \frac{C-1}{x}$, und das gilt bei festem a für fast alle n.

Im Fall $a = 1$ erhalten wir die konstante Folge (1) mit Grenzwert 1, siehe Beispiel 2.13 (1).

Im Fall $a = 0$ ist die Folge fast konstant 0 (also konstant 0 bis auf endliche viele Ausnahmen, nämlich $a^0 = 1$) hat also Grenzwert 0. Falls $|a| < 1$ und $a \ne 0$, konvergiert $\left|\frac{1}{a^n}\right| = \left|\frac{1}{a}\right|^n$ gegen ∞, da $\left|\frac{1}{a}\right| > 1$ nach Bemerkung 1.61 (9). Für $\varepsilon > 0$ gilt

$$a^n \in (-\varepsilon, \varepsilon) \Leftrightarrow |a^n| < \varepsilon \quad\Longleftrightarrow\quad \left|\frac{1}{a^n}\right| > \frac{1}{\varepsilon},$$

und das gilt für fast alle a, also ist der Grenzwert in diesem Falle 0.

Im Fall $a = -1$ divergiert die Folge nach Beispiel 2.13 (3). Im Fall $a < -1$ schreiben wir $a^2 = 1+x$ mit $x > 0$ und überlegen wie oben, dass $a^{2n} = (1+x)^n$ gegen ∞ und $a^{2n+1} = a \cdot (1 + x)^n$ gegen $-\infty$ konvergiert. Also hat die Folge $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (mindestens) zwei Häufungspunkte $-\infty$ und ∞. Also divergiert sie nach Lemma 2.15. □

2.18. Lemma. *Sei (a_n), (b_n), (c_n) Folgen in $\overline{\mathbb{R}}$ mit $a_n \subseteq b_n \subseteq c_n$ für alle n. Falls (a_n) und (c_n) gegen denselben Grenzwert konvergieren, dann konvergiert auch b_n gegen diesen Grenzwert.*

Beweis. Sei a der Grenzwert. Jede Umgebung U von a enthält nach Definition 2.3 ein Intervall I, das selbst wieder Umgebung von a ist. Also liegen fast alle a_n und fast alle c_n in I nach Definition 2.12, es gilt also $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in I$, $c_n \in I$ für alle $n \ge n_0$. Mit Definition 2.1 folgt $b_n \in I$ für alle $n \ge n_0$, also liegen fast alle b_n in I, also auch in U. Da das für alle Umgebungen U von a gilt, konvergiert auch b_n gegen a. □

Beispiel. Es gelte $a_n \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und (a_n) konvergiere gegen ∞. Dann konvergiert auch b_n gegen ∞. Um das zu zeigen, wählen wir $c_n = \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und benutzen Lemma 2.18.

2.19. Lemma (Erhaltung von Ungleichungen). *Es seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen in $\overline{\mathbb{R}}$ mit den Grenzwerten a und $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Falls $a_n \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $a \le b$.*

Beweis. Wäre $a > b$, so gäbe es $c \in (b, a)$. Dann wäre $[-\infty, c)$ eine Umgebung von b, und $(c, \infty]$ eine Umgebung von a. Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ würde also $b_n < c < a_n$ gelten, im Widerspruch zur Annahme. Also muss $a \leq b$ gelten. □

Bemerkung. In Lemma 2.18 würde es reichen, $a_n \leq b_n \leq c_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ zu fordern, in Lemma 2.19 bräuchte $a_n \leq b_n$ sogar nur für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ zu gelten (warum?).

2.20. Bemerkung. Lemma 2.19 liefert im allgemeinen keine strikten Ungleichungen für die Grenzwerte. Zum Beispiel gilt $0 < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0 \not< 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.$$

2.21. Bemerkung. Im folgenden wollen wir auch mit $\pm\infty$ rechnen. In den meisten Fällen ist uns das Ergebnis klar, daher listen wir nur die „verbotenen“ Rechnungen auf: die Ausdrücke

$$\infty + (-\infty)\,, \qquad (-\infty) + \infty \quad \text{bzw.} \quad \infty - \infty\,, \qquad \text{sowie}$$
$$0 \cdot \infty\,, \qquad \infty \cdot 0\,, \qquad 0 \cdot (-\infty)\,, \qquad (-\infty) \cdot 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

sind nicht definiert. Alle anderen Ausdrücke sind erlaubt, zum Beispiel

$$\infty + 5 = \infty\,, \qquad \infty \cdot (-3) = -\infty\,, \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{\infty} = 0\,.$$

Für $a \in \mathbb{R}$ gilt $\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$, daher dürfen wir nicht einfach $\frac{a}{0} = \infty$ oder $\frac{a}{0} = -\infty$ setzen. Wir dürfen also nach wie vor nicht durch 0 dividieren.

2.22. Satz. *Es seien (a_n), (b_n) Folgen reeller Zahlen mit Grenzwerten a, $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Falls die rechte Seite erklärt ist, gilt*

(1) $$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b\,,$$

(2) $$\lim_{n\to\infty} (-a_n) = -a\,,$$

(3) $$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b\,,$$

(4) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}\,, \qquad \textit{falls außerdem alle } a \neq 0.$$

Beweis. Zu (1) reicht es, zu zeigen, dass zu jeder Umgebung W von $a + b$ zwei Umgebungen U von a und V von b existieren mit

(*) $$U + V = \{\, u + v \mid u \in U \text{ und } v \in V \,\} \subset W\,.$$

Denn da fast alle a_n in U und fast alle b_n in V liegen, liegen fast alle $a_n + b_n$ in $U + V \subset W$. Also konvergiert $a_n + b_n$ gegen $a + b$.

Wir zeigen $(*)$ in zwei Fällen. Falls $a, b \in \mathbb{R}$, so existiert zu jeder Umgebung W von $a + b$ ein $\varepsilon > 0$ mit

$$(a + b - \varepsilon, a + b + \varepsilon) \subset W \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\Big(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\Big)}_{U} + \underbrace{\Big(b - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}\Big)}_{V} \subset W\,.$$

Im zweiten Fall sei $b = \infty$, dann enthält jede Umgebung W von ∞ ein Intervall der Form $(c, \infty]$ mit $c \in \mathbb{R}$. Wir haben

$$\underbrace{(a-1, a+1)}_{U} + \underbrace{(c-a+1, \infty]}_{V} \subset (c, \infty] \subset W \,,$$

somit gilt auch hier die Behauptung.

Zu (2) betrachten wir zu jeder Umgebung W von $-a$ die Umgebung $-W$ von a. Wenn fast alle a_n in $-W$ liegen, dann liegen auch fast alle $-a_n$ in W. Also konvergiert $-a_n$ gegen $-a$.

Zu (3) suchen wir entsprechend zu jeder Umgebung W von ab Umgebungen U von a und V von b, so dass $U \cdot V \subset W$. Wie oben folgt daraus Behauptung (3). Falls z.B. $a, b > 0$, so erhalten wir für $0 < \varepsilon < 1$:

$$\big(a\sqrt{1-\varepsilon}, a\sqrt{1+\varepsilon}\big) \cdot \big(b\sqrt{1-\varepsilon}, b\sqrt{1+\varepsilon}\big) \subset \big(ab(1-\varepsilon), ab(1+\varepsilon)\big).$$

Falls z.B. $a > 0$ und $b = 0$, so erhalten wir für $\varepsilon > 0$:

$$(0, 2a) \cdot \Big(-\frac{\varepsilon}{2a}, \frac{\varepsilon}{2a}\Big) \subset (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Alle anderen Fälle funktionieren ähnlich.

Zu (4) betrachten wir zu einer Umgebung W von $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ eine Umgebung U von $a \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ mit $\frac{1}{U} \subset W$. Falls $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wählen wir $U = \frac{1}{W \setminus \{0\}}$. Falls $a = \pm\infty$, sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset W$. Dann wählen wir $U = [-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}) \cup (\frac{1}{\varepsilon}, \infty]$. Jetzt folgt (4) genauso wie (2). $\square$

2.23. Bemerkung. In den Beispielen 2.13 (1)–(4) und auch in den Beweisen von Proposition 2.17 und Satz 2.22 haben wir folgendes ausgenutzt.

(1) Eine Folge (a_n) konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.
(2) Eine Folge (a_n) konvergiert gegen ∞ $(-\infty)$ genau dann, wenn zu jedem $c \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_n > c$ (bzw. $a_n < -c$) für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.

Beides sind Umformulierungen der entprechenden Aussagen in Definition 2.12 unter Benutzung der Definitionen 2.3 und 2.11 und der speziellen Umgebungen in Beispiel 2.4 und Bemerkung 2.5. In der Literatur werden die Punkte (1) und (2) oben gern zur Definition der Konvergenz herangezogen.

Aber völlig unabhängig davon, wie man Konvergenz definiert, wird man später weitaus öfter die Lemmata 2.18 und Lemma 2.19 und Satz 2.22 verwenden, um Konvergenz einer gegebenen Folge gegen einen bereits bekannten Grenzwert zu zeigen, als man die Definition des Grenzwertes selbst benötigt. Dabei vergleicht man beispielsweise eine gegebene Folge mit einer der Folgen aus Proposition 2.17.

Schließlich wollen wir Konvergenz von Folgen benutzen, um abgeschlossene Mengen einmal anders zu charakterisieren.

2.24. Lemma. *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ (oder $\subset \overline{\mathbb{R}}$) ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede in $\mathbb{R}$ (oder in $\overline{\mathbb{R}}$) konvergente Folge (a_n) in M der Grenzwert bereits in M liegt.*

Beweis. Zu „$\Longrightarrow$“ sei M abgeschlossen und $x \notin M$. Da $\mathbb{R} \setminus M$ (bzw. $\overline{\mathbb{R}} \setminus M$) offen ist, existiert eine Umgebung U von x, die M nicht trifft, folglich auch keine Folgenglieder von (a_n) enthält. Also kann kein Punkt $x \notin M$ Grenzwert oder Häufungspunkt von (a_n) sein. Mithin liegen Grenzwerte konvergenter Folgen in M wieder in M.

Zu „$\Longleftarrow$“ zeigen wir umgekehrt: wenn M nicht abgeschlossen ist, gibt es eine Folge in M, die gegen ein $x \notin M$ konvergiert. Dazu wählen wir einen Randpunkt von $\mathbb{R} \setminus M$ (bzw. $\overline{\mathbb{R}} \setminus M$). Da jede Umgebung von x die Menge M trifft, finden wir eine Folge a_n in M mit $|a_n - x| < \frac{1}{n}$ falls $x \in \mathbb{R}$, bzw. $\pm a_n > n$ falls $x = \pm\infty$. Also ist (a_n) eine Folge mit Grenzwert $x \notin M$. □

2.2. Konvergenzkriterien

Im letzten Abschnitt haben wir die Begriffe „Konvergenz“ und „Grenzwert“ definiert, und auch einige explizit gegebene Folgen auf Konvergenz untersucht. Dabei mussten wir zunächst den Grenzwert „raten“, und dann nachweisen, dass die Folge gegen diesen Wert konvergiert.

In diesem Abschnitt wollen wir lernen, wie man einer Folge ansehen kann, ob sie konvergiert, auch wenn man den Grenzwert nicht kennt. Das ist wichtig, da man manche reelle Zahlen am einfachsten als Limes einer Folge angibt. Ein Beispiel davon ist die Konstruktion von $\sqrt{2}$ in Punkt (2) am Anfang von Abschnitt 1.5, die wir in Übung 4 von Blatt I.6 verallgemeinert haben. Dass man reelle Zahlen überhaupt als Grenzwerte von Folgen angeben kann, hängt natürlich wieder mit der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zusammen.

Wir beginnen mit einer direkten Folgerung aus der Vollständigkeit der Anordnung von $\mathbb{R}$.

2.25. Definition. Seien $(M, \leq)$ und $(N, \leq)$ Mengen mit Ordnung, und sei $F\colon M \to N$ eine Abbildung. Dann heißt F

(1) *monoton steigend* oder *ordnungserhaltend,* wenn $a \leq b \Longrightarrow F(a) \leq F(b)$,
(2) *streng monoton steigend,* wenn $a < b \Longrightarrow F(a) < F(b)$,
(3) *monoton fallend* oder *ordnungsumkehrend,* wenn $a \leq b \Longrightarrow F(a) \geq F(b)$,
(4) *streng monoton fallend,* wenn $a < b \Longrightarrow F(a) > F(b)$,

jeweils für alle a, $b \in M$. Man nennt F kurz *monoton,* wenn F monoton steigt oder monoton fällt, und *streng monoton,* wenn F streng monoton steigt oder monoton fällt.

2.26. Bemerkung. Man überlegt sich leicht, dass eine monotone Abbildung genau dann streng monoton ist, wenn sie injektiv ist.

2.27. Definition. Sei M eine Menge und $(N, \leq)$ eine Menge mit einer Halbordnung. Dann heißt eine Abbildung $F\colon M \to N$ *von unten beschränkt* bzw. *von oben beschränkt,* wenn dasselbe für ihr Bild $\operatorname{im} F$ in N gilt. Ist F von unten und von oben beschränkt, so nennt man F kurz *beschränkt.*

2.28. Beispiel. Reelle Folgen sind Abbildungen von $(\mathbb{N}, \leq)$ nach $(\mathbb{R}, \leq)$, also ist es sinnvoll, von monotonen und von beschränkten Folgen zu sprechen. Man beachte, dass jede Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$ von unten durch $-\infty$ und von oben durch ∞ beschränkt ist, so dass Beschränktheit in $\overline{\mathbb{R}}$ automatisch erfüllt ist, nicht aber in $\mathbb{R}$.

(1) Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ steigt streng monoton, ist aber in $\mathbb{R}$ nicht beschränkt. Sie konvergiert in $\overline{\mathbb{R}}$ gegen ∞, und divergiert in $\mathbb{R}$.
(2) Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ fällt streng monoton und ist beschränkt. Sie konvergiert in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\overline{\mathbb{R}}$ gegen 0.
(3) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Punkt (2) in Abschnitt (1.5) fällt streng monoton und ist von unten durch 1 beschränkt. Beides folgt aus Aufgabe 4a) von Blatt I.6, indem man mit $a = 2$ und $b = 1$ startet, dann ist a_n genau die obige Folge und $b_n = \frac{2}{a_n}$. Die Folge (a_n) konvergiert gegen $\sqrt{2}$. Da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, divergiert die Folge in $\mathbb{Q}$.

Das folgende Konvergenzkriterium ist eine direkte Folgerung aus der in Abschnitt 1.5 erklärten Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$. In der Tat zeigt das obige Beispiel (3), dass es ohne Vollständigkeit nicht geht.

2.29. Satz (Monotoniekriterium). *Jede monotone, beschränkte Folge reeller Zahlen konvergiert in $\mathbb{R}$. Jede monotone erweiterte reelle Folge konvergiert in $\overline{\mathbb{R}}$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die erste Behauptung. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte monotone Folge. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass (a_n) monoton steigt, ansonsten fällt sie, und wir betrachten stattdessen die monoton steigende Folge $(-a_n)$ und benutzen Satz 2.22 (2).

Da (a_n) beschränkt ist, existiert
$$b = \sup\bigl(\operatorname{im}(a)\bigr) = \sup\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} .$$
Wir behaupten, dass
$$b = \lim_{n\to\infty} a_n .$$
Sei also $\varepsilon > 0$, dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > b - \varepsilon$, da b ja die kleinste obere Schranke von $\operatorname{im}(a)$ ist. Aus Monotonie folgt $a_n > b - \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Da b das Supremum war, gilt auch $a_n \leq b$, also
$$a_n \in (b - \varepsilon, b] \subset (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \qquad \text{für alle } n \geq n_0 .$$
Also ist b der Grenzwert, wie behauptet.

Die zweite Behauptung zeigt man ganz analog, wobei man ausnutzt, dass — wie oben bemerkt — jede Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ beschränkt ist. □

Bemerkung. Wir betrachten die Voraussetzungen des Monotoniekriteriums 2.29

(1) Jede konvergente Folge (a_n) ist beschränkt. Denn sei a der Grenzwert und $n_0 \in \mathbb{N}$ zu $\varepsilon = 1$ so gewählt, dass $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$, dann folgt
$$|a_n| \leq \max\bigl\{|a_0|\,, \dots, |a_{n_0-1}|\,, |a| + 1]\bigr\} \;.$$
(2) Nicht jede konvergente Folge ist monoton. Nach Proposition 2.17 konvergiert die Folge $\bigl((-\frac{1}{2})^n\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0, aber nicht monoton.

2.30. Folgerung (Intervallschachtelung). *Es sei $I_n = [a_n, b_n]$ eine Folge abgeschlossener Intervalle in $\mathbb{R}$ mit $I_{n+1} \subset I_n$ und $I_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass*
$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0 \;.$$
Dann gibt es genau eine Zahl $x \in \mathbb{R}$, die in allen I_n liegt.

Beweis. Aus $I_{n+1} \subset I_n$ für alle n folgt, dass die Folge a_n monoton steigend und (durch ein jedes beliebige b_n) von oben beschränkt ist, also existiert nach dem Monotoniekriterium 2.29 ihr Grenzwert
$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \;, \qquad \text{und} \qquad b = \lim_{n\to\infty} b_n$$
existiert genauso, da b_n entsprechend monoton fallend und beschränkt ist. Mit Satz 2.22 folgt $a = b$, da $b_n - a_n$ eine Nullfolge ist.

Setze $x = a$. Dann gilt auf der einen Seite $a_n \leq x \leq b_n$ für alle n. Auf der anderen Seite gibt es für jedes $y < x$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y < a_n$, und für jedes $z > x$ ein n mit $z > b_n$. Also ist x der einzige Punkt im Durchschnitt aller Intervalle I_n. □

Bemerkung. Mit offenen Intervallen funktioniert das nicht immer. Sei etwa $I_n = \bigl(0, \frac{1}{n}\bigr)$, dann gilt $I_{n+1} \subset I_n$, aber der Durchschnitt all dieser Intervalle ist leer.

Als Anwendung der Intervallschachtelung definieren wir Wurzeln und rationale Potenzen positiver Zahlen.

2.31. Satz (Existenz von Wurzeln). *Es gibt genau eine Abbildung $(0, \infty) \times \mathbb{Q} \to (0, \infty)$ mit $(x, a) \mapsto x^a$, so dass für alle x, $y > 0$ und alle a, $b \in \mathbb{Q}$ gilt*

$$x^1 = x \;, \tag{1}$$
$$(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a \tag{2}$$
$$x^{a+b} = x^a \cdot x^b \tag{3}$$
$$x^{a\cdot b} = (x^a)^b \tag{4}$$
$$x^a < y^a \qquad \textit{falls } 0 < x < y \textit{ und } a > 0, \tag{5}$$
$$x^a > y^a \qquad \textit{falls } 0 < x < y \textit{ und } a < 0, \tag{6}$$
$$x^a < x^b \qquad \textit{falls } 1 < x \textit{ und } a < b, \qquad \textit{und} \tag{7}$$
$$x^a > x^b \qquad \textit{falls } 0 < x < 1 \textit{ und } a < b. \tag{8}$$

Wir nennen x^a die a-te *Potenz* von x und $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ die n-te Wurzel von x für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Beachte: Wir können x^n für alle $x \in \mathbb{R}$ definieren, wenn $n \in \mathbb{N}$. Wenn wir $n \in \mathbb{Z}$ zulassen wollen, folgt $x^{-1} = \frac{1}{x}$, und wir müssen $x = 0$ ausschließen. Wenn wir rationale Exponenten zulassen wollen, müssen wir uns sogar auf positive reelle Zahlen einschränken.

Beweis. Zunächst definieren wir x^n für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv wie in Definition 1.38 (3), dadurch ergibt sich wegen (3) auch die Eindeutigkeit. Mit $x^{-n} = (x^{-1})^n$ erhalten wir x^n für alle $n \in \mathbb{Z}$. Mit vollständiger Induktion und den Rechenregeln für angeordnete Körper in Bemerkung 1.61 ergeben sich für alle x, $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und alle a, $b \in \mathbb{Z}$ die Rechenregeln (1)–(8).

Als nächstes konstruieren wir $\sqrt[q]{x}$ für $0 < x \leq 1$ und $q \in \mathbb{N}$ durch Intervallschachtelung. Dazu setzen wir $I_0 = [a_0, b_0] = [0, 1]$, dann folgt $0^q = 0 < x \leq 1^q = 1$. Wir definieren I_{n+1} rekursiv, indem wir I_n halbieren und dasjenige Teilintervall bestimmen, in dem wir $\sqrt[q]{x}$ vermuten. Das bedeutet, wir setzen

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] & \text{falls } \left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^q \geq x, \text{ und} \\ \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right] & \text{falls } \left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^q < x. \end{cases}$$

Dann erfüllen die Intervalle I_n die Voraussetzungen der Folgerung 2.30, insbesondere gilt $b_n - a_n = 2^{-n}$, was nach Proposition 2.17 ja eine Nullfolge bildet.

Wir erhalten also einen eindeutigen Grenzwert y. Dieser erfüllt

$$(*) \qquad a_n^q \leq y^q \leq b_n^q$$

nach (5), was für $q \in \mathbb{N}$ ja bereits bewiesen war. Die Intervalle $[a_n^q, b_n^q]$ bilden ebenfalls eine Intervallschachtelung mit

$$b_n^q - a_n^q = (b_n - a_n) \cdot \left(a_n^{q-1} + a_n^{q-2} b_n + \cdots + b_n^{q-1}\right) \leq 2^{-n}\, q\ .$$

Der Grenzwert dieser Intervallschachtelung ist nach Konstruktion gerade x, aus (*) folgt also $y^q = x$. Aus (5) für $a = q \in \mathbb{N}$ folgt sofort die Eindeutigkeit der Wurzeln. Wir schreiben daher $y = \sqrt[q]{x}$. Für $x > 1$ definieren wir $\sqrt[q]{x} = \left(\sqrt[q]{x^{-1}}\right)$. Anschließend setzen wir $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$; auch hier ergibt sich die Eindeutigkeit aus den Rechenregeln.

Zu überprüfen bleiben die Rechenregeln für beliebige rationale Exponenten. Regel (1) ist bereits klar, da $1 \in \mathbb{Z}$. Zu (4) überlegen wir uns, dass $x^{\frac{p}{q}}$ eine Zahl y ist mit $y^q = x^p$, und $(x^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}}$ eine Zahl z mit $z^s = y^r$. Es folgt $z^{sq} = y^{rq} = x^{rs}$, also $z = x^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}}$. Als nächstes zeigt man (5) und (6) für $a = \frac{p}{q}$, indem man auf beiden Seiten q-te Potenzen nimmt. Aus diesen beiden Regeln folgt auch leicht die Eindeutigkeit der Potenzen. Schließlich führt man auch (2) und (3) sowie (7) und (8) auf die entsprechenden Regeln für ganze Exponenten zurück, indem man beide Seiten mit dem geeigneten Nenner potenziert. $\square$

2.32. Definition. Es sei (a_n) eine Folge in einer beliebigen Menge M und (i_n) eine streng monoton steigende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt $(a_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von (a_n) mit *Indexfolge* (j_n).

2.33. Beispiel. Wir betrachten die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Folgen $(1)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(-1)_{n\in\mathbb{N}}$ sind konstante, also konvergente Teilfolgen, während (a_n) selbst nach Beispiel 2.13 (3) divergiert.

2.34. Lemma. *Es sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Dann ist b genau dann ein Häufungspunkt von (a_n), wenn eine Teilfolge der Folge (a_n) gegen b konvergiert.*

Beweis. Zu „$\Longleftarrow$“ sei U Umgebung von b. Nach Voraussetzung liegen fast alle Glieder der Teilfolge in U, das sind unendlich viele Glieder der ursprünglichen Folge, da die Indexfolge nach Bemerkung 2.26 injektiv ist.

Für „$\Longrightarrow$“ benutzen wir, dass $\mathbb{R}$ archimedisch ist. Wir konstruieren eine Teilfolge von (a_n) mit Indexfolge (j_n) rekursiv wie folgt. Wir starten mit $j_0 = 0$. Sei jetzt $n \geq 1$. Da unendlich viele Folgenglieder in der Umgebung $\big(b-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}\big)$ liegen, finden wir einen Index $j_n > j_{n-1}$ mit

$$|a_{j_n} - b| < \frac{1}{n} \; .$$

Damit ist sichergestellt, dass die Indexfolge (j_n) streng monoton steigt. Nach Bemerkung 2.23 konvergiert die Teilfolge gegen b wie behauptet. □

Wir werden dieses Lemma benutzen, um Teilfolgen und Häufungspunkte zu konstruieren.

2.35. Satz. *Es sei (a_n) eine Folge erweiterter reeller Zahlen.*

(1) *Dann besitzt (a_n) eine monotone Teilfolge,*
(2) *und*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup\big\{ \inf\{ a_n | n \geq n_0 \} \bigm| n_0 \in \mathbb{N} \big\} \quad \in \quad \overline{\mathbb{R}}$$

ist der kleinste und

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf\big\{ \sup\{ a_n | n \geq n_0 \} \bigm| n_0 \in \mathbb{N} \big\} \quad \in \quad \overline{\mathbb{R}}$$

der größte Häufungspunkt von (a_n).

2.36. Definition. Man nennt $\liminf_{n\to\infty} a_n$ den *Limes inferior* und $\limsup_{n\to\infty} a_n$ den *Limes superior* der Folge (a_n).

Obwohl die beiden Teilaussagen im obigen Satz anscheinend nicht viel miteinander zu tun haben, lassen sie sich sehr gut gemeinsam beweisen.

Beweis von Satz 2.35. Wir betrachten in (2) nur den Limes superior, denn es gilt offensichtlich

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\limsup_{n\to\infty} (-a_n) \; .$$

Nach Konstruktion fällt die Folge

$$b_n = \sup\{ a_m \mid m \geq n \}$$

monoton, und aus dem Monotoniekriterium 2.29 folgt

$$b = \lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \ .$$

Wir nennen ein Folgenglied a_n „Aussichtspunkt“, wenn $a_n \geq a_m$ für alle $m > n$, das heißt, wenn $a_n = b_n$.

Wenn es unendlich viele Aussichtspunkte gibt, bilden diese eine monoton fallende Teilfolge, sowohl von (a_n) als auch von (b_n). Insbesondere ist b dann ein Häufungspunkt von (a_n) nach Lemma 2.34.

Wenn es nur endlich viele Aussichtspunkte gibt, betrachten wir den mit dem größten Index n_0. Dann folgt $a_n \leq b$ für alle $n > n_0$, denn ansonsten fände man weitere Aussichtspunkte. Auch im Falle $a_n = b$ für $n > n_0$ hätte man einen weiteren Aussichtspunkt, es folgt also $a_n < b$ für alle $n > n_0$. Wir setzen $j_0 = n_0 + 1$ und finden dann zu jedem j_n ein $j_{n+1} > j_n$ mit $a_{j_{n+1}} > a_{j_n}$ und $|a_n - b| < \frac{1}{n}$, erhalten also eine monoton steigende Teilfolge von (a_n) mit Grenzwert b.

In beiden Fällen ist klar, dass die Folge (a_n) keinen größeren Häufungspunkt als b haben kann. □

2.37. Folgerung (Satz von Bolzano-Weierstraß für $\mathbb{R}$). *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Häufungspunkt.*

Beweis. Nach Satz 2.35 (2) besitzt die Folge Häufungspunkte in $\overline{\mathbb{R}}$. Da diese aber nicht außerhalb der Schranken liegen können, liegen sie sogar in $\mathbb{R}$. □

2.38. Bemerkung. Falls die Folge (a_n) konvergiert, ist ihr Grenzwert der einzige Häufungspunkt nach Lemma 2.15. In diesem Fall gilt also

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \ .$$

Umgekehrt konvergiert eine Folge, wenn Limes inferior und Limes superior übereinstimmen. Das heißt, eine Folge, die in $\overline{\mathbb{R}}$ nur einen Häufungspunkt hat, konvergiert.

Denn falls der einzige Häufungspunkt a einer Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ liegt, folgt für alle $\varepsilon > 0$, dass $a_n < a+\varepsilon$ für fast alle n, da $a = \limsup_{n\to\infty} a_n$, sowie $a_n > a-\varepsilon$ für fast alle n, da $a = \liminf_{n\to\infty} a_n$. Also konvergiert die Folge gegen a wegen Bemerkung 2.23.

Falls $\liminf_{n\to\infty} a_n = \infty$, gilt für jedes $C \in \mathbb{R}$, dass $a_n > C$ für fast alle n, also konvergiert (a_n) gegen ∞; analog konvergiert (a_n) gegen $-\infty$, falls $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Beispiel. (1) Außer dem Limes inferior und dem Limes superior kann es beliebig viele andere Häufungspunkte geben. Für die Folge $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ beispielsweise ist jeder Punkt in $[-1, 1]$ ein Häufungspunkt

(Winkel in Bogenmaß gemessen).

(2) Limes inferior und Limes superior „funktionieren“ nur in $\overline{\mathbb{R}}$ so wie in Bemerkung 2.38. Beispielsweise ist die Aussage „jede Folge mit nur einem Häufungspunkt konvergiert“ in $\mathbb{R}$ falsch; betrachte etwa (a_n) mit

$$a_n = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ gerade, und} \\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Obwohl $\liminf_{n\to\infty} a_n = 1$ der einzige Häufungspunkt in $\mathbb{R}$ ist, divergiert die Folge, denn $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty \notin \mathbb{R}$ ist ein weiterer Häufungspunkt.

2.3. Metrische Vollständigkeit

Wir kommen nun zu einem anderen Konvergenzkriterium, das nicht die Monotonie einer Folge benutzt, sondern die Abstände zwischen einzelnen Folgengliedern. Zu diesem Zweck arbeiten wir ab sofort in $\mathbb{R}$, nicht mehr in $\overline{\mathbb{R}}$.

Wir lernen außerdem den Begriff des metrischen Raumes kennen, der noch häufiger eine Rolle spielen wird. Dabei werden wir die Begriffe „Umgebung“ noch einmal unter einem anderen Gesichtspunkt definieren. Für $\mathbb{R}$ verändert sich die Bedeutung dieses Begriffs nicht, so dass auch die davon abgeleiteten Begriffe „offen“, „abgeschlossen“, „innerer Punkt“, „Randpunkt“, „Grenzwert“ und „Häufungspunkt“ immer noch die gleiche Bedeutung haben werden.

2.39. Definition. Seien x, $y \in \mathbb{R}$, dann heißt $d(x,y) = |x-y| \in [0,\infty)$ der *Abstand* zwischen x und y.

2.40. Definition. Es sei M eine Menge und $d\colon M \times M \to [0,\infty]$ eine Abbildung. Dann heißt d eine *Abstandsfunktion,* oder *Metrik* wenn für alle x, y, $z \in M$ gilt

(1) *Positivität:* $d(x,x) = 0$ und $d(x,y) > 0$ falls $x \neq y$,
(2) *Symmetrie:* $d(y,x) = d(x,y)$, und
(3) *Dreiecksungleichung:* $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Eine *metrischer Raum* (M,d) ist eine Menge M mit einer Abstandsfunktion d.

2.41. Beispiel. Die reellen Zahlen mit dem in Definition 2.39 definierten Abstand bilden einen metrischen Raum, denn für alle x, y, $z \in \mathbb{R}$ gilt nach Bemerkung 1.64 folgendes.

$$|x-y| \geq 0 \qquad \text{und} \qquad |x-y| = 0 \Longleftrightarrow x = y\ , \tag{1}$$

$$|y-x| = |-(x-y)| = |x-y|\ , \qquad \text{und} \tag{2}$$

$$|x-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y| + |y-z|\ . \tag{3}$$

Wenn wir die Abstandsfunktion d auf die rationalen Zahlen einschränken, erhalten wir ebenfalls einen metrischen Raum $(\mathbb{Q},d)$.

2.42. Beispiel. Die *komplexen Zahlen* werden definiert als Menge

$$\mathbb{C} = \{\, x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \,\} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;,$$

versehen mit den Grundrechenarten

$$\begin{aligned} (u + iv) + (x + iy) &= (u + x) + i(v + y) \;, \\ (u + iv) \cdot (x + iy) &= (ux - vy) + i(uy + vx) \;. \end{aligned}$$

Das Element $0 = 0 + i0$ ist neutral bezüglich der Addition, das Element $1 = 1 + i0$ ist neutral bezüglich der Multiplikation. Die Zahl $i = 0 + i1$ hat die besondere Eigenschaft, dass

$$i^2 = (-i)^2 = -1 \;.$$

Die *komplexe Konjugation* wird gegeben durch

$$\overline{(x + iy)} = x - iy \;.$$

Für alle $z = x + iy$, $w = u + iv \in \mathbb{C}$ folgt

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \qquad \text{und} \qquad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \;.$$

Für alle $z = x + iy$ ist

$$z\bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2$$

reell und nicht negativ. Man kann jetzt zeigen, dass $(\mathbb{C}, +, \cdot\,)$ ein Körper ist. Beispielsweise wird das multiplikative Inverse von $z \neq 0$ gegeben durch

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \;.$$

Da der Körper $\mathbb{C}$ ein Element i mit $i^2 = -1$ enthält, lässt er sich nicht anordnen. Somit können wir nicht über die Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{C}$ sprechen.

Stattdessen können wir $\mathbb{C}$ als metrischen Raum betrachten. Dazu definiert man den *Absolutbetrag* durch

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \in (0, \infty) \;,$$

also durch die euklidische Länge des Vektors (x, y). Man überprüft, dass die Eigenschaften aus Bemerkung 1.64 auch hier gelten, insbesondere auch die Dreiecksungleichung (5). Denn seien z und $w \in \mathbb{C}$. Falls $z = 0$, gilt $|z + w| = |w| = |z| + |w|$. Ansonsten schreibe $\frac{w}{z} = x + iy$. Aus $x^2 \leq x^2 + y^2$ folgt

$$\begin{aligned} |z + w|^2 = |z|^2 \cdot \left|1 + \frac{w}{z}\right|^2 &= |z|^2 \cdot \bigl((1 + x)^2 + y^2\bigr) = |z|^2 \cdot (1 + 2x + x^2 + y^2) \\ &\leq |z|^2 \cdot \bigl(1 + 2\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2\bigr) = |z|^2 \cdot \left(1 + \left|\frac{w}{z}\right|\right)^2 = (|z| + |w|)^2 \;, \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich durch Wurzelziehen die Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag.

Wie in Beispiel 2.41 erhalten wir eine Abstandsfunktion $d\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to [0, \infty]$ auf $\mathbb{C}$ durch

$$d(z, w) = |z - w| = \sqrt{(x - u)^2 + (v - w)^2} \;.$$

Wir wollen jetzt Konvergenz in metrischen Räumen erklären. Dazu definieren wir wie in Abschnitt 2.1 zunächst den Begriff der Umgebung.

2.43. Definition. Sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $x \in M$ ein Punkt und $U \subset M$ eine Teilmenge. Der *metrische Ball* vom Radius $\varepsilon > 0$ um x oder die *ε-Umgebung* ist die Teilmenge

$$B_\varepsilon(x) = \{\, y \in M \mid d(x, y) < \varepsilon \,\} .$$

Die Teilmenge U heißt *Umgebung* von x, wenn $B_\varepsilon(x) \subset U$ für ein $\varepsilon > 0$.

Wir definieren die Begriffe „innerer Punkt“, „Randpunkt“, wortwörtlich wie in Definition 2.3, „offen“, „abgeschlossen“ wie in Definition 2.8, sowie „Grenzwert“, „Häufungspunkt“, „Konvergenz“ und „Divergenz“ von Folgen wie in Definition 2.12.

Bemerkung. Wir können jetzt Bemerkung 2.23 (1) wie folgt umformulieren. Sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{N}$, und sei $x \in M$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) Es gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
(2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.
(3) Es gilt $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

2.44. Bemerkung. Die oben definierten Begriffe bedeuten für den metrischen Raum $(\mathbb{R}, d)$ das gleiche wie in den Definitionen 2.3 und 2.8. Das folgt aus Bemerkung 2.5 (1), da

$$B_\varepsilon(x) = \Big\{\, y \in \mathbb{R} \;\Big|\; |y - x| < \varepsilon \,\Big\} = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) .$$

Man beachte aber, dass sich die Abstandsfunktion d auf $\mathbb{R}$ nicht einfach so auf $\overline{\mathbb{R}}$ ausdehnen lässt, dass die Punkte ∞ und $-\infty$ die gleichen Umgebungen im obigen Sinne haben wie in Abschnitt 2.1.

2.45. Bemerkung. Die meisten der obigen Resultate, wie etwa das Monotoniekriterium oder die Existenz von Limes inferior und Limes superior beruhen auf der Anordnung der reellen Zahlen. Nur Lemma 2.34 über die Existenz konvergenter Teilfolgen gilt für alle metrischen Räume, und zwar mit (nahezu) dem gleichen Beweis wie oben.

2.46. Definition. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt *beschränkt,* wenn es einen Punkt $x \in M$ und $R < \infty$ gibt, so dass $U \subset B_R(x)$. Eine Folge (a_n) in M heißt *beschränkt,* wenn $\operatorname{im}(a) = \{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \subset M$ beschränkt ist.

Für Teilmengen von $\mathbb{R}$ und Folgen in $\mathbb{R}$ bedeutet Beschränktheit also immer noch das gleiche wie in Definition 1.65.

2.47. Bemerkung. Um Resultate für $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ übertragen, kann man oft *Real-* und *Imaginärteil* komplexer Zahlen separat betrachten, das heißt, anstelle von $z \in \mathbb{C}$ betrachtet man

$$\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) .$$

Dann gilt
$$\max\{|\mathrm{Re}(z)|\,, |\mathrm{Im}(z)|\} \le |z| \le |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \ .$$
Begründung: Da alle obigen Größen positiv sind, dürfen wir quadrieren. Die obigen Ungleichungen sind also äquivalent zu
$$\max\bigl\{\mathrm{Re}(z)^2, \mathrm{Im}(z)^2\bigr\} \le \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \le \mathrm{Re}(z)^2 + 2\,|\mathrm{Re}(z)|\,|\mathrm{Im}(z)| + \mathrm{Im}(z)^2 \ ,$$
und diese Ungleichungen sind offensichtlich erfüllt, da jeder einzelne Summand positiv ist.

2.48. Satz (Satz von Bolzano-Weierstraß für $\mathbb{C}$). *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ besitzt einen Häufungspunkt.*

Beweis. Es sei (z_n) eine beschränkte Folge komplexer Zahlen. Nach Bemerkung 2.47 sind dann auch die Folgen $(\mathrm{Re}(z_n))$ und $(\mathrm{Im}(z_n))$ beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß für $\mathbb{R}$ gibt es eine Teilfolge $(\mathrm{Re}(z_{j_n}))_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Die entsprechende Teilfolge $(\mathrm{Im}(z_{j_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ von $(\mathrm{Im}(z_n))$ ist nach wie vor beschränkt, besitzt also ihrerseits eine konvergente Teilfolge $(\mathrm{Im}(z_{j_{k_n}}))$ mit einem Grenzwert $y \in \mathbb{R}$. Mit Bemerkung 2.47 sehen wir, dass
$$\bigl|z_{j_{k_n}} - (x+iy)\bigr| \le \bigl|\mathrm{Re}(z_{j_{k_n}}) - x\bigr| + \bigl|\mathrm{Im}(z_{j_{k_n}}) - y\bigr| \ ,$$
also konvergiert die entsprechende Teilfolge von (z_n) gegen $z = x + iy$. Nach Bemerkung 2.45 gilt Lemma 2.34 auch für $\mathbb{C}$, also ist z Häufungspunkt der ursprünglichen Folge (z_n). □

Bemerkung. Die Folge $(\mathrm{Re}(z_{j_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Definition 2.32 genau dann eine Teilfolge von $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$, wenn (j_n) eine streng monoton steigende Folge natürlicher Zahlen ist. Genauso ist $(\mathrm{Im}(z_{j_{k_n}}))$ genau dann eine Teilfolge von $(\mathrm{Im}(z_{j_n}))_{n\in\mathbb{N}}$, wenn (k_n) eine streng monoton steigende Folge natürlicher Zahlen ist. Ist das beides der Fall, so steigt auch $(j_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton, und $(z_{j_{k_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von (z_n).

Später werden wir uns nicht mehr die Mühe machen, Teilfolgen von Teilfolgen wie oben explizit anzugeben. Meistens sagt man nur so etwas wie: „Nach Übergang zu einer Teilfolge konvergiert $(\mathrm{Re}(z_n))$, nach erneutem Übergang zu einer Teilfolge konvergiert auch $(\mathrm{Im}(z_n))$."

Wir kommen nun zum nächsten wichtigen Konvergenzkriterium für Folgen.

2.49. Definition. Eine Folge (a_n) in einem metrischen Raum (M, d) heißt *Cauchy-Folge,* wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $d(a_m, a_n) < \varepsilon$ für alle m, $n \ge n_0$.

Eine Metrik d auf M bzw. ein metrischer Raum (M, d) heißen *vollständig,* wenn jede Cauchy-Folge in M konvergiert.

2.50. Bemerkung. Jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (M, d) ist eine Cauchy-Folge. Sei nämlich a der Grenzwert. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \ge n_0$, also folgt aus der Dreiecksungleichung für m, $n \ge n_0$, dass
$$d(a_m, a_n) \le d(a_m, a) + d(a_n, a) < \varepsilon \ .$$

Beispiel. Die Folge (a_n) in $\mathbb{Q}$ aus Punkt (2) in Abschnitt 1.5 mit

$$a_0 = 2 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + 2/a_n}{2}$$

ist sicher eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, da sie gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. Da aber der Abstandsbegriff auf $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ der gleiche ist, ist (a_n) auch in $\mathbb{Q}$ eine Cauchy-Folge, obwohl sie in $\mathbb{Q}$ nicht konvergiert.

2.51. Satz (Konvergenzkriterium von Bolzano-Cauchy für $\mathbb{R}$). *Die reellen Zahlen sind metrisch vollständig, das heißt, jede Cauchy-Folge reeller Zahlen konvergiert.*

Beweis. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Dann ist (a_n) beschränkt, denn zu $\varepsilon = 1$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ wie in Definition 2.49, und wir erhalten

$$|a_n| \leq \max\big\{|a_0|, \dots, |a_{n_0-1}|, |a_{n_0}| + 1]\big\} ,$$

vergleiche 2.2 Also existiert ein Häufungspunkt a nach dem Satz 2.37 von Bolzano-Weierstrass.

Sei jetzt $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir finden ein neues $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $m, n \geq n_0$, da (a_n) Cauchy-Folge ist. Da die $\frac{\varepsilon}{2}$-Umgebung des Häufungspunktes a unendlich viele Folgenglieder enthält, existiert ein festes $m \geq n_0$, so dass $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$|a_n - a| \leq |a_m - a_n| + |a_m - a| < \varepsilon ,$$

also liegen fast alle a_n in der ε-Umgebung von a. Da das für alle $\varepsilon > 0$ gilt, ist a der Grenzwert der Folge. □

Bemerkung. Im Beweis haben wir letztlich nur die metrische Vollständigkeit auf die Ordnungsvollständigkeit zurückgeführt. In der Tat sind die Begriffe „metrisch vollständig“ und „ordnungsvollständig“ für angeordnete Körper äquivalent.

2.52. Folgerung (Konvergenzkriterium von Bolzano-Cauchy für $\mathbb{C}$). *Die komplexen Zahlen sind metrisch vollständig, das heißt, auch jede Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert.*

Beweis. Wir geben zwei Beweise. Da der Satz von Bolzano-Weierstraß auch in $\mathbb{C}$ gilt, können wir einfach obigen Beweis kopieren.

Alternativ dazu sei (z_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ wie in Definition 2.49. Wegen Bemerkung 2.47 sind auch $(\operatorname{Re}(z_n))$ und $(\operatorname{Im}(z_n))$ Cauchy-Folgen. Nach Satz 2.51 existieren daher

$$x = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(z_n) \qquad \text{und} \qquad y = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(z_n) .$$

Setze $z = x + iy$, dann folgt mit der zweiten Ungleichung aus Bemerkung 2.47, dass (z_n) gegen z konvergiert. □

2.4. Reihen

Unendliche Summen heißen in der Mathematik auch Reihen. Auf den ersten Blick sind Reihen nichts anderes als spezielle Darstellungen von Folgen reeller Zahlen, daher übertragen sich viele Ergebnisse aus den vorangegangenen Abschnitten auf Reihen. Auf der anderen Seite gibt es einige neue Konvergenzkriterien für Reihen, und es treten sogar völlig neue Phänomene wie absolute Konvergenz auf. Sofern nichts anderes angegeben ist, ist $\Bbbk$ einer der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Wir beginnen mit einer Notation, die wir schon längst hätten einführen können. Sei $(a_0, \dots, a_n)$ eine Tupel von Zahlen oder $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zahlen, etwa in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, dann definieren wir die *endlichen Summen* $\sum_{i=0}^n a_k$ rekursiv durch

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + \dots + a_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n < 0, \text{ und} \\ a_n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k & \text{falls } n \geq 0. \end{cases}$$

Genauso definiert man *endliche Produkte* $\prod_{k=0}^n a_k$ rekursiv durch

$$\prod_{k=0}^n = a_0 \cdots a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n < 0, \text{ und} \\ a_n \cdot \prod\limits_{k=0}^{n-1} a_k & \text{falls } n \geq 0. \end{cases}$$

Wir setzen den Wert des „leeren Produkts“ als 1 fest, denn dann gilt

$$\prod_{k=0}^0 a_k = a_0 \cdot \prod_{k=0}^{-1} a_k = a_0 \cdot 1 = a_0$$

wie gewünscht. Hätten wir einen anderen Wert (z.B. 0) für das leere Produkt gewählt, so bekämen wir ein anderes Ergebnis.

Außerdem kann man natürlich anstelle von k jeden anderen Buchstaben als Summationsindex verwenden. Analog definiert man Summen und Produkte, die bei $k = 1$ oder einem anderen Index in $\mathbb{N}$ beginnen.

2.53. Beispiel. (1) Nach Proposition 1.45 gilt

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n\,(n-1)}{2} \; .$$

(2) In jedem Körper filt für die *geometrische Summe,* dass

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \qquad \text{für alle } a \neq 1.$$

Das folgt entweder mit vollständiger Induktion oder aus

$$(a-1) \cdot \sum_{k=0}^n a^k = \sum_{k=0}^n (a^{k+1} - a^k) = \sum_{k=1}^{n+1} a^k - \sum_{k=0}^n a^k = a^{n+1} - a^0 \; ,$$

da sich die allermeisten Summanden wegheben — so etwas nennt man auch *Teleskopsumme,* da sie sich wie ein Taschenteleskop zusammenschieben lässt.

(3) Fakultät und Binomialkoeffizienten sind für n, $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ definiert durch

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \qquad \text{und} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n+1-j}{j} \ .$$

Es sei nach wie vor $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\Bbbk = \mathbb{C}$.

2.54. Definition. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\Bbbk$. Die Folge

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

in $\Bbbk$ heißt die Folge der *Partialsummen* der *Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Die einzelnen a_k heißen *Reihenglieder.* Wenn die Folge der Partialsummen in $\Bbbk$ konvergiert, sagt man, die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergiere,* und bezeichnet ihren Grenzwert ebenfalls mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \ .$$

Anderfalls sagt man, die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *divergiere.*

Also kann das Symbol $\sum_{k=0}^{\infty}$ der „unendlichen Summe“ sowohl für eine Folge als auch für ihren Grenzwert stehen. Das wird aus dem Kontext aber jeweils klar. Außerdem betrachten wir bei Reihen in $\mathbb{R}$ — außer in seltenen Ausnahmefällen — nur Konvergenz in $\mathbb{R}$, nicht in $\overline{\mathbb{R}}$.

Es gibt ein einfaches notwendiges Kriterium für die Konvergenz einer Reihe.

2.55. Bemerkung. Wenn eine Reihe konvergiert, bilden ihre Glieder eine Nullfolge. Denn seien a_n die Reihenglieder, und sei b der Grenzwert. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left| b - \sum_{k=0}^{n} a_k \right| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Daraus folgt sofort

$$|a_n| = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right| \leq \left| b - \sum_{k=0}^{n} a_k \right| + \left| b - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right| < 2\varepsilon \ ,$$

also bilden die (a_n) tatsächlich eine Nullfolge.

2.56. Beispiel. Es sei $a \in \Bbbk$. Wir betrachten die *geometrische Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \begin{cases} \dfrac{1}{1-a} & \text{falls } |a| < 1, \text{ und} \\ \text{divergent} & \text{falls } |a| \geq 1. \end{cases}$$

Zur Begründung unterscheiden wir zwei Fälle.

(1) Für $|a| \geq 1$ folgt $|a^n| = |a|^n \geq 1$. Da die Reihenglieder keine Nullfolge bilden, divergiert die geometrische Reihe für $|a| \geq 1$.

(2) Für $|a| \leq 1$ werden die Partialsummen nach Beispiel 2.53 durch

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^n}{1-a} \tag{*}$$

gegeben. Für $|a| < 1$ konvergiert die Folge a^n gegen 0, denn $|a^n - 0| = |a|^n$ wird beliebig klein nach Proposition 2.17. Also konvergiert die geometrische Reihe wie angegeben gegen $\frac{1}{1-a}$.

Beispiel. Ein konkretes Beispiel ist

$$0,9999\dots = \frac{9}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{10^k} = \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1\ .$$

Das Kriterium in Bemerkung 2.55 ist aber nicht hinreichend, wie das folgende Beispiel zeigt.

2.57. Beispiel. Die *harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

divergiert, obwohl ihre Glieder eine Nullfolge bilden. Das folgt aus folgender Überlegung:

$$\sum_{k=1}^{2^N}\frac{1}{k} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^{N-1}+1}+\dots+\frac{1}{2^N}}_{\geq 2^{N-1}\cdot\frac{1}{2^N}=\frac{1}{2}} \geq 1 + \frac{N}{2}\ .$$

Zu jedem $C \in \mathbb{R}$ findet man also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > C$ für alle $n \geq n_0$, die Folge der Partialsummen konvergiert also gegen ∞. Mit anderen Worten divergiert die harmonische Reihe, wenn auch sehr, sehr langsam.

2.58. Satz. *Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen in $\Bbbk$, und $c \in \Bbbk$. Dann konvergieren auch die Reihen*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k) = \sum_{k=0}^{\infty}a_k + \sum_{k=0}^{\infty}b_k$$

$$\textit{und}\qquad \sum_{k=0}^{\infty}(ca_k) = c\sum_{k=0}^{\infty}a_k\ .$$

Insbesondere bilden die konvergenten Reihen einen $\Bbbk$-Vektorraum.

Beweis. Die Partialsummen lauten offenbar

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=0}^{n}a_k + \sum_{k=0}^{n}b_k$$

$$\text{und}\qquad \sum_{k=0}^{n}(ca_k) = c\sum_{k=0}^{n}a_k\ .$$

Die Behauptung folgt dann aus Satz 2.22. □

BEMERKUNG. Analog bilden übrigens auch die konvergenten Folgen mit Grenzwert in $\mathbb{k}$ einen Vektorraum. Die in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergenten Folgen bilden allerdings keinen Vektorraum, denn die Summe zweier Folgen mit den Grenzwerten ∞ und $-\infty$ muss nicht konvergieren.

Wir kommen zu einem einfachen Konvergenzkriterium für alternierende Reihen, das sind Reihen, bei denen aufeinanderfolgende Reihenglieder stets unterschiedliche Vorzeichen haben.

2.59. SATZ (Leibniz-Kriterium). *Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}$, dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\, c_k\ .$$

BEWEIS. Wir betrachten die geraden und die ungeraden Partialsummenfolgen

$$a_n=\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\, c_k \qquad \text{und} \qquad b_n=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\, c_k\ .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1}-a_n&=c_{2n}-c_{2n+1}\geq 0\ ,\\ b_{n+1}-b_n&=-c_{2n+1}+c_{2n+2}\leq 0\ ,\\ b_n-a_n&=c_{2n}\geq 0\\ \text{und}\qquad \lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)&=\lim_{n\to\infty}c_{2n}=0\ , \end{aligned}$$

also erhalten wir eine Intervallschachtelung $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen den Grenzwert der alternierenden Reihe konvergiert. □

2.60. BEISPIEL. Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\frac{1}{k}=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\pm\dots$$

konvergiert, wenn auch sehr, sehr langsam, und zwar gegen $-\log 2$, siehe Bemerkung 4.22 (2).

2.61. BEMERKUNG. Das Kommutativ- und Distributivgesetz der Addition gelten für Reihen im allgemeinen nicht mehr.

(1) Zum Beispiel divergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k=1-1+1-1\pm\dots$$

nach Beispiel 2.56. Aber nach geeigneter Klammerung konvergieren die Reihen

$$(1-1)+(1-1)+\dots=0\neq 1=1+(-1+1)+(-1+1)+\dots\ .$$

Genauer: das Einfügen von Klammern in eine Reihe entspricht dem Übergang zu einer Teilfolge der Folge der Partialsummen. Wenn die ursprüngliche Reihe konvergiert, ändert sich der Grenzwert also nicht; wenn sie divergiert, können Phänomene wie oben auftreten.

(2) Wir ordnen die alternierende harmonische Reihe um und rechnen

$$\begin{aligned} -1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{5}\pm\cdots &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{4k-2}+\frac{1}{4k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4k-2}+\frac{1}{4k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)\frac{1}{k}\neq\sum_{k=1}^{\infty}(-1)\frac{1}{k}\;. \end{aligned}$$

In beliebigen konvergenten Reihen darf man also die Reihenfolge der Summanden nicht beliebig abändern.

Die folgenden Definitionen und Konvergenzkriterien funktionieren in $\mathbb{R}$ genauso gut wie in $\mathbb{C}$.

2.62. Definition. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ in $\Bbbk$ heißt *absolut konvergent,* wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ der Absolutbeträge konvergiert.

Beispiel. (1) Die alternierende harmonische Reihe konvergiert zwar nach dem Leibniz-Kriterium, ist aber nach Beispiel 2.57 nicht absolut konvergent.

(2) Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ konvergiert absolut für $|a|<1$, denn

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|a^k\right| = \sum_{k=0}^{\infty}|a|^k$$

ist dann selbst wieder eine geometrische Reihe.

2.63. Proposition. *Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.*

Beweis. Die Partialsummenfolge

$$\left(\sum_{k=0}^{n}|a_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

ist nach Bemerkung 2.50 eine Cauchy-Folge, da die Reihe der Absolutbeträge konvergiert. Zu $\varepsilon>0$ wähle n_0 wie in Definition 2.49. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\left|\sum_{k=0}^{n}a_k-\sum_{k=0}^{m}a_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n}a_k\right| \le \sum_{k=m+1}^{n}|a_k| = \left|\sum_{k=0}^{n}|a_k|-\sum_{k=0}^{m}|a_k|\right| < \varepsilon$$

für alle m, $n\ge n_0$. Also ist auch die Partialsummenfolge

$$\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

zur Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Cauchy-Folge. Daher konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

□

2.64. Satz. *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *eine beliebige Reihe.*

(1) Majorantenkriterium. *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *eine absolut konvergente Reihe. Wenn* $|a_n| \leq |b_n|$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt, dann konvergiert auch* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut.*
(2) Minorantenkriterium. *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *eine divergente Reihe, und es gelte* $|a_n| \geq |c_n|$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$*. Dann konvergiert* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *nicht absolut.*

Man nennt die Folge (b_n) in (1) eine *Majorante* und die Folge (c_n) in (2) eine *Minorante* der Folge (a_n).

Bemerkung. Um zu zeigen, dass eine Reihe divergiert, reicht (2) nicht aus, dazu betrachte als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ die alternierende harmonische Reihe aus Beispiel 2.60, und als $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ die harmonische Reihe aus Beispiel 2.57.

Um zu zeigen, dass eine Reihe divergiert, kann man das Minoranten-Kriterium nur anwenden, wenn die Reihe reell und alle Reihenglieder positiv sind, da Konvergenz dann gleichbedeutend zu absoluter Konvergenz ist. Andernfalls sollte man — wenn möglich — das Nullfolgen-Kriterium aus Bemerkung 2.55 verwenden.

Beweis von Satz 2.64. Zu (1) benutzen wir das Cauchy-Kriterium für die Folgen der Partialsummen genau wie im Beweis von Proposition 2.63. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir n_0 so groß, dass $|a_n| \leq |b_n|$ für alle $n \geq n_0$ gilt, und

$$\sum_{k=m+1}^{n} |b_n| < \varepsilon$$

für alle m, n mit $n_0 \leq m \leq n$. Dann gilt wieder

$$\left|\sum_{k=0}^{n} |a_k| - \sum_{k=0}^{m} |a_k|\right| = \sum_{k=m+1}^{n} |a_n| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |b_n| < \varepsilon ,$$

also konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

Teil (2) folgt aus (1), wobei (a_n) jetzt die Rolle von (b_n) übernimmt. Wäre (a_n) absolut konvergent, dann auch (c_n). □

2.65. Satz (Wurzelkriterium). *Es sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *eine Reihe und*

$$a = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty];.$$

(1) *Wenn* $a < 1$ *gilt, konvergiert die Reihe absolut.*
(2) *Wenn* $a > 1$ *gilt, divergiert die Reihe.*

Beweis. Zu (1) wähle eine Zahl c mit

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a < c < 1 .$$

Nach Definition des Limes superior in Satz 2.35 existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\sqrt[n]{|a_n|} < c$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt $|a_n| < c^n$, also ist die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c^k$ eine Majorante.

Zu (2) wählen wir eine Teilfolge der a_n aus, so dass $\sqrt[n]{|a_n|}$ gegen den Limes superior konvergiert. Es folgt $|a_n| > 1$ für alle Glieder dieser Teilfolge. Mithin ist die gesamte Folge (a_n) keine Nullfolge, und die Reihe divergiert. □

2.66. Bemerkung. Falls

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 ,$$

ist keine Aussage möglich. Beispielsweise divergiert die harmonische Reihe, wohingegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1$$

konvergiert. Aber für die Reihenglieder gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} = 1 .$$

2.67. Satz (Quotientenkriterium). *Es sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *eine Reihe.*

(1) *Falls*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 ,$$

konvergiert die Reihe absolut.

(2) *Falls*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 ,$$

divergiert die Reihe.

Falls

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq 1 \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} ,$$

ist keine Aussage möglich.

Beweis. Ähnlich wie im obigen Beweis wählen wir zu (1) eine Zahl c mit

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < c < 1 ,$$

dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_{n+1}| < c\,|a_n|$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt per Induktion, dass

$$|a_n| \leq c^{n-n_0}\,|a_{n_0}| ,$$

also bildet die konvergente geometrische Reihe

$$\frac{|a_{n_0}|}{c^{n_0}} \sum_{k=0}^{\infty} c^k$$

eine Majorante, und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert.

Zu (2) finden wir entsprechend $c > 1$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| \geq c^{n-n_0}\,|a_{n_0}|$. Da $c^{n-n_0} \geq 1$ für $n \geq n_0$, bilden die Reihenglieder keine Nullfolge, also divergiert die Reihe. □

Wir kommen auf Bemerkung 2.61 (2) über das Umordnen von Reihe zurück.

2.68. Definition. Eine *Umordnung* einer Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist eine Reihe der Form
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{j(k)}\ ,$$
wobei $j\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung ist.

2.69. Satz (kleiner Umordnungssatz). *Jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe konvergiert, und zwar gegen den gleichen Grenzwert wie die ursprüngliche Reihe.*

Beweis. Es sei
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$$
absolut konvergent und $j\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Zu $\varepsilon > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass
$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=0}^{n_0} |a_k|\right| < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$
Da j bijektiv ist, werden nur endlich viele $m \in \mathbb{N}$ auf $0, \dots, n_0$ abgebildet. Setze
$$m_0 = \max\{\, m \in \mathbb{N} \mid j(m) \leq n_0 \,\}\ .$$
Für ein $m \geq m_0$ setze
$$n_m = \max\{\, j(\ell) \mid 0 \leq \ell \leq m \,\}\ .$$
Dann gilt
$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{m} a_{j(k)} - \sum_{k=0}^{n_0} a_k\right| &= \left|\sum_{0\leq k\leq m} a_{j(k)} - \sum_{0\leq k\leq n_0} a_k\right| = \left|\sum_{\substack{0\leq k\leq m\\ j(k)>n_0}} a_{j(k)}\right| \\ &\leq \sum_{\substack{0\leq k\leq m\\ j(k)>n_0}} \left|a_{j(k)}\right| \leq \sum_{k=n_0+1}^{n_m} |a_k| \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}\ .\end{aligned}$$
In $\sum_{\dots}$ summieren wir jeweils über diejenigen Indizes, die die Bedingung unter dem Summenzeichen erfüllen. Die letzte Gleichung in der oberen Zeile kommt daher, dass wir die Summanden mit Index $j(k) \leq n_0$ aus der ersten Summe durch die zweite eliminieren. Die erste Ungleichung in der zweiten Zeile ist einfach die Dreiecksungleichung wie schon im Beweis von Proposition 2.63. Die zweite Ungleichung kommt daher, dass wir jetzt alle Reihenglieder zwischen $n_0 + 1$ und n_m berücksichtigen, nicht nur die, die von $j(0), \dots, j(m)$

indiziert werden. Für die Ungleichungen in der zweiten Zeile ist es wesentlich, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert.

Insgesamt folgt aus dem obigen, dass

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{m} a_{j(k)} - a\right| &\le \left|\sum_{k=0}^{m} a_{j(k)} - \sum_{k=0}^{n_0} a_k\right| + \left|\sum_{k=0}^{n_0} a_k - a\right| \\ &\le \left|\sum_{k=0}^{m} a_{j(k)} - \sum_{k=0}^{n_0} a_k\right| + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k < \varepsilon \ .\end{aligned}$$

Daher konvergiert die umgeordnete Reihe gegen den gleichen Grenzwert wie die ursprüngliche. □

2.70. Bemerkung. Falls eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ reeller Zahlen zwar konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, kann man einen Grenzwert $c \in \overline{\mathbb{R}}$ vorgeben und die Reihe so umordnen, dass sie gegen c konvergiert. Ein Beispiel haben wir in Bemerkung 2.61 (2) bereits gesehen.

Dazu überlegt man sich zunächst, dass die Reihe der positiven wie auch die Reihe der negativen Reihenglieder divergiert, genauer

$$\sum_{k=0}^{\infty} \max\{0, a_k\} = \infty \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \min\{0, a_k\} = -\infty \ .$$

Konvergierten beide, so wäre die ursprüngliche Reihe sogar absolut konvergent; divergierte nur eine, so würde die gesamte ursprüngliche Reihe gegen ∞ oder $-\infty$ divergieren.

Für $c \in \mathbb{R}$ ordnet man die Reihe um, indem man zunächst der Reihe nach so viele positive Reihenglieder addiert, bis die Summe größer als c ist. Danach addiert man so viele nichtpositive Reihenglieder dazu, dass die Summe kleiner als c wird, dann wieder positive Reihenglieder, und so weiter. Da beide Reihen oben divergieren, hat man immer genug „Material“, um die Zahl c zu überschreiten. Da die Folge der Reihenglieder eine Nullfolge ist, überschreitet man aber c um immer kleinere Beträge, so dass die umgeordnete Reihe zu guter letzt tatsächlich gegen c konvergiert.

Mit einem ähnlichen Trick kann man die Reihe auch so umordnen, dass sie gegen ∞ oder $-\infty$ konvergiert, oder sogar bei beschränkten Partialsummen divergiert.

KAPITEL 3

Stetigkeit und Integral

In diesem Kapitel untersuchen wir endlich Funktionen in einer reellen Variablen, insbesondere stetige Funktionen. Wir zeigen, wie man Nullstellen stetiger Funktionen mit dem Zwischenwertsatz findet. Wir betrachten Folgen und Reihen von Funktionen, zum Beispiel Potenzreihen. Zum Schluss definieren wir das Regelintegral.

3.1. Funktionen und Stetigkeit

Unter einer *Funktion* versteht man eine Abbildung von einer beliebigen Menge in eine Menge von Zahlen, beispielsweise nach $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Wir werden später Funktionen einer reellen Veränderlichen betrachten, das heißt, Funktionen, die auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ definiert sind. Im Moment ist das allerdings noch nicht wichtig.

Um Stetigkeit einzuführen, benötigen wir sowohl im Definitions- wie auch im Wertebereich einen Umgebungsbegriff. Wir haben Umgebungen in Abschnitt 2.1 für die erweiterten reellen Zahlen $\overline{\mathbb{R}}$ und in Abschnitt 2.3 für metrische Räume definiert.

3.1. Bemerkung. Es sei M entweder $\overline{\mathbb{R}}$ oder ein metrischer Raum und $x \in M$. Es sei $\mathcal{U}_x$ die Menge $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{P}(M)$ aller Umgebungen von x in M. Für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}_x$ gilt natürlich $x \in U$, hat $\mathcal{U}_x$ die folgenden Eigenschaften.

$$M \in \mathcal{U}_x \qquad \text{und} \qquad \emptyset \notin \mathcal{U}_x \;, \tag{1}$$

$$U, V \in \mathcal{U}_x \quad \Longrightarrow \quad U \cap V \in \mathcal{U}_x \;, \tag{2}$$

$$U \in \mathcal{U}_x \text{ und } V \supset U \quad \Longrightarrow \quad V \in \mathcal{U}_x \;, \tag{3}$$

$$V \in \mathcal{U}_x \quad \Longrightarrow \quad \text{es gibt } U \in \mathcal{U}_x \text{ mit } U \subset V \text{ und } U \in \mathcal{U}_y \text{ für alle } y \in U \;. \tag{4}$$

Eine Teilmenge von $\mathcal{P}(M)$, die (1)–(3) erfüllt, heißt auch *Filter.* Eigenschaft (4) hilft uns später, wenn wir *Topologien* auf M einführen.

Wir beginnen mit $M = \overline{\mathbb{R}}$. Nach Definition 2.3 enthält jede Umgebung V von $x \in \overline{\mathbb{R}}$ ein Intervall (etwa (a, b) mit $a < x < b$ falls $x \in \mathbb{R}$), und nach Beispiel 2.9 ist dieses Intervall offen, es folgt (4). Auch (1) und (3) sind klar. Für $x \in \mathbb{R}$ und U, $V \in \mathcal{U}_x$ existieren a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ mit $x \in (a, b) \subset U$ und $x \in (c, d) \subset V$. Somit gilt

$$x \in \big(\max\{a, c\}, \min\{b, d\}\big) = (a, b) \cap (c, d) \subset U \cap V \quad \Longrightarrow \quad U \cap V \in \mathcal{U}_x \;.$$

Es folgt (2) für alle $x \in \mathbb{R}$, für $x = \pm\infty$ ist die Begründung analog.

Sei jetzt M metrischer Raum und U Umgebung von $x \in M$. Nach Definition 2.43 umfasst U einen metrischen Ball

$$B_r(x) = \{\, y \in M \mid d(x,y) < r \,\}$$

mit Radius $r > 0$. Sei $y \in B_r(x)$, dann ist $r - d(x,y) > 0$. Für $z \in B_{r-d(x,y)}(y)$ folgt

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) < d(y,x) + r - d(x,y) = r$$

aus der Dreiecksungleichung (3) in Definition 2.40. Also gilt

$$B_{r-d(x,y)}(y) \subset B_r(x) \;,$$

und $B_r(x)$ ist Umgebung aller $y \in B_r(x)$, es folgt (4). Wieder sind (1) und (3) klar. Seien U, $V \in \mathcal{U}_x$ mit $B_r(x) \subset U$ und $B_s(x) \subset V$ für r, $s > 0$, dann folgt (2), da

$$B_{\min\{r,s\}}(x) = B_r(x) \cap B_s(x) \subset U \cap V \;.$$

Für $x \in \overline{\mathbb{R}}$ spielen also die offenen Intervalle um x die gleiche Rolle wie die Bälle in einem metrischen Raum (M,d): jede Umgebung von x enthält solch eine „spezielle“ Umgebung. Man sagt daher, dass die offenen Intervalle um x bzw. die metrischen Bälle um x eine *Umgebungsbasis* von x bilden.

Ab sofort seien M, N, etc. jeweils entweder metrische Räume oder $\overline{\mathbb{R}}$. Genausogut könnten wir hier allgemeiner von „Räumen mit Umgebungsbegriff“ sprechen, in denen es zu jedem Punkt x eine Menge von Umgebungen $\mathcal{U}_x$ mit den gleichen Eigenschaften wir in Bemerkung 3.1 gibt. Im zweiten Semester lernen wir den Begriff des topologischen Raumes kennen, der genau diesen Zweck erfüllen wird.

3.2. Definition. Es sei $F\colon M \to N$ eine Abbildung und $x \in M$. Dann heißt F *stetig bei* x, wenn für jede Umgebung $V \subset N$ von $F(x)$ das Urbild $F^{-1}(V)$ eine Umgebung von x ist. Wenn F bei allen $x \in D$ stetig ist, heißt F *stetig.* Die Menge der stetigen Abbildungen von M nach N wird mit $\mathcal{C}(M,N)$ bezeichnet.

In der Regel wird klar sein, mit welcher Definition von Umgebungen wir arbeiten (zum Beispiel mit Definition 2.43 für Metriken d_M und d_N). Falls das nicht klar ist, können wir zum Beispiel „stetig bezüglich der Metriken d_M und d_N“ dazuschreiben.

3.3. Beispiel.
(1) Es sei $c \in N$. Die *konstante Abbildung* $F\colon M \to N$ mit $F(x) = c$ ist stetig. Denn sei V eine Umgebung von $c = F(x)$ für ein $x \in M$. Dann folgt $F(y) = c \in V$ für alle $y \in M$, und M ist sicher eine Umgebung von x für alle x.
(2) Die Identität $\mathrm{id}_M\colon M \to M$ mit $\mathrm{id}_M(x) = x$ ist sicher stetig. Denn sei $V \subset M$ Umgebung von $\mathrm{id}_M(x) = x$ für ein $x \in M$, dann folgt $\mathrm{id}_M(y) = y \in V$ für alle $y \in V$, somit ist $U = V$ die gesuchte Umgebung von x.

(3) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \text{ und} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
ist nicht stetig. Denn jede Umgebung U von $x \in \mathbb{R}$ enthält sowohl rationale als auch irrationale Zahlen. Somit gibt es $y \in U$ mit
$$f(y) \notin V = \left(f(x) - \frac{1}{2}, f(x) + \frac{1}{2} \right) ,$$
und V ist ja eine Umgebung von $f(x)$.

3.4. Lemma. *Es seien $F\colon M \to N$ und $G\colon L \to M$ Abbildungen. Dann gilt*

(1) *Wenn G bei x und F bei $G(x)$ stetig ist, ist auch die Verkettung $F \circ G$ bei x stetig.*
(2) *Wenn F und G stetig sind, dann ist auch $F \circ G\colon L \to N$ stetig.*

Beweis. Zu (1) sei W eine beliebige Umgebung von $(F \circ G)(x) = F(G(x))$. Wegen Stetigkeit von F bei $G(x)$ ist $V = F^{-1}(W) \subset M$ nach Definition 3.2 eine Umgebung von $G(x)$. Wegen Stetigkeit von G bei x ist $U = G^{-1}(V)$ eine Umgebung von x, und es gilt
$$\begin{aligned} U = G^{-1}(V) = G^{-1}\bigl(F^{-1}(W)\bigr) &= \{\, x \in L \mid G(x) \in F^{-1}(W) \,\} \\ &= \{\, x \in L \mid F(G(x)) \in W \,\} = (F \circ G)^{-1}(W) \; . \end{aligned}$$
Also ist $F \circ G$ stetig bei x.

Wenn F und G überall stetig sind, ist nach (1) auch $F \circ G$ überall stetig, und es folgt (2). □

Viele wichtige Abbildungen sind nur auf einer Teilmenge des betrachteten Raumes erklärt. Zum Beispiel ist $x \mapsto \frac{1}{x}$ an der Stelle $x = 0 \in \mathbb{R}$ nicht erklärt. Wir wollen als Definitionsbereiche daher auch Teilmengen $D \subset M$ betrachten können — hier beispielsweise $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sei etwa (M, d_M) ein metrischer Raum, dann trägt auch $D \subset M$ wieder eine Metrik, nämlich die Einschränkung $d_D = d_M|_{D \times D}$. Dazu überprüfen wir, dass die Axiome (1)–(3) in Definition 2.40 für alle Punkte x, y, $z \in D$ gelten — aber das ist klar, da sie ja sogar für alle x, y, $z \in M$ gelten. Somit ist jede Teilmenge eines metrischen Raumes wieder ein metrischer Raum.

3.5. Lemma. *Es sei (M, d) ein metrischer Raum, $D \subset M$ eine Teilmenge und $x \in D$. Dann ist eine Teilmenge $V \subset D$ genau dann Umgebung von x in D, wenn es eine Umgebung $U \subset M$ von x in M mit $V = U \cap D$ gibt.*

Beweis. Für $D \subset M$ und $x \in D$ gilt sicher
$$B_r^D(x) = \{\, y \in D \mid d(x, y) < r \,\} = B_r^M(x) \cap D \; .$$
Zu „$\Longleftarrow$“ sei $U \subset M$ Umgebung von $x \in D$ in M. Nach Definition 2.43 gilt $B_\varepsilon^M(x) \subset U$ für ein geeignetes $\varepsilon > 0$. Es folgt $B_\varepsilon^D(x) \subset U \cap D$, also

ist $U \cap D$ eine Umgebung von x in D. Da $\iota^{-1}(U) = U \cap D$, folgt hieraus bereits die Stetigkeit von ι.

Zu „$\Longrightarrow$“ sei $V \subset D$ eine Umgebung von x in D. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon^D(x) \subset V$. Wir setzen $U = V \cup B_\varepsilon^M(x)$, dann ist U Umgebung von x in M mit $V = U \cap D$. $\square$

Für Teilmengen $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ können wir wie in Lemma 3.5 einen Umgebungsbegriff definieren: Eine Teilmenge $V \subset D$ heißt Umgebung von $x \in D$, wenn es eine Umgebung U von x in $\overline{\mathbb{R}}$ mit $V = D \cap U$ gibt. Dieser Umgebungsbegriff stimmt allerdings nicht mit dem Umgebungsbegriff für geordnete Mengen aus Aufgabe 3 von Blatt I.10 überein.

3.6. Bemerkung. Sei $\iota\colon D \to M$ die Inklusionsabbildung aus Bemerkung 1.24. Dann ist ι nach Lemma 3.5 stetig, da für jeden Punkt $x \in U$ und jede Umgebung U von $x = \iota(x)$ in M ja $\iota^{-1}(U) = U \cap D$ eine Umgebung von x in U ist.

Sei jetzt $F\colon M \to N$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen und $D \subset M$ eine Teilmenge. Wenn F bei $x \in D$ stetig ist, dann ist nach Lemma 3.4 natürlich auch $f|_D = f \circ \iota\colon D \to N$ bei x stetig.

3.7. Lemma. *Stetigkeit an einem Punkt ist eine* lokale Eigenschaft, *das heißt, für eine Abbildung $F\colon M \to N$ sind die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(1) *Die Abbildung F ist stetig bei $x \in M$.*
(2) *Für alle Umgebungen U von x ist $F|_U$ bei x stetig.*
(3) *Es gibt eine Umgebung U von x in M, so dass $F|_U$ bei x stetig ist.*

Dieses Lemma wird uns später viel Arbeit sparen, wenn wir zeigen wollen, dass eine gegebene Abbildung an einer bestimmten Stelle stetig ist.

Beweis. Der Schritt „(1) $\Longrightarrow$ (2)“ folgt aus Bemerkung 3.6, und „(2) $\Longrightarrow$ (3)“ ist klar, da x nach Bemerkung 3.1 (1) mindestens die Umgebung M besitzt, und $F = F|_M$ bei x stetig ist.

Für „(3) $\Longrightarrow$ (1)“ sei U eine Umgebung von x, so dass $f|_U$ bei x stetig ist. Sei $V \subset N$ Umgebung von $f(x)$, dann ist

$$(f|_U)^{-1}(V) = U \cap f^{-1}(V)$$

Umgebung von x in U. Also existiert eine Umgebung W von x in M mit

$$U \cap f^{-1}(V) = U \cap W\ .$$

Nach Bemerkung 3.1 (2) ist $U \cap W$ Umgebung von x in M. Da

$$f^{-1}(V) \supset U \cap W\ ,$$

ist $f^{-1}(V)$ nach 3.1 (3) Umgebung von x in M, und daher ist f bei x stetig. $\square$

Wir geben zwei weitere äquivalente Definitionen für Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen an. Eine davon ähnelt Bemerkung 2.23, die andere benutzt konvergente Folgen, um Stetigkeit zu testen.

3.8. Satz. *Seien (M, d_M) und (N, d_N) metrische Räume, sei $x \in M$, und sei $F \colon M \to N$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *Die Abbildung F ist stetig bei x.*
(2) *Die Abbildung F ist* folgenstetig, *das heißt, für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert x gilt*

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x) .$$

(3) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass*

$$d_N\big(F(x), F(y)\big) < \varepsilon \qquad \text{für alle } y \in M \text{ mit } d_M(x, y) < \delta .$$

Wir bezeichnen metrische Bälle in M um x mit Radius r in Zukunft mit $B_r^M(x)$, damit klar zu erkennen ist, in welchem metrischen Raum wir rechnen.

Beweis. Zu „(1) $\Longrightarrow$ (2)“ sei F stetig bei $x \in M$, und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $x \in M$. Sei V eine Umgebung von $F(x)$ in N, dann ist $F^{-1}(U)$ eine Umgebung von x in M nach Definition 3.2. Nach Definition 2.12 liegen fast alle x_n in U, also liegen fast alle $F(x_n)$ in V. Da das für alle Umgebungen V von $F(x)$ so geht, folgt

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x) .$$

Zu „(2) $\Longrightarrow$ (3)“ nehmen wir umgekehrt an, dass zu einem $\varepsilon > 0$ kein solches $\delta > 0$ existiert. Dann existiert zu jedem $\delta > 0$, also auch zu $\delta = \frac{1}{n}$ ein Punkt $x_n \in M$ mit

$$d_M(x_n, x) < \frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad d_N\big(F(x_n), F(x)\big) \geq \varepsilon > 0 .$$

Nach Bemerkung 2.23 erhalten wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x , \qquad \text{aber nicht} \qquad \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x) .$$

Da wir das in (2) ausgeschlossen hatten, muss (3) also doch gelten.

Zu „(3) $\Longrightarrow$ (1)“ schließlich sei $x \in M$ und V Umgebung von $F(x)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon^M(F(x)) \subset V$. Sei $\delta > 0$ wie in (3) gegeben, dann folgt $B_\delta^M(x) \subset F^{-1}(V)$, also ist $F^{-1}(V)$ Umgebung von x. Da das für alle Umgebungen V von $F(x)$ möglich ist, ist F also stetig bei x. Genauso hätten wir auch „(1) $\Longrightarrow$ (3)“ zeigen können. □

Bemerkung. Für $M = \overline{\mathbb{R}}$ sind (1) und (2) immer noch äquivalent. Im zweiten Schritt „(2) $\Longrightarrow$ (3)“ im obigen Beweis haben wir wieder ausgenutzt, dass $\mathbb{R}$ archimedisch angeordnet ist.

3.9. Beispiel. (1) Der Absolutbetrag $|\cdot| : \mathbb{R} \to [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ ist stetig nach Satz 3.8, denn für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $\varepsilon > 0$ folgt mit $\delta = \varepsilon > 0$ aus Bemerkung 1.64 (6), dass

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y| < \varepsilon \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - y| < \delta = \varepsilon .$$

(2) Im Zusammenhang mit Beispiel 2.42 haben wir gesehen, dass auch der Absolutbetrag auf $\mathbb{C}$ die Dreiecksungleichung erfüllt. Mit dem gleichen Argument wie in (1) folgt, dass $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

(3) Es sei (M, d_M) metrischer Raum, $x \in M$ und

$$D = B_\infty(x) = \{\, y \in M \mid d(x, y) < \infty \,\}$$

(für die metrischen Räume, die wir kennen, ist $D = M$, aber das muss nicht so sein). Dann ist die Funktion $d(x, \cdot\,) \colon D \to \mathbb{R}$ stetig mit dem gleichen Argument wie in (1) und (2), denn

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z) .$$

3.10. Definition. Es sei M eine beliebige Menge. Abbildungen von M nach $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ heißen *reellwertige* bzw. *komplexwertige Funktionen.*

Reellwertige Funktionen $f \colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ können wir uns gut durch ihren Graphen

$$\Gamma(f) = \big\{ \big(x, f(x)\big) \bigm| x \in D \big\} \subset \mathbb{R}^2$$

veranschaulichen, vergleich Abschnitt 1.2. Wenn die Funktion f nicht zu „wild“ ist, kann man ihren Graphen sogar zeichnen.

Wir werden oftmals Funktionen mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen, während wir große lateinische Buchstaben für beliebige Abbildungen benutzen.

Im folgenden sei stets $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\Bbbk = \mathbb{C}$. Es seien $f, g \colon M \to \Bbbk$ Funktionen. Dann definieren wir neue Funktionen

$$\begin{aligned}
f + g \colon M &\to \Bbbk &&\text{durch} && (f+g)(x) = f(x) + g(x) \,, \\
-f \colon M &\to \Bbbk &&\text{durch} && (-f)(x) = -f(x) \,, \\
f \cdot g \colon M &\to \Bbbk &&\text{durch} && (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \,, \qquad \text{und} \\
\frac{f}{g} \colon M \setminus g^{-1}(\{0\}) &\to \Bbbk &&\text{durch} && \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \,.
\end{aligned}$$

3.11. Bemerkung. Mit diesen Definitionen bilden alle reellwertigen Funktionen mit Definitionsbereich M einen reellen Vektorraum $\operatorname{Abb}(M, \mathbb{R})$, und entsprechend alle komplexwertigen Funktionen mit Definitionsbereich M einen komplexen Vektorraum $\operatorname{Abb}(M, \mathbb{C})$, wobei $k \cdot f$ als Multiplikation mit der konstanten Funktion k verstanden wird.

3.12. Proposition. *Es seien jetzt $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen.*

(1) *Sind f und g bei $x \in D$ stetig, so sind auch $f + g$, $-f$, $f \cdot g$ bei x stetig.*
(2) *Sind f und g bei $x \in D$ stetig und gilt $g(x) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ bei x stetig.*

(3) *Sind f und g stetig, so sind auch $f+g$, $-f$, $f \cdot g\colon D \to \mathbb{R}$ und $\frac{f}{g}\colon D \setminus g^{-1}(\{0\})$ stetig.*

Beweis. Punkt (1) folgt unmittelbar aus dem analogen Satz 2.22 für Grenzwerte von Folgen, wenn wir die Äquivalenz von Stetigkeit und Folgenstetigkeit aus Satz 3.8 benutzen. Sei nämlich $(x_n)_n$ Folge in M mit Grenzwert x. Da f und g nach Satz 3.8 bei x folgenstetig sind, gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(f+g)(x_n) &= \lim_{n\to\infty}\bigl(f(x_n)+g(x_n)\bigr)\\ &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = f(x)+g(x) = (f+g)(x)\ .\end{aligned}$$

Also ist $f+g$ folgenstetig bei x, und nach Satz 3.8 auch stetig bei x. Genauso kann man Stetigkeit von $-f$ und $f \cdot g$ beweisen.

Zu (2) überlegen wir uns, dass die Funktion $\,\cdot^{-1}\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{1}{x}$ stetig ist. Sei etwa $x > 0$, dann enthält jede Umgebung V von $\frac{1}{x}$ ein Intervall der Form (a,b) mit $0 < a < \frac{1}{x} < b$. Mit $U = \bigl(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\bigr)$ folgt $\frac{1}{y} \in V$ für alle $y \in U$ nach Bemerkung 1.61 (9), und $U = \bigl(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\bigr)$ ist Umgebung von x, siehe auch Bemerkung 2.44. Ähnlich folgt auch die Stetigkeit bei $x < 0$. Nach Lemma 3.7 ist die Einschränkung $g|_{D\setminus g^{-1}(\{0\})}$ stetig, nach Lemma 3.4 ist dann auch $\frac{1}{g} = (\,\cdot^{-1}) \circ g\colon D \setminus g^{-1}(\{0\}) \to \mathbb{R}$ stetig. Jetzt folgt (2) aus (1).

Punkt (3) folgt sofort aus (1) und (2). □

3.13. Bemerkung. Nach Proposition 3.12 bilden alle stetigen Funktionen mit Definitionsbereich D und Werten in $\mathbb{R}$ einen reellen Untervektorraum $\mathcal{C}(D,\mathbb{R}) \subset \operatorname{Abb}(D,\mathbb{R})$.

3.14. Beispiel. Ein *Polynom über* $\mathbb{R}$ in einer Unbekannten X ist ein Ausdruck der Form

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

mit *Koeffizienten* $a_0 = \dots = a_n \in \mathbb{R}$. Wir benutzen hier ein grosses „X“ als Unbekannte, um auszudrücken, dass es sich beim Polynom um ein rein algebraisches Objekt handelt, das nur durch die Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$ gegeben wird. Nach Proposition 3.12 können wir Polynome über $\mathbb{R}$ als stetige Funktionen $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto P(x)$ (diesmal mit kleinem „x“) auffassen.

Falls nicht alle a_n verschwinden, dürfen wir (gegebenenfalls nach Verkleinern von n) annehmen, dass $a_n \neq 0$. In diesem Fall heißt $n = \deg P$ der *Grad* des Polynoms P. Falls alle a_n verschwinden, schreiben wir $P = 0$ und setzen $\deg P = -\infty$. Alle Polynome bilden einen Untervektorraum $\mathbb{R}[X] \subset \mathcal{C}(\mathbb{R})$, die Polynome P vom Grad $\deg P \leq n$ bilden einen $(n+1)$-dimensionalen Unterraum.

Polynome kann man addieren und multiplizieren wie Funktionen. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{m} a_k X^k + \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell X^\ell = \sum_{k=0}^{\max\{m,n\}} (a_k + b_k)\, X^k$$

$$\text{und} \qquad \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \cdot \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell X^\ell = \sum_{p=0}^{m+n} \left(\sum_{k=0}^{p} a_k b_{p-k} \right) X^p \ .$$

Mit diesen Operationen bildet $\mathbb{R}[X]$ einen Ring.

Genausogut können wir Polynome mit komplexen Koeffizienten — kurz *Polynome über* $\mathbb{C}$ — betrachten und erhalten einen komplexen Untervektorraum $\mathbb{C}[X] \subset \mathcal{C}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Auch $\mathbb{C}[X]$ ist ein Ring.

3.15. Beispiel. Es seien P, Q Polynome über $\mathbb{R}$ mit $Q \neq 0$. Sie werden später in der linearen Algebra sehen, dass Q höchstens $\deg Q$ viele Nullstellen hat. Funktionen der Gestalt

$$\frac{P}{Q} \colon \mathbb{R} \setminus Q^{-1}(\{0\}) \to \mathbb{R}$$

heißen *rationale Funktionen* über $\mathbb{R}$.

Beim Rechnen mit rationalen Funktionen gibt es ein kleines Problem, das wir im nächsten Abschnitt behandeln werden. Betrachte etwa drei rationale Funktionen

$$\begin{aligned} & f \colon \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R} & f(x) &= \frac{1}{x(x-1)} \ , \\ & g \colon \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbb{R} & g(x) &= \frac{1}{x(x+1)} \\ \text{und} \qquad & h \colon \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R} & h(x) &= \frac{2}{(x-1)(x+1)} \ . \end{aligned}$$

Die Funktion $f + g$ ist auf $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ definiert, und dort gilt

$$(f+g)(x) = \frac{(x+1) + (x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} = h(x) \ .$$

Dennoch gilt zunächst einmal nicht $f + g = h$, denn h ist auch bei $x = 0$ definiert, $f + g$ jedoch nicht. Genauso ist das Produkt der rationalen Funktionen x und $\frac{1}{x}$ nicht genau die konstante Funktion 1, da es am Punkt $x = 0$ nicht definiert ist.

Wenn wir uns aber dazu entschließen, zwei rationale Funktionen zu identifizieren, die auf dem gemeinsamen Definitionsbereich übereinstimmen (und das ist dann immer ganz $\mathbb{R}$ bis auf endlich viele Punkte), dann bilden die rationalen Funktionen ebenfalls einen Vektorraum $\mathbb{R}(X)$. Aber $\mathbb{R}(X)$ ist kein Unterraum von $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, ja nicht einmal von $\operatorname{Abb}(M)$ für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$, da es zu jedem Punkt in $\mathbb{R}$ rationale Funktionen gibt, die genau an dieser Stelle nicht definiert sind.

Auch hier können wir Quotienten komplexer Polynome betrachten und erhalten den Raum der komplexen rationalen Funktionen $\mathbb{C}(X)$. Man kann zeigen, dass $\mathbb{R}(X)$ und $\mathbb{C}(X)$ sogar Körper sind.

3.2. Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Wir studieren das Verhalten stetiger Funktionen am Rande ihres Definitionsbereiches und untersuchen, wann sich eine Funktion stetig fortsetzen lässt. In diesem Zusammenhang führen wir auch den Begriff des Grenzwertes einer Funktion an einer festen Stelle ein. Später werden wir auch einseitige Grenzwerte brauchen.

3.16. DEFINITION. Es sei M ein metrischer Raum oder $\overline{R}$ und $D \subset M$ eine Teilmenge. Dann heißt ein Punkt $x \in M$ *Häufungspunkt* von D, wenn für jede Umgebung U von x in M ein Punkt $y \in D \cap U$ mit $x \neq y$ existiert.

3.17. BEISPIEL. (1) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $(a, b) \subset I \subset [a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$, dann sind genau die Punkte $x \in [a, b]$ Häufungspunkte von I. Sei beispielsweise $x = a$ und U Umgebung von x, dann folgt $(a, b) \cap U \neq \emptyset$. Man beachte, dass a nicht unbedingt in I liegen muss, es könnte ja $I = (a, b)$ gelten.

Falls $x \notin [a, b]$, so hat x eine Umgebung, die I nicht trifft, etwa $(-\infty, a)$ falls $x < a$ oder (b, ∞) falls $x > b$.

(2) Im Gegensatz dazu sei $x \in D$ ein *isolierter Punkt,* das heißt, es gibt eine Umgebung U von x mit $U \cap D = \{x\}$. Dann ist x kein Häufungspunkt von D.

(3) Für $D = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sind alle Punkte von $\mathbb{R}$ Häufungspunkte. Denn sei $x \in \mathbb{R}$, und sei (a, b) ein Intervall mit $x \in (a, b)$. Nach Proposition 1.77 (2) sind die Mengen $(a, x) \cap \mathbb{Q}$ und $(x, b) \cap \mathbb{Q}$ nicht leer. Da jede Umgebung von x ein solches Intervall enthält, ist x Häufungspunkt. Wenn alle Punkte $x \in \mathbb{R}$ Häufungspunkte von D sind, sagt man, D liege *dicht* in $\mathbb{R}$.

(4) In $\overline{\mathbb{R}}$ sind alle Punkte Häufungspunkte von $\mathbb{Q}$, auch $\pm\infty$.

3.18. BEMERKUNG. Ein Punkt $x \in M$ ist genau dann Häufungspunkt von $D \subset M$, wenn es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x \neq x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt, die gegen x konvergiert. Denn falls solch eine Folge existiert, enthält jede Umgebung U von x fast alle Folgenglieder, also ist $U \cap D \setminus \{x\}$ nichtleer.

Umgekehrt sei x Häufungspunkt. Dann finden wir eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{x\}$ mit

$$x_n \in B^M_{\frac{1}{n}}(x) \cap D \setminus \{x\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Definition 3.16. Also konvergiert (x_n) gegen x. Eine ähnliche Konstruktion hatten wir bereits im Beweis von Lemma 2.24 durchgeführt.

3.19. DEFINITION. Es seien M, N jeweils metrische Räume oder $\overline{\mathbb{R}}$, $D \subset M$ eine Teilmenge und $F \colon D \to N$ eine Abbildung. Falls $x_0 \in M$ ein Häufungspunkt von D ist, heißt $a \in N$ *Grenzwert* von F an der Stelle x_0, kurz

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = a ,$$

falls für jede Umgebung V von a eine Umgebung $U \subset M$ von x_0 in M existiert, so dass $U \cap D \setminus \{x_0\} \subset F^{-1}(V)$.

Wenn $M = \mathbb{R}$ und der Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $(-\infty, x_0) \cap D$ (bzw. $(x_0, \infty) \cap D$) ist, heißt $a \in N$ *linksseitiger* (bzw. *rechtsseitiger*) *Grenzwert*, kurz

$$\lim_{x \nearrow x_0} F(x) = a \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \searrow x_0} F(x) = a\ ,$$

falls

$$a = \lim_{x \to x_0} \big(F|_{(-\infty, x_0) \cap D}\big)(x) \qquad \text{bzw.} \qquad a = \lim_{x \to x_0} \big(F|_{(x_0, \infty) \cap D}\big)(x)\ .$$

Man beachte, dass wir die Definitionsmenge der Funktion nicht in die Notation mit aufgenommen haben — wir gehen davon aus, dass diese Definitionsmenge in der Regel klar ist. Ist sie es nicht, so benutzen wir die umständlichere Schreibweise

$$\lim_{\substack{x \in D \\ x \to x_0}} F(x) = \lim_{x \to x_0} (F|_D)(x)\ ,$$

wobei wir gegebenenfalls auch „$x \to x_0$" durch „$x \nearrow x_0$" oder „$x \searrow x_0$" ersetzen können. In jedem Fall ist $x = x_0$ ausgeschlossen.

3.20. Beispiel. Die *Vorzeichenfunktion* oder das *Signum* $\operatorname{sign}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \text{ und} \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Es folgt

$$\lim_{x \nearrow 0} \operatorname{sign}(x) = -1 \neq \operatorname{sign}(0) \neq 1 = \lim_{x \searrow 0} \operatorname{sign}(x)\ .$$

3.21. Bemerkung. Es sei $F\colon D \to N$ eine Abbildung mit $D \subset \mathbb{R}$. Wenn an einem Punkt $x \in D$ sowohl der links- als auch der rechtsseitige Grenzwert definiert sind und beide übereinstimmen, dann existiert auch der Grenzwert bei x und stimmt mit beiden überein (Übung).

3.22. Beispiel. Wir betrachten die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D = [0, \infty) \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ und

$$f(x) = 0^x = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

nach Satz 2.31. Die Menge der Häufungspunkte von D ist das Intervall $[0, \infty)$, und es gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

für alle $x_0 \in [0, \infty)$, obwohl $f(0) = 1$.

3.23. Satz. *Es seien M und N jeweils metrische Räume oder $\overline{\mathbb{R}}$, $D \subset M$ eine Teilmenge, $F\colon D \to N$ eine Abbildung und $x_0 \in D$. Dann ist F genau dann stetig bei x_0, wenn entweder*

(1) *der Punkt x_0 isolierter Punkt von D ist, oder*
(2) *der Punkt x_0 Häufungspunkt von D ist und*

$$F(x_0) = \lim_{x \to x_0} F(x)\ .$$

Beweis. Wenn x_0 kein Häufungspunkt von D ist, besitzt x_0 eine Umgebung U in M, die $D \setminus \{x_0\}$ nicht trifft. Dann ist $\{x_0\}$ bereits Umgebung von x_0 in D, und $F|_{\{x_0\}}$ ist konstant, also stetig. Daher ist F bei x_0 stetig nach Lemma 3.7. Es folgt (1).

Ist x_0 Häufungspunkt und F bei x_0 stetig, dann ist $U = F^{-1}(V)$ Umgebung von x_0 in D für jede Umgebung V von $F(x_0)$. Natürlich gilt $U \setminus \{x_0\} \subset F^{-1}(V)$, also ist $F(x_0)$ der Grenzwert von F an der Stelle x_0.

Umgekehrt sei x_0 Häufungspunkt von D und

$$F(x_0) = \lim_{x \to x_0} F(x) \,.$$

Dann existiert zu jeder Umgebung V von $F(x_0)$ eine Umgebung $U \subset D$ von x_0 in M mit $U \setminus \{x_0\} \subset F^{-1}(V)$. Wegen $F(x_0) \in V$ ist $F^{-1}(V)$ dann auch Umgebung von x_0, wie in Definition 3.2 gefordert. Also ist F bei x_0 stetig. Damit sind beide Richtungen in (2) gezeigt. □

3.24. Bemerkung. Wir können F als Fortsetzung von $F|_{D \setminus \{x_0\}}$ auf den Punkt x_0 verstehen. Falls x_0 ein Häufungspunkt von D ist, kann diese Fortsetzung nur dann bei x_0 stetig sein, wenn $F|_{D \setminus \{x_0\}}$ bei x_0 einen Grenzwert c hat, und wir $F(x_0) = c$ setzen.

3.25. Beispiel. Definiere $f \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < \sqrt{2}, \text{ und} \\ 1 & \text{falls } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Dann ist f stetig auf $\mathbb{Q}$, denn f ist sowohl auf $(-\infty, \sqrt{2})$ als auch auf $(\sqrt{2}, \infty)$ konstant, also stetig, und Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft nach Lemma 3.7.

Dennoch lässt sich f nicht stetig auf $\mathbb{R}$ fortsetzen, denn es gilt

$$\lim_{x \nearrow \sqrt{2}} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \searrow \sqrt{2}} f(x) \,,$$

daher existiert der (beidseitige) Grenzwert von f bei $\sqrt{2}$ nicht.

Mit Hilfe von Satz 3.23 können wir Sätze über den Grenzwert einer Abbildung $F \colon D \to N$ an einem Häufungspunkt $x \in M$ von D beweisen, indem wir die äquivalenten Kriterien für Stetigkeit aus Satz 3.8 auf F oder die Fortsetzung von F bei x anwenden. Hier zwei Beispiele.

3.26. Folgerung. *Es seien M und N metrische Räume, es sei $D \subset M$ eine Teilmenge mit Häufungspunkt $x \in M$, es sei $a \in N$, und $F \colon D \to N$ sei eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *Der Grenzwert von F bei x ist a.*
(2) *Für jede Folge $(x_n)_n$ in $D \setminus \{x\}$ gilt*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} F(x_n) = a$$

(3) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass $d_N(F(y), a) < \varepsilon$ für alle $y \in D \setminus \{x\}$ mit $d_M(x, y) < \delta$.*

Beweis. Im wesentlichen folgt das aus Satz 3.8 und Bemerkung 3.24, wobei wir die Fortsetzung von F auf $D \cup \{x\}$ mit $F(x) = a$ betrachten. Allerdings ist es einfacher, die Aussage „(2) $\Rightarrow$ (3)“ analog wie in 3.8 neu zu beweisen, als zu zeigen, dass die Aussage (2) bereits

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} F(x_n) = a$$

für alle Folgen $(x_n)_n$ in $D \cup \{x\}$ impliziert. □

3.27. Folgerung. *Es sei M metrischer Raum oder $\overline{\mathbb{R}}$, $D \subset M$ und $x_0 \in M \setminus D$ ein Häufungspunkt. Es seien f, g, $h\colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(x) \le g(x) \le h(x)$ für alle $x \in D$. Wenn die Grenzwert von f und h bei x_0 existieren und übereinstimmen, dann existiert auch der Grenzwert von g, und es gilt*

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) \;.$$

Beweis. Nach Voraussetzung können wir f und h durch ihren gemeinsamen Grenzwert y_0 bei x_0 fortsetzen, und die resultierenden Funktionen sind bei x_0 stetig. Nach Satz 3.8 gilt für alle Folgen (a_n) in D mit Grenzwert x_0, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} h(a_n) = y_0 \;.$$

Nach Lemma 2.18 gilt dann auch

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = y_0 \;. \tag{*}$$

Wenn wir g ebenfalls durch $g(x_0) = y_0$ fortsetzen, dann gilt (*) auch für alle Folgen (a_n) in $D \cup \{x_0\}$ mit Grenzwert x_0. Aus Satz 3.8 folgt die Stetigkeit der Fortsetzung, und aus Satz 3.23 ergibt sich schließlich

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) = y_0 = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} h(a_n) \;.$$

□

3.28. Beispiel. Wir kommen zurück zu den rationalen Funktionen $\frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ aus Beispiel 3.15. Die rationale Funktion

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} \colon \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$$

ist die stetige Fortsetzung der Summe

$$\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{x(x+1)} \colon \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R} \;.$$

Das ist klar, da beide Funktionen auf $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ übereinstimmen.

Wie schon gesagt, hat jedes Polynom $Q \in \mathbb{R}[X]$ höchstens $\deg Q$ viele Nullstellen. Also ist jede rationale Funktion an fast allen Stellen in $\mathbb{R}$ definiert. Außerdem ist jede rationale Funktion auf ihrem Definitionsbereich stetig. Wir identifizieren zwei rationale Funktionen, die auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen. Das bedeutet, dass wir jede rationale Funktion überall, wo das möglich, durch ihren Grenzwert stetig fortsetzen — genau wie im obigen Beispiel.

So erhalten wir den *Körper* $\mathbb{R}(X)$ *der rationalen Funktionen über* $\mathbb{R}$. Analog konstruieren wir auch den Körper $\mathbb{C}(X)$ der rationalen Funktionen über $\mathbb{C}$.

3.3. Der Zwischenwertsatz und stetige Umkehrbarkeit

In den letzten Abschnitten haben wir uns mit lokalen Eigenschaften stetiger Funktionen vertraut gemacht — fast alle Resultate betrafen nur die Stetigkeit an einem vorgegebenen Punkt. In den folgenden Abschnitten geht es um globale In diesem Abschnitt zeigen wir unter anderem den Zwischenwertsatz, wonach stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ keine „Sprünge" machen. Anschaulich entspricht das der volkstümlichen Definition, wonach eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ stetig ist, wenn man ihren Graphen ohne abzusetzen zeichnen kann.

Den Zwischenwertsatz können wir ausnutzen, um Kriterien dafür zu finden, dass eine stetige Funktion eine stetige Umkehrfunktion besitzt. In diesem Abschnitt arbeiten wir — ähnlich wie beim Monotoniekriterium 2.29 für Folgen — wieder mit dem Umgebungsbegriff aus Abschnitt 2.1 für Teilmengen von $(\overline{R}, \leq)$.

3.29. SATZ (Zwischenwertsatz). *Es sei* $f\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ *eine stetige Funktion, dann nimmt* f *auf* $[a,b]$ *jeden Wert aus dem abgeschlossenen Intervall* $[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$ *an.*

Im obigen Satz dürfen wir $[a,b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ wählen.

BEWEIS. Ohne Einschränkung sei $f(a) < f(b)$, denn im Falle $f(a) = f(b)$ wird der einzige Wert $f(a)$ offensichtlich angenommen, und im Fall $f(a) > f(b)$ betrachten wir stattdessen die Funktion $-f$.

Sei jetzt $c \in [f(a), f(b)]$ beliebig. Da $f(a)$ und $f(b)$ ohnehin angenommen werden, dürfen wir sogar $c \in (f(a), f(b))$ annehmen. Betrachte die Menge

$$S = \{\, x \in [a,b] \mid f(x) \geq c \,\} \;.$$

Da $b \in S$, ist S nicht leer, und offensichtlich nach unten beschränkt durch a, also existiert

$$x_0 = \inf S \;.$$

Wir finden also eine Folge $(b_n)_n$ in S mit $\lim_{n\to\infty} b_n = x_0$. Wegen der Stetigkeit von f folgt

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq c \;.$$

Auf der anderen Seite gilt $f(x) < c$ für alle $x \in [a, x_0)$, denn aus $f(x) \geq c$ würde $x \in S$ und damit $x \geq x_0$ folgen. Wir wählen eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a, x_0)$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, dann folgt

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq c \;.$$

Beide Ungleichungen zusammen ergeben $f(x_0) = c$, also $c \in \operatorname{im} f$. Da c beliebig war, folgt $[a,b] \subset \operatorname{im} f$. □

3.30. Beispiel. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom von ungeradem Grad $d = \deg P$. Wir behaupten, dass P eine *Nullstelle* besitzt, das heißt, es existiert $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $P(x_0) = 0$. Dazu schreiben wir

$$P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$$

mit $a_d \neq 0$. Ohne Einschränkung sei $a_d > 0$, ansonsten betrachten wir $-P$.

Aus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{n^d} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{d} a_k n^{k-d} = a_d > 0$$

folgt $P(n_0) > 0$ für ein hinreichend großes n_0. Genauso folgt $P(-m_0) < 0$ für ein hinreichend großes m_0, es folgt $0 \in [P(-m_0), P(n_0)]$. Da P stetig ist, gibt es ein $x_0 \in [-m_0, n_0]$ mit $P(x_0) = 0$.

3.31. Folgerung. *Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres, abgeschlossenes Intervall und $F\colon [a, b] \to [a, b]$ stetig. Dann hat F einen* Fixpunkt, *das heißt, es gibt ein $x \in [a, b]$ mit $F(x) = x$.*

Beweis. Übung. □

3.32. Folgerung. *Es sei $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{Q}$ stetig. Dann ist f konstant.*

Beweis. Übung. □

Wir erinnern uns an die Definition der Umkehrabbildung aus Definition 1.28. Ist $f\colon D \to B$ eine bijektive Funktion zwischen Teilmengen von $\mathbb{R}$ oder von $\mathbb{C}$, so heißt die Umkehrabbildung $g\colon B \to D$ auch *Umkehrfunktion.*

3.33. Satz (Umkehrsatz für stetige Funktionen). *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige und streng monotone Funktion. Dann ist $J = \operatorname{im} f$ ein Intervall, und f besitzt eine stetige und streng monotone Umkehrfunktion g.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei f streng monoton steigend. Denn wenn f streng monoton fällt, erhalten wir eine stetige, streng monotone Umkehrfunktion g zu $-f$, und $y \mapsto g(-y)$ ist eine stetige, streng monotone Umkehrfunktion von f.

Um zu zeigen, dass $J = \operatorname{im} f$ ein Intervall ist, seien $y_0 = f(x_0)$ und $y_1 = f(x_1) \in J$. Nach dem Zwischenwertsatz enthält $\operatorname{im} f$ dann auch alle Punkte zwischen y_0 und y_1. Also ist $J = \operatorname{im} f$ ein Intervall nach Definition 2.1.

Da f streng monoton ist, ist f injektiv nach Bemerkung 2.26. Also ist $f\colon I \to J = \operatorname{im} f$ sogar bijektiv, und nach Satz 1.27 existiert eine eindeutige Umkehrabbildung $g\colon J \to I$. Es sei $y_0 = f(x_0) < y_1 = f(x_1)$, dann folgt $x_0 = g(y_0) < x_1 = g(y_1)$ aus der Monotonie von f, also steigt auch g wieder streng monoton.

Wir beweisen die Stetigkeit von g zunächst bei einem inneren Punkt $y = f(x) \in J$. Sei dazu $V \subset I$ eine Umgebung von $x = g(y)$, dann existieren a_0, $b_0 \in \mathbb{R}$ mit $x \in (a_0, b_0) \subset V$. Wir wählen $a \in (a_0, x)$ und $b \in (x, b_0)$, dann folgt $x \in (a, b) \subset V$, und überdies liegen a und b in I. Wie oben ist

$$\operatorname{im}(f|_{(a,b)}) = (f(a), f(b))$$

wieder ein Intervall, und es folgt $y = f(x) \in (f(a), f(b)) \subset g^{-1}(V)$. Somit ist $g^{-1}(V)$ wieder eine Umgebung von y, und g ist daher bei y stetig.

Sei nun $y = f(x) = r$ unterer Randpunkt von J (falls ein solcher existiert), dann ist $x = a = g(r)$ unterer Randpunkt von I aufgrund der Monotonie von g. Falls I und damit auch J nur aus einem Punkt bestehen, ist nichts mehr zu zeigen. Andernfalls sei wieder V eine Umgebung von x in I, dann finden wir wie oben ein $b \in I$, mit $x = a \in [a, b) = (-\infty, b) \cap I$. Wie oben folgt $[r, f(b)) \subset g^{-1}(V)$, so dass $g^{-1}(V)$ wieder Umgebung von $y = r$ ist. Also ist g auch am unteren Randpunkt stetig, und die Stetigkeit am oberen Randpunkt (falls ein solcher existiert) ergibt sich genauso. $\square$

3.34. Beispiel. Nach Satz 2.31 (5) und (6) sind die Potenzfunktionen $x \mapsto x^a$ streng monoton auf $(0, \infty)$ für alle $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Nach Satz 2.31 (4)und (1) ist $x \mapsto x^{\frac{1}{a}}$ gerade die Umkehrfunktion von $x \mapsto x^a$.

Die Funktion $x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$ ist auch stetig auf $(0, \infty)$: für p, $q \in \mathbb{Z}$ mit $q > 0$ sind $x \mapsto x^p$ und $x \mapsto x^q$ stetig nach Proposition 3.12. Also ist auch die Umkehrfunktion $x \mapsto \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$ stetig nach Satz 3.33. Nach Lemma 3.4 ist dann auch die Verkettung $x \mapsto (x^{\frac{1}{q}})^p = x^{\frac{p}{q}}$ stetig auf $(0, \infty)$.

Für ungerade $n \in \mathbb{N}$ ist die n-te Potenz $x \mapsto x^n$ sogar auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, stetig und streng monoton. Also können wir die n-te Wurzel $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ auch auf ganz $\mathbb{R}$ erklären.

3.35. Bemerkung. Eine bijektive stetige Abbildung $F\colon M \to N$, die eine stetige Umkehrabbildung $G\colon N \to M$ besitzt, heißt auch *Homöomorphismus.* Natürlich ist dann auch G wieder ein Homöomorphismus. Der Umkehrsatz 3.33 liefert also Homöomorphismen zwischen Intervallen in $\overline{\mathbb{R}}$.

Seien jetzt L, O weitere metrische Räume oder $\overline{\mathbb{R}}$. Nach Lemma 3.4 erhält man Abbildungen

$$\begin{aligned} &F_*\colon \mathcal{C}(L, M) \to \mathcal{C}(L, N) && \text{mit} && H \mapsto F \circ H \\ \text{und} \quad &F^*\colon \mathcal{C}(N, O) \to \mathcal{C}(M, O) && \text{mit} && K \mapsto K \circ F\,. \end{aligned}$$

Diese Abbildungen sind bijektiv mit Umkehrabbildung G_* bzw. G^*, denn zum Beispiel gilt

$$(G_* \circ F_*)(H) = G_*(F_*(H)) = G_*(F \circ H) = G \circ F \circ H = H$$

für alle $H \in \mathcal{C}(L, M)$. Analog gilt $F_*(G_*(J)) = J$ für alle $J \in \mathcal{C}(L, N)$, und ebenso

$$(G^* \circ F^*)(K) = G^*(F^*(K)) = G^*(K \circ F) = K \circ F \circ G = K\,.$$

3.36. Beispiel. Die Abbildung $F\colon \overline{\mathbb{R}} \to [-1,1]$ mit

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ 1 & \text{für } x = \infty, \text{ und} \\ -1 & \text{für } x = -\infty. \end{cases}$$

steigt streng monoton und ist stetig. Die Umkehrfunktion wurde in Übung 4 von Blatt I.9 konstruiert.

Bemerkung 3.35 impliziert also, dass wir in Zukunft anstelle stetiger Funktionen von oder nach $\overline{\mathbb{R}}$ genausogut stetige Funktionen von oder nach $[-1,1]$ betrachten können. Da wir auf $[-1,1]$ die übliche Metrik zur Verfügung haben, macht das das Leben manchmal etwas einfacher.

3.4. Stetige Funktionen auf Kompakten Mengen

Wir lernen (folgen-) kompakte Mengen kennen. Stetige Funktionen auf folgenkompakten Mengen haben besonders schöne Eigenschaften: sie nehmen stets das Maximum und das Minimum ihrer Funktionswerte an, und in Satz 3.8 kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ das $\delta > 0$ unabhängig von der Stelle x angeben.

3.37. Definition. Ein Raum heißt M *folgenkompakt,* wenn jede Folge in M einen Häufungspunkt in M besitzt.

Hierbei dürfen wir $M = \overline{\mathbb{R}}$ oder einen metrischen Raum betrachten.

Es gibt auch den Begriff *kompakt* für beliebige topologische Räume, also „Räume mit Umgebungen“. Im allgemeinen impliziert Kompaktheit Folgenkompaktheit, und für metrische Räume und für $\overline{R}$ stimmen beide Begriffe überein. Allerdings ist Kompaktheit für uns schwieriger zu definieren und zu verstehen, und die folgenden Beweise funktionieren allesamt bestens mit Folgenkompaktheit, so dass wir uns die „richtige“ Kompaktheit getrost für später aufheben dürfen.

Wir formulieren den Satz von Bolzano-Weierstraß, den wir in Folgerung 2.37 und Satz 2.48 bereits kennengelernt haben, noch einmal anders. Außerdem können wir jetzt auch eine Umkehrung angeben.

3.38. Satz (Satz von Bolzano-Weierstraß). *Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist genau dann folgenkompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Zu „$\Longleftarrow$“ sei $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $M \subset \Bbbk$ abgeschlossen und beschränkt, und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Dann ist (a_n) eine beschränkte Folge in $\Bbbk$ und besitzt somit nach der „alten“ Fassung des Satzes von Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt a. Nach Lemma 2.34 besitzt $(a_n)_n$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert a. Für $M \subset \mathbb{R}$ folgt $a \in M$ nach Lemma 2.24, da M abgeschlossen ist. Für $M \subset \mathbb{C}$ überlegen wir uns, dass der Beweis von Lemma 2.24 auch in $\mathbb{C}$ funktioniert. Also besitzt $(a_n)_n$ einen Häufungspunkt in M, und da das für jede Folge funktioniert, ist M folgenkompakt.

Zu „$\Longrightarrow$“ nehmen wir zunächst umgekehrt an, dass M nicht abgeschlossen ist. Wie in Lemma 2.24 kann man dann eine in $\Bbbk$ konvergente Folge $(a_n)_n$ konstruieren, deren Grenzwert nicht in M liegt. Da der Grenzwert der einzige Häufungspunkt ist, besitzt $(a_n)_n$ also keinen Häufungspunkt in M.

Sei jetzt M möglicherweise abgeschlossen, aber nicht beschränkt. Wegen Definition 2.49 gilt für jeden Punkt $x \in \mathbb{C}$ und jede Zahl $R < \infty$, dass $M \not\subset B_R(x)$. Wir wählen $x = 0$ und finden dann zu jedem $R = n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $a_n \in M$ mit $(d(a_n, 0))_n \geq n$. Wäre $a \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von (a_n), dann gäbe es unendlich viele Indizes n mit $d(a_n, 0) < d(a_n, a) + 1$, aber das haben wir gerade ausgeschlossen. Also divergiert die Folge.

Es folgt, dass eine Teilmenge $M \subset \Bbbk$, die nicht beschränkt oder nicht abgeschlossen ist, nicht folgenkompakt sein kann. $\square$

Stetige Funktionen auf folgenkompakten Mengen haben einige schöne Eigenschaften.

3.39. Definition. Sei M eine Menge und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißen

$$\inf_{x \in M} f(x) = \inf(\operatorname{im} f) = \inf\{\, f(x) \mid x \in M \,\}$$

$$\text{und} \qquad \sup_{x \in M} f(x) = \sup(\operatorname{im} f) = \sup\{\, f(x) \mid x \in M \,\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

das *Infimum* und das *Supremum* von f. Wenn es ein $x_{\min} \in M$ (bzw. $x_{\max} \in M$) mit

$$f(x_{\min}) = \inf_{x \in M} f(x) \qquad \text{bzw.} \qquad f(x_{\max}) = \sup_{x \in M} f(x)$$

gibt, heißt $f(x_{\min})$ das *Minimum* von f und $x_{\min}$ eine *Minimalstelle* von f bzw. $f(x_{\max})$ das *Maximum* von f und $x_{\max}$ eine *Maximalstelle*. Man sagt dann, die Funktion f *besitze ein Minimum* (bzw. *Maximum*). Minima und Maxima von f heißen auch *Extrema* oder *Extremwerte* von f, und $x_{\min}$ und $x_{\max}$ heißen *Extremstellen.*

3.40. Satz (Existenz von Extrema). *Jede stetige reellwertige Funktion auf einer folgenkompakten Menge besitzt ein Minimum und ein Maximum.*

Beweis. Wenn $-f$ ein Minimum bei $x_{\max}$ besitzt, besitzt f bei $x_{\max}$ ein Maximum. Daher reicht es, das Minimum jeder stetigen Funktion aufzuspüren.

Dazu sei $m \in \mathbb{R}$ das Infimum von f. Dann finden wir Punkte x_n in M mit

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = m \,.$$

Da M folgenkompakt ist, hat die Folge $(x_n)_n$ einen Häufungspunkt $x_{\min}$. Nach Übergang zu einer Teilfolge konvergiert die Folge $(x_n)_n$ selbst gegen $x_{\min}$. Da f folgenstetig ist nach Satz 3.8, folgt

$$f(x_{\min}) = f\Bigl(\lim_{n \to \infty} x_n\Bigr) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = m \,,$$

somit besitzt f ein Minimum. $\square$

Beispiel. Die Funktion $f(x) = x^2$ besitzt auf dem kompakten Intervall $[-1,2]$ ein Minimum bei $x=0$ und ein Maximum bei $x=2$.

Das Intervall $(-1,2)$ ist beschränkt, aber nicht abgeschlossen, also auch nicht kompakt. Es gilt

$$\sup_{x\in(-1,2)} x^2 = 2^2 = 4 \notin \operatorname{im}(f|_{(-1,2)}) \ .$$

Also hat f auf $(-1,2)$ kein Maximum mehr.

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ bilden eine abgeschlossene, aber nicht beschränkte Teilmenge, also ist auch $\mathbb{Z}$ nicht kompakt. Wieder gilt

$$\sup_{x\in\mathbb{Z}} x^2 = \infty \notin \operatorname{im}(f|_{\mathbb{Z}}) \ .$$

Also hat f auch auf $\mathbb{Z}$ kein Maximum.

Stetige Funktionen auf kompakten metrischen Räumen haben die schöne Eigenschaft, dass man in Satz 3.8 (3) für jedes ε unabhängig von x ein festes δ wählen kann.

3.41. Definition. Seien (M,d_M), (N,d_N) metrische Räume und $F\colon M \to N$ eine Abbildung, dann heißt F *gleichmäßig stetig,* wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $d_N(F(x),F(y)) < \varepsilon$ für alle x, $y \in M$ mit $d_M(x,y) < \delta$.

Bemerkung. Gleichmäßig stetige Funktion sind offensichtlich stetig nach Satz 3.8 (3).

Beispiel. Nicht jede stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig. Sei etwa $f(x) = x^2$, dann ist f stetig als Polynom nach Beispiel 3.14. Wir wählen $\varepsilon = 1$. Zu jedem $\delta > 0$ existieren x und $y \in \mathbb{R}$ mit $|y-x| < \delta$ und $\left|y^2 - x^2\right| > 1$, etwa $x = \frac{1}{\delta}$ und $y = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$, denn

$$|y-x| = \frac{\delta}{2} < \delta \qquad \text{und} \qquad |f(y)-f(x)| = \left|y^2-x^2\right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} \geq 1 = \varepsilon \ .$$

Also ist f nicht gleichmäßig stetig.

3.42. Satz. *Seien (M,d_M), (N,d_N) metrische Räume. Wenn M kompakt ist, ist jede stetige Abbildung $F\colon M \to N$ gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wir nehmen an, dass F nicht gleichmäßig stetig ist, und zeigen, dass F dann auch nicht stetig sein kann.

Wenn F nicht gleichmäßig stetig ist, dann existiert ein $\varepsilon > 0$, zu dem es kein $\delta > 0$ wie in Definition 3.41 gibt. Also finden wir Paare von Punkten x_n, $y_n \in M$ mit

$$d_M(x_n,y_n) < \frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad d_N(F(x_n),F(y_n)) \geq \varepsilon \ .$$

Da M kompakt ist, können wir zu einer Teilfolge übergehen, so dass x_n gegen $x \in M$ konvergiert. Aus

$$d(y_n,x) \leq d(y_n,x_n) + d(x_n,x)$$

folgt, da beide Abstände rechts für $n \to \infty$ beliebig klein werden, dass auch y_n gegen x konvergiert. Es folgt

$$\varepsilon \leq d_N(F(x_n), F(y_n)) \leq d_N(F(x_n), F(x)) + d_N(F(y_n), F(x)) .$$

Wäre F stetig, so wäre F auch folgenstetig, und die beiden Abstände rechts würden beliebig klein für $n \to \infty$, im Widerspruch dazu, dass ihre Summe nicht kleiner als $\varepsilon > 0$ wird. □

3.5. Die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz

Wir betrachten Folgen und Reihen von Funktionen und lernen verschiedene Konvergenzbegriffe kennen. Das geht besonders gut dann, wenn man Funktionen im Allgemeinen und stetige Funktionen auf Kompakta im Besonderen als einen metrischen Raum auffasst. In diesem Fall kann man gleichmäßige Konvergenz definieren und zeigen, dass Grenzfunktionen gleichmäßig konvergenter Folgen stetiger Funktionen wieder stetig sind. Eine wichtige Anwendung sind Potenzreihen, die in vielen Gebieten der Analysis eine Rolle spielen. Aber auch für die Integration im nächsten Abschnitt brauchen wir gleichmäßige Konvergenz.

Es sei M eine beliebige Menge, N ein metrischer Raum, und es sei $(F_n)_n$ eine Folge von Abbildungen $F_n \colon M \to N$.

3.43. Definition. Die Folge F_n *konvergiert punktweise* gegen $F \colon M \to N$, wenn für jedes $x \in M$ die Folge $(F_n(x))_n$ gegen $F(x)$ konvergiert.

Jetzt kann man fragen, ob die Abbildung F stetig ist, wenn M beispielsweise ein metrischer Raum ist und alle F_n stetig sind.

3.44. Beispiel. Betrachte $I = [0, 1]$ und $f_n \colon I \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = x^n .$$

Dann ist f_n als Polynom stetig nach Beispiel 3.14. Nach Proposition 2.17 konvergiert die Folge $(f_n)_n$ punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 1, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aber die Grenzfunktion f ist offensichtlich nicht stetig, da

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0 \neq 1 = f(1) .$$

Also ist punktweise Konvergenz nicht gut genug um dafür zu sorgen, dass die Grenzfunktion einer Folge stetiger Funktionen wieder stetig ist. Wir schaffen Abhilfe, indem wir auf den Abbildungen in einen metrischen Raum N eine Metrik einführen.

3.45. Lemma. *Es sei M eine nichtleere Menge und (N, d_N) ein metrischer Raum. Dann ist die Funktion $d_{\sup}\colon \operatorname{Abb}(M,N) \times \operatorname{Abb}(M,N) \to [0,\infty]$ mit*

$$d_{\sup}(F,G) = \sup_{x\in M} d_N(F(x),G(x)) = \sup\{\, d_N(F(x),G(x)) \mid x \in M \,\}$$

eine Abstandsfunktion auf der Menge $\operatorname{Abb}(M,N)$.

Bemerkung. Wenn wir $M = \emptyset$ zuließen, dann gäbe es genau eine Abbildung $F\colon \emptyset \to N$, und wir hätten

$$d_{\sup}(F,F) = \sup \emptyset = -\infty < 0\ .$$

Auf der anderen Seite müssen wir ∞ als Wert von $d_{\sup}$ zulassen, beispielsweise seien f, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = 0$ und $g(x) = x$ gegeben, dann ist

$$d_{\sup}(f,g) = \sup\{\, |x-0| \mid x \in \mathbb{R}\} = \infty\ ,$$

obwohl für jedes einzelne x der Abstand $d(f(x),g(x)) = |x|$ endlich ist.

Beweis. Wir weisen die Axiome aus Definition 2.40 nach. Seien dazu F, G, $H \in \operatorname{Abb}(M,N)$.

(1) Da $M \neq \emptyset$, existiert $x \in M$, und es gilt
$$d_{\sup}(F,G) \ge d_N(F(x),G(x)) \ge 0\ .$$
Aus $d_{\sup}(F,G) = 0$ folgt für alle $x \in M$, dass
$$d_N(F(x),G(x)) \le d_{\sup}(F,G) = 0\ ,$$
also $F(x) = G(x)$ für alle $x \in M$, somit $F = G$.

(2) Es gilt natürlich
$$d_{\sup}(G,F) = \sup_{x\in M} d_N(G(x),F(x)) = \sup_{x\in M} d_N(F(x),G(x)) = d_{\sup}(F,G)\ .$$

(3) Schließlich gilt für jedes $x \in M$, dass
$$\begin{aligned} d_N(F(x),H(x)) &\le d_N(F(x),G(x)) + d_N(G(x),H(x)) \\ &\le \sup_{x\in M} d_N(F(x),G(x)) + \sup_{x\in M} d_N(G(x),H(x)) \\ &= d_{\sup}(F,G) + d_{\sup}(G,H)\ . \end{aligned}$$
Indem wir das Supremum über alle $x \in M$ bilden, erhalten wir die Dreiecksungleichung für $d_{\sup}$. □

Es sei wieder $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

3.46. Definition. Die Metrik $d_{\sup}$ auf $\operatorname{Abb}(M,N)$ heißt *Supremumsmetrik.* Eine Folge von Abbildungen $F_n\colon M \to N$ heißt *gleichmäßig konvergent,* wenn sie als Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum $(\operatorname{Abb}(M,N), d_{\sup})$ konvergiert.

Eine *Reihe von Funktionen*

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \qquad \text{mit } f_n\colon M \to \Bbbk \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

heißt *gleichmäßig konvergent,* wenn die Folge der Partialsummen

$$\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

gleichmäßig in $\mathrm{Abb}(M,\Bbbk)$ konvergiert.

3.47. Bemerkung. Die Folge $(F_n)_n$ in $\mathrm{Abb}(M,N)$ konvergiere gleichmäßig gegen $F\colon M \to N$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $d_{\sup}(F_n, F) < \varepsilon$ für alle $n > n_0$, insbesondere

$$d_N(F_n(x), F(x)) < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in M\ .$$

Also konvergiert die Folge $(F_n)_n$ auch punktweise gegen F.

Wenn die Folge $(F_n)_n$ umgekehrt nur punktweise gegen F konvergiert, müssten wir unter Umständen bei ein und demselben $\varepsilon > 0$ für jeden Punkt x ein anderes n_0 wählen. Hier tut es ein n_0 für alle $x \in M$, daher der Name „gleichmäßige“ Konvergenz.

3.48. Satz. *Es seien $M \neq \emptyset$ und N metrische Räume, dann ist die Menge $\mathcal{C}(M,N)$ der stetigen Abbildungen abgeschlossen in* $\mathrm{Abb}(M,N)$ *bezüglich der Supremumsmetrik.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass $\mathrm{Abb}(M,N) \setminus \mathcal{C}(M,N)$ offen ist. Sei dazu $F\colon M \to N$ nicht stetig. Nach Satz 3.8 (3) existiert $x \in M$ und $\varepsilon > 0$, so dass es zu jedem $\delta = \frac{1}{n}$ einen Punkt $x_n \in M$ gibt mit

$$d_M(x_n, x) < \frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad d_N(F(x_n), F(x)) \geq \varepsilon\ .$$

Insbesondere konvergiert $(x_n)_n$ gegen x.

Sei $G\colon M \to N$ eine Abbildung mit $d_{\sup}(F,G) < \frac{\varepsilon}{3}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq d_N(F(x_n), F(x)) \\
&\leq d_N(F(x_n), G(x_n)) + d_N(G(x_n), G(x)) + d_N(G(x), F(x)) \\
&\leq 2d_{\sup}(F,G) + d_N(G(x_n), G(x)) < \frac{2\varepsilon}{3} + d_N(G(x_n), G(x))\ ,
\end{aligned}$$

also $d_{\sup}(G(x_n), G(x)) > \frac{\varepsilon}{3}$ für alle n. Somit ist G nicht folgenstetig bei x, also erst recht nicht stetig.

Wir haben gezeigt, dass es zu jeder Funktion $F \in \mathrm{Abb}(M,N) \setminus \mathcal{C}(M,N)$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass der Ball um F vom Radius $\frac{\varepsilon}{3}$ die Teilmenge $\mathcal{C}(M,N)$ nicht trifft. Mithin ist $\mathrm{Abb}(M,N) \setminus \mathcal{C}(M,N)$ offen, was zu zeigen war. □

3.49. Folgerung. *Jede gleichmäßig konvergente Folge stetiger Abbildungen hat eine stetige Abbildung als Grenzwert.*

Beweis. Wir gehen vor wie im Beweis von Lemma 2.24. Es sei $F \in \mathrm{Abb}(M,N)$ der Grenzwert der Folge. Wäre F nicht stetig, dann gäbe es nach Satz 3.48 eine Umgebung U von F, in der keine stetige Funktion liegt. Da fast alle F_n in U liegen, wären fast alle F_n ebenfalls unstetig, im Widerspruch zur Annahme. □

3.50. Folgerung. *Seien M, N metrische Räume und $(F_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen $F_n\colon M \to N$. Falls jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U besitzt, so dass $(F_n|_U)_n$ in $\operatorname{Abb}(U,N)$ gleichmäßig konvergiert, dann konvergiert die Folge $(F_n)_n$ punktweise gegen eine stetige Abbildung.*

Man könnte hier von *lokal gleichmäßiger Konvergenz* sprechen, da man Gleichmäßigkeit immer nur auf (eventuell kleinen) offenen Mengen erhält.

Beweis. Es sei $x \in M$ und $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$ wie im Satz. Nach Bemerkung 3.47 konvergiert $(F_n(x))_n$ in N, und der Grenzwert hängt nicht von der Wahl von U ab. Da das für alle $x \in M$ funktioniert, erhalten wir als Grenzwert eine Funktion $F \in \operatorname{Abb}(M,N)$, gegen die die Folge punktweise konvergiert.

Nach Lemma 3.7 ist F bei x bereits stetig, wenn $F|_U$ bei x stetig ist, aber das folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz auf U. Also ist die Grenzfunktion F überall stetig. □

3.6. Das Regelintegral

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, das Integral von Funktionen auf $\mathbb{R}$ oder einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ zu definieren. Ziel ist es, für Funktionen $f\colon D \to [0,\infty)$ die „Fläche“ unterhalb des Funktionsgraphen zu messen.

Später im Studium werden Sie sehen, dass man nicht jeder Funktion $f\colon D \to [0,\infty)$ in konsistenter Weise ein Integral zuordnen kann. Wir brauchen daher eine Teilmenge von „schönen“ Funktionen, die wir integrieren wollen, und einige Eigenschaften der Menge dieser integrierbaren Funktionen und des Integrals.

(1) Jede stetige Funktion f auf einem kompakten Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ soll integrierbar sein, schreibe
$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$
(2) Das Integral soll linear sein. Mit f, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und r, $s \in \mathbb{R}$ soll also auch $rf + sg$ integrierbar sein mit
$$\int_a^b (rf+sg)(x)\,dx = r\int_a^b f(x)\,dx + s\int_a^b g(x)\,dx.$$
(3) Es sei $a < b < c$ und $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ sei auf $[a,b]$ und auf $[b,c]$ integrierbar. Dann soll f integrierbar sein mit
$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$
(4) Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konstant auf (a,b) mit Wert y, dann soll
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx = y\,(b-a)$$
gelten. Die Werte bei a und b sollen also keine Rolle spielen.

(5) Wenn $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar sind und $f \le g$ auf ganz $[a,b]$ gilt, dann soll gelten:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

(6) Die Menge der integrierbaren Funktionen soll in $(\operatorname{Abb}([a,b],\mathbb{R}), d_{\sup})$ abgeschlossen und das Integral selbst soll stetig sein.

Für eine gleichmäßig konvergente Folge (f_n) integrierbarer Funktionen soll insbesondere die Grenzfunktion f integrierbar sein mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

All diese Eigenschaften sind konsistent mit der Vorstellung, dass das Integral den „Flächeninhalt unterhalb des Graphen“ beschreibt. Wir konstruieren jetzt einen Integralbegriff, der diese sechs Eigenschaften hat. Das wesentlich allgemeinere Lebesgue-Integral lernen wir erst im dritten Semester kennen.

3.51. Definition. Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es $n \in \mathbb{N}$ und Sprungstellen $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ gibt, so dass $f|_{(x_{j-1},x_j)}$ für jedes $j \in \{1,\dots,n\}$ konstant ist. Es sei $T([a,b]) \subset \operatorname{Abb}([a,b];\mathbb{R})$ die Menge der Treppenfunktionen.

3.52. Bemerkung. Es sei $f \in T([a,b])$ Treppenfunktion mit Sprungstellen $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ wie oben und $f|_{(x_{j-1},x_j)}$ konstant mit Wert y_j. Wenn ein Integralbegriff die obigen Eigenschaften hat, dann folgt sofort aus (3) und (4), dass

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^n y_j(x_j - x_{j-1})$$

3.53. Bemerkung. Es seien $f, g \in T([a,b])$ Treppenfunktionen mit Sprungstellen $a = x'_0 < \dots < x'_\ell = b$ bzw. $a = x''_0 < \dots < x''_m = b$. Wir setzen

$$\{x_0,\dots,x_n\} = \{x'_0,\dots,x'_\ell\} \cup \{x''_0,\dots,x''_m\},$$

mit $a = x_0 < \dots < x_n = b$ und $n \le \ell + m$. Dann können wir f und g als Treppenfunktionen mit Sprungstellen $a = x_0 < \dots < x_n = b$ und Werten y_i, z_i auf (x_{i-1}, x_i) auffassen. Für $r, s \in \mathbb{R}$ folgt aus Bemerkung 3.52 sofort

$$\int_a^b (rf+sg)(x)\,dx = \sum_{i=1}^n (ry_i + sz_i)(x_i - x_{i-1}) = r\int_a^b f(x)\,dx + s\int_a^b g(x)\,dx.$$

Also bilden die Treppenfunktionen einen Vektorraum, und das Integral ist als Abbildung von $T([a,b])$ nach $\mathbb{R}$ linear. Unsere Formel in Bemerkung 3.52 erfüllt also auch (2).

Um zu zeigen, wie wir mit Treppenfunktionen ein Integral explizit ausrechnen können, betrachten wir die Funktion $f(x) = x^k$ auf $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Später werden wir die meisten Integrale, die sich explizit bestimmen lassen, mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung behandeln.

3.54. Beispiel. Wir raten, dass
$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{1}{k+1}\left(b^{k+1}-a^{k+1}\right).$$
Um das zu zeigen, wählen wir Sprungstellen $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ so, dass
$$x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{n} =: h \qquad \text{für alle } j \in \{1,\dots,n\}.$$
Unsere Treppenfunktion f_n erfülle
$$f_n(x) = \begin{cases} x_j^k & \text{falls } x = x_j, \text{ und} \\ y_j := \dfrac{x_j^{k+1}-x_{j-1}^{k+1}}{(k+1)\cdot h} & \text{falls } x \in (x_{j-1}, x_j). \end{cases}$$
Da $x_j = x_{j-1} + h$, gilt nach der binomischen Formel
$$x_j^{k+1} - x_{j-1}^{k+1} = \sum_{\ell=1}^{k+1} \binom{k+1}{\ell} h^\ell \cdot x_{j-1}^{k+1-\ell}.$$
Da $\binom{k+1}{1} = k+1$, folgt
$$y_j = \frac{x_j^{k+1}-x_{j-1}^{k+1}}{(k+1)\cdot h} = x_{j-1}^k + \frac{h}{k+1}\cdot\sum_{\ell=2}^{k+1}\binom{k+1}{\ell} h^{\ell-2}\cdot x_{j-1}^{k+1-\ell}$$
Da $x^{k+1-\ell}$ auf $[a,b]$ beschränkt ist, kann man den zweiten Term abschätzen durch
$$\left|\frac{h}{k+1}\cdot\sum_{\ell=2}^{k+1}\binom{k+1}{\ell} h^{\ell-2}\cdot x_{j-1}^{k+1-\ell}\right| \le h\cdot C \text{ für alle } n > 0, j \in \{1,\dots,n\}$$
Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $f(x) = x^k$ auf $[a,b]$ nach Satz 3.42 gleichmäßig stetig ist, existiert $\delta > 0$, so dass
$$|x^k - y^k| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } x, y \in [a,b] \text{ mit } |x-y| < \delta.$$
Wir wählen $n > 0$ so, dass $h < \delta$ und $h \cdot C < \frac{\varepsilon}{2}$ für $h = \frac{b-a}{n}$. Dann folgt für alle $x \in (x_{j-1}, x_j)$, dass
$$|x^k - y_j| \le \underbrace{\left|x^k - x_{j-1}^k\right|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\left|x_{j-1}^k - y_j\right|}_{<h\cdot C<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon,$$
da ja $|x_j - x_{j-1}| = h < \delta$. Also konvergieren unsere Treppenfunktionen f_n gleichmäßig gegen f.

Außerdem gilt:
$$\int_a^b f_n(x)\,dx = \sum_{j=1}^n \frac{x_j^{k+1}-x_{j-1}^{k+1}}{(k+1)\cdot h}\cdot h = \frac{x_n^{k+1}-x_0^{k+1}}{k+1} = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}\ .$$
Wegen Eigenschaft (6) erhalten wir als Integral
$$\int_a^b x^k\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}\ .$$

Wir definieren jetzt eine Menge integrierbarer Funktionen.

3.55. Definition. Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $(a,b) \subset I \subset [a,b]$. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *Regelfunktion*, wenn sie

(1) an jedem Punkt $x_0 \in I \setminus \{a\}$ einen linksseitigen Grenzwert $f_-(x_0) := \lim_{x \nearrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ und
(2) an jedem Punkt $x_0 \in I \setminus \{b\}$ einen rechtsseitigen Grenzwert $f_+(x_0) := \lim_{x \searrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ besitzt.

Den Raum aller Regelfunktionen auf I bezeichnen wir mit $R(I)$.

Man beachte, dass bei einer Regelfunktion der Wert $f(x)$ nichts mit dem links- oder dem rechtsseitigen Grenzwert zu tun haben muss.

Beispiel. (1) Treppenfunktionen sind Regelfunktionen: $T([a,b]) \subset R(I)$.
(2) Stetige Funktionen sind Regelfunktionen: $\mathcal{C}(I) \subset R(I)$.

3.56. Satz. *Es sei $\emptyset \neq [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Dann ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ genau dann eine Regelfunktion, wenn es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Beweis. Wir zeigen „$\Longrightarrow$“ indirekt. Wenn sich f nicht gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximieren läßt, dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $d_{\sup}(f, g) \geq \varepsilon$ für alle Treppenfunktionen $g \in T([a,b])$.

Wir konstruieren eine Intervallschachtelung $([a_n, b_n])_n$ mit $a_0 = a$, $b_0 = b$, so dass $d_{\sup}(f|_{[a_n,b_n]}, g) \geq \varepsilon$ für alle n und alle $g \in T([a_n, b_n])$. Sei etwa $[a_n, b_n]$ bereits konstruiert und $c = \frac{a_n+b_n}{2}$. Falls es $g_1 \in T([a_n, c])$ und $g_2 \in T([c, b_n])$ mit $d_{\sup}(f|_{[a_n,c]}, g_1) < \varepsilon$ und $d_{\sup}(f|_{[c,b_n]}, g_2) < \varepsilon$ gäbe, wäre $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{für } x < c, \\ f(c) & \text{für } x = c, \text{ und} \\ g_2(x) & \text{für } x > c \end{cases}$$

eine Treppenfunktion mit $d_{\sup}(f|_{[a_n,b_n]}, g) < \varepsilon$.

Also existiert eine solche Treppenfunktion g_i auf mindestens einem der Teilintervalle $[a_n, c]$, $[c, b_n]$ nicht, und dieses Teilintervall nennen wir $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.

Nach Folgerung 2.30 konvergiert diese Intervallschachtelung gegen ein $x_0 \in I = [a,b]$. Da f Regelfunktion ist, existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f_-(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap I, \text{ falls } x_0 \neq a, \text{ und}$$
$$|f(x) - f_+(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap I, \text{ falls } x_0 \neq b.$$

Für ein $n > 0$ gilt aber $[a_n, b_n] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$, und die Funktion $g\colon [a_n, b_n] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} f_-(x_0) & \text{für } x < x_0, \\ f(x_0) & \text{für } x = x_0, \text{ und} \\ f_+(x_0) & \text{für } x > x_0. \end{cases}$$

ist eine Treppenfunktion mit $d_{\sup}(f|_{[a_n,b_n]}, g) < \varepsilon$ im Widerspruch zur obigen Konstruktion.

Zu „$\Longleftarrow$" sei $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ in $(\mathrm{Abb}([a,b],\mathbb{R}), d_{\sup})$, und es sei $x_0 \in (a,b]$. Wir wollen zeigen, dass $\lim_{x\nearrow x_0} f(x)$ existiert. Zu $\varepsilon > 0$ bestimmen wir $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $d_{\sup}(f_n, f) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Da f_n eine Treppenfunktion ist, existiert $\delta_n > 0$, so dass $f_n|_{(x_0-\delta_n,x_0)}$ konstant ist mit Wert y_n. Es folgt

$$|y_m - y_n| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon$$

für alle $m, n \geq n_0$ und alle $x \in (x_0 - \min\{\delta_m, \delta_n\}, x_0) \cap I$. Somit ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Sei y der Grenzwert, siehe Satz 2.51. Zu $\varepsilon > 0$ existiert also ein n_1 mit $d_{\sup}(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1$. Für $n \geq n_1$ gilt also

$$|f(x) - y| \leq |f(x) - f_n(x)| + |y_n - y| < \varepsilon$$

für alle $x \in (x_0 - \delta_n, x_0) \cap I$.

Es folgt

$$f_-(x_0) = \lim_{x\nearrow x_0} f(x) = y.$$

Genauso zeigt man für alle $x_0 \in [a,b) \cap I$ die Existenz des rechtsseitigen Grenzwertes $f_+(x_0)$. Also ist f eine Regelfunktion. $\square$

3.57. Definition. Es sei $f \in R([a,b])$ eine Regelfunktion und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann ist das *Regelintegral* definiert durch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\ .$$

3.58. Proposition. *Das Regelintegral ist wohldefiniert.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass der Grenzwert in Definition 3.57 existiert und nicht von der Wahl der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abhängt. Beides ergibt sich aus der folgenden Überlegung.

Es sei $\varepsilon > 0$, und $g, h \in T([a,b])$ seien zwei Treppenfunktionen mit $d_{\sup}(f,g)$, $d_{\sup}(f,h) < \varepsilon$. Aus der Dreiecksungleichung folgt $d_{\sup}(g,h) < 2\varepsilon$. Wie in Bemerkung 3.53 dürfen wir annehmen, dass g und h dieselben Sprungstellen $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ besitzen und auf (x_{j-1}, x_j) die Werte y_j bzw. z_j annehmen. Es folgt

$$(*) \qquad \left|\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx\right| \leq \sum_{j=1}^n |z_j - y_j|(x_j - x_{j-1})$$
$$\leq \sum_{j=1}^n 2\varepsilon(x_j - x_{j-1}) = 2\varepsilon(b-a).$$

Aus $(*)$ folgt, dass $\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in Definition 3.57 eine Cauchyfolge ist, also konvergiert.

Falls zwei Folgen $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ in $T([a,b])$ gleichmäßig gegen f konvergieren, zeigt $(*)$, dass sich die Grenzwerte der Integrale um beliebig wenig unterscheiden, also gleich sind. $\square$

Wir haben jetzt ein Integral $\int\colon R([a,b]) \to \mathbb{R}$ definiert, und wollen die Eigenschaften (1) - (6) am Anfang dieses Abschnitts überprüfen.

3.59. Proposition. *Das Regelintegral erfüllt* (1) - (5)*.*

Beweis. Aus $\mathcal{C}([a,b]) \subset R([a,b])$ folgt (1). (3) und (4) ergeben sich aus unserer Konstruktion, und (2) und (5) sind Übung. $\square$

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann definieren wir $|f|\colon [a,b] \to [0,\infty)$ durch $|f|(x) = |f(x)|$ für alle $x \in [a,b]$.

3.60. Lemma. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, dann ist auch $|f|\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, und es gilt*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Beweis. Da der Absolutbetrag nach Beispiel 3.9 (1) stetig ist, gilt

$$\lim_{x\nearrow x_0} |f(x)| = \bigl|\lim_{x\nearrow x_0} f(x)\bigr| \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\searrow x_0} |f(x)| = \bigl|\lim_{x\searrow x_0} f(x)\bigr|,$$

also ist auch $|f|$ eine Regelfunktion. Wenn eine Folge $\mathrm{S}(f_n)_n$ von Treppenfunktionen gleichmäßig gegen f konvergiert, konvergiert $(|f_n|)_n$ gleichmäßig gegen $|f|$, und aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx\right| = \left|\sum_j y_j(x_j - x_{j-1})\right| \leq \sum |y_j|(x_j - x_{j-1}) = \int_a^b |f_n(x)|\,dx\ ,$$

wobei y_j wieder der Wert von $f_n|_{(x_{j-1},x_j)}$ sei. Im Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt sich

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \qquad \square$$

3.61. Folgerung. *Das Regelintegral ist stetig als Abbildung* $(R([a,b]),$ $d_{\sup}) \longrightarrow \mathbb{R}$*.*

Beweis. Aus $d_{\sup}(f,g) < \delta$ folgt

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b (g-f)(x)\,dx\right| \\ &\leq \int_a^b \underbrace{|g(x)-f(x)|}_{\leq\delta}\,dx \leq \int_a^b \delta\,dx = \delta(b-a).\end{aligned}$$

Aus Satz 3.8 (3) ergibt sich die Stetigkeit des Regelintegrals. $\square$

3.62. Satz. *Der Raum $R(I)$ der Regelfunktionen auf einem Intervall I ist abgeschlossen in* $(\mathrm{Abb}([a,b],\mathbb{R}), d_{\sup})$.

Wie in Folgerung 3.49 ist die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge von Regelfunktionen also wieder eine Regelfunktion. Zusammen mit Folgerung 3.61 ergibt sich Eigenschaft (6).

Beweis. Wir gehen wie in Beweis von 3.48 vor. Sei also $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ keine Regelfunktion, dann existiert einer der einseitigen Grenzwerte an einer Stelle $x_0 \in [a,b]$ nicht, ohne Einschränkung der linksseitige.

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta = \frac{1}{n} > 0$ Punkte $x_n', x_n'' \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0) \cap I$ mit $|f(x_n'') - f(x_n')| \geq \varepsilon$ existieren. Andernfalls erhielte man nämlich eine Intervallschachtelung $\big[\inf(f|_{(x_0-\frac{1}{n},x_0)}), \sup(f|_{(x_0-\frac{1}{n},x_0)})\big]$, und damit einen linksseitigen Grenzwert.

Sei $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $d_{\sup}(f,g) < \frac{\varepsilon}{3}$. Dann folgt aus der Dreiecksungleichung, dass

$$|g(x_n'') - g(x_n')| \geq \underbrace{\Big|f(x_n'') - f(x_n')\Big|}_{\geq\varepsilon} - \underbrace{\Big|g(x_n'' - f(x_n'')\Big|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} - \underbrace{\Big|g(x_n') - f(x_n')\Big|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} > \frac{\varepsilon}{3}.$$

Insbesondere hat g bei x_0 keinen linksseitigen Grenzwert. Es folgt $B_{\frac{\varepsilon}{3}}(f) \cap R(I) = \emptyset$. Da dieses Argument für alle $f \in \mathrm{Abb}(I,\mathbb{R}) \backslash R(I)$ funktioniert, ist $R(I)$ abgeschlossen. □

Bemerkung. Wir haben jetzt gezeigt, dass das Regelintegral die Forderungen (1)–(6) an ein Integral erfüllt. Die Menge der integrierbaren Funktionen ist sehr klein, was uns die Konstruktion des Integrals allein über gleichmäßige Konvergenz möglich gemacht hat. Für spätere Anwendungen werden wir einen Integralbegriff brauchen, für den möglichst viele Funktionen integrierbar sind — dazu führen wir später das Lebesgue-Integral ein.

3.63. Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $p\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion mit $p \geq 0$ auf ganz $[a,b]$. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$, so dass*

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(\xi) \cdot \int_a^b p(x)\,dx$$

Ein Integral der Form $\int_a^b f(x)p(x)\,dx$ heißt auch *gewichtetes Mittel* oder *gewichtetes Integral* von f mit *Gewicht* p. Im Spezialfall $p = 1$ erhalten wir das übliche Integral; der Mittelwertsatz lautet jetzt

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) \qquad \text{für ein } \xi \in [a,b].$$

Beweis. Nach Satz 3.40 nimmt die Funktion f auf $[a,b]$ ihr Minimum $m = \inf_{x\in[a,b]} f$ bei $x_{\min}$ und ihr Maximum $M = \sup_{x\in[a,b]} f$ bei $x_{\max}$ an. Wegen der Monotonie (5) folgt

$$m \int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b mp(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)p(x)\,dx \leq M \cdot \int_a^b p(x)\,dx.$$

Also existiert $\mu \in [m, M]$ mit

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = \mu \cdot \int_a^b p(x)\,dx.$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\xi \in [a,b]$ zwischen $x_{\min}$ und $x_{\max}$ mit $f(\xi) = \mu$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

3.64. Bemerkung. Wir können das Regelintegral ausdehnen auf komplexwertige Funktionen. Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt Regelfunktion, wenn wie in Definition 3.55 links- und rechtsseitige Grenzwerte existieren. Wir definieren Real- und Imaginärteil $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$(\operatorname{Re} f)(x) = \operatorname{Re}(f(x)) \qquad \text{und} \qquad (\operatorname{Im} f)(x) = \operatorname{Im}(f(x)).$$

Dann ist f genau dann eine komplexwertige Regelfunktion, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ Regelfunktionen sind. Wenn wir das Regelintegral wie in Definition 3.57 erklären, folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,dx.$$

Man beachte aber, dass wir unsere Funktionen nach wie vor nur auf Intervallen in $\mathbb{R}$ erklären — über beliebige Teilmengen von $\mathbb{C}$ können wir (noch) nicht integrieren.

3.65. Bemerkung. Eigenschaft (3) des Integrals legt für $a \geq b$ die Definition

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

nahe. Wenn f auf einem Intervall I definiert ist, gilt mit dieser Definition die Gleichung

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

aus (3) für alle $a, b, c \in I$. Wenn wir $c \in I$ fixieren und

$$F(d) = \int_c^d f(x)\,dx$$

setzen, folgt

$$(*) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

für alle $a, b \in I$.

3.66. Definition. Sei I ein Intervall und $f \in R(I)$. Eine Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$, die (*) für alle $a, b \in I$ erfüllt, heißt *Stammfunktion* von f.

3.67. Beispiel. Nach Beispiel 3.54 ist $F(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}$ eine Stammfunktion von $f(x) = x^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aus der Schule kennen Sie wahrscheinlich das Riemann-Integral. Der Vollständigkeit halber geben wir hier eine Definition an.

3.68. Definition. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn das untere Integral

$$\underline{\int} f(x)\,dx = \sup\left\{ \int_a^b g(x)\,dx \;\middle|\; g \in T([a,b]), g(x) \le f(x) \text{ für alle } x \in [a,b] \right\}$$

und das obere Integral

$$\overline{\int} f(x)\,dx = \inf\left\{ \int_a^b h(x)\,dx \;\middle|\; h \in T([a,b]), h(x) \ge f(x) \text{ für alle } x \in [a,b] \right\}$$

existieren und übereinstimmen, heißt f *Riemann-integrierbar*, und der gemeinsame Wert des unteren und des oberen Integrals das *Riemann-Integral.*

Der wesentliche Unterschied zur Definition in der Schule ist die allgemeinere Definition von Treppenfunktionen in Definition 3.51, die aber keine Auswirkung auf Integrierbarkeit und Wert des Integrals hat.

3.69. Bemerkung. Regelfunktionen sind Riemann-integrierbar, und beide Integrale haben für Regelfunktionen denselben Wert. Sei nämlich $f \in R([a,b])$ eine Regel- und $g \in T([a,b])$ eine Treppenfunktion mit $d_{\sup}(f,g) < \varepsilon$, dann folgt

$$f(x) - 2\varepsilon < \underbrace{g(x) - \varepsilon}_{\in T([a,b])} < f(x) < \underbrace{g(x) + \varepsilon}_{\in T([a,b])} < f(x) + 2\varepsilon$$

für alle $x \in [a,b]$. Also gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx - 2\varepsilon(b-a) &\le \int_a^b (g(x) - \varepsilon)\,dx \le \underline{\int} f(x)\,dx \\ &\le \overline{\int} f(x)\,dx \le \int_a^b (g(x) + \varepsilon)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx + 2\varepsilon(b-a).\end{aligned}$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt die Gleichheit des oberen und unteren Integrals mit dem Regelintegral.

3.70. Beispiel. Es gibt Funktionen, die Riemann- aber nicht regelintegrierbar sind, zum Beispiel $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right] \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \text{ und} \\ -1 & \text{falls } x \in \left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right] \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}. \end{cases}$$

Dann ist f keine Regelfunktion, da $\lim_{x\searrow 0} f(x)$ nicht existiert. Aber um

$$\overline{\int} f(x)\,dx - \underline{\int} f(x)\,dx < \varepsilon$$

zu zeigen, definieren wir $g, h \in T([0,1])$ mit $g \leq f \leq h$ durch

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \in \left[0, \frac{\varepsilon}{3}\right], \text{ und} \\ f(x) & \text{sonst, sowie} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \left[0, \frac{\varepsilon}{3}\right], \text{ und} \\ f(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann folgt

$$\overline{\int} f(x)\,dx - \underline{\int} f(x)\,dx \leq \int_0^1 (h(x) - g(x))\,dx = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

Also ist f Riemann-integrierbar.

KAPITEL 4

Reihen von Funktionen

In diesem Kapitel definieren wir die Exponentialfunktion, den Logarithmus, Winkel- und Arcusfunktionen. Dabei geben wir zunächst Definitionen z.B. als Potenzreihen, und beweisen dann wichtige elementare Eigenschaften.

4.1. Potenzreihen

Wir kommen zu einer wichtigen Anwendung der lokal gleichmäßigen Konvergenz im Sinne von Folgerung 3.50. Dazu betrachten wir spezielle Reihen von Funktionen, die sogenannten Potenzreihen. Im folgenden betrachten wir $a^{-1} \in [0, \infty]$ für Zahlen $a \in [0, \infty]$. In diesem Zusammenhang dürfen wir ausnahmsweise $0^{-1} = \infty$ setzen, da ja $-\infty$ als Inverses hier nicht in Frage kommt. Es sei wieder $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\Bbbk = \mathbb{C}$.

4.1. Satz (vom Konvergenzradius). *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\Bbbk$, und*

$$\rho = \Big(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\Big)^{-1} \in [0, \infty] \,.$$

Dann konvergiert für $x \in \Bbbk$ die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

absolut falls $|x| < \rho$, und divergiert, falls $|x| > \rho$.

Beweis. Wir benutzen das Wurzelkriterium aus Satz 2.65. Betrachte

$$a = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{\rho} \,.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe, falls $a < 1$, das heißt, falls $x < \rho$, und sie divergiert, falls $a > 1$, das heißt, falls $x > \rho$. $\square$

4.2. Definition. Eine eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$$

mit $a_k \in \Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt *Potenzreihe* in x über $\Bbbk$. Die Zahl

$$\rho = \Big(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\Big)^{-1} \in [0, \infty]$$

heißt der *Konvergenzradius* der Potenzreihe, und $B_\rho(0) \subset \Bbbk$ heißt ihr *Konvergenzkreis.* Eine Potenzreihe heißt *konvergent,* wenn $\rho > 0$ gilt, und *divergent,* wenn $\rho = 0$ gilt.

Man beachte, dass jede Potenzreihe $\sum_{k=0}^\infty a_k\, x^k$ für $x = 0$ stets gegen a_0 konvergiert, selbst wenn $\rho = 0$.

4.3. Beispiel. Mit $a_n = 1$ für alle n erhalten wir

$$\rho = \Bigl(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1}\Bigr)^{-1} = 1 .$$

Einsetzen von x liefert die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x}$$

für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ nach Beispiel 2.56. Die Berechnung von ρ ist aber kein „Beweis" für das Konvergenzverhalten der geometrischen Reihe, sondern bloß ein Zirkelschluss, da wir die Konvergenz der geometrischen Reihe ja bereits im Beweis des Wurzelkriteriums benutzt hatten.

Man beachte, dass die Funktion $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ selbst auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ definiert ist, die Potenzreihe jedoch nur in $B_1(0)$ konvergiert.

Um zu zeigen, dass Potenzreihen stetige Funktionen liefern, und um diese Funktionen dann auch zu integrieren, führen wir den Begriff der normalen Konvergenz ein.

4.4. Definition. Sei M eine Menge. Die *Supremumsnorm* auf dem Vektorraum Abb $(M, \Bbbk)$ ist definiert durch

$$\|f\|_{\sup} = \sup_{x\in M} |f(x)| = d_{\sup}(f,0) \in [0,\infty].$$

Umgekehrt erhalten wir die Supremumsmetrik aus der Supremumsnorm zurück als

$$d_{\sup}(f,g) = \|g - f\|_{\sup}.$$

4.5. Definition. Eine Reihe $\sum_{k=0}^\infty f_k$ von Funktionen auf M heißt *normal konvergent*, wenn

$$\sum_{k=0}^\infty \|f_k\|_{\sup} < \infty.$$

Bemerkung. Um die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^\infty \|f_k\|_{\sup}$ zu zeigen, können wir auf alle Konvergenzkriterien aus Abschnitt 2.4 zurückgreifen, beispielsweise allgemein auf das Majorantenkriterium (Satz 2.64 (1)) und spezieller auf das Wurzelkriterium (Satz 2.65) und das Quotientenkriterium (Satz 2.67).

4.6. Bemerkung. Sei $\sum_{k=0}^\infty f_k$ normal konvergent.

(1) Für alle $x \in M$ gilt $|f_k(x)| \leq \|f_k\|_{\sup}$, also konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

absolut für alle $x \in M$. Nach Proposition 2.63 konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ insbesondere punktweise.

(2) Die Reihe konvergiert sogar gleichmäßig, denn für alle $\varepsilon > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_{\sup} < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$. Wir bilden das Supremum über $x \in M$ und erhalten

$$d_{\sup}\left(\sum_{k=0}^{n} f_k, \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right) < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$, was zu zeigen war.

Beispiel. In Übung 4 von Blatt I.13 haben wir die Cotangens-Reihe

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \cot(\pi z)$$

auf $\mathbb{C}/ \setminus \mathbb{Z}$ betrachtet. Für jedes einzelne Reihenglied gilt

$$\left\| \frac{1}{z} \right\|_{\sup} = \left\| \frac{2z}{z^2 - n^2} \right\|_{\sup} = \infty$$

für die Supremumsnorm auf $\mathrm{Abb}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{C})$, so dass wir zunächst nicht von normaler Konvergenz sprechen können. Wenn wir aber $R > 0$ fixieren, dann existiert $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass die Reihe

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

auf $B_R(0)$ (also in $\mathrm{Abb}(B_R(0), \mathbb{C})$) normal konvergiert — das ergibt sich aus der Lösung besagter Übungsaufgabe. Für alle lokalen Eigenschaften der Grenzfunktion $\pi \cot(\pi z)$, die wir später aus der normalen Konvergenz herleiten wollen, reicht uns diese abgeschwächte Aussage.

4.7. Folgerung (aus Satz 3.48). *Sei M metrischer Raum. Dann besitzt jede normal konvergente Reihe stetiger Funktionen auf M eine stetige Grenzfunktion.*

Beweis. Das folgt aus Folgerung 3.49 zu Satz 3.48 und obiger Bemerkung. □

4.8. Satz. *Jede Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$ konvergiert normal auf $B_r(0)$ für alle $r < \rho$, und ihre Grenzfunktion ist auf $B_\rho(0)$ stetig.*

Beweis. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ Potenzreihe mit $\rho > 0$, und sei $r < \rho$. Wähle $R \in (r, \rho)$. Nach Definition von ρ in 4.2 existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{R}, \qquad \text{also } |a_n| < \frac{1}{R^n}$$

für alle $n \geq n_0$. Es folgt

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \sup_{x \in B_r(0)} \left|a_k x^k\right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{r^k}{R^k} < \infty,$$

da $r < R$. Also konvergiert die Potenzreihe normal als Reihe von Funktionen auf $B_r(0)$ für alle $r < \rho$.

Wie in Folgerung 3.50 schließen wir, dass die Grenzfunktion auf ganz $B_\rho(0)$ stetig ist. □

Bemerkung. Über das Verhalten auf dem Rand des Konvergenzkreises ist keine Aussage möglich. Es kann sein, dass sich die Grenzfunktion f auf einen Punkt x mit $|x| = \rho$ durch $f(x) = y$ stetig fortsetzen lässt. Es kann auch sein, dass die Potenzreihe an der Stelle x gegen $z \in \mathbb{k}$ konvergiert, aber selbst dann muss nicht unbedingt $y = z$ gelten.

4.9. Folgerung. *Sei $f\colon (-\rho, \rho) \to \mathbb{k}$ durch eine Potenzreihe*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

mit Konvergenzradius ρ gegeben. Dann ist f regelintegrierbar mit

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \left(b^{k+1} - a^{k+1}\right) \qquad \text{für alle } a, b \in (-\rho, \rho).$$

Beweis. Da die Potenzreihe auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergiert, ist das Integral nach Folgerung 3.61 der Grenzwert der Integrale der Partialsummen. Mit Beispiel 3.54 erhalten wir also

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b a_k x^k\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \left(b^{k+1} - a^{k+1}\right). \qquad \square$$

4.10. Beispiel. Durch Integration der geometrischen Reihe und Übung 3 von Blatt I.14 erhalten wir

$$\int_1^{1+a} \frac{dx}{x} = \int_0^a \frac{dx}{1-(-x)} = \int_0^a \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k\, dx = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^{k+1}}{k+1} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-a)^k}{k}.$$

Später sehen wir, dass das gerade der Logarithmus von $(1+a)$ ist.

4.2. Exponentialfunktion und Logarithmus

In diesem Abschnitt lernen wir die komplexe Exponentialfunktion und ihre Umkehrfunktion für reelle Argumente, den Logarithmus, kennen. Die Exponentialfunktion reeller Argumente beschreibt Wachstumsprozesse, während die Exponentialfunktion imaginärer Argumente im nächsten Abschnitt die Winkelfunktionen liefern wird. Mit Hilfe von Logarithmus und Exponentialfunktion können wir Potenzen positiver Zahlen mit beliebigen (sogar komplexen) Exponenten definieren.

Wir betrachten die *Exponentialreihe*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Ihr Konvergenzradius ist

$$\rho = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \right)^{-1} = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}\ .$$

Um zu zeigen, dass $\rho = \infty$, sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Gesucht ist n_0, so dass $\sqrt[n]{n!} > m$ für alle $n \geq n_0$. Das ist äquivalent zu $n! > m^n$, oder zu

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{i}{m} > 1$$

für alle $n \geq n_0$. Man sieht leicht, dass die Folge obiger Produkte für $n \to \infty$ gegen ∞ konvergiert. Also gilt $\rho = \infty$, und die Exponentialreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{C}$ nach Satz 4.1.

4.11. Definition. Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

heißt *komplexe Exponentialfunktion*

Um eine zentrale Eigenschaft der Exponentialfunktion nachzuweisen, benötigen wir zunächst eine Formel für das Produkt zweier Reihen.

4.12. Satz (Cauchy-Produkt). *Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell$ absolut konvergent, dann konvergiert auch die Reihe*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k} \right)$$

absolut, und es gilt

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k} \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell \right) .$$

Beweis. Anstelle des Cauchy-Produktes betrachten wir eine Reihe mit den Reihengliedern $a_k b_\ell$, die wir noch geeignet anordnen. Wenn wir zeigen können, dass diese Reihe absolut konvergiert, dann konvergiert nach dem Umordnungssatz 2.69 auch die Anordnung

$$a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + \dots + a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \dots + a_m b_0 + \dots \tag{1}$$

Das Cauchy-Produkt hat als Partialsummenfolge eine Teilfolge der Partialsummenfolge zu dieser Anordnung (1).

Wir betrachten jetzt die Anordnung

$$a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_1 + a_1 b_0 + \dots + a_0 b_N + \dots + a_N b_N + \dots + a_N b_0 + \dots \tag{2}$$

Diese Reihe konvergiert absolut, denn die $N^2 - 1$-te Partialsumme der Reihe aus den Absolutbeträgen lautet gerade

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} |a_k| \, |b_\ell| = \left(\sum_{k=0}^{N-1} |a_k| \right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} |b_\ell| \right) ,$$

und nach Voraussetzung sind diese Partialsummen beschränkt für alle N. Somit konvergiert die obige Reihe absolut, und damit auch das Cauchy-Produkt. Die $N^2 - 1$-te Partialsumme der Reihe in der Anordnung (2) ist entsprechend

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} a_k b_\ell = \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k \right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} b_\ell \right) ,$$

also ist der Grenzwert das Produkt der Grenzwerte der ursprünglichen Reihen nach Satz 2.22. □

4.13. Folgerung (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion). *Für alle z, $w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(0) = 1 , \tag{1}$$

$$\exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w . \tag{2}$$

Beweis. Aussage (1) folgt, da der konstante Term der Potenzreihe gerade 1 ist.

Mit Hilfe der Formel für das Cauchy-Produkt und der binomischen Formel aus Übung 1 von Blatt I.4 beweisen wir (2):

$$\begin{aligned} \exp(z + w) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z + w)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} z^k \, w^{m-k} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{z^k \, w^{m-k}}{k! \, (m-k)!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{w^\ell}{\ell!} \right) \\ &= \exp z \cdot \exp w . \end{aligned}$$

□

Wir betrachten jetzt die Exponentialfunktion reeller Argumente.

4.14. Satz. *Die reelle Exponentialfunktion* $\exp|_{\mathbb{R}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist eine stetige, streng monoton steigende Funktion mit Bild* $\operatorname{im}(\exp|_{\mathbb{R}}) = (0, \infty)$.

Beweis. Die Stetigkeit folgt aus Satz 4.8. Aufgrund der Reihendarstellung gilt sicher
$$\exp x > 1 + x > 1 > 0 \qquad \text{für alle } x \in (0, \infty) ,$$
da alle weiteren Reihenglieder positiv sind, insbesondere
$$\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty .$$
Für negative Argumente erhalten wir
$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \in \left(0, \frac{1}{1+x}\right)$$
für alle $x > 0$, und nach Folgerung 3.27 insbesondere
$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\exp x} = 0 .$$
Wir sehen also, dass $\operatorname{im}(\exp|_{\mathbb{R}}) \subset (0, \infty)$, und nach dem Zwischenwertsatz 3.29 werden alle Werte in $(0, \infty)$ angenommen.

Um die Monotonie nachzuweisen, sei $x < y$. Es folgt
$$\exp y = \underbrace{\exp x}_{>0} \cdot \exp \underbrace{(y - x)}_{>0} > \exp x \cdot (1 + y - x) > \exp x. \qquad \square$$

Nach dem Umkehrsatz 3.33 besitzt $\exp|_{\mathbb{R}}$ also eine Umkehrfunktion.

4.15. Definition. Die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion heißt *natürlicher Logarithmus* und wird mit $\log \colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ bezeichnet.

4.16. Folgerung (Funktionalgleichung des Logarithmus). *Für alle $x, y > 0$ gilt*

(1) $$\log 1 = 0,$$

(2) $$\log(xy) = \log x + \log y.$$

Beweis. Das ergibt sich sofort aus Folgerung 4.13. $\square$

Bemerkung. Wegen der Folgerungen 4.13 und 4.16 liefert die Exponentialfunktion einen Isomorphismus der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ des Körpers $\mathbb{R}$ zur multiplikativen Gruppe $((0, \infty), \cdot\,)$ der positiven reellen Zahlen mit Umkehrisomorphismus log.

Wie schon am Anfang des Abschnitts gesagt, können wir jetzt beliebige Potenzen positiver Zahlen definieren. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung.

4.17. Satz. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $a \in \mathbb{Q}$ gilt*
$$\exp(ax) = (\exp x)^a .$$

Beweis. Für $a = n \in \mathbb{N}$ erhalten wir mit Folgerung 4.13 und vollständiger Induktion, dass
$$\exp(0 \cdot x) = 1 = (\exp x)^0$$

und

$$\exp(nx) = \exp(x + (n-1)x) = \exp x \cdot (\exp x)^{n-1} = (\exp x)^n \; .$$

Für $a = -n$ mit $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$\exp(nx) \cdot \exp(-nx) = \exp(nx - nx) = 1 \; ,$$

also $\exp(-nx) = (\exp x)^{-n}$.

Schließlich sei $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Wir benutzen jetzt, dass $\exp x \in (0, \infty)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, um Satz 2.31 über die Existenz und Eindeutigkeit von Potenzen mit rationalen Exponenten anzuwenden. Es folgt

$$\left(\exp \frac{px}{q}\right)^q = \exp(px) = (\exp x)^p \; ,$$

also $\exp\bigl(\frac{p}{q} \cdot x\bigr) = (\exp x)^{\frac{p}{q}}$, wie behauptet. □

Für $x \in (0, \infty)$ und $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ gilt somit

$$x^{\frac{p}{q}} = (\exp(\log x))^{\frac{p}{q}} = \exp\left(\frac{p}{q} \log x\right) .$$

Wir benutzen diese Identität, um allgemeine Potenzen zu definieren.

4.18. Definition. Für $x \in (0, \infty)$ und $z \in \mathbb{C}$ definieren wir die Potenz

$$x^z = \exp(z \log x) \in \mathbb{C}.$$

Bemerkung. Strenggenommen betrifft die obige Definition nur $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, da wir rationale Exponenten bereits in Satz 2.31 behandelt hatten — für $z \in \mathbb{C}$ stimmt die Definition wegen Satz 4.17 aber mit der bisherigen Definition überein. Außerdem dem benötigen wir Potenzen x^n mit natürlichen Exponenten bereits zur Definition der Exponentialreihe, dürfen also x^n hier nicht neu definieren.

4.19. Bemerkung.

(1) Für beliebige $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ können wir uns die Bedeutung von x^z im Moment noch nicht vorstellen. Für $z \in \mathbb{R}$ hingegen gilt wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion offensichtlich

$$x^z = \lim_{\mathbb{Q} \ni \frac{p}{q} \to z} x^{\frac{p}{q}},$$

und wegen Satz 2.31 ist x^z für alle $z \in \mathbb{R}$ durch diese Gleichung bereits eindeutig bestimmt. Außerdem hat die Funktion $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ mit $(x, a) \mapsto x^a$ aufgrund der Stetigkeit noch immer die Eigenschaften (1)–(8) aus Satz 2.31.

(2) Wir setzen $e = \exp(1) = 2,71828\ldots$, genannt *Basis des natürlichen Logarithmus*. Dann gilt

$$\exp z = \exp(z \cdot 1) = \exp(1)^z = e^z,$$

wir schreiben daher auch e^z für die Exponentialfunktion.

(3) Für $b \in (1, \infty)$ definieren wir den *Logarithmus zur Basis* b durch

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b} \qquad \text{für alle } x \in (0, \infty) ,$$

insbesondere also $\log_e = \log$. Dann ist $\log_b$ die Umkehrfunktion zu $z \mapsto b^z$, denn für alle $x \in (0, \infty)$, $y \in \mathbb{R}$ folgt

$$b^{\log_b x} = e^{\frac{\log x}{\log b} \log b} = x \qquad \text{und} \qquad \log_b(b^y) = \frac{y \log b}{\log b} = y.$$

Bemerkung. In der Literatur, vor allem im technischen Bereich, wird der natürliche Logarithmus mit ln bezeichnet, wohingegen log oft für den dekadischen Logarithmus $\log_{10}$ steht. In der Informatik ist der binäre Logarithmus $\log_2$ sehr beliebt. Als Mathematiker braucht man fast nur den natürlichen Logarithmus, und benutzt für diesen daher das Kürzel log. Früher hat man Logarithmen eingesetzt, um Punkt- durch Strichrechnung zu ersetzen, siehe Folgerung 4.16; heute rechnet man Produkte und Quotienten genauso effizient direkt aus.

Der natürliche Logarithmus ist nicht zuletzt wegen des folgenden Resultats sehr wichtig.

4.20. Satz. *Es gilt*

$$\text{(1)} \qquad \int_a^b e^x \, dx = e^b - e^a \qquad \textit{für alle } a, b \in \mathbb{R} \textit{ und}$$

$$\text{(2)} \qquad \int_a^b \frac{1}{x} \, dx = \log b - \log a = \log \frac{b}{a} \qquad \textit{für alle } a, b > 0.$$

In der Sprechweise von Definition 3.66 ist also die Exponentialfunktion ihre eigene Stammfunktion, und der Logarithmus die Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Beweis. Für (1) benutzen wir Folgerung 4.9 und erhalten

$$\int_a^b e^x \, dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n!(n+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{b^k - a^k}{k!}}_{=0 \text{ für } k=0} = e^b - e^a.$$

Für (2) approximieren wir $\frac{1}{x}$ für $x \in [a, b]$ durch Treppenfunktionen f_n wie in Beispiel 3.54. Sei also wieder $h = \frac{b-a}{n}$ und $x_j = a + j \cdot h$ für $j = 0, \dots, n$. Für genügend großes n gilt $h < a$, insbesondere $h < x_j$ für alle j.

Wir können abschätzen

$$1 + \frac{h}{x_{j-1}} < e^{\frac{h}{x_{j-1}}}$$

und

$$e^{\frac{h}{x_j}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{h}{x_j} \right)^k < \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{h}{x_j} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{h}{x_j}} = 1 + \frac{h}{x_j - h} = 1 + \frac{h}{x_{j-1}}.$$

Also existiert ein $y_j \in \left(\frac{1}{x_j}, \frac{1}{x_{j-1}}\right)$ mit $e^{\frac{h}{y_j}} = 1 + \frac{h}{x_{j-1}}$ nach dem Zwischenwertsatz 3.29, angewandt auf die Funktion $x \mapsto e^{\frac{h}{x}}$. Wir definieren nun für n hinreichend groß unsere Treppenfunktion f_n durch

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_j} & \text{falls } x = x_j \text{, und} \\ \frac{\log x_j - \log x_{j-1}}{h} & \text{falls } x \in (x_{j-1}, x_j). \end{cases}$$

Insbesondere gilt

$$\int_a^b f_n(x)\,dx = \sum_{j=1}^n \frac{\log x_j - \log x_{j-1}}{h} \cdot h = \log b - \log a = \log \frac{b}{a}.$$

Außerdem gilt

$$\frac{\log x_j - \log x_{j-1}}{h} = \frac{1}{h} \log \frac{x_{j-1} + h}{x_{j-1}} = \frac{1}{h} \log \left(1 + \frac{h}{x_{j-1}}\right) = \frac{1}{y_j}.$$

Nun ist $\frac{1}{x}$ auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig nach Satz 3.42. Zu $\varepsilon > 0$ existiert also $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y_j}\right| < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in (x_{j-1}, x_j),$$

und somit gilt $d_{\sup}\left(\frac{1}{x}, f_n\right) < \varepsilon$.

Da die Folge $(f_n)_n$ also gleichmäßig gegen $\frac{1}{x}|_{[a,b]}$ konvergiert, folgt aus obiger Rechnung die Behauptung (2). □

4.21. Folgerung. *Für $x \in (-1, 1)$ gilt*

$$\log(1 + x) = -\sum_{k=1}^\infty \frac{(-x)^k}{k}.$$

Beweis. Das folgt aus Satz 4.20 und Beispiel 4.10. □

Die obige Reihe heißt daher auch *Logarithmus-Reihe.*

4.22. Bemerkung. (1) Wir wissen aus Beispiel 2.57 bereits, dass die harmonische Reihe divergiert. Indem wir die Funktion $\frac{1}{x}$ mit Treppenfunktionen f, $g\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f|_{(n,n+1]} = \frac{1}{n+1} \qquad \text{und} \qquad g|_{[n,n+1)} = \frac{1}{n}$$

jeweils für alle $n \in \mathbb{N}$ vergleichen, sehen wir, dass

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \int_1^n f(x)\,dx < \int_1^n \frac{dx}{x} = \log n < \int_1^n g(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$$

also

$$\log(n + 1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} < 1 + \log n.$$

(2) Für $x = 1$ macht Folgerung 4.21 leider keine Aussage. Wir betrachten den Beweis des Leibnizkriteriums 2.59 und sehen für $x \in [0, 1)$, dass

$$\left| \log(1+x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-x)^k}{k} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Aus der Stetigkeit des Logarithmus folgt

$$\left| \log 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

für alle n, somit gilt Folgerung 4.21 sogar für $x = 1$, vgl. Beispiel 2.60:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\log 2.$$

4.3. Winkelfunktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir die Exponentialfunktion für komplexe, speziell für imaginäre Argumente. Dazu definieren wir die Winkelfunktionen Sinus und Cosinus. Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion lassen sich formale Eigenchaften wie die Additionstheoreme leicht ablesen. Weitaus mehr Mühe macht es, die geometrische Deutung der Winkelfunktionen zu erklären.

4.23. Bemerkung. Es sei $f\colon B_\rho(0) \to \mathbb{C}$ dargestellt durch eine Potenzreihe über $\mathbb{R}$, es gelte also

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \qquad \text{mit } a_k \in \mathbb{R} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Da die komplexe Konjugation wie in Beispiel 2.42 mit Addition und Multiplikation verträglich ist und da $|\overline{z}| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = |z|$ für alle $z \in \mathbb{C}$, gilt dann

$$\overline{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a}_k \overline{z}^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \overline{z}^k = f(\overline{z}),$$

da $a_k \in \mathbb{R}$ und daher $\overline{a}_k = a_k$ gilt.

Insbesondere gilt für $x \in \mathbb{R}$ also $\overline{e^{ix}} = e^{\overline{ix}} = e^{-ix}$. Aus der Funktionalgleichung 4.13 ergibt sich

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^0 = 1.$$

Wir wollen Cosinus und Sinus als Real- und Imaginärteil von e^{ix} definieren. Aus dem Ansatz

$$e^{ix} = cosx + i \sin x \ ,$$

Bemerkung 4.23 und x, $\cos x$, $\sin x \in \mathbb{R}$ folgt

$$e^{-ix} = \overline{e^{ix}} = \overline{\cos x + i \sin x} = \cos x - i \sin x,$$

insbesondere

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \text{und} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} .$$

4.24. Definition. Die Funktionen cos, sin: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \text{und} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

heißen *Cosinus-* und *Sinusfunktion.*

Die Funktionen cosh, sinh: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \qquad \text{und} \qquad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

heißen *Cosinus Hyperbolicus* und *Sinus Hyperbolicus.*

Wir führen die Hyperbelfunktionen hier ein, da sie formal ähnliche Eigenschaften wie die Winkelfunktionen haben.

4.25. Proposition. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt*

(1) $$\cos z = \cosh(iz) , \qquad \sin z = -i \sinh(iz) ,$$

(2) $$\cos(-z) = \cos z , \qquad \sin(-z) = -\sin z ,$$

(3) $$\cosh(-z) = \cosh z , \qquad \sinh(-z) = -\sinh z .$$

und es gilt die Eulersche Formel

(4) $$e^{iz} = \cos z + i \sin z .$$

Beweis. Diese Gleichungen folgen unmittelbar aus Definition 4.24. □

4.26. Proposition. *Die Funktionen* cos, sin, cosh *und* sinh: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *werden durch Potenzreihen mit Konvergenzradius ∞ dargestellt:*

(1) $$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} ,$$

(2) $$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} ,$$

(3) $$\cosh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} ,$$

(4) $$\sinh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} .$$

Beweis. Wir setzen die Exponentialreihe in die Formeln in Definition 4.24 ein und erhalten die Behauptung. Da $i^{2k} = (-1)^k = (-i)^{2k}$, erhalten wir für den Cosinus beispielsweise

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(iz)^\ell + (-iz)^\ell}{\ell!}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} i^{2k}\left(\frac{z^{2k}+z^{2k}}{(2k)!} + \frac{iz^{2k+1}-iz^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}\;. \end{aligned}$$ □

Bemerkung. Für reelle x gilt $\operatorname{Re}(e^{ix}) = \cos x$ und $\operatorname{Im}(e^{ix}) = \sin x$ nach Konstruktion. Für komplexe x gilt das zwar nicht mehr, aber dafür können wir die Winkelfunktionen durch Potenzreihen darstellen.

4.27. Satz (Additionstheoreme). *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$1 = \cos^2 z + \sin^2 z, \tag{1}$$

$$\cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w \tag{2}$$

$$\sin(z+w) = \cos z\sin w + \sin z\cos w \tag{3}$$

$$1 = \cosh^2 z - \sinh^2 z, \tag{4}$$

$$\cosh(z+w) = \cosh z\cosh w + \sinh z\sinh w, \tag{5}$$

$$\sinh(z+w) = \cosh z\sinh w + \sinh z\cosh w. \tag{6}$$

Hierbei schreiben wir $\cos^2 x$ für $(\cos x)^2$, $\sin^2 x$ für $(\sin x)^2$, usw...

Beweis. Wir zeigen zunächst (5). Es gilt

$$\begin{aligned}\cosh(z+w) &= \frac{e^{z+w}+e^{-z-w}}{2}\\ &= \frac{(e^z+e^{-z})(e^w+e^{-w})}{4} + \frac{(e^z-e^{-z})(e^w-e^{-w})}{4}\\ &= \cosh z\cdot\cosh w + \sinh z\cdot\sinh w.\end{aligned}$$

Genauso beweist man (6). Mit (1) aus Proposition 4.25 folgen hieraus (2) und (3). Wir setzen $w = -z$ und benutzen (2) und (3) aus Proposition 4.25, um (1) aus (2) und (4) aus (5) herzuleiten. □

Bemerkung. Für reelle Argumente vereinfacht sich der obige Beweis noch etwas. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \operatorname{Re}(e^{ix}\cdot e^{iy}) = \operatorname{Re}(e^{ix})\operatorname{Re}(e^{iy}) - \operatorname{Im}(e^{ix})\operatorname{Im}(e^{iy})\\ &= \cos x\cos y - \sin x\sin y\;,\\ \sin(x+y) &= \operatorname{Im}(e^{ix}\cdot e^{iy}) = \operatorname{Re}(e^{ix})\operatorname{Im}(e^{iy}) + \operatorname{Im}(e^{ix})\operatorname{Re}(e^{ix})\\ &= \cos x\sin y - \sin x\cos y\;,\\ 1 &= |e^{ix}|^2 = \operatorname{Re}(e^{ix})^2 + \operatorname{Im}(e^{ix})^2\\ &= \cos^2 x + \sin^2 x\;.\end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung kann man bereits ablesen, dass Sinus und Cosinus nur Werte in $[-1, 1]$ annehmen können.

Aus den Additionstheoremen leiten wir nützliche Identitäten her.

4.28. Folgerung. *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z = 2\cos^2 z - 1 = 1 - 2\sin^2 z \tag{1}$$

$$\sin(2z) = 2\cos z \sin z \tag{2}$$

$$\cos z - \cos w = -2\sin\frac{z+w}{2}\sin\frac{z-w}{2} \tag{3}$$

$$\sin z - \sin w = 2\cos\frac{z+w}{2}\sin\frac{z-w}{2} \tag{4}$$

$$\cos^2\frac{z}{2} = \frac{1+\cos z}{2} \tag{5}$$

$$\sin^2\frac{z}{2} = \frac{1-\cos z}{2} \tag{6}$$

Beweis. Gleichungen (1) und (2) ergeben sich aus (2) und (3) in Satz 4.27 für $z = w$. Indem wir die Additionstheoreme für $\frac{z+w}{2}$ und $\pm\frac{z-w}{2}$ subtrahieren, erhalten wir (3) und (4). Aus (1) folgen (5) und (6) durch Halbieren von z. □

Wir betrachten jetzt Cosinus und Sinus für reelle Argumente. Dabei untersuchen wir Nullstellen, Extrema und Monotonie. Wir beginnen mit zwei einfachen Abschätzungen.

4.29. Proposition. *Für $x \in [0, 2]$ gilt*

$$1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \tag{1}$$

$$x \ge \sin x \ge x - \frac{x^3}{6}. \tag{2}$$

Beweis. Die Potenzreihen aus Proposition 4.26 (1) und (2) sind alternierend und für $x \in [0, 2]$ bilden ihre Beträge eine monoton fallende Nullfolge, denn

$$\frac{x^{k+2}}{(k+2)!} \Big/ \frac{x^k}{k!} = \frac{x^2}{(k+1)(k+2)} \le \frac{4}{6} < 1$$

für alle $x \in [0, 2]$ und $k \ge 1$. Die Ungleichungen (1) und (2) ergeben sich aus der Intervallschachtelung im Beweis des Leibniz-Kriteriums 2.59. □

4.30. Folgerung. *Die Cosinus-Funktion fällt streng monoton auf* $[0, 2]$ *und hat in diesem Intervall genau eine Nullstelle.*

Beweis. Für $x \in (0, 2]$ gilt

$$0 < x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) \le \sin x.$$

Für $0 \le x < y \le 2$ folgt aus (3) in Folgerung 4.28, dass

$$\cos y - \cos x = -2\sin \underbrace{\frac{y+x}{2}}_{\in(0,2)} \sin \underbrace{\frac{y-x}{2}}_{\in(0,2]} < 0,$$

somit fällt der Cosinus streng monoton. Für $x = 2$ gilt

$$\cos 2 \le 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3} < 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz 3.29 existiert ein $x \in [0,2]$ mit $\cos x = 0$, und aufgrund der strengen Monotonie ist x die einzige Nullstelle in diesem Intervall. $\square$

4.31. Definition. Sei $\tau \in (0,2)$ die Nullstelle der Cosinus-Funktion. Dann definiert man die Kreiszahl $\pi = 2\tau = 3,14159\dots$.

Aus diesen Informationen können wir jetzt das Verhalten der Cosinus- und der Sinus-Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ ableiten.

4.32. Satz. *Für die Funktionen* $\cos, \sin \colon \mathbb{R} \to [-1,1] \subset \mathbb{R}$ *gilt*

(1) *Der Cosinus fällt streng monoton auf* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *mit* $\cos 0 = 1$ *und* $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.
(2) *Es gilt* $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.
(3) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \qquad \textit{und} \qquad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$$

Beweis. Aussage (1) folgt aus Folgerung 4.30 und der Definition von π.

Da $\sin \frac{\pi}{2} > 0$ nach Proposition 4.29 und

$$\sin^2 \frac{\pi}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$$

nach Satz 4.27 (1), folgt $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Mit dem Additionstheorem für den Cosinus und Proposition 4.25 (2) ergibt sich (2), da

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} \cos(-x) - \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} \underbrace{\sin(-x)}_{=-\sin x} = \sin x.$$

Genauso zeigen wir (3):

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \sin \frac{\pi}{2} = -\sin x,$$
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \sin \frac{\pi}{2} + \sin x \cos \frac{\pi}{2} = \cos x. \qquad \square$$

4.33. Bemerkung. Aus diesem Satz können wir das gesamte Verhalten der Funktionen $\cos x$, $\sin x$ ableiten.

(1) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ und $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Das folgt durch viermaliges Anwenden von (3).

(2) Die Nullstellen des Cosinus sind $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \dots$, die des Sinus sind $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$. Die Nullstellen des Sinus sind die Extremstellen des Cosinus und umgekehrt.
(3) Auf jedem Intervall $[k \cdot \frac{\pi}{2}, (k+1) \cdot \frac{\pi}{2}]$ für $k \in \mathbb{Z}$ können wir das Monotonieverhalten von cos und sin beschreiben. Zusammensetzen liefert den bekannten Graphen.
(4) Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ mit $x \mapsto (\cos x, \sin x) \cong e^{ix}$ beschreibt den Einheitskreis. Wenn wir x als (gerichteten) Winkel zur x-Achse auffassen, sehen wir, dass $\frac{\pi}{2}$ gerade der rechte Winkel ist, also $\frac{\pi}{2} = 90°$, $1° = \frac{\pi}{180}$.
(5) Es gilt die *Eulersche Formel*

$$e^{i\pi} = -1 \ .$$

KAPITEL 5

Infinitesimalrechnung in einer Veränderlichen

In diesem Kapitel lernen wir die Ableitung von Funktionen in einer reellen Variablen und ihre geometrische Bedeutung kennen. Wir benutzen die Ableitung unter anderem, um Extremstellen zu finden. Anschließend beweisen wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, um Integrale auszurechnen. Schließlich benutzen wir höhere Ableitungen, um Funktionen durch Polynome und Potenzreihen anzunähern.

5.1. Die Ableitung

Wir betrachten Funktionen einer reellen Veränderlichen mit Werten in $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Es sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D, und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir betrachten den Graph

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subset \mathbb{R}^2$$

von f und wollen die Steigung der *Tangente* an $\Gamma(f)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ bestimmen, d.h., die Steigung einer Geraden, die $\Gamma(f)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ berührt. Dazu betrachten wir zunächst *Sekanten*, also Geraden, die $\Gamma(f)$ in zwei Punkten schneiden. Die Gerade durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x)) \in \Gamma(f)$ hat die *Steigung*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

für $x \neq x_0$. Wir können jetzt den Grenzwert für $x \to x_0$ betrachten. Falls dieser existiert, sollte er die Steigung der Tangente liefern. Man beachte, dass wir in der Definition des Grenzwerts für $x \to x_0$ den Fall $x = x_0$ ausgeschlossen hatten. Wir dividieren also nicht durch null.

Bevor wir die Ableitung definieren, erinnern wir uns an den Begriff der Stetigkeit einer Funktion an einem Punkt (Definition 3.2), an den Begriff des Grenzwertes einer Funktion an einem Punkt (Definition 3.19) und an Satz 3.23, wonach eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ an einem Häufungspunkt $x_0 \in D$ von D genau dann stetig ist, wenn $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$ gilt.

5.1. Definition. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{k}$ heißt *differenzierbar* an der Stelle x_0, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall heißt $f'(x_0)$ die *Ableitung* von f an der Stelle x_0.

Andere Bezeichnungen für die Ableitung sind

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(x_0) \qquad \text{und} \qquad \dot{v}(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0} \;;$$

man benutzt den Punkt anstelle des Striches, wenn man sich die Veränderliche t als Zeit vorstellen möchte.

5.2. Beispiel. (1) Es sei $f(x) = c$ eine konstante Funktion, dann gilt

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{c-c}{x-x_0} = 0 \;.$$

(2) Für die lineare Funktion $f(x) = ax + b$ gilt

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{ax-ax_0}{x-x_0} = a \;.$$

5.3. Lemma. *Es sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt, $f\colon D \to \mathbb{k}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{k}$. Dann sind äquivalent:*

(1) *die Funktion f ist bei x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) = a$;*
(2) *es gibt eine Funktion $\varphi\colon D \to \mathbb{k}$, die bei x_0 stetig ist, mit*

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)\cdot(x-x_0) \qquad \textit{und} \qquad \varphi(x_0) = a \;;$$

(3) *es gibt eine Funktion $r\colon \{h \mid x_0 + h \in D\} \to \mathbb{k}$ mit*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + a\,h + h\,r(h) \qquad \textit{und} \qquad \lim_{h\to 0} r(h) = 0 \;.$$

Insbesondere ist die Ableitung $a = f'(x_0)$ durch jede dieser Bedingungen eindeutig festgelegt.

Aussage (2) brauchen wir in einigen Beweisen, und (3) bedeutet, dass wir $\Gamma(f)$ nahe x_0 durch die Tangente $h \mapsto (x_0 + h, f(x_0) + a\cdot h) \in \mathbb{R}^2$ annähern können. Aus (2) folgt auch, dass Differenzierbarkeit genau wie Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, vergleiche dazu Lemma 3.7.

Beweis. Zu (1) $\Longrightarrow$ (2) definieren wir

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{für } x \neq x_0, \text{ und} \\ a & \text{für } x = x_0. \end{cases}$$

Daraus folgt bereits $f(x) = f(x_0) + \varphi(x)\cdot(x-x_0)$. Aus Definition 5.1 ergibt sich $\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = f'(x_0) = a = \varphi(x_0)$. Also ist φ bei x_0 stetig nach Satz 3.23.

Zu (2) $\Longrightarrow$ (3) setzen wir

$$r(h) = \varphi(x_0+h) - a$$

für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $x_0 + h \in D$. Aus (2) folgt

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \varphi(x_0+h)\cdot h = f(x_0) + ah + hr(h),$$

und da $\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = a$, auch

$$\lim_{h\to 0} r(h) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x_0+h) - a = 0.$$

Zu (3) $\Longrightarrow$ (1) schließlich berechnen wir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{ah+hr(h)}{h} = a+\lim_{h\to 0} r(h) = a.\end{aligned}$$

□

5.4. Folgerung. *Wenn $f\colon D\to \Bbbk$ bei $x_0\in D$ differenzierbar ist, ist f bei x_0 auch stetig.*

Beweis. Die Funktion φ in Lemma 5.3 (2) ist bei x_0 stetig. Nach Proposition 3.12 ist dann auch f bei x_0 stetig. □

5.5. Beispiel. Wir betrachten die Exponentialfunktion!exp: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Für $x_0=0$ schreiben wir

$$\exp x = e^x = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!} = 1 + x\cdot\sum_{k=1}^\infty\frac{x^{k-1}}{k!} = e^{x_0}+\varphi(x)\,(x-x_0)$$

mit

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^\infty\frac{x^{k-1}}{k!}=\sum_{\ell=0}^\infty\frac{x^\ell}{(\ell+1)!}.$$

Man überprüft wie in Abschnitt 4.2, dass φ durch eine konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞ dargestellt wird. Insbesondere ist φ bei $x_0=0$ stetig mit $\varphi(0)=1$. Aus Lemma 5.3 (2) folgt

$$\exp'(0)=\frac{de^x}{dx}\Big|_{x=0}=\varphi(0)=1.$$

Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion aus Folgerung 4.13 ergibt sich für beliebige $x_0\in\mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned}\exp(x_0+h) &= \exp x_0\cdot\exp h\\ &= \exp x_0\cdot\big(\underbrace{\exp 0}_{=1}+h\underbrace{\exp' 0}_{=1}+h\cdot r(h)\big)\\ &= \exp x_0 + h\cdot\exp x_0 + h\cdot r(h)\cdot\exp x_0,\end{aligned}$$

wobei wir Lemma 5.3 (3) im zweiten Schritt benutzt haben. Nochmaliges Anwenden von Lemma 5.3 (3) liefert schließlich die wohlbekannte Gleichung

$$\exp' x_0 = \frac{de^x}{dx}\Big|_{x=x_0}=\exp x_0.$$

Auf die gleiche Weise beweist man auch $\cos' x=-\sin x$ und $\sin' x=\cos x$ (Übung).

5.6. Definition. Sei $D\subset\mathbb{R}$, $x_0\in D$ und $f\colon D\to\Bbbk$ eine Funktion. Falls x_0 Häufungspunkt von $(-\infty,x_0]\cap D$ (bzw. $[x_0,\infty)\cap D$) ist, und die Funktion $f|_{(-\infty,x_0]\cap D}$ (bzw. $f|_{[x_0,\infty)\cap D}$) bei x_0 differenzierbar ist, heißt f bei x_0 *linksseitig* (bzw. *rechtsseitig*) *differenzierbar* mit *linksseitiger* (bzw. *rechtsseitiger*) *Ableitung*

$$f'(x_0-)=\big(f|_{(-\infty,x_0]\cap D}\big)'(x_0)\qquad\text{bzw.}\qquad f'(x_0+)=\big(f|_{[x_0,\infty)\cap D}\big)'(x_0)\,.$$

5.7. Bemerkung. Es sei $x_0 \in D$ sowohl Häufungspunkt von $(-\infty, x_0] \cap D$ als auch von $[x_0, \infty) \cap D$. Mit Hilfe von Bemerkung 3.21 zeigt man, dass f genau dann bei x_0 differenzierbar ist, wenn f bei x_0 sowohl links- als auch rechtsseitig differenzierbar ist und $f'(x_0-) = f'(x_0+)$ gilt.

5.8. Beispiel. Es sei $f(x) = |x|$ die Betragsfunktion. Dann gilt

$$f'(0+) = \lim_{x \searrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = 1 = \operatorname{sign}(x)$$

und $$f'(0-) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x}{x} = -1 = \operatorname{sign}(x)\;.$$

Also ist die Betragsfunktion bei $x = 0$ nicht differenzierbar, ansonsten ist ihre Ableitung die Vorzeichenfunktion.

5.2. Ableitungsregeln

Wir lernen, wie man Funktionen, die durch Summen, Produkte und Hintereinanderausführung einfacherer Funktionen gegeben sind, ableitet.

5.9. Proposition. *Es seien $f, g \colon D \to \Bbbk$ bei $x_0 \in D$ differenzierbar, und $r, s \in \Bbbk$. Dann ist auch $r \cdot f + s \cdot g \cdot D \to \Bbbk$ differenzierbar mit*

$$(r \cdot f + s \cdot g)'(x_0) = r\, f'(x_0) + s\, g'(x_0).$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus Definition 5.1 und den Rechenregeln für Grenzwerte:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} \frac{(rf(x) + sg(x)) - (rf(x_0) + sg(x_0))}{x - x_0} \\
&\qquad = r \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + s \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = rf'(x_0) + sg'(x_0).
\end{aligned}$$

Der zweite Schritt geht natürlich nur, weil beide Grenzwerte existieren. □

5.10. Bemerkung. Also bilden die Funktionen auf D, die bei $x_0 \in D$ differenzierbar sind, einen Unterraum $V \subset \operatorname{Abb}(D, \Bbbk)$, und das Bilden der Ableitung ist eine lineare Abbildung $V \to \Bbbk$ mit $f \mapsto f'(x_0)$.

5.11. Proposition (Produktregel, Leibnizregel). *Es seien $f, g \colon D \to \Bbbk$ bei x_0 differenzierbar. Dann ist $f \cdot g$ ebenfalls bei x_0 differenzierbar, und es gilt*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Beweis. Wir benutzen Definition 5.1 und schreiben

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt ausgenutzt, dass g nach Folgerung 5.4 bei x_0 stetig ist. □

5.12. Beispiel. Es gilt
$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$
für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $x \neq 0$ falls $n < 0$. Wir zeigen die Behauptung für $n \geq 0$ durch vollständige Induktion. Für $n = 0$ folgt das aus Beispiel 5.2(1), da $x^0 = 1$. Falls die Behauptung für n gilt, folgt aus der Leibnizregel und Beispiel 5.2(2), dass
$$\begin{aligned}\frac{dx^{n+1}}{dx} = \frac{d(x \cdot x^n)}{dx} &= \frac{dx}{dx} \cdot x^n + x \cdot \frac{dx^n}{dx}\\ &= x^n + x \cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n.\end{aligned}$$
Für $n < 0$ führen wir eine weitere Induktion. Für $x_0 \neq 0$ gilt
$$\begin{aligned}\frac{dx^{-1}}{dx}\bigg|_{x=x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x_0 - x}{xx_0(x - x_0)}\\ &= -\lim_{x\to x_0} \frac{1}{xx_0} = -x_0^{-2}\ .\end{aligned}$$
Wenn die Behauptung für $n = -m < 0$ bereits gilt, folgt sie aus der Produktregel wie oben induktiv auch für $-(m+1)$, da $x^{-(m+1)} = x^{-m} \cdot x^{-1}$.

5.13. Proposition (Kettenregel). *Es seien $f\colon D \to \Bbbk$, $g\colon E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $D, E \subset \mathbb{R}$ und $g(E) \subset D$. Die Funktion g sei bei $x_0 \in E$ und f bei $g(x_0) \in D$ differenzierbar. Dann ist $f \circ g\colon E \to \Bbbk$ bei x_0 differenzierbar mit*
$$(f \circ g)' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Beweis. Es sei $y_0 = g(x_0)$. Wie in Lemma 5.3(2) schreiben wir
$$\begin{aligned}f(y) &= f(y_0) + (y - y_0)\varphi(y)\\ g(x) &= g(x_0) + (x - x_0)\psi(x)\end{aligned}$$
Für $y = g(x)$ ergibt sich
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x_0)) + (g(x) - g(x_0))\varphi(g(x))\\ &= f(g(x_0)) + (x - x_0)\varphi(g(x))\psi(x).\end{aligned}$$
Da φ bei $y_0 = g(x_0)$ und g und ψ bei x_0 stetig sind, folgt
$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} (\varphi(g(x))\psi(x)) = \varphi(g(x_0))\psi(x_0)\\ &= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).\end{aligned}$$
□

5.14. Beispiel. Selbst wenn die Ableitung $f'(x)$ für alle x im Definitionsbereich von f existiert, muss sie nicht stetig sein. Dazu betrachten wir
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \text{ und}\\ 0 & \text{für } x = 0.\end{cases}$$

Außerhalb $x = 0$ ist f differenzierbar nach Satz 5.11, Beispiel 5.12 und Satz 5.13, mit

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{dx^2}{dx} \cdot \sin\frac{1}{x} + x^2 \frac{d\sin\frac{1}{x}}{dx} = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2 \sin'\frac{1}{x} \cdot \frac{d\frac{1}{x}}{dx} \\ &= 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

An der Stelle $x = 0$ berechnen wir

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0}\left(x \sin\frac{1}{x}\right) = 0,$$

da $\sin\frac{1}{x} \in [-1, 1]$ für alle $x \neq 0$.

Um zu sehen, dass f' nicht stetig ist, betrachten wir die beiden Summanden in der Formel für f'. Es gilt

$$\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}\right) = 0$$

mit dem gleichen Argument wie oben, aber für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\cos\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} = \cos(2n\pi) = 1 \qquad \text{und} \qquad \cos\frac{1}{\frac{1}{(2n+1)\pi}} = -1,$$

also existiert kein Grenzwert für $x \to 0$. Da $f'(x)$ für $x \to 0$ dann auch keinen Grenzwert haben kann, ist $f'(x)$ bei $x = 0$ nicht stetig.

5.15. Folgerung (Quotientenregel). *Es seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ bei $x_0 \in D$ differenzierbar und $g(x_0) \neq 0$. Dann ist $\frac{f}{g}\colon D \setminus g^{-1}(\{0\}) \to \mathbb{k}$ bei x_0 differenzierbar mit Ableitung*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Beweis. Aus Beispiel 5.12 für $n = -1$ und Satz 5.13 folgt

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{1}{g(x_0)^2} \cdot g'(x_0).$$

Hieraus folgt mit Satz 5.11 die Behauptung. □

5.16. Beispiel. Wir definieren eine weitere Winkelfunktion, den *Tangens*

$$\tan\colon \mathbb{R} \Bigm\backslash \left\{\dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots\right\} \qquad \text{mit} \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\ .$$

Für alle x im Definitionsbereich ergibt sich

$$\tan' x = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\ .$$

5.17. Proposition (Umkehrregel). *Es sei $f\colon D \to B \subset \mathbb{R}$ umkehrbar mit Umkehrfunktion $g\colon B \to D$. Falls f bei $x_0 \in D$ differenzierbar ist mit $f'(x_0) \neq 0$ und falls g bei $y_0 = f(x_0)$ stetig ist, ist g bei y_0 differenzierbar mit Ableitung*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Beweis. Wie in Lemma 5.3(2) schreiben wir
$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x) \cdot (x - x_0),$$
wobei φ bei x_0 stetig ist mit $\varphi(x_0) = f'(x_0) \neq 0$. In einer Umgebung U von x_0 in D gilt dann $\varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in U$ wegen der Stetigkeit von φ bei x_0. Da g bei y_0 stetig ist, ist $V = g^{-1}(U)$ eine Umgebung von y_0 in B.

Für $y \in V \setminus \{y_0\}$ und $x = g(y) \in U \setminus \{x_0\}$ gilt
$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{g(y) - g(y_0)}.$$
Daraus folgt
$$\begin{aligned} g(y) &= g(y_0) + \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}(y - y_0) \\ &= g(y_0) + \frac{y - y_0}{\varphi(x)} = g(y_0) + \frac{y - y_0}{\varphi(g(y))}. \end{aligned}$$
Da g bei y_0 und φ bei $x_0 = g(y_0)$ stetig sind, ist die Funktion $\psi = \frac{1}{\varphi \circ g} \colon V \to \mathbb{R}$ bei y_0 stetig, und es gilt
$$g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \psi(y) = \frac{1}{\varphi(g(y_0))} = \frac{1}{f'(g(y_0))}. \qquad \square$$

Bemerkung. Wenn bereits klar ist, dass die Umkehrfunktion g differenzierbar ist, kann man sich die Formel für die Ableitung aus der folgenden Überlegung herleiten: Ableiten von $y = f(g(y))$ bei y_0 liefert
$$1 = \frac{dy}{dy}\bigg|_{y=y_0} = \frac{d(f \circ g)(y)}{dy}\bigg|_{y=y_0} = f'(g(y_0)) \cdot g'(y_0).$$
Hieraus folgt $g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}$.

5.18. Beispiel. (1) Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist der Logarithmus. Aus Beispiel 5.5 folgt
$$\log' x = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

(2) Wir können (1) anwenden, um allgemeine Potenzen aus Definition 4.18 abzuleiten. Sei dazu $a \in \mathbb{C}$, dann gilt
$$\frac{d \exp(ax)}{dx} = a \exp(ax)$$
(Übung). Für $x \in (0, \infty)$ ergibt sich aus der Kettenregel 5.13 also
$$\frac{dx^a}{dx} = a \exp(a \log x) \log' x = x^a \cdot \frac{a}{x} = a\, x^{a-1}\ .$$

(3) Auf der anderen Seite können wir für $b > 0$ auch die Funktion $x \mapsto b^x$ von $\mathbb{R}$ nach $(0, \infty)$ und die Umkehrfunktion $x \mapsto \log_b x$ ableiten und erhalten
$$\begin{aligned} \frac{db^x}{dx} &= \frac{d \exp(x \log b)}{dx} = \exp(x \log b) \cdot \log b \\ &= b^x \log b \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

$$\text{und} \qquad \frac{d\log_b x}{dx} = \frac{d\frac{\log x}{\log b}}{dx} = \frac{\log' x}{\log b} = \frac{1}{x\,\log b} \qquad \text{für } 0 < x < \infty.$$

Diese Formeln sind etwas komplizierter als für die Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ und den natürlichen Logarithmus. Aus diesem Grunde verwenden Mathematiker lieber diesen als den binären Logarithmus $\log_2$ oder den dekadischen Logarithmus $\log_{10}$.

(4) Die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens heißen *Arcusfunktionen.* Für die Umkehrfunktionen

$$\begin{aligned} &\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi] && \text{von} \quad \cos|_{[0,\pi]}\ , \\ &\arcsin\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] && \text{von} \quad \sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \\ \text{und} \qquad &\arctan\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) && \text{von} \quad \tan|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \arccos' x &= -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{für } x \in (-1,1)\ , \\ \arcsin' x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{für } x \in (-1,1)\ , \end{aligned}$$

$$\text{da} \quad \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x\ ,$$

$$\text{und} \quad \arctan' x = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\ ,$$

$$\text{da} \qquad \cos^2\varphi = \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \frac{1}{1+\tan^2\varphi}\ .$$

5.3. Differenzierbare Funktionen

Wir lernen Eigenschaften von Funktionen kennen, die auf einem ganzen Intervall differenzierbar sind. Zum Beispiel sind differenzierbare Funktionen auf einem Intervall streng monoton und daher umkehrbar, wenn ihre Ableitung nirgends verschwindet. Das zentrale Resultat in diesem Abschnitt ist der Mittelwertsatz der Differentialrechnung, aus dem wir derartige Resultate ableiten können.

Wir erinnern uns zunächst an den Begriff des Extremums und der Extremstelle aus Definition 3.39. Außerdem erinnern wir uns an Umgebungen in Teilmengen metrischer Räume, siehe Lemma 3.5.

5.19. Definition. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann nimmt f an einer Stelle $x_0 \in D$ ein *lokales Minimum* (bzw. *lokales Maximum*) $f(x_0)$ an, wenn es eine Umgebung U von x_0 in D gibt, so dass x_0 eine Minimalstelle (Maximalstelle) der eingeschränkten Funktion $f|_U$ ist. Lokale Minima und Maxima heißen auch *lokale Extrema*, und x_0 wie oben heißt entsprechend *lokale Minimalstelle* (*Maximalstelle*) oder *lokale Extremstelle* von f.

Beispiel. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = (x^2 - 1)^2$$
hat bei $x_0 = 0$ ein lokales Maximum, denn für $x \in (-1, 1)$ ist $x^2 - 1$ negativ und nimmt bei 0 ein Minimum an. Also nimmt $f|_{(-1,1)}$ selbst bei 0 ein Maximum $f(0) = 1$ an. Da $f(2) = 9 > 1$ gilt, ist $f(0)$ nur ein lokales Maximum der Funktion f.

5.20. Lemma. *Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und es sei $x_0 \in D$ sowohl Häufungspunkt von $(-\infty, x_0] \cap D$ als auch von $[x_0, \infty) \cap D$. Wenn f bei x_0 differenzierbar ist und dort ein lokales Extremum annimmt, folgt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei x_0 lokales Maximum, ansonsten betrachte die Funktion $-f$. Für alle $x \in (-\infty, x_0] \cap D$ gilt $f(x) - f(x_0) \leq 0$ und $x - x_0 < 0$, also folgt
$$f'(x_0-) = \lim_{x \nearrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\geq 0} \geq 0\ ,$$
da wegen Lemma 2.19 die schwache Ungleichung erhalten bleibt. Für $x > x_0$ gilt nach wie vor $f(x) - f(x_0) \leq 0$, aber $x - x_0 > 0$, und wir erhalten
$$f'(x_0+) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0\ .$$
Wegen Bemerkung 5.7 ergibt sich also
$$f'(x_0) = f'(x_0-) = f'(x_0+) = 0\ . \qquad \square$$

5.21. Bemerkung. Falls $a < b$ gilt und I ein Intervall ist mit $(a, b) \subset I \subset [a, b]$, dann kommen als lokale Extrema einer Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ nur folgende Punkte in Frage:

(1) die Intervallgrenzen a bzw. b, falls sie in I liegen,
(2) Stellen $x_0 \in I$, an denen f nicht differenzierbar ist, und
(3) Stellen $x_0 \in I$, an denen f differenzierbar ist mit Ableitung $f'(x_0) = 0$.

Bis hierher haben wir möglichst allgemeine Funktionen betrachtet, die an einer einzelnen Stelle differenzierbar sind. Ab sofort interessieren uns Funktionen, für die das überall gilt.

5.22. Definition. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar*, wenn sie an jedem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist.

Wir erinnern uns an die Definition 3.37 folgenkompakter Mengen, den Satz 3.38 von Bolzano-Weierstraß, und den Satz 3.40 über die Existenz von Extrema stetiger Funktionen auf folgenkompakten Mengen.

5.23. Satz (Satz von Rolle). *Es sei $a < b$, und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und auf (a, b) differenzierbar mit $f(a) = f(b) = 0$. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Beweis. Da das Intervall $[a,b]$ nach dem Satz 3.40 folgenkompakt ist, nimmt die Funktion f auf $[a,b]$ ihr Minimum und ihr Maximum an. Wir unterscheiden drei Fälle.

(1) Es gibt $x \in [a,b]$ mit $f(x) > 0$. Dann nehme f bei $x_{\max} \in [a,b]$ das Maximum an. Da

$$f(x_{\max}) \geq f(x) > f(a) = f(b) = 0 ,$$

liegt $x_{\max}$ im Inneren des Intervalls $[a,b]$. Aus Lemma 5.20 und Bemerkung 5.21 folgt $f'(x_{\max}) = 0$. Setze also $\xi = x_{\max}$.

(2) Es gibt $x \in [a,b]$ mit $f(x) < 0$. Dann betrachten wir das Minimum von f bei $\xi = x_{\min} \in (a,b)$ und schließen wie oben, dass $f'(\xi) = 0$.

(3) Es gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$. Nach Beispiel 5.2 (1) gilt $f'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in (a,b) \neq \emptyset$. □

Beispiel. Der Graph der stetigen Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

ist ein oberer Halbkreisbogen. Nach Beispiel 5.18 (2) hat die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ für $x > 0$ die Ableitung

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

Aufgrund der Kettenregel ist f bei $x \in (-1,1)$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{d(1-x^2)}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Also erfüllt f die Voraussetzungen des Satzes von Rolle. Für $\xi = 0$ gilt in der Tat $f'(\xi) = 0$.

5.24. Satz (Mittelwertsatz der Differentialrechnung). *Es sei $a < b$, und die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert $\xi \in (a,b)$ mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(a) - f(b)}{a-b} .$$

Die Zahl $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$ ist genau die Steigung der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b)) \in \Gamma(f)$. Der Mittelwertsatz besagt, dass es zu dieser Sekante eine parallele Tangente an den Graph $\Gamma(f)$ gibt, und zwar in einem Punkt $(\xi, f(\xi)) \in \Gamma(f)$ mit $\xi \in (a,b)$.

Beweis. Die Hilfsfunktion $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = f(x) - \frac{(x-a)f(b) + (b-x)f(a)}{b-a}$$

erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 5.23 von Rolle: sie ist auf (a,b) differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - \frac{0 \cdot f(b) + (b-a) \cdot f(a)}{b-a} = 0 \\ \text{und} \qquad h(b) &= f(b) - \frac{(b-a) \cdot f(b) + 0 \cdot f(a)}{b-a} = 0 \,. \end{aligned}$$

Also existiert $\xi \in (a,b)$ mit $h'(\xi) = 0$. Daraus folgt

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \,. \qquad \square$$

Wir benutzen den Mittelwertsatz zur Kurvendiskussion, das heißt, um Eigenschaften differenzierbarer Funktionen und ihrer Graphen zu verstehen. Als erstes wollen wir aus dem Vorzeichen der Ableitung auf das Verhalten der Funktion schließen. Man beachte, dass das folgende Resultat sich unter wesentlich schwächeren Differenzierbarkeitsannahmen zeigen lässt — beispielsweise reicht es, wenn die Funktion stetig ist und ihre linksseitige Ableitung an allen bis auf abzählbar vielen Stellen existiert und die jeweiligen Bedingungen erfüllt. Der Einfachheit halber bleiben wir hier im Kontext der differenzierbaren Funktionen, allgemeinere Resultate können wir später nach Einführung des Lebesgue-Integrals viel einfacher beweisen.

5.25. Folgerung. *Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $I \subset D$ ein Intervall. Dann gilt*

(1) $\quad f' = 0$ *auf* $I \quad \Longrightarrow \quad f|_I$ *ist konstant*

(2) $\quad f' \geq 0$ *auf* $I \quad \Longrightarrow \quad f|_I$ *steigt monoton*

(3) $\quad f' > 0$ *auf* $I \quad \Longrightarrow \quad f|_I$ *steigt streng monoton*

(4) $\quad f' \leq 0$ *auf* $I \quad \Longrightarrow \quad f|_I$ *fällt monoton* ,

(5) $\quad f' < 0$ *auf* $I \quad \Longrightarrow \quad f|_I$ *fällt streng monoton* .

Beweis. Wir zeigen nur Aussage (2). Die anderen Aussagen werden entsprechend bewiesen. Seien also $a, b \in I$ mit $a < b$, dann existiert $\xi \in (a,b)$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b-a)$$

nach dem Mittelwertsatz 5.24. Da $f'(\xi) \geq 0$ nach Voraussetzung, folgt $f(a) \leq f(b)$. Also steigt f monoton. $\square$

5.26. Bemerkung. Umgekehrt haben wir bereits in Beispiel 5.2 (1) gesehen, dass die Ableitung konstanter Funktionen verschwindet. Falls eine differenzierbare Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I = (a,b) \subset D$ monoton steigt (bzw. fällt), gilt $f'|_I \geq 0$ (bzw. $f'|_I \leq 0$). Das folgt, da die Ungleichung $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ (bzw. ≤ 0) für x_0, $x \in I$ im Limes $x \to x_0$ erhalten bleibt.

Aber aus strenger Monotonie von f folgt noch nicht $f' > 0$ (bzw. $f' < 0$). Als Beispiel betrachten wir die streng monoton steigende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$. Nach Beispiel 5.12 gilt $f'(x) = 2x^2$, also $f'(0) = 0$.

Als erste Anwendung der obigen Folgerung charakterisieren wir die Exponentialfunktion als eindeutige Lösung einer Differentialgleichung.

5.27. Satz (Differentialgleichung der Exponentialfunktion). *Die reelle Exponentialfunktion ist die einzige differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften*

$$f(0) = 1 \qquad \textit{und} \qquad f'(x) = f(x) \qquad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

Beweis. Aus Beispiel 5.5 folgt $\exp'(x) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und $\exp(0) = 1$ wurde bereits in Folgerung 4.13 gezeigt. Sei nun $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den obigen Eigenschaften. Wir betrachten die Hilfsfunktion $h = \frac{f}{\exp}$. Sie erfüllt $h(0) = 1$ und

$$h'(x) = \frac{f' \cdot \exp - f \cdot \exp'}{\exp^2} = \frac{f \cdot \exp - f \cdot \exp}{\exp^2} = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Aus Folgerung 5.25 (1) folgt $h(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $f(x) = \exp(x)$ für alle $\mathbb{R}$, was zu zeigen war. □

Wir kombinieren Folgerung 5.25 und Bemerkung 5.26 mit dem Umkehrsatz 3.33 für stetige Funktionen.

5.28. Satz (Umkehrsatz für differenzierbare Funktionen). *Es sei I ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann besitzt f genau dann eine differenzierbare Umkehrfunktion, wenn $f' > 0$ oder $f' < 0$ auf ganz I gilt.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Sei f umkehrbar. Wäre f nicht monoton, so gäbe es a, b, $c \in I$ mit $a < b < c$ und $f(a) < f(b) > f(c)$ oder $f(a) > f(b) < f(c)$. Mit dem Zwischenwertsatz 3.29 findet man leicht $x \in (a, b)$ und $y \in (b, c)$ mit $f(x) = f(y)$ im Widerspruch zur Bijektivität . Also ist f monoton.

Wenn f monoton steigt, gilt $f' \geq 0$ auf ganz I nach Bemerkung 5.26. Sei g die Umkehrfunktion. Aus der Kettenregel folgt

$$1 = (g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$$

also muss $f' \neq 0$ auf ganz I gelten, also $f' > 0$. Analog schließen wir, falls f streng monoton fällt.

„$\Longleftarrow$“: Aus $f' > 0$ folgt, dass f streng monoton steigt. Nach dem Umkehrsatz 3.33 für stetige Funktionen besitzt f eine stetige Umkehrfunktion g. Nach der Umkehrregel (5.17) ist g auch differenzierbar. Für $f' < 0$ schließen wir wieder analog. □

5.29. Beispiel. Es sei $a > 0$. Dann ist die Funktion $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit

$$f(x) = x^a = \begin{cases} \exp(a \log x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

stetig bei $x = 0$, denn

$$\lim_{x \searrow 0}(a \log x) = -\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{y \to -\infty} \exp(y) = 0 = f(0)\,.$$

Die Funktion f wächst streng monoton, denn

(1) $f(0) = 0 < x^a$ für alle $x > 0$, und
(2) $f'(x) = ax^{a-1} > 0$ für alle $x > 0$.

Die Umkehrfunktion ist gegeben durch $x \mapsto x^{\frac{1}{a}}$.

Für $a < 0$ zeigt man entsprechend, dass x^a auf $(0, \infty)$ streng monoton fällt. Die Umkehrfunktion ist wieder gegeben durch $x \mapsto x^{\frac{1}{a}}$.

Nachdem wir in Lemma 5.20 ein notwendiges Kriterium dafür gefunden haben, dass eine differenzierbare Funktion an einer Stelle ein Extremum annimmt, wollen wir nun ein hinreichendes Kriterium angeben.

5.30. Lemma. *Es sei $a < b$ und $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann besitzt f an der Stelle $x_0 \in (a, b)$ ein Maximum, wenn $f' \geq 0$ auf (a, x_0) und $f' \leq 0$ auf (x_0, b) gilt.*

Beweis. Aus Folgerung 5.25(2) und (4) ergibt sich $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in (a, b)$. □

Beispiel. So wie Lemma 5.20 nur ein notwendiges Kriterium war, ist die obige Bedingung nur hinreichend. Dazu modifizieren wir Beispiel 5.14 und definieren eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(\sin \frac{1}{x} - 2\right) & \text{für } x \neq 0, \text{ und} \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Dann hat f bei $x = 0$ ein globales Maximum, aber die Ableitung

$$f'(x) = 2x \left(\sin \frac{1}{x} - 2\right) - \cos \frac{1}{x} \qquad \text{für } x \neq 0$$

wechselt beliebig nahe 0 noch das Vorzeichen. Die Bedingung in Lemma 5.30 ist also nicht notwendig.

Wir benutzen Lemma 5.30, um die Bernoulli-Ungleichung für reelle Exponenten zu beweisen.

5.31. Satz (Bernoulli-Ungleichung). *Für alle $a \geq 1$ und alle $x \geq -1$ gilt*

$$(1 + x)^a \geq 1 + ax .$$

Die Ungleichung ist strikt für $a > 1$ und $x \neq 0$.

Beweis. Für $a = 1$ erhalten wir Gleichheit, genauso für $x = 0$. Es sei also $a > 1$. Wir betrachten die Hilfsfunktion $h\colon [-1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = (1 + x)^a - 1 - ax .$$

Ableiten liefert

$$h'(x) = a(1 + x)^{a-1} - a = a\left((1 + x)^{a-1} - 1\right) .$$

Aus Beispiel 5.29 folgt $h'(x) > 0$ für $x > 0$ und $h'(x) < 0$ für $x \in (-1, 0)$, da $a - 1 > 0$. Somit nimmt h bei $x = 0$ ein Minimum $h(0) = 0$ an. Für $x \neq 0$ folgt $h(x) > 0$ aus Folgerung 5.25 (3) und (5), somit gilt in diesem Fall

$$(1 + x)^a > 1 + ax .$$

□

Eine Teilmenge $C \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex,* wenn zu je zwei Punkten $p, q \in C$ die gesamte Strecke

$$\{(1-s)\cdot p + s\cdot q \mid s \in [0,1]\}$$

ebenfalls in C enthalten ist. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann nennen wir eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ konvex, wenn die Fläche oberhalb des Graphen $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^2$ konvex ist. Für a, $b \in I$ bedeutet das, dass der Punkt

$$(1-s)(a, f(a)) + s(b, f(b))$$

oberhalb des Graphen liegt. Das führt uns auf die folgende Definition.

5.32. Definition. Sei I ein Intervall. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für alle a, $b \in I$ und alle $s \in (0,1)$ gilt, dass

$$f((1-s)a + sb) \le (1-s)f(a) + sf(b) ,$$

und *streng konvex*, wenn die obige Ungleichung für $a \neq b$ stets strikt ist. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt (*streng*) *konkav*, wenn $-f$ (streng) konvex ist.

Für $x \in (a,b)$ setzen wir $s = \frac{x-a}{b-a}$, so dass $1 - s = \frac{b-x}{b-a}$ und

$$(1-s)a + sb = \frac{b-x}{b-a}\cdot a + \frac{x-a}{b-a}\cdot b = x .$$

Äquivalent zur obigen Ungleichung ist also

$$f(x) \le \frac{b-x}{b-a}\, f(a) + \frac{x-a}{b-a}\, f(b) .$$

5.33. Satz. *Sei I ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist f genau dann (streng) konvex, wenn die Ableitung f' (streng) monoton steigt.*

Ein analoges Kriterium gilt für (strenge) Konkavität.

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Seien a, $b \in I$ mit $a < b$. Wir betrachten die Hilfsfunktion $h\colon I \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = f(x) - \frac{(x-a)f(b) + (b-x)f(a)}{b-a}$$

wie im Beweis des Mittelwertsatzes 5.24. Es folgt $h(a) = h(b) = 0$, und nach obiger Vorüberlegung gilt $h(x) \le 0$ für alle $x \in (a,b)$. Mit Aufgabe 1 von Blatt II.2 erhalten wir also $h'(a) \le 0$, und analog $h'(b) \ge 0$. Daraus ergibt sich

$$f'(a) \le \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \le f'(b) ,$$

also steigt f' monoton.

Sei f sogar streng konvex und $a < b$ wie oben. Für $c = \frac{a+b}{2}$ gilt dann $c - a = b - c = \frac{b-a}{2}$ und

$$f(c) < \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) , \qquad \text{also} \qquad f(c) - f(a) < f(b) - f(c) ,$$

und mit dem obigen Argument, angewandt auf die Punkte a und c sowie auf c und b, folgt

$$f'(a) \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} < \frac{f(b) - f(c)}{b - c} \leq f'(b) ,$$

somit steigt f' sogar streng monoton.

„$\Longleftarrow$“: Wir wählen $a < c < b$. Nach dem Mittelwertsatz 5.24 existieren $\xi \in (a, c)$ und $\eta \in (c, b)$, so dass

$$f(c) - f(a) = f'(\xi)(c - a) \qquad \text{und} \qquad f(b) - f(c) = f'(\eta)(b - c) .$$

Wenn f' monoton steigt, folgt $f'(\xi) \leq f'(\eta)$, und wir erhalten

$$\begin{aligned}(b - a)f(c) &= (b - c)f(c) + (c - a)f(c) = (b - c)f(a) + (c - a)f(b) \\ &\quad + \underbrace{(b - c)(c - a)}_{>0}\underbrace{(f'(\xi) - f'(\eta))}_{\leq 0} \leq (b - c)f(a) + (c - a)f(b) .\end{aligned}$$

Nach der Vorüberlegung ist f also konvex. Wenn f' streng monoton steigt, erhalten wir eine echte Ungleichung, und f ist streng konvex. □

Als Anwendung beweisen wir die Ungleichungen von Hölder, Minkowski und Cauchy-Schwarz. Diese Ungleichungen benutzt man, um Normen auf Vektorräumen zu definieren. Sei wieder $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

5.34. Definition. Es sei $1 \leq p < \infty$. Die *p-Norm* eines Vektors $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{k}^n$ ist definiert als

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Die 2-Norm heißt auch *Euklidische Norm.*

5.35. Satz (Hölder-Ungleichung). *Es seien p, $q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gegeben. Für alle $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{k}^n$ gilt dann*

$$\left|\sum_{k=1}^n \bar{x}_k y_k\right| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q$$

Beweis. Die Logarithmus-Funktion ist konkav auf $(0, \infty)$, da $\log' x = \frac{1}{x}$ monoton fällt. Aus $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ folgt

$$\log\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \log a + \frac{1}{q} \log b ,$$

also

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} \geq a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}}$$

für alle a, $b \in (0, \infty)$. Für $a = 0$ oder $b = 0$ gilt diese Ungleichung ebenfalls.

Für $x = 0$ oder $y = 0$ ist nichts zu zeigen. Ansonsten wenden wir die obige Ungleichung auf

$$a_j = \frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p} \qquad \text{und} \qquad b_j = \frac{|y_j|^q}{\|y\|_q^q} \qquad \in [0,1]$$

an, summieren über j, und erhalten

$$\begin{aligned} 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= \sum_{j=1}^n \frac{|x_j|^p}{p\,\|x\|_p^p} + \sum_{j=1}^n \frac{|y_j|^q}{q\,\|y\|_q^q} \\ &\geq \sum_{j=1}^n \frac{|x_j| \cdot |y_j|}{\|x\|_p\,\|y\|_q} \geq \left| \sum_{j=1}^n \frac{\bar{x}_j y_j}{\|x\|_p\,\|y\|_q} \right| . \end{aligned}$$ □

5.36. Folgerung (Cauchy-Schwarz-Ungleichung). *Für alle $x, y \in \Bbbk^n$ gilt*

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \|x\|_2\,\|y\|_2 .$$

5.37. Satz (Minkowski-Ungleichung). *Es sei $p \in [1, \infty)$ und $x, y \in \Bbbk^n$, dann gilt*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p .$$

Beweis. Für $p = 1$ folgt die Ungleichung durch Summieren der komponentenweisen Dreiecksungleichung

$$|x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j|$$

aus Bemerkung 1.64 (5) bzw. Beispiel 2.42.

Es sei also $p > 1$. Setze $q = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und betrachte den Vektor $z \in \Bbbk^n$ mit

$$z_j = |x_j + y_j|^{p-1} \qquad \text{für} \qquad j = 1, \dots, n .$$

Dann gilt

$$\|z\|_q = \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \right)^{\frac{1}{q}} = \|x + y\|_p^{\frac{p}{q}}$$

Aus der Hölder-Ungleichung 5.35 folgt

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p = \sum_{j=1}^n |x_j + y_j| \cdot |z_j| &\leq \left| \sum_{j=1}^n x_j z_j \right| + \left| \sum_{j=1}^n y_j z_j \right| \\ &\leq \|x\|_p \|z\|_q + \|y\|_p \|z\|_q = (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{\frac{p}{q}} , \end{aligned}$$

also

$$\|x + y\|_p^{p - \frac{p}{q}} = \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p .$$ □

5.38. Bemerkung. Wir definieren die *p-Metrik* d_p auf $\Bbbk^n$ durch

$$d_p(x,y) = \|x-y\|_p \;.$$

Aus der Minkowski-Ungleichung folgt, dass d_p die Dreiecksungleichung erfüllt, also tatsächlich eine Metrik definiert. Für $p = 2$ erhalten wir die Euklidische Metrik, die wir (zumindest für $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$) aus der Schule kennen.

Analog zur p-Norm auf $\Bbbk^n$ definiert man die L^p-Norm auf den integrierbaren Funktionen auf einem Intervall I. Die Ungleichungen von Hölder, Minkowski und Cauchy-Schwarz gelten auch für diese Normen (Übung). Wir erinnern uns an die Definition 3.55 des Raumes $R(I)$ der Regelfunktionen und an die Definition 3.57 des Regelintegrals. Man beachte, dass mit $f \in R(I)$ auch die Funktionen $|f|$ und $|f|^p$ Regelfunktionen sind. Wir nennen zwei Regelfunktionen f, $g \in R(I)$ äquivalent, kurz $f \sim g$, falls $f_-(x) = g_-(x)$ und $f_+(x) = g_+(x)$ für alle $x \in I$.

5.39. Definition. Es sei $a < b$, I ein Intervall mit $(a,b) \subset I \subset [a,b]$ und $p \in [1,\infty)$. Dann ist die *L^p-Norm* auf $R(I)/\sim$ definiert durch

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Als letztes in diesem Abschnitt lernen wir eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes 5.24 kennen. Mit ihrer Hilfe können wir Grenzwerte von Quotienten bestimmen.

5.40. Satz (verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung). *Es sei $a < b$, und f, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ seien stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert $\xi \in (a,b)$, so dass*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi) \;.$$

Beweis. Wir betrachten die Hilfsfunktion $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) \;.$$

Dann ist h stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b) mit $h(a) = h(b) = 0$. Nach dem Satz 5.23 von Rolle existiert $\xi \in (a,b)$ mit $h'(\xi) = 0$, also

$$0 = h'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - f'(\xi)(g(b) - g(a)) \;. \qquad \square$$

5.41. Bemerkung. Falls $g' > 0$ (oder $g' < 0$) auf ganz (a,b) gilt, ist die Aussage des verallgemeinerten Mittelwertsatzes äquivalent zu

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \;.$$

Der „gewöhnliche“ Mittelwertsatz würde stattdessen eine Zwischenstelle η für f und eine weitere, etwa ζ, für g liefern, so dass

$$\frac{f'(\eta)}{g'(\zeta)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \;.$$

Wir erinnern uns an den Begriff der stetigen Fortsetzung der Bemerkung 3.24. Der folgende Satz hilft dabei, die nötigen Funktionsgrenzwerte zu finden. In speziellen Situationen wie etwa in Beispiel 3.28 oder in Übung 2 von Blatt I.15 haben wir solche Grenzwerte mit einfacheren Methoden bestimmt. Wir wollen auch Grenzwerte in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ zulassen und erinnern daher auch an die Definition 2.3 von Umgebungen von Punkten in $\overline{\mathbb{R}}$.

5.42. Satz (L'Hospitalsche Regel). *Es sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und es seien $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Falls entweder*

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} g(x) = 0 \tag{1}$$

$$\text{oder} \qquad \lim_{x \searrow a} |f(x)| = \lim_{x \searrow a} |g(x)| = \infty \tag{2}$$

gilt und der Grenzwert $y = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$ existiert, dann gilt

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = y \ .$$

Dieser Satz bleibt gültig, wenn man „$\lim_{x \searrow a}$“ überall durch „$\lim_{x \nearrow b}$“ ersetzt.

Beweis. Wir beginnen mit (1) und nehmen zunächst an, dass $a \neq -\infty$. Dann dürfen wir f und g durch $f(a) = g(a) = 0$ stetig fortsetzen. Sei V eine Umgebung von y. Dann existiert $c \in (a,b)$, so dass $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in V$ für alle $\xi \in (a,c)$. Aus dem Mittelwertsatz 5.40 folgt für alle $x \in (a,c)$, dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in V \qquad \text{für ein } \xi \in (a,x) \subset (a,c) \ .$$

Aus der Definition 3.19 des Grenzwertes folgt unsere Behauptung.

In (2) nehmen wir zunächst $y \neq \pm\infty$ an. Zu $\varepsilon > 0$ existiert $d \in (a,b)$, so dass $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in \left(y - \frac{\varepsilon}{2}, y + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ für alle $\xi \in (a,d)$. Für $x \in (a,d)$ gilt also

$$\frac{f(x) - f(d)}{g(x) - g(d)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in \left(y - \frac{\varepsilon}{2}, y + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

für ein $\xi \in (a,d)$ nach dem Mittelwertsatz 5.40. Aus $\lim_{x \searrow a} |f(x)| = \lim_{x \searrow a} |g(x)| = \infty$ folgt

$$\lim_{x \searrow a} \frac{1 - \frac{g(d)}{g(x)}}{1 - \frac{f(d)}{f(x)}} = 1 \ .$$

Also existiert $c \in (a,d)$, so dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(d)}{g(x) - g(d)} \cdot \frac{1 - \frac{g(d)}{g(x)}}{1 - \frac{f(d)}{f(x)}} \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$$

für alle $x \in (a, c)$. Es folgt

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = y \ .$$

Falls z.B. $y = \infty$ betrachten wir die Intervalle $(n+1, \infty]$ und $(n, \infty]$ für $n \in \mathbb{N}$ anstelle von $\big(y - \frac{\varepsilon}{2}, y + \frac{\varepsilon}{2}\big)$ und $(y - \varepsilon, y + \varepsilon)$.

Falls $a = -\infty$, betrachten wir die Funktionen $F, G\colon (0, b') \to \mathbb{R}$ mit $b' = -\frac{1}{b}$ falls $b < 0$ und $b' = \infty$ sonst, und

$$F(y) = f\left(-\frac{1}{y}\right) \qquad \text{und} \qquad G(y) = g\left(-\frac{1}{y}\right) ,$$

also auch $f(x) = F\left(-\frac{1}{x}\right)$ und $g(x) = G\left(-\frac{1}{x}\right)$. Nach der Regel von de L'Hospital für F und G bei 0 gilt dann

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x \searrow -\infty} \frac{F'\left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2}}{G'\left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2}} = \lim_{y \searrow 0} \frac{F'(y)}{G'(y)} \\ &= \lim_{y \searrow 0} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{x \searrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \ . \end{aligned}$$

□

5.43. Beispiel. Der *Cotangens* $\cot\colon \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x} \ .$$

Wir berechnen

$$\lim_{x \searrow 0} (x \cot x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\cos x - x \sin x}{\cos x} = 1 \ ,$$

oder alternativ

$$\lim_{x \searrow 0} (x \cot x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 1 \ .$$

5.44. Beispiel. Falls die Funktionen f' und g' wieder den Voraussetzungen der Regel von de L'Hospital genügen, müssen wir diese Regel eventuell mehrfach anwenden. Wir berechnen

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x(1 - \cos x)} = \lim_{x \searrow 0} \frac{3 \cos x - 3 \cos 3x}{1 - \cos x + x \sin x} \ .$$

Für $x = 0$ verschwinden Nenner und Zähler, also folgt

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x(1 - \cos x)} &= \lim_{x \searrow 0} \frac{-3 \sin x + 9 \sin 3x}{2 \sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \searrow 0} \frac{-3 \cos x + 27 \cos 3x}{3 \cos x - x \sin x} = \frac{24}{3} = 8 \end{aligned}$$

nach insgesamt dreimaliger Anwendung von Satz 5.42.

5.4. Differentiation und Integration

In diesem Abschnitt beweisen wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, wonach Differenzieren und Integrieren in einem gewissen Sinne zueinander inverse Operationen sind. Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf stetig differenzierbare Funktionen auf der einen und stetige Funktionen auf der anderen Seite. Genausogut könnten wir aber auch mit Funktionen arbeiten, deren Ableitungen Regelfunktionen sind, oder noch allgemeiner mit schwach differenzierbaren Funktionen.

Als erste Anwendung beweisen wir einen Satz über Konvergenz von Folgen und Reihen differenzierbarer Funktionen.

5.45. Definition. Eine Funktion $f\colon D \to \Bbbk$ heißt *stetig differenzierbar*, wenn sie auf ganz D differenzierbar ist und ihre Ableitung $f'\colon D \to \Bbbk$ stetig ist. Der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen auf D wird mit $\mathcal{C}^1(D,\Bbbk)$ bezeichnet, für $\mathcal{C}^1(D,\mathbb{R})$ schreiben wir auch $\mathcal{C}^1(D)$.

5.46. Bemerkung. Aus den Bemerkungen 3.13 und 5.10 folgt, dass die stetig differenzierbaren Funktionen auf D einen Vektorraum $\mathcal{C}^1(D,\Bbbk)$ über $\Bbbk$ bilden. Die Ableitung ist eine lineare Abbildung $\frac{d}{dx}\colon \mathcal{C}^1(D,\Bbbk) \to \mathcal{C}(D,\Bbbk)$.

Wir erinnern uns an den Mittelwertsatz 3.63 der Integralrechnung und an die Definition 3.66 einer Stammfunktion einer Regelfunktion. Zugleich möchten wir noch einmal daran erinnern, dass dieser Begriff in der Literatur oft etwas anders definiert ist. Der folgende Satz zeigt, dass beide Definitionen am Ende doch äquivalent sind. Es sei wieder $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

5.47. Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \in \mathcal{C}(I,\Bbbk)$ und $F \in \mathcal{C}^1(I,\Bbbk)$. Dann ist F genau dann Stammfunktion von f, wenn $F' = f$ gilt.*

Beweis. Wir betrachten den Fall $\Bbbk = \mathbb{R}$. Falls $\Bbbk = \mathbb{C}$ ist, wenden wir den Hauptsatz jeweils auf Real- und Imaginärteile einzeln an.

„$\Longrightarrow$“: Es sei $x_0 \in I$. Da f stetig ist, gibt es nach dem Mittelwertsatz 3.63 der Integralrechnung zu jedem $x_1 \in I$ ein $\xi(x_1)$ zwischen x_1 und x_0 mit

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = (x_1 - x_0)\,f(\xi(x_1)) \;.$$

Es gilt $\lim_{x_1\to x_0} \xi(x_1) = x_0$ weil stets $|\xi(x_1) - x_0| < |x_1 - x_0|$, und daher aufgrund der Stetigkeit von f:

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= \lim_{x_1\to x_0} \frac{F(x_1) - F(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1\to x_0} \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \\ &= \lim_{x_1\to x_0} f(\xi(x_1)) = f(x_0) \;. \end{aligned}$$

„$\Longleftarrow$“: Es gelte $F' = f$. Wir fixieren $a \in I$ und definieren eine Stammfunktion $G\colon I \to \mathbb{R}$ durch

$$G(x_1) = \int_a^{x_1} f(x)\,dx \;.$$

Wir haben gerade gezeigt, dass G dann differenzierbar ist mit $G' = f$. Mithin gilt $(F - G)' = 0$ auf ganz I, also ist $F - G = c$ konstant nach Folgerung 5.25. Aber dann ist auch F eine Stammfunktion, denn

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = G(x_1) - G(x_0) = F(x_1) - F(x_0)\ . \qquad \square$$

5.48. Bemerkung. Die erste offensichtliche Anwendung des Hauptsatzes besteht darin, dass jede Berechnung der Ableitung einer Funktion nun umgekehrt eine Stammfunktion der Ableitung liefert. Auf diese Weise erhalten wir beispielsweise

$$\begin{aligned}
\int_a^b \cos x\,dx &= \sin b - \sin a\ , \\
\int_a^b \frac{1}{\cos^2 x}\,dx &= \tan b - \tan a && \text{für } a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\
\int_a^b \frac{1}{x}\,dx &= \log b - \log a = \log\frac{b}{a} && \text{für } a, b > 0, \\
\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \operatorname{arc\,tan} b - \operatorname{arc\,tan} a\ .
\end{aligned}$$

Diese Beispiele zeigen aber auch, dass Integration aus „einfachen“ Funktionen mitunter „kompliziertere“ macht. Es gibt auch Fälle, in denen sich eine Stammfunktion gar nicht explizit angeben lässt. Im nächsten Abschnitt lernen wir etwas systematischer, Stammfunktionen zu suchen und eventuell auch zu finden.

Wir benutzen den Hauptsatz 5.47, um Folgen und Reihen von Funktionen und ihre Grenzfunktionen zu differenzieren. Dazu benötigen wir den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz aus Definition 3.46 sowie an Lemma 3.60 und Satz 3.62. Außerdem konvergiert eine Folge $(f_n)_n$ lokal gleichmäßig gegen f, wenn jeder Punkt im Definitionsbereich eine Umgebung besitzt, auf der die Folge gleichmäßig konvergiert.

5.49. Satz. *Sei I ein Intervall, und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}^1(I, \Bbbk)$, so dass die Folge $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $g \in \mathcal{C}(I, \Bbbk)$ konvergiert, und so dass $y_0 = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) \in \Bbbk$ existiert. Dann konvergiert f_n lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1(I, \Bbbk)$ mit $f' = g$.*

Beweis. Wir nehmen wieder $\Bbbk = \mathbb{R}$ an. Falls $\Bbbk = \mathbb{C}$, behandeln wir Real- und Imaginärteile getrennt. Es sei $x_1 \in I$. Nach Satz 3.62 oder Eigenschaft (6) des Integrals folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x_1} f'_n(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} g(x)\,dx\ .$$

Wir definieren eine Stammfunktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ von g durch

$$f(x_1) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} g(x)\,dx\ ,$$

es gilt also $f' = g$. Zu zeigen bleibt, dass die Folge $(f_n)_n$ lokal gleichmäßig gegen f konvergiert.

Sei dazu $L > 0$ zunächst fest, und $\varepsilon > 0$ gegeben, dann wählen wir $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $d_{\sup}(f_n', g) < \frac{\varepsilon}{2L}$ und $|f_n(x_0) - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Für alle $x_1 \in I \cap [x_0 - L, x_0 + L]$ und alle $n > N$ gilt dann

$$\begin{aligned}|f_n(x_1) - f(x_1)| &\leq |f_n(x_0) - y_0| + \left|\int_{x_0}^{x_1} (f_n' - g)(x)\,dx\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_{x_0}^{x_1} \underbrace{|(f_n' - g)(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{2L}}\,dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{|x_1 - x_0|}_{\leq L} \cdot \frac{\varepsilon}{2L} \leq \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Sei also $x_1 \in I$, dann wählen wir $L > |x_1 - x_0|$, dann konvergiert (f_n) auf der Umgebung $I \cap [x_0 - L, x_0 + L]$ gleichmäßig gegen f. Insgesamt erhalten wir also lokal gleichmäßige Konvergenz. $\square$

5.50. Bemerkung. Auch dieser Satz lässt sich unter schwächeren Voraussetzungen beweisen: es reicht, wenn alle f_n differenzierbar sind. Auf die gleichmäßige Konvergenz der f_n' kann man jedoch nicht verzichten. Als Beispiel betrachten wir eine Folge f_n von Funktionen mit

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0\,, \\ -\cos nx & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{n}\,, \\ 1 & \frac{\pi}{n} \leq 0\,. \end{cases}$$

Die Ableitungen

$$f_n'(x) = \begin{cases} n \sin nx & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{n}\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sind stetig und konvergieren punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen 0. Aber die Grenzfunktion f mit

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

ist bei $x = 0$ nicht differenzierbar.

Bemerkung. Wir erhalten im Ergebnis nur lokal gleichmäßige Konvergenz für die Folge (f_n). Als Beispiel betrachten wir $I = \mathbb{R}$ und die Funktionen

$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$

für $n > 0$. Die Folge der Ableitungen $f_n' = \frac{1}{n}$ konvergiert gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$ gegen 0. Die Folge f_n selbst konvergiert auch gegen 0, aber nicht gleichmäßig, da für alle $\varepsilon > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ immer ein $x > n\,\varepsilon$ existiert mit $\frac{x}{n} > \varepsilon$. Man kann sich aber überzeugen, dass die Folge (f_n) lokal gleichmäßig konvergiert.

5.51. Folgerung. *Es sei I ein Intervall, $x_0 \in I$ und $(f_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{C}^1(I, \Bbbk)$, so dass die Reihe $\sum_{n=0}^\infty f_n'$ gleichmäßig konvergiert, und die Reihe $\sum_{n=0}^\infty f_n(x_0)$ konvergiert. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^\infty f_n$ lokal gleichmäßig, und es gilt*

$$\left(\sum_{n=0}^\infty f_n\right)' = \sum_{n=0}^\infty f_n'\,.$$

Mit anderen Worten: unter den gegebenen Voraussetzungen vertauscht die Ableitung mit der Summation.

Beweis. Wende Satz 5.49 auf die Folge der Partialsummen an. □

Eine wichtige Klasse von Reihen, auf die diese Folgerung anwendbar ist, sind die Potenzreihen. Im folgenden erlauben wir zwar Potenzreihen über $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, setzen aber nur reelle Argumente ein.

5.52. Folgerung. *Es sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann hat die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n$$

ebenfalls den Konvergenzradius ρ und stellt die Funktion f' dar.

Beweis. Gliedweises Ableiten liefert die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{da_n\, x^n}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n\ .$$

Da Multiplikation mit x das Konvergenzverhalten und damit den Konvergenzradius nicht ändert, berechnen wir den Konvergenzradius der Reihe durch

$$\Bigl(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\,|a_n|}\Bigr)^{-1} = \Bigl(\underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}_{=1}\Bigr)^{-1} \cdot \Bigl(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\Bigr) = \rho$$

nach Übung 1 von Blatt II.1.

Nun konvergiert die Reihe der Ableitungen normal auf $I = [-r, r]$ für alle $0 < r < \rho$ nach Satz 4.8, also insbesondere gleichmäßig. Außerdem konvergiert die ursprüngliche Reihe bei $x_0 = 0$. Aus Folgerung 5.51 folgt

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n$$

für alle $x \in [-r, r]$ mit $r < \rho$, also für alle $x \in (-\rho, \rho)$. □

5.5. Integrationstechniken

In diesem Abschnitt lernen wir einige Tricks, mit denen man mitunter Integrale vereinfachen oder sogar explizit ausrechnen kann. Dazu benutzen wir den Hauptsatz 5.47, um die Ableitungsregeln aus Abschnitt 5.2 in Integrationstechniken zu übersetzen. Anschließend benutzen wir die Partialbruchzerlegung, um rationale Funktionen zu integrieren. Außerdem lernen wir uneigentliche Integrale und die Gamma-Funktion kennen.

5.53. Proposition (Partielle Integration). *Es sei I ein Intervall und f, $g \in \mathcal{C}^1(I, \Bbbk)$. Für alle a, $b \in I$ gilt dann*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx\;.$$

Beweis. Nach der Leibnizregel 5.11 und dem Hauptsatz 5.47 ist $f \cdot g$ eine Stammfunktion von $f' \cdot g + f \cdot g'$, es folgt

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)\;. \qquad \square$$

Wir benutzen salopp die Schreibweise $\int f(x)\,dx$ für eine Stammfunktion von x, insbesondere ist $\int f(x)\,dx$ stets nur bis auf eine additive Konstante wohlbestimmt, d.h., aus $F(x) = \int f(x)\,dx$ folgt gleichzeitig auch $F(x) + c = \int f(x)\,dx$ für alle $c \in \Bbbk$. In Wirklichkeit steht das Symbol $\int f(x)\,dx$ also für eine Äquivalenzklasse von Funktionen modulo konstanter Funktionen.

5.54. Beispiel. Die Funktion x ist Stammfunktion der konstanten Funktion 1. Daraus erhalten wir

$$\int \log x\,dx = \int 1 \cdot \log x\,dx = x\,\log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\,(\log x - 1)\;.$$

Also ist $f(x) = x\,(\log x - 1)$ eine Stammfunktion des Logarithmus, wie man leicht nachrechnet.

Für das nächste Beispiel benötigen wir den Begriff des uneigentlichen Integrals.

5.55. Definition. Es seien a, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a < b$, und $f\colon (a,b) \to \Bbbk$ sei eine Regelfunktion. Falls für ein $c \in (a,b)$ die Grenzwerte

$$\lim_{x_0 \searrow a} \int_{x_0}^c f(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad \lim_{x_1 \nearrow b} \int_c^{x_1} f(x)\,dx$$

in $\Bbbk$ existieren, definieren wir das *uneigentliche Integral*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x_0 \searrow a} \int_{x_0}^c f(x)\,dx + \lim_{x_1 \nearrow b} \int_c^{x_1} f(x)\,dx\;.$$

Man sagt dazu auch, dass das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ *konvergiert.*

5.56. Bemerkung.
(1) Existenz und Wert des uneigentlichen Integrals hängen nicht von der Wahl von c ab. Die Werte $\pm\infty$ sind nicht zugelassen.
(2) Falls f auf $[a,b]$ als Regelfunktion fortgesetzt werden kann, d.h., wenn $\lim_{x \searrow a} f(x)$ und $\lim_{x \nearrow b} f(x)$ existieren, erhalten wir das gleiche Integral wie zuvor in Abschnitt 3.6. Hierzu reicht es zu zeigen, dass Stammfunktionen von Regelfunktionen stetig sind.
(3) Genauso kann man ein uneigentliches Integral für Funktionen definieren, die *Singularitäten* im Intervall (a,b) haben, die also nur auf $(a,b) \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ definiert sind.

5.57. Beispiel. Aus Beispiel 5.54 folgt

$$\int_0^1 \log x \, dx = 1 \cdot (\log 1 - 1) - \lim_{x \to 0} x(\log x - 1) = -1 \, ,$$

denn nach L'Hospital gilt

$$\lim_{x \to 0} x \log x = \lim_{x \to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} (-x) = 0 \, .$$

Das folgende Lemma liefert ein einfaches Kriterium für die Konvergenz uneigentlicher Integrale.

5.58. Lemma. *Es seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a < b$, und $f \colon (a, b) \to \Bbbk$, $g \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ seien Regelfunktionen mit $g \geq 0$. Falls $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in (a, b)$ gilt und das uneigentliche Integral über g existiert, existiert auch das uneigentliche Integral über f, und es gilt*

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b g(x) \, dx \, .$$

Beweis. Wähle $c \in (a, b)$ beliebig. Wir zeigen, dass

$$\left| \lim_{x_0 \searrow a} \int_{x_0}^c f(x) \, dx \right| \leq \int_a^c g(x) \, dx \, .$$

Sei dazu $\varepsilon > 0$. Da $\lim_{x_0 \searrow a} \int_{x_0}^c g(x) \, dx$ existiert, gibt es eine Umgebung U von a in $\overline{\mathbb{R}}$, so dass

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x) \, dx = \int_{x_1}^c g(x) \, dx - \int_{x_2}^c g(x) \, dx < \varepsilon \qquad \text{für alle } x_1, \, x_2 \in U \cap (a, b) \, .$$

Aus der Monotonie (5) des Integrals und Lemma 3.60 folgt

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| \, dx \leq \int_{x_1}^{x_2} g(x) \, dx < \varepsilon$$

für alle $x_1, \, x_2 \in U \cap (a, b)$. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in (a, b) mit Grenzwert a, dann ist

$$\left(\int_{x_n}^c f(x) \, dx \right)_n$$

demnach eine Cauchy-Folge in $\Bbbk$, und nach Folgerung 3.26 ist ihr Grenzwert der Grenzwert der Funktion $x_0 \mapsto \int_{x_0}^c f(x) \, dx$ an der Stelle a, und damit der Wert des uneigentlichen Integrals $\int_a^c f(x) \, dx$.

Aus

$$\left| \int_{x_0}^c f(x) \, dx \right| \leq \int_{x_0}^c |f(x)| \, dx \leq \int_{x_0}^c g(x) \, dx$$

für alle $x_0 \in (a, c)$ und Lemma 2.19 folgt

$$\left| \int_a^c f(x) \, dx \right| \leq \int_a^c g(x) \, dx \, .$$

Genauso beweisen wir die Existenz von $\int_c^b f(x)\,dx$ und folgern, dass

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| &\le \left|\int_a^c f(x)\,dx\right| + \left|\int_c^b f(x)\,dx\right|\\ &\le \int_a^c g(x)\,dx + \int_b^c g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx\ . \qquad \square\end{aligned}$$

5.59. Beispiel. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$ definieren wir

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\,dx\ .$$

Dieses Integral konvergiert bei 0, da $|x^{z-1}e^{-x}| \le x^{\operatorname{Re} z-1}$, und da $\int_0^1 x^{\operatorname{Re} z-1}\,dx$ wegen Übung 1 auf Blatt II.4 existiert. Das Integral bei ∞ konvergiert ebenfalls, da es nach Aufgabe 2 auf Blatt II.4 ein $c > 0$ gibt, so dass $|x^{z-1}e^{-x}| \le x^{-2}$ für alle $x > c$, und da $\int_1^\infty x^{-2}\,dx$ existiert.

Für $\operatorname{Re} z > 0$ folgt durch partielle Integration, dass

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty x^z e^{-x}\,dx\\ &= \lim_{x\to\infty}\Big(\underbrace{x^z\,(-e^{-x})}_{\to 0}\Big) - \lim_{x\to 0}\Big(\underbrace{x^z}_{\to 0}(-e^{-x})\Big) + \int_0^\infty z\,x^{z-1}e^{-x}\,dx\\ (*) \qquad &= z\,\Gamma(z)\ .\end{aligned}$$

Für $\operatorname{Re} z > -n$ und $-z \notin \mathbb{N}$ können wir also Γ fortsetzen durch

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z\,(z+1)} = \dots = \frac{\Gamma(z+n)}{z\,(z+1)\dots(z+n-1)}\ .$$

Induktiv erhalten wir so die *Gamma-Funktion* $\Gamma\colon \mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$. Die obige Gleichung (*) heißt auch *Funktionalgleichung der Gamma-Funktion.* Es gilt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{x\to\infty}(-e^{-x}) - \lim_{x\to 0}(-e^{-x}) = 1\ ,$$

induktiv folgt daraus für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\Gamma(n+1) = n\cdot\Gamma(n) = \dots = n!\cdot\Gamma(1) = n!\ .$$

Die Gamma-Funktion interpoliert also die Fakultät für nicht-ganze Argumente.

5.60. Proposition (Integration durch Substitution). *Es sei I ein Intervall, $g \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$, und $f\colon D \to \Bbbk$ stetig mit $g(I) \subset D \subset \mathbb{R}$. Für alle a, $b \in I$ gilt dann*

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy\ .$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion, dann ist $F \circ g$ eine Stammfunktion von $(f\circ g)\cdot g'$ nach der Kettenregel 5.13. Es folgt

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx\ . \qquad \square$$

Unsere saloppe Schreibweise dafür ist „$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(y)\,dy$ mit $y = g(x)$“.

5.61. Beispiel. Man nennt $\frac{f'}{f} = (\log\circ f)'$ auch die *logarithmische Ableitung* von f. Es gilt

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log f(b) - \log f(a) = \log\frac{f(b)}{f(a)}$$

falls $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$. Falls $(x) < 0$ für alle $x \in [a,b]$, gilt statt dessen

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log(-f(a)) - \log(-f(b)) = \log\frac{f(b)}{f(a)}\;.$$

Manche Quotienten im Integranden lassen sich als logarithmische Ableitungen auffassen und dadurch vereinfachen. Betrachte zum Beispiel

$$\int_a^b \tan x\,dx = \int_a^b \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\log\frac{\cos b}{\cos a} \quad \text{für } a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\;.$$

Es sei jetzt $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ eine rationale Funktion über $\mathbb{R}$ wie in den Beispielen 3.15 und 3.28. Falls $\deg P \geq \deg Q$ liefert Polynomdivision, dass $P = S\cdot Q + R$ mit $\deg R < \deg Q$, und wir schreiben $f(x) = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt Q über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren, siehe auch Satz 6.110. Da Q nach Voraussetzung reelle Quotienten hat, gilt $Q(\overline{z}) = \overline{Q(z)}$, mit z ist also auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von Q. Also existieren paarweise verschiedene Nullstellen $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$, $z_1, \dots, z_\ell \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, sowie $m_1, \dots, m_k$, $n_1, \dots, n_\ell \in \mathbb{N}$, so dass

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-x_1)^{m_1}\cdots(x-x_k)^{m_k}\cdot((x-z_1)(x-\overline{z}_1))^{n_1}\cdots((x-z_\ell)(x-\overline{z}_\ell))^{n_\ell} \\ &= (x-x_1)^{m_1}\cdot\dots\cdot(x^2 - 2\operatorname{Re} z_1\,x + |z_1|^2)^{n_1}\cdots\;. \end{aligned}$$

Indem man ein lineares Gleichungssystem mit $\deg Q$ Unbekannten löst (z.B. durch Einsetzen von $\deg Q$ verschiedenen Zahlen in $P = (f-S)\cdot Q$ und in den folgenden Ansatz), erhält man Konstanten $c_{i,j}$ für $1 \leq i \leq k$ und $1 \leq j \leq m_i$, und $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ für $1 \leq i \leq \ell$ und $1 \leq j \leq n_i$ mit

$$\begin{aligned} f(x) = S(x) &+ \frac{c_{1,1}}{x-x_1} + \dots + \frac{c_{1,m_1}}{(x-x_1)^{m_1}} + \dots \\ &+ \frac{a_{1,1}x + b_{1,1}}{x - 2\operatorname{Re} z_1\,x + |z_1|^2} + \dots + \frac{a_{1,n_1}x + b_{1,n_1}}{(x - 2\operatorname{Re} z_1\,x + |z_1|^2)^{n_1}} + \dots\;. \end{aligned}$$

Diese Zerlegung heißt *Partialbruchzerlegung* von f und ist stets eindeutig. Um eine Stammfunktion anzugeben, müssen wir also für jeden einzelnen Ausdruck auf der rechten Seite eine Stammfunktion finden.

5.62. Beispiel. Stammfunktionen zu $S(x)$ und $\frac{c_{i,j}}{(x-x_i)^j}$ lassen sich leicht bestimmen. Bei den anderen Termen gehen wir wie folgt vor.

(1) Mit Hilfe der logarithmischen Ableitung aus Beispiel 5.61 finden man

$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{x^2-2\operatorname{Re} z\,x+|z|^2}\,dx &= \frac{a}{2}\int \frac{2x-2\operatorname{Re} z}{x^2-2\operatorname{Re} z\,x+|z|^2}\,dx\\ &\qquad + (a\operatorname{Re} z+b)\int \frac{1}{x^2-2\operatorname{Re} z\,x+|z|^2}\,dx\\ &= \frac{a}{2}\log\underbrace{(x^2-2\operatorname{Re} z\,x+|z|^2)}_{=|x-z|^2>0}+(a\operatorname{Re} z+b)\int \frac{1}{x^2-2\operatorname{Re} z\,x+|z|^2}\,dx\;.\end{aligned}$$

(2) Substitution mit $y=\frac{x-\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}$ liefert

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-2\operatorname{Re} z\,x+|z|^2}\,dx &= \frac{1}{(\operatorname{Im} z)^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}\right)^2+1}\,dx\\ &= \frac{1}{\operatorname{Im} z}\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \frac{1}{\operatorname{Im} z}\arctan\left(\frac{x-\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}\right)\;.\end{aligned}$$

(3) Die entsprechenden Terme in der Partialbruchzerlegung mit höherem Exponenten im Nenner lassen sich als Ableitungen rationaler Funktionen schreiben, bis auf einen Rest vom Typ (1).

5.6. Höhere Ableitungen und die Taylor-Formel

Wir lernen höhere Ableitungen kennen und benutzen sie, um mehrfach differenzierbare Funktionen durch Polynome zu approximieren.

5.63. Definition. Es sei $a<b$ und I ein Intervall mit $(a,b)\subset I\subset [a,b]$. Wir definieren induktiv die *k-te Ableitung* $f^{(k)}$ einer Funktion $f\colon I\to \Bbbk$ wie folgt.

(1) Es ist $f^{(0)}=f$, und f ist auf ganz I 0-fach differenzierbar.
(2) Es sei $x_0\in I$. Wenn f auf einer Umgebung U von x_0 in I k-fach differenzierbar ist und die Ableitung $f^{(k+1)}(x_0)=(f^{(k)})'(x_0)$ existiert, dann ist f im Punkt x_0 $(k+1)$-mal differenzierbar.

Wenn die k-te Ableitung $f^{(k)}$ auf ganz I existiert und stetig ist, heißt f *k-fach stetig differenzierbar*. Der Raum der k-fach stetig differenzierbaren Funktionen auf I wird mit $\mathcal{C}^k(I,\Bbbk)$ bezeichnet. Wenn $f^{(k)}$ für alle $k\in\mathbb{N}$ existiert, heißt f *unendlich oft differenzierbar*. Der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf I wird mit $\mathcal{C}^\infty(I;\Bbbk)$ bezeichnet. Anstelle von $\mathcal{C}^k(I;\mathbb{R})$ oder $\mathcal{C}^\infty(I;\mathbb{R})$ schreibt man auch kurz $\mathcal{C}^k(I)$ bzw. $\mathcal{C}^\infty(I)$.

Für kleine k schreibt man $f=f^{(0)}$, $f'=f^{(1)}$, $f''=f^{(2)}$ und $f'''=f^{(3)}$; mehr als drei Striche sollte man auf gar keinen Fall verwenden. Ein andere Schreibweise ist

$$\frac{d^kf(x)}{dx^k}=\frac{d^k}{dx^k}f(x)=f^{(k)}(x)\;.$$

Außerdem beachte man, dass es zwar „unendlich oft differenzierbare“ Funktionen gibt, aber keine „unendliche Ableitung“ $f^{(\infty)}$.

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f \colon I \to \Bbbk$ heißt *linear*, wenn es Konstanten a, $b \in \Bbbk$ gibt, so dass

$$f(x) = ax + b$$

für alle $x \in I$ gilt. In der linearen Algebra würde man solch eine Abbildung *affin* nennen, und linear nur, falls $b = 0$; der Sprachgebrauch ist hier also etwas anders. Eine reellwertige Funktion ist genau dann linear, wenn sie sowohl konvex als auch konkav ist.

5.64. Lemma. *Es sei I ein Intervall und $f \colon I \to \mathbb{R}$ zweifach differenzierbar. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad & f'' = 0 \text{ auf } I \quad &\Longleftrightarrow \quad f|_I \text{ ist linear}\,,\\
&(2) \qquad & f'' \geq 0 \text{ auf } I \quad &\Longleftrightarrow \quad f|_I \text{ ist konvex}\,,\\
&(3) \qquad & f'' > 0 \text{ auf } I \quad &\Longrightarrow \quad f|_I \text{ ist streng konvex}\,,\\
&(4) \qquad & f'' \leq 0 \text{ auf } I \quad &\Longleftrightarrow \quad f|_I \text{ ist konkav}\,,\\
&(5) \qquad & f'' < 0 \text{ auf } I \quad &\Longrightarrow \quad f|_I \text{ ist streng konkav}\,.
\end{aligned}$$

Beweis. Nach Satz 5.33 ist f genau dann (streng) konvex bzw. konkav, wenn f' (streng) monoton steigt bzw. fällt. Die Richtungen „$\Longrightarrow$“ im Lemma ergeben sich aus Folgerung 5.25, angewandt auf $f' \colon I \to \mathbb{R}$. Die Rückrichtungen „$\Longleftarrow$“ in (1), (2) und (4) folgen aus Bemerkung 5.26. $\square$

5.65. Beispiel. Es sei $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ρ. Nach Folgerung 5.52 ist $f'(x)$ wieder eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ρ. Induktiv folgt daraus, dass f auf $(-\rho, \rho)$ unendlich oft differenzierbar ist. Ebenfalls durch vollständige Induktion zeigt man, dass

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^\infty (n+1) \cdots (n+k)\, a_{n+k}\, x^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{(n+k)!}{n!}\, a_{n+k}\, x^n \;,$$

insbesondere $f^{(k)}(0) = k!\, a_k$.

Wir wollen umgekehrt eine Funktion f durch ein Polynom nahe 0 approximieren. Das obige Beispiel legt es nahe, es mit

$$P_n(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$$

zu versuchen. Allgemeiner sollte man nahe x_0 das *Taylor-Polynom*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\, (x - x_0)^k$$

betrachten.

5.66. Satz (Taylor). *Sei I ein Intervall, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I; \Bbbk)$, dann gilt für alle $x \in I$, dass*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n \, dt \;.$$

Beweis. Wir beweisen diese Aussage durch vollständige Induktion über n.

Für $n = 0$ liefert der Hauptsatz 5.47 genau unsere Behauptung

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt\,.$$

Aus der Behauptung für $n-1$ folgt die Behauptung für n aus der folgenden partiellen Integration

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\,dt = -\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}\cdot\underbrace{\frac{(x-x)^n}{n}}_{=0} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$$
$$+ \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt\,. \quad \square$$

5.67. Folgerung (Lagrange-Restglied). *Sei I ein Intervall, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$. Dann existiert für jedes $x \in I$ ein ξ zwischen x und x_0, so dass*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}\,.$$

Beweis. Da f reellwertig ist, dürfen wir den Mittelwertsatz 3.63 der Integralrechnung anwenden mit $p(t) = (x-t)^n$, falls $x > x_0$, bzw. $p(t) = (t-x)^n$, falls $x < x_0$. Im Fall $x > x_0$ erhalten wir also $\xi \in (x, x_0)$ mit

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cdot\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}\,. \quad \square$$

5.68. Folgerung. *Es sei I ein offenes Intervall, $x_0 \in I$, und $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei mindestens n-fach stetig differenzierbar mit $n \geq 2$. Es sei $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.*

(1) *Falls n gerade ist und $f^{(n)}(x_0) > 0$, dann nimmt f bei x_0 ein strenges lokales Minimum an.*
(2) *Falls n gerade ist und $f^{(n)}(x_0) < 0$, dann nimmt f bei x_0 ein strenges lokales Maximum an.*
(3) *Falls n ungerade ist, ist x_0 keine lokale Extremstelle von f.*

Beweis. Da I offen und $f^{(n)}\colon I \to \mathbb{R}$ stetig ist, existiert $\varepsilon > 0$, so dass $f^{(n)}$ auf $U = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I$ das gleiche Vorzeichen hat wie $f^{(n)}(x_0)$. Zu $x \in U$ betrachten wir das Lagrange-Restglied mit ξ zwischen x_0 und x.

Zu (1): Für $x \in U \setminus \{x_0\}$ gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}_{=0 \text{ für } k\neq 0}\,(x-x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}}_{>0}\,(x-x_0)^n > f(x_0),$$

da n gerade ist. Da $f(x)$ echt größer als $f(x_0)$ ist für alle $x \in U \setminus \{x_0\}$, sprechen wir von einem *strengen* lokalen Minimum. Genauso zeigt man (2).

Zu (3) betrachten wir zunächst den Fall $f^{(n)}(x_0) > 0$ und erhalten für $x \in U\backslash\{x_0\}$ analog

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}}_{>0}(x - x_0)^n \begin{cases} < f(x_0) & \text{falls } x < x_0, \text{ und} \\ > f(x_0) & \text{falls } x > x_0. \end{cases}$$

Insbesondere liegt kein Extremum vor, egal wie klein wir $\varepsilon > 0$ wählen. Der Fall $f^{(n)}(x_0) < 0$ funktioniert analog. □

5.69. Bemerkung. Falls $f\colon I \to \mathbb{R}$ mindestens zweifach differenzierbar ist, nennen wir $x_0 \in I$ mit $f''(x_0) = 0$ einen *Wendepunkt von f*, wenn es eine Umgebung $U = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I$ von x_0 mit $\varepsilon > 0$ gibt, so dass entweder $f''|_{(x_0-\varepsilon,x_0)} \le 0$ und $f''|_{(x_0,x_0+\varepsilon)} \ge 0$ oder $f''|_{(x_0-\varepsilon,x_0)} \ge 0$ und $f''|_{(x_0,x_0+\varepsilon)} \le 0$ gilt. Wenn die zutreffenden Ungleichungen nicht gelten (also „$>$“ anstelle von „$\ge$“ und „$<$“ anstelle von „$\le$“), sprechen wir von einem *strengen Wendepunkt*. Aus Übung 6 von Blatt II.3 und Folgerung 5.68 kann man ein ähnliches Kriterium für Wendepunkte n-fach stetig differenzierbarer Funktionen mit $n \ge 3$ und $f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ableiten (Übung).

5.70. Bemerkung. Wenn die Funktion f $(n+1)$-fach stetig differenzierbar ist, dann ist $f^{(n+1)}$ auf jedem kompakten Teilintervall $[a, b] \subset I$ beschränkt, da nach Satz 3.40 das Maximum von $|f^{(n+1)}|$ auf $[a, b]$ existiert. Aus $|f^{(n+1)}(t)| \le C$ auf $[a, b]$ folgt für x_0, $x \in [a, b]$ insbesondere

$$\left|\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n\, dt\right| \le \frac{C}{n!}\left|\int_{x_0}^{x}(x - t)^n\, dt\right| = \frac{C}{(n+1)!}\,|x - x_0|^{n+1}\ .$$

Für eine Funktion, deren Betrag durch ein konstantes Vielfaches einer anderen Funktion h abgeschätzt werden kann, benutzt man das *Landau-Symbol* $O(h)$, man schreibt hier also kurz

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = O\big(|x - x_0|^{n+1}\big)\ .$$

Je höher man n wählen kann, desto höher wird der Exponent im Landau-Symbol. Für ein festes x nahe x_0 wird die Annäherung dennoch nicht unbedingt besser, da man über die Konstante C oben keine Aussage machen kann.

5.71. Beispiel. Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0\,, \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist unendlich oft differenzierbar nach Übung 2 von Blatt II.5. Insbesondere gilt $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Das bedeutet, dass $f(x)$ nahe 0 durch das Taylorpolynom nicht besser angenähert wird, wenn man n größer wählt.

5.72. Definition. Es sei I ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$. Dann heißt die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

in $(x - x_0)$ die *Taylor-Reihe* oder auch die *Potenzreihen-Entwicklung* von f an der Stelle x_0.

Falls die obige Reihe konvergiert mit Konvergenzradius ρ und die Funktion f auf $B_\rho(x_0) \cap I$ darstellt, dann lässt sich f bei x_0 *in eine Potenzreihe entwickeln.*

Falls sich f an jedem Punkt $x_0 \in I$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt, heißt f auch *reell analytisch.* Der Raum aller reell analytischen Funktionen auf I wird mit $\mathcal{C}^\omega(I)$ bezeichnet.

5.73. Bemerkung. Die Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ aus Beispiel 5.71 besitzt bei 0 zwar eine konvergente Taylorreihe, da $f^{(k)}(0) = 0$ für alle k, aber diese stellt die Funktion auf $(0, \infty)$ nicht dar. Also gilt $f \notin \mathcal{C}^\omega(\mathbb{R})$. Wir haben also strikte Inklusionen

$$\mathcal{C}^\omega(I) \subsetneqq \mathcal{C}^\infty(I) \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathcal{C}^2(I) \subsetneqq \mathcal{C}^1(I) \subsetneqq \mathcal{C}^0(I) = \mathcal{C}(I) .$$

5.74. Beispiel.

(1) Die Exponentialfunktion ist reell analytisch, denn

$$e^x = e^{x_0} \cdot e^{x - x_0} = \sum_{k=0}^\infty \frac{e^{x_0}}{k!} (x - x_0)^k .$$

Dieses Argument funktioniert übrigens genausogut auch für komplexe Zahlen x_0, so dass sich die Exponentialfunktion sogar um jeden Punkt in $\mathbb{C}$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt.

(2) Der Logarithmus ist reell analytisch auf $(0, \infty)$, denn für $x_0 > 0$ und $x \in (0, 2x_0)$ gilt

$$\begin{aligned} \log x = \log x_0 + \log \frac{x}{x_0} &= \log x_0 + \log \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right) \\ &= \log x_0 - \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{x_0^k} (x - x_0)^k \end{aligned}$$

nach der Reihenentwicklung aus Folgerung 4.21.

(3) Auch die Winkel-, Arcus- und Hyperbelfunktionen sind reell analytisch.

KAPITEL 6

Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen

In diesem Kapitel lernen wir die wichtigsten Eigenschaften differenzierbarer Abbildungen von offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$ kennen. Nachdem wir verschiedene Differenzierbarkeitsbegriffe und Rechenregeln kennengelernt haben, betrachten wir zunächst wieder lokale Extrema von Funktionen in mehreren Veränderlichen. Anschließend fragen wir uns, welche Abbildungen zumindest lokal differenzierbar umkehrbar sind und werden so auch auf den Begriff der Untermannigfaltigkeit geführt.

6.1. Topologische Räume

In diesem Abschnitt rekapitulieren wir einige Grundbegriffe der Topologie. Auf Vektorräumen gibt es besonders angenehme Metriken, die von Normen induziert werden. Ein wichtiger Satz besagt, dass alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ dieselbe Topologie induzieren.

Wir erinnern uns an den Umgebungsbegriff für metrische Räume aus Abschnitt 2.3 und seine Eigenschaften aus Bemerkung 3.1. Aufgrund der Eigenschaft (4) können wir alle topologischen Grundbegriffe wie Stetigkeit, Folgenkonvergenz, Folgenkompaktheit auf den Begriff der offenen Menge zurückführen.

6.1. Definition. Ein *topologischer Raum* $(X, \mathcal{O}_X)$ besteht aus einer Menge X und einer Teilmenge $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{P}(X)$ seiner Potenzmenge, so dass

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}_X$,
(2) Für alle $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_X$ gilt $\bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{O}_X$,
(3) Für alle $U, V \in \mathcal{O}_X$ gilt $U \cap V \in \mathcal{O}_X$.

Die Menge $\mathcal{O}_X$ heißt dann *Topologie* auf X, und ihre Elemente heißen *offene Teilmengen* von X. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, wenn $X \setminus A$ offen ist. Sei $x \in X$ und $V \subset X$ eine Teilmenge mit $x \in V$, dann heißt V *Umgebung* von x, wenn es eine offene Menge U mit $x \in U \subset V$ gibt.

6.2. Beispiel. Es sei X eine Menge.

(1) *Klumpentopologie*: Die Teilmenge $\mathcal{O}_X = \{\emptyset, X\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist die gröbste Topologie auf X.
(2) *Diskrete Topologie*: Die Potenzmenge $\mathcal{O}_X = \mathcal{P}(X)$ ist die feinste Topologie auf X.

Die Axiome (1) – (3) lassen sich leicht überprüfen.

6.3. Bemerkung. In den Kapiteln 2 und 3 haben wir grundsätzlich mit Umgebungen gearbeitet, wenn es um Fragen wie Konvergenz von Folgen oder Stetigkeit von Abbildungen ging. Man kann eine Topologie auch durch Angabe aller Umgebungen charakterisieren. Wir überprüfen das in vier Schritten.

(1) Sei $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{P}(X)$ gegeben, dann definiert man eine Abbildung $U\colon X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ durch
$$x \mapsto \mathcal{U}_x = \{U \subset X \mid U \text{ ist Umgebung von } x\}$$
Um die Axiome aus Bemerkung 3.1 zu zeigen, gehen wir wie bei den metrischen Räumen in Bemerkung 3.1 vor; dabei benutzen wir anstelle der metrischen Bälle die offenen Mengen um einen Punkt x als Umgebungsbasis. Die Axiome 3.1 (1) und (3) sind dann einfach.

Seien V_1, $V_2 \in \mathcal{U}_x$ und $U_1 \subset V_1$, $U_2 \subset V_2$ offen mit $x \in U_1 \cap U_2$, dann ist $U_1 \cap U_2 \subset V_1 \cap V_2$ offen, also $V_1 \cap V_2 \in U_x$, und es folgt 3.1 (2).

Sei $V \in \mathcal{U}_x$ und U offen mit $x \in U \subset V$, dann folgt 3.1 (4), da $U \in \mathcal{U}_y$ für alle $y \in U$.

(2) Wenn umgekehrt für alle $x \in X$ die Menge $\mathcal{U}_x$ der Umgebungen vorgegeben ist, so dass die Axiome aus Bemerkung 3.1 erfüllt sind, definiert man offene Mengen wie in Definition 2.8, und erhält
$$\mathcal{O}_X = \{U \subset X \mid U \in \mathcal{U}_x \text{ für alle } x \in U\} .$$
Axiom (1) gilt, denn für $\emptyset$ ist nichts zu überprüfen, und $X \in \mathcal{U}_x$ für alle $x \in X$. Sei $\mathcal{V} \subset \mathcal{O}_X$ und $x \in \bigcup \mathcal{V}$, dann existiert $V \in \mathcal{V}$ mit $x \in V$ und $V \in \mathcal{U}_x$. Aus $V \subset \bigcup \mathcal{V}$ folgt $\bigcup \mathcal{V} \in \mathcal{U}_x$, und somit $\bigcup \mathcal{V} \in \mathcal{O}_X$; also gilt (2). Zu (3) schließlich seien U_1, $U_2 \in \mathcal{O}_X$ und $x \in U_1 \cap U_2$. Aus U_1, $U_2 \in \mathcal{U}_x$ folgt $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_x$, und somit auch $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}_X$.

(3) Wenn wir mit einer Topologie $\mathcal{O}_X$ auf X starten und Umgebungen wie in Schritt (1) definieren, können wir wie in Schritt (2) eine neue Topologie $\mathcal{O}'_X$ auf X konstruieren. Falls $U \in \mathcal{O}_X$ offen ist, folgt $U \in \mathcal{U}_x$ für alle $x \in U$, somit $U \in \mathcal{O}'_X$. Also gilt $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}'_X$.

Sei umgekehrt $U' \in \mathcal{O}'_X$. Da $U' \in \mathcal{U}_x$ für alle $x \in U'$, existiert $U_x \in \mathcal{U}_x$ mit $x \in U_x \subset U'$ und $U_x \in \mathcal{O}_x$. Nun gilt aber
$$U' = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} U_x \subset U' ,$$
also
$$U' = \bigcup_{x \in U} U_x \in \mathcal{O}_X$$
nach Axiom (2), also gilt auch $\mathcal{O}_X \supset \mathcal{O}'_X$. Wir erhalten also unsere ursprüngliche Topologie $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}'_X$ zurück.

(4) Umgekehrt können wir mit Mengen $\mathcal{U}_x$ von Umgebungen für alle $x \in X$ starten, dann eine Topologie $\mathcal{O}_X$ nach Schritt (2) konstruieren, und erhalten mit Schritt (1) neue Mengen $\mathcal{U}'_x$ von Umgebungen. In diesem Fall gilt ebenfalls $\mathcal{U}'_x = \mathcal{U}_x$ für alle $x \in X$ (Übung).

Somit sind beide Beschreibungen äquivalent.

6.4. Beispiel. Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Nach Definition 2.43 ist U Umgebung von $x \in M$, wenn ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U$ existiert. Daher betrachten wir auf M die Topologie

$$\mathcal{O}_M = \{U \subset M \mid \text{ für alle } x \in U \text{ existiert } \varepsilon > 0, \text{ so dass } B_\varepsilon(x) \subset U\} .$$

Wir nennen $\mathcal{O}_M$ die *metrische Topologie* auf (M, d). Die meisten Topologien in dieser Vorlesung sind metrische Topologien in diesem Sinne. Nach Bemerkung 6.3 erhalten wir so den gleichen Umgebungsbegriff wie in Abschnitt 2.3.

Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume und $f \colon X \to Y$ eine Abbildung. Wir definieren Stetigkeit bei x wie in Definition 3.2. Dann können wir stetige Abbildungen auch durch offene Mengen charakterisieren.

6.5. Lemma. *Eine Abbildung F zwischen topologischen Räumen $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ist genau dann stetig, wenn $F^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ für alle $V \in \mathcal{O}_Y$ gilt, wenn also Urbilder offener Mengen wieder offen sind.*

Beweis. Zu „$\Longrightarrow$" sei $V \in \mathcal{O}_Y$ offen, und es sei $x \in F^{-1}(V)$. Da V offen ist, ist V Umgebung von $F(x)$. Da F bei x stetig ist, ist $F^{-1}(V)$ Umgebung von x. Da $F^{-1}(V)$ Umgebung aller $x \in F^{-1}(V)$ ist, ist $F^{-1}(V)$ nach Bemerkung 6.3 offen.

Zu „$\Longleftarrow$" sei $x \in X$ und $V \subset Y$ sei Umgebung von $F(x) \in Y$. Dann existiert eine offene Menge $U \in \mathcal{O}_Y$ mit $F(x) \in U \subset V$, und nach Voraussetzung ist $F^{-1}(U)$ offen. Da $x \in F^{-1}(U) \subset F^{-1}(V)$, ist $F^{-1}(V)$ eine Umgebung von x. Es folgt, dass F an jedem Punkt x stetig ist. $\square$

6.6. Beispiel. Seien X, Y Mengen und $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ein topologischer Raum.

(1) Jede Abbildung $F \colon (X, \mathcal{P}(X)) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ ist stetig.
(2) Jede Abbildung $G \colon (Z, \mathcal{O}_Z) \to (Y\{\emptyset, Y\})$ ist stetig, da $G^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $G^{-1}(Y) = Z$ offen sind.
(3) Eine Abbildung $H \colon (Y, \{\emptyset, Y\}) \to (X, \mathcal{P}(X))$ ist genau dann stetig, wenn sie konstant ist. Sei $H(y) = x$ für alle $y \in Y$, dann ist $H^{-1}(U) = Y$ oder $H^{-1}(U) = \emptyset$, je nachdem, ob $y \in U$ oder nicht. Sei umgekehrt H nicht konstant, etwa $H(x) = y \neq v = H(u)$, dann wähle $U \subset X$ mit $y \in U$, $v \notin U$. Es folgt $H^{-1}(U) \notin \{\emptyset, X\}$, also ist H nicht stetig.

6.7. Bemerkung. (1) Die Identität $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O}_X)$ ist immer stetig.
(2) Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ und $(Z, \mathcal{O}_Z)$ topologische Räume und es seien $F \colon Y \to Z$ und $G \colon X \to Y$ stetig. Wie in Lemma 3.4 (2) zeigt man, dass $F \circ G \colon X \to Z$ dann auch stetig ist. Lemma 3.4 (1) gilt entsprechend.

Als nächstes lernen wir zwei Möglichkeiten kennen, um aus bereits bekannten Topologien neue zu konstruieren. Zunächst erinnern wir uns an Lemma 3.5. Sei (M, d) metrischer Raum, und sei $D \subset M$ eine Teilmenge. Dann ist $V \subset D$

genau dann Umgebung von $x \in V$ in D, wenn es eine Umgebung U von x in M gibt mit $V = D \cap U$.

6.8. Bemerkung. Eine Teilmenge $V \subset D$ ist genau dann offen in D, wenn es eine offene Menge $U \subset M$ mit $U \cap D = V$ gibt. Denn wenn solch ein U existiert, ist U Umgebung aller Punkte $x \in V = D \cap U$, somit ist V Umgebung aller $x \in V$ nach Lemma 3.5. Sei umgekehrt $V \subset D$ offen, dann finden wir zu jedem $x \in V$ eine Umgebung U_x von x in D mit $U_x \cap D \subset V$, und nach Axiom (4) in Bemerkung 3.1 können wir U_x offen wählen. Dann ist $U = \bigcup_{x \in V} U_x$ offen in M, und es gilt $V = D \cap U$.

6.9. Definition. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und $Y \subset X$. Die *Unterraumtopologie* (oder *Spurtopologie*) auf Y ist definiert durch

$$\mathcal{O}_Y = \{V \subset Y \mid \text{ es existiert } U \in \mathcal{O}_X \text{ mit } V = U \cap Y\} .$$

Wir nennen $(Y, \mathcal{O}_Y)$ einen *topologischen Unterraum* von $(X, \mathcal{O}_X)$, wenn $Y \subset X$ gilt und $\mathcal{O}_Y$ die Unterraumtopologie ist.

6.10. Bemerkung. Die Axiome (1) – (3) aus Definition 6.1 für $\mathcal{O}_Y$ lassen sich auf die Axiome für $\mathcal{O}_X$ zurückführen.

Die Unterraumtopologie erfüllt eine sogenannte “universelle Eigenschaft” , die es uns nicht nur erlaubt, stetige Abbildungen nach Y zu charakterisieren, sondern die $\mathcal{O}_Y$ sogar eindeutig bestimmt.

6.11. Satz (Universelle Eigenschaft der Unterraumtopologie). *Sei $(Y, \mathcal{O}_Y)$ Unterraum von $(X, \mathcal{O}_X)$. Dann gilt*

(1) *Die Inklusionsabbildung $\iota\colon Y \to X$ ist stetig.*
(2) *Sei $(Z, \mathcal{O}_Z)$ topologischer Raum. Dann ist eine Abbildung $F\colon Z \to Y$ genau dann stetig, wenn $\iota \circ F\colon Z \to X$ stetig ist.*
(3) *Die Unterraumtopologie ist die einzige Topologie auf Y, die (2) erfüllt.*

Beweis. Zu (1) sei $U \subset X$ offen in X. Dann ist $\iota^{-1}(U) = U \cap Y$ offen in Y nach Definition 6.9, also ist ι stetig.

Zu (2) sei zunächst $F\colon Z \to Y$ stetig, dann ist $\iota \circ F$ nach Lemma 3.4 und (1) ebenfalls stetig. Sei umgekehrt $\iota \circ F\colon Z \to X$ stetig und $V \subset Y$ offen. Dann existiert eine offene Menge $U \subset X$ mit $V = U \cap Y$ nach Definition 6.9, und es ist $F^{-1}(V) = F^{-1}(\iota^{-1}(U)) = (\iota \circ F)^{-1}(U)$ offen nach Voraussetzung. Also ist F stetig.

Zu (3) seien $\mathcal{O}_Y$ und $\mathcal{O}'_Y$ zwei Topologien auf Y, die beide (2) erfüllen. Dann erfüllen sie auch (1), denn da $\mathrm{id}_Y\colon Y \to Y$ nach Bemerkung 6.7 (1) stetig ist, ist nach (2) auch $\iota = \iota \circ \mathrm{id}_Y$ stetig sowohl bezüglich $\mathcal{O}_Y$ also auch bezüglich $\mathcal{O}'_Y$.

Wir betrachten jetzt die Abbildung $F = \mathrm{id}_Y\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Y, \mathcal{O}'_Y)$. Da $\iota \circ F = \iota\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ stetig ist, ist F auch stetig. Für alle $U \in \mathcal{O}'_Y$ folgt also $U = F^{-1}(U) \in \mathcal{O}_Y$, somit gilt $\mathcal{O}_Y \supset \mathcal{O}'_Y$. Indem wir $G = \mathrm{id}_Y\colon (Y, \mathcal{O}'_Y) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ betrachten, sehen wir, dass $\mathcal{O}_Y \subset \mathcal{O}'_Y$ gilt, es folgt $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}'_Y$. □

Als nächstes betrachten wir das Produkt topologischer Räume $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$. Es gibt natürliche Projektionsabbildungen π_X, π_Y vom kartesischen Produkt $X \times Y$ in die Mengen X und Y mit

$$\pi_X(x, y) = x \qquad \text{und} \qquad \pi_Y(x, y) = y$$

für alle $(x, y) \in X \times Y$. Wir suchen eine Topologie $\mathcal{O}_{X\times Y}$ auf $X \times Y$, so dass π_X und π_Y stetig sind. Für $U \in \mathcal{O}_X$ und $V \in \mathcal{O}_Y$ muss dann

$$\pi_X^{-1}(U) = U \times Y \in \mathcal{O}_{X\times Y} \quad \text{und} \quad \pi_Y^{-1}(V) = X \times V \in \mathcal{O}_{X\times Y}$$

gelten, aus Axiom (3) folgt $U \times V = U \times Y \cap X \times V \in \mathcal{O}_{X\times Y}$. Wir wählen $\mathcal{O}_{X\times Y}$ also so, dass diese Mengen offen sind und die Axiome (1) – (3) gelten.

6.12. Definition. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Die Produkttopologie auf $X \times Y$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{X\times Y} = \{W \subset X \times Y \mid {} & \text{ für alle } (x, y) \in W \text{ gibt es} \\ & U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y \text{ mit } (x, y) \in U \times V \subset W\} \,. \end{aligned}$$

Wieder lassen sich die Axiome (1) – (3) auf die entsprechenden Axiome für X und Y zurückführen. In Analogie zu Satz 6.11 formulieren wir nun die universelle Eigenschaft der Produkttopologie.

6.13. Satz (Universelle Eigenschaft der Produkttopologie). *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, dann gilt*

(1) *Die Projektionen $\pi_X\colon X \times Y \to X$ und $\pi_Y\colon X \times Y \to Y$ sind stetig.*
(2) *Für jeden topologischen Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ist eine Abbildung $F\colon Z \to X \times Y$ genau dann stetig, wenn $\pi_X \circ F\colon Z \to X$ und $\pi_Y \circ F\colon Z \to Y$ stetig sind.*
(3) *Die Produkttopologie auf $X \times Y$ ist die einzige Topologie auf $X \times Y$, die (2) erfüllt.*

Beweis. Wir hatten $\mathcal{O}_{X\times Y}$ so konstruiert, dass (1) gilt. Daraus folgt auch die Richtung „$\Longrightarrow$" in (2). Seien also umgekehrt die Abbildungen $\pi_X \circ F\colon Z \to X$ und $\pi_Y \circ F\colon Z \to Y$ stetig, und sei $W \subset X \times Y$ offen. Um zu zeigen, dass $F^{-1}(W)$ offen ist, betrachte $z \in F^{-1}(W)$ und $(x, y) = F(z) \in W$. Nach Definition 6.12 existieren $U \in \mathcal{O}_X$ und $V \in \mathcal{O}_Y$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \times V \subset W$. Da $\pi_X \circ F$ stetig ist, ist

$$F^{-1}(U \times Y) = F^{-1}\left(\pi_X^{-1}(U)\right) = (\pi_X \circ F)^{-1}(U) \in \mathcal{O}_Z$$

offen. Genauso folgt $F^{-1}(X \times V) \in \mathcal{O}_Z$, da $\pi_Y \circ F$ stetig ist. Also ist auch

$$F^{-1}(U \times V) = F^{-1}(U \times Y) \cap F^{-1}(X \times V) \in \mathcal{O}_Z \,,$$

und $F^{-1}(U \times V) \subset F^{-1}(W)$ ist eine offene Umgebung von $z \in F^{-1}(W)$. Da jeder Punkt von $F^{-1}(W)$ eine offene Umgebung in $F^{-1}(W)$ besitzt, ist $F^{-1}(W)$ nach Bemerkung 6.3 (2) offen. Also ist F stetig, und es folgt Aussage (2).

Der Beweis von (3) ist analog zum Beweis von Satz 6.11 (3). $\square$

6.14. Bemerkung. Das topologische Produkt ist assoziativ, daher können wir auf endlichen kartesischen Produkten $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ die Produkttopologie

$$\mathcal{O}_X = \{W \subset X \mid \text{ für alle } x = (x_1, \dots, x_n) \in X \text{ existieren } U_i \in \mathcal{O}_{X_i} \\ \text{mit } x \in U_1 \times \cdots \times U_n \subset W\} .$$

Dann ist eine Abbildung $F\colon Z \to X$ genau dann stetig, wenn die Abbildungen $\pi_i \circ F\colon Z \to X_i$ stetig sind.

6.15. Beispiel. Es trage $\Bbbk^n = \Bbbk \times \cdots \times \Bbbk$ für $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ die Produkttopologie. Für einen Punkt $x \in \Bbbk^n$ schreiben wir

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad x_i = \pi_i(x) \in \Bbbk$$

für $i = 1, \dots, n$. Sei $F\colon Z \to \Bbbk^n$ eine Abbildung, dann schreiben wir F_i für die Komponentenfunktion $\pi_i \circ F\colon Z \to \Bbbk$. Nach Satz 6.13 ist F genau dann stetig, wenn alle Komponentenfunktionen F_i stetig sind.

Analog dazu konvergiert eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\Bbbk^n$ genau dann, wenn die Folgen $(\pi_i(a_k))_k$ konvergieren.

Als nächstes betrachten wir zusammenhängende topologische Räume. Mit Hilfe des Zwischenwertsatzes sehen wir, dass die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ genau die Intervalle sind.

6.16. Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *zusammenhängend,* wenn es keine zwei offenen Mengen $U, V \in \mathcal{O}_X$ mit $X = U \dot\cup V$ und $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$ gibt.

Man kann also X nicht in zwei (oder mehr) disjunkte offene Teilmengen zerlegen. Alternativ ist X genau dann zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

6.17. Satz. *Ein topologischer Unterraum von $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn er ein Intervall ist.*

Nach Beispiel 3.36 gibt es einen Homöomorphismus $\overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$. Aus dem obigen Satz folgt dann, dass auch Unterräume von $\overline{\mathbb{R}}$ genau dann zusammenhängend sind, wenn sie Intervalle sind.

Beweis. Wir zeigen „$\Longrightarrow$“ indirekt. Sei $A \subset \mathbb{R}$ kein Intervall. Nach Definition 2.1 existieren $x, y \in A$ mit $x < y$ und $z \in \mathbb{R} \setminus A$ mit $x < z < y$. Nach Beispiel 2.9 (1) sind die Intervalle $(-\infty, z)$ und (z, ∞) in $\mathbb{R}$ offen. Nach Definition 6.9 sind die Teilmengen $U = (-\infty, z) \cap A$ und $V = (z, \infty) \cap A$ ebenfalls offen und nicht leer, da $x \in U$ und $y \in V$. Da $z \notin A$, gilt $A = U \dot\cup V$, also ist A nicht zusammenhängend.

Zu „$\Longleftarrow$“ sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Wäre I nicht zusammenhängend, dann gäbe es offene Teilmengen U und $V \subset I$ mit $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$ und $I = U \mathbin{\dot\cup} V$. Wir definieren eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in U, \text{ und} \\ 1 & x \in V\ . \end{cases}$$

Dann ist f stetig, denn für alle offenen Mengen $W \subset \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(W)$ eine der offenen Mengen $\emptyset$, U, V oder $X = U \cup V$. Auf der anderen Seite gilt $0, 1 \in \operatorname{im} f$, da $U \neq \emptyset$ und $V \neq \emptyset$. Nach dem Zwischenwertsatz 3.29 muss f also alle Werte in $[0, 1]$ annehmen, im Widerspruch zur Konstruktion. Also ist jedes Intervall zusammenhängend. ☐

Die Richtung „$\Longleftarrow$“ hätten wir auch direkt wie im Beweis des Zwischenwertsatzes zeigen können. Den Zwischenwertsatz selbst hätten wir dann aus Satz 6.19 gefolgert.

6.18. Beispiel. Als Intervall ist $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ zusammenhängend, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ jedoch nicht. In Beispiel 3.25 haben wir etwa eine stetige Funktion auf $\mathbb{Q}$ mit Bild $\{0, 1\}$ konstruiert.

6.19. Satz. *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume und $F\colon X \to Y$ stetig. Wenn X zusammenhängend ist, dann ist auch $\operatorname{im} F \subset Y$ zusammenhängend.*

Beweis. Wäre $\operatorname{im} F$ nicht zusammenhängend, dann gäbe es U, $V \subset \operatorname{im} F$ offen mit $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$ und $\operatorname{im} F = U \mathbin{\dot\cup} V$. Dann wären auch $F^{-1}(U)$, $F^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X \setminus \{\emptyset\}$ mit $X = F^{-1}(U) \mathbin{\dot\cup} F^{-1}(V)$. Also wäre X dann auch nicht zusammenhängend. ☐

Als Beispiel vergleiche man diesen Satz mit Folgerung 3.32. Wir können manche Sätze über Intervalle auch als Sätze über zusammenhängende Mengen verstehen, beispielsweise den Zwischenwertsatz 3.29 selbst oder Folgerung 5.25 (1). Später werden wir ein Kriterium benötigen, um zusammenhängende Mengen zu erkennen.

6.20. Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *wegzusammenhängend,* wenn zu je zwei Punkten x, $y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ existiert. Eine solche Abbildung heißt auch *Weg* oder *Kurve* von x nach y.

6.21. Satz. *Jeder wegzusammenhängende topologische Raum ist zusammenhängend.*

Beweis. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ nicht zusammenhängend, dann existieren U, $V \in \mathcal{O}_X \setminus \{\emptyset\}$ mit $X = U \mathbin{\dot\cup} V$. Wir wählen $x \in U$ und $y \in V$. Sei $\gamma\colon [0, 1] \to X$ eine Abbildung mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Wäre γ stetig, so wäre $[0, 1]$ nicht zusammenhängend, da $[0, 1] = \gamma^{-1}(U) \mathbin{\dot\cup} \gamma^{-1}(V)$ mit $\gamma^{-1}(U)$, $\gamma^{-1}(V) \in \mathcal{O}_{[0,1]} \setminus \{\emptyset\}$. Also existiert kein Weg von x nach y, und X ist nicht wegzusammenhängend. ☐

6.22. Beispiel. Die Umkehrung gilt nicht. Sei etwa

$$X = \underbrace{\left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x} \right) \,\middle|\, x > 0 \right\}}_{A} \cup \underbrace{(\{0\} \times [-1, 1])}_{B} \subset \mathbb{R}^2$$

versehen mit der Unterraumtopologie.

Wir nehmen an, dass es U, $V \in \mathcal{O}_X \setminus \{0\}$ gibt, so dass $X = U \dot\cup V$. In der Unterraumtopologie auf B sind $U \cap B$ und $V \cap B$ beide offen. Da B ein Intervall und daher nach Satz 6.17 zusammenhängend ist, folgt $B \subset U$ oder $B \subset V$. Sei etwa $B \subset U$. Dann enthält U eine Umgebung von $(0, 0) \in B$, es folgt $U \cap A \neq \emptyset$. Aber auch die Menge A lässt sich durch Inklusion und Projektion $\pi_1 \circ \iota$ auf die erste Koordinate stetig umkehrbar auf das Intervall $(0, \infty)$ abbilden. Wie oben folgt $A \subset U$ oder $A \subset V$, wegen $U \cap A \neq \emptyset$ also $A \subset U$. Aber dann muss V leer sein, im Widerspruch zur Annahme.

Wir zeigen jetzt, dass es keinen Weg γ von $(0, 0)$ nach $\left(\frac{2}{\pi}, 1\right)$ gibt. Denn sei γ solch ein Weg, dann wäre die erste Komponente $\gamma_1 = \pi_1 \circ \iota \circ \gamma$ nach Satz 6.13 stetig. Wir setzen $t_0 = 1$, so dass $\gamma_1(t_0) = \frac{2}{\pi}$. Nach dem Zwischenwertsatz finden wir für $n \geq 1$ induktiv $t_n \in (0, t_{n-1})$ mit $\gamma_1(t_n) = \frac{2}{(2n+1)\pi}$. Nach dem Monotoniekriterium 2.29 konvergiert die Folge (t_n) gegen einen Grenzwert t_∞, aber der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_2(t_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{\gamma_1(t_n)} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{2n+1}{2}\,\pi\right) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

existiert nicht. Also kann γ_2 bei t_∞ nicht folgenstetig, und daher wegen Satz 3.8 auch nicht stetig sein. Somit kann es keinen Weg γ von $(0, 0)$ nach $\left(\frac{2}{\pi}, 1\right)$ geben, der Raum X ist also nicht wegzusammenhängend.

6.23. Bemerkung. Sei allerdings $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, dann ist X auch wegzusammenhängend. Das liegt daran, dass sich jeder Weg in X von x nach y zu jedem Punkt z in einer kleinen Umgebung von y verlängern lässt (Übung).

Wir erinnern uns jetzt an den Beweis von Lemma 2.15, wonach konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ einen eindeutigen Grenzwert besitzen, und an die zugrunde liegende Eigenschaft aus Bemerkung 2.6.

6.24. Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ hat die *Hausdorff-Eigenschaft*, wenn zu je zwei Punkten x, $y \in X$ mit $x \neq y$ offene Mengen $U, V \in \mathcal{O}_X$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$ existieren. Ein topologischer Raum mit Hausdorff-Eigenschaft heißt auch *Hausdorff-Raum*.

6.25. Beispiel. (1) Nach Bemerkung 2.6 ist $\overline{\mathbb{R}}$ ein Hausdorff-Raum.
(2) Sei (M, d) ein metrischer Raum, und seien x, $y \in M$ mit $x \neq y$. Dann gilt $d(x, y) \neq 0$ aufgrund der Positivität der Metrik. Setze $\varepsilon = \frac{1}{2}\, d(x, y)$ falls $d(x, y) \neq \infty$ und $\varepsilon = 1$ sonst, und $U = B_\varepsilon(x)$, $V = B_\varepsilon(y) \in \mathcal{O}_M$, dann folgt $U \cap V = \emptyset$ aus der Dreiecksungleichung. Also ist jeder metrische Raum ein Hausdorff-Raum.

6.26. Bemerkung. In Übung 3 von Blatt 7 beweisen wir Folgendes.

(1) Jeder Unterraum eines Hausdorff-Raumes ist wieder ein Hausdorff-Raum.
(2) Jedes Produkt von Hausdorff-Räumen ist wieder ein Hausdorff-Raum.

Wir definieren Häufungspunkte, Konvergenz und Grenzwerte von Folgen in topologischen Räumen über den Umgebungsbegriff wie in Definition 2.12. Damit lässt sich Lemma 2.15 auf Hausdorff-Räume verallgemeinern.

6.27. Lemma. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Hausdorff-Raum, und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X. Dann ist ihr Grenzwert der einzige Häufungspunkt und insbesondere eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei $x \in X$ Grenzwert der Folge (a_n) und sei $y \in X$ mit $x \neq y$. Dann existieren disjunkte Umgebungen U von x und V von y nach Definition 6.24. Da (a_n) gegen x konvergiert, gilt $a_n \in U$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, somit gilt $a_n \in V$ für höchstens endlich viele n. Also ist y kein Häufungspunkt, und erst recht kein Grenzwert der Folge. □

6.28. Beispiel. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Dann konvergiert jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gegen jeden Punkt $x \in X$ in der Klumpentopologie $\{\emptyset, X\}$ auf X, da alle Folgenglieder in der einzigen Umgebung X von x liegen. In der Tat erfüllt $(X, \{\emptyset, X\})$ die Hausdorff-Eigenschaft nur, wenn X höchstens ein Element enthält.

Nachdem wir einen topologischen Rahmen für den Zwischenwertsatz gefunden haben, wollen wir jetzt auch Kompaktheit topologisch beschreiben. Dazu erinnern wir uns zunächst an die Definition 3.37 der Folgenkompaktheit. Wir geben einen weiteren Kompaktheitsbegriff an, der für metrische Räume mit Folgenkompaktheit übereinstimmt. Dazu benötigen wir zunächst ein paar neue Begriffe.

6.29. Definition. Es sei X eine Menge, dann heißt $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ eine *Überdeckung* von X, wenn $\bigcup \mathcal{U} = X$. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, dann heißt eine Überdeckung $\mathcal{U}$ *offen,* wenn alle $U \in \mathcal{U}$ offen sind. Eine Überdeckung heißt *endlich,* wenn sie nur endlich viele Mengen enthält. Eine *Teilüberdeckung* von $\mathcal{U}$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{U}$, die immer noch eine Überdeckung von X ist.

Ein topologischer Raum X heißt *kompakt,* wenn er die Hausdorff-Eigenschaft erfüllt und jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Sei schließlich (M, d) ein metrischer Raum. Die *Lebesgue-Zahl* einer Überdeckung ist definiert als

$$\sup\{\, r > 0 \mid \text{für alle } x \in M \text{ existiert } U \in \mathcal{U} \text{ mit } B_r(x) \subset U \,\} \in \{-\infty\} \cup (0, \infty] \,.$$

Wenn diese Zahl größer als 0 ist, sagt man auch, dass *$\mathcal{U}$ eine Lebesgue-Zahl besitzt.*

Die obige Überdeckungseigenschaft heißt auch *Heine-Borel-Eigenschaft.* In der Literatur wird der Begriff „kompakt“ manchmal auch nur über die Heine-Borel- und ohne die Hausdorff-Eigenschaft definiert. Viele der folgenden Sätze gelten dann immer noch analog, allerdings gilt Lemma 6.36 unten dann beispielsweise nicht mehr.

6.30. Satz (Lebesguescher Überdeckungssatz). *Es sei (M,d) ein folgenkompakter metrischer Raum, dann besitzt jede offene Überdeckung von M eine Lebesgue-Zahl.*

Beweis. Es sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung. Jeder Punkt $x \in M$ ist in einer Menge $U \in \mathcal{U}$ enthalten, und da U offen ist, ist U Umgebung von x, also existiert $r > 0$ mit $B_r(x) \subset U$. Wir definieren Funktionen $r\colon M \to (0,\infty]$ und $f\colon M \to (0,1] \subset \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} & r(x) = \sup\{\, r > 0 \mid \text{es existiert } U \in \mathcal{U} \text{ mit } B_r(x) \subset U \,\} \\ \text{und}\qquad & f(x) = \min\{r(x), 1\}\ . \end{aligned}$$

Sei $B_r(x) \subset U \in \mathcal{U}$ und $y \in M$ mit $d(x,y) < r(x)$, dann folgt

$$B_{r-d(x,y)}(y) \subset B_r(x) \subset U$$

aus der Dreiecksungleichung. Nach Übergang zu den Suprema der Radien gilt $r(y) \geq r(x) - d(x,y)$. Aber $r(y) \geq r(x) - d(x,y)$ gilt erst recht, wenn $d(x,y) \geq r(x)$, also $r(x) - d(x,y) \leq 0$. Durch Vertauschen von x und y folgt genauso $r(x) \geq r(y) - d(x,y)$, somit

$$|r(x) - r(y)| \leq d(x,y)\ .$$

Aus Satz 3.8 folgt, dass r und damit auch f stetig ist. Da M folgenkompakt ist, besitzt f ein Minimum $r > 0$ nach Satz 3.40. Falls $r < 1$ ist, ist r die Lebesgue-Zahl der Überdeckung. Ansonsten ist $r = 1$ und die Lebesgue-Zahl ist mindestens 1. □

6.31. Satz. *Ein metrischer Raum M ist genau dann kompakt, wenn er folgenkompakt ist.*

Beweis. Zu „$\Longrightarrow$“ nehmen wir an, dass es eine Folge $(x_n)_n$ in M gibt, die keinen Häufungspunkt hat. Dann existiert für jeden Punkt $x \in M$ ein $r_x > 0$, so dass $B_{r_x}(x)$ nur endlich viele Folgenglieder enthält. Wir erhalten eine offene Überdeckung

$$\mathcal{U} = \{\, B_{r_x}(x) \mid x \in M \,\}\ .$$

Jede endliche Teilmenge von $\mathcal{U}$ trifft nur endlich viele Folgenglieder, kann also M nicht überdecken. Also ist M nicht kompakt.

Zu „$\Longleftarrow$“ sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von M. Diese Überdeckung besitzt eine Lebesgue-Zahl $r > 0$ nach Satz 6.30. Wir wählen $0 < \varepsilon < r$. Wenn es eine endliche Teilmenge $Z \subset M$ gibt, so dass

$$\bigcup_{x \in Z} B_\varepsilon(x) = M\ ,$$

dann wird M bereits von endlich vielen $U_x \in \mathcal{U}$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U$ und $x \in Z$ überdeckt. Da metrische Räume nach Beispiel 6.25(2) Hausdorff-Räume sind, sind wir fertig.

Ansonsten können wir der Reihe nach Punkte $x_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wählen, so dass $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon$ für alle $m \neq n$. Aber dann kann die Folge $(x_n)_n$ keine Cauchy-Folge als Teilfolge haben, also auch keinen Häufungspunkt, im Widerspruch zu unser Annahme. $\square$

Für metrische Räume dürfen wir also die Begriffe „kompakt" und „folgenkompakt" als Synonyme verwenden. Erst viel später im Studium werden Sie lernen, dass für beliebige topologische Räume der Begriff „kompakt" stärker ist als „folgenkompakt". Wir sehen am Ende dieses Abschnitts, dass Teilmengen des $\Bbbk^n$ genau dann kompakt sind, wenn sie beschränkt und abgeschlossen sind.

6.32. Satz. *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, sei $F\colon X \to Y$ stetig, sei X kompakt und Y ein Hausdorff-Raum. Dann ist* $\operatorname{im} F \subset Y$ *ebenfalls kompakt.*

Beweis. Als Teilmenge eines Hausdorff-Raums ist $\operatorname{im} f$ ebenfalls Hausdorff-Raum, siehe Bemerkung 6.26. Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $\operatorname{im}(F)$. Nach Satz 6.11 ist $F\colon X \to \operatorname{im} F$ stetig. Also ist $F^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ für alle $U \in \mathcal{U}$. Außerdem gilt

$$X = F^{-1}(\operatorname{im} F) = F^{-1}\Big(\bigcup \mathcal{U}\Big) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} F^{-1}(U) ,$$

also ist $\mathcal{V} = \{F^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ mit

$$X = F^{-1}(U_1) \cup \dots \cup F^{-1}(U_n) .$$

Zu $y \in \operatorname{im} F$ existiert $x \in X$ mit $F(x) = y$ und k, so dass $x \in F^{-1}(U_k)$, also $y \in U_k$. Es folgt

$$\operatorname{im}(F) = U_1 \cup \dots \cup U_n .$$

Somit besitzt $\mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung. Also ist $\operatorname{im} F$ kompakt. $\square$

Wir verallgemeinern Satz 3.40 über die Existenz von Extrema.

6.33. Folgerung. *Jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten topologischen Raum besitzt ein Minimum und ein Maximum.*

Beweis. Sei $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to \mathbb{R}$ stetig und X kompakt, dann ist $\operatorname{im} f$ kompakt, also beschränkt und abgeschlossen nach dem Satz 3.38 von Bolzano-Weierstraß. Daher existieren $\min(\operatorname{im} f)$ und $\max(\operatorname{im} f)$ in $\operatorname{im} f$, das heißt, Infimum und Supremum von f werden angenommen. $\square$

Die nächste Folgerung zeigt unter anderem, dass kompakte Teilmengen des $\Bbbk^n$ stets beschränkt und abgeschlossen sind.

6.34. Folgerung. *Sei (M,d) ein metrischer Raum mit $d(x,y)<\infty$ für alle x, $y\in M$, und sei $X\subset M$ ein kompakter Unterraum. Dann ist X beschränkt und abgeschlossen.*

Im Folgenden schreiben wir

$$D_r(x)=\bigl\{\,y\in M\bigm| d(x,y)\le r\,\bigr\}\;,$$

eine alternative Schreibweise ist $B_{\le r}(x)=D_r(x)$. Wir schreiben $D_r^M(x)$ um zu betonen, dass es sich um einen metrischen Ball in M handelt.

Beweis. Die leere Menge ist beschränkt und abgeschlossen. Fall $X\neq\emptyset$, wähle $x\in X$. Nach Beispiel 3.9(3) ist die Funktion $d(x,\,\cdot\,)\colon X\to\mathbb{R}$ stetig, also nimmt sie ihr Maximum $C\in\mathbb{R}$ an. Es folgt $d(x,y)\le C$ für alle $y\in X$, also

$$X\subset D_C^M(x)\;,$$

also ist X beschränkt nach Definition 2.46.

Um zu zeigen, dass X abgeschlossen ist, zeigen wir, dass jeder Punkt $z\in M\setminus X$ eine offene Umgebung besitzt, die X nicht trifft. Dazu wählen wir wie in Beispiel 6.25(2) zu jedem $x\in X$ Umgebungen U_x von x und V_x von z mit $U_x\cap V_x=\emptyset$. Da

$$\mathcal{U}=\bigl\{\,U_x\bigm| x\in X\,\bigr\}$$

die Menge X überdeckt, gibt es endlich viele Punkte $x_1,\,\dots,\,x_n\in X$, so dass

$$X\subset U:=U_{x_1}\cup\dots\cup U_{x_n}\;.$$

Außerdem ist

$$V:=V_{x_1}\cap\dots\cap V_{x_n}$$

eine offene Umgebung von z mit $U\cap V=\emptyset$, also besitzt z eine Umgebung in $M\setminus X$. $\square$

6.35. Bemerkung. Der obige Beweis zeigt etwas mehr, nämlich dass zu jeder kompakten Teilmenge $Y\subset X$ und jedem Punkt $z\in X\setminus Y$ disjunkte offene Mengen U, $V\subset X$ mit $Y\subset U$ und $z\in V$ gibt. Man sagt auch, z und Y lassen sich *durch disjunkte offene Mengen trennen.* Genauso lassen sich zwei disjunkte kompakte Teilmengen eines Hausdorff-Raumes durch disjunkte offene Mengen trennen (Übung).

Für metrische Räume (M,d) gilt sogar, dass sich je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen A, $B\subset M$ durch disjunkte offene Mengen U, $V\subset M$ mit $A\subset U$ und $B\subset V$ trennen lassen — aber das beweisen wir hier nicht.

6.36. Lemma. *Eine Teilmenge eines kompakten Raumes ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist.*

Beweis. Es sei $(X,\mathcal{O}_X)$ ein kompakter Raum und Y ein kompakter Unterraum. Da X ein Hausdorff-Raum ist, folgt wie im Beweis von Folgerung 6.34, dass Y abgeschlossen ist, was „$\Longrightarrow$“ beweist.

Zu „$\Longleftarrow$“ sei $Y \subset X$ abgeschlossen, und sei $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von Y. Zu jedem $V \in \mathcal{V}$ existiert nach Definition 6.9 der Unterraumtopologie eine offene Menge $U_V \in \mathcal{O}_X$ mit $U_V \cap Y = V$. Wir erhalten eine offene Überdeckung

$$\mathcal{U} = \{U_V \mid V \in \mathcal{V}\} \cup \{X \setminus Y\}$$

von X, also existiert eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{U}'$ von $\mathcal{U}$, und damit auch eine endliche Teilüberdeckung

$$\mathcal{V}' = \{\, V \in \mathcal{V} \mid U_V \in \mathcal{U}' \,\} .$$

von $\mathcal{V}$. Ausserdem ist Y nach Übung 3 von Blatt 7 ein Hausdorff-Raum, also kompakt. □

6.37. Satz. *Das Produkt zweier kompakter topologischer Räume ist wieder kompakt.*

Beweis. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ kompakte topologische Räume, und sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $X \times Y$. Zu jedem Punkt $(x, y) \in X \times Y$ existieren dann $U_{x,y} \in \mathcal{U}$, $V_{x,y} \in \mathcal{O}_X$ und $W_{x,y} \in \mathcal{O}_Y$, so dass

$$(x, y) \in V_{x,y} \times W_{x,y} \subset U_{x,y} .$$

Da X kompakt ist, gibt es zu festem $y \in Y$ endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_k$, so dass $X = V_{x_1,y} \cup \dots \cup V_{x_k,y}$. Setze

$$W_y = W_{x_1,y} \cap \dots \cap W_{x_k,y} \in \mathcal{O}_Y ,$$

dann gilt also

$$X \times W_y \subset \bigcup_{i=1}^{k} (V_{x_i,y} \times W_{x_i,y}) \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i,y} .$$

Da Y kompakt ist, wird Y von endlich vielen der W_y überdeckt. Also wird $X \times Y$ von endlich vielen $X \times W_y$, und somit von endlichen vielen $U_{x,y} \in \mathcal{U}$ überdeckt. Nach Bemerkung 6.26 ist $X \times Y$ ausserdem ein Hausdorff-Raum, also kompakt. □

6.38. Folgerung. *Für eine Teilmenge $A \subset \Bbbk^n$ sind äquivalent:*

(1) *A ist abgeschlossen und beschränkt,*
(2) *A ist kompakt,*
(3) *A ist folgenkompakt.*

Die Äquivalenz von (1) und (2) heißt auch *Satz von Heine-Borel*, die Äquivalenz von (1) und (3) auch *Satz von Bolzano-Weierstraß*. Den Satz von Bolzano-Weierstraß für $n = 1$ hatten wir bereits in Folgerung 2.37 und Satz 2.48 kennengelernt.

Beweis. Wir werden in Bemerkung 6.42 und Satz 6.45 sehen, dass $\Bbbk^n$ mit der Produkttopologie aus Bemerkung 6.14 ein metrischer Raum ist. Also folgt (2) $\Longrightarrow$ (1) aus Folgerung 6.34. Sei jetzt $A \subset \Bbbk^n$ beschränkt, dann existiert $C > 0$ mit $A \subset (D_C(0))^n$. Als Produkt der kompakten Mengen $D_C(0)$ ist $(D_C(0))^n$ nach Satz 6.37 kompakt. Ist A abgeschlossen, dann ist A nach

Lemma 6.36 auch kompakt, und wir erhalten die Äquivalenz von (1) und (2). Die Äquivalenz von (2) und (3) folgt aus Satz 6.31. □

6.2. Normierte Vektorräume

Um eine Ableitung für Funktionen zwischen Vektorräumen definieren zu können, müssen wir Längen von Vektoren messen können. Wir führen jetzt eine Klasse von Metriken auf Vektorräumen ein, die für unsere Zwecke besonders gut geeignet sind.

6.39. Definition. Eine *Norm* auf einem $\Bbbk$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\|\cdot\|\colon V \to [0,\infty]$, mit den folgenden Eigenschaften:

(1) *Positivität*: $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$, und $\|v\| > 0$ falls $v \neq 0$;
(2) *Homogenität*: $\|rv\| = |r| \cdot \|v\|$ für alle $v \in V$ und $r \in \Bbbk$;
(3) *Dreiecksungleichung*: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$.

Ein *normierter Vektorraum* $(V, \|\cdot\|)$ ist ein Vektorraum V mit einer Norm $\|\cdot\|$.

6.40. Beispiel. Wir kennen bereits folgende Normen:

(1) Die p-Norm $\|\cdot\|_p$ auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ aus Definition 5.34, insbesondere die Euklidische Norm $\|\cdot\|_2$. Während Positivität und Homogenität leicht einzusehen sind, folgt die Dreiecksungleichung aus der Minkowski-Ungleichung 5.37.
(2) Für $p = \infty$ definieren wir die *Maximumsnorm* $\|\cdot\|_\infty$ oder auch $\|\cdot\|_{\max}$ durch
$$\left\|\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right\|_{\max} = \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\}\ .$$
(3) Die Supremumsnorm $\|\cdot\|_{\sup}$ auf $\operatorname{Abb}(M;\mathbb{R})$ und $\operatorname{Abb}(M;\mathbb{C})$ für jede Menge M aus Definition 4.4. Für einen topologischen Raum M heißt die Einschränkung von $\|\cdot\|_{\sup}$ auf $\mathcal{C}^0(M;\Bbbk) = \mathcal{C}(M;\Bbbk)$ auch $\mathcal{C}^0$-*Norm*.
(4) Sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall. Wir haben die L^p-Norm auf $R(I;\Bbbk)/{\sim}$ in Definition 5.39 defniert. Dabei ist $f \sim g$ genau dann, wenn f und g an allen Stellen die gleichen links- und rechtsseitigen Grenzwerte haben, also $f_-(x) = g_-(x)$ für alle $x \in (a,b]$ und $f_+(x) = g_+(x)$ für alle $x \in [a,b)$. Auf $R(I;\Bbbk)/{\sim}$ ist die L^p-Norm wohldefiniert und positiv (Übung). Die Dreiecksungleichung folgt wieder aus der Minkowski-Ungleichung (Übung).

6.41. Bemerkung. Normen liefern spezielle Metriken auf Vektorräumen.

(1) Zu jeder Norm $\|\cdot\|$ auf V erhält man eine Metrik $d\colon V \times V \to [0,\infty]$ durch $d(v,w) = \|v - w\|$.

    Aus der Positivität (1) folgt die Positivität von d, aus Homogenität (2) die Symmetrie, und aus der Dreiecksungleichung (3) für $\|\cdot\|_p$ folgt die für d.

(2) Für jede solche Metrik gilt ausserdem

$$d(v+x,w+x)=d(v,w) \text{ und } d(v,v+rx)=|r|\,d(v,v+x)$$

für alle v, w, $x \in V$ und alle $r \in \Bbbk$.

Wenn eine Metrik auf V umgekehrt diese Eigenschaft besitzt, dann kommt sie von der Norm $\|\cdot\|$ mit

$$\|v\| = d(0,v)\ .$$

Zur Euklidischen Norm gehört die Euklidische Metrik, zur Supremumsnorm die Supremumsmetrik aus Definition 3.46.

Also induziert jede Norm auf V eine Metrik auf V, und nach Beispiel 6.4 also auch eine Topologie, die *Norm-Topologie.*

6.42. Bemerkung. Der Raum $\Bbbk^n$ mit der Maximumsnorm $\|\cdot\|_{\max}$ aus Beispiel 6.40 (2) trägt die Produkttopologie wie in Bemerkung 6.14. Für $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{smallmatrix}\right) \in \Bbbk^n$ gilt nämlich

$$B_r(x) = \bigl\{ y \in \Bbbk^n \bigm| |x_i - y_i| < r \text{ für } i = 1, \dots, n \bigr\} = B_r(x_1) \times \dots \times B_r(x_n)\ .$$

Das ist ein Produkt offener Mengen, also ist $B_r(x)$ in der Produkttopologie offen.

Sei umgekehrt U Umgebung von x in der Produkttopologie, dann existieren $r_1, \dots, r_n > 0$, so dass

$$B_{r_1}(x_1) \times \dots \times B_{r_n}(x_n) \subset U\ .$$

Setze $r = \min\{x_1, \dots, x_n\} > 0$, dann ist

$$B_r(x) \subset B_{r_1}(x_1) \times \dots \times B_{r_n}(x_n) \subset U\ ,$$

also ist U auch Umgebung bezüglich der Maximumsnorm.

6.43. Definition. Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf V heißen *äquivalent*, wenn sie die gleiche Topologie auf V induzieren.

Es ist leicht zu sehen, dass Äquivalenz von Normen tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist .

6.44. Lemma. *Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf V sind genau dann äquivalent, wenn es Konstanten $0 < c < C$ gibt, so dass*

$$c\|v\| \le \|v\|' \le C\|v\| \qquad \text{für alle } v \in V\ .$$

Beweis. Wir bezeichnen die Metriken zu $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ mit d und d', und die zugehörigen Bälle mit $B_r(v)$ bzw. $B'_r(v)$. Es gilt also

$$B_r(v) = \{ w \in V \mid d(v,w) < r \} = \{ v + x \mid x \in B_r(0) \}\ .$$

Wegen Bemerkung 6.41 (2) reicht es, Bälle um 0 zu betrachten. Wir schließen „$\Longleftarrow$“ aus den Inklusionen

$$B_{\frac{r}{C}}(0) \subset B'_r(0) \subset B_{\frac{r}{c}}(0)\ .$$

Insbesondere ist jeder Ball $B_r(v)$ in der Topologie zu $\|\cdot\|'$ offen und umgekehrt, wir erhalten also die gleichen offenen Mengen.

Zu „$\Longrightarrow$“ überlegen wir uns, dass $B_s(0)$ in der Topologie zu $\|\cdot\|'$ offen ist. Also existiert $r > 0$ mit

$$B'_r(0) \subset B_s(0) \; .$$

Setze $c = \frac{r}{s}$. Wegen der Homogenität der Normen folgt

$$B'_r(0) \subset B_{\frac{c}{r}}(0) \text{ für alle } r > 0 \; ,$$

und wir erhalten die Ungleichung $c\|v\| \leq \|v\|'$. Die zweite Ungleichung folgt genauso, indem wir die Rollen von $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ vertauschen. □

Auf unendlich-dimensionalen Vektorräumen gibt es viele verschiedene, paarweise nicht äquivalente Normen. Auf $\Bbbk^n$ ist das glücklicherweise anders, wie das folgende Resultat zeigt.

6.45. Satz. *Alle Normen auf einem endlich-dimensionalen $\Bbbk$-Vektorraum sind äquivalent.*

Beweis. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass jeder endlich-dimensionale $\Bbbk$-Vektorraum V zu $\Bbbk^n$ mit $n = \dim V$ isomorph ist. Sei $F\colon \Bbbk^n \to V$ ein Isomorphismus, und seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf V, dann erhalten wir Normen auf $\Bbbk^n$ durch

$$\|x\|_F = \|F(x)\| \quad \text{und} \quad \|x\|'_F = \|F(x)\|' \; .$$

Aus Lemma 6.44 folgt, dass $\|\cdot\|_F$ und $\|\cdot\|'_F$ auf $\Bbbk^n$ genau dann äquivalent sind, wenn $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf V äquivalent sind. Also reicht es, die Vektorräume $\Bbbk^n$ für $n \in \mathbb{N}$ zu betrachten. Da Normäquivalenz eine Äquivalenzrelation ist, also insbesondere transitiv ist, reicht es, eine gegebene Norm $\|\cdot\|$ mit der 1-Norm aus Definition 5.34 zu vergleichen.

Seien

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} , \dots , e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \Bbbk^n$$

die Standardbasisvektoren, dann setze

$$C = \max\{\|e_1\|, \dots, \|e_n\|\} \; .$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt für $v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$ induktiv, dass

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^k v_i e_i \right\| &\leq \left\| \sum_{i=1}^{k-1} v_i e_i \right\| + \|v_k e_k\| \leq C \cdot \sum_{i=1}^{k-1} |v_i| + |v_k| \cdot \|e_k\| \\ &\leq C \cdot \sum_{i=1}^{k} |v_i| = C \cdot \left\| \sum_{i=1}^k v_i e_i \right\|_1 \; . \end{aligned}$$

Also gilt $\|v\| \leq C \cdot \|v\|_1$ für alle $v \in \Bbbk^n$.

Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\big|\|v\| - \|w\|\big| \leq \|v - w\| \leq C \cdot \|v - w\|_1 \;,$$

also ist $\|\cdot\|$ nach Satz 3.8 stetig in der von $\|\cdot\|_1$ induzierten Topologie auf $\Bbbk^n$. Nach Bemerkung 6.42 ist $\|\cdot\|_1$ also stetig in der Produkttopologie.

Für die umgekehrte Abschätzung betrachte die Menge

$$\begin{aligned} A &= \{v \in \Bbbk^n \mid \|v\|_1 = 1\} \\ &= \{v \in \Bbbk^n \mid |v_i| \leq 1 \text{ für alle } i, |v_i| = 1 \text{ für ein } i\} \;. \end{aligned}$$

Da A abgeschlossen und beschränkt ist, ist A nach Folgerung 6.38 kompakt bezüglich der Produkttopologie. Nach Satz 3.40 nimmt $\|\cdot\|$ auf A ein Minimum c an. Da 0 nicht in A liegt, folgt $c > 0$ aus der Positivität von $\|\cdot\|$. Wegen der Homogenität der Normen folgt $c\|v\|_1 \leq \|v\|$ für alle $v \in \Bbbk^n$. Somit ist $\|\cdot\|$ zu $\|\cdot\|_1$ äquivalent. □

In Zukunft können wir auf $\Bbbk^n$ also jede beliebige Norm wählen und erhalten stets die gleiche Topologie. Daher sprechen wir nur von *der* Topologie des $\Bbbk^n$; nach Bemerkung 6.42 ist das die Produkttopologie auf $\Bbbk^n = \Bbbk \times \cdots \times \Bbbk$.

6.46. Lemma. *Seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume. Dann ist eine lineare Abbildung $F\colon V \to W$ genau dann stetig, wenn*

$$\sup\big\{\|F(v)\|_W \;\big|\; v \in V,\ \|v\|_V \leq 1\big\} < \infty \;.$$

Beweis. Wir gehen wie im Beweis von Lemma 6.44 vor. Zu „$\Longleftarrow$“ sei $\|F(v)\|_W \leq C$ für alle $v \in V$ mit $\|v\|_V \leq 1$. Für beliebige v, $w \in V$ mit $v \neq w$ folgt dann

$$\begin{aligned} d_W(F(v), F(w)) &= \|F(v) - F(w)\|_W \\ &= \|v - w\|_V \cdot \Bigg\|F\bigg(\underbrace{\frac{v - w}{\|v - w\|_V}}_{\|\cdot\|_V = 1}\bigg)\Bigg\|_W \leq C \cdot d_V(v, w) \;, \end{aligned}$$

also ist F stetig nach Satz 3.8.

Zu „$\Longrightarrow$“ sei F stetig. Da $B_1^W(0)$ in W offen ist, ist auch das Urbild offen. Also existiert $\varepsilon > 0$ mit

$$B_\varepsilon^V(0) \subset F^{-1}\left(B_1^W(0)\right) \;.$$

Für $v \in V$ mit $\|v\|_V \leq 1$ folgt also

$$\|F(v)\|_W = \frac{2}{\varepsilon}\Big\|F\Big(\underbrace{\frac{\varepsilon v}{2}}_{\in B_\varepsilon^V(0)}\Big)\Big\|_W \leq \frac{2}{\varepsilon} < \infty \;.$$

Also ist das Supremum endlich. □

6.47. Definition. Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte $\Bbbk$-Vektorräume, dann bezeichne $\mathcal{L}(V,W)$ den Raum der linearen Abbildungen von V nach W. Der Raum aller stetigen linearen Abbildungen wird mit $\mathcal{B}(V,W)$ bezeichnet. Wir definieren die *Operatornorm* auf $\mathcal{B}(V,W)$ durch

$$\|F\|_{\mathrm{op}} = \sup\bigl\{\|F(v)\|_W \bigm| v \in V,\ \|v\|_V \le 1\bigr\} .$$

In der Literatur heißen stetige lineare Abbildungen auch „beschränkte lineare Abbildungen“, daher die Bezeichnung $\mathcal{B}(V,W)$. Der Begriff ist aber irreführend, denn für uns bedeuet „F beschränkt“ das gleiche wie „$\operatorname{im} F$ beschränkt“.

6.48. Bemerkung.

(1) Eine Funktion $f\colon M \to N$ in einen metrischen Raum N heißt beschränkt, wenn die Teilmenge $\operatorname{im}(f) \subset N$ beschränkt ist. Das Bild einer linearen Abbildung $F\colon V \to W$ zwischen normierten Vektorräumen ist nur beschränkt, wenn F die Nullabbildung ist. Eine lineare Abbildung F ist genau dann stetig, wenn das Bild $\operatorname{im}\bigl(F|_{B_1^V(0)}\bigr)$ der Einheitskugel beschränkt ist.
(2) Sei $V = \Bbbk^n$ endlich dimensional und $F\colon \Bbbk^n \to W$ linear mit $\|F(v)\| < \infty$ für alle $v \in V$. Dann existiert $C > 0$ mit $\|F(e_i)\|_W \le C$ für $i = 1$, $\dots$, n. Wie im Beweis von Lemma 6.45 schließen wir, dass $\|F(v)\|_W \le C\,\|v\|_1$. Insbesondere ist jede lineare Abbildung $F\colon \Bbbk^n \to W$ stetig.
(3) Der Raum $\mathcal{L}(\Bbbk^n, \Bbbk^m) = \mathcal{B}(\Bbbk^n, \Bbbk^m)$ ist zum Vektorraum $M_{m,n}(\Bbbk)$ der $m \times n$-Matrizen isomorph. Insbesondere ist er endlich-dimensional. Nach Satz 6.45 ist die Operatornorm bezüglich zweier beliebiger Normen auf $\Bbbk^n$ und $\Bbbk^m$ also äquivalent zu jeder anderen Norm auf $\mathcal{L}(\Bbbk^n, \Bbbk^m)$.

6.49. Lemma. *Es seien U, V, W normierte Vektorräume und $F \in \mathcal{B}(V,W)$, $G \in \mathcal{B}(U,V)$ stetige lineare Abbildungen. Dann ist $F \circ G$ stetig mit*

$$\|F \circ G\|_{\mathrm{op}} \le \|F\|_{\mathrm{op}} \cdot \|G\|_{\mathrm{op}} .$$

Beweis. Für $u \in U$ mit $\|u\|_U \le 1$ gilt

$$\|(F \circ G)(u)\|_W = \|G(u)\|_V \cdot \Biggl\|F\biggl(\underbrace{\frac{G(u)}{\|G(u)\|_V}}_{\in D_1^V(0)}\biggr)\Biggr\|_W \le \|G\|_{\mathrm{op}} \cdot \|F\|_{\mathrm{op}} . \qquad \square$$

Wir erinnern uns an die Begriffe Cauchy-Folge und metrische Vollständigkeit aus Definition 2.49.

6.50. Definition. Ein *Banach-Raum* ist ein vollständiger normierter Vektorraum.

6.51. Beispiel. Wir kennen bereits einige Banach-Räume.

(1) Die Räume $\Bbbk^n$ sind Banachräume. Sei dazu $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\Bbbk^n$. Wie im Beweis von Satz 2.51 ist jede Cauchy-Folge in $\Bbbk^n$ beschränkt und nimmt daher Werte in einem Kompaktum $D_C(0)$ an. Also existiert nach Folgerung 6.38 eine konvergente Teilfolge. Ihr Grenzwert ist dann bereits der Grenzwert der ganzen Cauchy-Folge.
(2) Für jede Menge M und $n \in \mathbb{N}$ ist der $\Bbbk$-Vektorraum $\operatorname{Abb}(M, \Bbbk^n)$, versehen mit der Supremumsnorm aus Definition 4.4 vollständig. Denn sei $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $\operatorname{Abb}(M, \Bbbk)$, dann ist $(f_n(x))_n$ für alle $x \in M$ eine Cauchy-Folge, konvergiert nach (1) also gegen einen Wert $f(x) \in \Bbbk^n$. Also konvergiert (f_n) gegen $f \colon M \to \Bbbk^n$, und zwar gleichmäßig.
(3) Sei (M, d) ein metrischer Raum, dann ist der $\Bbbk$-Vektorraum $\mathcal{C}(M, \Bbbk^n)$ der stetigen Abbildungen von M nach $\Bbbk^n$ mit der Supremumsnorm vollständig. Denn nach (2) hat jede Cauchy-Folge in $\mathcal{C}(M, \Bbbk^n)$ einen Grenzwert in $\operatorname{Abb}(M, \Bbbk^n)$. Nach Satz 3.48 ist der Grenzwert eine stetige Abbildung, also ein Element in $\mathcal{C}(M, \Bbbk^n)$.

6.3. Differenzierbare Abbildungen

Wir definieren einen geeigneten Ableitungsbegriff für Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen, die totale Differenzierbarkeit. Wir erinnern uns dazu an die Charakterisierung der Differenzierbarkeit von Funktionen in einer reellen Variablen in Lemma 5.3 (3). Wir können die Bedingung

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + a \cdot h + h \cdot r(h) \quad \text{und} \quad \lim_{h \to 0} r(h) = 0$$

auch umformulieren als

$$\lim_{h \to 0} \frac{h \cdot r(h)}{|h|} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - a \cdot h}{|h|} = 0 \,.$$

Der Grenzwert hier wie auch im Folgenden ist Grenzwert einer Funktion im Sinne von Definition 3.19. Insbesondere ist $h = 0$ ausgeschlossen. Es sei $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

6.52. Definition. Es seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume, $U \subset V$ offen und $x_0 \in U$. Eine Abbildung $F \colon U \to W$ heißt *total differenzierbar* bei x_0 mit *totaler Ableitung* $A \in \mathcal{B}(V, W)$, wenn

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0) - A(h)}{\|h\|_V} = 0 \,.$$

6.53. Bemerkung. (1) Anstelle einer Zahl ist die Ableitung hier eine lineare Abbildung, da sie aus dem Vektor $h \in V$ einen Vektor $A(h) \in W$ in

$$R(h) = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0) - A(h)}{\|h\|_V} \in W$$

machen muss. Wir müssen fordern, dass A stetig ist, um später Lemma 6.56 und die Kettenregel 6.57 beweisen zu können. Falls $V = \Bbbk^n$

und $W = \Bbbk^m$, können wir die totale Ableitung als Matrix $A \in M_{m\times n}(\Bbbk)$ auffassen und $A \cdot h$ für $A(h)$ schreiben.

(2) Äquivalent hätten wir schreiben können

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|F(x_0+h) - F(x_0) - A(h)\|_W}{\|h\|_V} = 0 \;.$$

Denn dazu muss man zeigen, dass zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $\|R(h)\|_W < \varepsilon$ für alle $h \in B_\delta^V(0) \setminus \{0\}$ existiert. Da U genau dann Umgebung von 0 in W ist, wenn ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon^W(0) \subset U$ existiert, ist der obige Grenzwert genau dann 0, wenn der entsprechende Grenzwert in Definition 6.52 verschwindet.

(3) Die totale Ableitung ist eindeutig. Denn wären A, $B \in \mathcal{B}(V,W)$ totale Ableitungen bei x_0, dann wäre

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h\to 0}\biggl(\frac{F(x_0+h) - F_0(x) - A\cdot h}{\|h\|_V} \\ &\qquad\qquad - \frac{F(x_0+h) - F_0(x) - B\cdot h}{\|h\|_V}\biggr) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(A-B)(h)}{\|h\|_V} = \lim_{h\to 0} (A-B)\left(\frac{h}{\|h\|_V}\right) \end{aligned}$$

Da auch für $h \to 0$ das Argument $\frac{h}{\|h\|_V}$ alle Vektoren der Länge 1 in V durchläuft, folgt aus der Linearität von $A - B$, dass $A - B = 0$, also $A = B$ gilt. Wir dürfen also $F'(x_0)$ für die totale Ableitung bei x_0 schreiben. In der Literatur finden sich auch dF_{x_0}, $DF(x_0)$ und ähnliche Schreibweisen.

(4) Falls V endlich-dimensional ist, zum Beispiel $V = \Bbbk^n$, ist es nach Satz 6.45 egal, welche Norm $\|\cdot\|_V$ wir in Definition 6.52 benutzen. Falls W endlich-dimensional ist, ist es für die Existenz des Limes egal, welche Norm $\|\cdot\|_W$ wir wählen. Außerdem ist dann jede lineare Abbildung von $V \to W$ stetig nach Bemerkung 6.48 (2). Im Allgemeinen hängt totale Differenzierbarkeit aber von den Normen $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_W$ ab.

6.54. Beispiel. (1) Jede konstante Abbildung ist total differenzierbar mit totaler Ableitung 0.

(2) Jede stetige lineare Abbildung $F \in \mathcal{B}(V,W)$ ist total differenzierbar an allen Stellen $x_0 \in V$ mit totaler Ableitung F, denn

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|F(x_0+h) - F(x_0) - F(h)\|_W}{\|h\|_V} = \lim_{h\to 0} 0 = 0 \;.$$

Beispiele sind neben Matrizen $A \in M_{m\times n}(\Bbbk)$, $A\cdot\Bbbk^n \to \Bbbk^m$ zum Beispiel die linearen Abbildungen

$$\frac{d}{dx}\colon \mathcal{C}^{k+1}(D,\Bbbk) \to \mathcal{C}^k(D,\Bbbk) \quad \text{und} \quad \int_a^b\colon (R([a,b],\Bbbk), \|\cdot\|_{\sup}) \to \Bbbk \;.$$

(3) Das Produkt $F\colon \Bbbk^2 \to \Bbbk$ mit $\binom{x}{y} \mapsto xy$ ist auf ganz $\Bbbk^2$ differenzierbar mit totaler Ableitung $(y_0, x_0) \in M_{1\times 2}(\Bbbk)$, denn für $h = \binom{r}{s} \in \Bbbk^2$ gilt

$$\begin{aligned} &F\begin{pmatrix} x_0 + r \\ y_0 + s \end{pmatrix} - F\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - (y_0, x_0)\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \\ &= (x_0 + r)(y_0 + s) - x_0 y_0 - r y_0 - x_0 s = r \cdot s \;, \end{aligned}$$

und bezüglich der Maximumsnorm auf $\Bbbk^2$ gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{|r \cdot s|}{\|h\|_{\max}} = \lim_{h\to 0} \frac{|r \cdot s|}{\max\{|r|, |s|\}} = \lim_{h\to 0} \min\{|r|, |s|\} = 0 \;.$$

6.55. Proposition. *Seien V, W normierte $\Bbbk$-Vektorräume, $U \subset V$ offen, seien F, $G\colon U \to W$ bei $x_0 \in U$ total differenzierbar, und seien r, $s \in \Bbbk$. Dann ist $rF + sG\colon U \to W$ bei $x_0 \in U$ total differenzierbar mit*

$$(rF + sG)'(x_0) = rF'(x_0) + sG'(x_0) \;.$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus Definition 6.52. □

6.56. Lemma. *Sei $F\colon U \to W$ bei $x_0 \in U$ total differenzierbar, dann ist F bei x_0 stetig.*

Beweis. Wir benutzen Satz 3.23. Es sei wieder

$$R(h) = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0) - F'(x_0)(h)}{\|h\|_V}$$

Für $x \in U$ gilt

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{h\to 0} F(x_0 + h) = \lim_{h\to 0} (F(x_0) + F'(x_0)(h) + \|h\|_V R(h)) = F(x_0) \;.$$

Also ist F bei x_0 stetig. □

6.57. Satz (Kettenregel). *Es seien X, Y, Z normierte Vektorräume, $U \subset X$, $V \subset Y$ offen, $G\colon U \to Y$ sei bei $x_0 \in U$ total differenzierbar mit $G(x_0) \in V$, und $F\colon V \to Z$ sei bei $G(x_0)$ total differenzierbar. Dann ist $F \circ G\colon G^{-1}(V) \to Z$ bei x_0 total differenzierbar mit*

$$(F \circ G)'(x_0) = F'(G(x_0)) \circ G'(x_0) \in \mathcal{B}(X, Z) \;.$$

Beweis. Da G nach Lemma 6.56 stetig ist, ist $G^{-1}(V)$ eine offene Umgebung von x_0. Indem wir U gegebenenfalls verkleinern, dürfen wir davon ausgehen, dass $\operatorname{im}(G|_U) \subset V$.

Wir setzen $y_0 = G(x_0)$ und schreiben wieder

$$\begin{aligned} G(x_0 + h) &= G(x_0) + G'(x_0)(h) + \|h\|_X R(h) \\ \text{und} \qquad F(y_0 + k) &= F(y_0) + F'(y_0)(k) + \|k\|_Y S(k) \;, \end{aligned}$$

dann lassen sich R, S bei 0 durch 0 stetig fortsetzen. Außerdem sei

$$k(h) = G'(x_0)(h) + \|h\|_X R(h) \;,$$

dann konvergiert auch $k(h)$ gegen 0 für $h \to 0$, da G' und R stetig sind. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}
&(F \circ G)(x_0 + h) - (F \circ G)(x_0) - (F'(G(x_0)) \circ G'(x_0))(h) \\
&= F(y_0 + G'(x_0)(h) + \|h\|_X R(h)) - F(y_0) - F'(y_0)(G'(x_0)(h)) \\
&= F'(y_0)(G'(x_0)(h) + \|h\|_X R(h)) + \|k(h)\|_Y S(k(h)) - F'(y_0)(G'(x_0)(h)) \\
&= \|h\|_X F'(y_0)(R(h)) + \|k(h)\|_Y S(k(h)) \;.
\end{aligned}$$

Da $G'(x_0)$ stetig und linear ist, gilt

$$\frac{\|k(h)\|_Y}{\|h\|_X} \le \underbrace{\frac{\|G'(x_0)(h)\|_Y}{\|h\|_X}}_{\le \|G'(x_0)\|_{\mathrm{op}}} + \underbrace{\|R(h)\|_Y}_{\to 0} < C < \infty$$

für eine geeignete Konstante C und alle kleinen $h \in X$. Jetzt folgt unsere Behauptung aus Bemerkung 6.53 (2), denn

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{\|(F \circ G)(x_0 + h) - (F \circ G)(x_0) - (F'(y_0) \circ G'(x_0))(h)\|_Z}{\|h\|_X} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\big\|\|h\|_X F'(y_0)(R(h)) + \|k(h)\|_Y S(k(h))\big\|_Z}{\|h\|_X} \\
&\le \lim_{h\to 0} \|F'(y_0)(\underbrace{R(h)}_{\to 0})\|_Z + \lim_{h\to 0} \Bigg(\underbrace{\frac{\|k(h)\|_Y}{\|h\|_X}}_{<C} \cdot \| \underbrace{S(k(h))}_{\to 0} \|_Z\Bigg) = 0 \;,
\end{aligned}$$

wobei wir die Stetigkeit von $F'(y_0)$, R, S und k bei 0 benutzt haben. □

Wir haben bereits einige wichtige Rechenregeln für die totale Ableitung bewiesen. Dennoch fehlt es uns an brauchbaren Methoden, um totale Differenzierbarkeit einer gegebenen Funktion zu zeigen und ihre Ableitung anzugeben, siehe etwa Beispiel 6.54 (3). Zu diesem Zweck führen wir jetzt Richtungsableitungen und partielle Ableitungen ein. Anschließend beweisen wir, dass eine Abbildung $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ bei $x_0 \in U$ total differenzierbar ist, wenn die partiellen Ableitungen in einer Umgebung von x_0 existieren und stetig sind. Außerdem können wir die partiellen Ableitungen als „Spalten der Ableitungsmatrix“ $F(x_0)'$ auffassen. Da sich partielle Ableitungen mit den Methoden aus Kapitel 5 ausrechnen lassen, können wir dann endlich auch totale Ableitungen bestimmen.

Es seien wieder V, W normierte Vektorräume, $U \subset V$ offen, $x_0 \in U$ und $F\colon U \to W$ eine Abbildung. Für jeden Vektor $v \in V$ beschreibt die Abbildung $\gamma_v\colon \mathbb{R} \to V$ mit $\gamma_v(t) = x_0 + tv$ eine Gerade durch x_0 mit Richtungsvektor v. Da γ_v stetig und U offen ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit $\gamma_v(t) \in U$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

6.58. Definition. Falls die Abbildung $F \circ \gamma_v\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to W$ bei 0 total differenzierbar ist, heißt $\partial_v F(x_0) = (F \circ \gamma_v)'(0) \in W$ die *Richtungsableitung* von F bei x_0 in Richtung $v \in V$.

6.59. Bemerkung. (1) Wenn F bei x_0 total differenzierbar ist, dann gilt

$$\partial_v F(x_0) = (F \circ \gamma_v)'(0) = F'(x_0)(\gamma_v'(0)) = F'(x_0)(v)$$

nach der Kettenregel 6.57. Das gleiche gilt in diesem Fall für jede Abbildung $\gamma \cdot (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma'(0) = v$.

(2) Es kann sein, dass F Richtungsableitungen bei x_0 in alle Richtungen $v \in V$ besitzt, obwohl F bei x_0 nicht total differenzierbar ist. Als Beispiel betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{y^3 - 3yz^2}{y^2 + z^2} & \text{falls } \left(\begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix}\right) \neq 0, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } \left(\begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix}\right) = 0\,. \end{cases}$$

Für $v = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ berechnen wir bei $x_0 = 0$ die Richtungsableitung

$$\begin{aligned} \partial_v f(x_0) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(\frac{(at)^3 - 3(at)(bt)^2}{(at)^2 + (bt)^2}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(t \cdot \frac{a^3 - 3ab^2}{a^2 + b^2}\right) = \frac{a(a + \sqrt{3}b)(a - \sqrt{3}b)}{a^2 + b^2}\,. \end{aligned}$$

Für die Vektoren $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ erhalten wir $\partial_{v_1} f(0) = \partial_{v_2} f(0) = 0$. Wäre F total differenzierbar, dann wäre die Abbildung $v \mapsto \partial_v f(0) = f'(0)(v)$ linear. Da v_1, v_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden, würde $\partial_v f(0) = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ folgen. Aber es ist für $w = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ beispielsweise $\partial_w f(0) = 1 \neq 0$. Also ist f bei $x_0 = 0$ nicht total differenzierbar, obwohl alle Richtungsableitungen existieren.

Es sei nun $V = \mathbb{k}^n$. Wir bezeichnen die Einheitsvektoren mit

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6.60. Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, W ein normierter Vektorraum, $x \in U$ und $F\colon U \to W$ eine Abbildung. Die Richtungsableitungen

$$\partial_i F(x) = \partial_{e_i} F(x) \in W$$

heißen die *partiellen Ableitungen* von F an der Stelle x. Wenn alle partiellen Ableitungen an der Stelle x existieren, heißt F *partiell differenzierbar* in x. Wenn alle partiellen Ableitungen auf ganz U existieren, heißt F auf U *partiell differenzierbar*. Wenn alle partiellen Ableitungen $\partial_i F\colon U \to W$ auf ganz U existieren und stetig sind, heißt U *stetig partiell differenzierbar*. Der Raum der stetig partiell differenzierbaren Funktionen auf U mit Werten in W wird mit $\mathcal{C}^1(U, W)$ bezeichnet.

Anstelle von $\partial_i F(x)$ schreibt man auch $\frac{\partial F}{\partial x_i}$

oder $F_{,i}$, siehe auch den Kommentar nach Bemerkung 6.64.

6.61. Bemerkung. Aus der Existenz der partiellen Ableitungen bei x kann man nicht auf die Existenz aller Richtungsableitungen oder gar auf totale Differenzierbarkeit von F schließen. Betrachte etwa $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{2yz}{y^2+z^2} & \text{falls } \left(\begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix}\right) \neq 0, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } \left(\begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix}\right) = 0\,. \end{cases}$$

An der Stelle $x_0 = 0$ gilt $\partial_1 f(0) = \partial_2 f(0) = 0$, aber f ist nicht stetig bei 0, denn es gilt

$$f\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{für } r \neq 0, \text{ und} \\ 0 & \text{für } r = 0\,. \end{cases}$$

Umso erstaunlicher ist das folgende Resultat.

6.62. Satz. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ auf U stetig partiell differenzierbar. Dann ist F auf ganz U stetig differenzierbar, und die Abbildung $F'\colon U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist stetig.*

Beweis. Wir betrachten zunächst nur den Spezialfall $m = 1$. Sei $x \in U$, dann existiert $\varepsilon > 0$, so dass bezüglich der Maximumsnorm

$$D_\varepsilon(x) = \bigl\{\, y \in \mathbb{R}^n \bigm| \max\{|y_1 - x_1|, \dots, |y_n - x_n|\} \leq \varepsilon \,\bigr\} \subset U\,.$$

Betrachte $h \in D_\varepsilon(0)$ und für $k = 0, \dots, n$ die Punkte

$$x_{(k)} = x + \sum_{i=1}^k h_i e_i = \begin{pmatrix} x_1 + h_1 \\ \vdots \\ x_k + h_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in B_\varepsilon(x)$$

mit $x_{(0)} = x$ und $x_{(n)} = x + h$. Wir wenden den Mittelwertsatz 5.24 der Differentialrechnung auf die Funktion $f_{(k)}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f_{(k)}(t) = f(x_{(k-1)} + t h_k e_k)$$

an und erhalten $\tau_k \in (0,1)$, so dass

$$f(x_{(k)}) - f(x_{(k-1)}) = f_{(k)}(1) - f_{(k)}(0) = f'_{(k)}(\tau_k) = h_k \cdot \partial_k f(\xi_{(k)})\,,$$

mit $\xi_{(k)} = x_{(k-1)} + \tau_k h_k e_k \in B_\varepsilon(x)$.

Wir setzen $A(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x))\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an und erhalten

$$\begin{aligned} &f(x+h) - f(x) - A(x)(h) \\ &= \sum_{k=1}^n \bigl(f(x_{(k)}) - f(x_{(k-1)}) - h_k \cdot \partial_k f(x) \bigr) \\ &= \sum_{k=1}^n h_k \cdot \bigl(\partial_k f(\xi_{(k)}) - \partial_k f(x) \bigr)\,. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind die partiellen Ableitungen $\partial_k f$ auf U stetig, also folgt

$$\lim_{h\to 0}\big(\partial_k f(\xi_{(k)})-\partial_k f(x)\big)=0$$

für alle $k=1,\dots,n$, da $\xi_{(k)}\in B_\varepsilon(x)$ für alle $h\in\mathbb{R}^n$ mit $\|h\|_{\max}<\varepsilon$. Es folgt

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h)-f(x)-A(x)(h)|}{\|h\|_{\max}} \le \sum_{k=1}^n \lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{|h_k|}{\|h\|_{\max}}}_{\le 1}\big|\partial_k f(\xi_{(k)})-\partial_k f(x)\big| = 0\;.$$

Also gilt $f'(x)=A(x)$. Da die Komponentenfunktionen $\partial_k f$ von f' alle stetig sind, ist auch

$$f'\colon U\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\cong M_{n\times 1}(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^n$$

stetig nach der universellen Eigenschaft der Produkttopologie, siehe Bemerkung 6.14.

Damit ist Satz 6.62 im Spezialfall $m=1$ bewiesen. Der allgemeine Fall ergibt sich aus dem folgenden Resultat. ☐

Für eine Funktion $F\colon U\to\mathbb{R}^m$ schreiben wir $F_i=\pi_i\circ F\colon U\to\mathbb{R}$ für ihre Komponentenfunktionen, siehe Beispiel 6.15.

6.63. Lemma. *Sei $U\subset V$ offen. Eine Abbildung $F\colon U\to\mathbb{R}^m$ ist genau dann bei $x\in U$ total differenzierbar, wenn ihre Komponentenfunktionen $F_1,\dots,F_m$ bei x total differenzierbar sind. Entsprechendes gilt, wenn man „total differenzierbar bei x“ durch „partiell differenzierbar bei x“ oder „stetig partiell differenzierbar auf U“ ersetzt.*

Beweis. Wir überlegen uns, dass die Funktion $R\colon B_\varepsilon(0)\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^m$ mit

$$R(h)=\frac{F(x+h)-F(x)-F'(x)(h)}{\|h\|_V}$$

wegen der universellen Eigenschaft der Produkttopologie genau dann stetig durch $R(0)=0$ fortgesetzt wird, wenn das für die Komponentenfunktionen

$$R_j(h)=(\pi_j\circ R)(h)=\frac{F_j(x+h)-F_j(x)-(\pi_j\circ F(x))(h)}{\|h\|_V}$$

gilt. Also ist F genau dann bei x total differenzierbar, wenn alle F_j total differenzierbar sind, und es gilt $F_j'(x)=\pi_j\circ F'(x)$.

Genauso zeigen wir die Aussage für „partiell differenzierbar“. Um die Aussage für „stetig partiell differenzierbar“ zu beweisen, benutzen wir analog, dass $\partial_i F$ genau dann stetig ist, wenn die Komponentenfunktionen $\partial_i F_j = \pi_j\circ(\partial_i F)$ stetig sind. ☐

6.64. Bemerkung. (1) Wenn umgekehrt $F' \colon U \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ stetig ist, dann existieren die partiellen Ableitungen $\partial_i F = F'(\cdot)(e_i)$ wie in Bemerkung 6.59 (1) und sind stetig. Also ist „stetig partiell differenzierbar“ äquivalent zu „stetig total differenzierbar“, und wir sagen in Zukunft oft kurz „stetig differenzierbar“.

(2) Aus Satz 6.62 und Lemma 6.63 folgt auch, dass wir die Ableitung F' einer Funktion $F \colon U \to \mathbb{R}^m$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ als Matrix

$$F'(x) = (\partial_j F_i(x))_{i,j} = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1 & \cdots & \partial_n F_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 F_m & \cdots & \partial_n F_m \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R}$$

schreiben können. Diese Matrix heißt auch *Jacobi-Matrix* von F an der Stelle x.

Andere gebräuchliche Schreibweisen für die partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen sind

$$\partial_j F_i(x) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = F_{i,j}(x) \; .$$

Die letztere Schreibweise ist etwas unübersichtlich und für den Anfang daher nicht zu empfehlen. Oft ist es sinnvoll, den Index für die Ableitungsrichtung hoch zu setzen, etwa in $\frac{\partial F_i}{\partial x^j}$. Wir schließen uns dieser Praxis hier nicht an, um Verwirrung zwischen Indizes auf der einen und Exponenten auf der anderen Seite auszuschließen.

6.4. Höhere Ableitungen

In diesem Abschnitt definieren wir höhere Ableitungen differenzierbarer Funktionen. Als erstes sehen wir, dass Ableitungsrichtungen mehrfach stetig differenzierbarer Funktionen vertauschen. Wir beweisen eine höherdimensionale Taylor-Formel und leiten Kriterien für Extrema her.

Es sei $U \subset V$ offen und $F \colon U \to W$ total differenzierbar. Dann ist $F' \colon U \to \mathcal{B}(V, W)$ eine Abbildung in den Vektorraum $\mathcal{B}(V, W)$, versehen mit der Operatornorm $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ aus Definition 6.47 bezüglich der gegebenen Normen auf V und W. Für $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$ ist $\mathcal{B}(V, W) = M_{m,n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{m \cdot n}$ endlichdimensional, so dass die Operatornorm nach Satz 6.45 zu jeder anderen Norm auf $\mathcal{B}(V, W)$ äquivalent ist. Falls V oder W unendlichdimensional ist, gilt das nicht mehr.

6.65. Definition. Wir definieren induktiv die *höheren Ableitungen* einer Abbildung $F \colon U \to W$ wie folgt.

(1) Es ist $F^{(0)} = F \colon U \to W$, und F ist 0-fach differenzierbar auf ganz U.
(2) Es sei $x_0 \in U$. Wenn F auf einer Umgebung von x_0 k-fach differenzierbar ist und die $(k+1)$-te Ableitung

$$F^{(k+1)}(x_0) = (F^{(k)})'(x_0) \in \underbrace{\mathcal{B}(V, \dots, \mathcal{B}(V,}_{k+1-\mathrm{mal}} W) \cdots)$$

existiert, dann ist F im Punkt x_0 $(k+1)$-*fach differenzierbar.*

Wenn die k-te Ableitung auf ganz U existiert und stetig ist, heißt F k-fach stetig differenzierbar. Der Raum der k-fach stetig differenzierbaren Abbildungen von U nach W wird mit $\mathcal{C}^k(U,W)$ bezeichnet. Wenn $F^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert, heißt F *unendlich oft differenzierbar*. Der Raum der unendlich oft differenzierbaren Abbildungen wird mit $\mathcal{C}^\infty(U,W)$ bezeichnet. Für $\mathcal{C}^k(U,\mathbb{R})$ und $\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R})$ schreibt man auch kurz $\mathcal{C}^k(U)$ bzw. $\mathcal{C}^\infty(U)$.

Es sei $v_1,\dots,v_k \in V$ Vektoren, $U \subset V$, und $F\colon U \to W$ sei k-fach differenzierbar. Wir schreiben

$$\partial_{v_k}\dots\partial_{v_1}F(x_0) = \partial_{v_k}(\cdots(\partial_{v_1}F)\cdots)(x_0) = F^{(k)}(x_0)(v_k,\dots,v_1) \in W\ .$$

Sei $V = \mathbb{R}^n$ und $i_1,\dots,i_k \in \{1,\dots,n\}$, dann schreiben wir

$$\partial_{i_k\dots i_1}F(x_0) = \partial_{e_{i_k}}\cdots\partial_{e_{i_1}}F = \frac{\partial^k F}{\partial x_{i_k}\dots\partial x_{i_1}} \in W$$

für die *höheren partiellen Ableitungen* von F. Wenn F sogar k-fach stetig differenzierbar ist, kommt es auf die Reihenfolge der Vektoren $v_1,\dots,v_k$ bzw. der Indizes $i_1,\dots,i_k$ nicht an, wie wir in Satz 6.68 sehen werden.

6.66. Bemerkung. Die höheren Ableitungen sind *multilinear*, das heißt, für jedes $j \in \{1,\dots,k\}$ und alle $v_1,\dots,v_k$, $v_j' \in V$ und alle r, $s \in \Bbbk$ gilt

$$\begin{aligned}&F^{(k)}(x)(v_1,\dots,rv_j+sv_j',\dots,v_k)\\&= rF^{(k)}(x)(v_1,\dots,v_j,\dots,v_k) + sF^{(k)}(x)(v_1,\dots,v_j',\dots,v_k)\ .\end{aligned}$$

Denn aufgrund der Linearität der einfachen Ableitung ist

$$\begin{aligned}F^{(k)}&(x)(v_1,\dots,rv_j+sv_j',\dots,v_k)\\&= \partial_{v_k}\cdots\partial_{v_{j+1}}\Bigl(r\partial_{v_j}F^{(j-1)}(\cdot)(v_1,\dots,v_{j-1})\\&\qquad\qquad + s\partial_{v_j'}F^{(j-1)}(\cdot)(v_1,\dots,v_{j-1})\Bigr)(x)\end{aligned}$$

Die Konstanten r und s können wir wie in Proposition 5.9 an den einzelnen Ableitungen vorbeiziehen, und erhalten so schließlich die obige Behauptung.

6.67. Satz (Mittelwertsatz für die zweite Ableitung). *Sei $U \subset V$ und $f \in \mathcal{C}^2(U)$. Es seien $x_0 \in U$ und v, $w \in V$, so dass*

$$A = \{x_0 + sv + tw \mid s,t \in [0,1]\} \subset U\ .$$

Dann existiert $\xi = x_0 + \sigma v + \tau w \in A$ mit σ, $\tau \in (0,1)$, so dass

$$f(x_0+v+w) - f(x_0+v) - f(x_0+w) + f(x_0) = \partial_w\partial_v f(\xi)\ .$$

Beweis. Wir wenden den Mittelwertsatz 5.24 der Differentialrechnung zunächst auf die Funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(s) = f(x_0+sv+w) - f(x_0+sv)$$

an und erhalten $\sigma \in (0,1)$ mit

$$g'(\sigma) = g(1) - g(0) = f(x_0 + v + w) - f(x_0 + v) - f(x_0 + w) + f(x_0) .$$

Aus der Kettenregel folgt andererseits

$$g'(\sigma) = (\partial_v f)(x_0 + \sigma v + w) - (\partial_v f)(x_0 + \sigma v) .$$

Wir wenden den Mittelwertsatz noch einmal auf die Funktion $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$h(t) = (\partial_v f)(x_0 + \sigma v + tw)$$

an und finden ein $\tau \in (0,1)$, so dass

$$h'(\tau) = h(1) - h(0) .$$

Auf der anderen Seite gilt nach der Kettenregel

$$h'(\tau) = \partial_w (\partial_v f)(x_0 + \sigma v + \tau w) .$$

Mit $\xi = x_0 + \sigma v + \tau w$ erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \partial_w(\partial_v f)(\xi) &= h(1) - h(0) = (\partial_v f)(x_0 + \sigma v + w) - (\partial_v f)(x_0 + \sigma v) \\ &= g(1) - g(0) \\ &= f(x_0 + v + w) - f(x_0 + v) - f(x_0 + w) + f(x_0) . \end{aligned}$$ □

Auf den ersten Blick scheinen Faktoren wie $(a - b)$ aus Satz 5.24 hier zu fehlen, in Wirklichkeit sind diese aber in den Richtungsableitungen enthalten. Für $v = (b - a) \cdot e_1 \in \mathbb{R}^1$ können wir die Aussage in Satz 5.24 umschreiben als

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) = (\partial_v f)(\xi) .$$

6.68. Satz (Schwarz). *Es sei $U \subset V$ offen und $F \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}^m)$. Für alle $x \in U$ und v, $w \in V$ gilt dann*

$$\partial_v \partial_w F(x) = \partial_w \partial_v F(x) .$$

Beweis. Es sei zunächst $m = 1$. Da U offen ist, existiert zu jedem $x \in U$ ein $r > 0$, so dass $B_r^V(x) \subset U$. Wähle $\varepsilon < \frac{r}{\|v\|_V + \|w\|_V}$, dann folgt aus der Dreiecksungleichung, dass

$$d(x, x + sv + tw) = \|sv + tw\|_V \le r$$

für alle s, $t \in [0, \varepsilon]$. Nach Satz 6.67 existieren $\xi_i = x + s_i v + t_i w$ mit s_i, $t_i \in (0, \varepsilon)$ für $i = 1, 2$, so dass

$$\begin{aligned} \partial_v \partial_w F(\xi_1) &= \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_{\varepsilon v} \partial_{\varepsilon w} F(\xi_1) \\ &= \frac{F(x + \varepsilon v + \varepsilon w) - F(x + \varepsilon v) - F(x + \varepsilon w) + F(x)}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_{\varepsilon w} \partial_{\varepsilon v} F(\xi_2) = \partial_w \partial_v F(\xi_2) . \end{aligned}$$

Sowohl ξ_1 als auch ξ_2 hängen von $\varepsilon > 0$ ab, und es gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \xi_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \xi_2 = x .$$

Aus der Stetigkeit der zweiten Ableitungen folgt

$$\partial_v \partial_w F(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \partial_v \partial_w F(\xi_1) = \lim_{\varepsilon \to 0} \partial_w \partial_v F(\xi_2) = \partial_w \partial_v F(x) \; .$$

Der allgemeine Fall $m > 1$ ergibt sich wieder aus Lemma 6.63. □

6.69. Bemerkung. Dieser Satz gilt nur, wenn die zweiten Ableitungen nicht nur existieren, sondern auch stetig sind. Man betrachte etwa die Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{y^3 z - z^3 y}{y^2 + z^2} & \text{für } \left(\begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix}\right) \neq 0 \\ 0 & \text{für } \left(\begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix}\right) = 0 \end{cases}$$

Wir erhalten stetige erste Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial f}{\partial z}$. Die zweiten partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$ existieren auf ganz $\mathbb{R}^2$, stimmen im Nullpunkt aber nicht überein (Übung).

Da partielle Ableitungen auch Richtungsableitungen sind, kann man die Indizes $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ im Ausdruck $\frac{\partial^k F}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$ beliebig vertauschen. Insbesondere kann man sie „sortieren", so dass $i_1 \leq \dots \leq i_k$. Jetzt kommt es nur noch darauf an, wie oft jede Zahl zwischen 1 und n unter den Indizes auftaucht. Man schreibt dann beispielsweise

$$\frac{\partial^5 F}{\partial x_1^2 \, \partial x_2^3} \qquad \text{für} \qquad \frac{\partial^5 F}{\partial_{x_1} \partial_{x_1} \partial_{x_2} \partial_{x_2} \partial_{x_2}} \; .$$

Wenn man viele höhere partielle Ableitungen zu betrachten hat, empfiehlt es sich, sogenannte *Multiindizes* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ zu verwenden. Die *Länge* eines Multiindex α ist definiert als $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Wir schreiben jetzt

$$\frac{\partial^{|\alpha|} F}{\partial x_\alpha} = \partial_\alpha F = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} F}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \; ,$$

in unserem obigen Beispiel hätten wir also den Multiindex $\alpha = (2, 3)$. Für die Taylorformel brauchen wir auch die Abkürzungen

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \qquad \text{und} \qquad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n! \; .$$

Schließlich können wir auch Mehrfachsummen zusammenfassen:

$$\sum_{|\alpha| = k} = \sum_{\alpha_1 = 0}^{k} \sum_{\alpha_2 = 0}^{k - \alpha_1} \cdots \sum_{\alpha_{n-1} = 0}^{k - \alpha_1 - \dots - \alpha_{n-2}} \qquad \text{mit } \alpha_n = 1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_{n-1}$$

$$\text{und} \qquad \sum_{|\alpha| \leq k} = \sum_{\alpha_1 = 0}^{k} \sum_{\alpha_2 = 0}^{k - \alpha_1} \cdots \sum_{\alpha_n = 0}^{k - \alpha_1 - \dots - \alpha_{n-1}} \; .$$

Beispielsweise lässt sich die Binomialformel für $n = 2$ verallgemeinern zu (Übung)

$$(x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{|\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} \, x^\alpha \; .$$

6.70. Satz (Taylor). *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \geq 0$ und $F \in \mathcal{C}^{k+1}(U, \mathbb{R}^m)$. Für $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$ so, dass $x + tv \in U$ für alle $t \in [0,1]$, gilt*

$$F(x+v) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^{|\alpha|} F}{\partial x^\alpha}(x) \cdot \frac{v^\alpha}{\alpha!} + R_{k+1}(x,v) \;,$$

wobei

$$R_{k+1}(x,v) = \int_0^1 \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^{k+1} F}{\partial x^\alpha}(x+tv) \cdot \frac{v^\alpha}{\alpha!} \, (1-t)^k \, dt \;.$$

Falls $m = 1$ existiert $\tau \in (0,1)$, so dass

$$R_{k+1}(x,v) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^{k+1} F}{\partial x^\alpha}(x+\tau v) \cdot \frac{v^\alpha}{\alpha!} \;.$$

Beweis. Die ersten beiden Gleichungen dürfen wir komponentenweise für F_j mit $j \in \{1, \dots, m\}$ betrachten. Wir nehmen daher $m = 1$ an. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $[0,1] \subset I$, so dass $x + tv \in U$ für alle $t \in I$. Dann betrachten wir die Funktion $f \colon I \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = F(x+tv) \;.$$

Aus der Kettenregel 6.57 folgt induktiv, dass f $(k+1)$-fach differenzierbar ist mit

$$f^{(j)}(t) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{\partial^j F}{\partial x^\alpha}(x+tv) \cdot \frac{j!}{\alpha!} \, v^\alpha \;,$$

denn

$$\begin{aligned} f^{(j+1)}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{|\alpha|=j} \frac{\partial^j F}{\partial x^\alpha}(x+tv) \cdot \frac{j!}{\alpha!} \, v^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha|=j} \partial_v \left(\frac{\partial^j F}{\partial x^\alpha} \right) (x+tv) \cdot \frac{j!}{\alpha!} \, v^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha|=j} \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^j F}{\partial x^\alpha} \right) (x+tv) \cdot \frac{j!}{\alpha!} \, v^\alpha \\ &= \sum_{|\beta|=j+1} \frac{\partial^{j+1} F}{\partial x^\beta}(x+tv) \cdot \frac{(j+1)!}{\beta!} \, v^\beta \;, \end{aligned}$$

hierbei entsteht β aus α, indem α_i für die zusätzliche Ableitung nach x_i um 1 erhöht wird. Da der gleiche Multiindex β aus verschiedenen Multiindizes α entstehen kann, kommt der entsprechende Ausdruck insgesamt

$$\sum_{i \text{ mit } \beta_i > 0} \frac{j!}{\beta_1! \dots (\beta_i - 1)! \dots \beta_n!} = \frac{j!}{\beta!} \underbrace{\sum_{i=1}^n \beta_i}_{=|\beta|=j+1} = \frac{(j+1)!}{\beta!}$$

mal vor.

Aus dem Satz 5.66 von Taylor für Funktionen in einer Variablen t folgt

$$\begin{aligned} F(x+v) = f(1) &= \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} + \int_0^1 \frac{f^{(k+1)}(t)}{(k+1)!}\,(1-t)^k\,dt \\ &= \sum_{|\alpha|\le k} \frac{\partial^{|\alpha|}F}{\partial x^\alpha}(x)\cdot\frac{v^\alpha}{\alpha!} + \int_0^1 \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^{k+1}F}{\partial x^\alpha}(x+tv)\cdot\frac{v^\alpha}{\alpha!}\,(1-t)^k\,dt\,. \end{aligned}$$

Die dritte Gleichung ergibt sich analog mit dem Lagrange-Restglied aus Folgerung 5.67. □

Das Lagrange-Restglied funktioniert nicht für $m>1$, da wir dann für jede Komponente F_j von F mit $j=1,\dots,m$ eine andere Zwischenstelle $\tau_j\in(0,1)$ bekämen.

Der Ausdruck

$$P_k(v) = \sum_{|\alpha|\le k} \frac{\partial^{|\alpha|}F}{\partial x^\alpha}(x)\cdot\frac{v^\alpha}{\alpha!}$$

heißt auch *Taylor-Polynom* von F vom Grad k im Punkt x. Falls F unendlich oft differenzierbar ist, betrachten wir die Taylor-Reihe

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial^{|\alpha|}F}{\partial x^\alpha}(x)\cdot\frac{v^\alpha}{\alpha!}\,.$$

Diese Reihe hat abzählbar viele Summanden, wir können ihre Glieder also durch natürliche Zahlen indizieren. Wenn die so entstehende Reihe (komponentenweise für $F_1,\dots,F_m$) absolut konvergiert, ist es nach dem Umordnungssatz 2.69 egal, in welcher Reihenfolge wir summieren. Über die genaue Gestalt des Konvergenzbereichs, das heißt, der Menge der $v\in\mathbb{R}^n$, für die die Reihe konvergiert, wollen wir uns keine Gedanken machen.

6.71. Definition. Es sei $F\in\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R}^m)$ und $x_0\in U$. Wenn es $r>0$ gibt, so dass die Taylor-Reihe von F bei x_0 für alle $v\in B_r(0)$ konvergiert und

$$F(x_0+v) = \sum_{\alpha} \frac{\partial^{|\alpha|}F}{\partial x^\alpha}(x_0)\cdot\frac{v^\alpha}{\alpha!}$$

gilt, lässt sich F bei x_0 *in eine Potenzreihe entwickeln.*

Falls sich F an jedem Punkt $x_0\in U$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt, heißt F *reell analytisch.* Der Raum aller reell analytischen Abbildungen von U nach $\mathbb{R}^m$ wird mit $\mathcal{C}^\omega(U;\mathbb{R}^m)$ bzw. $\mathcal{C}^\omega(U)$ bezeichnet.

Sei eine Abbildung $F\colon U\to\mathbb{R}^m$ durch eine konvergente Potenzreihe

$$F(x) = \sum_{\alpha} c_\alpha\, x^\alpha \qquad \text{mit } c_\alpha\in\mathbb{R}^m \text{ für alle } \alpha$$

gegeben, dann ist diese Potenzreihe zugleich die Taylor-Reihe von F, und das Taylor-Polynom vom Grad k im Punkt 0 ist gerade $\sum_{|\alpha|\le k} c_\alpha\, x^\alpha$ mit $\frac{\partial^{|\alpha|}F}{\partial x^\alpha}(0) = \alpha!\,c_\alpha\in\mathbb{R}^m$ (Übung).

Beispiel. Wir geben die Taylor-Reihe der Funktion

$$f\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \cos\sqrt{y^2+z^2}$$

im Nullpunkt an, indem wir $\sqrt{y^2+z^2}$ in die Potenzreihe der Cosinus-Funktion einsetzen, und erhalten

$$f\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(y^2+z^2)^k}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}(-1)^k\binom{k}{i}\frac{y^{2i}z^{2(k-i)}}{(2k)!} \,.$$

Es sei $F\colon U\to W$ eine Abbildung, $x_0\in U$ und $h\colon U\to\mathbb{R}$ eine Funktion mit $h(x)>0$ für $x\neq x_0$. Wir kennen bereits das Landau-Symbol O:

$$F = O(h) \qquad\Longleftrightarrow\qquad \|F(x)\|_W \le C\cdot h(x)$$

für alle x in einer Umgebung von x_0, mit $C<\infty$. Für die nächste Folgerung benötigen wir das Landau-Symbol o mit

$$F = o(h) \qquad\Longleftrightarrow\qquad \lim_{x\to x_0}\frac{\|F(x)\|_W}{h(x)} = 0 \,.$$

Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit $\lim_{x\to x_0}\frac{F}{h}(x)=0$ in W.

6.72. Folgerung. *Es sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen, $x_0\in U$ und $F\in\mathcal{C}^k(U,\mathbb{R}^m)$. Dann gilt*

$$F(x_0+v) = \sum_{|\alpha|\le k}\frac{\partial^{|\alpha|}F}{\partial x^\alpha}(x_0)\cdot\frac{v^\alpha}{\alpha!} + R_{k+1}(x_0,v)$$

mit $R_{k+1}(x_0,v) = o(\|v\|_V^k)$.

Beweis. Wir nehmen zunächst $m=1$ an. Für $k=0$ folgt die Behauptung aus der Definition der Stetigkeit. Für $k\ge 1$ wenden wir den Satz 6.70 von Taylor mit $k-1$ anstelle von k an, und erhalten für alle $v\in\mathbb{R}^n$ wie im Satz ein $\tau\in(0,1)$ mit

$$F(x_0+v) = \sum_{|\alpha|\le k}\frac{\partial^{|\alpha|}F}{\partial x^\alpha}(x_0)\cdot\frac{v^\alpha}{\alpha!} + \sum_{|\alpha|=k}\left(\frac{\partial^k F}{\partial x^\alpha}(x_0+\tau v) - \frac{\partial^k F}{\partial x^\alpha}(x_0)\right)\cdot\frac{v^\alpha}{\alpha!} \,.$$

Da die k-ten partiellen Ableitungen stetig sind, gilt

$$\lim_{v\to 0}\left(\frac{\partial^{|\alpha|}F}{\partial x^\alpha}(x_0+\tau v) - \frac{\partial^{|\alpha|}F}{\partial x^\alpha}(x_0)\right) = 0$$

für alle Multiindizes α der Länge k. Außerdem ist $\frac{v^\alpha}{\|v\|^k}$ beschränkt für alle $v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, also folgt die Behauptung für $m=1$. Für $m>1$ benutzen wir wie immer Lemma 6.63. □

Diese Folgerung gilt analog selbstverständlich auch im eindimensionalen, und ist sogar etwas präziser als Bemerkung 5.70. Das werden wir im Beweis von Lemma 6.74 ausnutzen.

Wir wollen jetzt die erste und zweite Ableitung einer Funktion $f \in \mathcal{C}^2(U)$ benutzen, um lokale Extrema zu finden. Die zweite Ableitung f'' ist eine *symmetrische Bilinearform* auf V nach Bemerkung 6.66 und Satz 6.68. Sie heißt auch *Hesse-Form* und wird durch die symmetrische *Hesse-Matrix*

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} : U \to M_n(\mathbb{R})$$

gegeben, falls $V = \mathbb{R}^n$. Für $x \in U$ und $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt dann

$$f''(x)(v, w) = v^t \cdot H_f(x) \cdot w \, .$$

6.73. Definition. Eine symmetrische Bilinearform B auf einem reellen Vektorraum V heißt *positiv semidefinit* (oder kurz *nicht-negativ*, $B \geq 0$), falls $B(v, v) \geq 0$ für alle $v \in V$, und *positiv definit* (oder kurz *positiv*, $B > 0$), wenn $B(v, v) > 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$ gilt. Sie heißt *negativ (semi-)definit* ($B < 0$ bzw. $B \leq 0$), wenn $-B$ positiv (semi-)definit ist.

Wir erinnern uns an die Definition der Determinante. Sei $A \in M_n(\mathbb{k})$ eine quadratische Matrix, und sei $S(n)$ die Gruppe aller Permutationen von n Elementen, also die Menge der bijektiven Abbildungen der Menge $\{1, \dots, n\}$ in sich. Jede Permutation $\sigma \in S(n)$ hat ein Vorzeichen $\operatorname{sign} \sigma = \pm 1$, je nachdem, ob σ aus einer geraden oder ungeraden Zahl von Vertauschungen entsteht. Die Determinante von $A = (a_{ij})_{i,j}$ ist gegeben durch

$$\det A = \sum_{\sigma \in S(n)} \operatorname{sign} \sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \, .$$

Speziell für $n = 1, 2, 3$:

$$\det(a_{11}) = a_{11}, \qquad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{12}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \, .$$

Zum Berechnen größerer Determinanten eignet sich zum Beispiel der Gauß-Algorithmus.

Eine symmetrische Bilinearform B auf $\mathbb{R}^n$ mit der Matrix $A = (a_{ij})_{i,j}$ mit $a_{ij} = B(e_i, e_j)$ ist genau dann positiv definit, wenn die Determinanten aller Teilmatrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

positiv sind.

Als Folgerung aus der Taylorformel geben wir zwei notwendige und ein hinreichendes Kriterium für die Existenz lokaler Extrema an.

6.74. Lemma. *Es sei $U \subset V$ offen, $x \in U$ und $f \in \mathcal{C}^k(U)$.*

(1) *Falls $k \geq 1$ und f bei x_0 ein lokales Extremum besitzt, gilt $f'(x_0) = 0$.*
(2) *Falls $k \geq 2$ und f bei x_0 ein lokales Minimum besitzt, gilt $f''(x_0) \geq 0$.*
(3) *Falls V endlich-dimensional ist, $k \geq 2$, $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ gilt, besitzt f bei x_0 ein strenges lokales Minimum.*

Entsprechende Kriterien existieren für lokale Maxima.

Beweis. Wir können (1) und (2) auf eindimensionale Analysis zurückführen.

Zu (1) sei $v \in V$ beliebig. Wir betrachten die Funktion $g\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit

$$g(t) = f(x_0 + tv) \ ,$$

dabei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $x_0 + tv \in U$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Aus Lemma 5.20 folgt

$$0 = g'(0) = f'(x_0)(v) \ .$$

Da v beliebig war, folgt daraus $f'(x_0) = 0$.

Zu (2) nehmen wir an, dass $v \in V$ mit $f''(x_0)(v, v) < 0$ existiert, und konstruieren g wie oben. Es folgt $g \in \mathcal{C}^2((-\varepsilon, \varepsilon))$ mit

$$g''(0) = \frac{\partial}{\partial t}(f'(x_0 + tv)(v)) = f''(x_0)(v, v) < 0 \ .$$

Nach Folgerung 5.68 nimmt g bei 0 ein strenges lokales Maximum an, im Widerspruch zur Annahme, dass f bei x_0 ein lokales Minimum besitzt.

Zu (3) wählen wir einen linearen Isomorphismus $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to V$ und betrachten fortan die Funktion $f \circ \varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, o.B.d.A. sei also bereits $V = \mathbb{R}^n$. Auf $\mathbb{R}^n$ dürfen wir nach Bemerkung 6.53 (4) die Euklidische Norm verwenden. Es sei $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ die Einheitskugel.

Die Abbildung $g\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(v) = f''(x_0)(v, v)$$

ist stetig, und es gilt $g(v) > 0$ für alle $v \in S^{n-1}$ nach Voraussetzung. Da S^{n-1} abgeschlossen und beschränkt ist, ist S^{n-1} nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß folgenkompakt. Nach Folgerung 6.33 existiert

$$\varepsilon = \min_{v \in S^{n-1}} g(v) = \min\bigl\{\, f''(x_0)(v, v) \bigm| \|v\| = 1 \,\bigr\}$$

und es gilt $\varepsilon > 0$. Da U offen ist und da $R_3(x_0, v) = o(\|v\|_V^2)$ nach Folgerung 6.72, existiert $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x_0) \subset U$ und $|R_3(x_0, v)| < \frac{\epsilon}{2}\|v\|^2$ für alle$v \in B_\delta(0) \setminus \{0\}$. Nach Folgerung 6.72 gilt dann

$$\begin{aligned} f(x_0+v) &= \sum_{|\alpha|\le 2} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x_0) \cdot \frac{v^\alpha}{\alpha!} + R_3(x_0,v) \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\, v_i v_j + R_3(x_0,v) \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(v,v) + R_3(x_0,v)\ . \end{aligned}$$

Aufgrund der obigen Abschätzungen gilt

$$\frac{1}{2} \underbrace{f''(x_0)(v,v)}_{\ge \varepsilon \|v\|^2} + \underbrace{R_3(x_0,v)}_{> -\frac{\varepsilon}{2}\|v\|^2} > 0$$

für alle $v \in B_\delta(0) \setminus \{0\}$. Es folgt $f(x_0+v) > f(x_0)$, somit hat f bei x_0 ein strenges lokales Minimum. □

6.75. Definition. Es sei $U \subset V$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ bei $x \in U$ differenzierbar, dann heißt x *kritischer* oder *singulärer Punkt*, wenn $f'(x) = 0$, und *regulär* sonst.

6.76. Bemerkung. Es sei $A \subset V$ Teilmenge eines normierten Vektorraums V. Wie in Bemerkung 5.21 kommen nur folgende Punkte $x \in A$ als lokale Extremstellen einer Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ in Frage:

(1) Randpunkte $x \in A$, also Punkte mit $B_r(x) \not\subset A$ für alle $r > 0$, siehe Definition 2.3,
(2) innere Punkte, an denen f nicht differenzierbar ist, und
(3) kritische Punkte von f, also innere Punkte $x \in A$, an denen f differenzierbar ist mit $f'(x) = 0$. Falls f in einer Umgebung eines kritischen Punktes x zweifach stetig differenzierbar ist, muss darüberhinaus $f''(x)$ semidefinit sein.

Der Nachsatz unter (3) hat kein Pendant im eindimensionalen, wo $f''(x) \in \mathbb{R}$ stets semidefinit ist.

Folgerung 5.68 gilt analog auch für Funktionen $f\colon U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$, dabei bedeutet $f^{(n)}(x) > 0$ jetzt

$$f^{(n)}(x)(v,\dots,v) > 0 \qquad \text{für alle} \qquad v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\ .$$

Dazu muss n gerade sein, denn für ungerade n folgt

$$f^{(n)}(x)(-v,\dots,-v) = (-1)^n f^{(n)}(x)(v,\dots,v) = -f^{(n)}(x)(v,\dots,v)$$

aus Bemerkung 6.66.

Aber auch falls n gerade ist, und $f^{(1)}(x) = \dots = f^{(n-1)}(x) = 0$ gilt, muss $f^{(n)}(x)$ kein einheitliches Vorzeichen haben, wie in den Beispielen

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \mapsto y^2 - z^2 \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \mapsto y^4 - 4y^2z^2 + z^4\ .$$

Wir wollen jetzt das Verhalten einer Funktion $f \in \mathcal{C}^2(U)$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ in der Nähe eines kritischen Punktes $x \in U$ studieren. Dazu sei $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^m$. Wir erinnern uns an den Satz über die Hauptachsentransformation: sei $B\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform, dann existiert eine Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$ von $\mathbb{R}^n$ mit $B(v_i, v_j) = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$. Mit anderen Worten ist B *diagonal* bezüglich der Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$.

Wir setzen $\lambda_i = B(v_i, v_i)$ und nehmen an, dass $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, ansonsten sortieren wir die Basis $(v_1, \dots, v_n)$ entsprechend um. Es gilt

$$B(v, v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^2 \qquad \text{für} \qquad v = \sum_{i=1}^n a_i \cdot v_i \; .$$

Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt, falls $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$.

6.77. Folgerung. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^2(U)$ und $x \in U$ ein kritischer Punkt von f. Dann existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ und eine Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$ von $\mathbb{R}^n$, so dass*

$$f(x+v) = f(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^2 + o(\|v\|^2) \quad \textit{für alle} \quad v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$$

mit $x + v \in U$.

Beweis. Wir wenden die Hauptachsentransformation auf die symmetrische Bilinearform $f''(x)$ auf $\mathbb{R}^n$ an. □

6.78. Bemerkung. Die Zahlen $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ sind gerade die Eigenwerte der Hesse-Matrix $H_f(x)$, die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind dazugehörige Eigenvektoren. Wir können $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ als *Hauptkrümmungen* und $v_1, \dots, v_n$ als *Hauptkrümmungsrichtungen* des Graphen $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ von f auffassen. Sei etwa $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ ein Einheitsvektor, dann ist $a_1^2 + \dots + a_n^2 = 1$. Entlang der Geraden $t \mapsto x + tv$ hat $\Gamma(f)$ bei x die Krümmung

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} f(x+tv) = \partial^2_{v,v} f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^2 \; .$$

Insbesondere gilt stets

$$\lambda_1 \leq \partial^2_{v,v} f(x) \leq \lambda_n \; .$$

Wir betrachten speziell den Fall $n = 2$. Wenn $\lambda_1 = \lambda_2$ gilt, wird der Graph $\Gamma(f)$ durch eine Kugel mit Radius $\frac{1}{|\lambda_1|}$ gut angenähert, bzw. durch eine Ebene, falls $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Falls $\lambda_1 < \lambda_2$, so ist die Krümmung bei x in Richtung v_1 minimal und in Richtung v_2 maximal. Man beachte, dass v_1 und v_2 immer senkrecht aufeinander stehen. Falls $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ oder $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, so wird $\Gamma(f)$ durch ein Ellipsoid gut angenähert, falls $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, durch ein parabolisches Hyperboloid, und falls $\lambda_1 = 0$ oder $\lambda_2 = 0$ gilt, durch einen Zylinder. „Gut angenähert“ soll bedeuten, dass das jeweilige Flächenstück das gleiche Taylorpolynom vom Grad 2 bei x hat wie f.

6.5. Lokale Umkehrbarkeit

Es seien X, Y normierte Vektorräume und $U \subset X$ offen. Wir nennen eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung $F\colon U \to Y$ lokal $\mathcal{C}^1$-umkehrbar bei $x \in U$, wenn es Umgebungen U' von x und V' von $y = F(x)$ gibt, so dass $F|_U\colon U \to V$ eine $\mathcal{C}^1$-Umkehrabbildung $G\colon V \to U$ besitzt. Aus der Kettenregel folgt sofort

$$id_X = (id_{U'})'(x) = (G \circ F)'(x) = G'(y) \circ F'(x) ,$$

und analog $F'(x) \circ G'(y) = id_y$, also ist die Ableitung $F'(x) \in \mathcal{B}(X,Y)$ stetig umkehrbar mit $G'(y) = (F'(x))^{-1} \in \mathcal{B}(Y,X)$. Wir werden sehen, dass diese notwendige Bedingung für lokale $\mathcal{C}^1$-Umkehrbarkeit auch hinreichend ist.

Im folgenden können wir problemlos mit unendlich-dimensionalen Vektorräumen arbeiten, was wir daher auch tun werden.

6.79. Definition. Seien $U \subset X$ und $V \subset Y$ offen. Eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung $F\colon U \to V$ heißt $\mathcal{C}^k$-*Diffeomorphismus*, wenn F eine Umkehrabbildung $G \in \mathcal{C}^1(V,U)$ besitzt. Analog definiert man $\mathcal{C}^\infty$- und $\mathcal{C}^\omega$-Diffeomorphismen.

6.80. Beispiel.
(1) Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, dann ist $f\colon I \to J$ genau dann ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, wenn $f \in \mathcal{C}^1(I,J)$ surjektiv ist und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Das folgt aus dem Umkehrsatz 5.28.
(2) Eine invertierbare, stetige lineare Abbildung $L \in \mathcal{B}(X,Y)$ ist genau dann ein Diffeomorphismus, wenn L^{-1} wieder stetig ist. Falls X und Y endlich-dimensional ist, ist das automatisch der Fall, falls L nur invertierbar ist.
(3) Die komplexe Exponentialfunktion ist ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus $\exp\colon \{z \mid \operatorname{Im} z \in (-\pi,\pi)\} \to \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ mit

$$\exp(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y) \qquad \text{und}$$
$$\exp^{-1}(z) = \log|z| + i \arg z ,$$

wobei das *Argument* $\arg\colon \mathbb{C}\setminus(-\infty,0] \to (-\pi,\pi)$ den Winkel zwischen z und der positiven reellen Achse misst.

Wir verallgemeinern zunächst die Umkehrregel 5.17. Ab sofort seien X, Y Banachräume, d.h. vollständig normierte Vektorräume.

6.81. Satz. *Es seien $U \subset X$ und $V \subset Y$ offen, und $F\colon U \to V$ sei bei $x \in U$ total differenzierbar mit stetig umkehrbarem Differential $F'(x) \in \mathcal{B}(X,Y)$. Wenn F eine Umkehrabbildung G besitzt, die bei $y = F(x)$ stetig ist, dann ist G bei y total differenzierbar mit Ableitung $G'(y) = F'(x)^{-1}$.*

Wenn F stetig total differenzierbar ist, eine stetige Umkehrabbildung G besitzt und $F'(x)\colon X \to Y$ für alle x stetig umkehrbar ist, dann ist F ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.

Beweis. Es sei $v \in X$ hinreichend klein, so dass $x+v \in U$, dann schreiben wir

$$F(x+v) = F(x) + F'(x)(v) + R(v)$$

mit $R(v) = o(\|v\|)$ nach Bemerkung 6.53 (2). Für $w \in Y$ hinreichend klein mit $y+w \in V$ schreiben wir $G(y+w) = x+v$ und setzen

$$S(w) = -F'(x)^{-1}\Bigl(R\bigl(\underbrace{G(y+w)}_{=x+v} - \underbrace{G(y)}_{=x}\bigr)\Bigr) ,$$

dann gilt

$$\begin{aligned} S(w) &= -F'(x)^{-1}\Bigl(\underbrace{F(G(y+w))}_{=y+w} - \underbrace{F(x)}_{y} - F'(x) \cdot \bigl(G(y+w) - G(y)\bigr)\Bigr) \\ &= -F'(x)^{-1}(w) + G(y+w) - G(y) , \end{aligned}$$

somit

$$G(y+w) = G(y) + F'(x)^{-1}(w) + S(w) .$$

Da $F'(x)$ stetig umkehrbar ist, ist die Operatornorm $c = \|F'(x)^{-1}\|_{\mathrm{op}}$ endlich. Wir wählen $r > 0$ so, dass

$$x+v \in U \qquad \text{und} \qquad \|R(v)\|_y \le \frac{1}{2c}\|v\|_X$$

für alle $v \in B_r^X(0)$ gilt; das geht, da $R(v) = o(\|v\|_X)$. Wegen der Stetigkeit von G existiert $s > 0$ so, dass

$$y+w \in V \qquad \text{und} \qquad \|G(y+w) - G(y)\|_X < r$$

für alle $w \in B_s^Y(0)$. Für solche w folgt

$$\begin{aligned} \|S(w)\|_X &\le \|F'(x)^{-1}\|_{\mathrm{op}} \cdot \|R(G(y+w) - G(y))\|_Y \\ &\le \frac{1}{2}\|G(y+w) - G(y)\|_X , \end{aligned}$$

daher auch

$$\begin{aligned} \|G(y+w) - G(y)\|_X &= \|F'(x)^{-1}(w) + S(w)\|_X \\ &\le c \cdot \|w\|_Y + \frac{1}{2}\|G(y+w) - G(y)\|_X , \end{aligned}$$

also

$$\|G(y+w) - G(y)\|_X \le 2c \cdot \|w\|_Y .$$

Aus der Definition von S folgt für $w \in B_s^Y(0) \setminus \{0\}$, dass

$$\begin{aligned} \frac{\|S(w)\|_X}{\|w\|_Y} &\le \|F'(x)^{-1}\|_{\mathrm{op}} \frac{\|R(G(y+w) - G(y))\|_Y}{\|G(y+w) - G(y)\|_X} \cdot \frac{\|G(y+w) - G(y)\|_X}{\|w\|_Y} \\ &\le 2c^2 \cdot \frac{\|R(v)\|_Y}{\|v\|_X} \end{aligned}$$

mit $v = G(y+w) - G(y)$. Da $\|v\|_X \le 2c\|w\|_Y$, folgt

$$\lim_{w \to 0} \frac{\|S(w)\|_X}{\|w\|_Y} \le 2c^2 \lim_{v \to 0} \frac{\|R(v)\|_Y}{\|v\|_X} = 0 .$$

Also ist G bei y total differenzierbar mit Ableitung $G'(y) = F'(x)^{-1}$.

Da $G'(y)$ das Inverse von $(F' \circ G)(y)$ ist und F' und G stetig sind, reicht es zu zeigen, dass das Invertieren von stetig umkehrbaren linearen Abbildungen stetig ist, um die stetige Differenzierbarkeit von G zu erhalten. $\square$

Es bezeichne $\mathrm{Iso}(X,Y) \subset \mathcal{B}(X,Y)$ die Menge der stetigen und stetig umkehrbaren linearen Abbildungen, und $\mathrm{Inv}\colon \mathrm{Iso}(X,Y) \to \mathrm{Iso}(Y,X)$ das Invertieren, also $\mathrm{Inv}(A) = A^{-1}$.

Lineare Abbildungen $A\colon \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n$ werden durch Matrizen dargestellt, und wir haben $\mathrm{Iso}(\mathbb{k}^n, \mathbb{k}^n) = GL_n(\mathbb{k}) \subset M_n(\mathbb{k})$. Sei $\tilde{A} \in M_n(\mathbb{R})$ die Adjunkte von A, dann gilt die Cramersche Regel

$$\mathrm{Inv}(A) = A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A} \;.$$

Sowohl $\det A$ als auch die Einträge von $\tilde{A}$ sind Polynome in den Einträgen von A, daher ist die Inversenbildung $\mathrm{Inv}\colon G\ell_n(\mathbb{k}) \to G\ell_n(\mathbb{k})$ stetig für $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Zum Berechnen der Inversen gibt es effizientere Verfahren, etwa den Gauß-Algorithmus.

Für Isomorphismen zwischen Banachräumen X und Y gehen wir anders vor.

6.82. Lemma. *Es seien X, Y Banachräume. Dann ist* $\mathrm{Iso}(X,Y)$ *offen in $\mathcal{B}(X,Y)$ in der Operatornorm-Topologie, und* $\mathrm{Inv}\colon \mathrm{Iso}(X,Y) \to \mathrm{Iso}(Y,X)$ *ist stetig.*

Beweis. Es sei $A \in \mathrm{Iso}(X,Y)$. Da A^{-1} dann stetig ist, gilt $c = \|A^{-1}\|_{\mathrm{op}} < \infty$ nach Lemma 6.46. Setze $r = \frac{1}{c}$. Wir wollen zeigen, dass $B_r(A) \subset \mathrm{Iso}(X,Y)$, woraus folgt, dass $\mathrm{Iso}(X,Y)$ in $\mathcal{B}(X,Y)$ offen ist. Sei dazu $B \in \mathcal{B}(X,Y)$ mit $\|B\|_{\mathrm{op}} < r$. Wir betrachten die *Neumann-Reihe*

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-A^{-1}B)^i A^{-1} \;,$$

eine Potenzreihe im Endomorphismus $-A^{-1}B \in \mathcal{B}(X,X)$, mit Partialsummen

$$C_k = \sum_{i=0}^{k} (-A^{-1}B)^i A^{-1} \;.$$

Es sei $s = \|-A^{-1}B\|_{\mathrm{op}}$, dann folgt

$$s \le \|A^{-1}\|_{\mathrm{op}} \|B\|_{\mathrm{op}} < c \cdot r = 1$$

nach Lemma 6.49. Nach Beispiel 2.53 gilt für die geometrische Summe mit $k < \ell$, dass

$$\|C_\ell - C_k\|_{\mathrm{op}} \le \sum_{i=k+1}^{\ell} \|-A^{-1}B\|_{\mathrm{op}}^i \|A^{-1}\|_{\mathrm{op}} = \sum_{i=k+1}^{\ell} s^i c = \frac{s^{k+1} - s^{\ell+1}}{1-s} c < \frac{c\, s^{k+1}}{1-s} \;.$$

Also ist (C_k) eine Cauchy-Folge im Raum $\mathcal{B}(Y,X)$ mit der Operatornorm.

Man kann zeigen, dass $\mathcal{B}(Y,X)$ ein Banachraum ist, und daraus folgern, dass

$$C = \lim_{k\to\infty} C_k = \sum_{i=0}^{\infty} (-A^{-1}B)^i A^{-1} \in \mathcal{B}(Y,X) \;.$$

Dazu sei zunächst $w \in Y \setminus \{0\}$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} \|C_k(w) - C_\ell(w)\|_X &= \|w\|_Y \cdot \left\| (C_\ell - C_k)\left(\frac{w}{\|w\|_Y}\right)\right\|_X \\ &\le \|w\|_Y \cdot \|C_k - C_\ell\|_{\mathrm{op}} < \frac{c\,s^{k+1}}{1-s}\,\|w\|_Y \;. \end{aligned}$$

Also ist $(C_k(w))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X für alle $w \in Y$. Da X als Banachraum vollständig ist, existiert

$$C(w) = \lim_{k\to\infty} C_k(w) \in X \;.$$

Die Abbildung $C \colon Y \to X$ ist linear und auch stetig nach Lemma 6.46, da

$$\|C\|_{\mathrm{op}} = \sup\left\{ \lim_{k\to\infty} \|C_k(w)\|_X \;\middle|\; \|w\|_Y \le 1 \right\} \le \lim_{k\to\infty} \|C_k\|_{\mathrm{op}} \le \frac{c}{1-s} < \infty$$

wie oben.

Wir betrachten die Teleskop-Summe

$$C_k \cdot (A+B) = \sum_{i=0}^{k} \big((-A^{-1}B)^i - (-A^{-1}B)^{i+1} \big) = \mathrm{id}_X - (-A^{-1}B)^{k+1}$$

und erhalten

$$C \cdot (A+B) = \lim_{k\to\infty} C_k \cdot (A+B) = \mathrm{id}_X - \lim_{k\to\infty} (-A^{-1}B)^{k+1} = \mathrm{id}_X \;,$$

und genauso $(A+B)\cdot C = \mathrm{id}_Y$. Also ist C die inverse Abbildung zu $A+B \colon X \to Y$, insbesondere ist $A+B$ stetig invertierbar Da B mit $\|B\|_{\mathrm{op}} < r$ beliebig war, folgt $B_r(A) \subset \mathrm{Iso}(X,Y)$.

Es bleibt zu zeigen, dass Inv bei A stetig ist. Dazu sei $\|B\|_{\mathrm{op}} < \delta < r = \frac{1}{c}$, dann folgt

$$\|(A+B)^{-1} - A^{-1}\|_{\mathrm{op}} = \lim_{k\to\infty} \|C_k - C_0\|_{\mathrm{op}} \le \frac{cs}{1-s} < \frac{c^2\delta}{1-c\delta} \;,$$

und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert $\delta \in (0,r)$, so dass $\frac{c^2\delta}{1-c\delta} < \varepsilon$. Es folgt, dass Inv auf ganz $\mathrm{Iso}(X,Y)$ stetig ist. □

6.83. Bemerkung. (1) Mit Hilfe von Lemma 6.46 kann man schließen, dass $\|\cdot\|_X$ und $v \mapsto \|A(v)\|_Y$ genau dann äquivalente Normen auf X sind, wenn A und A^{-1} stetig sind. Wegen Lemma 6.44 ist also $\mathrm{Iso}(X,Y) \subset \mathcal{B}(X,Y)$ genau die Menge der linearen Homöomorphismen von X nach Y, also die Menge der Isomorphismen von X und Y als topologische Vektorräume.

(2) In der Konstruktion von $C = (A+B)^{-1}$ haben wir nur ausgenutzt, dass X vollständig ist. Mit diesem Trick können wir allgemeiner zeigen, dass $\mathcal{B}(Y,X)$ vollständig ist, wenn X vollständig ist.

Der folgende Satz ist das Kernstück im Beweis des lokalen Umkehrsatzes.

6.84. Satz (Banachscher Fixpunktsatz). *Es sei* (M, d) *ein vollständiger metrischer Raum mit* $d(x, y) < \infty$ *für alle* $x, y \in M$, *und* $F\colon M \to M$ *eine* λ-*kontrahierende Abbildung mit* $0 \le \lambda < 1$, *das heißt, es gilt* $d(F(x), F(y)) \le \lambda d(x, y)$. *Dann besitzt* F *genau einen Fixpunkt, das heißt, es gibt genau einen Punkt* $x \in M$ *mit* $F(x) = x$.

Beweis. Zunächst seien x und $y \in M$ Fixpunkte von F, dann folgt

$$d(x, y) = d(F(x), F(y)) \le \lambda d(x, y) < \infty$$

mit $\lambda < 1$, also $d(x, y) = 0$. Somit gilt $x = y$, und es gibt höchstens einen Fixpunkt.

Sei jetzt $x_0 \in M$ beliebig, dann konstruieren wir induktiv eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_{k+1} = F(x_k) \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N} .$$

Es sei $c = d(x_0, x_1) < \infty$, dann folgt induktiv $d(x_k, x_{k+1}) \le c \cdot \lambda^k$, denn

$$d(x_k, x_{k+1}) = d(F(x_{k-1}), F(x_k)) \le \lambda d(x_{k-1}, x_k) \le \lambda \cdot c\lambda^{k-1} .$$

Wir schließen daraus, dass (x_k) eine Cauchy-Folge ist, denn für $k \le \ell$ gilt

$$d(x_k, x_\ell) \le \sum_{i=k}^{\ell-1} d(x_i, x_{i+1}) \le \sum_{i=k}^{\ell-1} c\lambda^i = c\frac{\lambda^k - \lambda^\ell}{1-\lambda} < \frac{c\lambda^k}{1-\lambda} ,$$

und $\lim_{k\to\infty} \frac{c\lambda^k}{1-\lambda} = 0$, da $0 \le \lambda < 1$.

Da M nach Voraussetzung vollständig ist, konvergiert $(x_k)_k$ gegen einen Grenzwert x. Da F kontrahierend ist, ist F insbesondere stetig nach Satz 3.8, und es folgt

$$F(x) = \lim_{k\to\infty} F(x_k) = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = x ,$$

also ist x der gesuchte Fixpunkt. □

Wir haben in Folgerung 3.31 bereits einen anderen Fixpunktsatz kennengelernt. Während der vorliegende Satz auf metrischen Argumenten beruht, ist Folgerung 3.31 ein Spezialfall des rein topologischen Brouwerschen Fixpunktsatzes. Außerdem wird hier der Fixpunkt als Grenzwert einer Folge explizit konstruiert, während Folgerung 3.31 eine reine Existenzaussage liefert.

6.85. Bemerkung. Es sei X ein Banachraum. Wir benötigen den Banachschen Fixpunktsatz für den metrischen Raum $\mathcal{C}(B_r^X(0), D_s^X(0))$ mit der Supremumsmetrik

$$d_{\sup}(A, B) = \sup\left\{ d_X(A(x), B(x)) \mid x \in B_r^X(0) \right\} .$$

Daher zeigen wir jetzt in mehreren Schritten, dass dieser Raum vollständig ist.

(1) Jede Cauchy-Folge in $D_s^X(0)$ konvergiert in X, da X vollständig ist. Da $D_s^X(0)$ in X abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert bereits in $D_s^X(0)$. Also ist $D_s^X(0)$ vollständig.

(2) Es sei M ein metrischer Raum und $(G_n)_n$ eine Folge stetiger Abbildungen $G_n\colon M \to D_s^X(0)$. Wenn $(G_n)_n$ eine Cauchy-Folge bezüglich der Supremumsmetrik ist, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0, so dass

$$d_{\sup}(G_m, G_n) < \varepsilon$$

für alle $m, n \geq n_0$. Für alle $x \in M$ folgt dann

$$d_X(G_m(x), G_n(x)) \leq d_{\sup}(G_m, G_n) < \varepsilon\ .$$

Also ist $(G_n(x))_n$ für jedes $x \in M$ eine Cauchy-Folge in $D_s^X(0)$, und konvergiert daher nach (1) gegen einen Punkt $G(x) \in D_s^X(0)$.

(3) Die Folge $(G_n)_n$ konvergiert gleichmäßig gegen $G\colon M \to D_s^X(0)$, denn aus (2) folgt

$$d_X(G_m(x), G(x)) = \lim_{n\to\infty} d_X(G_m(x), G_n(x)) \leq \varepsilon$$

für alle $m \geq n_0$ und alle $x \in M$. Wegen Folgerung 3.49 ist die Grenzfunktion G stetig. Also konvergiert jede Cauchy-Folge in $\mathcal{C}(M, D_s^X(0))$, also ist dieser Raum vollständig.

Für $M = B_r^X(0)$ erhalten wir die gesuchte Behauptung.

Der folgende Satz sagt, dass eine differenzierbare Abbildung mit beschränktem Differential über endliche Distanzen nicht beliebig weit auseinanderliegende Werte annehmen kann.

6.86. Satz (Schrankensatz). *Es sei $U \subset X$ offen, $F\colon U \to Y$ total differenzierbar mit $\|F'(x)\|_{\mathrm{op}} \leq C$ für alle $x \in U$. Es seien $x, y \in U$ Punkte mit $(1-t)x + ty \in U$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gilt*

$$\|F(y) - F(x)\|_Y \leq C \cdot \|y - x\|_X\ .$$

Beweis. Wir setzen $v = y - x \in X$ und fixieren $\varepsilon > 0$. Da U offen ist, existiert zu jedem $t \in I = [0,1]$ ein $\delta(t) > 0$, so dass $(1-t)x + ty + sv = x + (t+s)v \in U$ und

$$F(x + (t+s)v) = F(x + tv) + s \cdot F'(x + tv)(v) + R_t(s)$$

mit $\|R_t(s)\|_Y \leq \varepsilon \|sv\|_X = \varepsilon\,|s|\,\|v\|_X$ für alle $s \in (-\delta(t), \delta(t))$.

Die Intervalle $I_t = (t - \delta(t), t + \delta(t)) \cap I$ sind offen in I und überdecken I. Da I nach dem Satz 3.38 von Bolzano-Weierstraß kompakt ist, besitzt die offene Überdeckung $\{I_t \mid t \in I\}$ eine endliche Teilüberdeckung $\{I_{t_1}, \dots, I_{t_n}\}$ nach dem Satz von Heine-Borel, siehe Folgerung 6.38. Wir dürfen annehmen, dass $I_{t_i} \not\subset I_{t_j}$ für $i \neq j$, und dass $t_1 < \dots < t_n$. Dann existieren $0 = t'_0 \leq t_1 < t'_1 < \dots < t_n \leq t'_n = 1$ mit $t'_i \in I_{t_i} \cap I_{t_{i+1}}$ für $1 \leq i \leq n-1$.

Denn wäre $I_{t_{i-1}} \cap I_{t_i} = \emptyset$, dann gäbe es ein $t' \in (t_{i-1}, t_i)$ mit $t' \notin I_{t_{i-1}} \cup I_{t_i}$, also $t' \in I_{t_k}$ für ein $k \notin \{i-1, i\}$. Im Falle $k < i-1$ würde dann $\delta(t_k) > t_{i-1} - t_k + \delta(t_{i-1})$ und $I_{t_{i-1}} \subset I_{t_k}$, im Falle $k > i$ entsprechend $I_{t_i} \subset I_{t_k}$ folgen, im Widerspruch zur obigen Annahme.

Aus der obigen Abschätzung folgt

$$\begin{aligned}
&F(x+t_i'v)-F(x+t_{i-1}'v)\\
&\qquad\qquad = \big(F(x+t_i'v)-F(x+t_iv)\big)-\big(F(x+t_{i-1}'v)-F(x+t_iv)\big)\\
&\qquad\qquad = (t_i'-t_{i-1}')F'(x+t_iv)(v)+R_{t_i}(t_i'-t_i)-R_{t_i}(t_{i-1}'-t_i)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
&\|R_{t_i}(t_i'-t_i)-R_{t_i}(t_{i-1}'-t_i)\|_Y\\
&\qquad\qquad \le \varepsilon\big(\big|t_i'-t_i\big|+\big|t_i-t_{i-1}'\big|\big)\,\|v\|_X=\varepsilon(t_i'-t_{i-1}')\|v\|_X\ .
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\|F(y)-F(x)\|_Y &\le \sum_{i=1}^n \|F(x+t_i'v)-F(x+t_{i+1}'v)\|\\
&\le \sum_{i=1}^n (t_i'-t_{i-1}')\big(\underbrace{\|F'(x+t_iv)\|_{\mathrm{op}}}_{\le C}+\varepsilon\big)\|v\|_X\\
&\le (C+\varepsilon)\|y-x\|_X\ .
\end{aligned}$$

Da das für alle $\varepsilon>0$ gilt, folgt die Behauptung. □

Falls $Y=\mathbb{R}$ ist, lässt sich der Schrankensatz auch auf den Mittelwertsatz 5.24 der Differentialrechnung zurückführen, angewandt auf die Funktion $f(t)=F(x+tv)$. Für beliebige Y „ersetzt" der Schrankensatz in manchen Argumenten den Mittelwertsatz.

6.87. Satz (Umkehrsatz für differenzierbare Abbildungen). *Es seien X, Y Banachräume, $U\subset X$ offen, $F\in\mathcal{C}^1(U,Y)$ und $x_0\in U$, so dass $F'(x_0)\colon X\to Y$ stetig umkehrbar ist. Dann existiert eine Umgebung U' von x_0 in U, so dass die Abbildung $F|_{U'}\colon U'\to V'=\operatorname{im}(F|_{U'})$ eine Umkehrabbildung $G\in\mathcal{C}^1(V',U')$ besitzt.*

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $x_0=0\in X$ und $F(x_0)=0$ in Y gilt. Andernfalls betrachten wir die Abbildung

$$x\mapsto F(x_0+x)-y_0\ .$$

Außerdem dürfen wir $X=Y$ und $F'(x_0)=\mathrm{id}_X$ annehmen, andernfalls betrachten wir die Abbildung

$$x\mapsto F'(x_0)^{-1}(F(x))\ .$$

Es sei also $x_0=0$, $F(0)=0$ und $F'(0)=\mathrm{id}_X$. Dann schreiben wir

$$F(x)=\underbrace{F'(0)\cdot x}_{=x}+R(x)\qquad \text{mit } R(x)=o(\|x\|)\ ,$$

dann ist $R\in\mathcal{C}^1(U,X)$ mit

$$R'(x)=F'(x)-F'(0)\colon X\to X\ ,$$

insbesondere $R(0)=R'(0)=0$. Wir wählen $r>0$ so, dass $D_{2r}(0)\subset U$ und $\|R'(x)\|_{\mathrm{op}}<\frac12$ für alle $x\in D_{2r}(0)$.

Für eine stetige Abbildung $A\colon B_r(0) \to D_{2r}(0)$ mit $A(0) = 0$ definieren wir eine neue stetige Abbildung $\Phi(A)\colon B_r(0) \to X$ mit

$$\Phi(A)(y) = y + A(y) - F(A(y)) = y - R(A(y)) \;.$$

Da $R(0) = 0$, erhalten wir $\Phi(A)(0) = 0$. Aus dem Schrankensatz 6.86 und $\|R'(A(y))\|_{\mathrm{op}} < \frac{1}{2}$ folgt

$$\|\Phi(A)(y)\| \leq \|y\| + \|R(A(y))\| \leq \underbrace{\|y\|}_{<r} + \frac{1}{2} \underbrace{\|A(y)\|}_{\leq 2r} < 2r$$

für alle $y \in B_r(0)$. Somit ist $\Phi(A)$ wieder eine Abbildung von $B_r(0)$ nach $B_{2r}(0) \subset D_{2r}(0)$. Wir fassen Φ auf als Abbildung des metrischen Raumes

$$M = \{A \in \mathcal{C}(B_r(0), D_{2r}(0)) \mid A(0) = 0\} \;,$$

versehen mit der Supremumsmetrik, in sich. Da $\mathcal{C}(B_r(0), D_{2r}(0))$ nach Bemerkung 6.85 vollständig ist, konvergiert jede Cauchy-Folge $(A_n)_n$ in M in $\mathcal{C}(B_r(0), D_{2r}(0))$ gegen eine Abbildung A mit

$$A(0) = \lim_{n\to\infty} A_n(0) = 0 \;,$$

es folgt $A \in M$, also ist auch M vollständig.

Wir wollen den Banachschen Fixpunktsatz auf Φ anwenden. Seien dazu A, $B \in M$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} d_{\sup}(\Phi(A), \Phi(B)) &= \sup_{\|y\|<r} d(y + R(A(y)), y + R(B(y))) \\ &= \sup_{\|y\|<r} \|R(B(y)) - R(A(y))\| \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{\|y\|<r} \|B(y) - A(y)\| = \frac{1}{2} d_{\sup}(A, B) \end{aligned}$$

nach dem Schrankensatz. Somit ist Φ eine $\frac{1}{2}$-kontrahierende Abbildung. Nach Satz 6.84 besitzt Φ einen eindeutigen Fixpunkt $G \in M$. Aus $\Phi(G) = G$ folgt

$$G(y) = y + G(y) - F(G(y)) \;,$$

also $F(G(y)) = y$ für alle $y \in B_r(0)$. Insbesondere ist G injektiv und $B_r(0) \subset \operatorname{im} F$.

Aus dem Schrankensatz für R folgt für alle x, $y \in B_{2r}(0)$ mit $F(x) = F(y)$, dass

$$\begin{aligned} \|y - x\| &= \big\|\big(F(y) - R(y)\big) - \big(F(x) - R(x)\big)\big\| \\ &\leq \|\underbrace{F(y) - F(x)}_{=0}\| + \|R(y) - R(x)\| \leq \frac{1}{2} \|y - x\| \;, \end{aligned}$$

also $x = y$. Somit ist F auf $B_{2r}(0)$ injektiv. Wir setzen $V' = B_r(0)$ und $U' = F^{-1}(V') \cap B_{2r}(0) = \operatorname{im} G$, dann ist $F|_{U'}\colon U' \to V'$ bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung G. Nach Satz 6.81 ist G ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus mit

$$G' = \operatorname{Inv} \circ F' \circ G\colon B_r(0) \to \operatorname{Iso}(X, X) \;. \qquad \square$$

Um den Umkehrsatz für $\mathcal{C}^k$- oder $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen zu beweisen, brauchen wir einen kleinen Rechentrick, eine „verallgemeinerte Produktregel“, die auch sonst hilfreich sein kann.

6.88. Bemerkung. Es sei $F\colon U \to Y$ eine Abbildung, gegeben durch einen Ausdruck, in dem die unabhängige Variable x insgesamt k-fach vorkommt. Um F nach x abzuleiten, ersetzt man die einzelnen x durch unabhängige Variablen $x_1, \dots, x_k$, leitet jeweils nach einer dieser Variablen ab, setzt dann $x_1 = \dots = x_k = x$ und addiert die neuen Ausdrücke. Für $x > 0$ gilt beispielsweise

$$\frac{dx^x}{dx} = \frac{dy^z}{dy}\Big|_{(x,x)} + \frac{dy^z}{dz}\Big|_{(x,x)} = x \cdot x^{x-1} + \log x \cdot x^x = (1 + \log x)x^x \;.$$

Zur Begründung sei $F = G \circ H$ mit $G\colon U^k \to Y$ und $H\colon U \to U^k$, wobei

$$H(x) = \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} \;.$$

Im obigen Beispiel wäre also $G\left(\begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix}\right) = y^z$. Es gilt

$$H'(x)(v) = \begin{pmatrix} v \\ \vdots \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \;.$$

Aus der Kettenregel folgt also

$$F'(x)(v) = G'\begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + G'\begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \;.$$

6.89. Lemma. *Es seien X, Y Banachräume, $U \subset X$ und $V \subset Y$ offen, $k \geq 1$ und $F \in \mathcal{C}^k(U, V)$ mit Umkehrabbildung $G \in \mathcal{C}^1(V, U)$. Dann gilt $G \in \mathcal{C}^k(V, U)$.*

Beweis. Wir beweisen induktiv die folgende Behauptung, aus der das Lemma folgt: für alle $j = 2, \dots, k$ gilt

$$G^{(j)}(y)(w_1, \dots, w_j) = -G'(y)\bigl(F^{(j)}(x)(v_1, \dots, v_j)\bigr) + S_j(x)(v_1, \dots, v_j)$$

für alle $y \in V$ und $w_1, \dots, w_k \in Y$ mit $x = G(y)$ und $v_i = F'(x)^{-1}(w_i)$, dabei ist $S_j(x)(v_1, \dots, v_j)$ ein Ausdruck in $F'(x)^{-1}$, $F''(x), \dots, F^{(j-1)}(x)$ und den Vektoren $v_1, \dots, v_j$.

Zum Induktionsanfang leiten wir die Gleichung $v_1 = G'(F(x))(F'(x)(v_1))$ aus der Umkehrregel 6.81 nach x in Richtung v_2 ab und erhalten

$$0 = \partial_{v_2} v_1 = G''(F(x))(F'(x)(v_1), F'(x)(v_2)) + G'(F(x))(F''(x)(v_1, v_2))$$

wie in Bemerkung 6.88. Auflösen nach $G''(y)(w_1, w_2) = G''(F(x))\bigl(F'(x)(v_1), F'(x)(v_2)\bigr)$ liefert die Behauptung für $j = 2$ mit $S_2 = 0$.

Für den Induktionschritt leiten wir die Gleichung

$$\begin{aligned}0 &= G^{(j)}(F(x))(F'(x)(v_1),\dots,F'(x)(v_j))\\ &\qquad + G'(F(x))(F^{(j)}(x)(v_1,\dots,v_j)) + S_j(x)(v_1,\dots,v_j)\end{aligned}$$

nach x in Richtung v_{j+1} ab, und erhalten

$$\begin{aligned}0 = G^{(j+1)}&(F(x))(F'(x)(v_1),\dots,F'(x)(v_{j+1}))\\ &+ G'(F(x))(F^{(j+1)}(x)(v_1,\dots,v_{j+1}))\\ &+ S_{j+1}(x)(v_1,\dots,v_{j+1})\;.\end{aligned}$$

Dabei ist $S_{j+1}(x)(v_1,\dots,v_{j+1})$ zunächst ein Ausdruck in $F'(x)^{-1}$, $G'(F(x))$, $\dots$, $G^{(j)}(F(x))$, $F''(x),\dots,F^{(j)}(x)$ und den Vektoren $v_1,\dots,v_{j+1}$. Wir setzen für $G'(F(x)),\dots,G^{(j)}(F(x))$ die Induktionsvoraussetzung ein und erhalten die Behauptung. □

Wir können den Umkehrsatz benutzen, um implizit gegebene Funktionen besser zu verstehen.

6.90. Beispiel. (1) Um die Einheitssphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ als Graph einer Funktion $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zu schreiben, betrachten wir die Funktion $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \|x\|_2^2 = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2\;,$$

dann gilt $S^n = f^{-1}(1)$. Auflösen nach x_{n+1} liefert

$$x_{n+1} = g_\pm(x_1,\dots,x_n) = \pm\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}\;.$$

Wir erhalten zwei Funktionen $g_\pm\colon D_1^{\mathbb{R}^n}(0) \to \mathbb{R}$ mit $\Gamma(g_\pm) \subset S^n$. Die Funktionen $g_\pm$ sind beide auf $B_1^{\mathbb{R}^n}(0)$ differenzierbar, aber nicht bei den Punkten der Einheitssphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, bei denen $x_{n+1} = g_\pm(x_1,\dots,x_n) = 0$ gilt. Ableiten von f nach x_{n+1} liefert

$$\partial_{n+1} f = \partial x_{n+1}\;,$$

also lässt sich die Gleichung $f(x) = 1$ an den Stellen nicht differenzierbar nach x_{n+1} auflösen, an denen $\partial_{n+1} f$ verschwindet. An diesen Stellen können wir nach einer derjenigen Variablen x_i auflösen, für die $2x_i = \partial_i f$ nicht verschwindet.

Wir betrachten die Lösungen der Gleichung $f(x) = c$, also die Sphären von Radius $\sqrt{c}$, mit c nahe 1, und erhalten durch Auflösen nach x_{n+1} jetzt differenzierbare Funktionen

$$x_{n+1} = h_\pm(x_1,\dots,x_n,c) = \pm\sqrt{c - x_1^2 - \dots - x_n^2}$$

in $x_1,\dots,x_n$ und c.

(2) Wir betrachten jetzt Hyperbeln in der Ebene als Lösungsmengen der Gleichung $f(x,y) = c$ mit

$$f(x,y) = y^2 - x^2\;.$$

Die Funktion f hat bei (0,0) einen kritischen Punkt, da $\partial_x f = -2x$ und $\partial_y f = 2y$ dort beide verschwinden. Der zugehörige kritische Wert ist $f(0,0) = 0$.

Für $c > 0$ liefert Auflösen nach y zwei Funktionen $g_\pm \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g_\pm(x) = \pm\sqrt{c + x^2}\ .$$

Die Lösungsmenge besteht also aus zwei Kurven, einer „von oben links nach oben rechts", und einer „von unten links nach unten rechts".

Für $c < 0$ erhalten wir ähnliche Funktionen $g_\pm$, die jetzt aber nur auf $\mathbb{R} \setminus (-\sqrt{c}, \sqrt{c})$ definiert sind. Die Lösungsmenge besteht jetzt aus zwei Kurven, einer „von oben links nach unten links" und einer „von oben rechts nach unten rechts". Wir sehen, dass für c in einer Umgebung eines kritischen Wertes die Lösungsmengen von $f(x, y) = c$ nicht mehr durch glatte Funktionen in (x, c) wie im ersten Beispiel beschrieben werden können.

6.91. Satz (über implizite Funktionen). *Es sei $U \subset X = Y \times Z$ offen, $F \in \mathcal{C}^k(U, Y)$ mit $k \geq 1$ und $x_0 \in U$ ein Punkt mit der Eigenschaft, dass das Differential $F'(x_0)|_{Y \times \{0\}} \colon Y \to Y$ stetig invertierbar ist. Schreibe $x_0 = \binom{y_0}{z_0}$ mit $y_0 \in Y$ und $z_0 \in Z$. Dann gilt:*

(1) *es gibt Umgebungen U' von y_0 in Y und V' von z_0 in Z und eine Abbildung $G \in \mathcal{C}^k(V', U')$, so dass $G(z_0) = y_0$ und*

$$\left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in U' \times V' \;\middle|\; F\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = F(x_0) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} G(z) \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in V' \right\},$$

(2) *es gibt Umgebungen V von z_0 in Z und W von $F(x_0)$ in Y und eine Abbildung $H \in \mathcal{C}^k(W \times V, Y)$ mit*

$$\begin{pmatrix} H(y, z) \\ z \end{pmatrix} \in U \quad \textit{und} \quad F\begin{pmatrix} H(y, z) \\ z \end{pmatrix} = y$$

für alle $y \in W$, $z \in V$, so dass $H(F(x_0), z_0) = y_0$.

Die erste Aussage stellt die Lösungsmenge der Gleichung $F(x) = F(x_0)$ lokal als Graph einer „impliziten" Abbildung G dar. Die zweite Aussage beschreibt auch Lösungen von $F(x) = c$ lokal als Graphen für alle c nahe x_0.

Beweis. Wir beweisen zunächst Aussage (2). Dazu betrachten wir die Abbildung $\overline{F} \colon U \to X$ mit

$$\overline{F}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x) \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\ .$$

Ihr Differential bei x_0 wird durch eine Blockmatrix gegeben:

$$\overline{F}'(x_0) = \begin{pmatrix} F'(x_0)|_{Y \times \{0\}} & F'(x_0)|_{\{0\} \times Z} \\ 0 & \mathrm{id}_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \mathrm{id}_Z \end{pmatrix}\ .$$

Da A nach Voraussetzung stetig invertierbar ist, ist auch $\overline{F}'(x_0)$ stetig invertierbar mit

$$\overline{F}'(x_0)^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{id}_Z \end{pmatrix} .$$

Nach dem Umkehrsatz 6.87 existiert lokal eine $\mathcal{C}^k$-Umkehrfunktion $\overline{H}$ von $\overline{F}$. Indem wir den Definitionsbereich verkleinern, dürfen wir annehmen, dass $\overline{H}$ auf $W \times V$ definiert ist, wobei W Umgebung von $F(x_0)$ und V Umgebung von z_0 ist. Aus $\overline{F} \circ \overline{H} = \mathrm{id}_{W\times V}$ folgt, dass $\overline{H}$ die Gestalt

$$\overline{H}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H(y,z) \\ z \end{pmatrix}$$

hat. Da wir die Umkehrfunktion um x_0 gebildet haben, folgt $H(F(x_0), z_0) = y_0$, und Aussage (2) ist bewiesen.

Um Aussage (1) zu erhalten, benutzen wir, dass $\mathrm{im}(\overline{H})$ eine Umgebung von x_0 ist. Wir finden daher Umgebungen U' von y_0 und V' von z_0, so dass $U' \times V' \subset \mathrm{im}(\overline{H})$. Wir definieren $G \in \mathcal{C}^k(V', Y)$ durch

$$G(z) = H(F(x_0), z) .$$

Wir dürfen $\mathrm{im}(G) \subset U'$ annehmen, andernfalls ersetzen wir V' durch $G^{-1}(U') \cap V'$. Es folgt $G(z_0) = H(F(x_0), z_0) = y_0$ und

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{pmatrix} G(z) \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in V' \right\} &= \left\{ \begin{pmatrix} H(F(x_0), z) \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in V' \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in U' \times V' \,\middle|\, F\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = F(x_0) \right\} . \end{aligned}$$

□

Im Spezialfall $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m$ mit $m \le n$ beschreibt der Satz 6.91 über implizite Funktionen die Lösungsmenge der Gleichung $F(x) = F(x_0)$ unter der Annahme, dass eine spezielle $m \times m$-Untermatrix der Jacobi-Matrix invertierbar ist. Insbesondere ist $F'(x_0)\colon X \to Y$ in diesem Fall surjektiv.

6.92. Definition. Es seien X, Y Banachräume, es sei $U \subset X$ offen und $F\colon U \to Y$ total differenzierbar. Ein $x \in U$ heißt *regulärer Punkt* von F, wenn $dF(x)\colon X \to Y$ surjektiv ist, und *singulärer Punkt* sonst. Ein $y \in Y$ heißt *regulärer Wert* von F, wenn alle $x \in F^{-1}(\{y\}) \subset U$ reguläre Punkte sind, und *singulärer Wert* sonst. Falls $Y = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, heißen singuläre Werte auch *kritische Werte*.

6.93. Bemerkung. Man beachte: Ein Wert $y \in Y$ ist singulär, wenn mindestens ein Urbild $x \in F^{-1}(\{y\})$ singulär ist. Insbesondere ist $y \in Y$ regulärer Wert, wenn $F^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ gilt. Falls $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m$ mit $m > n$, dann sind alle Bildpunkte $F(x) \in \mathbb{R}^m$ für $x \in U$ singulär, weil $F'(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nicht surjektiv sein kann, während $\mathbb{R}^m \setminus \mathrm{im}(F)$ aus regulären Punkten besteht.

6.94. Definition. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *m-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit* des $\mathbb{R}^n$, wenn es zu jedem Punkt $x \in M$ eine Umgebung U von x, eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ und einen $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$U \cap M = \varphi^{-1}\big(V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})\big)$$

gibt. Solch ein φ heißt *Untermannigfaltigkeitskarte* oder kurz *Karte* von M um x.

6.95. Beispiel. In Beispiel 6.90 haben wir Beispiele von Untermannigfaltigkeiten kennengelernt.

(1) Die Einheitssphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine n-dimensionale $\mathcal{C}^\infty$-Untermannigfaltigkeit. Für $x \in S^n$ mit $x_{n+1} > 0$ erhalten wir eine Karte $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$U = \left\{\, x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1, x_{n+1} > 0 \,\right\},$$

$$V = \left\{\, x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1, x_{n+1} > -\sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2} \,\right\}$$

$$\text{und} \qquad \varphi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} - \sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Für andere Punkte mit $x_i \neq 0$ konstruieren wir ähnliche Karten, indem wir zunächst die i-te mit der letzten Koordinate tauschen, dabei das Vorzeichen eventuell ändern, und anschließend die Karte φ anwenden.

(2) Für $c \neq 0$ ist

$$M_c = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; y^2 - x^2 = c \right\}$$

ebenfalls eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit, für $c = 0$ jedoch nicht. Denn sei $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^2$ eine Karte um 0, dann dürfen wir U so verkleinern, dass $U \cap M_0$ zusammenhängend ist, also auch $\varphi(U \cap M_0) = \operatorname{im}\varphi \cap \mathbb{R}^m \times \{0\}$. Nach Wegnehmen von 0 besteht $U \cap M_0 \setminus \{0\}$, und damit auch $\varphi(U \cap M_0 \setminus \{0\})$, aus vier Zusammenhangskomponenten. Nimmt man aber aus einer offenen, zusammenhängenden Teilmenge des $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ einen Punkt heraus, so erhält man entweder keine ($m = 0$), zwei ($m = 1$) oder genau eine Zusammenhangskomponente, aber niemals vier. Also ist M_0 keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

Somit sieht eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ lokal so aus wie der $\mathbb{R}^m$. Man kann auf ihnen in ähnlicher Weise Funktionen betrachten wie auf $\mathbb{R}^m$. Ein Beispiel sehen wir später anhand eines notwendigen Kriteriums für Extremstellen.

6.96. Satz (vom regulären Wert). *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \geq 1$ und $y_0 \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert von $F \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^m)$. Dann ist $F^{-1}(\{y_0\})$ eine $(n-m)$-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.*

Aus Bemerkung 6.93 folgt $F^{-1}(\{y_0\}) = \emptyset$, falls $m > n$.

Beweis. Falls $x_0 \in F^{-1}(\{y_0\})$ und $F'(x_0)|_{\mathbb{R}^m \times \{0\}}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ invertierbar ist, gehen wir wie im Beweis des Satzes 6.91 über implizite Funktionen vor und definieren $\varphi\colon W \times V \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\varphi\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \overline{F}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x) - y_0 \\ z \end{pmatrix} \quad \text{für alle } x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

nahe x_0 mit $y \in \mathbb{R}^m$ und $z \in \mathbb{R}^{n-m}$. Dann gilt lokal bei x_0

$$\varphi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-m}) = F^{-1}(\{y_0\}) \cap (W \times V)\ .$$

Im allgemeinen folgt aus der Surjektivität von $F'(x_0)$ für $x_0 \in F^{-1}(\{y_0\})$, dass die Jacobi-Matrix $F'(x_0)$ Spaltenrang m hat, es gibt also m linear unabhängige Vektoren im Bild von $F'(x_0)$. Es seien $1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n$ die Indizes dieser Spalten, und es seien $1 \le j_1 < \cdots < j_{n-m} \le n$ die restlichen Indizes, so dass $\{i_1, \dots, i_m\} \cup \{j_1, \dots, j_{n-m}\} = \{1, \dots, n\}$. Wir definieren einen linearen Isomorphismus $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$A(e_k) = \begin{cases} e_{i_k} & \text{für } 1 \le k \le m, \text{ und} \\ e_{j_{k-m}} & \text{für } m < k \le n\ , \end{cases}$$

dann erfüllt die Abbildung $F \circ A\colon A(U) \to \mathbb{R}^m$ die Voraussetzungen des Satzes 6.91 im Punkt $A^{-1}(x_0)$. Sei φ die zugehörige Karte wie oben, dann ist $\varphi \circ A^{-1}$ eine Untermannigfaltigkeitskarte von $F^{-1}(\{y_0\})$ um den Punkt x_0. □

6.97. Beispiel. Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \in \mathbb{R}$ nicht verschwindet. Das Produkt zweier invertierbarer Matrizen A, B ist wieder invertierbar mit $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Man kann also die *allgemeine lineare Gruppe* des $\mathbb{R}^n$ definieren als

$$GL(n, \mathbb{R}) = \bigl\{\, A \in M_n(\mathbb{R}) \bigm| \det A \neq 0 \,\bigr\}\ .$$

Da $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ gilt, erhalten wir auch die *spezielle lineare Gruppe*

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{\, A \in GL(n, \mathbb{R}) | \det A = 1 \,\}\ .$$

Für eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$ bezeichne $A^t = (a_{ji})_{i,j}$ die transponierte Matrix. Die zu A gehörige lineare Abbildung A ist genau dann *orthogonal*, das heißt, sie erhält das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, wenn $A^t \cdot A = E_n$ die n-dimensionale Einheitsmatrix ist. Das Produkt zweier orthogonaler Matrizen ist wieder orthogonal, und jede orthogonale Matrix A besitzt ein orthogonales Inverses A^t, man nennt daher

$$O(n) = \bigl\{\, A \in M_n(\mathbb{R}) \bigm| A^t \cdot A = E_n \,\bigr\}$$

die *orthogonale Gruppe* des $\mathbb{R}^n$. Die *spezielle orthogonale Gruppe* des $\mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$SO(n) = \bigl\{\, A \in O(n) \bigm| \det A = 1 \,\bigr\}\ .$$

Sie besteht aus allen orientierungserhaltenden orthogonalen Abbildungen. Beispielsweise ist $SO(3)$ die Gruppe der Drehungen des Euklidischen Raumes um einen festen Punkt (den Nullpunkt).

Wir wollen zeigen, dass diese Gruppen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n^2} \cong M_n(\mathbb{R})$ sind. Gruppen, die zusätzlich die Struktur einer (Unter-) Mannigfaltigkeit tragen, nennt man auch *Lie-Gruppen*.

(1) Da $\det\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ stetig ist, ist $GL(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ eine offene Teilmenge von $M_n(\mathbb{R})$. Genauso kann man das aus Lemma 6.82 schließen. Eine offene Teilmenge U des $\mathbb{R}^{n^2}$ ist eine n^2-dimensionale Mannigfaltigkeit, als Untermannigfaltigkeitskarte nimmt man einfach die Identität $\mathrm{id}_U\colon U \to U \subset \mathbb{R}^{n^2}$.

(2) Da $\det\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ein Polynom in den Einträgen a_{ij} von A ist, siehe etwa die Formel in Abschnitt 6.4 nach Definition 6.73, ist det auch differenzierbar. Um zu zeigen, dass 1 kein kritischer Wert ist, betrachte

$$\begin{aligned} \det{}'(A)(A) &= \lim_{t\to 0} \frac{\det((1+t)A) - \det A}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^n - 1}{t} \underbrace{\det A}_{=1} = n \neq 0 \,. \end{aligned}$$

Also ist $SL(n,\mathbb{R})$ eine (n^2-1)-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n^2} \cong M_n(\mathbb{R})$ nach Satz 6.96.

(3) Die orthogonale Gruppe ist eine $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n^2} \cong M_n(\mathbb{R})$. Um das zu zeigen, sei

$$S_n = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid B = B^t\}$$

der Vektorraum der symmetrischen Matrizen. Da eine symmetrische Matrix $B = (b_{ij})_{i,j}$ durch Angabe der $b_{i,j}$ mit $i \leq j$ bereits eindeutig bestimmt ist, ist $S_n \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Wir definieren eine Abbildung $F\colon M_n(\mathbb{R}) \to S_n$ durch

$$F(a) = A^t \cdot A \,,$$

dann ist $O(n) = F^{-1}(\{E_n\})$. Es bleibt zu zeigen, dass $F'(A)\colon M_n(\mathbb{R}) \to S_n$ surjektiv ist für alle $A \in O(n)$. Für $C \in M_n(\mathbb{R})$ gilt nach der Produktregel, siehe Bemerkung 6.88, dass

$$F'(A)(C) = C^t \cdot A + A^t \cdot C \in S_n \,.$$

Für $B \in S_n$ wähle $C = \frac{1}{2}AB$, dann folgt

$$F'(A)(C) = \frac{1}{2}((AB)^t A + A^t(AB)) = \frac{1}{2}\big(\underbrace{B^t}_{=B}\underbrace{A^t A}_{=E_n} + \underbrace{A^t A}_{=E_n} B\big) = B \,.$$

Also ist $F'(A)$ für alle $A \in O(n)$ surjektiv, somit ist E_n regulärer Wert von F, und nach dem Satz 6.96 vom regulären Wert also $O(n)$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n^2} \cong M_n(\mathbb{R})$ der Dimension $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

(4) Auch die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n)$ ist eine $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $M_n(\mathbb{R})$. Aus $\det(A^t) = \det(A)$ und der Multiplikativität folgt für $A \in O(n)$ nämlich

$$1 = \det(E_n) = \det(A^t) \cdot \det(A) = \det(A)^2 \,,$$

also $\det A = \pm 1$. Somit gilt

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n,\mathbb{R}) = O(n) \cap GL^+(n,\mathbb{R}) \;,$$

wobei

$$GL^+(n,\mathbb{R}) = \overset{-1}{\det}((0,\infty))$$

wie $GL(n,\mathbb{R})$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{n^2} \cong M_n(\mathbb{R})$ ist.

Sei also $x \in SO(n)$ und $\varphi\colon U \to V$ eine Untermannigfaltigkeitskarte von $O(n)$, dann ist $\varphi|_{U \cap GL^+(n,\mathbb{R})}$ eine Untermannigfaltigkeitskarte von $SO(n)$, und $O(n)$ und $SO(n)$ haben die gleiche Dimension.

Es sei jetzt $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $M \subset U$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $h\colon U \to \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion. Wenn $\varphi\colon U' \to V' \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeitskarte von M ist, können wir Extrema von $h|_M$ bestimmen, indem wir $h \circ \varphi^{-1}\colon V' \to \mathbb{R}$ auf $V' \cap \mathbb{R}^m \times \{0\} = \varphi(M)$ einschränken, und mit den Methoden aus Abschnitt 6.4 nach Extrema suchen.

Falls aber M gegeben ist als Urbild eines regulären Wertes $F^{-1}(c)$ einer $\mathcal{C}^k$-Abbildung $F\colon U \to \mathbb{R}^{n-m}$, gibt es eine Methode, zumindest kritische Punkte von $h|_M$, das heißt, kritische Punkte von $h \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(M)}$, zu bestimmen, ohne erst eine Untermannigfaltigkeitskarte von M zu konstruieren.

6.98. Satz (Lagrangesche Multiplikatorregel). *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $c \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert einer $\mathcal{C}^k$-Abbildung $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ und $h\colon U \to \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion. Dann ist x_0 genau dann ein kritischer Punkt von $h|_M$, wobei $M = F^{-1}(\{c\})$, wenn der Zeilenvektor $h'(x_0)$ eine Linearkombination der Zeilen der Jacobi-Matrix $F'(x_0)$ ist.*

Mit anderen Worten existieren $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$, so dass

$$h'(x_0) = \sum_{i=1}^m a_i \circ F_i'(x_0)$$

gilt, wobei F_i die Komponentenfunktionen von F sind. Die Zahlen a_i heißen auch *Lagrange-Multiplikatoren.*

Beweis. Wir nehmen an, dass die ersten m Spalten der Jacobi-Matrix linear unabhängig sind, andernfalls gehen wir wie im zweiten Teil des Beweises von Satz 6.96 vor. Wir dürfen also eine Untermannigfaltigkeitskarte $\varphi\colon U' \to V'$ mit

$$\varphi\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \overline{F}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x) - c \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in U'$$

betrachten. Wir erinnern uns an die Blockgestalt von $\varphi'(x)$ und $\varphi'(x)^{-1}$:

$$\varphi'(x) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & E_{n-m} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \varphi'(x)^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & E_{n-m} \end{pmatrix} \;.$$

Wenn x_0 ein kritischer Wert von $h|_M$, also $\varphi(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ ein kritischer Wert von $(h \circ \varphi^{-1})|_{\{0\}\times\mathbb{R}^{n-m}}$ ist, folgt aus der Kettenregel, dass

$$0 = (h \circ \varphi^{-1})' \begin{pmatrix} 0 \\ z_0 \end{pmatrix}\Big|_{\{0\}\times\mathbb{R}^{n-m}} = h'(x_0) \cdot \begin{pmatrix} -A^{-1}B \\ E_{n-m} \end{pmatrix} .$$

Somit verschwindet $h'(x)$ auf den rechten $(n-m)$ Spalten von $\varphi'(x_0)^{-1}$. Da die Zeilen $\varphi_i'(x_0)$ von $\varphi'(x_0)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden, existieren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$h'(x_0) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \varphi_i'(x_0) = \sum_{i=1}^m a_i \cdot F_i'(x_0) + \sum_{i=m+1}^n a_i \cdot e_i .$$

Anwenden auf die j-te Spalte $v_j = \varphi'(x_0)^{-1}(e_j)$ liefert

$$a_j = h'(x_0)(v_j) = (h \circ \varphi^{-1})' \begin{pmatrix} 0 \\ z_0 \end{pmatrix} (e_j) = 0$$

für $j > m$, da $\varphi'(x_0)$ und $\varphi'(x_0)^{-1}$ zueinander invers sind und daher

$$\varphi_i'(x_0)(v_j) = (\varphi_i'(x_0) \cdot \varphi'(x_0)^{-1})(e_j) = 0$$

für alle $i \neq j$. Das beweist die Aussage „$\Longrightarrow$“ im Satz. Umgekehrt zeigt die Existenz der Lagrange-Multiplikatoren mit der obigen Rechnung, dass x_0 ein kritischer Wert von $h|_M$ ist. □

6.6. Kurvenintegrale

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in \mathcal{C}^k(U)$ mit $k \geq 2$. Dann ordnet die Ableitung f' von f jedem Punkt einen Zeilenvektor zu, also $f' \in \mathcal{C}^{k-1}(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$. Sei jetzt $\alpha \in \mathcal{C}^{k-1}(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ beliebig, dann fragen wir uns, ob es eine Funktion $f \in \mathcal{C}^k(U)$ mit $f' = \alpha$ gibt. Nach dem Satz 6.68 von Schwarz muss dann

$$\partial_i \alpha_j = \partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f = \partial_j \alpha_i$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$ gelten. Wir werden sehen, dass diese notwendige Bedingung beinahe hinreichend ist. Zur Konstruktion einer „Stammfunktion“ führen wir das Kurvenintegral ein.

6.99. Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine *Kurve* oder ein *Weg* in U ist eine stetige Abbildung von einem Intervall nach U. Eine $\mathcal{C}^k$-Kurve ist eine k-fach stetig differenzierbare Kurve.

Eine *Pfaffsche Form* oder auch *Differentialform* ersten Grades, kurz 1-*Form*, ist eine Abbildung von U in den Raum $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ der n-komponentigen Zeilenvektoren. Eine $\mathcal{C}^k$-1-Form ist eine k-fach stetig differenzierbare 1-Form.

6.100. Bemerkung. (1) Es sei α eine 1-Form auf $U \subset \mathbb{R}^n$, dann können wir aus α ein Vektorfeld $V\colon U \to \mathbb{R}^n$ machen, indem wir die Zeile $\alpha(x)$ zu einer Spalte $V(x) = \alpha(x)^t$ transponieren. Für alle $x \in U$ und alle $w \in \mathbb{R}^n$ gilt dann

$$\alpha(x)(w) = \langle V(x), w \rangle .$$

(2) Eine Basis des Raumes $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ bilden die totalen Ableitungen der Koordinatenfunktionen x_i mit

$$dx_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, dx_n = (0, \dots, 0, 1) ,$$

da $\partial_i x_j = \delta_{ij}$, also $\partial_i x_i = 1$ und $\partial_i x_j = 0$ für $i \neq j$.

Es sei $f \in \mathcal{C}^1(U)$, und $\gamma\colon [a, b] \to U$ eine $\mathcal{C}^1$-Kurve. Aus dem Hauptsatz 5.47 und der Kettenregel 6.57 folgt dann

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t)\, dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n \partial_i f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma_i(t)\, dt .$$

Wir erinnern uns, dass $\dot\gamma_i$ die i-te Komponente von $\frac{\partial\gamma}{\partial t}$ bezeichnet.

6.101. Definition. Es sei α eine stetige 1-Form auf $U \subset \mathbb{R}^n$ und $\gamma\colon [a, b] \to U$ eine $\mathcal{C}^1$-Kurve. Wir definieren das *Kurvenintegral* von α entlang von γ durch

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \alpha(\gamma(t))\, d\gamma(t) = \int_a^b \sum_{i=1}^n \alpha_i(\gamma(t))\dot\gamma_i(t)\, dt .$$

Die linke und die mittlere Schreibweise sind als Abkürzungen der rechten Seite zu verstehen. Wir dürfen jetzt schreiben

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_\gamma df .$$

In den Beispielen 6.109 und 6.111 berechnen wir einige Kurvenintegrale.

6.102. Proposition. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\gamma\colon [a, b] \to U$ eine $\mathcal{C}^1$-Kurve. Das Kurvenintegral hat folgende Eigenschaften:*

(1) *Falls γ konstant ist, gilt*

$$\int_\gamma \alpha = 0 .$$

(2) Linearität*: für stetige 1-Formen α, β auf U und r, $s \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_\gamma (r\alpha + s\beta) = r \int_\gamma \alpha + s \int_\gamma \beta .$$

(3) Additivität*: Es sei $c \in (a, b]$ und $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$ und $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$, dann gilt*

$$\int_\gamma \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha + \int_{\gamma_2} \alpha .$$

(4) Invarianz unter Umparametrisierung*: Sei $\varphi\colon [p, q] \to [a, b]$ ein monoton steigender $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus und $\delta = \gamma \circ \varphi$, dann gilt*

$$\int_\gamma \alpha = \int_\delta \alpha .$$

Beweis. Wenn γ konstant ist, gilt $\dot\gamma(t) = 0$ für alle $t \in [a,b]$, und es folgt (1). Aussagen (2) und (3) folgen aus den Eigenschaften (2) und (3) des Regelintegrals aus Abschnitt 3.6. Für (4) benutzen wir die Substitutionsregel 5.60

$$\begin{aligned}\int_\delta \alpha &= \int_p^q \sum_{i=1}^m \alpha_i(\delta(s))\dot\delta_i(s)\,ds\\ &= \int_p^q \sum_{i=1}^n \alpha_i(\gamma(\varphi(s)))\dot\gamma_i(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds\\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n \alpha_i(\gamma(t))\dot\gamma_i(t)\,dt = \int_\gamma \alpha\ . \qquad \square\end{aligned}$$

Als nächstes wollen wir uns überlegen, dass das Kurvenintegral sich nicht ändert, falls $\partial_i\alpha_j = \partial_j\alpha_i$ für alle $1 \le i < n \le n$ gilt und man γ durch Kurven $\gamma_s\colon [a,b] \to U$ mit $\gamma_s(a) = \gamma(a)$ und $\gamma_s(b) = \gamma(b)$ für alle $s \in [0,1]$ stetig variiert.

6.103. Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und γ_0, $\gamma_1\colon [a,b] \to U$ Kurven. Eine *Homotopie* zwischen γ_0 und γ_1 in U relativ zum Anfangs- und Endpunkt ist eine stetige Abbildung $h\colon [a,b] \times [0,1] \to U$ mit

$$\begin{aligned} h(t,0) &= \gamma_0(t)\ , &\qquad& & h(t,1) &= \gamma_1(t)\ ,\\ h(a,s) &= h(a,0) &\qquad& \text{und} & h(b,s) &= h(b,0)\end{aligned}$$

für alle $s \in [0,1]$ und alle $t \in [a,b]$. Wir schreiben $\gamma_s(t)$ für $h(t,s)$. Zwei Kurven γ_0, γ_1 heißen *homotop*, wenn es eine Homotopie zwischen ihnen gibt.

Eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to U$ heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$. Zwei geschlossene Kurven γ_0, $\gamma_1\colon [a,b] \to U$ heißen *frei homotop* in U, wenn es eine *freie Homotopie*, d.h., eine stetige Abbildung $h\colon [a,b]\times[0,1] \to U$ mit $h(a,s) = h(b,s)$ für alle $s \in [0,1]$ und $h(t,0) = \gamma_0(t)$, $h(t,1) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [a,b]$ gibt.

6.104. Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und α eine differenzierbare 1-Form auf U. Dann heißt α *geschlossen*, wenn $\partial_i\alpha_j = \partial_j\alpha_i$ für alle $1 \le i,\ j \le n$, und *exakt*, wenn es eine *Stammfunktion* $f \in \mathcal{C}^1(U)$ gibt, das heißt, es gilt $\alpha = f' = df$ auf ganz U.

Aus dem Satz 6.68 von Schwarz folgt, dass jede exakte Differentialform geschlossen ist. Die Umkehrung gilt nicht immer.

Wir erinnern uns an Aufgabe 2 von Blatt II.9. Dort hatten wir gesehen, dass für stetig differenzierbare Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ mit $[a,b] \times [0,1] \subset U$ gilt, dass

$$\frac{d}{ds}\int_a^b f(t,s)\,dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(t)\,dt\ .$$

6.105. Satz (Homotopieinvarianz des Kurvenintegrals). *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und α eine geschlossene Form auf U.*

(1) *Es seien* γ_0, $\gamma_1\colon [a,b] \to U$ *zwei in* U *homotope* $\mathcal{C}^1$*-Kurven mit* $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ *und* $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$. *Dann gilt*
$$\int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha\;.$$

(2) *Es seien* γ_0, $\gamma_1\colon [a,b] \to U$ *zwei in* U *frei homotope geschlossene* $\mathcal{C}^1$*-Kurven, dann gilt*
$$\int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha\;.$$

Beweis. Es seien zunächst γ_0, $\gamma_1\colon [a,b] \to U$ zwei $\mathcal{C}^1$-Kurven, und es sei $h\colon [a,b] \times [0,1] \to U$ eine $\mathcal{C}^2$-Abbildung mit $\gamma_0(t) = h(t,0)$ und $\gamma_1(t) = h(t,1)$. Für $s \in [0,1]$ schreiben wir wieder $\gamma_s(t) = h(t,s)$ für alle $t \in [a,b]$. Außerdem definieren wir Kurven δ_a, $\delta_b\colon [0,1] \to U$ mit $\delta_a(s) = h(a,s)$ und $\delta_b(s) = h(b,s)$.

Wir definieren eine Funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit
$$g(s) = \int_{\gamma_s} \alpha = \int_a^b \sum_{i=1}^m \alpha_i(h(t,s)) \frac{\partial h_i}{\partial t}(t,s)\,dt\;.$$
Aus dem Hauptsatz 5.47 der Differential- und Integralrechnung und Aufgabe 2 von Blatt II.9 ergibt sich, dass
$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \alpha - \int_{\gamma_0} \alpha = g(1) - g(0) &= \int_0^1 g'(s)\,ds \\
&= \int_0^1 \int_a^b \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial s}\biggl(\alpha_i(h(t,s)) \frac{\partial h_i}{\partial t}(t,s)\biggr)\,dt\,ds \\
&= \int_0^1 \int_a^b \sum_{i=1}^m \biggl(\sum_{j=1}^m \partial_j \alpha_i(h(t,s)) \cdot \frac{\partial h_j}{\partial s}(t,s) \cdot \frac{\partial h_i}{\partial t}(t,s) \\
&\qquad\qquad + \alpha_i(h(t,s)) \cdot \frac{\partial^2 h_i}{\partial s\,\partial t}(t,s)\biggr)\,dt\,ds\;.
\end{aligned}$$
Indem wir die Geschlossenheit von α ausnutzen und den Satz von Schwarz auf h anwenden, erhalten wir
$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \alpha - \int_{\gamma_0} \alpha &= \int_0^1 \int_a^b \sum_{j=1}^m \biggl(\sum_{i=1}^m \partial_i \alpha_j(h(t,s)) \cdot \frac{\partial h_i}{\partial t}(t,s) \frac{\partial h_j}{\partial s}(t,s) \\
&\qquad\qquad + \alpha_j(h(t,s)) \cdot \frac{\partial^2 h_j}{\partial t\,\partial s}(t,s)\biggr)\,dt\,ds \\
&= \int_0^1 \int_a^b \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial t}\biggl(\alpha_j(h(t,s)) \cdot \frac{\partial h_j}{\partial s}(t,s)\biggr)\,dt\,ds \\
&= \int_0^1 \sum_{j=1}^m \alpha_j(h(t,s)) \cdot \frac{\partial h_j}{\partial s}(t,s)\,ds\Big|_{t=a}^b
\end{aligned}$$

$$= \int_{\delta_b} \alpha - \int_{\delta_a} \alpha$$

nach dem Hauptsatz 5.47 und der Definition des Kurvenintegrals. Zusammengefasst gilt also

$$(*) \qquad \int_{\gamma_1} \alpha - \int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\delta_b} \alpha - \int_{\delta_a} \alpha \,.$$

Für den Fall, dass die Homotopie h im Satz eine $\mathcal{C}^2$-Abbildung ist, können wir den Satz bereits beweisen. Den allgemeinen Fall behandeln wir anschließend. Für Aussage (1) benutzen wir, dass die Kurven δ_a und δ_b in diesem Fall konstant sind, so dass die rechte Seite von (*) nach Proposition 6.102 verschwindet. Für (2) verschwindet die rechte Seite von (*) ebenfalls, da jetzt $\delta_a = \delta_b$ gilt.

Im allgemeinen Fall ersetzen wir die stetige Homotopie h durch eine Abbildung, die zumindest stückweise von der Klasse $\mathcal{C}^2$ ist, und benutzen dann (*). Nach Proposition 6.102 (3) sei ohne Einschränkung $a = 0$, $b = 1$. Wir bestimmen zu jedem $x \in U$ einen Radius $r_x > 0$ so, dass $B^{\mathbb{R}^n}_{r_x}(x) \subset U$, und erhalten eine offene Überdeckung von U durch Bälle. Da h stetig ist, erhalten wir eine offene Überdeckung

$$\mathcal{U} = \left\{ h^{-1}\left(B^{\mathbb{R}^n}_{r_x}(x)\right) \middle| x \in U \right\}$$

von $[a,b] \times [0,1] = [0,1]^2$. Nach dem Lebesgueschen Überdeckungssatz 6.30 besitzt $\mathcal{U}$ eine Lebesgue-Zahl $\delta > 0$, da $[0,1]^2$ kompakt ist. Dann existiert zu jedem $(t,s) \in [0,1]^2$ ein $x \in U$, so dass

$$h(\tau,\sigma) \in B^{\mathbb{R}^n}_{r_x}(x) \subset U$$

für alle $(\tau,\sigma) \in B^{\mathbb{R}^2}_{\delta}((t,s)) \cap [0,1]^2$. Insbesondere finden wir $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass für jedes Rechteck

$$R_{p,q} = \left[\frac{p-1}{m}, \frac{p}{m}\right] \times \left[\frac{q-1}{m}, \frac{q}{m}\right]$$

mit $p, q \in \{1, \dots, m\}$ ein $x \in U$ existiert mit $h(\tau,\sigma) \in B^{\mathbb{R}^n}_{r_x}(x) \subset U$ für alle $(\tau, s) \in R_{p,q}$.

Wir definieren eine $\mathcal{C}^2$-Abbildung $h_{p,q} \colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\begin{aligned} h_{p,q}(t,s) = (1-s) \, &\left((1-t)\, h\Big(\frac{p-1}{m}, \frac{q-1}{m}\Big) + t\, h\Big(\frac{p}{m}, \frac{q-1}{m}\Big) \right) \\ &+ s \left((1-t)\, h\Big(\frac{p-1}{m}, \frac{q}{m}\Big) + t\, h\Big(\frac{p}{m}, \frac{q}{m}\Big) \right) \,. \end{aligned}$$

Da die vier Eckpunkte für $(t,s) \in \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$ in einem konvexen Ball $B^{\mathbb{R}^n}_{r_x}(x) \subset U$ liegen, bildet $h_{p,q}$ nach U ab.

Wir betrachten außerdem Kurven $\gamma_{p,q} \colon [0,1] \to U$ für $1 \le p \le m$ und $0 \le q \le m$ und $\delta_{p,q} \colon [0,1] \to U$ für $0 \le p \le m$ und $1 \le q \le m$, so dass

$$\begin{aligned} \gamma_{p,q}(t) &= h_{p,q}(t,1) && \text{falls } q \ge 1 \,, \\ \gamma_{p,q}(t) &= h_{p,q+1}(t,0) && \text{falls } q < m \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{p,q}(s) &= h_{p,q}(1,s) &&\text{falls } p \geq 1\ ,\ \text{und}\\ \delta_{p,q}(s) &= h_{p+1,q}(0,s) &&\text{falls } p < m\ .\end{aligned}$$

Aus (*) folgt dann

$$\int_{\gamma_{p,q}} \alpha - \int_{\gamma_{p,q-1}} \alpha = \int_{\delta_{p,q}} \alpha - \int_{\delta_{p-1,q}} \alpha\ .$$

Mittels zweier Teleskop-Summen ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{m}\left(\int_{\gamma_{p,m}} \alpha - \int_{\gamma_{p,0}} \alpha\right) &= \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{m}\left(\int_{\gamma_{p,q}} \alpha - \int_{\gamma_{p,q-1}} \alpha\right)\\ &= \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{m}\left(\int_{\delta_{p,q}} \alpha - \int_{\delta_{p-1,q}} \alpha\right) = \sum_{q=1}^{m}\left(\int_{\delta_{m,q}} \alpha - \int_{\delta_{0,q}} \alpha\right)\ .\end{aligned}$$

Wir wollen noch zeigen, dass die linke Seite mit der Differenz der Integrale über die ursprünglichen Kurven γ_0 und γ_1 übereinstimmt. Dazu sei

$$k_p(t,s) = (1-s)\gamma_0\left(\frac{p-1+t}{m}\right) + s\gamma_{p,0}(t)$$

für $1 \leq p \leq m$. Leider ist k_p nur von der Klasse $\mathcal{C}^1$ wie γ_0, aber die gemischten partiellen Ableitungen von k_p existieren, sind stetig und erfüllen

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 k_p}{\partial s\,\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1-s}{m}\dot\gamma_0\left(\frac{p-1+t}{m}\right) + s\dot\gamma_{p,0}(t)\right)\\ &= -\frac{1}{m}\dot\gamma\left(\frac{p-1+t}{m}\right) + \dot\gamma_{p,0}(t)\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-\gamma\left(\frac{p-1+t}{m}\right) + \gamma_{p,0}(t)\right) = \frac{\partial^2 k_p}{\partial t\,\partial s}\ .\end{aligned}$$

Daher können wir auch Aufgabe 2 von Blatt II.9 noch anwenden, denn dort wurde nur benutzt, dass die Ableitung des Integranden nach s existiert und stetig ist. Also können wir die obige Rechnung auch hier anwenden. Da $\gamma_0\left(\frac{p-1}{m}\right) = \gamma_{p,0}(0)$ und $\gamma_0\left(\frac{p}{m}\right) = \gamma_{p,0}(1)$, gilt $\frac{\partial k_p}{\partial s}(0,s) = \frac{\partial k_p}{\partial s}(1,s) = 0$, und daher

$$\int_{\gamma_0|_{[\frac{p-1}{m},\frac{p}{m}]}} \alpha - \int_{\gamma_{p,0}} \alpha = 0\ .$$

Zusammensetzen liefert

$$\int_{\gamma_0} \alpha = \sum_{p=1}^{m}\int_{\gamma_0|_{[\frac{p-1}{m},\frac{p}{m}]}} \alpha = \sum_{p=1}^{m}\int_{\gamma_{p,0}} \alpha\ .$$

Genauso zeigt man

$$\int_{\gamma_1} = \sum_{p=1}^{m}\int_{\gamma_{p,m}} \alpha\ .$$

Insgesamt ergibt sich daraus

$$\int_{\gamma_1} \alpha - \int_{\gamma_0} \alpha = \sum_{p=1}^{m} \left(\int_{\gamma_{p,m}} \alpha - \int_{\gamma_{p,0}} \alpha \right) = \sum_{q=1}^{m} \left(\int_{\delta_{m,q}} \alpha - \int_{\delta_{0,q}} \alpha \right) .$$

Um (1) zu zeigen, nutzen wir wie oben aus, dass die Kurven $\delta_{m,q}$ und $\delta_{0,q}$ beide konstant sind, und daher die rechte Seite oben verschwindet. Und (2) folgt ebenfalls aus obiger Gleichung, da in diesem Fall $\delta_{m,q} = \delta_{0,q}$ gilt, und daher die rechte Seite wieder verschwindet. □

Wir geben jetzt einige Anwendungen des obigen Satzes an. Als erstes konstruieren wir Stammfunktionen. Wenn α eine geschlossene 1-Form auf $U \subset \mathbb{R}^n$ ist, wollen wir $x_0 \in U$ festlegen und eine Funktion $f \colon U \to \mathbb{R}$ definieren, indem wir zu jedem Punkt $x \in U$ eine $\mathcal{C}^1$-Kurve $\gamma \colon [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x$ wählen und

$$f(x) = \int_\gamma \alpha$$

setzen. Damit das gut geht, muss U wegzusammenhängend sein und je zwei Kurven in U mit gleichen Anfangs- und Endpunkten müssen homotop sein.

6.106. Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend. Dann heißt U *einfach zusammenhängend*, wenn je zwei Kurven γ_0, $\gamma_1 \colon [a,b] \to U$ mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ und $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ homotop sind.

6.107. Bemerkung.
(1) Da U offen ist, ist U nach Bemerkung 6.23 bereits wegzusammenhängend, wenn U nur zusammenhängend ist.
(2) Wenn U einfach zusammenhängend ist, dann ist insbesondere jede geschlossene Kurve $\gamma \colon [a,b] \to U$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ zur konstanten Kurve $t \mapsto \gamma(a)$ homotop. Man sagt dazu, γ sei *nullhomotop*.
(3) Man kann zeigen, dass die Umkehrung von (2) gilt: wenn U zusammenhängend und jede geschlossene Kurve in U nullhomotop ist, dann ist U einfach zusammenhängend.
(4) Eine konvexe Menge U ist einfach zusammenhängend, da wir zu γ_0, $\gamma_1 \colon [a,b] \to U$ wie in Definition 6.106 eine Homotopie $h \colon [a,b] \times [0,1] \to U$ angeben können durch

$$h(t,s) = (1-s)\,\gamma_0(t) + s\,\gamma_1(t) .$$

6.108. Satz (Poincaré-Lemma für 1-Formen). *Auf einfach zusammenhängenden, offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind alle geschlossenen $\mathcal{C}^1$-1-Formen exakt.*

Beweis. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und einfach zusammenhängend, und α eine geschlossene $\mathcal{C}^1$-1-Form auf U. Wir fixieren $x_0 \in U$. Zu jedem $x \in U$ existiert eine Kurve $\gamma \colon [0,1] \to U$ von $x_0 = \gamma(0)$ nach $x = \gamma(1)$. Da γ stetig ist, finden wir $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ wie im Beweis von Satz 6.105, so dass die Geradenstücke $\gamma_i \colon [0,1] \to U$ für $1 \le i \le m$ mit

$$\gamma_i(t) = (1-t)\,\gamma\left(\frac{i-1}{m}\right) + t\,\gamma\left(\frac{i}{m}\right)$$

ganz in U verlaufen. Wir setzen

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} \alpha \; .$$

Für eine andere Kurve γ' wählen wir $m' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und unterteilen γ' wie oben. Nach Proposition 6.102 ändert sich am obigen Wert nichts, wenn wir jede Gerade γ_i noch einmal in m' Teilstücke zerlegen. Genauso zerlegen wir γ'_j in insgesamt m Teilstücke. Ein Argument wie im Satz 6.105 zeigt dann, dass

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} \alpha = \sum_{j=1}^{m'} \int_{\gamma'_j} \alpha \; ,$$

also ist f wohldefiniert. Beachte: wären γ und γ' zwei $\mathcal{C}^1$-Kurven, so würde

$$f(x) = \int_{\gamma} \alpha = \int_{\gamma'} \alpha$$

unmittelbar aus Satz 6.105 folgen.

Es bleibt zu zeigen, dass f tatsächlich eine Stammfunktion von α ist. Sei dazu $x \in U$ und seien $\gamma_i \colon [0,1] \to U$ Geradenstücke mit $\gamma_1(0) = x_0$, $\gamma_i(1) = \gamma_{i+1}(0)$ und $\gamma_m(1) = x$ wie oben. Da U offen ist, existiert $r > 0$ mit $B_r(x) \subset U$. Für $v \in B_r(0) \in \mathbb{R}^n$ setze

$$\gamma_v(t) = x + tv$$

für alle $t \in [0,1]$. Dann gilt

$$f(x+v) = \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} \alpha + \int_{\gamma_v} \alpha \; .$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} f(x+v) - f(x) &= \int_{\gamma_v} \alpha = \int_0^1 \alpha(x+tv)(v)\,dt \\ &= \alpha(x)(v) + \big(\underbrace{\alpha(x+\tau v) - \alpha(x)}_{=o(\|v\|^0)}\big)(v) = \alpha(x)(v) + o(\|v\|^1) \; , \end{aligned}$$

somit ist f bei x total differenzierbar mit $f'(x) = \alpha(x)$. Also gilt $\alpha = df$, und f ist Stammfunktion von α. $\square$

Wir haben in den Beweisen der Sätze 6.105 und 6.108 gesehen, dass es zweckmäßig sein kann, das Kurvenintegral für stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurven zu definieren. Wenn $\gamma\,|_{(t_{i-1},t_i)}$ stetig differenzierbar ist für $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$, setzt man einfach

$$\int_{\gamma} \alpha = \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma|_{(t_{i-1},t_i)}} \alpha \; .$$

Eine noch allgemeinere Definition findet sich im Buch von Königsberger.

6.109. Beispiel. In Satz 6.108 muss man verlangen, dass U einfach zusammenhängend ist. Betrachten wir etwa $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und

$$\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}\;,$$

dann gilt

$$\partial_2\alpha_1 = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

und

$$\partial_1\alpha_2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \partial_2\alpha_1\;,$$

also ist α geschlossen. Wäre α exakt mit Stammfunktion f, so würde für die geschlossene Kurve $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$$

gelten, dass

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma df = f(\gamma(0)) - f(\gamma(2\pi)) = f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0\;.$$

Wir wollen dieses Integral berechnen, und überlegen uns dazu, dass

$$dx(\dot\gamma(t)) = dx\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} = -\sin t \qquad\text{und}\qquad dy(\dot\gamma(t)) = \cos t\;.$$

Dann gilt aber

$$\int_\gamma \alpha = \int_0^{2\pi} \alpha\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = 2\pi \neq 0\;.$$

Also besitzt α keine Stammfunktion.

6.110. Satz (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nichtkonstante komplexe Polynom hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Es sei $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

ein nichtkonstantes Polynom mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Wir dürfen annehmen, dass $a_n \neq 0$, dann ist n der Grad des Polynoms. Da P nicht konstant ist, gilt $n \geq 1$.

Wir nehmen an, dass P keine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat. Für alle $R \geq 0$ verläuft dann die geschlossene Kurve $\gamma_R\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma_R(t) = P(Re^{it})$$

ganz in $U = \mathbb{C} \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Für alle R ist $h_R\colon [0,2\pi] \times [0,1] \to U$ mit

$$h_R(t,s) = P(Rse^{it})$$

eine freie Homotopie zwischen der konstanten Kurve γ_0 und der Kurve γ_R. Wir betrachten wieder die geschlossene 1-Form α auf U aus Beispiel 6.109 und erhalten

$$\int_{\gamma_R} \alpha = \int_{\gamma_0} \alpha = 0$$

nach Satz 6.105 und Proposition 6.102 (1).

Wir wollen zeigen, dass das Integral nicht verschwindet, um einen Widerspruch zu erhalten. Dazu betrachten wir den Grenzübergang $R \to \infty$. Es gilt

$$\gamma_R(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k R^k e^{ikt} = R^n \Bigl(a_n e^{int} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k R^{k-n} e^{ikt}}_{= o(R^0) \text{ für } R \to \infty} \Bigr)$$

und

$$\dot\gamma_R(t) = i \sum_{k=0}^{n} k a_k R^k e^{ikt} = i R^n \Bigl(n a_n e^{int} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} k a_k R^{k-n} e^{ikt}}_{= o(R^0) \text{ für } R \to \infty} \Bigr) .$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} \alpha &= \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{Re}(\gamma_R(t)) \operatorname{Im}(\dot\gamma_R(t)) - \operatorname{Im}(\gamma_R(t)) \operatorname{Re}(\dot\gamma_R(t))}{|\gamma_R(t)|^2} \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \Biggl(\frac{\operatorname{Re}\bigl(a_n e^{int} + o(R^0)\bigr) \operatorname{Im}\bigl(i n a_n e^{int} + o(R^0)\bigr)}{|a_n e^{int}|^2 + o(R^0)} \\
&\qquad\qquad - \frac{\operatorname{Im}\bigl(a_n e^{int} + o(R^0)\bigr) \operatorname{Re}\bigl(i n a_n e^{int} + o(R^0)\bigr)}{|a_n e^{int}|^2 + o(R^0)} \Biggr) \, dt
\end{aligned}$$

nach Kürzen durch R^{2n}. Wir ziehen in aus den Real- und Imaginärteilen im zweiten Faktor mit $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z)$ und $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}(z)$ und erhalten

$$\int_{\gamma_R} \alpha = \int_0^{2\pi} \Biggl(n \, \frac{\operatorname{Re}\bigl(a_n e^{int}\bigr)^2 + \operatorname{Im}\bigl(a_n e^{int}\bigr)^2}{|a_n e^{int}|^2} + o(R^0) \Biggr) \, dt = 2\pi n + o(R^0) \neq 0$$

für $R \to \infty$, da $n \geq 1$, im Widerspruch zur obigen Rechnung. Also ist γ_R für große R in $\mathbb{C} \setminus 0$ nicht nullhomotop, das heißt, das Polynom P hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. □

Aus dem Fundamentalsatz kann man durch iterierte Polynomdivision schließen, dass jedes nichtkonstante Polynom P über $\mathbb{C}$ auf eindeutige Weise in ein Produkt von Linearfaktoren zerfällt:

$$P(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n) ,$$

dabei sind $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von P, und n ist der Grad von P.

6.111. Beispiel. *Berechnung von Flächeninhalten.* Bei der Definition des Integrals haben wir am Anfang von Abschnitt 3.6 gesagt, dass das Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

den Inhalt der Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von f beschreiben soll, wenn $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt. Wenn f stetig differenzierbar ist, wird diese Fläche von vier $\mathcal{C}^1$-Kurven $\gamma_i\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ berandet:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t)\,a + tb \\ 0 \end{pmatrix} , \\ \gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ t\,f(b) \end{pmatrix} , \\ \gamma_3(t) &= \begin{pmatrix} x_3(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t)\,b + t\,a \\ f((1-t)\,b + t\,a) \end{pmatrix} \\ \text{und } \gamma_4(t) &= \begin{pmatrix} x_4(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ (1-t)\,f(a) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Wir betrachten die 1-Form

$$\alpha = -y\,dx$$

auf $\mathbb{R}^2$. Sie ist nicht geschlossen, denn

$$\partial_1\alpha_2 = \frac{\partial}{\partial x} 0 = 0 \neq -1 = \frac{\partial}{\partial y}(-y) = \partial_2\alpha_1 .$$

Das Integral $\int_{\gamma_1} \alpha$ verschwindet, da $y_1(t) = 0$ auf ganz $[0,1]$. Die Integrale $\int_{\gamma_2} \alpha$ und $\int_{\gamma_3} \alpha$ verschwinden ebenfalls, da $\dot x_2(t) = \dot x_4(t) = 0$ auf ganz $[0,1]$. Mit der Substitutionsregel 5.60 und $x = (1-t)b + ta$ berechnen wir

$$\int_{\gamma_3} \alpha = -\int_0^1 y_3(t)\,\dot x_3(t)\,dt = \int_0^1 f((1-t)b + ta)\,(b-a)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx .$$

Somit berechnet das Kurvenintegral von α über die aus $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ zusammengesetzte Kurve den Flächeninhalt der eingeschlossenen Fläche.

Sei jetzt $\gamma(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$ eine geschlossene $\mathcal{C}^1$-Kurve, die eine Fläche im $\mathbb{R}^2$ umläuft, so dass $\dot x(t) = 0$ nur für endlich viele t im Definitionsbereich gilt. Dann lässt sich die umlaufene Fläche durch Summen und Differenzen von Flächenstücken zwischen der Kurve und der x-Achse wie oben berechnen. Dabei heben sich alle Beiträge zum Kurvenintegral, die nicht von Teilstücken von γ herrühren, weg, und man erhält als Ausdruck für die Fläche

$$A = \int_\gamma \alpha = -\int_\gamma y\,dx .$$

Diese Formel ist ein Spezialfall des Satzes von Green. Mit diesem Verfahren funktionieren mechanische Planimeter, die den Flächeninhalt einer mit einem Stift umfahrenen Fläche angeben.

KAPITEL 7

Das Lebesgue-Integral

In diesem Kapitel behandeln wir die Integration von Funktionen in mehreren Veränderlichen. Im Hinblick auf die Anforderungen in späteren Vorlesungen definieren wir einen Integralbegriff so, dass er für „schöne Funktionen“ auf Intervallen mit dem Regel- oder dem Riemann-Integral übereinstimmt, aber auf der anderen Seite für möglichst viele Funktionen definiert ist. Hierzu geben wir ein paar Beispiele.

7.1. Beispiel. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist keine Regelfunktion nach Definition 3.55, da für kein $x \in \mathbb{R}$ der links- oder rechtsseitige Grenzwert existiert. Also ist f nicht regelintegrierbar.

Wir versuchen, das Riemann-Integral von $f|_{[a,b]}$ zu bestimmen. Als unteres Integral erhalten wir 0, als oberes $b-a$. Also ist f nach Definition 3.68 auch nicht Riemann-integrierbar.

Ohne zu wissen, wie das Lebesgue-Integral genau definiert ist, wollen wir nachrechnen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 0\ .$$

Da $f \geq 0$ auf ganz $\mathbb{R}$ gilt, erwarten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} 0\, dx = 0\ .$$

Auf der anderen Seite erinnern wir uns, dass $\mathbb{Q}$ eine abzählbare Menge ist, siehe Bemerkung 1.80. Wir finden also eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, in der jede rationale Zahl genau einmal als Folgenglied vorkommt. Zu $\varepsilon > 0$ definieren wir eine Teilmenge

$$M_\varepsilon = \bigl\{ x \in \mathbb{R} \bigm| \text{ es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x \in \bigl[q_n - 2^{-n}\varepsilon, q_n + 2^{-n}\varepsilon\bigr] \bigr\}$$

der reellen Zahlen. Da $q_n \in \bigl[q_n - 2^{-n}\varepsilon, q_n + q^{-n}\varepsilon\bigr]$ gilt, folgt $\mathbb{Q} \subset M_\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$.

Wir definieren eine neue Funktion $f_\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M_\varepsilon, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt sicherlich $f_\varepsilon \geq f$ für alle $\varepsilon > 0$. Wir überlegen uns, dass jedes Element $x \in M_\varepsilon$ in mindestens einem Intervall $\bigl[q_n - 2^{-n}\varepsilon, q_n + 2^{-n}\varepsilon\bigr]$ enthalten ist, eventuell sogar in mehreren. Also gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\,dx &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{q_n-2^{-n}\varepsilon}^{q_n+2^{-n}\varepsilon} 1\,dx\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{1-n}\varepsilon = 4\varepsilon\ .\end{aligned}$$

Wir schließen daraus, dass

$$0 \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\,dx \leq 4\varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$ gilt, und somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0\ .$$

7.2. Bemerkung. Das obige Beispiel lässt sich auch anders verstehen. Wenn $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge ist, und die *Indikatorfunktion* $\mathbf{1}_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lebesgue-integrierbar ist, dann sagen wir, dass die Menge A das *Lebesgue-Maß*

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_A(x)\,dx$$

hat. Wir verstehen $\mu(A)$ als eine Art Flächeninhalt oder Volumen von A. Die Menge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ hat also das Lebesgue-Maß 0 und heißt daher *Nullmenge*.

7.3. Bemerkung. Eine Abbildung $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die den Euklidischen Abstand erhält, heißt *Euklidische Isometrie*. Das Lebesgue-Maß soll invariant unter Isometrien sein. Wenn also $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Lebesgue-Maß besitzt und F eine beliebige Isometrie ist, dann soll $\mu(F(A)) = \mu(A)$ gelten, siehe Bemerkung 7.83 unten. Das hat unter anderem folgende Konsequenzen.

(1) Manche Mengen haben unendliches Maß. Zum Beispiel setzen wir setzen sinnvollerweise

$$\mu([0,1]^n) = \mu((0,1)^n) = \mu([0,1)^n) = 1\ .$$

Sei T_v die *Verschiebung* um den Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $T_v(x) = x + v$, dann ist T_v eine Isometrie. Es folgt

$$\begin{aligned}\mu(\mathbb{R}^n) &= \mu\biggl(\dot{\bigcup_{v\in\mathbb{Z}^n}} T_v([0,1)^n)\biggr) = \sum_{v\in\mathbb{Z}^n} \mu(T_v([0,1)^n))\\ &= \sum_{v\in\mathbb{Z}^n} \mu([0,1)^n) = \sum_{v\in\mathbb{Z}^n} 1 = \infty\ .\end{aligned}$$

Dabei haben wir vernünftigerweise angenommen, dass sich die Maße disjunkter Teilmengen bei der Vereinigung addieren.

(2) Manchen Mengen können wir überhaupt kein Maß zuordnen. Mit Hilfe des Auswahlaxioms lässt sich zum Beispiel eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften konstruieren.
   (a) Es gibt Drehungen $F_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}, F_2, F_3, F_4$ um den Nullpunkt, so dass
$$D^3 \setminus \{0\} = \bigl\{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < \|x\| \le 1\bigr\} = F_1(M) \mathbin{\dot\cup} F_2(M) \mathbin{\dot\cup} F_3(M) \mathbin{\dot\cup} F_4(M) .$$
   (b) Es gibt andere Drehungen $G_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, G_2, so dass
$$D^3 \setminus \{0\} = G_1(M) \mathbin{\dot\cup} G_2(M) .$$
   Aus (a) und (b) würde also folgen
$$4\mu(M) = \mu(D^3 \setminus \{0\}) = 2\mu(M) ,$$
   aber $\mu(D^3 \setminus \{0\}) = \frac{4}{3}\pi \neq 0$, wie wir später sehen werden. Also kann die Menge M kein Lebesgue-Maß haben. Die Existenz solcher Zerlegungen von $D^3 \setminus \{0\}$ heißt auch das *Banach-Tarski-Paradoxon*.

Wir sehen also, dass man bei der Definition eines Integralbegriffs sehr sorgfältig die messbaren Mengen und das zugehörige Maß festlegen muss.

7.1. Maßräume

In diesem Abschnitt legen wir fest, welche Axiome ein System messbarer Mengen und ein Maß darauf erfüllen sollen. Dazu erinnern wir uns an den Umgang mit Mengen, insbesondere an die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X und an das Vereinigen und Schneiden beliebig vieler Mengen in Bemerkung 1.67. Zur Erinnerung: wir schreiben
$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \in A \mid x \notin B\} ,\\ \bigcup_{i\in I} A_i &= \{x \in X \mid \text{ es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in A_i\} ,\\ \bigcap_{i\in I} A_i &= \{x \in X \mid \text{ für alle } i \in I \text{ gilt } x \in A_i\} , \end{aligned}$$
wobei $A_i \subset X$ für alle $i \in I$ gilt. Für $I = \mathbb{N}$ schreiben wir auch $\bigcup_{n=0}^\infty A_n$ und $\bigcap_{n=0}^\infty A_n$. In den Propositionen 1.15 und 1.16 hatten wir etliche Rechenregeln kennengelernt.

7.4. Definition. Es sei X eine Menge. Eine Menge $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt ein *Ring von Teilmengen* oder kurz *Ring*, wenn $\emptyset \in \mathcal{R}$ und für alle A, $B \in \mathcal{R}$ auch
$$A \cup B \in \mathcal{R} \qquad \text{und} \qquad A \setminus B \in \mathcal{R}$$
gilt. Ein σ-*Ring* ist ein Ring $\mathcal{R}$, so dass
$$\bigcup_{n=0}^\infty A_n \in \mathcal{R}$$
für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen aus $\mathcal{R}$ gilt.

Ein Ring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt *Algebra von Teilmengen* oder kurz *Algebra* auf X, wenn $X \in \mathcal{R}$ gilt. Ein σ-Ring, der zugleich Algebra ist, heißt *σ-Algebra.*

Seien $(X, \mathcal{R}$ und $(Y, \mathcal{S})$ Mengen mit σ-Ringen, dann heißt eine Abbildung $F\colon X \to Y$ *messbar*, wenn

$$F^{-1}(A) \in \mathcal{R} \quad \text{für alle} \quad A \in \mathcal{S} .$$

Man beachte die vordergründige Ähnlichkeit zwischer der Definition 6.1 eines topologischen Raumes und Definition 7.4. Tatsächlich werden wir gleich sehen, dass für jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf X folgendes gilt:

(1) $\emptyset$, $X \in \mathcal{A}$,
(2) für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ gilt $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$,
(3) für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ gilt $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Mit anderen Worten dürfen in einer Topologie zwar mehr Mengen auf einmal vereinigt werden (nämlich beliebig viele), aber weniger geschnitten (nämlich nur endlich viele). Außerdem dürfen wir in σ-Algebren Komplemente bilden, was in topologischen Räumen im allgemeinen nicht erlaubt ist. In diesem Zusammenhang entsprechen messbare Abbildungen den stetigen Abbildungen aus Definition 3.2, siehe Lemma 6.5.

7.5. Beispiel. Es sei X eine Menge.

(1) Die einfachsten σ-Algebren auf X sind $\{\emptyset, X\}$ und $\mathcal{P}(X)$, siehe auch Beispiel 6.2 für Topologien.
(2) Gegeben sei eine Menge X und eine Menge $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ von Ringen, Algebren, σ-Ringen bzw. σ-Algebren (jedes Element $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ ist also selbst ein Ring etc. auf X). Dann ist der Durchschnitt

$$\bigcap \mathcal{S} = \{Y \subset X \mid Y \in \mathcal{A} \text{ für alle } A \in \mathcal{S}\} \subset \mathcal{P}(X)$$

selbst wieder ein Ring, eine Algebra, ein σ-Ring bzw. eine σ-Algebra (Übung). Ist $\mathcal{S}$ beispielsweise das System aller σ-Algebren, so erhält man $\bigcap \mathcal{S} = \{\emptyset, X\}$.
(3) Es sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ eine beliebige Teilmenge der Potenzmenge. Wir definieren

$$\mathcal{S} = \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{M} \subset \mathcal{A} \text{ und } \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}\} .$$

Dann ist $\bigcap \mathcal{S}$ die kleinste σ-Algebra auf X, die $\mathcal{M}$ umfasst, man sagt auch, die von $\mathcal{M}$ *erzeugte* σ-Algebra.
(4) Sei schließlich $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, dann heißt die von $\mathcal{O}$ erzeugte σ-Algebra auf X die *Borel-σ-Algebra* des topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$. Ihre Elemente heißen *Borel-Mengen.*

7.6. Bemerkung. In jedem Ring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ gilt folgendes.

(1) Für A, $B \in \mathcal{R}$ gilt

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R} .$$

(2) Definiert man die *symmetrische Differenz*
$$A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) ,$$
so bildet $(\mathcal{R}, \vartriangle, \cap)$ einen kommutativen Ring im Sinne der Algebra mit Nullelement $\emptyset$.

In einem σ-Ring gilt darüberhinaus

(3) Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ gilt
$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = A_0 \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} (A_0 \setminus A_n) \in \mathcal{R} .$$

7.7. Bemerkung. In einer Algebra gelten die obigen Punkte (1), (2) sowie

(4) Für alle $A \in \mathcal{R}$ liegt das Komplement $A^{\mathrm{c}} = X \setminus A$ in $\mathcal{R}$.
(5) Im Sinne der Algebra bildet $(\mathcal{R}, \vartriangle, \cap)$ einen kommutativen Ring mit Nullement $\emptyset$ und Einselement X.

In einer σ-Algebra gelten also (1) - (5).

Wir erinnern uns an die Rechenregeln für $\pm\infty$ aus Bemerkung 2.21.

7.8. Definition. Es sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring. Eine Funktion $\Phi\colon \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, deren Wertemenge im Φ nicht sowohl $-\infty$ aus auch ∞ enthält, heißt (*endlich*) *additiv*, wenn $\Phi(\emptyset) = 0$ und

$$\Phi(A \cup B) = \Phi(A) + \Phi(B) \text{ für alle } A, B \in \mathcal{R} \text{ mit } A \cap B = \emptyset . \tag{1}$$

Sei $\mathcal{R}$ ein σ-Ring, dann heißt Φ *abzählbar additiv* oder auch *σ-additiv*, wenn $\Phi(\emptyset) = 0$ und für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit $A_m \cap A_n = \emptyset$ für alle $m \neq n$ die folgende Reihe in $\overline{\mathbb{R}}$ wie angegeben konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi(A_n) = \Phi\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) . \tag{2}$$

Im Gegensatz zu Definition 2.54 lassen wir hier $\pm\infty$ als Grenzwerte ausdrücklich zu.

7.9. Bemerkung. Für additive Funktionen $\Phi\colon \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ gelten folgende Rechenregeln.

(1) Für beliebige A, $B \in \mathcal{R}$ gilt
$$\Phi(A \cup B) + \Phi(A \cap B) = \Phi(A) + \Phi(B) .$$
(2) Falls $B \subset A$ und $\Phi(B) \neq \pm\infty$, gilt
$$\Phi(A \setminus B) = \Phi(A) - \Phi(B) .$$
Insbesondere können wir auf die Forderung $\Phi(\emptyset) = 0$ verzichten, wenn $\Phi(A) < \infty$ für mindestens eine Menge $A \in \mathcal{R}$ gilt, denn dann ist
$$\Phi(\emptyset) = \Phi(A \setminus A) = \Phi(A) - \Phi(A) = 0 .$$
Die einzigen Funktionen, die Bedingung (1) in Definition 7.8 erfüllen und nicht additiv sind, sind also $\Phi \equiv \infty$ und $\Phi \equiv -\infty$.

(3) Falls Φ nichtnegativ ist, also im $\Phi \subset [0, \infty]$, folgt $\Phi(B) \le \Phi(A)$ aus $B \subset A$.

7.10. Bemerkung. Wenn $\Phi\colon \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ eine σ-additive Funktion ist, dann muss jede Reihe in Definition 7.8 (2) nach Bemerkung 2.70 zum kleinen Umordnungssatz absolut konvergieren, da die rechte Seite unabhängig von der Reihenfolge der Teilmengen A_n ist. Das ist automatisch der Fall, wenn $\Phi\colon \mathcal{R} \to [0, \infty]$ nicht negativ ist, und ∞ als Grenzwert zugelassen ist.

Wir sehen, dass es sich mit nichtnegativen, σ-additiven Funktionen leichter umgehen lässt. Außerdem soll ein Maß ja eine Art Flächeninhalt oder Volumen beschreiben, und Flächen und Volumina sind für uns nichtnegative Größen.

7.11. Definition. Es sei $\mathcal{R}$ ein σ-Ring auf X. Ein *Maß* auf $(X, \mathcal{R})$ ist eine nichtnegative, σ-additive Funktion $\mu\colon \mathcal{R} \to [0, \infty]$. Wir nennen $(X, \mathcal{R}, \mu)$ einen *Maßraum*. Die Elemente von $\mathcal{R}$ heißen *messbare Mengen*.

Das Lebesgue-Maß wird sogar auf einer σ-Algebra definiert werden. Aber für manche Maße reicht auch ein σ-Ring.

7.12. Beispiel. Es sei X eine beliebige Menge.

(1) Für jede Zahl $C \in [0, \infty]$ definieren wir ein Maß μ auf der σ-Algebra $\{\emptyset, X\}$ durch $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(X) = C$.
(2) Auf der σ-Algebra $\mathcal{P}(X)$ definieren wir das *Zählmaß* μ durch
$$\mu(Y) = \begin{cases} \#Y & \text{falls } Y \text{ endlich ist, und} \\ \infty & \text{sonst,} \end{cases}$$
für alle Teilmengen $Y \subset X$.
(3) Wir könnten das Zählmaß auch auf dem folgenden σ-Ring definieren:
$$\mathcal{R} = \left\{\, Y \subset X \;\middle|\; Y \text{ ist endlich oder abzählbar} \,\right\} .$$

7.13. Proposition. *Es sei $\mathcal{R}$ ein σ-Ring auf X und $\Phi\colon \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ sei additiv. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *Die Funktion Φ ist σ-additiv.*
(2) *Für alle aufsteigenden Folgen $B_0 \subset B_1 \subset \dots$ in $\mathcal{R}$ gilt*
$$\Phi\biggl(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\biggr) = \lim_{n\to\infty} \Phi(B_n) .$$

Beweis. „(1) $\Longrightarrow$ (2)“: Wir setzen $A_0 = B_0$ und $A_n = B_n \setminus B_{n-1}$ für $n \ge 1$. Dann sind die Mengen A_n paarweise disjunkt. Aus endlicher Additivität folgt induktiv, dass
$$\Phi(B_n) = \Phi\biggl(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\biggr) = \sum_{i=0}^{n} \Phi(A_i) .$$

Wir schließen aus σ-Additivität, dass

$$\Phi\biggl(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\biggr) = \Phi\biggl(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\biggr) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \Phi(A_i) = \lim_{n\to\infty} \Phi(B_n) \; .$$

„(2) $\Longrightarrow$ (1)“: Wir setzen umgekehrt

$$B_n = \bigcup_{i=0}^{n} A_i \; ,$$

so dass $B_0 \subset B_1 \subset \dots$. Dann folgt aus (2) und endlicher Additivität, dass

$$\begin{aligned} \Phi\biggl(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\biggr) &= \Phi\biggl(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\biggr) = \lim_{n\to\infty} \Phi(B_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \Phi(A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi(A_i) \; . \end{aligned}$$ □

7.2. Das Lebesgue-Maß

Wir konstruieren jetzt das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$ in mehreren kleinen Schritten. Zunächst betrachten wir nur Volumina von sehr einfachen „Elementarmengen“. Anschließend überdecken wir Mengen mit abzählbar vielen Elementarmengen analog zu Beispiel 7.1 und erhalten ein „äußeres Maß“. Im letzten Schritt betrachten wir alle Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die sich bezüglich des äußeren Maßes durch abzählbare Vereinigungen von Elementarmengen approximieren lassen, und erhalten die Lebesgue-σ-Algebra und das Lebesgue-Maß.

Wir erinnern uns an den Begriff des Intervalls aus Definition 2.1. Aus Bemerkung 2.2 folgt, dass alle beschränkten Intervalle von einem der Typen

$$(a,b), [a,b), (a,b] \quad \text{oder} \quad [a,b] \subset \mathbb{R}$$

sind, wobei $a \le b$. Insbesondere sind auch

$$\emptyset = (a,a) \quad \text{und} \quad \{a\} = [a,a]$$

Intervalle für alle $a \in \mathbb{R}$.

7.14. Definition. Ein *Quader* im $\mathbb{R}^n$ ist ein kartesisches Produkt von n Intervallen. Eine *Elementarmenge* im $\mathbb{R}^n$ ist eine endliche disjunkte Vereinigung von Quadern. Die Menge aller Elementarmengen wird mit $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.

7.15. Bemerkung. Ein typischer Quader im $\mathbb{R}^n$ hat die Gestalt

$$(a_1,b_1) \times \dots \times (a_n,b_n) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x < b_i \text{ für } i = 1, \dots, n \} \; ,$$

wobei man beliebig viele runde Klammern durch eckige (und entsprechend „$<$“-Zeichen durch „$\le$“ für einzelne i) ersetzen darf. Insbesondere ist $\emptyset = \emptyset \times \dots \times \emptyset$ ein Quader, und es gibt auch „niederdimensionale“ Quader, falls einzelne Faktoren von der Form $\{a_i\} = [a_i, a_i]$ sind.

7.16. Proposition. *Die Elementarmengen im $\mathbb{R}^n$ bilden einen Ring $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Für einen Quader $I_1 \times \dots \times I_n$ mit $(a_i, b_i) \subset I_i \subset [a_i, b_i]$ sei das Volumen durch*

$$\lambda(I_1 \times \dots \times I_n) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$$

definiert, dann lässt sich λ eindeutig zu einer additiven Funktion auf $\mathcal{E}$ fortsetzen.

Beweis. Wir skizzieren nur die wesentlichen Schritte. Um zu zeigen, dass $\mathcal{E}$ ein Ring ist, reicht es zu zeigen, dass $A \backslash B$ für zwei Quader eine Elementarmenge ist. Denn für disjunkte Vereinigungen gilt

$$(A_1 \dot\cup \dots \dot\cup A_k) \setminus B = (A_1 \setminus B) \dot\cup \dots \dot\cup (A_n \setminus B)$$

und $A \setminus (B_1 \dot\cup \dots \dot\cup B_k) = (\dots (A \setminus B_1) \setminus \dots) \setminus B_k$. Außerdem können wir

$$A \cup B = (A \setminus B) \dot\cup B$$

schreiben.

Seien also A, B zwei Quader, dann können wir A so als disjunkte Vereinigung von Quadern schreiben, dass $A \cap B$ einer dieser kleineren Quader ist. Weglassen von $A \cap B$ liefert die gesuchte Darstellung von $A \setminus B$ als Elementarmenge.

Die Eindeutigkeit der Funktion $\lambda \colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ folgt, da für eine Elementarmenge $A = A_1 \dot\cup \dots \dot\cup A_k$, dargestellt als disjunkte Vereinigung der Quader $A_1, \dots, A_k$, ja

$$\lambda(E) = \lambda(A_1) + \dots + \lambda(A_k)$$

gelten muss. Um zu zeigen, dass λ durch diese Vorschrift wohldefiniert ist, betrachten wir zwei Zerlegungen

$$E = A_1 \dot\cup \dots \dot\cup A_k = B_1 \dot\cup \dots \dot\cup B_\ell$$

in Quader. Wie oben existiert eine Unterteilung dieser Quader in $E = C_1 \dot\cup \dots \dot\cup C_m$, so dass jeder Quader A_i und jeder Quader B_j eine disjunkte Vereinigung je endlich vieler C_p ist. Aber für eine Zerlegung eines Quaders in kleinere Quader folgt die Behauptung aus dem Distributivgesetz der Multiplikation in $\mathbb{R}$. □

Für die folgende Definition erinnern wir uns an die Definition 6.1 eines topologischen Raumes und an den Begriff der Kompaktheit aus Definition 6.29. Im $\mathbb{R}^n$ sind beschränkte abgeschlossene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ nach Folgerung 6.38 kompakt, das gilt also insbesondere für abgeschlossene Quader.

7.17. Definition. Es sei $\mathcal{E}$ ein Ring auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$. Eine *reguläre Funktion* $\Phi \colon \mathcal{E} \to [0, \infty)$ ist eine endliche, nichtnegative, additive Funktion, so dass zu jedem $A \in \mathcal{E}$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $U \in \mathcal{E}$ und eine kompakte Menge $K \in \mathcal{E}$ existieren mit $K \subset A \subset U$ und

$$\Phi(A) - \varepsilon < \Phi(K) \leq \Phi(A) \leq \Phi(U) < \Phi(A) + \varepsilon\ .$$

Wir nennen Elemente von $\mathcal{E}$ nach wie vor Elementarmengen, auch wenn es sich hier nicht um den Ring aus Definition 7.14 und Proposition 7.16 handeln muss. Man beachte, dass die mittleren beiden Ungleichungen unmittelbar aus Bemerkung 7.9 (3) folgen; sie sind hier nur der Übersicht halber mit aufgeführt.

7.18. Bemerkung. (1) Die Funktion λ aus Proposition 7.16 ist regulär, denn zu jedem Quader A und zu jedem $\varepsilon > 0$ lässt sich ein etwas kleinerer abgeschlossener Quader K und ein etwas größerer offener Quader U finden; das folgt am einfachsten aus der Stetigkeit der Multiplikation, siehe Satz 2.22 (3). Die Funktion λ liefert später das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$.

(2) Es sei $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion, dann ist α eine Regelfunktion mit

$$\begin{aligned} \alpha(x-) &= \lim_{x' \nearrow x} \alpha(x') = \sup \alpha|_{(-\infty,x)} \\ \text{und} \qquad \alpha(x+) &= \lim_{x' \searrow x} \alpha(x') = \inf \alpha|_{(x,\infty)} \;, \end{aligned}$$

und wir setzen

$$\begin{aligned} \mu((a,b)) &= \alpha(b-) - \alpha(a+) && \text{für } a < b \;, \\ \mu([a,b)) &= \alpha(b-) - \alpha(a-) && \text{für } a \le b \;, \\ \mu((a,b]) &= \alpha(b+) - \alpha(a+) && \text{für } a \le b \;, \text{ und} \\ \mu([a,b]) &= \alpha(b+) - \alpha(a-) && \text{für } a \le b \;. \end{aligned}$$

Dann induziert μ eine reguläre Funktion $\mu\colon \mathcal{E}(\mathbb{R}^1) \to \mathbb{R}$ (Übung). Diese Funktion liefert das Lebesgue-Stieltjes-Maß auf $\mathbb{R}$ bezüglich α.

7.19. Definition. Es sei μ eine reguläre Funktion auf $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann definieren wir das *äußere Maß* μ^* für alle $A \subset X$ durch

$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n) \;\middle|\; (E_n) \text{ Folge in } \mathcal{E} \cap \mathcal{O} \text{ mit } A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \right\} .$$

Wir sprechen vom äußeren Maß, da A „von außen“ durch abzählbare Vereinigungen von Elementenmengen approximiert wird. Das äußere Maß ist kein Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Im dritten Schritt konstruieren wir eine σ-Algebra, auf der μ^* ein Maß wird.

7.20. Beispiel. Es sei $\mu = \lambda$ aus Proposition 7.16.

(1) Aus Beispiel 7.1 folgt $\mu^*(\mathbb{Q}) = 0$ für $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^1$.
(2) Die Menge M aus dem Banach-Tarski-Paradoxon in Bemerkung 7.3 (2) hat ein äußeres Maß, obwohl wir gesehen haben, dass M nicht messbar sein kann. Wir sehen später, dass auch μ^* invariant unter Isometrien ist. Aus Proposition 7.21 (2) unten folgt, dass

$$\mu^*(F_1(M) \,\dot\cup \ldots \dot\cup\, F_4(M)) = 4\mu^*(M) > \mu^*(D^3 \setminus \{0\})$$

Insbesondere ist μ^* nicht additiv, und erst recht kein Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$. Wenn $A \subset X$ keine abzählbare Überdeckung durch offene Elementarmengen zulässt, ist $\mu^*(A) = \inf \emptyset = \infty$. Für $A \subset B$ ist jede Überdeckung von B erst recht Überdeckung von A, also folgt $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

7.21. Proposition. *Das äußere Maß μ^* zu einer regulären Funktion $\mu\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ hat folgende Eigenschaften:*

(1) *Es gilt $\mu^*(E) = \mu(E)$ für jede Elementarmenge $E \in \mathcal{E}$.*
(2) (σ-) Subadditivität*: Sei (A_n) Folge in $\mathcal{P}(X)$, dann gilt*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n) \;.$$

Beweis. Zu (1): Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Elementarmenge $U \in \mathcal{E} \cap \mathcal{O}$ mit $E \subset U$ und

$$\mu^*(E) \leq \mu(U) \leq \mu(E) + \varepsilon \;;$$

es folgt $\mu^*(E) \leq \mu(E)$.

Da μ regulär ist, existiert eine kompakte Elementarmenge $K \in \mathcal{E}$ mit $K \subset E$ und $\mu(E) \leq \mu(K) + \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$. Für jede Überdeckung (E_n) von E wie in Definition 7.19 wird K nach der Heine-Borel-Eigenschaft aus Definition 6.29 bereits von endlich vielen der E_n überdeckt; es existiert also ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu(E) - \varepsilon \leq \mu(K) \leq \mu\left(\bigcup_{n=0}^{N} E_n\right) \leq \sum_{n=0}^{N} \mu(E_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n) \leq \mu^*(E)$$

allein aufgrund der endlichen Additivität von μ. Somit ist das Infimum in Definition 7.19 mindestens $\mu(E)-\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Es folgt $\mu(E) \leq \mu^*(E)$, insgesamt also $\mu^*(E) = \mu(E)$.

Zu (2): Wenn eine der Mengen A_n keine Überdeckung durch offene Elementarmengen besitzt, hat die rechte Seite den Wert ∞, und die Ungleichung gilt. Ansonsten wählen wir $\varepsilon > 0$ und finden zu jeder Menge A_n eine Überdeckung $(E_{n,k})_k$ durch offene Elementarmengen mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_{n,k}) < \mu^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon \;.$$

Die Mengen $(E_{n,k})_{n,k}$ bilden eine abzählbare Überdeckung von A, und wir schließen, dass

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n,k=0}^{\infty} \mu(E_{n,k}) < \sum_{n=0}^{\infty} \bigl(\mu^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon\bigr) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n) + 2\varepsilon \;.$$

Hieraus folgt die behauptete Ungleichung für $\varepsilon \to 0$. □

7.22. Bemerkung. Wir benötigen einige Rechenregeln für die symmetrische Differenz aus Bemerkung 7.6 (2).

(1) Für alle $A, B, C \subset X$ gilt
$$A \vartriangle B = B \vartriangle A, A^c \vartriangle B^c = A \vartriangle B, A \vartriangle A = \emptyset$$
und $A \vartriangle B \subset (A \vartriangle C) \cup (C \vartriangle B)$.

(2) Für alle A_1, A_2, B_1 und $B_2 \subset X$ gilt
$$\left.\begin{array}{r}(A_1 \cup A_2) \vartriangle (B_1 \cup B_2)\\ (A_1 \cap A_2) \vartriangle (B_1 \cap B_2)\\ (A_1 \setminus A_2) \vartriangle (B_1 \setminus B_2)\end{array}\right\} \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2)\;.$$

Beispielsweise gilt
$$A \setminus B \subset (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$$
und analoges gilt für $B \setminus A$, zusammen folgt daraus die dritte Behauptung in (1). Die erste Formel in (2) folgt entsprechend aus
$$\begin{aligned}(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) &= (A_1 \setminus (B_1 \cup B_2)) \cup (A_2 \setminus (B_1 \cup B_2))\\ &\subset (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2)\;.\end{aligned}$$
Wenden wir die erste Formel auf die Komplemente A_1^c, A_2^c, B_1^c und B_2^c an, so erhalten wir die zweite Formel, die letzte folgt analog aus $A \setminus B = A \cap B^c$.

7.23. Definition. Es sei $\mu\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ regulär wie in Definition 7.17, und $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ das zugehörige äußere Maß. Wir definieren $d\colon \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ durch
$$d(A, B) = \mu^*(A \vartriangle B)$$
und schreiben $A_n \to A$ für eine Folge (A_n) in $\mathcal{P}(X)$, wenn $\lim_{n\to\infty} d(A_n, A) = 0$ gilt.

Eine Menge $A \subset X$ heißt *endlich μ-messbar*, wenn es eine Folge (E_n) von Elementarmengen mit $E_n \to A$ gibt, und *μ-messbar*, wenn sie als abzählbare Vereinigung endlich μ-messbarer Mengen geschrieben werden kann. Die Menge endlich μ-messbarer Teilmengen wird mit $\mathcal{M}_E(\mu)$, die der μ-messbaren Teilmengen mit $\mathcal{M}(\mu)$ bezeichnet.

7.24. Bemerkung. Aus Bemerkung 7.22 (1) folgt, dass d symmetrisch ist mit $d(A, A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{P}(X)$ und eine Dreiecksungleichung im Sinne von Definition 2.40 erfüllt. Für A, B, $C \subset X$ gilt nämlich
$$\begin{aligned}d(A, B) = \mu^*(A \vartriangle B) &\le \mu^*\big((A \vartriangle C) \cup (C \vartriangle B)\big)\\ &\le \mu^*(A \vartriangle C) + \mu^*(C \vartriangle B) = d(A, C) + d(C, B)\;.\end{aligned}$$
Aus (2) oben und Proposition 7.21 (2) folgt, dass
$$\left.\begin{array}{r}d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2)\\ d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2)\\ d(A_1 \setminus A_2, B_1 \setminus B_2)\end{array}\right\} \le d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)\;.$$
Da $\mu^*(A) = d(\emptyset, A)$, folgt aus der Dreiecksungleichung insbesondere
$$\mu^*(A) = d(\emptyset, A) \le d(\emptyset, B) + d(A, B) = \mu^*(B) + d(A, B)$$

und umgekehrt, somit gilt

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \le d(A,B)$$

für alle $A, B \subset X$, falls wenigstens $\mu^*(A)$ oder $\mu^*(B)$ endlich ist.

In anderen Worten verhält sich d beinahe wie eine Metrik auf $\mathcal{P}(X)$, vergleiche Aufgabe 4 von Blatt III.2. Das äußere Maß μ^* und die elementaren Mengenoperationen wie Vereinigung, Durchschnitt und Differenz sind in diesem Sinne „stetig".

Im folgenden Satz zeigen wir, dass μ^* auf $\mathcal{M}(\mu)$ ein Maß definiert. Für das Volumen m von Quadern aus Proposition 7.16 erhalten wir das *Lebesgue-Maß* auf $\mathbb{R}^n$, für die Funktion μ aus Bemerkung 7.18 (2) das Lebesgue-Stieltjes-Maß auf $\mathbb{R}$ bezüglich α.

7.25. Satz. *Es sei $\mu\colon \mathcal{E} \to [0,\infty)$ regulär und $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ das zugehörige äußere Maß. Dann ist $\mathcal{M}(\mu)$ ein σ-Ring, und μ^* ist ein Maß auf $(X, \mathcal{M}(\mu))$.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass $\mathcal{M}_E(\mu)$ ein Ring und μ^* auf $\mathcal{M}_E(\mu)$ additiv und endlich ist. Seien etwa (E_n), (F_n) Folgen von Elementarmengen mit $E_n \to A$ und $F_n \to B$, dann gilt wegen Bemerkung 7.24 auch

$$\begin{aligned} E_n \cup F_n &\to A \cup B\ , \\ E_n \cap F_n &\to A \cap B\ , \\ E_n \setminus F_n &\to A \setminus B \\ \text{und} \qquad \mu(E_n) = \mu^*(E_n) &\to \mu^*(A)\ , \end{aligned}$$

insbesondere ist $\mathcal{M}_E(\mu)$ ein Ring und μ^* ist endlich auf $\mathcal{M}_E(\mu)$. Aus Bemerkung 7.9 (1) und Proposition 7.21 (1) folgt

$$\begin{aligned} \mu^*(A) + \mu^*(B) &= \lim_{n\to\infty} (\mu(E_n) + \mu(F_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\mu(E_n \cup F_n) + \mu(E_n \cap F_n)) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B)\ . \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Additivität von μ auf $\mathcal{E}$ benutzt. Also ist μ^* additiv auf $\mathcal{M}_E(\mu)$.

Es sei $A \in \mathcal{M}(\mu)$ dargestellt als $A = \bigcup_{n=0}^\infty A_n$ mit $A_n \in \mathcal{M}_E(\mu)$. Wir setzen

$$B_n = A_n \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_{n-1}) \in \mathcal{M}_E(\mu)\ ,$$

so dass

$$A = \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} B_n\ .$$

Wegen der Subadditivität aus Proposition 7.21 (2) gilt

$$\mu^*(A) \le \sum_{n=0}^\infty \mu^*(B_n)\ .$$

Auf der anderen Seite folgt

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(B_0 \dot\cup \ldots \dot\cup B_N) = \sum_{n=0}^{N} \mu^*(B_n) ,$$

im Grenzfall $N \to \infty$ gilt somit

$$\mu^*(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(B_n) . \tag{1}$$

Falls $\mu^*(A)$ endlich ist, folgt für $\varepsilon > 0$ aus dieser Überlegung auch

$$d\biggl(A, \bigcup_{n=0}^{N} B_n\biggr) = \mu^*\biggl(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} B_n\biggr) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu^*(B_n) < \varepsilon$$

für $N \in \mathbb{N}$ hinreichend groß. Da $\bigcup_{n=0}^{N} B_n \in \mathcal{M}_E(\mu)$, existiert eine Elementarmenge E mit

$$d\biggl(\bigcup_{n=0}^{N} B_n, E\biggr) < \varepsilon .$$

Es folgt

$$d(A, E) \leq d\biggl(A, \bigcup_{n=0}^{N} B_n\biggr) + d\biggl(\bigcup_{n=0}^{N} B_n, E\biggr) < 2\varepsilon ,$$

also kann A durch Elementarmengen approximiert werden. Insgesamt folgt

$$\mathcal{M}_E(\mu) = \{ A \in \mathcal{M}(\mu) \mid \mu^*(A) < \infty \} . \tag{2}$$

Sei jetzt $A = \dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mit $A_n \in \mathcal{M}(\mu)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gibt es zwei Möglichkeiten: Falls eine Menge A_n unendliches äußeres Maß hat, folgt $\mu^*(A) \geq \mu^*(A_n) = \infty$, ansonsten liegen alle A_n in $\mathcal{M}_E(\mu)$ wegen (2), und wir dürfen (1) anwenden. Somit ist μ^* σ-additiv auf $\mathcal{M}(\mu)$.

Wir müssen noch zeigen, dass $\mathcal{M}(\mu)$ ein σ-Ring ist. Wenn jede Menge $A_n \in \mathcal{M}(\mu)$ als abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{M}_E(\mu)$ geschrieben werden kann, dann gilt das auch für $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. Seien jetzt

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, \quad B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \in \mathcal{M}(\mu)$$

mit A_n, $B_n \in \mathcal{M}_E(\mu)$ für alle n. Nun gilt

$$A_n \cap B = \bigcup_{k=0}^{\infty} (A_n \cap B_k) \in \mathcal{M}(\mu)$$

und sogar $A_n \cap B \in \mathcal{M}_E(\mu)$ nach (2), da

$$\mu^*(A_n \cap B) \leq \mu^*(A_n) < \infty .$$

Da $\mathcal{M}_E(\mu)$ ein Ring ist, folgt

$$A_n \setminus B = A_n \setminus (A_n \cap B) \in \mathcal{M}_E(\mu) ,$$

somit

$$A \setminus B = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n \setminus B) \in \mathcal{M}(\mu) \ .$$

Also ist $\mathcal{M}(\mu)$ tatsächlich ein σ-Ring. □

7.26. Definition. Das mit Hilfe der Funktion $\lambda\colon \mathcal{E} \to [0,\infty)$ konstruierte Maß auf $\mathbb{R}^n$ heißt n-dimensionales *Lebesgue-Maß*, und die σ-Algebra $\mathcal{L} = \mathcal{M}(\lambda)$ heißt *Lebesgue-σ-Algebra*.

Sei $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton steigend, dann heißt das zur Funktion $\mu\colon \mathcal{E} \to [0,\infty)$ aus Bemerkung 7.18 (2) konstruierte Maß das *Lebesgue-Stieltjes-Maß* bezüglich α.

Wir werden in Zukunft die Einschränkung des äußeren Maßes μ^* auf $\mathcal{M}(\mu)$ kurz als μ bezeichnen. Wir schreiben explizit $\mu\colon \mathcal{E} \to [0,\infty)$, wenn wir uns auf die zugrundeliegende reguläre Funktion beziehen wollen.

7.27. Definition. Es sei $(X,\mathcal{R},\mu)$ ein Maßraum. Eine Menge $N \in \mathcal{R}$ heißt *Nullmenge*, wenn $\mu(N) = 0$ gilt. Das Maß μ heißt *vollständig*, wenn jede Teilmenge einer Nullmenge wieder messbar ist.

7.28. Folgerung. *Das in Satz 7.25 definierte Maß μ^* auf $\mathcal{M}(\mu)$ ist vollständig.*

Beweis. Sei N eine Nullmenge, dann gilt $\mu^*(N) = 0$. Für jede Teilmenge $A \subset N$ gilt dann ebenfalls $\mu^*(A) = 0 = d(\emptyset, A)$. Somit strebt die konstante Folge $(\emptyset)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}$ im Sinne von Definition 7.23 gegen A, und es folgt $A \in \mathcal{M}(\mu)$. □

7.29. Definition. Ein Maßraum $(X,\mathcal{R},\mu)$ heißt *endlich*, wenn $X \in \mathcal{R}$ und $\mu(X) < \infty$ gilt. Ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* ist ein endliches Maß μ auf X mit $\mu(X) = 1$. Ein Maßraum heißt *σ-endlich*, wenn es eine Folge $(A_k)_k$ in $\mathcal{R}$ mit $\mu(A_k) < \infty$ für alle k und $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = X$ gibt.

7.30. Beispiel.
(1) Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ ist σ-endlich. Dazu betrachten wir die Folge (A_k) mit $A_k = (-k,k)^n$.
(2) Das Lebesgue-Stieltjes-Maß auf $\mathbb{R}$ bezüglich α ist ebenfalls σ-endlich. Wenn α beschränkt ist, ist es sogar endlich mit $\mu(\mathbb{R}) = \sup\alpha - \inf\alpha$.

7.31. Bemerkung. Zum Schluss wollen wir einen Zusammenhang zwischen der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$ des topologischen Raums $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O})$ aus Beispiel 7.5 (4) und dem σ-Ring $\mathcal{M}(\mu)$ herstellen, falls μ wie in Satz 7.25 aus einer regulären Funktion auf dem Ring der Elementenmengen $\mathcal{E}$ aus Definition 7.14 konstruiert wurde. Laut Aufgabe 4 von Blatt III.2 ist jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ abzählbare Vereinigung von offenen Quadern, somit folgt $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}(\mu)$. Insbesondere ist $\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}(\mu)$, vergleiche Beispiel 7.30 (1), also ist $\mathcal{M}(\mu)$ eine σ-Algebra. Da $\mathcal{B}$ die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{O}$ enthält, folgt $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}(\mu)$.

Sei jetzt $A \in \mathcal{M}(\mu)$, $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ mit $A_n \in \mathcal{M}_E(\mu)$ für alle n, dann gilt $\mu^*(A_n) < \infty$. Zu $\varepsilon > 0$ existieren also offene Elementarmengen $E_{n,\varepsilon}$

mit $A_n \subset E_{n,\varepsilon}$ und $\mu(E_{n,\varepsilon}) < \mu(A_n) + 2^{-n}\varepsilon$. Wir setzen $E_\varepsilon = \bigcup E_{n,\varepsilon} \in \mathcal{O}$, dann folgt $A \subset E_\varepsilon$ und

$$\mu(E_\varepsilon \setminus A) \le \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_{n,\varepsilon} \setminus A_n) < \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon = 2\varepsilon \,.$$

Es sei jetzt $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{1/n} \in \mathcal{B}$, dann folgt $A \subset B$ und $\mu(B \setminus A) < 2 \cdot \frac{1}{n}$ für alle n, also $\mu(B \setminus A) = 0$.

Da $\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}(\mu)$, folgt $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{M}(\mu)$. Wir finden also $D \in \mathcal{B}$ wie oben mit $A^c \subset D$ und $\mu(D \setminus A^c) = 0$. Setze $C = D^c \in \mathcal{B}$, dann gilt $C \subset A$ und $\mu(A \setminus C) = 0$. Insgesamt beweist das die Inklusion „$\subset$" in der Behauptung

$$\mathcal{M}(\mu) = \{ A \subset \mathbb{R}^n \mid \text{ es gibt } B, C \in \mathcal{B} \text{ mit } C \subset A \subset B \text{ und } \mu(B) = \mu(C) \} \,.$$

Die umgekehrte Inklusion „$\supset$" folgt leicht aus der Vollständigkeit von μ.

Fazit: die σ-Algebra $\mathcal{M}(\mu)$ ist für jedes mit Hilfe von Satz 7.25 auf $\mathbb{R}^n$ konstruierte Maß μ die Vervollständigung der Borel-σ-Algebra bezüglich μ. Da verschiedene Maße auf $\mathbb{R}^n$ verschiedene Nullmengen haben können, siehe Übung 2 von Blatt III.2, liefern verschiedene reguläre Funktionen μ auf $\mathcal{E}$ im Allgemeinen verschiedene σ-Algebren von μ-messbaren Mengen.

7.3. Integration auf Maßräumen

Nachdem wir das Lebesgue-Maß und die zugrundeliegende σ-Algebra eingeführt haben, lernen wir jetzt, wie man auf allgemeinen Maßräumen, also speziell auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \lambda)$, integriert. Dazu führen wir zunächst die Menge der messbaren Funktionen ein, die die Menge der integrierbaren Funktionen umfasst.

Messbare Abbildungen hatten wir bereits in Definition 7.4 kennengelernt. Es sei $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$ bezüglich der Topologie aus Bemerkung 3.1.

7.32. Definition. Es sei $\mathcal{R}$ ein σ-Ring auf X. Eine Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt *messbar* bezüglich $\mathcal{R}$, wenn sie als Abbildung von $(X, \mathcal{R})$ nach $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B})$ messbar ist. Ist $\mathcal{R}$ die Borel-σ-Algebra eines topologischen Raumes oder die Lebesgue-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$, dann heißt f *Borel*- bzw. *Lebesgue*-messbar.

7.33. Bemerkung.
(1) Da $\overline{\mathbb{R}} \in \mathcal{B}$, gilt $X = f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}) \in \mathcal{R}$, wenn f messbar ist. Also folgt aus der Existenz messbarer Funktionen, dass $\mathcal{R}$ eine σ-Algebra ist.
(2) Je größer die σ-Algebra $\mathcal{R}$ in Definition 7.32 ist, desto mehr Funktionen sind bezüglich $\mathcal{R}$ messbar. Daher ist es sinnvoll, bei der Definition des Lebesgue-Maßes die Borel-σ-Algebra durch die wesentlich größere Lebesgue-σ-Algebra zu ersetzen.
(3) Würde man umgekehrt die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ im Zielbereich durch eine größere σ-Algebra ersetzen, so erhielte man mehr Bedingungen an f und damit insgesamt weniger messbare Abbildungen.

7.34. Proposition. *Es sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X und $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *Die Funktion f ist messbar bezüglich $\mathcal{A}$.*
(2) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f^{-1}([-\infty, x]) \in \mathcal{A}$.*
(3) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f^{-1}([-\infty, x)) \in \mathcal{A}$.*
(4) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f^{-1}([x, \infty]) \in \mathcal{A}$.*
(5) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f^{-1}((x, \infty]) \in \mathcal{A}$.*
(6) *Für alle offenen Mengen $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ gilt $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$.*

Beweis. Aussage (1) impliziert (2) – (6), da die angegebenen Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ Borel-Mengen sind.

Die Äquivalenz der Aussagen (2) – (5) folgt aus den Relationen

$$\begin{aligned} f^{-1}([-\infty, x)) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[-\infty, x - \frac{1}{n}\right]\right) , \\ f^{-1}([x, \infty]) &= X \setminus f^{-1}([-\infty, x)) , \\ f^{-1}((x, \infty]) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[x + \frac{1}{n}, \infty\right]\right) \\ \text{und } f^{-1}([-\infty, x]) &= X \setminus f^{-1}((x, \infty]) . \end{aligned}$$

Mit (3) und (5) gilt auch

$$f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((a, \infty]) \cap f^{-1}([-\infty, b)) \in \mathcal{A} .$$

Nach Übung 4 von Blatt III.2 ist jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ abzählbare Vereinigung von Intervallen (a_n, b_n). Analog ist jede offene Teilmenge $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen I_n der Form $I_n = (a_n, b_n)$, $[-\infty, b_n)$ oder $(a_n, \infty]$. Also folgt (6) aus (2) – (5), da

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-1}(I_n) \in \mathcal{A} .$$

Es gelte schließlich (6). Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{S} = \left\{ A \subset \overline{\mathbb{R}} \;\middle|\; f^{-1}(A) \in \mathcal{A} \right\} \subset \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}) .$$

Da die Abbildung $f^{-1} \colon \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}) \to \mathcal{P}(X)$ mit Differenz und abzählbarer Vereinigung verträglich ist, ist $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra. Beispielsweise seien A, $B \subset \mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned} A, B \in \mathcal{S} \implies\ & f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \\ & \implies f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{S} . \end{aligned}$$

Aus (6) folgt $\mathcal{O} \subset \mathcal{S}$, aus Beispiel 7.5 (4) also $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$. Also ist f als Abbildung von $(X, \mathcal{A})$ nach $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B})$ messbar, und es gilt (1). □

7.35. Bemerkung. Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig. Dann sind Urbilder offener Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ in X offen. Wenn $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X ist, die $\mathcal{O}$ und damit die Borel-σ-Algebra von X umfasst, dann folgt aus Proposition 7.34, dass f bezüglich $\mathcal{A}$ messbar ist.

Insbesondere sind stetige Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel- und damit nach Bemerkung 7.33 (2) erst recht Lebesgue-messbar.

Als nächstes wollen wir sehen, wie man mit messbaren Funktionen rechnen kann.

7.36. Proposition. *Es seien $f_1, \dots, f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen bezüglich $\mathcal{A}$ und $F\colon \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig, dann ist auch $h\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $h(x) = F(f_1(x), \dots, f_n(x))$ messbar.*

Beweis. Nach Proposition 7.34 reicht es zu zeigen, dass $h^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ für alle offenen $U \subset \overline{\mathbb{R}}$. Da F stetig ist, ist $F^{-1}(U) \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ offen. Nach Übung 4 von Blatt III.2 existieren offene Intervalle $I_{j,k} \subset \overline{\mathbb{R}}$ für alle $j = 1, \dots, n$ und $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$F^{-1}(U) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (I_{1,k} \times \dots \times I_{n,k}) \;.$$

Sei $x \in h^{-1}(U)$, dann existiert $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$(f_1(x), \dots, f_n(x)) \in I_{1,k} \times \dots \times I_{n,k} \subset F^{-1}(U) \;.$$

Es folgt

$$h^{-1}(U) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(I_{i,k}) \in \mathcal{A} \;. \qquad \square$$

7.37. Folgerung. *Es seien $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann sind auch die folgenden Funktionen auf X messbar, sofern sie definiert sind:*

(1) $f + g$, $f \cdot g$, $-f$,
(2) $\frac{1}{f}$, $\frac{g}{f}$, *falls* $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$,
(3) $\min(f, g)$, $\max(f, g)$,
(4) $|f|$ *mit* $|f|(x) = |f(x)|$,
(5) f^+ *mit* $f^+(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \;, \\ 0 & f(x) \leq 0 \;, \end{cases}$
(6) f^- *mit* $f^-(x) = \begin{cases} 0 & f(x) \geq 0 \;, \\ -f(x) & f(x) \leq 0 \;. \end{cases}$

Die Funktionen f^+, $f^-\colon X \to [0, \infty]$ heißen auch *Positiv-* und *Negativteil* von f.

Beweis. Da Addition, Multiplikation und die Bildung des additiven und des multiplikativen Inversen stetig sind, folgen (1), (2), vergleiche Proposition 3.12.

Genauso zeigt man, dass min, max: $\overline{\mathbb{R}}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig sind und erhält (3). Aussage (4) folgt entweder aus Beispiel 3.9 oder aus (1) und (3), da

$$|f| = \max(f, -f) \;.$$

Schließlich folgen (5), (6) aus

$$f^+ = \max(f,0) \qquad \text{und} \qquad f^- = -\min(f,0)\ . \qquad \square$$

7.38. Proposition. *Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen auf X. Dann sind auch die folgenden Funktionen messbar:*

(1) $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *mit* $\bigl(\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n\bigr)(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$,
(2) $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *mit* $\bigl(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\bigr)(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$,
(3) $\liminf_{n\to\infty} f_n$ *mit* $\bigl(\liminf_{n\to\infty} f_n\bigr)(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$,
(4) $\limsup_{n\to\infty} f_n$ *mit* $\bigl(\limsup_{n\to\infty} f_n\bigr)(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$.

Insbesondere ist die Grenzfunktion einer punktweise konvergenten Folge messbarer Funktionen wieder messbar.

Beweis. Zu (1) überlegen wir uns, dass $\inf_{n\to\infty} f_n(x) < a \Leftrightarrow$ Es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $f_n(x) < a$, somit

$$\Bigl(\inf_{n\to\infty} f_n\Bigr)^{-1}([-\infty,a)) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}([-\infty,a)) \in \mathcal{A}\ ,$$

und $\inf_{n\to\infty} f_n$ ist messbar nach Proposition 7.34. Genauso beweisen wir (2).

Wir folgern (3) und (4) aus (1) und (2), da

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\to\infty}\bigl(\sup_{k\ge n} f_k\bigr) \qquad \text{und} \qquad \liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\to\infty}\bigl(\inf_{k\ge n} f_k\bigr)$$

nach Definition 2.36. Wenn schließlich (f_n) punktweise gegen f konvergiert, gilt

$$f(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

für alle x nach Bemerkung 2.38. $\square$

Um das Integral auf einem Maßraum $(X,\mathcal{A},\mu)$ zu definieren, führen wir zunächst eine Klasse von Funktionen ein, deren Integral wir leicht definieren können. In Abschnitt 3.6 haben Treppenfunktionen diese Rolle gespielt.

7.39. Definition. Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ heißt *einfach*, wenn sie nur endlich viele Werte annimmt.

7.40. Bemerkung. Die Funktion $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ aus Beispiel 7.1 ist einfach. Allgemeiner ist jede Indikatorfunktion $\mathbf{1}_A$ mit $A \subset X$ einfach. Sei umgekehrt $f\colon X \to \mathbb{R}$ einfach, dann gilt

$$f = \sum_{y\in\mathbb{R}} y \cdot \mathbf{1}_{f^{-1}(\{y\})}\ ,$$

und diese Summe ist endlich, da $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ und daher $\mathbf{1}_{f^{-1}(\{y\})} = 0$ für alle bis auf endlich viele y. Also ist jede einfache Funktion eine endliche Linearkombination von Indikatorfunktionen.

7.41. Proposition. *Jede Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist Grenzfunktion einer punktweise konvergenten Folge (f_n) einfacher Funktionen. Diese Funktionen f_n können so gewählt werden, dass folgendes gilt:*

(1) *Ist f messbar, so sind die f_n ebenfalls messbar.*
(2) *Ist $f \geq 0$, so steigt die Folge $f_n(x)$ in jedem Punkt $x \in X$ monoton.*
(3) *Ist f in $\mathbb{R}$ beschränkt, so konvergiert die Folge gleichmäßig.*

Beweis. Wir nehmen $f \geq 0$ an und definieren

$$f_n = \sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} \frac{1}{2^n} \mathbf{1}_{f^{-1}([\frac{k}{2^n}, \infty))} .$$

Falls $f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ für $k < n \cdot 2^n$, so nehmen genau k der Indikatorfunktionen rechts den Wert 1 bei x an, also ist $f_n(x) = \frac{k}{2^n}$. Falls $f(x) \geq n$, so folgt $f_n(x) = n$. Es gilt (2), denn für alle x steigt die Folge $(f_n(x))_n$ monoton mit

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) .$$

Für beliebige f definieren wir wie oben Folgen g_n, h_n einfacher Funktionen, die punktweise gegen f^+ bzw. f^- konvergieren, und setzen $f_n = g_n - h_n$.

Ist f messbar, so sind auch f^+, f^- messbar. Daher gilt $(f^\pm)^{-1}\big(\big[\frac{k}{2^n}, \infty\big)\big) \in \mathcal{A}$ für alle k, n, und die Indikatorfunktionen in der Definition von f sind ebenfalls messbar. Also gilt (1).

Ist schließlich f in $\mathbb{R}$ beschränkt, so wählen wir $n_0 \geq \sup f^+, \sup f^- \in \mathbb{R}$ und erhalten

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^n}$$

für alle $n > n_0$. Also konvergiert die Folge gleichmäßig, und es gilt (3). □

7.42. Definition. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $E \in \mathcal{A}$ messbar. Wir definieren das *μ-Integral* einer messbaren Funktion $f \colon X \to \mathbb{R}$ *über* E wie folgt.

(1) Falls f einfach ist mit $f \geq 0$, definieren wir

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} y \cdot \mu\big(E \cap f^{-1}(\{y\})\big) \in [0, \infty] .$$

(2) Für $f \geq 0$ setzen wir

$$\int_E f \, d\mu = \sup \left\{ \int_E g \, d\mu \;\middle|\; \begin{array}{l} g \text{ einfach, messbar} \\ \text{mit } 0 \leq g(x) \leq f(x) \text{ für alle } x \in X \end{array} \right\} \in [0, \infty]$$

und nennen f *μ-integrierbar auf* E, wenn dieser Wert endlich ist.

(3) Für beliebige f setzen wir

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}}$$

falls f^+ oder f^- auf E μ-integrierbar ist, ansonsten ist das μ-Integral nicht definiert. Falls f^+ und f^- beide auf E μ-integrierbar sind, heißt f ebenfalls *μ-integrierbar auf* E, sonst nicht.

Ist μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ und $E \in \mathcal{L}$, so schreiben wir $\int_E f\,d\lambda$. Ist μ das Lebesgue-Stieltjes-Maß bezüglich α und $E \in \mathcal{M}(\mu_\alpha)$, so schreiben wir $\int_E f\,d\alpha$. Wir sprechen dann vom *Lebesgue-* bzw. vom *Lebesgue-Stieltjes-Integral über E* und nennen f gegebenenfalls *Lebesgue-* bzw. *Lebesgue-Stieltjes-integrierbar* bezüglich α.

Da wir bei einfachen Funktionen die Werte $\pm\infty$ nicht zugelassen haben, und da wir den Wert $y = 0$ ausgeschlossen haben, treten in (1) keine undefinierten Produkte $\pm\infty \cdot 0$ auf.

7.43. Bemerkung. Zunächst ein paar Bemerkungen zu dieser Definition.

(1) Die Punkte (1) und (2) stimmen für einfache, messbare Funktionen $f \geq 0$ überein, denn es gilt

$$\sum_{y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} y\cdot\mu\bigl(E\cap f^{-1}(\{y\})\bigr) = \sup\Biggl\{\sum_{y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} y\cdot\mu\bigl(E\cap g^{-1}(\{y\})\bigr)\ \Bigg|\ g \text{ einfach, messbar mit } 0\leq g\leq f\Biggr\}\,.$$

Da $g = f$ auf der rechten Seite vorkommt, gilt „$\leq$“. Andererseits kann die Summe in (1) für ein $g \leq f$ auch nicht größer werden als die linke Seite, somit gilt auch „$\geq$“.

(2) Genauso überzeugt man sich, dass (3) für nichtnegative f den gleichen Wert wie (2) liefert, denn dann gilt ja $f^- = 0$. Also ist das Integral oben wohldefiniert.

(3) Man beachte, dass eine Funktion genau dann μ-integrierbar ist, wenn man ihr ein endliches Integral zuordnen kann. Analog dazu nennen wir eine Reihe auch dann divergent, wenn die Partialsummenfolge gegen $\pm\infty$ konvergiert.

(4) Definition 7.42 (2) und (3) sind auch dann noch sinnvoll, wenn f nicht messbar ist. Für solche f hat das Integral aber schlechte Eigenschaften: es ist noch nicht einmal linear. Als Beispiel betrachten wir die Menge $M \in \mathbb{R}^3$ und die Isometrien F_i, G_j aus dem Banach-Tarski-Paradoxon, siehe Bemerkung 7.3 (2). Wir setzen $f_i = \mathbf{1}_{F_i(M)}$ und $g_i = \mathbf{1}_{G_i(M)}$. Aus der Isometrieinvarianz des Lebesgue-Integrals folgt für das so definierte Integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_i\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}^3} g_j\,d\lambda$$

für alle $i = 1, \dots, 4$ und $j = 1, 2$, aber

$$\begin{aligned}\lambda\bigl(D^3\setminus\{0\}\bigr) &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_{D^3\setminus\{0\}}\,d\lambda\\ &= \int_{\mathbb{R}^3}(f_1+f_2+f_3+f_4)\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}^3}(g_1+g_2)\,d\lambda\,.\end{aligned}$$

Also ist das in dieser Allgemeinheit definierte Integral nicht mehr additiv.

Wenn wir die Integrationsvariable angeben wollen, schreiben wir
$$\int_E f(x)\,d\mu(x) = \int_E f\,d\mu\;.$$
Für das Lebesgue- und das Lebesgue-Stieltjes-Integral schreiben wir auch
$$\int_E f(x)\,d^nx = \int_E f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n = \int_E f\,d\lambda$$
$$\text{und}\qquad \int_E f(x)\,d\alpha(x) = \int_E f\,d\alpha\;.$$
Man beachte: das eindimensionale Lebesgue-Maß stimmt mit μ_α für $\alpha(x) = x$ überein, daher gibt es keine Missverständnisse mit dx.

7.44. Bemerkung. Es sei $E \subset X$ eine messbare Teilmenge und f, $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.

(1) Ist $\mu(E) < \infty$ und f beschränkt, so ist f μ-integrierbar auf E mit
$$\mu(E)\cdot\inf f \le \int_E f\,d\mu \le \mu(E)\cdot\sup f\;.$$
(2) Falls f, $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbar sind mit $f \le g$ auf E, dann gilt
$$\int_E f\,d\mu \le \int_E g\,d\mu\;.$$
Zur Begründung reicht es zu zeigen, dass
$$\int_E f^+\,d\mu \le \int_E g^+\,d\mu \text{ und } \int_E f^-\,d\mu \ge \int_E g^-\,d\mu\;.$$
(3) Ist f integrierbar auf E und $c \in \mathbb{R}$ konstant, dann folgt
$$\int_E cf\,d\mu = c\int_E f\,d\mu\;.$$
(4) Ist $\mu(E) = 0$, so ist f integrierbar mit
$$\int_E f\,d\mu = 0\;,$$
selbst wenn f einen der Wert $\pm\infty$ annimmt.

(5) Ist f integrierbar auf E und $A \subset E$ messbar, dann ist f auch auf A integrierbar, denn
$$\int_A f^\pm\,d\mu \le \int_E f^\pm\,d\mu\;.$$

7.4. Konvergenzsätze

In diesem Abschnitt beweisen wir einige wichtige Sätze über Integrale auf beliebigen Maßräumen. Die Sätze über monotone und über dominierte Konvergenz sind weitaus stärker als Folgerung 3.61 und Satz 3.62 zum Regelintegral, aus denen sich nur Konvergenz der Integrale bei gleichmäßiger Konvergenz der Integranden ergibt. Eine der ersten Konsequenzen aus der monotonen Konvergenz ist die Linearität des Integrals, die wegen Bemerkung 7.43 (4) schwerer zu beweisen ist als beim Regel- oder Riemann-Integral. Am Ende dieses Abschnitts sehen wir bereits, dass unser neuer Integralbegriff Eigenschaften analog zu den Eigenschaften (1) - (6) am Anfang von Abschnitt 3.6 besitzt.

Ab sofort sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ stets ein Maßraum, bei dem $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, also $X \in \mathcal{A}$ gilt; siehe Bemerkung 7.33.

Im Folgenden konstruieren wir eine Art „Maß mit Dichte f bezüglich μ“. Das zugehörige Integral wäre dann ein gewichtetes Integral mit Gewicht f. Aber das ist nicht der Hauptzweck des folgenden Lemmas; wir brauchen es vielmehr, um hinterher Sätze über das μ-Integral zu beweisen.

7.45. Lemma. *Es sei $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und zumindest f^+ oder f^- sei integrierbar. Dann ist die Funktion $\Phi \colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ mit*

$$\Phi(A) = \int_A f \, d\mu$$

σ-additiv.

Beweis. Wir nehmen zunächst $f \geq 0$ an. Offensichtlich gilt $\Phi(\emptyset) = 0$. Falls $f = \mathbf{1}_E$ die Indikatorfunktion einer messbaren Menge $E \in \mathcal{A}$ ist, gilt

$$\int_A \mathbf{1}_E \, d\mu = 1 \cdot \mu\bigl(\mathbf{1}^{-1}(\{1\}) \cap A\bigr) = \mu(E \cap A) \; .$$

Dann folgt σ-Additivität aus

$$\Phi(A) = \mu(E \cap A) = \mu\biggl(\dot{\bigcup_{n \in \mathbb{N}}} (E \cap A_n)\biggr) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E \cap A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(A_n)$$

für jede Folge $(A_n)_n$ paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}$ mit $A = \dot\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ wegen der σ-Additivität von μ.

Ist f einfach, so folgt σ-Additivität analog wegen Bemerkung 7.40.

Für beliebige messbare $f \geq 0$ sei g einfach mit $0 \leq g \leq f$, dann gilt für (A_n), A wie oben, dass

$$\int_A g \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} g \, d\mu \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(A_n) \; ,$$

somit gilt für das Supremum über alle solchen g, dass

$$\Phi(A) = \int_A f \, d\mu \leq \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(A_n) \; .$$

Das zeigt die Behauptung, falls $\Phi(A) = \infty$ gilt. Wir nehmen daher $\Phi(A) < \infty$ an, dann gilt erst recht $\Phi(A_n) < \infty$ für alle n da $A_n \subset A$, siehe Bemerkung 7.44 (5).

Zu $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ können wir eine einfache Funktion g mit $0 \leq g \leq f$ so bestimmen, dass

$$\int_{A_n} g \, d\mu > \int_{A_n} f \, d\mu - \varepsilon \; ,$$

für alle $n \leq N$, somit

$$\Phi(A) \geq \Phi\biggl(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\biggr) \geq \int_{\bigcup_{n=0}^{N} A_n} g\, d\mu = \sum_{n=0}^{N} \int_{A_n} g\, d\mu \geq \sum_{n=0}^{N} \bigl(\Phi(A_n) - \varepsilon\bigr) \; .$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt

$$\Phi(A) \geq \sum_{n=0}^{N} \Phi(A_n) \; ,$$

im Grenzfall $N \to \infty$ also

$$\Phi(A) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(A_n) \; .$$

Insgesamt gilt also

$$\Phi(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(A_n) \; ,$$

und Φ ist σ-additiv.

Im allgemeinen Fall sei etwa f^- integrierbar, so dass

$$\int_A f^-\, d\mu < \infty$$

für alle $A \in \mathcal{A}$. Nach Definition 7.42 (3) gilt

$$\Phi(A) = \int_A f\, d\mu = \int_A f^+\, d\mu - \int_A f^-\, d\mu \in (-\infty, \infty]$$

für alle A. Für (A_n), A wie oben folgt aus dem obigen, dass

$$\begin{aligned} \Phi(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} f^+\, d\mu - \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} f^-\, d\mu \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \biggl(\int_{A_n} f^+\, d\mu - \int_{A_n} f^-\, d\mu \biggr) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(A_n) \end{aligned}$$

nach Satz 2.58, falls beide Reihen konvergieren. Ansonsten konvergiert die erste Reihe gegen ∞, während die zweite in $\mathbb{R}$ konvergiert, und wir wenden Satz 2.22 auf die Partialsummenfolgen an. □

7.46. Folgerung. *Für A, $B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$ und $\mu(B \setminus A) = 0$ gilt*

$$\int_A f\, d\mu = \int_B g\, d\mu$$

Beweis. Das folgt aus Lemma 7.45 und Bemerkung 7.44 (4). □

7.47. Bemerkung. (1) Wir nennen A, B *μ-fast gleich*, wenn $\mu(A \vartriangle B) = 0$ gilt, siehe Übung 3 von Blatt III.2. Offenbar stimmen Integrale über μ-fast gleiche Mengen überein.

(2) Wir sagen, $f = g$ gilt *μ-fast überall* und schreiben $f \sim g$, falls $\{x \mid f(x) \neq g(x)\}$ eine μ-Nullmenge ist. Analog definieren wir *μ-fast überall auf E* für messbare E; beides sind Äquivalenzrelationen. Falls klar ist, auf welches Maß wir uns beziehen, dürfen wir „fast gleich“ bzw. „fast überall“ sagen. Falls $f \sim g$ auf E, so gilt offensichtlich

$$\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu \; .$$

7.48. Folgerung. *Eine Funktion f ist genau dann auf E integrierbar, wenn $|f|$ auf E integrierbar ist, und es gilt*

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu \; .$$

Beweis. Definiere

$$E^+ = f^{-1}([0,\infty)) \qquad \text{und} \qquad E^- = f^{-1}((-\infty,0)) \in \mathcal{A} \; ,$$

dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_E f \, d\mu \right| &= \left| \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu \right| = \left| \int_{E^+} f^+ \, d\mu - \int_{E^-} f^- \, d\mu \right| \\ &\leq \int_{E^+} f^+ \, d\mu + \int_{E^-} f^- \, d\mu = \int_E |f| \, d\mu \; . \end{aligned}$$ □

Somit ist Integrierbarkeit eine ähnliche Eigenschaft wie absolute Konvergenz in Abschnitt 2.4, siehe auch Aufgabe 4 von Blatt III.3. Man beachte, dass wir im obigen Beweis nicht die (noch nicht bewiesene) Linearität des Integrals ausgenutzt haben, sondern nur die Addivität auf $\mathcal{A}$ aus Lemma 7.45.

Wir erinnern uns an das Monotoniekriterium für Folgen aus Satz 2.29. Sei $(f_n)_n$ eine Folge messbarer Funktionen auf F mit $f_0 \leq f_1 \leq \dots$, dann existiert eine Funktion $f = \lim_{n\to\infty} f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \; ,$$

und f ist messbar nach Proposition 7.38.

7.49. Satz (monotone Konvergenz; B. Levi). *Es sei $E \in \mathcal{A}$ messbar und $(f_n)_n$ eine Folge messbarer Funktionen auf X mit $0 \leq f_0 \leq f_1 \leq \dots$. Dann gilt*

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x) \, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \; .$$

Beweis. Es sei $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ die Grenzfunktion. Da $f_n \leq f$ gilt

$$\int_E f_n \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu \; ,$$

nach Bemerkung 7.44 (2), somit

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu \; .$$

Für die umgekehrte Abschätzung fixieren wir $c \in (0,1)$ und eine einfache, messbare Funktion g mit $0 \le g \le f$, und setzen

$$E_n = \{x \in E \mid f_n(x) \ge c \cdot g(x)\} \in \mathcal{A} .$$

Da die Folgen $(f_n(x))_n$ monoton wachsen, folgt $E_0 \subset E_1 \subset \dots$, und da $f(x)$ der Grenzwert ist, existiert zu jedem $x \in E$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in E_n$. Also gilt

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n .$$

Für jedes n folgt daraus mit Bemerkung 7.44 (5), dass

$$\int_E f_n \, d\mu \ge \int_{E_n} f_n \, d\mu \ge \int_{E_n} cg \, d\mu .$$

Jetzt können wir im Grenzübergang $n \to \infty$ Lemma 7.45 mit der Funktion cg und Proposition 7.13 auf die rechte Seite anwenden und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \ge \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} cg \, d\mu = \int_E cg \, d\mu$$

wegen der σ-Additivität der Funktion $A \mapsto \int_A cg \, d\mu$. Da das für alle $c \in (0,1)$ gilt, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \ge \int_E g \, d\mu .$$

Wir bilden das Supremum über alle einfachen g mit $0 \le g \le f$ und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \ge \int_E f \, d\mu .$$

Mit der obigen Abschätzung zusammen ergibt sich Gleichheit. □

7.50. Folgerung. *Es seien $f_1, f_2 \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar auf E. Dann ist auch $f_1 + f_2$ integrierbar mit*

$$\int_E (f_1 + f_2) \, d\mu = \int_E f_1 \, d\mu + \int_E f_2 \, d\mu . \tag{*}$$

Insbesondere bilden die auf E μ-intergierbaren Funktionen einen Vektorraum, und das μ-Integral über E ist eine lineare Abbildung von diesem Vektorraum nach $\mathbb{R}$.

Die Formel $(*)$ gilt auch für messbare Funktionen f_1, f_2, wenn die rechte Seite in $\overline{\mathbb{R}}$ definiert ist.

Beweis. Wir beweisen (*) zunächst für den Fall $f_1 \ge 0$, $f_2 \ge 0$. Falls beide Funktionen einfach sind, folgt die Behauptung leicht aus Definition 7.42 (1), denn

$$\begin{aligned}\sum_{y\in\mathbb{R}} \sum_{z\in\mathbb{R}} (y+z) \cdot \mu\bigl(E \cap f_1^{-1}(\{y\}) \cap f_2^{-1}(\{z\})\bigr)& \\ = \sum_{y\in\mathbb{R}} y \cdot \mu\bigl(E \cap f_1^{-1}(\{y\})\bigr) + \sum_{z\in\mathbb{R}} z \cdot \mu\bigl(E \cap f_2^{-1}(\{z\})\bigr) .&\end{aligned}$$

Ansonsten wählen wir wie in Proposition 7.41 (1) und (2) Folgen $(g_n)_n$, $(h_n)_n$ einfacher, messbarer Funktionen mit $0 \le g_0 \le g_1 \le \dots$, $0 \le h_0 \le h_1 \le \dots$ und $f_1 = \lim_{n\to\infty} g_n$, $f_2 = \lim_{n\to\infty} h_n$, dann folgt $0 \le (g_0+h_0) \le (g_1+h_1) \le \dots$ und $f_1 + f_2 = \lim_{n\to\infty}(g_n + h_n)$. Aus dem Satz 7.49 über monotone Konvergenz ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_E (f_1 + f_2)\,d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_E (g_n + h_n)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int_E g_n\,d\mu + \int_E h_n\,d\mu \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_E g_n\,d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_E h_n\,d\mu = \int_E f_1\,d\mu + \int_E f_2\,d\mu\ .\end{aligned}$$

Diese Rechnung funktioniert auch dann, wenn eines oder beide Integrale rechts den Wert ∞ annehmen.

Als nächstes betrachten wir den Fall $f_1 \le 0 \le f_2$. Wir dürfen annehmen, dass mindestens eine der beiden Funktionen integrierbar ist, denn andernfalls wäre

$$\int_E f_1\,d\mu + \int_E f_2\,d\mu = -\infty + \infty$$

nicht definiert. Sei etwa f_1 integrierbar. Wir zerlegen $E = E^+ \mathbin{\dot\cup} E^-$ mit

$$E^+ = \{x \in E \mid (f_1 + f_2)(x) \ge 0\} \quad \text{und} \quad E^- = \{x \in E \mid (f_1 + f_2)(x) < 0\}\ .$$

Auf E^+ sind $-f_1, f_2$ und $(f_1 + f_2)$ nichtnegativ, so dass

$$\int_{E^+} f_2\,d\mu = \int_{E^+} (-f_1)\,d\mu + \int_{E^+} (f_1 + f_2)\,d\mu\ .$$

Da das mittlere Integral endlich ist, folgt

$$\int_{E^+} f_1\,d\mu + \int_{E^+} f_2\,d\mu = \int_{E^+} (f_1 + f_2)\,d\mu\ .$$

Auf E^- sind $-f_1, f_2$ und $-f_1 - f_2$ nichtnegativ, so dass

$$\int_{E^-} (-f_1)\,d\mu = \int_{E^-} f_2\,d\mu + \int_{E^-} (-f_1 - f_2)\,d\mu\ .$$

Da die linke Seite endlich ist und die Terme rechts nichtnegativ, sind alle drei Integrale endlich, so dass wieder

$$\int_{E^-} (f_1 + f_2)\,d\mu = \int_{E^-} f_1\,d\mu + \int_{E^-} f_2\,d\mu\ .$$

Da $E = E^+ \mathbin{\dot\cup} E^-$, folgt aus Lemma 7.45, dass

$$\begin{aligned}&\int_E (f_1 + f_2)\,d\mu = \int_{E^+} (f_1 + f_2)\,d\mu + \int_{E^-} (f_1 + f_2)\,d\mu \\ &\quad = \int_{E^+} f_1\,d\mu + \int_{E^2} f_2\,d\mu + \int_{E^-} f_1\,d\mu + \int_{E^+} f_2\,d\mu = \int_E f_1\,d\mu + \int_E f_2\,d\mu\ .\end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall zerlegen wir E in vier Teilmengen in Abhängigkeit der Vorzeichen von f_1 und f_2. Auf jede Teilmenge lässt sich eines der obigen Argumente anwenden. Beim Zusammenaddieren müssen wir noch einmal aufpassen, dass keine Summen der Form $\infty - \infty$ auftreten, aber das ist wie oben garantiert, wenn die Integrale über f_1 und f_2 und ihre Summe definiert sind.

Wir sehen, dass die Summe zweier integrierbarer Funktionen wegen (*) wieder integrierbar ist. Außerdem sind skalare Vielfache integrierbarer Funktionen nach Bemerkung 7.44 (3) wieder integrierbar. Die integrierbaren Funktionen bilden also einen linearen Unterraum von $\mathrm{Abb}(E;\mathbb{R})$. Genauso sieht man, dass die Abbildung $f \mapsto \int_E f\,d\mu$ eine lineare Abbildung von diesem Unterraum nach $\mathbb{R}$ ist. □

Da lineare Abbildungen immer in einen Vektorraum abbilden und $\overline{\mathbb{R}}$ kein Vektorraum ist, können wir das Integral nur auf dem Raum der integrierbaren Funktionen linear nennen.

7.51. Lemma (Fatou). *Es sei $(f_n)_n$ eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen auf X und $E \subset X$ messbar, dann gilt*

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu\ .$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$g_n(x) = \inf_{k\ge n} f_k(x)\ ,$$

dann ist $g_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar nach Proposition 7.38 (1), es gilt $0 \le g_0 \le g_1 \le \dots$ und

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \liminf_{n\to\infty} f_n\ .$$

Da $g_n(x) \le f_n(x)$ für alle $x \in X$, folgt aus dem Satz 7.49 von B. Levi über monotone Konvergenz und Bemerkung 7.44 (2), dass

$$\begin{aligned}\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} g_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E g_n\,d\mu \\ = \liminf_{n\to\infty}\int_E g_n\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu\ .\end{aligned}$$ □

7.52. Bemerkung. Im Lemma von Fatou gilt im allgemeinen keine Gleichheit. Sei etwa

$$f_n = \frac{1}{n}\,\mathbf{1}_{[-n,n]}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,$$

dann gilt sogar $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, aber für alle $n \ge 1$ ist

$$\int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda = \frac{1}{n}\cdot\lambda([-n,n]) = \frac{2n}{n} = 2\ .$$

Der folgende Satz ist sehr wichtig und wird bei der Abschätzung von Integralen immer wieder benötigt. Die Stärke der bis hier entwickelten Maßtheorie zeigt sich darin, wie leicht dieser Satz in großer Allgemeinheit bewiesen werden kann.

7.53. Satz (dominierte Konvergenz; Lebesgue). *Es sei $E \subset X$ messbar und $(f_n)_n$ eine punktweise konvergente Folge messbarer Funktionen auf X. Wenn es eine auf E integrierbare Funktion g mit $|f_n| \le g$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt, dann sind alle f_n und die Grenzfunktion auf E integrierbar, und es gilt*

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \; .$$

Beweis. Es sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ die Grenzfunktion. Nach Voraussetzung gilt $0 \le f_n^+, f_n^- \le g$, somit

$$\int_E f_n^\pm \, d\mu \le \int_E g \, d\mu < \infty \; .$$

Also sind alle f_n integrierbar. Für f^+ und f^- gelten die gleichen Abschätzungen.

Die Funktionen $g \pm f_n$ sind nichtnegativ, daher folgen die folgenden zwei Ungleichungen aus dem Lemma 7.51 von Fatou:

$$\begin{aligned}\int_E (g+f)\, d\mu &= \int_E \liminf_{n\to\infty}(g+f_n)\, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E (g+f_n)\, d\mu \; ,\\ \int_E (g-f)\, d\mu &\le \liminf_{n\to\infty} \int_E (g-f_n)\, d\mu = \int_E g\, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \; .\end{aligned}$$

Die Linearität des Integrals aus Folgerung 7.50 impliziert

$$\int_E f\, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu \le \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \le \int_E f\, d\mu \; ,$$

mithin gilt Gleichheit, und aus Bemerkung 2.38 folgt

$$\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \; . \qquad \square$$

7.5. Vergleich mit Regel- und Riemann-Integral

In diesem Abschnitt sehen wir, dass der allgemeine Integralbegriff aus Abschnitt 7.3 vergleichbare Eigenschaften hat wie das Regelintegral aus Abschnitt 3.6. Anschließend zeigen wir, dass das Lebesgue-Integral einer integrierbaren Funktion f auf abgeschlossenen Intervallen mit dem Riemann- bzw. dem Regelintegral übereinstimmt, falls die letzteren definiert sind. Das gibt uns die Möglichkeit, manche Lebesgue-Integrale mit dem Hauptsatz 5.47 der Differential- und Integralrechnung auszurechnen. Es gibt auf der anderen Seite uneigentliche Regel- oder Riemann-Integrale, die sich nicht einfach als Lebesgue-Integrale schreiben lassen.

Bevor wir die wichtigsten Eigenschaften allgemeiner Integrale zusammenfassen und mit Abschnitt 3.6 vergleichen, holen wir noch eine kleine Definition nach. Wir erinnern uns an die Hausdorff-Eigenschaft aus Definition 6.24. Kompakte Teilmengen von Hausdorff-Räumen sind abgeschlossen. Das zeigt man mit ähnlichen Methoden wie in Aufgabe 4 von Blatt II.7. Als Komplemente offener Mengen sind kompakte Teilmengen von Hausdorff-Räumen insbesondere Borel-Mengen.

7.54. Definition. Es sei $(X,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Ein Maß μ auf einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt *Borel-Maß*, wenn jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ endliches Maß hat.

7.55. Beispiel.
(1) Die Räume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen Topologie sind Hausdorff-Räume. Jede kompakte Teilmenge K von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$ ist nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß beschränkt, also in einem Quader Q enthalten. Es folgt $\mu(K) \le \mu(Q) < \infty$, also ist das Lebesgue-Maß ein Borel-Maß.
(2) Genauso sind Lebesgue-Stieltjes-Maße auf $\mathbb{R}$ Borel-Maße. Umgekehrt ist jedes Borel-Maß auf $\mathbb{R}$ ein Lebesgue-Stieltjes-Maß, siehe Übung 3 von Blatt III.5.
(3) Wir erweitern das Lebesgue-Maß λ auf $\mathbb{R}$ zu einem Maß $\bar\lambda$ auf $\overline{\mathbb{R}}$ durch $\bar\lambda(A) = \lambda(A \cap \mathbb{R})$ für alle $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Das Maß $\bar\lambda$ ist dann das *Bildmaß* von λ unter der Inklusion $\mathbb{R} \hookrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, siehe Übung 4 von Blatt III.1. Das Maß $\bar\lambda$ ist kein Borel-Maß, denn der Raum $\overline{\mathbb{R}}$ ist mit der üblichen Topologie kompakt (siehe Aufgabe 4 von Blatt I.9), aber $\bar\lambda(\overline{\mathbb{R}}) = \lambda(\mathbb{R}) = \infty$.
(4) Bezüglich der diskreten Topologie $\mathcal{P}(X)$ sind genau die endlichen Teilmengen kompakt. Also ist das Zählmaß aus Beispiel 7.12 (2) ein Borel-Maß bezüglich der diskreten Topologie. Integrierbare Funktionen auf $\mathbb{N}$ bezüglich des Zählmaßes liefern absolut konvergente Reihen. Also übertragen sich Sätze für Integrale bezüglich Borel-Maßen automatisch auf absolut konvergente Reihen.

7.56. Bemerkung. Wir wollen jetzt noch einmal die grundlegenden Eigenschaften unseres allgemeinen μ-Integrals mit denen des Regelintegrals aus Abschnitt 3.6 vergleichen. Die folgenden Punkte gelten für das Lebesgue-Integral, aber auch für das Lebesgue-Stieltjes-Integral und für Grenzwerte absolut konvergenter Reihen nach Übung 3 von Blatt III.3. Sei also $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum.

(1) Wenn $(X,\mathcal{O})$ topologischer Raum ist und $\mathcal{O} \subset \mathcal{A}$ gilt, dann sind stetige Funktionen messbar nach Bemerkung 7.35. Auf kompakten Teilmengen $K \subset X$ sind stetige Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$ nach Folgerung 6.33 beschränkt. Falls etwa $-C \le f \le C$ auf K gilt, so ist f auf K bezüglich eines Borel-Maßes μ integrierbar, da
$$\int_K f^\pm \, d\mu \le C \cdot \mu(K) < \infty \,.$$
Also sind stetige Funktionen auf kompakten Mengen bezüglich eines jeden Borel-Maßes integrierbar.
Da wir Beschränktheit von f und Endlichkeit von $\mu(K)$ ausgenutzt haben, brauchen wir sowohl die Kompaktheit von K als auch ein Borel-Maß μ für diese Überlegung.
(2) Nach Folgerung 7.50 ist das Integral eine lineare Abbildung vom Raum der integrierbaren Funktionen nach $\mathbb{R}$.

(3) Es sei $E = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} E_n$ mit $E_n \in \mathcal{A}$, und f sei integrierbar auf E, dann gilt

$$\int_E f\,d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} f\,d\mu$$

nach Lemma 7.45, angewandt auf den Maßraum $(E, \mathcal{A} \cap \mathcal{P}(E), \mu)$ und $f|_E$. Im ursprünglichen Punkt (3) in Abschnitt 3.6 haben wir nur Additivität, nicht σ-Additivität verlangt.

(4) Für konstante Funktionen und messbare Mengen von endlichem Maß gilt

$$\int_E c\,d\mu = c \cdot \mu(E)\ .$$

(5) Falls $f \leq g$ gilt und die Integrale über E existieren, gilt nach Bemerkung 7.44 (2) Monotonie

$$\int_E f\,d\mu \leq \int_E g\,d\mu\ .$$

(6) Da punktweise Grenzfunktionen messbarer Funktionen wieder messbar sind nach Proposition 7.38, gilt das gleiche erst recht für gleichmäßige Limiten. Sei E messbar mit $\mu(E) < \infty$. Falls $f_n \to f$ gleichmäßig konvergiert, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|f(x) - f_n(x)| < 1$ für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in [a,b]$. Ohne Einschränkung sei $n_0 = 0$. Dann sind alle $|f_n|$ beschränkt durch die Funktion $g = 2 + |f_0|$ mit

$$\int_E g\,d\mu = \int_E |f_0|\ d\mu + 2\,\mu(E) < \infty\ .$$

Aus dem Satz 7.53 von Lebesgue folgt

$$\int_a^b f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,d\mu\ .$$

Wie in Folgerung 3.61 überprüft man, dass das Integral über eine messbare Menge E mit $\mu(E) < \infty$ stetig ist bezüglich der Supremumsmetrik $d_{\sup}$.

Das Beispiel zum Lemma 7.51 von Fatou in Bemerkung 7.52 zeigt, dass wir auf $\mu(E) < \infty$ in diesem Argument nicht verzichten können.

Somit hat das Integral auf $(X, \mathcal{A}, \mu)$ über Mengen von endlichem Maß ähnliche Eigenschaften wie das Regelintegral, wenn μ ein Borel-Maß ist. In der Tat stimmen Lebesgue-, Riemann- und Regelintegral in vielen Fällen überein.

7.57. Satz. *Jede Regelfunktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Lebesgue-integrierbar mit*

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_a^b f(x)\,dx\ .$$

Beweis. Treppenfunktionen sind nach Definition 3.51 einfache, Borel-messbare Funktionen. Nach Satz 3.56 ist jede Regelfunktion f gleichmäßiger Limes einer Folge $(g_n)_n$ von Treppenfunktionen. Nach Proposition 7.38 ist f also auch Borel-messbar, also erst recht Lebesgue-messbar.

Für jede Treppenfunktion folgt aus Bemerkung 3.52, dass

$$\int_a^b g_n(x)\,dx = \sum_{j=1}^n y_j(x_j - x_{j-1}) = \int_{[a,b]} g_n\,d\lambda\;.$$

Da die Folge g_n gleichmäßig gegen f konvergiert, können wir Bemerkung 7.56 (6) anwenden. Aus der Definition 3.57 des Regelintegrals und dem Satz 7.53 von Lebesgue folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} g_n\,d\lambda = \int_{[a,b]} f\,d\lambda\;. \qquad \square$$

7.58. Satz. *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist f Lebesgue-integrierbar mit*

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_a^b f(x)\,dx\;.$$

Beweis. Nach Definition 3.68 des Riemann-Integrals existieren Folgen (g_n), (h_n) von Treppenfunktionen mit $g_n \le f \le h_n$ für alle n mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} g_n\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} h_n\,d\lambda = \int_a^b f(x)\,dx$$

Ohne Einschränkung steigt die Folge $(g_n(x))_n$ monoton für alle $x \in [a,b]$, während $(h_n(x))$ monoton fällt. Ansonsten betrachte die Folgen

$$(\max(g_0,\dots,g_n))_n\;, \qquad (\min(h_0,\dots,h_n))_n\;.$$

Nach dem Monotoniekriterium aus Satz 2.29 existieren punktweise Grenzfunktionen

$$g = \lim_{n\to\infty} g_n \le f \le h = \lim_{n\to\infty} h_n\;,$$

und g und h sind messbar nach Proposition 7.38.

Wie im Beweis von Satz 7.57 erhalten wir

$$\int_{[a,b]} g\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} g_n\,d\lambda = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} h_n\,d\lambda = \int_{[a,b]} h\,d\lambda\;.$$

Aus $(h-g) \ge 0$ und $\int (h-g)\,d\lambda = 0$ folgt $h = g = f$ fast überall nach Übung 1 von Blatt III.4. Insbesondere ist f Lebesgue-messbar und -integrierbar mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\lambda\;. \qquad \square$$

7.59. Bemerkung. Aus Satz 3.56 folgt, dass jede Regelfunktion als Grenzfunktion einer Folge Borel-messbarer Treppenfunktionen ebenfalls Borel-messbar ist. Es gibt jedoch Riemann-integrierbare Funktionen, die zwar Lebesgue-, aber nicht Borel-messbar sind, siehe Übung 2 von Blatt III.5. Dies zeigt wieder, dass das Riemann-Integral allgemeiner ist als das Regelintegral, siehe auch Beispiel 3.70.

Wir erinnern uns jetzt an die Definition des uneigentlichen Regel-Integrals in Definition 5.55. Analog definieren wir das uneigentliche Riemann-Integral.

7.60. Folgerung. *Es sei $(a,b) \subset \overline{\mathbb{R}}$ offen und $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die das uneigentliche Regel- bzw. Riemann-Integral über (a,b) existiert. Dann ist f Lebesgue-messbar. Wenn f Lebesgue-integrierbar ist, dann gilt*

$$\int_{(a,b)} f\,d\lambda = \int_a^b f(x)\,dx\ .$$

Beweis. Es seien (a_n), (b_n) Folgen in (a,b) mit $a_n \searrow a$ und $b_n \nearrow b$. Aus Satz 7.57 bzw. 7.58 folgt, dass $f|_{[a_n,b_n]}$ messbar ist. Für jede Borel-Menge $B \subset \overline{\mathbb{R}}$ folgt

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigl(f^{-1}(B) \cap [a_n,b_n]\bigr) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigl((f|_{[a_n,b_n]}^{-1}(B)\bigr) \in \mathcal{L}\ ,$$

also ist f Lebesgue-messbar.

Wenn f integriebar ist, ist die Funktion

$$A \mapsto \int_A f\,d\lambda$$

auf $\mathcal{L} \cap \mathcal{P}((a,b))$ nach Lemma 7.45 σ-additiv. Aus Proposition 7.13 und Satz 7.57 bzw. 7.58 folgt

$$\begin{aligned}\int_{(a,b)} f\,d\lambda = \int_{\bigcup_{n=0}^{\infty}[a_n,b_n]} f\,d\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int_{[a_n,b_n]} f\,d\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\ . \qquad \square\end{aligned}$$

7.61. Bemerkung. Wir müssen in Folgerung 7.60 verlangen, dass f Lebesgue-integrierbar ist, denn aus der Existenz eines uneigentlichen Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ folgt nicht die Existenz der Integrale

$$\int_a^b f^+(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_a^b f^-(x)\,dx\ .$$

Beispielsweise ist die Funktion $\frac{\sin x}{x}$ auf $(0,\infty)$ uneigentlich Regel-integrierbar, aber nicht Lebesgue-integrierbar, siehe Übung 4 von Blatt III.5.

Um Abhilfe zu schaffen, könnten wir ein uneigentliches Lebesgue-Integral definieren. Dieses hätte zwar einen größeren Definitionsbereich als das uneigentliche Riemann-Integral, aber nicht die schönen Konvergenzeigenschaften aus Abschnitt 7.4. In Analogie zu Bemerkung 2.70 können wir zu jeder Zahl $c \in \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge messbarer Mengen $A_n \subset (0,\infty)$ mit $A_0 \subset A_1 \subset \dots$ und $(0,\infty) = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ finden, so dass

$$c = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \frac{\sin x}{x}\,d\lambda(x)\ .$$

Somit wäre bereits Lemma 7.45 in dieser Allgemeinheit wegen Proposition 7.13 nicht mehr gültig.

Eine gängige Methode zur Berechnung von Regel- und Riemann-Integralen ist der Hauptsatz 5.47 der Differential- und Integralrechnung. Wegen der Sätze 7.57, 7.58 und Folgerung 7.60 liefert er uns auch so manches Lebesgue-Integral, etwa

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1}\, d\lambda(x) = \lim_{x\to\infty} \arctan x - \lim_{x\to-\infty} \arctan x = \pi\ .$$

Wir geben ohne Beweis zwei Verallgemeinerungen des Hauptsatzes für das Lebesgue-Integral an.

7.62. Satz. *Sei* $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

(1) *Ist* f *auf* $[a,b]$ *Lebesgue-integrierbar und* $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *definiert durch*

$$F(x) = \int_{[a,x]} f\, d\lambda\ ,$$

so ist F *stetig und fast überall differenzierbar mit* $F' = f$.

(2) *Ist umgekehrt* $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und auf* (a,b) *differenzierbar, und ist* $f = F'$ *Lebesgue-integrierbar, so gilt für alle* $x \in [a,b]$, *dass*

$$F(x) - F(a) = \int_{(a,x)} f\, d\lambda\ .$$

7.63. Bemerkung. (1) In Satz 7.62 (1) können wir nicht erwarten, dass F überall differenzierbar ist. Betrachte etwa

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\,|x|^{-\frac{2}{3}} & \text{für } x \neq 0, \text{ und} \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Dann ist eine Stammfunktion gegeben durch

$$F(x) = \operatorname{sign}(x)\ |x|^{\frac{1}{3}}\ ,$$

aber F ist bei 0 nicht differenzierbar.

(2) In (2) müssen wir Differenzierbarkeit auf ganz (a,b) fordern. Es gibt nämlich fast überall differenzierbare Funktionen F, für die (2) nicht gilt, siehe Übung 1 von Blatt III.5.

Wir haben gesehen, dass das Lebesgue-Integral mit dem Regel- oder Riemann-Integral übereinstimmt, wann immer beide definiert sind. Daher dürfen wir ab sofort auch wieder

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{[a,b]} f\, d\lambda = \int_{(a,b)} f\, d\lambda$$

schreiben; letzteres, da $\{a,b\}$ eine Nullmenge ist und nach Bemerkung 7.44 (4) nicht zum Integral beiträgt. Für das Lebesgue-Stieltjes-Integral führen wir diese Schreibweise nicht ein, denn nach Übung 2 von Blatt III.2 können endliche Mengen positives Lebesgue-Stieltjes-Maß haben.

7.6. Produkte und Mehrfachintegrale

Wir haben die Topologie des $\mathbb{R}^n$ in den Abschnitten 6.1 und 6.2 als Produkttopologie auf $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ geschrieben. Dadurch wurde es beispielsweise möglich, stetige und differenzierbare Abbildungen in den $\mathbb{R}^n$ komponentenweise zu betrachten. Analog dazu wollen wir das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ mit dem Produkt der Lebesgue-Maße auf $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ in Beziehung setzen. Dadurch wird es möglich, Integrale von Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ durch mehrfaches eindimensionales Integrieren auszurechnen. Zusammen mit Abschnitt 7.5 erlaubt uns das, mehrdimensionale Lebesgue-Integrale hinreichend „schöner" (beispielsweise stetiger) Funktionen auf das eindimensionale Regel- oder Riemann-Integral zurückzuführen und dann möglicherweise mit Hilfe des Hauptsatzes sogar explizit auszuwerten.

Bevor wir uns Produkte von Maßräumen näher anschauen, benötigen wir eine Eindeutigkeitsaussage für Maße, die wie das Lebesgue-Maß zunächst nur auf wenigen Mengen wie beispielsweise Quadern festgelegt sind. Wir erinnern uns an die in Beispiel 7.5 (3) konstruierte, von einer Teilmenge $\mathcal{E}$ von $\mathcal{P}(X)$ erzeugte σ-Algebra auf X.

7.64. Lemma. *Es sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{A}$ die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra, und μ_1, μ_2 zwei Maße auf $\mathcal{A}$, so dass*

(1) *$\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty$ für alle $E \in \mathcal{E}$ gilt,*
(2) *$E \cap F \in \mathcal{E}$ für alle E, $F \in \mathcal{E}$, und*
(3) *eine Folge $(E_n)_n$ in $\mathcal{E}$ mit $E_0 \subset E_1 \subset \dots$ und $\bigcup_{n=0}^\infty E_n = X$ existiert,*

dann gilt $\mu_1 = \mu_2$ auf ganz $\mathcal{A}$.

Beweis. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E) \text{ für alle } E \in \mathcal{E}\} \subset \mathcal{A} .$$

Für alle $A \in \mathcal{C}$ gilt wegen Proposition 7.13, dass

$$\begin{aligned} \mu_1(A) = \mu_1\biggl(\bigcup_{n=0}^\infty (A \cap E_n)\biggr) &= \lim_{n\to\infty} \mu_1(A \cap E_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu_2(A \cap E_n) = \mu_2(A) . \end{aligned}$$

Außerdem gilt $F \cap E \in \mathcal{E}$ für alle E, $F \in \mathcal{E}$ wegen (2), somit $\mu_1(F \cap E) = \mu_2(F \cap E)$, also umfasst $\mathcal{C}$ die Menge $\mathcal{E}$. Es reicht zu zeigen, dass $\mathcal{C}$ eine σ-Algebra ist, dann folgt $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$, da $\mathcal{A}$ von $\mathcal{E}$ erzeugt wird.

Als erstes stellen wir fest, dass $\emptyset \in \mathcal{C}$, denn für alle $E \in \mathcal{E}$ gilt

$$\mu_1(\emptyset \cap E) = \mu_1(\emptyset) = 0 = \mu_2(\emptyset \cap E) .$$

Sei jetzt $A \in \mathcal{C}$, dann folgt $A^c = X \setminus A \in \mathcal{C}$, denn da $\mu(A \cap E) \le \mu(E) < \infty$, folgt für alle $E \in \mathcal{E}$, dass

$$\begin{aligned} \mu_1(A^c \cap E) = \mu_1(E \setminus A) &= \mu_1(E) - \mu_1(E \cap A) \\ &= \mu_2(E) - \mu_2(E \cap A) = \mu_2(A^c \cap E) . \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $X = \emptyset^c \in \mathcal{C}$. Sei schließlich $(A_k)_k$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{C}$. Aus der σ-Additivität von μ_1 und μ_2 folgt

$$\begin{aligned}\mu_1\Bigl(\dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} A_k \cap E\Bigr) = \mu_1\Bigl(\dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} (A_k \cap E)\Bigr) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu_1(A_k \cap E) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu_2(A_k \cap E) = \mu_2\Bigl(\dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} A_k \cap E\Bigr)\end{aligned}$$

für alle $E \in \mathcal{E}$, somit $\dot{\bigcup}_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{C}$.

Wir wissen noch nicht, dass $\mathcal{C}$ eine σ-Algebra ist, denn wir können noch nicht zeigen, dass mit A, $B \in \mathcal{C}$ auch $A \setminus B \in \mathcal{C}$ gilt. Für den letzten Schritt führen wir den Begriff des Dynkin-Systems ein und beweisen, dass das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra ist, wenn $\mathcal{E}$ unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist. Aus $\mathcal{E} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ folgt dann $\mathcal{D} = \mathcal{C} = \mathcal{A}$, und der Beweis ist beendet.

Ein *Dynkin-System* ist eine Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$, so dass

(1) $\emptyset \in \mathcal{S}$,
(2) für alle $A \in \mathcal{S}$ ist auch $A^c \in \mathcal{S}$,
(3) $\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$ für eine Folge $(A_n)_n$ paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{S}$.

Man sieht leicht, dass $\mathcal{P}(X)$ selbst ein Dynkin-System ist, und dass der Durchschnitt einer Menge von Dynkin-Systemen wieder ein Dynkin-System ist. Sei etwa $(\mathcal{S}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Dynkin-Systemen auf X und sei $A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{S}_i$, dann folgt $A \in \mathcal{S}_i$, also auch $A^c \in \mathcal{S}_i$ für alle i, und daher $A^c \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{S}_i$. Genauso vererben sich die anderen obigen Eigenschaften auf Durchschnitte. Wie in Beispiel 7.5 (3) gibt es also ein kleinstes Dynkin-System $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$, nämlich den Durchschnitt aller Dynkin-Systeme $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$.

Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra ist, wenn $\mathcal{E}$ unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist. Es reicht zu zeigen, dass $\mathcal{D}$ dann ebenfalls unter Durchschnitten abgeschlossen ist, denn für A, B und $A_n \in \mathcal{D}$ folgt

$$A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{D} \quad \text{und} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} \bigl(A_n \cap A_0^c \cap \dots \cap A_{n-1}^c\bigr) \in \mathcal{D}\,.$$

Für ein festes $D \in \mathcal{D}$ betrachten wir

$$\mathcal{D}_D = \{A \subset X \mid A \cap D \in \mathcal{D}\}\,.$$

Dann gilt

(1) $\emptyset \in \mathcal{D}_D$, da $\emptyset \cap D = \emptyset \in \mathcal{D}$;
(2) für $A \in \mathcal{D}_D$ folgt $A^c \cap D = (D^c \,\dot\cup\, (A \cap D))^c \in \mathcal{D}$;
(3) für paarweise disjunkte $A_n \in \mathcal{D}_D$ folgt

$$\Bigl(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n\Bigr) \cap D = \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} (A_n \cap D) \in \mathcal{D}\,.$$

Also ist $\mathcal{D}_D$ ein Dynkin-System.

Sei zunächst $E \in \mathcal{E}$. Für alle $F \in \mathcal{E}$ folgt $E \cap F \in \mathcal{E} \subset \mathcal{D}$, somit $F \in \mathcal{D}_E$. Da das für alle $F \in \mathcal{E}$ gilt, folgt $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_E$, also $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_E$, da $\mathcal{D}$ das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System ist. Für alle $D \in \mathcal{D}$ folgt insbesondere $D \cap E \in \mathcal{D}$ nach Definition von $\mathcal{D}_E$.

Sei jetzt $D \in \mathcal{D}$ beliebig. Nach dem obigen gilt $D \cap E \in \mathcal{D}$ für alle $E \in \mathcal{E}$. Daraus folgt $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_D$, und somit $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_D$. Insbesondere gilt $D \cap D' \in \mathcal{D}$ für alle $D' \in \mathcal{D}$. Aber dann ist $\mathcal{D}$ unter Durchschnitten abgeschlossen und daher eine σ-Algebra, was noch zu zeigen war. □

7.65. Bemerkung. Man könnte geneigt sein zu glauben, dass es reicht, ein Maß μ auf einer beliebigen Erzeugendenmenge von $\mathcal{A}$ anzugeben, um es eindeutig festzulegen. Das ist leider nicht so einfach.

(1) Die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$ der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ wird erzeugt von den Intervallen $(-\infty, c)$ für alle $c \in \mathbb{R}$. Aber durch $\lambda((-\infty, c)) = \infty$ ist das Lebesgue-Maß nicht festgelegt. Daher brauchen wir Voraussetzung (1) in Lemma (7.64).
(2) Es gibt Beispiele von Mengen $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, die nicht unter Durchschnitten abgeschlossen sind, so dass $\mu|_{\mathcal{E}}$ das Maß μ auf der von $\mathcal{E}$ erzeugten σ-Algebra noch nicht festlegt, siehe Übung 3 von Blatt III.6. Also brauchen wir Voraussetzung (2).
(3) Aus Voraussetzung (3) folgt insbesondere, dass μ ein σ-endliches Maß ist, siehe Definition 7.29. Auch auf (3) kann man nicht verzichten. Sei etwa $X \neq \emptyset$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ die von $\mathcal{E} = \emptyset$ erzeugte σ-Algebra, und $\mu_1(X) = 1$, $\mu_2(X) = \infty$. Dann erfüllt $\mathcal{E}$ zwar die Voraussetzungen (1) und (2), aber $\mu_1 \neq \mu_2$.

7.66. Folgerung. *Es sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{L}$. Wenn ein Maß μ auf einer der folgenden Mengen*

$$\mathcal{E} = \{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \mid a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Q}\} \tag{1}$$

$$\textit{oder} \quad \mathcal{F} = \{[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) \mid a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Q}\} \tag{2}$$

mit dem Lebesgue-Maß λ übereinstimmt, dann gilt $\mu = \lambda|_{\mathcal{A}}$.

Beweis. Sei zunächst $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Beide Mengen erfüllen offenbar die Voraussetzungen (1)–(3) aus Lemma 7.64. Um zu zeigen, dass sie $\mathcal{B}$ erzeugen, reicht es zu zeigen, dass jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ im Erzeugnis von $\mathcal{E}$ bzw. $\mathcal{F}$ liegt. Für $\mathcal{E}$ folgt das aus Übung 4 von Blatt III.2. Für $\mathcal{F}$ folgt es darauf, dass $\mathcal{E}$ im Erzeugnis von $\mathcal{F}$ liegt, da

$$[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(a_1 - \frac{1}{k}, b_1 \right) \times \cdots \times \left(a_n - \frac{1}{k}, b_n \right) .$$

Aus Lemma 7.64 folgt $\mu|_{\mathcal{B}} = \lambda|_{\mathcal{B}}$.

Sei nun $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{L}$ gegeben. Nach Bemerkung 7.31 ist $\mathcal{L}$ die Vervollständigung von $\mathcal{B}$. Zu $A \in \mathcal{A}$ existieren daher B, $C \in \mathcal{B}$ mit $B \subset A \subset C$

und $\lambda(A) = \lambda(B) = \lambda(C)$. Es folgt

$$\lambda(A) = \lambda(B) = \mu(B) \leq \mu(A) \leq \mu(C) = \lambda(C) = \lambda(A) \ ,$$

also $\lambda(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. $\square$

Wir kommen jetzt zum eigentlichen Thema dieses Abschnitts, den Produkträumen und den Sätzen von Tonelli und Fubini. Im Folgenden sei $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

7.67. Definition. Es seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ Maßräume für $i = 1, \dots, k$, und es sei $X = X_1 \times \cdots \times X_k$. Die *Produkt-$\sigma$-Algebra* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_k$ ist die kleinste σ-Algebra auf X, die alle Mengen der Form $A_1 \times \cdots \times A_k$ mit $A_i \in \mathcal{A}_i$ für alle i enthält. Ein Maß μ auf $\mathcal{A}$ heißt *Produktmaß*, wenn

$$\mu(A_1 \times \cdots \times A_k) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_k(A_k)$$

für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}_k$ gilt. In diesem Fall heißt $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein *Produkt* der Maßräume $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, …, $(X_k, \mathcal{A}_k, \mu_k)$.

7.68. Folgerung (aus Lemma7.64). *Wenn die Maßräume* $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, …, $(X_k, \mathcal{A}_k, \mu_k)$ *σ-endlich sind, ist das Produktmaß eindeutig.*

Beweis. Wir setzen

$$\mathcal{E} = \{E_1 \times \cdots \times E_k \mid E_i \in \mathcal{A}_i \text{ mit } \mu_i(E_i) < \infty \text{ für alle } i\} \subset \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_k \ .$$

Nach Definition 7.29 existiert für jedes $i = 1, \dots, k$ eine Folge $(E_{i,n})_n$ in $\mathcal{A}_i$ mit $E_{i,0} \subset E_{i,1} \subset \dots$, $\mu_i(E_{i,n}) < \infty$ für alle n und $X_i = \bigcup_{n=0}^\infty E_{i,n}$. Wir setzen

$$E_n = E_{1,n} \times \cdots \times E_{k,n} \in \mathcal{E}$$

und erhalten eine Folge $(E_n)_n$ in $\mathcal{E}$ mit $E_0 \subset E_1 \subset \dots$ und $X_1 \times \cdots \times X_k = \bigcup_{n=0}^\infty E_n$.

Die Menge $\mathcal{E}$ erzeugt die Produkt-σ-Algebra, denn jeder Erzeuger $A_1 \times \cdots \times A_k$ mit $A_i \in \mathcal{A}_i$ lässt sich als

$$A_1 \times \cdots \times A_k = \bigcup_{n=0}^\infty ((A_1 \times \cdots \times A_k) \cap E_n) = \bigcup_{n=0}^\infty \underbrace{(A_1 \cap E_{1,n}) \times \cdots \times (A_k \cap E_{k,n})}_{\in \mathcal{E}}$$

schreiben und liegt daher in der von $\mathcal{E}$ erzeugten σ-Algebra $\mathcal{A}$, so dass $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}$. Aus $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_k$ folgt, dass $\mathcal{E}$ die Produkt-σ-Algebra erzeugt.

Außerdem ist $\mathcal{E}$ unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen, und für ein Produktmaß μ gilt

$$\mu(E_1 \times \cdots \times E_k) = \mu_1(E_1) \cdots \mu_k(E_k) < \infty$$

für alle $E_1 \times \cdots \times E_k \in \mathcal{E}$, somit kann es nach Lemma 7.64 höchstens ein Produktmaß geben. $\square$

7.69. Bemerkung. Es seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ σ-endliche Maßräume für $i = 1, \dots, k$.

(1) Wir sehen in Satz 7.71, dass es ein Produktmaß μ gibt. Wegen Folgerung 7.68 ist es eindeutig, und wir schreiben $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_k$.

(2) Das Produkt der σ-Algebren $\mathcal{A}_i$ und der Maße μ_i ist assoziativ. Dazu überlegt man sich, dass die Produkt-σ-Algebra jeweils erzeugt wird von Mengen der Form

$$\begin{aligned} A_1 \times \cdots \times A_k &= (\cdots(A_1 \times A_2) \times \cdots \times A_{k-1}) \times A_k \\ &= A_1 \times (A_2 \times \cdots \times (A_{k-1} \times A_k) \cdots) , \end{aligned}$$

und falls $\mu_i(A_i) < \infty$ für alle i, diese Mengen das Produktmaß

$$\mu_1(A_1) \cdots \mu_k(A_k) = ((\cdots(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \cdots \otimes \mu_{k-1}) \otimes \mu_k)(A_1 \times \cdots \times A_k) = \cdots$$

haben. Wegen der Eindeutigkeit des Produktmaßes macht es keinen Unterschied, ob wir das Produktmaß aller Maßräume auf einmal bilden oder mit Satz 7.71 sukzessive paarweise Produkte konstruieren.

7.70. Beispiel. Wir schränken das n-dimensionale Lebesgue-Maß $\lambda^n = \lambda$ auf die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B} = \mathcal{B}^n \subset \mathcal{L} = \mathcal{L}^n$ auf $\mathbb{R}^n$ ein und betrachten die Maßräume $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}^p, \lambda^p)$ und $(\mathbb{R}^q, \mathcal{B}^q, \lambda^q)$ mit $p + q = n$.

(1) Die σ-Algebra $\mathcal{B}^n$ wird von allen offenen Quadern $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ für alle $i = 1, \dots, n$ erzeugt, da alle offenen Teilmengen des $\mathbb{Q}^n$ als abzählbare Vereinigung solcher Quader geschrieben werden können, siehe Übung 4 von Blatt III.2. Entsprechendes gilt für $\mathcal{B}^p$ und $\mathcal{B}^q$. Die Produkt-σ-Algebra $\mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q$ wird von den kartesischen Produkten entsprechender p- und q-dimensionaler Quader erzeugt, also ebenfalls von n-dimensionalen Quadern. Es folgt

$$\mathcal{B}^n = \mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q .$$

(2) Für das Lebesgue-Maß eines solchen Quaders gilt

$$\begin{aligned} &\lambda^n((a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n) \\ &\qquad = \lambda^p((a_1, b_1) \times \cdots \times (a_p, b_p)) \cdot \lambda^q((a_{p+1}, b_{p+1}) \times \cdots \times (a_n, b_n)) . \end{aligned}$$

Da die Menge aller Quader mit rationalen Koordinaten die Voraussetzungen aus Lemma 7.64 erfüllt, folgt

$$\lambda^n|_{\mathcal{B}^n} = \lambda^p|_{\mathcal{B}^p} \otimes \lambda^q|_{\mathcal{B}^q} .$$

Insgesamt gilt also wegen der Assoziativität aus Bemerkung 7.69 (2), dass

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \lambda^n) = (\mathbb{R}^p, \mathcal{B}^p, \lambda^p) \otimes (\mathbb{R}^q, \mathcal{B}^q, \lambda^q) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, \lambda^1) \otimes \cdots \otimes (\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, \lambda^1) .$$

Dieses Beispiel motiviert die Betrachtung von Produkten von Maßräumen. Die volle Lebesgue-σ-Algebra $\mathcal{L}^n$ ist die Vervollständigung von $\mathcal{L}^1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}^1$ bezüglich des Lebesgue-Maßes wie in Bemerkung 7.31.

Wir geben einen allgemeinen Existenzbeweis für Produktmaße, aus dem wir auch eine nützliche Formel für das Produktmaß ableiten können. Dazu nennen wir für alle $A \subset X \times Y$ und alle $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ die Mengen

$$A_{x_0} = \{y \in Y \mid (x_0, y) \in A\} \quad \text{und} \quad A_{y_0} = \{x \in X \mid (x, y_0) \in A\}$$

die x_0- bzw. y_0-*Schnitte* von A.

7.71. SATZ. *Es seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ σ-endliche Maßräume. Dann existiert das Produktmaß μ in $(X, \mathcal{A}, \mu) = (X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1) \otimes (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$, und es gilt:*

(1) *für alle $A \in \mathcal{A}$, $x \in X_1$, $y \in X_2$ sind $A_x \in \mathcal{A}_2$ und $A_y \in \mathcal{A}_1$ messbar;*
(2) *für alle $A \in \mathcal{A}$ sind die Funktionen*

$$x \mapsto \mu_2(A_x) \qquad \textit{und} \qquad y \mapsto \mu_1(A_y)$$

auf X_1 bzw. X_2 messbar;
(3) *für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt*

$$\mu(A) = \int_{X_1} \mu_2(A_x)\, d\mu_1(x) = \int_{X_2} \mu_1(A_y)\, d\mu_2(y) \;.$$

BEWEIS. Wir zeigen (1) – (3); die Existenz des Produktmaßes folgt, wenn wir zeigen, dass die Formeln in (3) jeweils ein Maß mit der Eigenschaft $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$ für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ definieren.

Zu (1) fixieren wir $x \in X_1$ und setzen

$$\mathcal{A}_x = \{ A \subset X_1 \times X_2 \mid A_x \in \mathcal{A}_2 \} \subset \mathcal{P}(X_1 \times X_2) \;.$$

Man überzeugt sich leicht, dass

$$\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right)_x = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n)_x \;,$$
$$(A \setminus B)_x = A_x \setminus B_x \qquad \text{und} \qquad (X_1 \times X_2)_x = X_2 \;,$$

somit ist $\mathcal{A}_x$ eine σ-Algebra. Für $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$ gilt

$$(A_1 \times A_2)_x = \begin{cases} A_2 & \text{falls } x \in A_1, \text{ und} \\ \emptyset & \text{sonst,} \end{cases}$$

also gilt $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_x$. Da die Produkt-$\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$ von den Mengen $A_1 \times A_2$ mit $A_i \in \mathcal{A}_i$ erzeugt wird, folgt $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_x$, somit ist A_x insbesondere messbar für alle $A \in \mathcal{A}$. Das gilt für alle $x \in X_1$ und analog für alle $y \in X_2$, und es folgt (1).

Zu (2) wählen wir eine Folge $(E_n)_n$ in $\mathcal{A}_2$ mit $\mu_2(E_n) < \infty$ $E_0 \subset E_1 \subset \dots$ und $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = X_2$ wie in Definition 7.29. Wir betrachten die Mengen

$$\mathcal{D}_n = \{ A \subset X_1 \times X_2 \mid x \mapsto \mu_2(A_x \cap E_n) \text{ messbar auf } X_1 \} \subset \mathcal{P}(X_1 \times X_2)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da

$$\mu_2(\emptyset_x \cap E_n) = \mu(\emptyset) = 0 \;,$$

gilt $\emptyset \in \mathcal{D}_n$. Für $A \in \mathcal{D}_n$ und $x \in X_1$ gilt

$$\mu_2(A_x^c \cap E_n) = \mu_2(E_n) - \mu_2(A_x \cap E_n) \;,$$

also ist $x \mapsto \mu_2(A_x^c \cap E_n)$ messbar und daher $A^c \in \mathcal{D}_n$. Für eine Folge $(A_k)_k$ paarweise disjunkter Teilmengen gilt

$$\mu_2\biggl(\Bigl(\dot{\bigcup_{k \in \mathbb{N}}} A_k \Bigr)_x \cap E_n \biggr) = \mu_2\biggl(\dot{\bigcup_{k \in \mathbb{N}}} (A_{k,x} \cap E_n) \biggr) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_2(A_{k,x} \cap E_n) \;.$$

Da die Partialsummen durch $\mu_2(E_n) < \infty$ beschränkt sind und die einzelnen Summanden nichtnegativ sind, konvergiert die Reihe, und die Grenzfunktion

$$x \mapsto \mu_2\biggl(\Bigl(\dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} A_k\Bigr)_x \cap E_n\biggr)$$

ist nach Proposition 7.38 messbar. Somit gilt auch $\dot\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{D}_n$. Die Menge $\mathcal{D}_n$ ist also ein Dynkin-System.

Für alle Erzeuger $A_1 \times A_2$ von $\mathcal{A}$ mit $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$ ist die Funktion

$$x \mapsto \mu_2((A_1 \times A_2)_x \cap E_n) = \mathbf{1}_{A_1} \cdot \mu_2(A_2 \cap E_n)$$

messbar, und jeder Durchschnitt

$$A_1 \times A_2 \cap B_1 \times B_2 = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$$

ist wieder ein solches Produkt. Also ist die Erzeugermenge

$$\mathcal{E} = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

der Produkt-σ-Algebra unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen. Wie am Ende des Beweises von Lemma 7.64 schließen wir, dass $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_n$ für alle n gilt.

Für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt $A \in \mathcal{D}_n$ für alle n, und die Funktion $x \mapsto \mu_2(A_x \cap E_n)$ ist messbar auf X_1. Für ein festes x folgt aus Proposition 7.13, dass

$$\mu_2(A_x) = \mu_2\biggl(\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_x \cap E_n)\biggr) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_2(A_x \cap E_n) ,$$

also ist die Funktion $x \mapsto \mu_2(A_x)$ als punktweises Supremum messbarer Funktionen nach Proposition 7.38 wiederum messbar. Entsprechendes gilt für die Funktion $y \mapsto \mu_1(A_y)$ auf X_2, somit stimmt (2).

Zu (3) definieren wir eine Funktion $\nu\colon \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \to [0,\infty]$ durch

$$\nu(A) = \int_{X_1} \mu_2(A_x)\, d\mu_1(x) .$$

Es folgt sofort

$$\nu(A_1 \times A_2) = \int_{X_1} \mathbf{1}_{A_1}(x) \cdot \mu_2(A_2)\, d\mu_1(x) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) ,$$

also verhält sich ν auf den Erzeugern der Produkt-σ-Algebra wie ein Produktmaß. Es reicht also zu zeigen, dass ν ein Maß ist, um die Existenz des nach Folgerung 7.68 eindeutigen Produktmaßes zu beweisen.

Es reicht, σ-Additivität nachzuweisen. Offensichtlich gilt

$$\nu(\emptyset) = \int_{X_1} \mu_2(\emptyset_x)\, d\mu_1(x) = \int_{X_1} 0\, d\mu_1(x) = 0 .$$

Sei jetzt $(A_n)_n$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}$, dann folgt

$$\begin{aligned}\nu\biggl(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n\biggr) &= \int_{X_1} \mu_2\biggl(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_{n,x}\biggr)\,d\mu_1(x) = \int_{X_1}\sum_{n=0}^{\infty}\mu_2(A_{n,x})\,d\mu_1(x)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{X_1}\mu_2(A_{n,x})\,d\mu_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\nu(A_n)\ .\end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass die Partialsummenfolge für jedes x monoton steigt, und den Satz 7.49 über monotone Konvergenz und Folgerung 7.50 angewendet: für messbare Funktionen $f_n \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}\int_X \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,d\mu(x) &= \int_X \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} f_n(x)\,d\mu(x)\\ &= \lim_{N\to\infty}\int_X \sum_{n=0}^{N} f_n(x)\,d\mu(x)\\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_X f_n\,d\mu = \sum_{n=0}^{\infty}\int_X f_n\,d\mu\ .\end{aligned}$$

Somit beschreibt ν das Produktmaß $\mu_1 \otimes \mu_2$. Analoges gilt für die zweite Darstellung von $\mu_1 \otimes \mu_2$ in (3), und der Satz ist bewiesen. □

7.72. Bemerkung. Es seien A, $B \subset \mathbb{R}^3$ zwei messbare Teilmengen. Das „Cavalierische Prinzip“ besagt, dass A und B das gleiche Volumen haben, wenn für alle $z \in \mathbb{R}$ die Schnitte $A_z = A \cap (\mathbb{R}^2 \times \{z\})$ und B_z den gleichen Flächeninhalt haben. Wenn wir $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ schreiben, ist das eine einfache Folgerung aus Beispiel 7.70 (1) und Satz 7.71 (3), denn

$$\lambda^3(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2(A_z)\,d\lambda^1(z) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2(B_z)\,d\lambda^1(z) = \lambda^3(B)\ .$$

7.73. Satz (Fubini, Tonelli). *Es seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ für $i = 1, 2$ zwei σ-endliche Maßräume und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ihr Produkt. Für $\mathcal{A}$-messbare Funktionen $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt:*

(1) (Tonelli) *für $f \geq 0$ ist die Funktion $g\colon X_1 \to [0, \infty]$ mit*

$$g(x) = \int_{X_2} f(x, y)\,d\mu_2(y)$$

für alle $x \in X_1$ definiert und messbar, und es gilt

$$\int_X f\,d\mu = \int_{X_1} g\,d\mu_1\ ;$$

(2) (Fubini) *falls f auf X integrierbar ist, ist $g\colon X_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ wie oben außerhalb einer μ_1-Nullmenge definiert und integrierbar, und es gilt*

$$\int_X f\,d\mu = \int_{X_1} g\,d\mu_1\ .$$

Entsprechend gilt in (1) *und* (2) *jeweils*

$$\int_X f\,d\mu = \int_{X_2} h\,d\mu_2 \qquad \textit{mit} \qquad h(y) = \int_{X_1} f(x,y)\,d\mu_1(x)\;.$$

Die Funktion g in (2) ist nur fast überall definiert. Wir dürfen dennoch über ganz X_1 integrieren, denn es spielt nach Bemerkung 7.44 (4) keine Rolle, wie wir g auf X_1 fortsetzen.

Beweis. Wir beginnen mit einer Indikatorfunktion $f = \mathbf{1}_A \colon X \to \mathbb{R}$ mit $A \in \mathcal{A}$. Dann ist

$$g(x) = \int_{X_2} \mathbf{1}_A(x,y)\,d\mu_2(y) = \mu_2(A_x)\;,$$

also ist $g(x) \in [0,\infty]$ für alle $x \in X_1$ definiert nach Satz 7.71 (1), g ist messbar nach (2), und wegen (3) gilt auch

$$\int_X \mathbf{1}_A\,d\mu = \mu(A) = \int_{X_1} \mu_2(A_x)\,d\mu_1(x) = \int_{X_1} g\,d\mu_1\;.$$

Daraus folgt (1) für einfache Funktionen mit Folgerung 7.50.

Sei jetzt $f \geq 0$. Wir approximieren f wie in Proposition 7.41 (1), (2) durch eine Folge $(f_n)_n$ einfacher Funktionen mit $f_0(x,y) \leq f_1(x,y) \leq \dots$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(x,y) = f(x,y)$ für alle $(x,y) \in X$. Entsprechend sei

$$g_n(x) = \int_{X_2} f_n(x,y)\,d\mu_2(y)\;,$$

dann sind alle g_n messbar, wie gerade gezeigt. Es gilt $g_0 \leq g_1 \leq \dots$. Aus dem Satz 7.49 von B. Levi über monotone Konvergenz folgt

$$\begin{aligned} g(x) = \int_{X_2} f(x,y)\,d\mu_2(y) &= \int_{X_2} \lim_{n\to\infty} f_n(x,y)\,d\mu_2(y) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{X_2} f_n(x,y)\,d\mu_2(y) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in X_1$. Insbesondere ist $g \colon X_1 \to [0,\infty]$ auf ganz X_1 definiert und messbar nach Proposition 7.38. Wir wenden Satz 7.49 nochmals an und erhalten (1), da

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X_1} g_n\,d\mu_1 = \int_{X_1} g\,d\mu_1\;.$$

Sei nun $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann können wir (1) auf Positiv- und Negativteil f^+, f^- von f anwenden, und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{X_1} g_+\,d\mu_1 &= \int_X f^+\,d\mu < \infty \qquad \text{mit} \qquad g_+(x) = \int_{X_2} f^+(x,y)\,d\mu_2(y)\;, \\ \int_{X_1} g_-\,d\mu_1 &= \int_X f^-\,d\mu < \infty \qquad \text{mit} \qquad g_-(x) = \int_{X_2} f^-(x,y)\,d\mu_2(y)\;. \end{aligned}$$

Da f auf $\{x\}\times X_2$ sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann, kann es sein, dass sowohl $g_+(x) > 0$ als auch $g_-(x) > 0$ für ein $x \in X_1$ gilt, insbesondere sind g_+ und g_- nicht Positiv- und Negativteil einer Funktion $g\colon X_1 \to \overline{\mathbb{R}}$. Sogar $g_+(x) = g_-(x) = \infty$ ist möglich. Es seien

$$N_+ = \{x \in X_1 \mid g_+ = \infty\} \quad \text{und} \quad N_- = \{x \in X_1 \mid g_- = \infty\} \subset X_1 \;.$$

Wäre $\mu_1(N_+) > 0$, so wäre

$$\int_X f^+ \, d\mu = \int_{X_1} g_+ \, d\mu_1 \geq \int_{N_+} \infty \, d\mu_1 = \infty$$

im Widerspruch zur Integrierbarkeit von f. Somit sind N_+, N_- und auch $N = N_+ \cup N_- \subset X_1$ Nullmengen. Für $x \in X_1 \setminus N$ existiert also

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{X_2} f(x,y) \, d\mu_2(y) \\ &= \int_{X_2} f^+(x,y) \, d\mu_2(y) - \int_{X_2} f^-(x,y) \, d\mu_2(y) \\ &= g_+(x) - g_-(x) \in \mathbb{R} \;. \end{aligned}$$

Für alle $x \in N$ dürfen wir $g(x) = 0$ setzen. Aus (1) und der Linearität des Integrals folgt (2), da

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu = \int_{X_1} g_+ \, d\mu_1 - \int_{X_1} g_- \, d\mu_1 = \int_{X_1} g \, d\mu_1 \;.$$

Schließlich können wir im gesamten Beweis die Rollen von X_1 und X_2 vertauschen und erhalten die entsprechenden Aussagen über $h\colon X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$. □

7.74. Bemerkung. Der Satz von Fubini und Tonelli legt nahe, Integrale über Produkträume als *Mehrfachintegrale* zu schreiben:

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x,y) \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x,y) = \int_{X_1} \int_{X_2} f(x,y) \, d\mu_2(y) \, d\mu_1(x) \;.$$

Entsprechend schreiben wir Lebesgue-Integrale Borel-messbarer Funktionen als

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) \, d\lambda^1(x_n) \dots d\lambda^1(x_1) \;.$$

Abgesehen davon, dass das innere Integral nicht immer definiert sein muss, siehe Aussage (2) oben, gibt es dazu noch einige Anmerkungen.

(1) Wenn f integrierbar oder nichtnegativ ist, kommt es nicht auf die Integrationsreihenfolge an: es gilt

$$\int_{X_1} \int_{X_2} f(x,y) \, d\mu_2(y) \, d\mu_1(x) = \int_{X_2} \int_{X_1} f(x,y) \, d\mu_1(x) \, d\mu_2(y) \;.$$

(2) Sei f wie oben und $E \subset X_1 \times X_2$ messbar. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_E f\,d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{X_1 \times X_2} f \cdot \mathbf{1}_E\,d(\mu_1 \otimes \mu_2)\\ &= \int_{X_1}\int_{X_2} f(x,y)\mathbf{1}_E(x,y)\,d\mu_2(y)\,d\mu_1(x)\\ &= \int_{X_1}\int_{E_x} f(x,y)\,d\mu_2(y)\,d\mu_1(x)\;.\end{aligned}$$

Für Borel-messbare Teilmengen $E \subset \mathbb{R}^n$ gilt analog

$$\int_E f\,d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \int_{E_{(x_1,\dots,x_{n-1})}} f(x_1,\dots,x_n)\,d\lambda^1(x_n) \cdots d\lambda^1(x_1)\;.$$

(3) Aus der Existenz des Mehrfachintegrals

$$\int_{X_1}\int_{X_2} f(x,y)\,d\mu_2(y)\,d\mu_1(x)$$

kann man nicht auf die Integrierbarkeit von f schließen; im allgemeinen hängt das Integral auch von der Integrationsreihenfolge ab, siehe Aufgabe 2 von Blatt III.6.

(4) Um die Integrierbarkeit von f zu überprüfen, reicht es nach Folgerung 7.48 und dem Satz 7.73 (1) von Tonelli, nachzuweisen, dass

$$\int_{X_1 \times X_2} |f|\;d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1}\int_{X_2} |f(x,y)|\;d\mu_2(y)\,d\mu_1(x) < \infty\;.$$

(5) Als Spezialfall für $X_2 = \mathbb{N}$ mit Zählmaß μ_2 auf $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ erhalten wir Resultate über die Vertauschbarkeit von Summation und Integration. Man beachte aber, dass wir den entsprechenden „Satz von Tonelli“ bereits im Beweis von Satz 7.71 (3) aus dem Satz 7.49 über die monotone Konvergenz hergeleitet und auch benutzt haben.

7.75. Proposition. *Zu jeder Lebesgue-messbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existieren Borel-messbare Funktionen $f_+, f_-\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass $f_- \le f \le f_+$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ und $f_+ = f_-$ fast überall.*

Beweis. Übung 4 von Blatt III.6. □

7.76. Folgerung. *Es sei $f\colon \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar und entweder nichtnegativ oder Lebesgue-integrierbar, dann ist die Funktion $g\colon \mathbb{R}^p \to \overline{\mathbb{R}}$ mit*

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,d\lambda^q(y)$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^p$ definiert, Lebesgue-messbar und nichtnegativ bzw. Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f\,d\lambda^{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} g\,d\lambda^p\;.$$

Insbesondere folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda^n = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_n \dots dx_1\;.$$

Beweis. Es seien f_+, f_- Borel-messbar wie in Proposition 7.75 mit $f_- \leq f \leq f_+$ und $f_+ \sim f_-$. Nach Beispiel 7.70 und dem Satz 7.73 von Tonelli bzw. Fubini folgt

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f_\pm \, d\lambda^{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} g_\pm \, d\lambda^p \text{ mit } g_\pm(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y) \, d\lambda^q(y) \; .$$

Aus $f_+ \sim f_-$ folgt

$$\int_{\mathbb{R}^p} (g_+ - g_-) \, d\lambda^p = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} (f_+ - f_-) \, d\lambda^{p+q} = 0 \; .$$

Da $f_+ \geq f_-$, gilt $g_+ \geq g_-$ und somit $g_+ \sim g_-$ nach Aufgabe 2 von Blatt III.4.

Es sei

$$N = \{x \in \mathbb{R}^p \mid g_+(x) \text{ oder } g_-(x) \text{ nicht definiert oder } g_+(x) \neq g_-(x)\} \; ,$$

dann ist N eine Borel-Nullmenge, und für alle $x \in \mathbb{R}^p \setminus N$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^q} (f_+ - f_-)(x,y) \, d\lambda^q(y) = 0$$

also folgt $f|_{\{x\}\times\mathbb{R}^q} \sim f_+|_{\{x\}\times\mathbb{R}^q} \colon \mathbb{R}^q \to \overline{\mathbb{R}}$. Da $f_+|_{\{x\}\times\mathbb{R}^q}$ wegen Satz 7.71 (1) Borel-messbar ist, folgt mit Bemerkung 7.31, dass $f|_{\{x\}\times\mathbb{R}^q}$ Lebesgue-messbar ist, da sich Urbilder messbarer Mengen unter $f|_{\{x\}\times\mathbb{R}^q}$ und $f_+|_{\{x\}\times\mathbb{R}^q}$ immer nur um eine Teilmenge von N, also eine Lebesgue-Nullmenge, unterscheiden.

Daher gilt

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y) \, d\lambda^q(y) = g_+(x) = g_-(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^p \setminus N$. Daraus folgt schließlich

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \, d\lambda^{p+q} = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f_+ \, d\lambda^{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} g_+ \, d\lambda^p = \int_{\mathbb{R}^p} g \, d\lambda^p \; .$$

Die letzte Aussage in der Folgerung ergibt sich durch mehrfaches Anwenden des obigen Resultats und der Assoziativität des Produktes von Maßräumen. □

7.7. Die Transformationsformel

In Abschnitt 5.5 haben wir die Substitutionsregel 5.60 kennengelernt, mit deren Hilfe man eindimensionale Integrale vereinfachen kann. Ein mehrdimensionales Analogon stellt die Transformationsformel dar, die wir in diesem Abschnitt beweisen wollen. Als Folgerung erhalten wir endlich die Invarianz des Lebesgue-Integrals unter Bewegungen.

Wir formulieren zunächst die Substitutionsregel so um, wie wir sie später als Spezialfall der Transformationsformel benötigen. Anschließend leiten wir daraus die Transformationsformel zunächst nur für Verzerrungen her. Schließlich stellen wir beliebige $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismen lokal als Verkettung von Verzerrungen und Vertauschungen von Koordinaten dar und erhalten daraus die allgemeine Transformationsformel.

7.77. Bemerkung. Es sei $a < b$, $g \in \mathcal{C}^1([a,b])$ mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$, und es sei $f\colon g([a,b]) \to \mathbb{R}$ stetig.

(1) Da g' stetig ist, wechselt g' nicht das Vorzeichen. Falls $g' > 0$ gilt, folgt $g(a) < g(b)$ aus Folgerung 5.25, und es gilt

$$\int_{g([a,b])} f\,d\lambda = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy = \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{[a,b]} (f \circ g) \cdot \bigl|g'\bigr|\,d\lambda$$

nach der Substitutionsregel in Proposition 5.60. Falls $g' < 0$, ist $g(b) < g(a)$, und wegen Bemerkung 3.65 erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{g([a,b])} f\,d\lambda &= \int_{g(b)}^{g(a)} f(y)\,dy = -\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy\\ &= \int_a^b f(g(x))(-g'(x))\,dx = \int_{[a,b]} (f \circ g) \cdot \bigl|g'\bigr|\,d\lambda\ .\end{aligned}$$

Es gilt also immer

$$\int_{g([a,b])} f\,d\lambda = \int_{[a,b]} (f \circ g) \cdot \bigl|g'\bigr|\,d\lambda\ .$$

(2) Für das Maß des Bildintervalles erhalten wir

$$\lambda\bigl(g([a,b])\bigr) = \int_{[a,b]} \bigl|g'\bigr|\,d\lambda > 0\ .$$

(3) Der Vorteil der Umformulierung in (1), (2) besteht darin, dass wir nur noch auf das Bild von g Bezug nehmen, nicht mehr auf die Intervallgrenzen. Der Preis dafür ist, dass wir g als Diffeomorphismus, oder zumindest als injektive Abbildung voraussetzen müssen. Sei nämlich etwa $g(x) = x^3 - 3x$, dann folgt

$$\lambda\bigl(g([-2,2])\bigr) = \lambda([-2,2]) = 4\ ,$$

aber

$$\begin{aligned}\int_{[-2,2]} \bigl|g'\bigr|\,d\lambda &= \int_{-2}^{-1} (3x^2-3)\,dx - \int_{-1}^{1} (3x^2-3)\,dx + \int_1^2 (3x^2-3)\,dx\\ &= (x^3-3x)\big|_{-2}^{-1} - (x^3-3x)\big|_{-1}^{1} + (x^3-3x)\big|_1^2\\ &= 3 \cdot 4 = 3 \cdot \lambda(g([-2,2]))\ .\end{aligned}$$

Das liegt daran, dass fast alle Punkte im Bild dreimal getroffen werden.

Wir zeigen jetzt, dass diese Version der Substitutionsregel auch für das Lebesgue-Integral gilt.

7.78. Proposition. *Es sei $U \subset \mathbb{R}$ offen, $g \in \mathcal{C}^1(U;\mathbb{R})$ injektiv mit $g' \neq 0$ auf ganz U, und es sei $f\colon g(U) \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-messbar. Dann ist auch $(f \circ g) \cdot |g'|$ Borel-messbar, und genau dann integrierbar, wenn f integrierbar ist, mit*

$$\int_U (f \circ g) \cdot \bigl|g'\bigr|\,d\lambda = \int_{g(U)} f\,d\lambda\ .$$

Beweis. Da $g' \neq 0$ gilt, bildet g offene Intervalle in U auf offene Intervalle ab. Insbesondere ist $g(U)$ als Vereinigung der Bilder offener Intervalle selbst offen. Wir betrachten den Maßraum $(g(U), \mathcal{A}, \lambda)$ mit

$$\mathcal{A} = \{A \subset g(U) \mid A \in \mathcal{B}\} = \{A \cap g(U) \mid A \in \mathcal{B}\}$$

(beide Beschreibungen sind äquivalent, da $g(U) \in \mathcal{B}$) und $\lambda = \lambda^1|_{\mathcal{A}}$. Da g und g' stetig sind, ist $(f \circ g) \cdot |g'|$ Borel-messbar, wenn f messbar ist. Da g injektiv ist, existiert eine Umkehrabbildung h, und diese ist wiederum stetig differenzierbar nach der Umkehrregel(5.17). Ist umgekehrt $(f \circ g) \cdot |g'|$ Borel-messbar, dann auch

$$f = (f \circ g \circ h) \cdot \left(\left|g' \circ h\right| \cdot \left|h'\right|\right) = \left(((f \circ g) \cdot \left|g'\right|) \circ h\right) \cdot \left|h'\right| \ .$$

Nach Lemma 7.45 definiert

$$\int_B \left|g'\right| \, d\lambda \geq 0$$

ein Maß auf $\{B \subset U \mid B \in \mathcal{B}\}$, und

$$\mu(A) = \int_{g^{-1}(A)} \left|g'\right| \, d\lambda$$

definiert ein Maß μ auf $\mathcal{A}$, vergleiche dazu Aufgabe 4 von Blatt III.1.

Wir wollen zeigen, dass $\mu = \lambda$. Dazu betrachten wir die Menge

$$\mathcal{E} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{k} g([a_i, b_i]) \;\middle|\; k \in \mathbb{N},\ [a_i, b_i] \subset U \text{ für alle } i \in \{1, \dots, k\} \right\} \subset \mathcal{A}$$

aller Vereinigungen kompakter Intervalle in $g(U)$. Die Intervalle $[a_i, b_i]$ können paarweise disjunkt gewählt werden. Aus Bemerkung 7.77 (2) folgt dann $\mu|_{\mathcal{E}} = \lambda|_{\mathcal{E}}$.

Als offene Menge ist U abzählbare Vereinigung offener Intervalle nach Aufgabe 4 von Blatt III.2, und jedes offene Intervall ist abzählbare Vereinigung kompakter Intervalle. Also erzeugt $\mathcal{E}$ die σ-Algebra $\mathcal{A}$ und erfüllt alle Voraussetzungen aus Lemma 7.64.

Somit folgt $\mu = \lambda$, also

$$\int_{g^{-1}(A)} \left|g'\right| \, d\lambda = \lambda(A)$$

für alle messbaren Mengen $A \in \mathcal{A}$. Für die Indikatorfunktion von A gilt

$$\begin{aligned} \int_U (\mathbf{1}_A \circ g) \cdot \left|g'\right| \, d\lambda &= \int_U \mathbf{1}_{g^{-1}(A)} \cdot \left|g'\right| \, d\lambda = \int_{g^{-1}(A)} \left|g'\right| \, d\lambda \\ &= \lambda(A) = \int_{g(U)} \mathbf{1}_A \, d\lambda \ . \end{aligned}$$

Hieraus folgt wie immer zunächst für einfache, dann für nicht-negative, und anschließend für alle integrierbaren Funktionen f auf $g(U)$, dass

$$\int_U (f \circ g) \cdot \left|g'\right| \, d\lambda = \int_{g(U)} f \, d\lambda \ .$$

Insbesondere ist $(f \circ g) \cdot |g'|$ ebenfalls integrierbar. Wenn wir die Rollen von f und $(f \circ g) \cdot |g'|$ und von g und h vertauschen, folgt umgekehrt, dass f auf $g(U)$ integrierbar ist, wenn $(f \circ g) \cdot |g'|$ auf U integrierbar ist. $\square$

Im Folgenden sei eine Verzerrung eine injektive $\mathcal{C}^1$-Abbildung $G\colon U \to \mathbb{R}^n$ der Form

$$G\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ g(x_1, \dots, x_n) \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ,$$

wobei $g\colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar sei mit $\frac{\partial g}{\partial x_k} \neq 0$ auf ganz U. Es folgt

$$\det G' = \det \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_k} & \dots & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x_k} \neq 0 \,.$$

7.79. Folgerung. *Für jede Verzerrung $G\colon U \to \mathbb{R}^n$ und jede Borel-messbare Funktion $f\colon G(U) \to \overline{\mathbb{R}}$ ist $(f \circ G) \cdot |\det G'|$ genau dann auf U integrierbar, wenn f auf $G(U)$ integrierbar ist, und es gilt*

$$\int_U (f \circ G) \cdot \left|\det G'\right| \, d\lambda = \int_{G(U)} f \, d\lambda \,.$$

Beweis. Da G injektiv ist, existiert eine Umkehrabbildung $H\colon G(U) \to U$. Aus dem Umkehrsatz 6.87 folgt, dass $G(U)$ offen und H stetig differenzierbar ist. Insbesondere sind G, H, $|\det G'|$ und $|\det H'|$ Borel-messbar. Wie in Proposition 7.78 schließen wir, dass $(f \circ G) \cdot |\det G'|$ genau dann Borel-messbar ist, wenn f Borel-messbar ist.

Wir schreiben $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ mit $x = (x', x_k)$, wobei $x' = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Der x'-Schnitt von U wird mit $U_{x'} \subset \mathbb{R}$ bezeichnet. Er ist offen, da U offen ist. Für $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ sei $g_{x'}(x_k) = g(x', x_k)$, dann erfüllt $g_{x'}\colon U_{x'} \to \mathbb{R}$ die Voraussetzungen aus Proposition 7.78.

Sei zunächst $f \geq 0$. Aus dem Satz 7.73 von Tonelli und Proposition 7.78 folgt

$$\begin{aligned}\int_U (f \circ G) \cdot \left|\det G'\right| \, d\lambda^n &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{U_{x'}} f(x', g_{x'}(x_k)) \, \left|g'_{x'}(x_k)\right| \, d\lambda^1(x_k) \, d\lambda^{n-1}(x') \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{g_{x'}(U_{x'})} f(x', y) \, d\lambda^1(y) \, d\lambda^{n-1}(x') \\ &= \int_{g(U)} f \, d\lambda^n \in [0, \infty] \; .\end{aligned}$$

Insbesondere ist $(f \circ G) \cdot |\det G'|$ genau dann integrierbar, wenn f integrierbar ist.

Sei jetzt f Borel-messbar, dann zerlegen wir f in Positiv- und Negativteil wie üblich. Dann ist $(f^{\pm} \circ G) \cdot |\det G'|$ genau dann integrierbar, wenn $f^{\pm}$ integrierbar ist. Aus der obigen Rechnung für f^+ und f^- folgt das allgemeine Resultat. □

Wir erinnern uns an den Begriff der Permutation aus Abschnitt 6.4. Wir nennen eine Abbildung $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine *Transposition*, wenn es eine Permuation $\sigma \in S(n)$ gibt, so dass

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \; .$$

Transpositionen sind lineare Abbildungen. Aus dem Satz 7.73 von Tonelli und Fubini folgt, dass

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (f \circ T) \, d\lambda^n &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \, dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \, dx_{\sigma(1)} \dots dx_{\sigma(n)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, \dots, y_n) \, dy_1 \dots dy_n = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda^n \; ;\end{aligned}$$

außerdem gilt $\det T' = \det T = \operatorname{sign} \sigma \in \{1, -1\}$, so dass $|\det T'| = 1$.

7.80. Proposition. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $G \in \mathcal{C}^1(U; \mathbb{R}^n)$ und $x \in U$, so dass $G'(x) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertierbar ist. Dann existiert eine Umgebung $V_0 \subset U$ von x, offene Mengen $V_1, \dots, V_n \subset \mathbb{R}^n$, Verzerrungen $G_k \colon V_{k-1} \to V_k$ für $k = 1, \dots, n$ und eine Transposition T des $\mathbb{R}^n$, so dass*

$$G|_V = T \circ G_n \circ \dots \circ G_1 \colon V \to V_n \; .$$

Beweis. Es seien $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ die Standardbasisvektoren des n-dimensionalen Zeilenraumes $\mathbb{R}^n$, und $v_k = g'_k(x)$ die Zeilen der Matrix $G'(x)$, hierbei g_k die k-te Komponentenfunktion von G für $k = 1, \dots, n$. Da $G'(x)$ invertierbar ist, bilden $(v_1, \dots, v_n)$ ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

Wir konstruieren induktiv eine Permutation τ, so dass $(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k)}, e_{k+1}, \dots, e_n)$ für alle $k = 1, \dots, n$ eine Basis bilden. Falls wir $\tau(1), \dots, \tau(k-1)$ bereits entsprechend gewählt haben, ist

$$(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k-1)}, e_{k+1}, \dots, e_n)$$

ein Tupel linear unabhängiger Vektoren und

$$(v_1, \dots, v_n)$$

ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$. Nach den Steinitzschen Sätzen aus der linearen Algebra gibt es ein $j \in \{1, \dots, n\}$, so dass

$$(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k-1)}, v_j, e_{k+1}, \dots, e_n)$$

eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bildet. Es folgt $j \notin \{\tau(1), \dots, \tau(k-1)\}$, da die obigen Vektoren andernfalls linear abhängig wären. Wir setzen $\tau(k) = j$ und fahren mit $k+1$ fort. Am Ende haben wir eine injektive (und daher bijektive) Abbildung $\tau \in S(n)$ konstruiert.

Es sei T die zu τ gehörige Transposition. Dann dürfen wir $T \circ G$ schreiben als

$$T \circ G = T \circ \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\tau(1)} \\ \vdots \\ g_{\tau(n)} \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad (T \circ G)'(x) = \begin{pmatrix} v_{\tau(1)} \\ \vdots \\ v_{\tau(n)} \end{pmatrix} .$$

Wir dürfen an dieser Stelle G durch die Abbildung $T \circ G$ ersetzen. Für das neue G dürfen wir $\tau(j) = j$ für alle j wählen, demnach ist die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} g_1'(x) \\ \vdots \\ g_k'(x) \\ e_{k+1} \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \dots & & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(x) & \dots & & \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(x) \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $k = 1, \dots, n$ invertierbar.

Es bezeichne $H_k \colon U \to \mathbb{R}^n$ die Abbildung mit

$$H_k(y) = \begin{pmatrix} g_1(y) \\ \vdots \\ g_k(y) \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} ,$$

dann ist $H_k'(x) = A_k$ für alle $k = 1, \dots, n$ invertierbar. Nach dem lokalen Umkehrsatz 6.87 für differenzierbare Abbildungen ist also jede dieser Abbildungen auf einer Umgebung von x invertierbar. Es sei V_0 der Durchschnitt dieser Umgebungen und $V_k = H_k(V_0)$ für $k = 1, \dots, n$.

Wir definieren $G_1 = H_1 \colon V_0 \to V_1$ und $G_k = H_k \circ H_{k-1}^{-1} \colon V_{k-1} \to V_k$ für $k = 2, \dots, n$. Dann sind $G_1, \dots, G_k$ invertierbare Verzerrungen, denn

$$G_k \begin{pmatrix} g_1(y) \\ \vdots \\ g_{k-1}(y) \\ y_k \\ \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(y) \\ \vdots \\ \\ g_k(y) \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

für alle $y \in V_0$, also alle $H_{k-1}(y) \in V_{k-1}$. Außerdem gilt $G_n \circ \dots \circ G_1 = H_n = G|_{V_0}$. $\square$

7.81. Satz (Transformationsformel). *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $G \in \mathcal{C}^1(U; \mathbb{R}^n)$ injektiv mit $G'(x)$ invertierbar für alle $x \in U$. Für jede messbare Funktion $f \colon G(U) \to \mathbb{R}$, die nichtnegativ oder integrierbar ist, ist $(f \circ G) \cdot |\det G'| : U \to \mathbb{R}$ wiederum messbar und nichtnegativ bzw. integrierbar, und es gilt*

$$\int_{G(U)} f \, d\lambda^n = \int_U (f \circ G) \cdot \left|\det G'\right| \, d\lambda^n .$$

Der Ausdruck $\det G'$ heißt auch *Jacobi-Determinante*. Sie gibt den Faktor an, um den die invertierbare lineare Abbildung G' das Volumen infinitesimaler Parallelotope verändert.

Beweis. Wir nehmen $f \geq 0$ an; für integrierbare f folgt der Satz wie üblich aus Definition 7.42 (3).

Wir haben in Folgerung 7.79 gesehen, dass die Transformationsformel gilt, wenn G eine Verzerrung ist. Sie gilt auch für Transpositionen T, denn

$$\int_U (f \circ T) \, d\lambda^n = \int_{T(U)} f \, d\lambda^n \qquad \text{und} \qquad \left|\det T'\right| = 1 .$$

Falls die Transformation für zwei Abbildungen $F \colon V \to W$ und $G \colon U \to V$ gilt, gilt sie auch für $F \circ G$, denn aus der Kettenregel 6.57 und der Multiplikativität der Determinante folgt

$$\begin{aligned} &\int_U (f \circ F \circ G) \cdot \left|\det(F \circ G)'\right| \, d\lambda^n \\ &\qquad = \int_U (f \circ F \circ G) \cdot \left|\det F' \circ G)\right| \cdot \left|\det G'\right| \, d\lambda^n \\ &\qquad = \int_{G(U)} (f \circ F) \cdot \left|\det F'\right| \, d\lambda^n = \int_{F(G(U))} f \, d\lambda^n . \end{aligned}$$

Insbesondere gilt die Transformationsformel nach Proposition 7.80 für beliebige $\mathcal{C}^1$-Abbildungen G mit invertierbarer Ableitung $G'(x)$ bei x, wenn man G auf eine hinreichend kleine Umgebung V von x einschränkt, so dass $G|_V = T \circ G_n \circ \dots \circ G_1$ eine Verkettung von Transpositionen und Verzerrungen ist.

Sei jetzt $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und G beliebig. Zu jedem $x \in U$ existiert eine kleine Umgebung von x in U, auf der die Transformationsformel gilt. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass es sich hierbei um einen Ball mit rationalem Radius und Mittelpunkt in $\mathbb{Q}^n$ handelt. Von diesen Umgebungen gibt es höchstens abzählbar viele, die wir gegebenfalls mit $\emptyset$ zu einer Folge $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ auffüllen.

Wir definieren Borel-messbare Mengen

$$A_i = U_i \setminus (U_0 \cup \dots \cup U_{i-1}) \;,$$

so dass

$$U = \dot{\bigcup_{i\in\mathbb{N}}} A_i \qquad \text{und} \qquad G(U) = \dot{\bigcup_{i\in\mathbb{N}}} G(A_i) \;,$$

da G injektiv ist. Aus Lemma 7.45 folgt, dass

$$\begin{aligned}
\int_{G(U)} f\,d\lambda^n &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_{G(A_i)} f\,d\lambda^n = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{G(U_i)} \mathbf{1}_{G(A_i)} \cdot f\,d\lambda^n \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \int_{U_i} \underbrace{\bigl(\mathbf{1}_{G(A_i)} \circ G\bigr)}_{=\mathbf{1}_{A_i}} \cdot (f\circ G) \cdot \bigl|\det G'\bigr|\,d\lambda^n \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \int_{A_i} (f\circ G) \cdot \bigl|\det G'\bigr|\,d\lambda^n = \int_U (f\circ G) \cdot \bigl|\det G'\bigr|\,d\lambda^n \;. \qquad \square
\end{aligned}$$

7.82. Beispiel. Auf $\mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty,0]\times\{0\})$ führen wir *Polarkoordinaten* $(r,\varphi) \in (0,\infty)\times(-\pi,\pi)$ ein. Dazu sei $\Phi\colon (0,\infty)\times(-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^2\setminus((-\infty,0]\times\{0\})$ gegeben durch

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\,\cos\varphi \\ r\,\sin\varphi \end{pmatrix} \;.$$

Da $(-\infty,0]\times\{0\} \subset \mathbb{R}^2$ eine Nullmenge ist, können wir zweidimensionale Integrale in Polarkoordinaten ausrechnen:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^2\setminus((-\infty,0]\times\{0\})} f\,d\lambda^2 = \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} (f\circ\Phi) r\,d\varphi\,dr \;,$$

da

$$\det \Phi'(r,\varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r \;.$$

Sei etwa $f(x) = e^{-|x|^2}$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2}\,d\lambda^2(x) &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} e^{-r^2} r\,d\varphi\,dr = \int_0^\infty 2\pi r e^{-r^2}\,dr \\
&= -\pi e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{\infty} = \pi \;.
\end{aligned}$$

Daraus folgt wie in Aufgabe 1 von Blatt III.6, dass

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt = \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-s^2-t^2}\,ds\,dt\right)^{\frac12} = \sqrt{\pi} \;.$$

7.83. Beispiel. Eine affine Abbildung $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hat die Gestalt

$$F(x) = A \cdot x + v$$

mit $A \in M_n(\mathbb{R})$ und $v \in \mathbb{R}^n$; sie ist invertierbar genau dann, wenn $A \in GL(n)$. Aus $F'(x) = A$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ folgt für alle offenen $U \subset \mathbb{R}^n$ und alle messbaren $f\colon F(U) \to \mathbb{R}$, dass

$$\int_{F(U)} f\,d\lambda^n = \int_U (f \circ F) \cdot |\det A|\;d\lambda^n\;.$$

Diese Formel gilt übrigens auch, falls F nicht invertierbar ist, denn dann ist $\det A = 0$ und $\operatorname{im} F \subset \mathbb{R}^n$ ein niederdimensionaler Unterraum, also eine Nullmenge.

Eine Abbildung $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *Euklidische Isometrie*, wenn $d(F(x), F(y)) = d(x,y)$ für alle x, $y \in \mathbb{R}^n$ gilt, siehe Bemerkung 7.3. Man kann zeigen, dass F genau dann eine Isometrie ist, wenn F affin ist mit $A = F' \in O(n)$. Für alle $A \in O(n)$ gilt $A^tA = E_n$, siehe Beispiel 6.97. Daraus folgt

$$|\det A|^2 = \det A^t \cdot \det A = \det E_n = 1\;,$$

also gilt für Euklidische Isometrien sogar

$$\int_{F(U)} f\,d\lambda^n = \int_U f \circ F\,d\lambda^n\;.$$

Man sagt, das Lebesgue-Integral ist *Isometrie-invariant*. Insbesondere ist auch das Lebesgue-Maß Isometrie-invariant, denn

$$\lambda^n(F(B)) = \int_{F(B)} 1\,d\lambda^n = \int_B 1\,d\lambda^n = \lambda^n(B) \qquad \text{für alle } B \in \mathcal{B}\;,$$

und wegen Folgerung 7.66 auch für alle Lebesgue-messbaren Mengen. Die obigen Formeln gelten auch für *volumenerhaltende* affine Abbildungen, das heißt, im Fall $A \in SL(n,\mathbb{R})$.

7.8. Integration über Untermannigfaltigkeiten

Wir verallgemeinern das m-dimensionale Lebesgue-Integral auf m-dimensionale $\mathcal{C}^k$ Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$. Die Konstruktion ähnelt einer verallgemeinerten Transformationsformel, und wir benötigen die Transformationsformel unter anderem, um Wohldefiniertheit zu beweisen.

Sei $x \in M$, dann existiert nach Definition 6.94 eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von x und eine Untermannigfaltigkeitskarte $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$, also ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus mit $U \cap M = \varphi^{-1}(W)$, wobei $W = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$.

7.84. Bemerkung. Es sei $\psi = \varphi^{-1}|_W$, dann ist die Abbildung ψ ist eine $\mathcal{C}^k$-*Immersion*, das heißt, eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung mit injektiver Ableitung $\psi'(y)\colon \mathbb{R}^m \to$

$\mathbb{R}^n$ für alle $y \in W$. In Beispiel 6.95 erhalten wir etwa $\psi\colon B_1(0) \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2} \end{pmatrix} .$$

Sei jetzt umgekehrt $W \in \mathbb{R}^m$ offen und $\psi\colon W \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^k$-Immersion mit $k \geq 1$. Sei $y_0 \in W$. Nach dem Basisergänzungssatz finden sich $n - m$ Basisvektoren $e_{j_{m+1}}, \dots, e_{j_n}$ mit $1 \leq j_{m+1} < \cdots < j_n \leq 1$, so dass

$$\bigl(\psi'(y_0)(e_1), \dots, \psi'(y_0)(e_m), e_{j_{m+1}}, \dots, e_{j_n}\bigr)$$

eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden. Wir erweitern ψ zu einer Abbildung $\Psi\colon W \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\Psi(y_1, \dots, y_n) = \psi(y_1, \dots, y_m) + y_{m+1} e_{j_{m+1}} + \cdots + y_n e_{j_n} .$$

An der Stelle y_0 ist die Ableitung $\Psi'(y_0, 0)$ invertierbar. Nach dem Satz 6.87 über die lokale Umkehrbarkeit existiert eine Umgebung U von $\psi(y_0) = \Psi(y_0, 0)$ und eine Abbildung $\varphi\colon U \to V \subset W \times \mathbb{R}^{n-m}$, die zu $\Psi|_V$ invers ist. Also ist φ eine Untermannigfaltigkeitskarte zum Bild von $\psi|_{V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})}$. Somit parametrisiert jede Immersion lokal eine Untermannigfaltigkeit.

7.85. Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit mit $k \geq 1$. Eine (lokale) *$\mathcal{C}^k$-Parametrisierung* von M ist eine $\mathcal{C}^k$-Immersion $\psi\colon W \to M$ mit $W \subset \mathbb{R}^m$ offen.

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra auf M. Wir definieren ein Maß auf M wie folgt. Falls es eine bijektive $\mathcal{C}^k$-Parametrisierung $\psi\colon W \to M$ gibt mit $W \subset \mathbb{R}^m$ offen, setzen wir

$$\mu(A) = \int_{\psi^{-1}(A)} \det\bigl(\psi'^t \cdot \psi'\bigr)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^m .$$

Hier bezeichnet $\psi'^t(x)$ die zu $\psi'(x)$ transponierte Matrix.

7.86. Bemerkung. Wir überlegen uns, dass diese Definition sinnvoll ist, und sammeln einige elementare Eigenschaften.

(1) Da $\psi\colon W \to M$ ein Homöomorphismus ist, sind die Urbilder offener Teilmengen von M genau die offenen Teilmengen von W. Da diese die jeweiligen Borel-σ-Algebra erzeugen, sind die Borel-Mengen in W genau die Urbilder der Borel-Mengen in M.
(2) Es sei $\varphi\colon V \to M$ eine weitere bijektive $\mathcal{C}^k$-Parametrisierung, und sei analog
$$\nu(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} \det\bigl(\varphi'^t \cdot \varphi'\bigr)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^m .$$
Da φ und ψ bijektiv sind, existiert eine bijektive Abbildung $F\colon V \to W$ mit $\varphi = \psi \circ F$. Indem wir lokal um $x \in W$ die Abbildung ψ zu einer invertierbaren Abbildung $\Psi\colon B_\varepsilon(x) \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ ausdehnen wie in Bemerkung 7.84, sehen wir, dass lokal $F = \Psi^{-1} \circ \varphi$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung

ist. Indem wir die Rollen von φ und ψ vertauschen, erhalten wir sogar einen $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus. Aus der Transformationsformel 7.81 folgt

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \int_{\psi^{-1}(A)} \det\bigl(\psi'^t \cdot \psi'\bigr)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^m \\
&= \int_{\varphi^{-1}(A)} \det\bigl((\psi'^t \circ F) \cdot (\psi' \circ F)\bigr)^{\frac{1}{2}} |\det F'| \, d\lambda^m \\
&= \int_{\varphi^{-1}(A)} \det\bigl(F'^t \cdot (\psi'^t \circ F) \cdot (\psi' \circ F) \cdot F'\bigr)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^m \\
&= \int_{\varphi^{-1}(A)} \det\bigl(\varphi'^t \cdot \varphi'\bigr)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^m = \nu(A) \;,
\end{aligned}$$

da ja $\psi^{-1}(A) = F(\varphi^{-1}(A))$, und da die Determinante multiplikativ ist. Also ist das Maß μ *Parametrisierungs-invariant.*

(3) Es sei $x \in W$ und $e_1, \dots, e_m$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^m$, dann sind die Matrixeinträge von $\psi'^t(x) \cdot \psi'(x)$ von der Form

$$\bigl(\psi'^t(x) \cdot \psi'(x)\bigr)_{i,j} = \langle e_i, \psi'^t(x) \cdot \psi'(x) e_j \rangle = \langle \psi'(x)(e_i), \psi'(x)(e_j) \rangle \;.$$

Den Ausdruck $\langle \psi'(x) \cdot v, \psi'(x) \cdot w \rangle$ nennt man auch das mit ψ *zurückgezogene Skalarprodukt* $\psi^*\langle\;,\;\rangle$ oder die *erste Fundamentalform* von M bezüglich der Parametrisierung ψ. Falls beispielsweise $M = \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ und $\psi \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ durch $\psi(x) = (x, 0)$ gegeben wird, ist $\det\bigl(\psi'^t \cdot \psi'\bigr) = 1$ und $\mu = \lambda^m$.

(4) Das Maß μ (und auch die erste Fundamentalform) sind invariant unter Isometrien im folgenden Sinne. Sei F eine Isometrie des $\mathbb{R}^n$ mit $F(x) = A\,x + v$, wobei $A \in O(n)$ und $v \in \mathbb{R}^n$ wie in Beispiel 7.83, dann parametrisiert $F \circ \psi$ eine neue Untermannigfaltigkeit $F(M)$. Für alle Borel-Mengen $B \subset M$ ist $F(B)$ eine Borel-Menge in $F(M)$ mit

$$\begin{aligned}
\mu(F(B)) &= \int_{(F\circ\psi)^{-1}(F(B))} \det\bigl((F \circ \psi)'^t \, (F \circ \psi)'\bigr) \, d\lambda^m \\
&= \int_{\psi^{-1}(B)} \det\bigl(\psi'^t \underbrace{A^t \, A}_{=E_n} \psi)'\bigr) \, d\lambda^m = \mu(B) \;.
\end{aligned}$$

7.87. Bemerkung. Falls $m = n$ ist, also $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, folgt

$$\det\bigl(\psi'^t \cdot \psi'\bigr)^{\frac{1}{2}} = \bigl(\det \psi'^t \cdot \det \psi'\bigr)^{\frac{1}{2}} = |\det \psi'|$$

wie in der Transformationsformel und in Bemerkung 7.77 (2). Im allgemeinen ist die Jacobi-Matrix $\psi'(x) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ jedoch nicht quadratisch, und anstelle der Jacobi-Determinante $\det \psi'$ betrachten $\det(\psi'^t \cdot \psi')^{\frac{1}{2}}$.

Für beliebige Matrizen $C \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ hat die *Gramsche Determinante* $\det(C^tC)^{\frac{1}{2}}$ von C folgende Eigenschaften.

(1) Falls C nicht injektiv ist, also der Rang von C kleiner als m ist, hat C und damit auch C^tC einen Kern. In diesem Fall ist also $\det(C^tC)^{\frac{1}{2}} = 0$.

(2) Ansonsten ergänzen wir die Spaltenvektoren $c_1, \dots, c_m$ zu einer Basis $(c_1, \dots, c_n)$ des $\mathbb{R}^n$. Das Gramsche Orthonormalisierungsverfahren aus der linearen Algebra liefert eine Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$, so dass c_i für alle $1 \le i \le n$ im Erzeugnis der Vektoren $e_1, \dots, e_i$ liegt. Sei $A \in O(n)$ die orthogonale Abbildung mit $A(v_i) = e_i$ für alle i, dann liegt die i-te Spalte Ac_i der Matrix $D = AC$ im Unterraum $\mathbb{R}^i \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Die Matrix D hat also Blockgestalt

$$D = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad E = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ & \ddots & \vdots \\ & & d_{mm} \end{pmatrix} ,$$

so dass $D^t D = E^t E$. Wie in Bemerkung 7.86 (4) sehen wir, dass

$$\begin{aligned} \det\bigl(C^t C\bigr)^{\frac{1}{2}} = \det\bigl(C^t A^t A C\bigr)^{\frac{1}{2}} &= \det\bigl(D^t D\bigr)^{\frac{1}{2}} \\ &= \det\bigl(E^t E\bigr)^{\frac{1}{2}} = |\det E| = |d_{11} \cdot d_{22} \cdots d_{mm}| \ . \end{aligned}$$

Man sieht jetzt induktiv, dass die Gramsche Determinante genau das m-dimensionale Volumen des von den Spalten von D in $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ aufgespannten Parallelotops misst. Da wir A als Isometrie gewählt hatten, ist das auch das m-dimensionale Volumen des von den Spalten von C in $\mathbb{R}^n$ aufgespannten m-dimensionalen Parallelotops.

Zusammenfassend gibt also die Gramsche Determinante von ψ' in unser Konstruktion von μ auf M den Faktor an, um den ψ' das Volumen infinitesimaler m-dimensionaler Parallelotope verändert. Wir dürfen unsere obige Konstruktion also als Verallgemeinerung der Transformationsformel 7.81 auffassen.

7.88. Proposition. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit, dann existiert genau ein Maß μ auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$ von M, so dass*

$$\mu(A) = \int_{\psi^{-1}(A)} \det\bigl(\psi'^t \cdot \psi'\bigr)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^m \tag{1}$$

für alle messbaren Teilmengen A, die im Bild einer injektiven Parametrisierung $\psi\colon W \to M$ liegen.

Beweis. Zu jedem Punkt $x \in M \subset \mathbb{R}^n$ existiert nach Definition 6.94 eine Untermannigfaltigkeitskarte $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ und eine zugehörige Parametrisierung $\psi = \varphi^{-1}|_{V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})}$. Wir finden $r > 0$ mit $B_r(x) \subset U$, und in $B_r(x)$ einen kleineren Ball $B_s(q)$ mit $x \in B_s(q)$ und $s \in \mathbb{Q}$, $q \in \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$. Von diesen Bällen gibt es nur abzählbar viele, also sei $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ die Folge dieser Bälle, mit $B_i \subset U_i$ für eine Untermannigfaltigkeitskarte $\varphi_i\colon U_i \to V_i$ mit zugehöriger Parametrisierung $\psi_i\colon W_i \to U_i$.

Wir definieren

$$M_i = \bigcup_{j=0}^{i} B_j \cap M \ ,$$

so dass $M_0 \subset M_1 \subset \dots$ und $M = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$. Es sei $M_{-1} = \emptyset$. Für alle Borel-messbaren Teilmengen $A \subset M$ erhalten wir

$$\mu(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\psi_i^{-1}(A \cap M_i \setminus M_{i-1})} \det\bigl(\psi_i'^t \cdot \psi_i'\bigr)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^m ,$$

aus σ-Additivität und (1), wobei wir $M_i \setminus M_{i-1} \subset B_i \subset U_i$ ausgenutzt haben.

Zunächst überprüfen wir, dass μ ein Maß ist. Es gilt $\mu(\emptyset) = 0$, und für $A = \dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{N}} A_k$ finden wir mit Lemma 7.45 und dem Satz von Tonelli für Summen (Bemerkung 7.74 (5)), dass

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\psi_i^{-1}(A \cap M_i \setminus M_{i-1})} \det\bigl(\psi_i'^t \cdot \psi_i'\bigr)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^m \\ &= \sum_{i,k=0}^{\infty} \int_{\psi_i^{-1}(A_k \cap M_i \setminus M_{i-1})} \det\bigl(\psi_i'^t \cdot \psi_i'\bigr)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^m = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) . \end{aligned}$$

Also ist μ ein Maß auf der Borel-σ-Algebra.

Sei jetzt $\psi \colon W \to M$ eine injektive Parametrisierung und $A \subset \operatorname{im} \varphi$ messbar. Dann liefert Bemerkung 7.86 (2) für die Untermannigfaltigkeit $U_i \cap \psi(W)$ und die entsprechenden Einschränkungen von ψ und ψ_i, dass

$$\begin{aligned} \mu(A \cap M_i \setminus M_{i-1}) &= \int_{\psi_i^{-1}(A \cap M_i \setminus M_{i-1})} \det\bigl(\psi_i'^t \cdot \psi_i'\bigr)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^m \\ &= \int_{\psi^{-1}(A \cap M_i \setminus M_{i-1})} \det\bigl(\psi'^t \cdot \psi'\bigr)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^m . \end{aligned}$$

Aus σ-Additivität und Lemma 7.45 folgt

$$\mu(A) = \int_{\psi^{-1}(A)} \det\bigl(\psi'^t \cdot \psi'\bigr)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^m . \qquad \square$$

7.89. Definition. Es sei $k \geq 1$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit mit Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$. Das soeben konstruierte Maß μ auf $(M, \mathcal{B})$ heißt auch *m-dimensionales Volumenmaß* auf M und wird mit vol_M, vol^m oder kurz vol bezeichnet. Man schreibt auch $L = \operatorname{vol}^1$, $A = \operatorname{vol}^2$ und $V = \operatorname{vol}^3$.

7.90. Bemerkung. Das Volumenmaß auf M ist ein Maß genau wie das Lebesgue-Maß. Das Integral über das Volumenmaß ist wie in Definition 7.42 erklärt, und es gelten alle abstrakten Sätze der Maßtheorie wie die Sätze 7.49, 7.53 von B. Levi über monotone Konvergenz und von Lebesgue über dominierte Konvergenz. Das Maß vol ist ein σ-endliches Borel-Maß, siehe Definition 7.29 und 7.54. Es lässt sich wie in Bemerkung 7.31 vervollständigen.

In der Praxis findet man oft injektive Parametrisierungen, die bis auf eine Nullmenge in M auch surjektiv sind. In diesem Fall gilt

$$\mu(A) = \int_{\psi^{-1}(A)} \det\bigl(\psi'^t \cdot \psi'\bigr)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^m$$

sogar für alle messbaren Mengen. Sei $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, dann gilt

$$\int_A f\,d\mu = \int_{\psi^{-1}(A)} (f \circ \psi) \cdot \det\bigl(\psi'^t \cdot \psi'\bigr)^{\frac{1}{2}}\,d\lambda^m\ ;$$

andernfalls müsste man mit der Konstruktion aus dem obigen Beweis

$$\int_A f\,d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\psi_i^{-1}(A)} (f \circ \psi_i) \cdot \det\bigl(\psi_i'^t \cdot \psi_i'\bigr)^{\frac{1}{2}}\,d\lambda^m$$

berechnen. In jedem Fall hat man ein sinnvolles Maß auf M definiert, und kann Integrale dennoch wie gehabt auf $\psi_i^{-1}(A) \subset \mathbb{R}^m$ berechnen.

Bevor wir Beispiele solcher Parametrisierungen angeben, wollen wir zunächst zeigen, dass Untermannigfaltigkeiten kleinerer Dimension Nullmengen sind.

7.91. Proposition. *Es seien $L \subset M \subset \mathbb{R}^n$ Untermannigfaltigkeiten der Dimension $\ell < m \le n$. Dann ist $\operatorname{vol}_M(L) = 0$ bezüglich des m-dimensionalen Volumenmaßes auf M.*

Dieses Ergebnis gilt auch, falls $M = \mathbb{R}^n$, und zeigt, dass man das Volumen von Untermannigfaltigkeiten kleinerer Dimension nicht mit dem Lebesgue-Maß λ^n messen kann.

Beweis. Jeder Punkt $x \in L$ besitzt eine Umgebung U in $\mathbb{R}^n$, eine Parametrisierung $\vartheta\colon V \to U \cap L$ mit $V \subset \mathbb{R}^\ell$ offen und eine Untermannigfaltigkeitskarte $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ von M mit zugehöriger Parametrisierung

$$\psi\colon W = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \to U \cap M$$

von M. Die Abbildung $\varphi \circ \vartheta$ bildet V nach $W \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ ab und ist eine Immersion. Ihre ersten m Komponenten bilden eine Immersion $\psi^{-1} \circ \vartheta\colon V \to W$ mit Bild $\psi^{-1}(L \cap U)$, insbesondere ist $\psi^{-1}(L) \subset W$ nach Bemerkung 7.84 eine Untermannigfaltigkeit, gegebenenfalls nach Verkleinerung von U, V, W.

Es sei $\eta\colon W \to \mathbb{R}^m$ eine Untermannigfaltigkeitskarte mit

$$\eta^{-1}(\mathbb{R}^\ell \times \{0\}) = \psi^{-1}(L) \subset W\ ,$$

gegebenenfalls nach erneutem Verkleinern von U und W. Da $\eta\colon W \to Y \subset \mathbb{R}^m$ ein Diffeomorphismus ist, erhalten wir eine neue Parametrisierung $\zeta = \psi \circ \eta^{-1}\colon Y \to U \cap M$ von M mit

$$\zeta^{-1}(L) \subset \mathbb{R}^\ell \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m\ .$$

Es folgt

$$\operatorname{vol}_M(L \cap U) = \int_{\zeta^{-1}(L)} \det(\zeta'^* \cdot \zeta')^{\frac{1}{2}}\,d\lambda^m = 0\ ,$$

da $\mathbb{R}^\ell \times \{0\} = \bigcup_{N=0}^{\infty} [-N,N]^\ell \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m$ eine Nullmenge ist.

Wenn wir zu jedem $x \in L$ eine Umgebung U_x wie oben so wählen, dass $U_x \subset \mathbb{R}^n$ ein Ball mit Mittelpunkt in $\mathbb{Q}^n$ und rationalem Radius ist, dann können wir L als abzählbare Vereinigung der vol_M-Nullmengen $U_x \cap L$ schreiben, also ist L selbst eine vol_M-Nullmenge. □

7.92. Beispiel. Es seien $0 < r < R$ gegeben, dann wird der *Rotationstorus* T mit Radien $(\sim, R)$ gegeben als das Bild der Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\psi(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} (R + r\cos\vartheta)\cdot\cos\varphi \\ (R + r\cos\vartheta)\cdot\sin\varphi \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix} .$$

Indem wir ψ auf $(-\pi,\pi)^2$ einschränken, erhalten wir eine injektive Parametrisierung von T bis auf die durch

$$\vartheta \mapsto \psi(\vartheta,\pi) = \begin{pmatrix} -(R + r\cos\vartheta) \\ 0 \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix} \quad\text{und}\quad \varphi \mapsto \psi(\pi,\varphi) = \begin{pmatrix} (R-r)\cdot\cos\varphi \\ (R-r)\cdot\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegebenen Kreise im $\mathbb{R}^3$. Insbesondere parametrisiert $\psi|_{(-\pi,\pi)^2}$ den Torus T bis auf eine Nullmenge.

Wir berechnen die Ableitung

$$\psi' = \begin{pmatrix} -r\sin\vartheta\cos\varphi & -(R + r\cos\vartheta)\sin\varphi \\ -r\sin\vartheta\sin\varphi & (R + r\cos\vartheta)\cos\varphi \\ r\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

und ihre Gramsche Determinante

$$\det(\psi'^* \cdot \psi')^{\frac12} = \det\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r\cos\vartheta)^2 \end{pmatrix}^{\frac12} = r(R + r\cos\vartheta) .$$

Die Fläche des Torus ergibt sich nach Bemerkung 7.90 als

$$\begin{aligned} A(T) &= \int_{(-\pi,\pi)^2} \det(\psi'^* \cdot \psi')^{\frac12}\, d\lambda^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r(R + r\cos\vartheta)\, d\varphi\, d\vartheta \\ &= 2\pi r(R\vartheta + r\sin\vartheta)\,\Big|_{\vartheta=-\pi}^{\pi} = 4\pi^2 rR . \end{aligned}$$

7.93. Bemerkung. Die Formel

$$\int_{\psi^{-1}(A)} (f\circ\psi)\cdot\det(\psi'^*\cdot\psi')\, d\lambda^m$$

ist auch dann noch sinnvoll für $A \subset \operatorname{im}(\psi)$, wenn die Abbildung $\psi\colon W \to \mathbb{R}^n$ zwar injektiv, aber keine Immersion mehr ist. In diesem Fall ist allerdings $\psi(W) \subset \mathbb{R}^n$ im allgemeinen keine Untermannigfaltigkeit.

Wir betrachten speziell $\mathcal{C}^1$-Kurven $\gamma\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$, siehe Definition 6.99. Beispielsweise hat die Kurve $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ eine „Spitze“ bei $t = 0$, ist also keine Untermannigfaltigkeit. Dennoch können wir für $\mathcal{C}^1$-Kurven $\gamma\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ die *Bogenlänge*

$$L(\gamma) = \int_{(a,b)} \det(\gamma'^*\cdot\gamma')^{\frac12}\, d\lambda = \int_a^b \big\|\gamma'(t)\big\|\, dt$$

definieren. Die Aufgaben 3 und 4 von Blatt III.8 geben der Bogenlänge eine geometrische Bedeutung und zeigen, dass Geraden der Form $t \mapsto (1-t)\cdot x + t\cdot y$ die Länge unter allen Kurven von x nach y minimieren.

Nach Aufgabe 4(b) gilt

$$L(\gamma) = \sup\Bigg\{\sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) \mid n \geq 1, a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\Bigg\}$$

für alle $\mathcal{C}^1$-Kurven $\gamma\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$. Stetige Kurven, für die das Supremum rechts endlich ist, heißen *rektifizierbar* , und man definiert ihre Bogenlänge durch den obigen Ausdruck.

7.94. Beispiel. Der Kreis mit Radius $r > 0$ um $0 \in \mathbb{R}^2$ wird parametrisiert durch $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix} .$$

Die Einschränkung $\gamma|_{(-\pi,\pi)}$ ist injektiv und lässt nur den Punkt $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aus. Es folgt

$$L(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} r\,dt = 2\pi r ,$$

wie aus der Schule bekannt.

7.9. Die Räume $L^p(X)$

Wir dehnen das Integral auf komplexwertige messbare Funktionen aus und führen die L^p-(Halb-)Normen auf dem Raum der messbaren Funktionen ein. Zu einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ erhalten wir eine Familie von Banachräumen $L^p(X)$ für $1 \leq p < \infty$. Für $X = \mathbb{R}^n$ zeigen wir, dass stetige Funktionen mit kompaktem Träger dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegen.

Wir betrachten die *Riemannsche Zahlenkugel* $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Auf $\overline{\mathbb{C}}$ existiert eine Topologie mit der Eigenschaft, dass eine Folge $(z_n)_n$ in $\mathbb{C}$ genau dann gegen ∞ konvergiert, wenn $|z_n| \to \infty$. Für diese Topologie hat die Borel-σ-Algebra die Gestalt

$$\mathcal{B} = \{\, A \subset \overline{\mathbb{C}} \mid A \cap \mathbb{C} \text{ Borel-messbar in } \mathbb{C} \,\} .$$

Wir erweitern die Grundrechenarten stetig auf $\overline{\mathbb{C}}$, allerdings sind $\infty \pm \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ nicht definiert, siehe auch Bemerkung 2.21. Wir erweitern Real- und Imaginärteil auf $\overline{\mathbb{C}}$ durch $\operatorname{Re}\infty = \infty$ und $\operatorname{Im}\infty = 0$; dabei spielt der Wert von $\operatorname{Im}\infty$ im folgenden keine Rolle.

Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{C}}$ heißt messbar, wenn sie bezüglich der obigen Borel-σ-Algebra messbar ist.

7.95. Bemerkung. Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$ ist genau dann messbar, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ messbar sind.

Denn sei $f\colon X \to \mathbb{C}$ messbar. Die Abbildungen Re, Im: $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sind messbar, also auch $\operatorname{Re} f = \operatorname{Re} \circ f$ und $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} \circ f$.

Seien umgekehrt $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f\colon X \to \mathbb{R}$ messbar. Da die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}$ von offenen Quadern erzeugt wird, reicht es wie im Beweis von Proposition 7.34 aus, nachzuprüfen, dass Urbilder von Quadern messbar sind. Sei also

$$Q = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Re} z < b, c < \operatorname{Im} z < d\} ,$$

dann gilt

$$f^{-1}(Q) = (\operatorname{Re} f)^{-1}(a,b) \cap (\operatorname{Im} f)^{-1}(c,d) \in \mathcal{A} ,$$

also ist f messbar.

Mit ähnlichen Methoden zeigt man, dass mit f, $g\colon X \to \mathbb{C}$ auch $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}\colon X \to \overline{\mathbb{C}}$ (falls definiert) und $|f|\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar sind.

7.96. Definition. Eine messbare Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$ heißt *integrierbar*, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ integrierbar sind. In diesem Fall setzt man

$$\int_X f\,d\mu = \int_X \operatorname{Re} f\,d\mu + i \cdot \int_X \operatorname{Im} f\,d\mu .$$

7.97. Bemerkung. Sei $f\colon X \to \overline{\mathbb{C}}$ messbar. Wegen $|\operatorname{Re} f|, |\operatorname{Im} f| \le |f|$ und Folgerung 7.48 ist f integrierbar, wenn $|f|\colon X \to \mathbb{R}$ integrierbar ist. Umgekehrt gilt $|f| \le |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$, also ist auch $|f|$ integrierbar, wenn f integrierbar ist. Wenn f integrierbar ist, dann ist $f^{-1}(\{\infty\})$ eine Nullmenge.

7.98. Bemerkung. Das Integral komplexwertiger Funktionen hat ähnliche Eigenschaften wie das Integral aus Definition 7.42. Indem man die Zerlegung $f = \operatorname{Re} f + i \cdot \operatorname{Im} f$ ausnutzt, zeigt man insbesondere, dass Lemma 7.45, die Sätze 7.53 von Lebesgue, 7.73 (2) von Fubini und die Transformationsformel 7.81 analog auch für komplexwertige Funktionen gelten.

7.99. Definition. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $p \in [1, \infty)$ und $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Für messbare Funktionen $f\colon X \to \overline{\Bbbk}$ definiert man die *L^p-Norm*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Es sei $f \sim g$, falls $f = g$ μ-fast überall gilt, und

$$L^p(X; \Bbbk) = \left\{f\colon X \to \overline{\Bbbk} \;\middle|\; f \text{ messbar und } \|f\|_{L^p} < \infty\right\} /\!\sim \ .$$

Wenn $\Bbbk$ klar ist, schreibt man auch kurz $L^p(X)$.

7.100. Bemerkung. Elemente des Quotienten-Vektorraums $L^p(X; \Bbbk)$ heißen auch *p-integrable Funktionen*. Diese Bezeichnung ist missverständlich, denn im allgemeinen ordnen sie Elementen aus X keine Werte zu. Wenn etwa $\{x\} \subset X$ eine Nullmenge ist, wie zum Beispiel im Fall des Lebesgue-Maßes, und $f\colon X \to \Bbbk$ eine Funktion mit $\|f\|_{L^p} < \infty$, dann repräsentiert $f_z\colon X \to \Bbbk$ mit

$$f_z(y) = \begin{cases} f(y) & x \ne y \\ z & x = y \end{cases}$$

das gleiche Element $u \in L^p(X; \Bbbk)$ wie f für jedes $z \in \overline{\Bbbk}$. Also hat die Aussage „$u(x) = z$“ für ein $u \in L^p(X; \Bbbk)$ keinen Sinn, das heißt, u ist keine Funktion.

7.101. Satz. *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gelten die folgenden Ungleichungen.*

(1) Hölder-Ungleichung. *Es seien $1 < p,\ q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für alle $u \in L^p(X; \Bbbk)$ und $v \in L^q(X; \Bbbk)$ gilt*
$$\left| \int_X u \cdot v \, d\mu \right| \le \|u\|_{L^p} \cdot \|v\|_{L^q} \ .$$
Der Spezialfall $p = q = 2$ heißt Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

(2) Minkowski-Ungleichung. *Es sei $1 \le p < \infty$. Für alle $u,\ v \in L^p(X; \Bbbk)$ gilt*
$$\|u + v\|_{L^p} \le \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p} \ .$$

(3) Interpolationsungleichung. *Zu $1 \le p < r < q < \infty$ sei $a \in (0, 1)$ die Zahl, für die $\frac{1}{r} = \frac{1-a}{p} + \frac{a}{q}$ gilt. Für alle $u \in L^p(X; \Bbbk) \cap L^q(X; \Bbbk)$ gilt $u \in L^r(\mathbb{X}; \Bbbk)$ mit*
$$\|u\|_{L^r} \le \|u\|_{L^p}^{1-a} \cdot \|u\|_{L^q}^{a} \ .$$

Beweis. Übung, außer (2) mit $p = 1$. Aber diese Ungleichung folgt unmittelbar aus der Monotonie des Integrals, da
$$\|u + v\|_{L^1} = \int_X |u + v| \ d\mu \le \int_X (|u| + |v|) \, d\mu = \|u\|_{L^1} + \|v\|_{L^1} \ . \qquad \square$$

Wir erinnern uns an die Definition 6.39 eines normierten Vektorraums. Die L^p-Norm ist eine Erweiterung der L^p-Norm auf den Regelfunktionen aus Definition 5.39.

7.102. Folgerung. *Für alle Maßräume $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist $L^p(X; \Bbbk)$ ein normierter Vektorraum.*

Beweis. Seien $f \colon X \to \overline{\Bbbk}$ Repräsentant eines Elements $u \in L^p(X; \Bbbk)$. Da $|f|^p$ integrierbar ist, ist $|f|^{-1}(\{\infty\})$ eine Nullmenge, und es existiert $g \colon X \to \Bbbk$ mit $f \sim g$, etwa
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) \in \Bbbk, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } f(x) = \pm\infty \ . \end{cases}$$
Die messbaren Funktionen mit Werten in $\Bbbk$ bilden einen Vektorraum. Wegen der Minkowski-Ungleichung folgt $u + v \in L^p(X; \Bbbk)$ für $u, v \in L^p(X; \Bbbk)$, und $ru \in L^p(X; \Bbbk)$ für $u \in L^p(X; \Bbbk)$ und $r \in \Bbbk$ ist klar, also bilden die Funktionen mit endlicher L^p-Norm einen Unterraum. Schließlich folgt aus $f \sim 0$, $g \sim 0$ und $r \in \Bbbk$ auch $f + g \sim 0$ und $rf \sim 0$, also dürfen wir die Relation „$\sim$“ herausteilen und erhalten einen Vektorraum
$$L^p(X; \Bbbk) = \bigl\{ f \colon X \to \Bbbk \bigm| f \text{ messbar und } \|f\|_{L^p} < \infty \bigr\} \big/ {\sim} \ .$$
Für $f \sim g$ gilt $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^p}$, also ist $\|\cdot\|_p$ auf $L^p(X)$ wohldefiniert. Wir zeigen wie in Aufgabe 2 von Blatt II.8, dass $\|\cdot\|_p$ die Normaxiome erfüllt.

Positivität: Für alle messbaren $f\colon X \to \Bbbk$ ist $|f|^p \geq 0$ auf ganz X, also auch $\|f\|_{L^p}$. Aus $\|f\|_{L^p} = 0$ folgt, dass das Integral über $|f|^p$ verschwindet. Nach Aufgabe 2 von Blatt III.4 gilt $|f|^p \sim 0$, also auch $f \sim 0$. Somit repräsentiert f das Nullelement von $L^p(X;\Bbbk)$. Für diesen Schritt ist es nötig, die Relation „$\sim$“ herauszuteilen.

Die *Homogenität* folgt, da für alle $r \in \Bbbk$ gilt

$$\|rf\|_{L^p} = \left(\int_X |rf|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|r|^p \int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |r| \cdot \|f\|_{L^p} \ .$$

Die *Dreiecksungleichung* für die L^p-Norm folgt aus der Minkowski-Ungleichung 5.37 , siehe auch Satz 7.101. □

7.103. Bemerkung. Auch für $p = \infty$ kann man die p-Norm betrachten. Dazu definiert man das *essentielle Supremum*

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\left\{\, c \in \mathbb{R} \;\middle|\; |f(x)| \leq c \text{ für fast alle } x \in X \,\right\}$$

und

$$L^\infty(X;\Bbbk) = \left\{\, f\colon X \to \Bbbk \;\middle|\; \|f\|_{L^\infty} < \infty \,\right\}/\sim \ .$$

Elemente $u \in L^\infty(X;\Bbbk)$ heißen auch *essentiell beschränkte* Funktionen, obwohl u wie in Bemerkung 7.100 keine Funktion ist.

(1) Für alle messbaren $f\colon X \to \Bbbk$ gilt

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{\sup} \ ,$$

und definiert man

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } |f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \ , \\ 0 & \text{sonst} \ , \end{cases}$$

so gilt $f \sim g$ und $\|g\|_{\sup} = \|g\|_{L^\infty}$.

(2) Mit (1) überprüft man leicht, dass $L^\infty(X;\Bbbk)$ ein normierter Vektorraum ist, siehe auch Beispiel 6.40 (3). Dazu benötigt man folgende „Minkowski-Ungleichung“ für u, $v \in L^\infty(X,\Bbbk)$ und Repräsentanten f, $g\colon X \to \overline{\Bbbk}$: für fast alle $x \in X$ gilt

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty} \ ,$$

es folgt

$$\|u + v\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty} \ .$$

(3) Der Raum $L^\infty(X;\Bbbk)$ ist vollständig, also ein Banach-Raum. Sei etwa $(u_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $L^\infty(X)$ und sei $f_n \in u_n$ ein Repräsentant für $n \in \mathbb{N}$. Für alle $a \in \mathbb{N}$ existiert also ein $N_a \in \mathbb{N}$, so dass die Menge

$$M_{a,m,n} = \left\{x \in X \;\middle|\; |f_m(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{a}\right\}$$

für alle $m, n \geq N_a$ eine μ-Nullmenge ist. Dann ist die abzählbare Vereinigung

$$M = \bigcup_{a \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq N_a} \bigcup_{n \geq N_a} M_{a,m,n}$$

ebenfalls eine μ-Nullmenge.

Für alle $a \in \mathbb{N}$ und alle m, $n \geq N_a$ gilt $|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{a}$ für alle $x \in X \setminus M$, also ist $(f_n(x))_n$ eine Cauchy-Folge. Da $\Bbbk$ vollständig ist, existiert ein Grenzwert $f(x)$. Wir setzen $f(x) = 0$ für $x \in M$. Nach Proposition 7.38 ist f messbar.

Die Folge f_n konvergiert außerhalb M sogar gleichmäßig gegen f, denn im Grenzfall $m \to \infty$ gilt

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{a}$$

für alle $n \geq N_a$ und alle $x \in X \setminus M$. Also ist die Klasse $u \in L^\infty(X; \Bbbk)$ von f der Grenzwert der Cauchy-Folge $(u_n)_n$, und $L^\infty(X; \Bbbk)$ ist daher vollständig.

(4) Es gilt $\frac{1}{1} + \frac{1}{\infty} = 1$, und für $f, g\colon X \to \Bbbk$ messbar mit $\|f\|_{L^1}$, $\|g\|_{L^\infty} < \infty$ gilt die „Hölder-Ungleichung“

$$\left|\int_X f \cdot g \, d\mu\right| \leq \int_X |f| \cdot |g| \, d\mu \leq \int_X |f| \cdot \|g\|_{L^\infty} \, d\mu \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^\infty} \;,$$

also gilt für alle $u \in L^1(X; \Bbbk)$ und $v \in L^\infty(X; \Bbbk)$ auch

$$\left|\int_X u \cdot v \, d\mu\right| \leq \|u\|_{L^1} \cdot \|v\|_{L^\infty} \;.$$

(5) Für $1 \leq p < r < \infty$ und $u \in L^p(X; \Bbbk) \cap L^\infty(X; \Bbbk)$ gilt

$$\int |u|^r \, d\mu = \int |u|^p \cdot |u|^{r-p} \, d\mu \leq \|u\|_{L^p}^p \, \|u\|_{L^\infty}^{r-p} \;.$$

Hieraus folgt die „Interpolationsungleichung“

$$\|u\|_{L^r} = \|u\|_{L^p}^{\frac{p}{r}} \cdot \|u\|_{L^\infty}^{1-\frac{p}{r}} \;.$$

Wir haben eben gesehen, dass sich der Raum $L^\infty(X; \Bbbk)$ in vieler Hinsicht ähnlich wie die L^p-Räume verhält. Es gibt auch Unterschiede, die wir zum Teil später kennenlernen werden. Wir haben auch gesehen, dass $L^\infty(X; \Bbbk)$ vollständig ist. Unser nächstes Ziel ist die Vollständigkeit von $L^p(X; \Bbbk)$ für alle $p \in [1, \infty)$. Wir beginnen mit einer Folgerung aus dem Satz über dominierte Konvergenz.

7.104. Folgerung (aus Satz 7.53 von Lebesgue). *Es sei $(u_n)_n = ([f_n])_n$ eine Folge in $L^p(X; \Bbbk)$ für $1 \leq p < \infty$, so dass $(f_n)_n)$ fast überall gegen $f\colon X \to \overline{\Bbbk}$ konvergiert. Falls eine Funktion $g\colon X \to \mathbb{R}$ mit $\|g\|_{L^p} < \infty$ und $|f_n| \leq g$ fast überall für alle n existiert, dann gilt $\|f\|_{L^p} < \infty$ und $\lim_{n\to\infty} u_n = [f]$ in $L^p(X; \Bbbk)$.*

Beweis. Es existiert eine Nullmenge $N \subset X$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ und } |f_n(x)| \leq g(x) < \infty$$

für alle $x \in X \setminus N$. Ohne Einschränkung dürfen wir $f_n(x) = f(x) = g(x) = 0$ setzen für alle $x \in N$, so dass (f_n) punktweise gegen f konvergiert, und $|f_n| \leq g$

für alle n auf ganz X gilt. Nach Proposition 7.38 ist f messbar, und es gilt $|f| \leq g$ auf ganz X, insbesondere ist $\|f\|_{L^p} < \infty$.

Um die Konvergenz in $L^p(X;\Bbbk)$ zu zeigen, überlegen wir uns, dass

$$|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq (2g)^p$$

wegen der Monotonie der p-ten Potenz. Es gilt

$$\int_X (2g)^p \, d\mu = \|2g\|_{L^p}^p < \infty \; ,$$

und wegen der Stetigkeit der p-ten Potenz auch

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)|^p = |\lim_{n\to\infty} f_n(x) - f(x)|^p = 0 \; .$$

Aus Satz 7.53 von Lebesgue, angewandt auf $|f_n - f|^p$, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p} = \left(\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_X |\lim_{n\to\infty} f_n - f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \; ,$$

also $\lim_{n\to\infty} u_n = [f]$ in $L^p(X;\Bbbk)$. □

Für $p = 1$ erhalten wir den Satz von Lebesgue zurück, indem wir uns überlegen, dass für $E \in \mathcal{A}$ die Abbildung $L^1(X;\Bbbk) \to \Bbbk$ mit

$$u \mapsto \int_E u \, d\mu$$

stetig ist, da

$$\left|\int_E u \, d\mu - \int_E v \, d\mu\right| \leq \int_E |u - v| \; d\mu \leq \int_X |u - v| \; d\mu = \|u - v\|_{L^p} \; .$$

Aus den Voraussetzungen des Satzes 7.53 folgt $[f_n] \to [f]$ in $L^1(X;\Bbbk)$ mit Folgerung 7.104, und daraus

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu \; .$$

Eine in $L^\infty(X;\Bbbk)$ konvergente Folge $(u_n)_n$ wird nach Bemerkung 7.103 (3) durch Funktionen $f_n\colon X \to \Bbbk$ repräsentiert, die fast überall gegen einen Repräsentanten f des Grenzwertes $\lim_{n\to\infty} u_n \in L^\infty(X;\Bbbk)$ konvergieren. Das gilt leider nicht immer in $L^p(X;\Bbbk)$ für $p < \infty$.

7.105. Beispiel. Zu $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ existieren eindeutige h, $k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k < 2^h$, so dass

$$n = 2^h + k \; .$$

Wir setzen $A_n = [k \cdot 2^{-h}, (k+1) \cdot 2^{-h}) \subset [0,1)$ und $f_n = \mathbf{1}_{A_n}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle $n \geq 1$. Für $1 \leq p < \infty$ folgt

$$\|f_n - 0\|_{L^p} = \left(\int_{k\cdot 2^{-h}}^{(k+1)2^{-h}} 1^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{-\frac{h}{p}} \; .$$

Da $2^{-\frac{h}{p}} \to 0$ für $h \to \infty$, also auch für $n \to \infty$, konvergiert $[f_n]$ gegen 0 in $L^p(\mathbb{R})$. Aber für alle $x \in [0,1)$ und alle $h \in \mathbb{N}$ existiert genau ein $n \in \mathbb{N}$

mit $2^h \leq n < 2^{h+1}$ und $f_n(x) = 1$, während $f_m(x) = 0$ für alle anderen m mit $2^h \leq m < 2^{h+1}$. Also divergiert $(f_n(x))_n$ für alle $x \in [0,1)$.

Wir zeigen jetzt die Vollständigkeit der Räume $L^p(X;\Bbbk)$ für $1 \leq p < \infty$. Gleichzeitig studieren wir das Verhalten von Funktionenfolgen, die in $L^p(X;\Bbbk)$ konvergieren.

7.106. Satz (Fischer-Riesz). *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p < \infty$.*

(1) *Der Raum $L^p(X;\Bbbk)$ ist vollständig, also ein Banach-Raum.*
(2) *Falls eine Folge $(u_n)_n = ([f_n])_n$ in $L^p(X;\Bbbk)$ konvergiert, dann existiert eine Teilfolge der (f_n), die fast überall gegen einen Repräsentanten f von $\lim_{n\to\infty} u_n \in L^p(X;\Bbbk)$ konvergiert.*
(3) *Seien f_n, u_n wie in (2). Wenn f_n fast überall gegen eine messbare Funktion $f\colon X \to \Bbbk$ konvergiert, dann repräsentiert f den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} u_n \in L^p(X;\Bbbk)$.*

Beweis. Es sei $(u_n)_n = ([f_n])_n$ eine Cauchy-Folge in $L^p(X;\Bbbk)$. Dann existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_m - f_n\|_{L^p} < 2^{-k}$ für alle $m, n \geq n_k$. Wir betrachten die Teilfolge $(f_{n_k})_k$. Es folgt $\left\|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right\|_{L^p} < 2^{1-k}$ und

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} \left|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right|\right\|_{L^p} \leq \sum_{k=1}^{N} \left\|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right\|_{L^p} < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{1-k} = 2\ .$$

Setze

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \left|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right|$$

Nach dem Satz 7.49 von B. Levi über monotone Konvergenz folgt

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^p}^p = \int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right|\right)^p d\mu &= \lim_{N\to\infty} \int_X \left(\sum_{k=1}^{N} \left|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right|\right)^p d\mu \\ &= \lim_{N\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{N} \left|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right|\right\|_{L^p}^p \leq 2^p\ .\end{aligned}$$

Also gilt $g(x) < \infty$ für fast alle $x \in X$. Somit konvergiert die Teleskopsumme

$$f(x) := f_{n_0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \big(f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)\big)$$

für fast alle $x \in X$ absolut, die Folge $(f_{n_k})_k$ ihrer Partialsummen konvergiert fast überall gegen eine Funktion $f\colon X \to \Bbbk$. Da

$$|f_{n_N}| \leq |f_{n_0}| + \sum_{k=1}^{N} \left|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right| \leq |f_{n_0}| + g$$

und $\||f_{n_0}| + g\|_{L^p} < \infty$, kann f nach Folgerung 7.104 messbar gewählt werden, und u_n konvergiert gegen $u = [f] \in L^p(X;\Bbbk)$. Da also jede Cauchy-Folge in $L^p(X;\Bbbk)$ konvergiert, ist $L^p(X;\Bbbk)$ vollständig, und es folgt (1).

Zu (2) sei $(u_n)_n = ([f_n])_n$ konvergent, also eine Cauchy-Folge nach Bemerkung 2.50. Der Beweis von (1) liefert eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$, die fast überall gegen einen Repräsentanten f des Grenzwertes $\lim_{n\to\infty} u_n$ konvergiert.

Zu (3) bemerken wir, dass die in (2) konstruierte Teilfolge fast überall gegen einen Repräsentanten h der Grenzfunktion konvergiert. Da Grenzwerte in $\Bbbk$ eindeutig sind, gilt $h(x) = f(x)$ fast überall, also repräsentiert auch f den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} u_n \in L^p(X;\Bbbk)$. □

Unser nächstes Ziel besteht darin, Elemente aus $L^p(\mathbb{R}^n;\Bbbk)$ durch stetige oder sogar glatte Funktionen zu approximieren, falls $1 \leq p < \infty$. Für $p = \infty$ können wir so etwas nicht erwarten: Wenn $(f_n)_n$ Folge stetiger, beschränkter Funktionen ist, die in der L^∞-Norm gegen f konvergiert, dann ist $(f_n)_n$ bereits Cauchy-Folge in der Supremumsnorm, da $\|f_m - f_n\|_{L^\infty} = \|f_m - f_n\|_{\sup}$ für stetige Funktionen, siehe Bemerkung 7.103 (1). Aber es gibt auch $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n;\Bbbk)$ ohne stetige Repräsentanten, beispielsweise Klassen von Indikatorfunktionen $\mathbf{1}_A$ zu Mengen mit $0 < \lambda^n(A) < \infty$.

Um Funktionen zu „glätten“, das heißt, durch glatte Funktionen zu approximieren, führen wir das Faltungsprodukt auf $L^1(\mathbb{R}^n;\Bbbk)$ ein. Wir lassen $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ in der Notation ab jetzt weg, da für reell- und komplexwertige Funktionen alle Konstruktionen genauso gehen.

Es seien $u = [f]$, $v = [g] \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Nach dem Satz 7.73 (1) von Tonelli ist die Funktion $h\colon \mathbb{R}^{2n} \to \Bbbk$ mit $h(x,y) = f(x)\cdot g(y)$ integrierbar, also in $L^1(\mathbb{R}^{2n})$, mit

$$\begin{aligned}\|h\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} |f(x)|\cdot|g(y)|\,d\lambda^{2n}(x,y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\cdot\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\,d\lambda^n(y)\,d\lambda^n(x) = \|f\|_{L^1}\cdot\|g\|_{L^1}\ .\end{aligned}$$

Wir betrachten die Abbildung $F\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ mit $F(x,y) = (x-y,y)$ und

$$\det(F'(x,y)) = \det\begin{pmatrix} E_n & -E_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = 1\ .$$

Nach der Transformationsformel 7.81 ist dann auch die Funktion $(h\circ F)\cdot|\det F'| = h\circ F$ auf $\mathbb{R}^{2n}$ integrierbar mit

$$(h\circ F)(x,y) = f(x-y)\cdot g(y)\ .$$

Aus dem Satz 7.73 (2) von Fubini ergibt sich, dass der Ausdruck

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\cdot g(y)\,d\lambda^n(y)$$

für fast alle x definiert ist, und sich zu einer integrierbaren Funktion $f*g\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{k}}$ erweitern lässt. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\|f*g\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,d\lambda^n(y) \right| d\lambda^n(x) \\ &\le \int_{\mathbb{R}^{2n}} |h \circ F|\ d\lambda^{2n} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} |h|\ d\lambda^{2n} = \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}\ .\end{aligned}$$

Insbesondere repräsentiert $f*g$ ein eindeutiges Element $u*v \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

7.107. Definition. Das Element $u*v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt *Faltung* oder auch *Faltungsprodukt* von u und v.

7.108. Beispiel. Es seien s, $t > 0$. Wir betrachten die *Gaußschen Glockenfunktionen* f, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (4\pi s)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4s}} \quad\text{und}\quad g(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}\ ,$$

wobei $\|x\|$ die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichne. Man rechnet mit der Transformationsformel nach, dass $\|f\|_{L^1} = \|g\|_{L^1} = 1$. Die Faltung $f*g$ hat die Form

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= (4\pi s)^{-\frac{n}{2}} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4s}} e^{-\frac{\|y\|^2}{4t}}\, d^n y \\ &= (4\pi s)^{-\frac{n}{2}} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{t\|x\|^2 - 2t\langle x,y\rangle + (s+t)\|y\|^2}{4st}}\, d^n y \\ &= (4\pi s)^{-\frac{n}{2}} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\left\|\sqrt{s+t}y - \frac{t}{\sqrt{s+t}}x\right\|^2}{4st} - \frac{t-\frac{t^2}{s+t}}{4st}\|x\|^2}\, d^n y\end{aligned}$$

Wir betrachten die affine Abbildung $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$F(y) = \sqrt{\frac{s+t}{4st}}\,y - \sqrt{\frac{t}{4s(s+t)}}\,x$$

und

$$\det F'(y) = \det\left(\sqrt{\frac{s+t}{4st}} \cdot E_n\right) = \left(\frac{s+t}{4st}\right)^{-\frac{n}{2}}\ .$$

Aus der Transformationsformel und obiger Rechnung folgt

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= (4\pi^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{t(s+t)-t^2}{4st(s+t)}\|x\|^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|F(y)\|^2} \left|\det F'\right| (s+t)^{-\frac{n}{2}}\, d^n y \\ &= (4\pi^2(s+t))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4(s+t)}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|y\|^2}\, d^n y \\ &= (4\pi(s+t))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4(s+t)}}\ .\end{aligned}$$

Also ist $f*g$ wieder eine Gaußsche Glockenfunktion, aber mit Parameter $s+t$.

Wenn $h(x)$ die Temperatur eines ungleichmäßig warmen Körpers an der Stelle x zur Zeit t_0 bezeichnet, dann hat dieser Körper zur Zeit $t_0 + s$ die Temperaturverteilung $h*f$, wenn wir Phänomene am Rand außer Acht lassen.

Sobald wir wissen, dass das Faltungsprodukt assoziativ ist, folgt aus obiger Rechnung, dass sich die Temperatur zur Zeit $t_0 + s + t$ auf zwei Weisen durch

$$(h * f) * g = h * (f * g)$$

berechnen lässt. Es ist also egal, ob man die Temperatur sich erst über die Zeit s, dann über die Zeit t entwickeln lässt, oder gleich über die Zeit $s + t$.

Bevor wir Eigenschaften der Faltung zusammenstellen, benötigen wir noch ein Ergebnis über konvexe Funktionen, siehe Definition 5.32.

7.109. Satz (Jensensche Ungleichung). *Es sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(X, \mathcal{A})$, $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall und $h\colon I \to \mathbb{R}$ konvex. Für alle $u \in L^1(X;\mathbb{R})$ gilt dann*

$$h\biggl(\int_X u\,d\mu\biggr) \le \int_X h \circ u\,d\mu\ .$$

Beweis. Übung. □

Diese Ungleichung ist auch dann interessant, wenn X eine endliche Menge ist, etwa $X = \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ und $\mu(i) = \mu_i$ mit $\mu_i \ge 0$ und $\mu_1 + \dots + \mu_n = 1$. Sei $f(i) = x_i$, dann folgt die klassische Jensensche Ungleichung

$$h\biggl(\sum_{i=1}^n x_i\mu_i\biggr) \le \sum_{i=1}^n h(x_i)\mu_i\ .$$

Für $n = 2$ liefert das genau die Definition der Konvexität. Wir benötigen die allgemeine Form der Jensenschen Ungleichung, um einen Zusammenhang zwischen den Räumen $L^p(X)$ für verschiedene $p \in [1, \infty]$ herzustellen.

7.110. Folgerung. *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $1 \le p \le q \le \infty$, dann gilt $L^q(X;\Bbbk) \subset L^p(X;\Bbbk)$ und für alle $u \in L^q(X;\Bbbk)$ gilt*

$$\|u\|_{L^p} \le \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}\, \|u\|_{L^q}\ .$$

Beweis. Übung. Man zeigt zunächst, dass $L^q(X;\Bbbk) \subset L^p(X;\Bbbk)$, anschließend folgert man die Ungleichung aus der Jensenschen Ungleichung, falls $q < \infty$, oder direkt aus der Monotonie des Integrals. □

7.111. Bemerkung. Die Faltung hat folgende Eigenschaften.

(1) Die Faltung $*\colon L^1(\mathbb{R}^n;\Bbbk) \times L^1(\mathbb{R}^n;\Bbbk) \to L^1(\mathbb{R}^n;\Bbbk)$ ist assoziativ, kommutativ, $\Bbbk$-bilinear und stetig, letzteres, da $\|u * v\|_{L^1} \le \|u\|_{L^1} \cdot \|v\|_{L^1}$. Also bildet $(L^1(\mathbb{R}^n;\Bbbk), *)$ eine $\Bbbk$-Algebra auf einem Banachraum mit stetiger Multiplikation. Eine solche Struktur heißt auch *Banachalgebra* . Andere Beispiele von Banachalgebren sind $(L^\infty(X;\Bbbk), \cdot)$ (Übung), $(\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n), \cdot)$ und alle endlichdimensionalen $\Bbbk$-Algebren, zum Beispiel $(M_n(\Bbbk), \cdot)$.

(2) Es sei $u = [f] \in L^p(\mathbb{R}^n; \Bbbk)$ und $v = [g] \in L^1(\mathbb{R}^n, \Bbbk)$ für $1 \leq p \leq \infty$. Für $p = \infty$ folgt

$$|u * v|\,(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|u(x-y)|}_{\leq \|u\|_{L^\infty}} \cdot |v(y)| \; d^n y \leq \|u\|_{L^\infty} \cdot \|v\|_{L^1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, also $\|u * v\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^\infty} \cdot \|v\|_{L^1}$.

Für $p < \infty$ betrachten wir gemäß Lemma 7.45 das Maß μ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ mit

$$\mu(A) = \frac{1}{\|v\|_{L^1}} \int_A |v| \; d\lambda^n \; .$$

Da $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$, ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, insbesondere also endlich. Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} w \, d\mu = \frac{1}{\|v\|_{L^1}} \int_{\mathbb{R}^n} w \cdot |v| \; d\lambda^n$$

für alle $w \in L^1(\mathbb{R}^n; \Bbbk)$ (Übung).

Da $U \in L^p(\mathbb{R}^n; \Bbbk)$, folgt $|u|^p \in L^1(\mathbb{R}^n; \Bbbk)$ mit

$$\||f|^p\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \; d\lambda^n = \|f\|_{L^p}^p \; .$$

Wir wissen also, dass für fast alle x die Faltung

$$(|f|^p * |v|) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p \, |v(y)| \; d^n y = \int_{\mathbb{R}n} |f(x-y)|^p \cdot \|v\|_{L^1} \; d\mu(y)$$

existiert. Also ist die Funktion $f_x \colon \mathbb{R}^n \to \Bbbk$ mit $f_x(y) = f(x-y)$ eine L^p-Funktion bezüglich μ. Da μ ein endliches Maß ist, ist f_x auch eine L^1-Funktion bezüglich μ nach Folgerung 7.110, also μ-integrierbar.

Die Funktion $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = |x|^p$ ist konvex für alle $p \geq 1$. Aus der Jensenschen Ungleichung 7.109, dem Satz 7.73 (1) von Tonelli und der Transformationsformel 7.81 folgt

$$\begin{aligned}
\|u * v\|_{L^p}^p &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |v(y)| \; d^n y \right)^p d^n x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \|v\|_{L^1}^p \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_x(y)| \; d\mu(y) \right)^p d^n x \\
&\leq \|v\|_{L^1}^p \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f_x(y)|^p \; d\mu(y) \, d^n x \\
&= \|v\|_{L^1}^{p-1} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p \, |g(y)| \; d^n y \, d^n x \\
&= \|v\|_{L^1}^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \cdot |g(y)| \; d^n y \, d^n x \\
&= \|u\|_{L^p}^p \cdot \|v\|_{L^1}^p \; .
\end{aligned}$$

Also erhalten wir die Ungleichung

$$\|u * v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} \cdot \|v\|_{L^1} \; .$$

(3) Die Faltung $*\colon L^1(\mathbb{R}^n, \Bbbk) \times L^p(\mathbb{R}^n; \Bbbk) \to L^p(\mathbb{R}^n; \Bbbk)$ ist bilinear, stetig und erfüllt anstelle des Assoziativgesetzes die Relation

$$(u * v) * w = u * (v * w)$$

für alle u, $v \in L^1(\mathbb{R}^n; \Bbbk)$ und $w \in L^p(\mathbb{R}^n; \Bbbk)$. Man sagt, $L^p(\mathbb{R}^n; \Bbbk)$ ist ein *Modul* der Banachalgebra $L^1(\mathbb{R}^n; \Bbbk)$.

Wir wollen Elemente $u \in L^p(\mathbb{R}^n; \Bbbk)$ mit speziellen L^1-Funktionen falten, um eine Folge glatter Funktionen zu erhalten, die gegen u konvergieren.

7.112. Definition. Eine Folge $(\delta_k)_k$ von Funktionen $\delta_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *Dirac-Folge*, wenn gilt:

(1) $\delta_k \geq 0$ für alle k;
(2) $\int_{\mathbb{R}^n} \delta_k \, d\lambda^n = 1$ für alle k;
(3) Für alle $r > 0$ gilt $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} \delta_k \, d\lambda^n = 0$.

7.113. Beispiel. Wir starten mit der glatten Funktion

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & \text{falls } \|x\| < 1, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } \|x\| \geq 1\,, \end{cases}$$

vergleiche Beispiel 5.71, wobei $\|x\|$ die Euklidische Norm bezeichne. Dann setzen wir

$$\delta_k(x) = \frac{k^n}{\|g\|_{L^1}} g(kx)\,,$$

so dass $\int_{\mathbb{R}^n} \delta_k(x) = 1$ nach der Transformationsformel. Bedingungen (1) und (2) sind also erfüllt, und (3) folgt, da δ_k außerhalb $B_{\frac{1}{k}}(0)$ verschwindet.

7.114. Satz. *Es sei $(\delta_k)_k$ eine Dirac-Folge, $1 \leq p < \infty$ und $u = [f] \in L^p(\mathbb{R}^n; \Bbbk)$. Dann konvergiert die Folge $(u * \delta_k)_k$ in $L^p(\mathbb{R}^n; \Bbbk)$ gegen u.*

Beweis. Es sei $[f] \in L^p(\mathbb{R}^n; \Bbbk)$, dann gilt nach Lemma 7.45, dass

$$\lim_{N\to\infty} \int_{[-N,N]^n} |f|^p \; d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \; d\lambda^n = \|f\|_{L^p}^p\;.$$

Zu $\varepsilon > 0$ existiert also $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus [-N,N]^n} |f|^p \; d\lambda^n \leq \varepsilon^p\,,$$

somit gilt $\left\|f - f \cdot I_{[-N,N]^n}\right\|_{L^p} \leq \varepsilon$. Setze $g = f \cdot I_{[-N,N]^n}$. Aus Bemerkung 7.111 (2) folgt, dass

$$\begin{aligned}\|f - f * \delta_k\|_{L^p} &\leq \underbrace{\|f - g\|_{L^p}}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\|(f-g) * \delta_k\|_{L^p}}_{\leq \|f-g\|_{L^p} \cdot \|\delta_k\|_{L^1}} + \|g - g * \delta_k\|_{L^p} \\ &\leq 2\varepsilon + \|g - g * \delta_k\|_{L^p}\;,\end{aligned}$$

so dass es ausreicht, die Funktion $g = f \cdot I_{[-N,N]^n}$ zu approximieren.

Wenn g komplexwertig ist, können wir Real- und Imaginärteil einzeln approximieren. Wenn g reellwertig ist, aber das Vorzeichen wechselt, dann betrachten wir Positiv- und Negativteil von g separat. Es sei also $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ gegeben mit $f|_{\mathbb{R}^n\setminus[-N,N]^n} = 0$. Nach Proposition 7.41 finden wir einfache Funktionen $0 \le f_\ell \le f$, die punktweise gegen f konvergieren. Nach Folgerung 7.104 gibt es also zu jedem $\varepsilon > 0$ eine einfache Funktion $g = f_\ell$ mit $\|g - f_\ell\|_{L^p} < \varepsilon$. Wie oben reicht es, g zu approximieren, denn

$$\|f - f * \delta_k\|_{L^p} \le 2\varepsilon + \|g - g * \delta_k\|_{L^p} \ .$$

Wir schreiben die einfache Funktion g als Linearkombination von Indikatorfunktionen $f = \mathbf{1}_A$. Da das Falten mit δ_k stetig und linear ist, reicht es wieder, jede Indikatorfunktion einzeln zu approximieren. Wie in Bemerkung 7.31 finden wir eine abgeschlossene Menge $K \subset A \subset [-N,N]^n$, so dass $\lambda^n(A \setminus K) < \varepsilon^p$, also $\|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_K\|_{L^p} = \lambda^n(A \setminus K)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$. Also reicht es, $\mathbf{1}_K$ zu approximieren, und als abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist K kompakt nach Folgerung 6.38.

Nach Bemerkung 7.103 (4) gilt

$$(\mathbf{1}_K * \delta_k)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\mathbf{1}_K(x-y)}_{\in[0,1]} \underbrace{\delta_k(y)}_{\ge 0} \, d^n y \in [0, \|\delta_k\|_{L^1}] = [0,1] \ ,$$

also nimmt $\mathbf{1}_K * \delta_k - \mathbf{1}_K$ nur Werte in $[-1,1]$ an. Für alle $p \ge 1$ folgt

$$\|\mathbf{1}_K * \delta_k - \mathbf{1}_K\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|\mathbf{1}_K * \delta_k - \mathbf{1}_K|^p}_{\le|\mathbf{1}_K * \delta_k - \mathbf{1}_K|} \, d\lambda^n \le \|\mathbf{1}_K * \delta_k - \mathbf{1}_K\|_{L^1} \ ,$$

es reicht also zu zeigen, dass $\|\mathbf{1}_K * \delta_k - \mathbf{1}_K\|_{L^1} < \varepsilon^p$ für k hinreichend groß. Es sei also ab sofort ohne Einschränkung $p = 1$.

Für $\ell \ge 1$ setzen wir

$$M_\ell = \bigcup_{x \in K} B_{\frac{1}{\ell}}(x) \subset [-N-1, N+1]^n \ .$$

Da K abgeschlossen ist, gibt es zu jedem $y \in \mathbb{R}^n \setminus K$ ein $r > 0$, so dass $B_r(y) \cap K = \emptyset$, also $\|y - z\| \ge r$ für alle $r \in K$. Es folgt $y \notin M_\ell$ für $\ell \ge \frac{1}{r}$, somit

$$K = \bigcap_{\ell \ge 1} M_\ell \ ,$$

und die Folge $\mathbf{1}_{M_\ell}$ konvergiert punktweise gegen $\mathbf{1}_K$. Da $0 \le \mathbf{1}_{M_\ell} \le \mathbf{1}_{[-N-1,N+1]^n}$, folgt

$$\lambda^n(M_\ell \setminus K) = \|\mathbf{1}_{M_\ell} - \mathbf{1}_K\|_{L^1} < \varepsilon$$

für alle hinreichend großen ℓ. Wir setzen $r = \frac{1}{\ell}$ und berechnen für alle $y \in B_r(0)$, dass

$$\int |\mathbf{1}_K(x-y) - \mathbf{1}_K(x)| \, d^n x = \lambda^n(T_{-y}K \setminus K) + \lambda^n(K \setminus T_{-y}K) \ ,$$

wobei $T_{-y}x = x - y$. Nach Konstruktion von M_ℓ gilt

$$T_{-y}K \setminus K \subset M_\ell \setminus K \text{ und } K \setminus T_{-y}K \subset T_{-y}(M_\ell \setminus K)\ .$$

Aus der Isometrieinvarianz des Lebesgue-Integrals (siehe Beispiel 7.83) folgt

$$\int |\mathbf{1}_K(x-y) - \mathbf{1}_K(x)|\ d^n x \le \lambda^n(M_\ell \setminus K) + \lambda^n(T_{-y}(M_\ell \setminus K)) < 2\varepsilon\ .$$

Zu dem obigen r wählen wir jetzt $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} \delta_k\, d\lambda^n < \frac{\varepsilon}{\lambda^n(K)}\ .$$

Jetzt erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{1}_K * \delta_k - \mathbf{1}_K\|_{L^1} &= \Big\|\mathbf{1}_K * \delta_k - \mathbf{1}_K \cdot \underbrace{\|\delta_k\|_{L^1}}_{=1}\Big\|_{L^1} \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \delta_k(y) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{1}_K(x-y) - \mathbf{1}_K(x)|\ d^n x\, d^n y \\
&\le \int_{B_r(0)} \delta_k(y) \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{1}_K(x-y) - \mathbf{1}_K(x)|\ d^n x}_{<2\varepsilon}\ d^n y \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} \delta_k(y) \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{1}_K(x-y)| + |\mathbf{1}_K(x)|\ d^n x}_{=2\lambda^n(K)}\ d^n y \\
&< 4\varepsilon\ .
\end{aligned}$$

Also gilt $\lim_{k\to\infty}[\mathbf{1}_K * \delta_k] = [\mathbf{1}_K]$ in $L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, und nach dem vorangegangenen also auch allgemein $\lim_{k\to\infty}[f * \delta_k] \cdot [f]$ in $L^p(\mathbb{R}^n;\Bbbk)$. $\square$

Wir wollen diesen Satz benutzen, um L^p-Funktionen durch glatte Funktionen zu approximieren. Dazu müssen wir in einem Schritt Integration und Grenzwertbildung bzw. Differentiation vertauschen. Wir erinnern uns an die Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ aus Abschnitt 6.4.

7.115. Proposition. *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $k \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon X \times U \to \Bbbk$ messbar. Falls*

(1) *die Funktlion $f_x\colon U \to \Bbbk$ mit $f_x(y) = f(x,y)$ für fast alle $x \in X$ k-fach stetig differenzierbar ist und*
(2) *eine μ-integrierbare Funktion $g\colon X \to [0,\infty]$ existiert, so dass*
$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial y_\alpha}(x,y)\right| \le g(x)$$
für alle $y \in U$ und fast alle $x \in X$,

dann ist die Funktion $F\colon U \to \Bbbk$ mit $F(y) = \int_X f(x,y)\, d\mu$ ebenfalls k-fach stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial^{|\alpha|} F(y)}{\partial y_\alpha} = \int_X \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial y_\alpha}(x,y)\, d\mu(x)\ .$$

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion über k. Für $k = 0$ ist nur die Stetigkeit von F zu zeigen. Nach Satz 3.8 reicht es zu zeigen, dass F folgenstetig ist. Es sei also $(y_\ell)_\ell$ eine Folge in U mit Grenzwert $y \in U$. Dann konvergiert die Folge von Funktionen $(f_{y_\ell})_\ell$ auf X mit $f_{y_\ell}(x) = f(x, y_\ell)$ punktweise gegen $f_y(x) = f(x, y)$ und wird durch g dominiert, also ist F folgenstetig nach dem Satz 7.53 von Lebesgue, denn

$$\lim_{\ell\to\infty} F(y_\ell) = \lim_{\ell\to\infty} \int_X f(x, y_\ell)\, d\mu(x) = \int_X f(x, y)\, d\mu(x) = F(y) .$$

Im Falle $k = 1$ sei $1 \le i \le n$, $y \in U$ und $(h_\ell)_\ell$ eine Nullfolge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für fast alle $x \in X$ gilt dann

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x, y + h_\ell e_i) - f(x, y)}{h_\ell}\right| &= \left|\frac{1}{h_\ell}\int_0^{h_\ell} \frac{\partial f}{\partial y_i}(y, y + te_i)\, dt\right| \\ &\le \left|\frac{1}{h_\ell}\int_0^{h_\ell} \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y + te_i)\right|}_{\le g(x)} dt\right| \le g(x) .\end{aligned}$$

Aus der Definition 5.1 der Ableitung und dem Satz 7.53 von Lebesgue folgt

$$\frac{\partial F(y)}{\partial y_i} = \lim_{\ell\to\infty} \int_X \underbrace{\frac{f(x, y + h_\ell e_i) - f(x, y)}{h_\ell}}_{\to \frac{\partial f(x,y)}{\partial y_i}}\, d\mu(x) = \int_X \frac{\partial f(x, y)}{\partial y_i}\, d\mu(x) .$$

Die Stetigkeit der partiellen Ableitungen ergibt sich wie im Falle $k = 0$.

Für $k > 1$ leiten wir induktiv die $(k - 1)$sten partiellen Ableitungen wie oben erneut ab. □

7.116. Folgerung. *Es sei $g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \Bbbk)$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so dass g und $\partial_\alpha G$ für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \le k$ beschränkt sind. Für alle $u \in L^1(\mathbb{R}^n; \Bbbk)$ hat dann $u * g$ einen Repräsentanten in $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \Bbbk)$ mit*

$$\partial_\alpha(u * g) = u * (\partial_\alpha g) .$$

Beweis. Wir definieren eine Funktion $h\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \Bbbk$ durch

$$h(x, y) = f(x)\, g(y - x)$$

und wenden Proposition 7.115 an. Für alle x ist $h_x(y) = h(x, y)$ k-fach stetig differenzierbar. Es sei C eine obere Schranke für alle $\partial_\alpha g$ mit $0 \le |\alpha| \le k$, dann ist $C \cdot |f| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ integrierbar, und es gilt

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|} h(x, y)}{\partial y_\alpha}\right| = |f(x) \cdot (\partial_\alpha g)(y - x)| \le |f(x)| \cdot C .$$

Aus Proposition 7.115 folgt also, dass $f * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \Bbbk)$ mit

$$\begin{aligned}\partial_\alpha(f * g) &= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y_\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, g(y - x)\, d^n x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot (\partial_\alpha g)(y - x)\, d^n x = \big(f * (\partial_\alpha g)\big)(x) .\end{aligned}$$ □

Um dieses Resultat auf L^p-Funktionen mit $1 \le p < \infty$ zu übertragen, brauchen wir einen weiteren Trick und den Begriff des Trägers.

7.117. Definition. Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $f\colon X \to \Bbbk$ eine Funktion. Dann ist der *Träger* $\operatorname{supp} f \subset X$ *von* f *in* X definiert als

$$\operatorname{supp} f = \Big\{\, x \in X \;\Big|\; \text{für jede Umgebung } U \text{ von } x \\ \text{existiert ein } y \in U \text{ mit } f(y) \neq 0 \,\Big\} .$$

Sei X ein Hausdorff-Raum . Eine Funktion f *hat kompakten Träger in* X, wenn $\operatorname{supp} f \subset X$ kompakt ist. Der Raum aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger wird mit $\mathcal{C}_0(X; \Bbbk)$ bezeichnet. Analog bezeichnet $\mathcal{C}_0^k(U; \Bbbk)$ den Raum der k-fach stetig differenzierbaren Funktionen auf $U \subset \mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger.

Ist der Körper $\Bbbk$ aus dem Zusammenhang klar, wird er in der Notation weggelassen. Analog definiert man auch $\mathcal{C}^\infty(U; \Bbbk)$.

7.118. Bemerkung.

(1) Die Menge $\operatorname{supp} f$ ist die kleinste abgeschlossene Menge in X, die $f^{-1}(\Bbbk \setminus \{0\})$ enthält. Man nennt $\operatorname{supp} f$ daher den *Abschluss* von $f^{-1}(\Bbbk \setminus \{0\})$ und schreibt
$$\operatorname{supp} f = \overline{f^{-1}(\Bbbk \setminus \{0\})} .$$
(2) Sei $f \in \mathcal{C}^k(U; \Bbbk)$, dann verschwindet f zusammen mit allen höheren Ableitungen bis zur Ordnung k identisch auf $U \setminus \operatorname{supp} f$. Man beachte, dass es dazu nötig ist, den Abschluss von $f^{-1}(\Bbbk \setminus \{0\})$ zu bilden: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ verschwindet bei $x = 0$, aber ihre Ableitung $f' = 1$ nicht.

(3) Der Raum X selbst beziehungsweise die Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ spielt bei der Bestimmung des Trägers eine wichtige Rolle. Beispielsweise hat die Funktion g aus Beispiel 7.113 kompakten Träger $\operatorname{supp} g = D_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, aber ihre Einschränkung $g|_{B_1(0)}$ hat Träger $\operatorname{supp}(g|_{B_1(0)}) = B_1(0)$, und der ist nicht kompakt.

(4) Die Funktionen mit kompaktem Träger in X bilden einen Vektorraum $\mathcal{C}_0(X)$, denn es gilt
$$\operatorname{supp}(f + g) \subset \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g ,$$
und als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g$ ist $\operatorname{supp}(f + g)$ wieder kompakt. Sie bilden jedoch im allgemeinen keinen Banachraum bezüglich der Supremums-Norm. Sei etwa wieder g die Funktion aus Beispiel 7.113, und sei
$$f_k(x) = \frac{g\big(\frac{x}{k}\big)}{1 + x^2} ,$$
dann ist $\operatorname{supp} f_k = D_k(0)$ kompakt in $\mathbb{R}^n$. Es gilt aber
$$\lim_{k\to\infty} f_k = f \qquad \text{mit} \qquad f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$
in der Supremumsnorm, und f hat Träger $\operatorname{supp} f = \mathbb{R}^n$.

(5) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und μ ein Maß auf der Borel-σ-Algebra. Analog kann man den Träger für $u \in L^p(X; \Bbbk)$ definieren durch

$$\operatorname{supp} f = \left\{ x \in X \;\middle|\; \text{für jede Umgebung } U \text{ von } x \text{ gilt } f|_U \not\sim 0 \right\} .$$

Die Punkte (3) und (4) gelten sinngemäß.

7.119. Folgerung. *Es sei $g \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n, \Bbbk)$ für ein $k \in \mathbb{N}$, und es sei $1 \leq p \leq \infty$. Für alle $u \in L^p(\mathbb{R}^n; \Bbbk)$ hat dann $u * g$ einen Repräsentanten in $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \Bbbk)$ mit*

$$\partial_\alpha(u * g) = u * (\partial_\alpha g) .$$

Beweis. Nach Folgerung 6.34 ist $\operatorname{supp} g$ beschränkt, also existiert $R > 0$ mit $\operatorname{supp} g \subset [-R, R]^n$. Um $f * g$ an der Stelle $x \in [-N, N]^n$ für ein $N \in \mathbb{N}$ zu bestimmen, reicht es, $f|_{[-N-R,N+R]^n}$ zu kennen, denn für $y \notin [-R, R]^n$ verschwindet $g(y)$ in der Formel

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\, g(y)\, d^n y = \int_{[-N-R,N+R]^n} f(x - y)\, g(y)\, d^n y .$$

Nach Folgerung 7.110 gilt $u \cdot \mathbf{1}_{[-N-R,N+R]^n} \in L^1([-N - R, N + R]^n; \Bbbk)$ für alle $u \in L^p(\mathbb{R}^n; \Bbbk)$, da $[-N - R, N + R]^n$ ein endlicher Maßraum ist. Alternativ folgt das aus der Hölderungleichung 7.101 (1) beziehungsweise 7.103 (4), da $\mathbf{1}_{[-N-R,N+R]^n} \in L^q(\mathbb{R}^n; \Bbbk)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Außerdem sind alle $\partial_\alpha g$ auf dem Kompaktum $\operatorname{supp} g$ beschränkt. Also folgt aus Folgerung 7.116, dass

$$\big((u \cdot \mathbf{1}_{[-N-R,N+R]^n}) * g\big)\big|_{[-N,N]^n} \in \mathcal{C}^k([-N, N]^n; \Bbbk) .$$

Da das für alle $N \in \mathbb{N}$ geht, folgt insgesamt, dass $u * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n; \Bbbk)$. □

Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt *dicht,* wenn alle Punkte von X Häufungspunkte von A sind, siehe Beispiel 3.17 (3). Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Da jede Klasse in $L^p(U; \Bbbk)$ höchstens einen stetigen Repräsentanten hat, dürfen wir $\mathcal{C}^k(U; \Bbbk)$ und $\mathcal{C}_0^k(U; \Bbbk)$ als Teilmengen von $L^p(U; \Bbbk)$ auffassen.

7.120. Satz. *Für alle offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$, alle $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und alle $1 \leq p < \infty$ liegt $\mathcal{C}_0^k(U; \Bbbk)$ dicht in $L^p(U; \Bbbk)$.*

Beweis. Wir definieren kompakte Mengen

$$M_N = \left\{ x \in [-N, N]^n \;\middle|\; B_{\frac{1}{N}}(x) \subset U \right\} .$$

Da U offen ist, existiert zu jedem $x \in U$ ein N mit $B_{\frac{1}{N}}(x) \subset U$. Da die Würfel $[-N, N]^n$ den Raum $\mathbb{R}^n$ ausschöpfen, folgt

$$U = \bigcup_{N=1}^{\infty} M_N .$$

Insbesondere konvergiert $\mathbf{1}_{M_N}$ punktweise gegen $\mathbf{1}_U$. Sei jetzt $u \in L^p(U; \Bbbk)$. Wie im Beweis von Satz 7.114 folgt aus dem Satz 7.53 von Lebesgue, dass

$$\lim_{N \to \infty} u \cdot \mathbf{1}_{M_N} = u \in L^p(U; \Bbbk) .$$

Also reicht es, Funktionen mit Träger in M_N zu approximieren.

Da $\mathcal{C}_0^\infty(U;\Bbbk) \subset \mathcal{C}_0^k(U;\Bbbk)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und mit $\mathcal{C}_0^\infty(U;\Bbbk)$ somit auch alle $\mathcal{C}_0^k(U;\Bbbk)$ dicht in $L^p(U;\Bbbk)$ liegen, reicht es, den Fall $k = \infty$ zu betrachten. Wir fixieren dazu die Dirac Folge $(\delta_k)_k$ in $\mathcal{C}_0^\infty(U;\Bbbk)$ aus Beispiel 7.113 mit

$$\operatorname{supp} \delta_k = D_{\frac{1}{k}}(0) \; .$$

Für $k \geq 2N$ liegt der Träger von $(u \cdot \mathbf{1}_{M_N}) * \delta_k$ in der kompakten Menge $M_{2N} \subset U$, denn zu $x \notin M_{2N}$ kann man $y \in B_{\frac{1}{k}}$ und $z \in M_N$ nicht so finden, dass $z = x - y$. Für solche x folgt also

$$\big((u \cdot \mathbf{1}_{M_N}) * \delta_k\big)(x) = \int_{B_{\frac{1}{k}}(0)} (u \cdot \mathbf{1}_{M_N})(x-y)\, \delta_k(y)\, d^n y = 0 \; .$$

Insbesondere hat $(u \cdot \mathbf{1}_{M_N}) * \delta_k$ für $k \geq 2N$ kompakten Träger in U.

Nach Satz 7.114 können wir $u \cdot \mathbf{1}_{M_N}$ und nach Wahl von N damit auch u in $L^p(U;\Bbbk)$ durch $(u \cdot \mathbf{1}_{M_N}) * \delta_k$ beliebig gut approximieren. Nach Folgerung 7.119 sind diese Funktionen glatt, und wir haben eben gesehen, dass sie für $k \geq 2N$ kompakten Träger in U haben. $\square$

KAPITEL 8

Vektoranalysis

Die „Vektoranalysis“ ist die Analysis von Vektorfeldern. Heutzutage verwendet man anstelle von Vektorfeldern lieber alternierende Differentialformen, dennoch spricht man immer noch von Vektoranalysis. In diesem Kapitel verallgemeinern wir einige Begriffe und Sätze aus früheren Kapiteln auf mehrdimensionale Situationen, darunter den Hauptsatz 5.47 der Differential- und Integralrechnung, den Begriff der Differentialform oder Pfaffschen Form aus Definition 6.99, das Kurvenintegral aus Definition 6.101 und das Poincaré-Lemma für 1-Formen aus Satz 6.108. Wir lernen insbesondere de Rham-Kohomologie und den Satz von Stokes kennen, und auch die Sätze von Gauß und Green. In den Abschnitten 7.7 und 7.8 haben wir das unorientierte Lebesgue-Integral über den $\mathbb{R}^n$ und über Untermannigfaltigkeiten kennengelernt. Im Folgenden sehen wir, wie wir Orientierungen einführen und zur Integration von Differentialformen verwenden können.

8.1. Differentialformen

Wir wiederholen zunächst die alternierenden Multilinearformen aus der linearen Algebra und führen dann alternierende Differentialformen ein.

8.1. Definition. Es sei V ein Vektorraum über einem Körper $\Bbbk$. Eine Abbildung $\alpha\colon V^k = V \times \cdots \times V \to \Bbbk$ heißt *alternierende Multilinearform* vom Grad k oder kurz (*alternierende*) *k-Form,* wenn sie

(1) *multilinear* ist, d.h., wenn für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ und $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k \in V$ die Abbildung
$$v \mapsto \alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_k) \in \Bbbk$$
linear ist, und

(2) *alternierend* ist, d.h., wenn für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$ und $v_1, \dots, v_{k-1} \in V$ gilt, dass
$$\alpha(v_1, \dots, v_i, v_i, \dots, v_{k-1}) = 0 .$$

Der Raum der alternierenden Formen vom Grad k wird mit $\Lambda^k V$ bezeichnet. Wir setzen $\Lambda^0 V = \Bbbk$ und schreiben
$$\Lambda^\bullet V = \oplus_{k=0}^\infty \Lambda^k V .$$

Für $k = 1$ ist die Bedingung (2) leer, und $\Lambda^1 V$ ist einfach die Menge der linearen Abbildungen $V \to \Bbbk$, also der *Dualraum* V^* von V.

Wir sammeln einige wichtige elementare Eigenschaften von alternierenden Abbildungen. Zur Erinnerung: Ein Körper hat Charakteristik p, falls p die kleinste Zahl in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p} = 0$$

ist (dann ist p prim), und 0 sonst. Die Körper $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ haben Charakteristik 0.

8.2. Proposition. *Es sei V ein $\Bbbk$-Vektorraum.*

(1) *Es sei $\alpha \in \Lambda^k V$ und $\sigma \in S(k)$ eine Permutation mit Vorzeichen* $\operatorname{sign}(\sigma) \in \{1, -1\}$, *dann gilt*
$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \alpha(v_1, \dots, v_k)$$
für alle $v_1, \dots, v_k \in V$.

(2) *Es sei $\alpha \colon V^k \to \Bbbk$ multilinear, die Charakteristik von $\Bbbk$ sei nicht* 2, *und es gelte*
$$\alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_i, v_{i+2}, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_k)$$
für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$ und alle $v_1, \dots, v_k \in V$, dann ist α alternierend.

(3) *Die alternierenden k-Formen bilden einen Vektorraum.*

Beweis. Zu (1) betrachten wir zunächst die Permutation $\sigma = \tau_i$ mit $i \in \{1, \dots, k-1\}$ und
$$\sigma(j) = \begin{cases} i+1 & \text{falls } j = i, \\ i & \text{falls } j = i+1, \text{ und} \\ j & \text{falls } j \notin \{i, i+1\}\ . \end{cases}$$
Der Einfachheit halber sei $i = 1$; für alle anderen i geht die Rechnung entsprechend. Da α alternierend und multilinear ist, folgt
$$\begin{aligned} \alpha(v_1, \dots, v_k) &= \alpha(v_1, v_2, v_3, \dots, v_k) + \underbrace{\alpha(v_1, v_1, v_3, \dots, v_k)}_{=0} \\ &= \alpha(v_1, v_1 + v_2, v_3, \dots, v_k) - \underbrace{\alpha(v_1 + v_2, v_1 + v_2, v_3, \dots, v_k)}_{=0} \\ &= \alpha(-v_2, v_1 + v_2, v_3, \dots, v_k) + \alpha\underbrace{(-v_2, -v_2, v_3, \dots, v_k)}_{=0} \\ &= \alpha(-v_2, v_1, v_3, \dots, v_k) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})\ . \end{aligned}$$
Da jede Permutation $\sigma \in S(k)$ als Hintereinanderschaltung der speziellen Permutationen $\tau_1, \dots, \tau_{k-1}$ geschrieben werden kann und das Vorzeichen multiplikativ ist, folgt Aussage (1).

Zu (2) überlegen wir uns, dass das Vertauschen des i-ten und $(i+1)$-ten Arguments den folgenden Ausdruck nicht ändert, so dass
$$\alpha(v_1, \dots, v_i, v_i, \dots, v_{k-1}) = -\alpha(v_1, \dots, v_i, v_i, \dots, v_{k-1})\ .$$
Falls die Charakteristik von $\Bbbk$ nicht 2 ist, ist $1 \neq -1$, und daher $\alpha(v_1, \dots, v_i, v_i, \dots, v_{k-1}) = 0$. Also ist α alternierend.

Zu (3) überlegen wir uns, dass Summen und Vielfache alternierender Multilinearformen wieder alternierend und multilinear sind. Somit bilden die alternierenden k-Formen einen Unterraum des Vektorraums $\mathrm{Abb}(V^k;\Bbbk)$. □

Um eine Basis von $\Lambda^k V$ anzugeben, ist es zweckmäßig, zunächst das Produkt von Formen einzuführen.

8.3. Definition. Es sei V ein $\Bbbk$-Vektorraum. Das *alternierende Produkt* oder *Dachprodukt* $\wedge\colon \Lambda^j V \times \Lambda^k V \to \Lambda^{j+k} V$ ist definiert durch

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{j+k}) = \sum_{\substack{\sigma \in S(j+k) \\ \sigma(1) < \dots < \sigma(j) \\ \sigma(j+1) < \dots < \sigma(j+k)}} \operatorname{sign}(\sigma)\, \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(j)})\, \beta(v_{\sigma(j+1)}, \dots, v_{\sigma(j+k)})$$

für alle $\alpha \in \Lambda^j V$, $\beta \in \Lambda^k V$ und $v_1, \dots, v_{j+k} \in V$.

8.4. Bemerkung. Das Dachprodukt hat folgende Eigenschaften.

(1) Für alle $\alpha \in \Lambda^j V$, $\beta \in \Lambda^k V$ ist $\alpha \wedge \beta$ multilinear (klar) und alternierend. Über Körpern der Charakteristik 0 kann man auch

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{j+k}) = \frac{1}{j!\,k!} \sum_{\sigma \in S(j+k)} \operatorname{sign}(\sigma)\, \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(j)})\, \beta(v_{\sigma(j+1)}, \dots, v_{\sigma(j+k)})$$

schreiben. Dann ist $\alpha \wedge \beta$ nach Proposition 8.2 (2) sicher alternierend.

(2) Das Dachprodukt ist assoziativ (Übung).

(3) Das Dachprodukt ist *graduiert kommutativ*, das heißt, für alle $\alpha \in \Lambda^j V$ und $\beta \in \Lambda^k V$ gilt (Übung), dass

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{jk}\, \alpha \wedge \beta\,.$$

Es sei ab jetzt V ein endlichdimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum mit Basis $(e_1, \dots, e_n)$. Dann sei $(e^1, \dots, e^n)$ die *duale Basis* von V^* mit

$$e^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Für $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ erhalten wir Elemente $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ von $\Lambda^k V$ mit

$$(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k})(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\sigma \in S(k)} \operatorname{sign}(\sigma)\, e^{i_1}(v_{\sigma(1)}) \cdots e^{i_k}(v_{\sigma(k)})\,.$$

8.5. Proposition. *Es sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine Basis von V und $(e^1, \dots, e^n)$ die dazu duale Basis von V^*, dann bilden die Elemente $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ mit $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ eine Basis von $\Lambda^k V$. Insbesondere gilt $\dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}$ für $0 \le k \le n$ und $\Lambda^k V = 0$ für $k > n$.*

Beweis. Um zu zeigen, dass die $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$ den Raum $\Lambda^k V$ aufspannen, schreiben wir

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_1^1 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_k = \begin{pmatrix} v_k^1 \\ \vdots \\ v_k^n \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $(e_1, \dots, e_n)$. Für $\alpha \in \Lambda^k V$ und $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ setzen wir $a_{i_1,\dots,i_k} = \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$. Aus Definition 8.1 folgt, dass

$$\begin{aligned}
\alpha(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} v_1^{i_1} \cdots v_k^{i_k}\, \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \\
&= \sum_{\sigma \in S(k)} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{i_1,\dots,i_k}\, v_{\sigma(1)}^{i_1} \cdots v_{\sigma(k)}^{i_k} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1,\dots,i_k} \sum_{\sigma \in S(k)} \operatorname{sign}(\sigma)\, e^{i_1}(v_{\sigma(1)}) \cdots e^{i_k}(v_{\sigma(k)}) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1,\dots,i_k} \cdot (e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k})(v_1, \dots, v_k)
\end{aligned}$$

für alle $v_1, \dots, v_k \in V$. Es gilt also

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1,\dots,i_k} \cdot e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} .$$

Also wird $\Lambda^k V$ von den k-Formen $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$ erzeugt.

Diese k-Formen sind auch linear unabhängig, denn aus

$$0 = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1,\dots,i_k} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \in \Lambda^k V$$

folgt für $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ insbesondere

$$\begin{aligned}
0 &= \Bigg(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1,\dots,i_k} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \Bigg)(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \sum_{\sigma \in S(k)} a_{i_1,\dots,i_k} \operatorname{sign}(\sigma) e^{i_1}(e_{j_{\sigma(1)}}) \cdots e^{i_k}(e_{j_{\sigma(k)}}) \\
&= a_{j_1,\dots,j_k} ,
\end{aligned}$$

denn die Terme $e^{i_p}(e_{j_{\sigma(p)}})$ verschwinden, außer im Falle $i_p = j_{\sigma(p)}$. Da sowohl die $i_1, \dots, i_k$ als auch die $j_1, \dots, j_k$ geordnet sind, bleibt nur der Term mit $\sigma = id$ und $i_1 = j_1, \dots, i_k = j_k$ übrig. Hieraus folgt die lineare Unabhängigkeit der k-Formen $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$.

Die Basis-k-Formen entsprechen genau den k-elementigen Teilmengen der Menge $\{1, \dots, n\}$ aller möglichen Indizes, also gibt es genau $\binom{n}{k}$ viele. Es folgt

$$\dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}$$

und $\Lambda^k V = 0$ für $k > n$, da $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$. $\square$

8.6. Definition. Es sei $F\colon W \to V$ linear und $\alpha \in \Lambda^k V$, dann definiert man die *zurückgeholte* k-Form $F^*\alpha \in \Lambda^k W$ durch

$$(F^*\alpha)(w_1, \dots, w_k) = \alpha(F(w_1), \dots, F(w_k))$$

für alle $w_1, \dots, w_k \in W$.

8.7. Bemerkung. Das Zurückholen von k-Formen hat folgende Eigenschaften. Sei $F\colon W \to V$ linear.

(1) Man sieht leicht, dass $F^*\alpha$ wieder multilinear und alternierend ist, insbesondere ist $F^*\colon \Lambda^k V \to \Lambda^k W$ wohldefiniert.
(2) Die Abbildung F^* ist linear: für $\alpha, \beta \in \Lambda^k V$ und $r, s \in \Bbbk$ gilt

$$F^*(r\alpha + s\beta) = r \cdot f^*\alpha + s \cdot F^*\beta \in \Lambda^k W \ .$$

(3) Die Abbildung F^* ist mit dem Dachprodukt verträglich: für alle $\alpha \in \Lambda^j V$, $\beta \in \Lambda^k V$ gilt

$$F^*(\alpha \wedge \beta) = (F^*\alpha) \wedge (F^*\beta) \in \Lambda^{j+k} W \ .$$

(4) Es sei $G\colon V \to U$ ebenfalls linear, dann gilt

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*\colon \Lambda^k U \to \Lambda^k W \ .$$

(5) Es sei jetzt $F\colon V \to V$ ein Endomorphismus und $\dim V = n$. Nach Proposition 8.5 ist $\Lambda^n V$ eindimensional. Die Determinante von F lässt sich definieren durch die Eigenschaft

$$F^*\alpha = \det F \cdot \alpha \in \Lambda^n V$$

für alle $\alpha \in \Lambda^n V$. Zusammen mit (4) folgt daraus leicht die Multiplikativität: für F, $G\colon V \to V$ linear gilt

$$\det(F \circ G) = \det F \cdot \det G \ .$$

Die obigen Eigenschaften (1) – (4) legen es nahe, jetzt den Begriff des Funktors einzuführen. Eine *Klasse* ist eine Ansammlung von Mengen. Jede Menge ist eine Klasse, aber nicht umgekehrt. Die Russellsche Antinomie 1.5 etwa spricht von einer Klasse, die keine Menge sein kann.

8.8. Definition. Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus einer Klasse von *Objekten*, zu je zwei Objekten A, B einer Menge $\hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ von *Morphismen von A nach B*, und zu je drei Objekten A, B, C einer *Verkettung* $\circ\colon \hom_{\mathcal{C}}(B, C) \times \hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to \hom_{\mathcal{C}}(A, C)$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) *Identität*: Zu jedem Objekt A existiert $\mathrm{id}_A \in \hom_{\mathcal{C}}(A, A)$, so dass für alle Objekte A, B und alle $f \in \hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ gilt:

$$f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f \in \hom_{\mathcal{C}}(A, B)$$

(2) *Assoziativität* der Verkettung: für alle Objekte A, B, C, D und $f \in \hom_{\mathcal{C}}(C, D)$, $g \in \hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ und $h \in \hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ gilt

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \in \hom_{\mathcal{C}}(A, D) \ .$$

Beispiele für Kategorien sind Mengen mit $\hom(M,N) = \operatorname{Abb}(M,N)$, topologische Räume mit $\hom(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)$, $\Bbbk$-Vektorräume mit $\hom(V,W) = \mathcal{L}(V,W)$, oder Banach-Räume mit $\hom(A,B) = \mathcal{B}(A,B)$. In jedem Fall ist die Identität die Abbildung, die jedes Element der zugrundeliegenden Menge auf sich selbst abbildet. Das ist in jeder Kategorie von „Mengen mit zusätzlicher Struktur“ so, aber es gibt auch andere Kategorien.

8.9. Definition. Es seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ zwei Kategorien. Ein *kovarianter* (*kontravarianter*) *Funktor* $\mathcal{F}$ von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ ordnet jedem Objekt A von $\mathcal{C}$ ein Objekt $\mathcal{F}A$ von $\mathcal{D}$ und jedem Morphismus $f \in \hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ einen Morphismus $\mathcal{F}f \in \hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$ ($\mathcal{F}f \in \hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}B, \mathcal{F}A)$) zu, so dass folgendes gilt:

(1) *Identität*: für alle Objekte A von $\mathcal{C}$ gilt
$$\mathcal{F}\,\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{\mathcal{F}A} \in \hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}A)\ ;$$
(2) *Funktorialität*: für alle $f \in \hom_{\mathcal{C}}(B,C)$ und $g \in \hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ gilt
$$\mathcal{F}(f \circ g) = (\mathcal{F}f) \circ (\mathcal{F}g) \in \hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}C)$$
falls $\mathcal{F}$ kovariant ist, beziehungsweise, falls $\mathcal{F}$ kontravariant ist,
$$\mathcal{F}(f \circ g) = (\mathcal{F}g) \circ (\mathcal{F}f) \in \hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}C, \mathcal{F}A)\ .$$

8.10. Beispiel. Es sei $\Bbbk$ ein Körper, dann bilden alle $\Bbbk$-Vektorräume eine Klasse. Dies sind die Objekte der *Kategorie der* $\Bbbk$-*Vektorräume*, und für zwei Objekte V, W, also zwei $\Bbbk$-Vektorräume, sind die Morphismen $\hom(V,W) = \mathcal{L}(V,W)$ die linearen Abbildungen von V nach W; diese bilden wie V und W auch stets eine Menge.

(1) Das Bilden der k-Formen ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der $\Bbbk$-Vektorräume in sich, der jedem Vektorraum V den Vektorraum $\Lambda^k V$ und jeder linearen Abbildung $F\colon W \to V$ die lineare Abbildung $\Lambda^k F := F^*\colon \Lambda^k V \to \Lambda^k W$ zuordnet. Die Funktorialität folgt aus Bemerkung 8.7 (4).
(2) Für $k = 1$ erhalten wir den Dualraum. Auch das Bilden des Dualraumes ist also ein kontravarianter Funktor.
(3) Da Zurückholen nach Bemerkung 8.7 (3) mit dem Dachprodukt verträglich ist, können wir $\Lambda^\bullet$ als Funktor von der Kategorie der $\Bbbk$-Vektorräume in die Kategorie der Ringe (oder der $\Bbbk$-Algebren) auffassen, denn jede lineare Abbildung $F\colon W \to V$ liefert einen Ring- (beziehungsweise $\Bbbk$-Algebren-) Homomorphismus $\Lambda^\bullet F := F^*\colon \Lambda^\bullet V \to \Lambda^\bullet W$, und Funktorialität folgt wie oben aus Bemerkung 8.7 (4).

Wir definieren jetzt alternierende Differentialformen. Zunächst geben wir eine Definition auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ an, später dann auf Untermannigfaltigkeiten. Der Einfachheit halber werden wir nur glatte, das heißt, $\mathcal{C}^\infty$-Formen betrachten. Genausogut könnten wir $\mathcal{C}^k$-Formen oder L^p-Formen einführen, hätten dann aber mehr Mühe bei der Definition der äußeren Ableitung.

8.11. Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine *alternierende Differentialform* vom *Grad k* oder kurz *k-Form* ist eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung $\alpha\colon U \to \Lambda^k\mathbb{R}^n$ mit $x \mapsto \alpha_x$. Der Raum aller k-Formen auf U wird mit $\Omega^k(U)$ bezeichnet, und wir schreiben

$$\Omega^\bullet(U) = \oplus_{k=0}^\infty \Omega^k(U) .$$

Für $\alpha \in \Omega^j(U)$ und $\beta \in \Omega^k(U)$ definieren wir das *alternierende Produkt* oder *Dachprodukt* $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{j+k}(U)$ durch

$$(\alpha \wedge \beta)_x = \alpha_x \wedge \beta_x \qquad \text{für alle } x \in U .$$

Es sei $\alpha \in \Omega^k(U)$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $F\colon V \to U$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung, dann definieren wir die *zurückgeholte* k-Form $F^*\alpha \in \Omega^k(V)$ durch

$$(F^*\alpha)_y = F_y'^*\alpha_{F(y)} \qquad \text{für alle } y \in V .$$

8.12. Bemerkung. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wie zuvor ist $\Omega^k(U) \subset \operatorname{Abb}(U; \Lambda^k\mathbb{R}^n)$ ein Untervektorraum und $F^*\colon \Omega^k(U) \to \Omega^k(V)$ linear.

(1) Wir hatten $\Lambda^0\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$ definiert. Eine 0-Form ist daher eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$. Also gilt $\Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$.
(2) Eine 1-Form ist eine Abbildung in den Dualraum von $\mathbb{R}^n$, also in den Raum der n-dimensionalen Zeilenvektoren. Somit ist $\Omega^1(U)$ der Raum der $\mathcal{C}^\infty$-1-Formen oder auch $\mathcal{C}^\infty$-Pfaffschen Formen aus Definition 6.99. Insbesondere ist das totale Differential einer $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine 1-Form $df \in \Omega^1(U)$.
(3) Nach Bemerkung 6.100 (2) gilt $dx_i = e^i$ auf ganz U für die totalen Ableitungen der Koordinatenfunktionen $x_1, \dots, x_n\colon U \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x_i$. Also bilden nach Proposition 8.5 die konstanten k-Formen

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \in \Omega^k(U)$$

mit $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ an jedem Punkt von U eine Basis von $\Lambda^k\mathbb{R}^n$.
(4) Nach den Definitionen 8.3 und 8.11 ist das Dachprodukt einer 0-Form f mit einer k-Form $\alpha \in \Omega^k(U)$ einfach das punktweise Produkt

$$(f \wedge \alpha)_x(v_1, \dots, v_k) = f(x) \cdot \alpha_x(v_1, \dots, v_k) = f\alpha_x(v_1, \dots, v_k) .$$

(5) Eine beliebige Differentialform $\alpha \in \Omega^k(U)$ ist nach Definition 8.11 eine glatte Abbildung $\alpha\colon U \to \Lambda^k\mathbb{R}^n$. Wir wählen die Basis aus (3) und identifizieren $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$. Nach Lemma 6.63 existieren glatte Komponentenfunktionen $a_{i_1,\dots,i_k}\colon U \to \mathbb{R}$ mit

$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} a_{i_1,\dots,i_k}\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} ,$$

und jede solche „$\mathcal{C}^\infty(U)$-Linearkombination“ liefert eine glatte k-Form. Man nennt $\Omega^k(U)$ daher einen *freien Modul* des Ringes $\mathcal{C}^\infty(U)$ mit Basis $(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n}$. Wie im Beweis von Proposition 8.5 erhalten wir die Funktionen $a_{i_1,\dots,i_k} \in \mathcal{C}^\infty(U) = \Omega^0(U)$ durch

$$a_{i_1,\dots,i_k}(x) = \alpha_x(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) .$$

(6) Es sei $F\colon V \to U$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion. Für $f \in \Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$ ist

$$F^* f = f \circ F \in \Omega^0(V) \;.$$

Für $dx_i \in \Omega^1(U)$ und $y \in V$ gilt

$$(F^* dx_i)_y(v) = e^i|_{F(y)}(F'(v)) = F_i'|_y(v) \;,$$

wobei F_i die i-te Komponentenfunktion von F ist, siehe Lemma 6.63. Es folgt

$$F^* dx_i = dF_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial y_j}\, dy_j \in \Omega^1(V) \;.$$

Für beliebige k-Formen $\alpha \in \Omega^k(U)$ wie in (5) erhalten wir also

$$\begin{aligned} F^*\Biggl(\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} a_{i_1,\dots,i_k}\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\Biggr)& \\ = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} (a_{i_1,\dots,i_k} \circ F)\, dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_k} \;.& \end{aligned}$$

8.13. Bemerkung. Wir betrachten eine Kategorie $\mathcal{C}^\infty$, vorläufig mit einer Menge von Objekten

$$\{\, U \subset \mathbb{R}^n \mid n \in \mathbb{N}, U \text{ offen} \,\} \;,$$

mit $\hom_{\mathcal{C}^\infty}(V,U) = \mathcal{C}^\infty(V,U)$, und mit der Hintereinanderausführung als Verkettung. Die Identität id_U ist eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung, und aus der Kettenregel 6.57 und der verallgemeinerten Produktregel aus Bemerkung 6.88 (für höhere Ableitungen) folgt, dass die Verkettung von $\mathcal{C}^\infty$-Abbildungen wieder eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung ist.

Dann ist Ω^k ein kontravarianter Funktor von $\mathcal{C}^\infty$ in die Kategorie der reellen Vektorräume, der einem Objekt U den Raum $\Omega^k(U)$ und einer $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung $F\colon V \to U$ die lineare Abbildung $\Omega^k F = F^*\colon \Omega^k(U) \to \Omega^k(V)$ zuordnet. Offensichtlich gilt $\mathrm{id}_U^* = \mathrm{id}_{\Omega^k U}$. Aus der Kettenregel 6.57 folgt für $F\colon V \to U$, $G\colon W \to V$, $\alpha \in \Omega^k(U)$ und $z \in W$, dass

$$\begin{aligned} ((F \circ G)^* \alpha)_z &= (F \circ G)_z'^* \alpha_{(F\circ G)(z)} \\ &= (F'_{G(z)} \circ G'_z)^* \alpha_{F(G(z))} \\ &= G_z'^*(F'^*_{G(z)} \alpha_{F(G(z))}) \\ &= G_z'^*((F^*\alpha)_{G(z)}) = ((G^* \circ F^*)\alpha)_z \end{aligned}$$

mit Bemerkung 8.7 (4), also ist Ω^k tatsächlich funktoriell.

Analog definieren wir einen kontravarianten Funktor $\Omega^\bullet$ mit $\Omega^\bullet(U) = \oplus_{k=0}^\infty \Omega^k(U)$.

8.2. De Rham-Kohomologie

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir die totale Ableitung df von Funktionen $f\colon U \to \mathbb{R}$ auf Differentialformen, definieren geschlossene und exakte Formen wie in Definition 6.104 und erhalten als Quotientenraum die sogenannte de Rham-Kohomologie. Wir zeigen die Homotopieinvarianz der de Rham-Kohomologie und verallgemeinern das Poincaré-Lemma aus Satz 6.108.

8.14. Satz. *Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ und alle offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$ existiert genau eine lineare Abbildung $d = d_U^k\colon \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ mit folgenden Eigenschaften.*

(1) *Für Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(U) = \Omega^0(U)$ ist $d_U^0 f = df$ die totale Ableitung.*
(2) Produkt- *oder* Leibnizregel *Für alle $\alpha \in \Omega^k(U)$, $\beta \in \Omega^\ell(U)$ gilt*
$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta\ .$$
(3) *Es gilt $d^2 = d_U^{k+1} \circ d_U^k = 0$.*
(4) Natürlichkeit: *Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $F\colon V \to U$ glatt, dann gilt $F^* \circ d_U^k = d_V^k \circ F^*$.*

Beweis. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Durch (1) ist d_U^0 bereits festgelegt. Wir betrachten die konstanten 1-Formen $e^i = dx_i$ aus Bemerkung 6.100 (2) und 8.12 (3) für $i = 1, \dots, n$. Aus (3) folgt
$$de^i = d(dx_i) = 0\ .$$
Wie in Bemerkung 8.12 (5) schreiben wir eine beliebige k-Form α als
$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} a_{i_1,\dots,i_k}\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(U)\ .$$
Aus der Linearität von d, der Produktregel (2) und Eigenschaft 3 folgt
$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} d\bigl(a_{i_1,\dots,i_k}\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\bigr) \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \Bigl(da_{i_1,\dots,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &\qquad\qquad + a_{i_1,\dots,i_k}\bigl(\underbrace{d^2x_{i_1}}_{=0} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &\qquad\qquad\qquad - dx_{i_1} \wedge \underbrace{d^2x_{i_2}}_{=0} \wedge dx_{i_3} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \pm \dots\bigr)\Bigr) \\ (*) \qquad &= \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} da_{i_1,\dots,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\ . \end{aligned}$$
Damit ist die Eindeutigkeit von d_U^k bewiesen.

Um die Existenz zu zeigen, müssen wir nachweisen, dass die Formel (*) für $d\alpha$ Abbildungen d_U^k mit den geforderten Eigenschaften definiert. Eigenschaft (1) ist offensichtlich.

Um (2) zu zeigen, überlegen wir uns zunächst, dass für $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ und $1 \leq j_1 < \cdots < j_\ell \leq n$ das Produkt

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell}$$

entweder 0 ist, falls $i_p = j_q$ für ein $p \in \{1, \dots, k\}$ und ein $q \in \{1, \dots, \ell\}$, oder das ± 1-fache einer entsprechenden Basisform von $\Omega^{k+\ell}(U)$. Sei also α wie oben und

$$\beta = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_\ell \leq n} b_{j_1,\dots,j_\ell} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell} \ ,$$

dann folgt (2), denn

$$\begin{aligned}
&d(\alpha \wedge \beta) \\
&\quad = d\Biggl(\sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_\ell \leq n}} a_{i_1,\dots,i_k} b_{j_1,\dots,j_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell} \Biggr) \\
&\quad = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_\ell \leq n}} \bigl(b_{j_1,\dots,j_\ell} da_{i_1,\dots,i_k} + a_{i_1,\dots,i_k} db_{j_1,\dots,j_\ell} \bigr) \\
&\qquad\qquad\qquad \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell} \\
&\quad = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_\ell \leq n}} \bigl(da_{i_1,\dots,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge b_{j_1,\dots,j_\ell} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell} \\
&\qquad\qquad + (-1)^k a_{i_1,\dots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge db_{j_1,\dots,j_\ell} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell} \bigr) \\
&\quad = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta \ .
\end{aligned}$$

Für $f \in \Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$ folgt (3) aus dem Satz 6.68 von Schwarz, denn

$$\begin{aligned}
d^2 f &= d \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \right) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \, dx_i \wedge dx_j \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j = 0 \ ,
\end{aligned}$$

siehe auch Abschnitt 6.6 nach Definition 6.104. Aus der Produktregel (2) und (*) folgt also

$$\begin{aligned}
&d^2 \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1,\dots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\
&\qquad = d \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} da_{i_1,\dots,i_k} \wedge (1 \cdot dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \\
&\qquad = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \bigl(\underbrace{d^2 a_{i_1,\dots,i_k}}_{=0} \wedge (1 \cdot dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \\
&\qquad\qquad\qquad - da_{i_1,\dots,i_k} \wedge (\underbrace{d1}_{=0} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \bigr) = 0 \ .
\end{aligned}$$

Also gilt (3) insgesamt.

Da das Zurückziehen von Differentialformen mit dem Dachprodukt verträglich ist nach Bemerkung 8.7 (3), reicht es wegen der Produktregel (2), die Natürlichkeit nur für Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ und die speziellen 1-Formen dx_i zu zeigen. Für $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ gilt für $x \in V$ und $v \in \mathbb{R}^m$ nach (1) und der Kettenregel

$$\begin{aligned}((d \circ F^*)f)_x(v) = d(f \circ F)_x(v) &= (f \circ F)'_x(v)\\ &= f'_{F(x)}(F'_x(v)) = df_{F(x)}(F'_x(v)) = (F^*df)_x(v)\ ,\end{aligned}$$

also $(d \circ F^*)f = (F^* \circ d)f$. Für dx_i folgt aus (3) und Bemerkung 8.12 (6), dass

$$d(F^*dx_i) = d(dF_i) = 0 = F^*(d^2x_i) = (F^* \circ d)\, dx_i\ .$$

Damit ist auch (4) bewiesen. □

Nach Eigenschaft (3) erhalten wir eine Familie von Abbildungen $(d^k_U)_{k\in\mathbb{Z}}$ für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen,

$$\dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{d_U^{-1}} \Omega^0(U) \xrightarrow{d_U^0} \dots \xrightarrow{d_U^{n-1}} \Omega^n(U) \xrightarrow{d_U^n} 0 \longrightarrow \dots$$

mit $d^{k+1}_U \circ d^k_U = 0$ für alle k. Dabei setzen wir $\Omega^k(U) = 0$ und $d^k_U = 0$ für $k < 0$. Die folgende Definition funktioniert allgemein für Moduln über Ringen und lineare Abbildungen.

8.15. Definition. Ein *(Koketten-)Komplex* $(V^\bullet, d^\bullet)$ von $\Bbbk$-Vektorräumen besteht aus einer Familie $(V^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ von $\Bbbk$-Vektorräumen und einer Familie $\Bbbk$-linearer Abbildungen $d^k\colon V^k \to V^{k+1}$ mit $d^{k+1} \circ d^k = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Eine *Koketten-Abbildung* $f^\bullet(V^\bullet, d^\bullet) \to (W^\bullet, e^\bullet)$ zwischen Komplexen $(V^\bullet, d^\bullet)$ und $(W^\bullet, e^\bullet)$ ist eine Familie $\Bbbk$-linearer Abbildungen $f^k\colon V^k \to W^k$ mit $f^{k+1} \circ d^k = e^k \circ f^k$.

Ein Element $\alpha \in V^k$ heißt *geschlossen,* wenn $d^k\alpha = 0$, und *exakt,* wenn es ein $\beta \in V^{k-1}$ mit $d^{k-1}\beta = \alpha$ gibt.

Die *Kohomologie* $H^\bullet(V^\bullet, d^\bullet)$ eines Komplexes $(V^\bullet, d^\bullet)$ ist die Familie der $\Bbbk$-Vektorräume

$$H^k(V^\bullet, d^\bullet) = \ker d^k / \operatorname{im} d^{k-1}\ .$$

Die Äquivalenzklasse $[\alpha] \in H^k(V^\bullet, d^\bullet)$ von $\alpha \in \ker d^k$ heißt auch die *Kohomologieklasse* von α.

8.16. Bemerkung. (1) Aus $d^k \circ d^{k-1} = 0$ folgt $d^{k-1}\beta \in \ker d^k$ für alle $\beta \in V^{k-1}$, also sind alle exakten Elemente von V^k auch geschlossen. Deshalb ist $\operatorname{im} d^{k-1}$ ein Untervektorraum des Kernes $\ker d^k$, und der Quotient $\ker d^k / \operatorname{im} d^{k-1}$ ist wohldefiniert.

(2) Die $\Bbbk$-Koketten-Komplexe bilden eine Kategorie $\mathcal{C}h^\bullet_\Bbbk$ mit den Koketten-Abbildungen als Morphismen, denn die Verkettung zweier Koketten-Abbildungen

$$f^\bullet\colon (V^\bullet, d^\bullet) \to (W^\bullet, e^\bullet) \qquad \text{und} \qquad g^\bullet\colon (U^\bullet, c^\bullet) \to (V^\bullet, d^\bullet)$$

ist wieder eine Koketten-Abbildung, da

$$f^{k+1} \circ g^{k+1} \circ c^k = f^{k+1} \circ d^k \circ g^k = e^k \circ f^k \circ g^k\ .$$

Die Axiome (1) und (2) aus Definition 8.8 sind klar.

(3) Jede Koketten-Abbildung $f^\bullet\colon (V^\bullet, d^\bullet) \to (W^\bullet, e^\bullet)$ induziert eine Familie linearer Abbildungen $Hf^k\colon H^k(V^\bullet, d^\bullet) \to H^k(W^\bullet, d^\bullet)$ mit
$$Hf^k[\alpha] = [f^k\alpha] .$$
Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn aus $\alpha \in \ker d^k$ folgt $e^k(f^k\alpha) = f^{k+1}(d^k\alpha) = 0$, also $f^k\alpha \in \ker e^k$. Aus $[\alpha] = 0$ folgt $\alpha = d^{k-1}\beta$ für ein $\beta \in V^{k-1}$ und $f^k\alpha = f^k(d^{k-1}\beta) = e^{k-1}(f^{k-1}\beta)$, somit gilt in diesem Fall auch $[f^k\alpha] = 0$. Insbesondere hängt $Hf^k[\alpha]$ nicht von der Wahl des Repräsentanten $\alpha + d\beta$ von $[\alpha]$ ab.

(4) Die Kohomologie ist ein kovarianter Funktor $H^\bullet$ von $\mathcal{C}h^\bullet_{\Bbbk}$ in sich, der einem Komplex $(V^\bullet, d^\bullet)$ den Komplex $(H^\bullet(V^\bullet, d^\bullet), 0)$ zuordnet, und jeder Koketten-Abbildung die induzierte Abbildung $Hf^\bullet$ oder kurz $f^\bullet$ aus (2). Funktorialität folgt, denn für Kokettenabbildungen $f^\bullet$, $g^\bullet$ wie oben und $\alpha \in \ker c^k$ gilt
$$H(f \circ g)^k[\alpha] = [f^k(g^k(\alpha))] = Hf^k[g^k(\alpha)] = (Hf^k \circ Hg^k)[\alpha] ,$$
und natürlich induziert $(\mathrm{id}_{V^k})_k$ die Identität $\mathrm{id}_{H^k(V^\bullet, d^\bullet)}$.

8.17. Definition. Die Abbildung $d^k_U\colon \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}((U)$ aus Satz 8.14 heißt *äußere Ableitung*, der Komplex $(\Omega^\bullet(U), d^\bullet_U)$ heißt *de Rham-Komplex*, und seine Kohomologie $H^\bullet_{\mathrm{dR}}(U) = H^\bullet(\Omega^\bullet(U), d^\bullet_U)$ die *de Rham-Kohomologie* von U.

8.18. Bemerkung. Es sei wieder $\mathcal{C}^\infty$ die Kategorie der offenen Teilmengen der Räume $\mathbb{R}^n$ aus Bemerkung 8.13.

(1) Indem wir zum Funktor $\Omega^\bullet$ aus Bemerkung 8.13 noch die äußeren Ableitungen hinzunehmen, erhalten wir einen Funktor $(\Omega^\bullet, d^\bullet)$ von $\mathcal{C}^\infty$ nach $\mathcal{C}h^\bullet_{\mathbb{R}}$, denn nach Satz 8.14 ist $(\Omega^\bullet(U), d^\bullet_U)$ ein Kokettenkomplex und das Zurückholen F^* mit $F \in \mathcal{C}^\infty(V, U)$ eine Kokettenabbildung. Nach Bemerkung 8.7 (3) können wir den Funktor noch um das Dachprodukt erweitern, so dass wir $U \subset \mathbb{R}^n$ den Komplex $(\Omega^\bullet(U), d^\bullet_U, \wedge)$ zuordnen.

(2) Durch Nacheinanderausführen des kontravarianten Funktors $(\Omega^\bullet, d^\bullet)$ und des kovarianten Funktors $H^\bullet$ erhalten wir den kontravarianten Funktor $H^\bullet_{\mathrm{dR}}$, der jeder offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ihre de Rham-Kohomologie und jeder $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung $F\colon V \to U$ die induzierte Abbildung $F^* = H(F^*)^\bullet\colon H^\bullet_{\mathrm{dR}}(U) \to H^\bullet_{\mathrm{dR}}(V)$ mit
$$F^*[\alpha] = [F^*\alpha]$$
zuordnet, vergleiche Übung 1 von Blatt III.12.

Nach Satz 8.14 (3) und Aufgabe 3 von Blatt III.12 erhalten wir auch eine Familie von „Dachprodukten“ $\wedge\colon H^k_{\mathrm{dR}}(U) \times H^\ell_{\mathrm{dR}}(U) \to H^{k+\ell}_{\mathrm{dR}}(U)$. Dieses Produkt ist immer noch assoziativ und graduiert kommutativ wie in Bemerkung 8.4.

8.19. Bemerkung. Wir hatten in Definition 5.63 höhere Ableitungen auch für Funktionen auf halboffenen oder abgeschlossenen Intervallen positiver Länge definiert. Analog können wir höhere partielle Ableitungen beispielsweise auf Produkten solcher Intervalle $I_1 \times \cdots \times I_n \in \mathbb{R}$ definieren: Wenn

$$\partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} : I_1 \times \cdots \times I_n \to \mathbb{R}$$

bereits definiert ist, definieren wir

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k+1}}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \right) ,$$

indem wir $x_1, \dots, x_{i_{k+1}-1}, x_{i_{k+1}+1}, \dots, x_n$ festhalten und die k-te Ableitung nur als Funktion von $x_{i_{k+1}}$ auf dem (möglicherweise abgeschlossenen) Intervall $I_{i_{k+1}}$ betrachten.

Wenn alle partiellen Ableitungen von f bis zur Ordnung k existieren und stetig sind, nennen wir f k-fach stetig partiell differenzierbar und schreiben $f \in \mathcal{C}^k(I_1 \times \cdots \times I_n)$. Wenn das für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, heißt f unendlich oft differenzierbar, und wir schreiben $f \in \mathcal{C}^\infty(I_1 \times \cdots \times I_n)$.

Auch für Funktionen $f \in \mathcal{C}^2(I_1 \times \cdots \times I_n)$ gilt der Satz 6.68 von Schwarz. Dazu betrachten wir eine Folge von Punkten $(p_m)_m$ im Innern des Produktes $I_1 \times \cdots \times I_n$ mit $\lim_{m\to\infty} p_m = x \in I_1 \times \cdots \times I_n$. Aufgrund der Stetigkeit der zweiten Ableitungen und des Satzes von Schwarz im Inneren gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_m) = \lim_{m\to\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p_m) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) .$$

Insbesondere kommt es bei k-fachen Ableitungen von $\mathcal{C}^\ell$-Funktionen mit $k \le \ell$ nicht auf die Reihenfolge des Ableitens an, siehe Abschnitt 6.4.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall positiver Länge, dann hat jeder Punkt in $U \times I$ eine Umgebung der Form $I_1 \times \cdots \times I_n \times I$. Wir können also Räume $\mathcal{C}^\infty(U \times I; \mathbb{R}^m)$ und $\Omega^k(U \times I)$ betrachten. Die äußere Ableitung $d\colon \Omega^k(U \times I) \to \Omega^{k+1}(U \times I)$ lässt sich wie oben definieren. Satz 8.14 und Bemerkung 8.18 gelten analog.

8.20. Definition. Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $F, G \in \mathcal{C}^\infty(V, U)$. Eine *glatte Homotopie* von F nach G ist eine glatte Abbildung $H \in \mathcal{C}^\infty(V \times [0,1], U)$ mit

$$H(y, 0) = F(y) \qquad \text{und} \qquad H(y, 1) = G(y)$$

für alle $y \in V$. Zwei Abbildungen F, $G \in \mathcal{C}^\infty(V, U)$ heißen glatt *homotop*, kurz $F \sim G$, wenn eine glatte Homotopie von F nach G existiert.

8.21. Bemerkung. (1) Es seien $H, K \in \mathcal{C}^\infty(V \times [0,1], U)$ glatte Homotopien von E nach F beziehungsweise von F nach G, mit $E, F, G \in \mathcal{C}^\infty(V, U)$. Dann existiert eine glatte Homotopie L von E nach G mit

$$L(y,t) = \begin{cases} H\big(y, 1 - e^{-\frac{2t}{1-2t}}\big) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}) , \\ F(y) & \text{für } t = \frac{1}{2} , \\ K\big(y, e^{-\frac{1-t}{2t-1}}\big) & \text{für } t \in (\frac{1}{2}, 1] . \end{cases}$$

Dazu überprüft man, dass die Funktionen $t \mapsto 1 - e^{-\frac{2t}{1-2t}}$ und $t \mapsto e^{-\frac{1-t}{2t-1}}$ auf ihrem Definitionsbereich $[0, \frac{1}{2})$ beziehungsweise $(\frac{1}{2}, 1]$ streng monoton steigen mit

$$1 - e^{-\frac{0}{1-0}} = 0, \qquad e^{-\frac{1-1}{2-1}} = 1 \;,$$

$$\text{und} \qquad \lim_{t \nearrow \frac{1}{2}} \frac{d^k}{dt^k} e^{-\frac{2t}{1-2t}} = \lim_{t \searrow \frac{1}{2}} \frac{d^k}{dt^k} e^{-\frac{1-t}{2t-1}} = 0$$

für alle $k \geq 0$, so dass L tatsächlich eine glatte Abbildung mit

$$L(y,0) = E(y) \qquad \text{und} \qquad L(y,1) = G(y)$$

darstellt.

Hieraus folgt die Transitivität von „$\sim$“, und man überzeugt sich, dass homotop zu sein eine Äquivalenzrelation ist. Ihre Äquivalenzklassen heißen glatte Homotopieklassen.

(2) Seien jetzt $F, G \in \mathcal{C}^\infty(V,U)$ und $D, E \in \mathcal{C}^\infty(W,V)$ homotop vermöge $H \in \mathcal{C}^\infty(V \times [0,1], U)$ und $K \in \mathcal{C}^\infty(W \times [0,1], V)$, dann sind $F \circ D$ und $G \circ E$ homotop vermöge $L \in \mathcal{C}^\infty(W \times [0,1], U)$ mit

$$L(z,t) = H(K(z,t),t) \;.$$

Also ist die Äquivalenzrelation aus (1) verträglich mit der Verkettung glatter Abbildungen.

(3) Wegen (1) und (2) gibt es eine Kategorie $\mathcal{H}^\infty$, deren Objekte vorläufig offene Teilmengen eines $\mathbb{R}^n$ sind wie in Bemerkung 8.13, deren Morphismen von V nach U glatte Homotopieklassen von Abbildungen von V nach U sind, mit Verkettung

$$[F] \circ [G] = [F \circ G]$$

für $F \in \mathcal{C}^\infty(V,U)$ und $G \in \mathcal{C}^\infty(W,V)$. Für jedes Objekt U ist $[\mathrm{id}_U]$ die Identität von U in $\mathcal{H}^\infty$. Außerdem gibt es einen Funktor von $\mathcal{C}^\infty$ nach $\mathcal{H}^\infty$, der jedes Objekt U auf sich selbst und jeden Morphismus $F \in \mathcal{C}^\infty(V,U)$ auf seine Homotopieklasse $[F]$ abbildet.

Für einen beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\alpha \in \Omega^k(U)$ definieren wir $\iota_v \alpha \in \Omega^{k-1}(U)$ durch

$$(\iota_v \alpha)(v_1, \dots, v_{k-1}) = \alpha(v, v_1, \dots, v_{k-1}) \;,$$

das heißt, wir setzen v als erstes Argument in α ein.

Wir betrachten $V \times [0,1] \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Es sei e_{m+1} der Vektor der Standardbasis $(e_1, \dots, e_{m+1})$ in Richtung des Intervalles $[0,1]$. Sei $\beta \in \Omega^k(V \times [0,1])$, dann definieren wir eine Form $\int_0^1 \beta \, dt \in \Omega^k(V)$ durch

$$\left(\int_0^1 \beta \, dt \right)_y (v_1, \dots, v_k) = \int_0^1 \beta_{(y,t)}(v_1, \dots, v_k) \, dt$$

für alle $y \in V$, indem wir die Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ als Elemente von $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ auffassen.

8.22. Satz (Homotopieinvarianz der de-Rham Kohomologie I). *Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und H eine glatte Homotopie zwischen F, $G \in \mathcal{C}^\infty(V,U)$. Definiere $h^k \colon \Omega^k(U) \to \Omega^{k-1}(V)$ durch*

$$h^k\alpha = \int_0^1 \iota_{e_{m+1}} H^*\alpha \, dt \;,$$

dann gilt:

(1) *die Familie $h^\bullet = (h^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ist eine* Koketten-Homotopie *zwischen F^* und G^*, das heißt, für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt*
$$G^* - F^* = d_v^{k-1} \circ h^k + h^{k+1} \circ d_U^k \colon \Omega^k(U) \to \Omega^k(V) \;;$$
(2) *für die induzierten Abbildungen auf der de Rham-Kohomologie gilt*
$$F^* = G^* \colon H^k(U) \to H^k(V) \;.$$

Beweis. Es bezeichne $t = x^{m+1}$ die Koordinate in Richtung des Intervalls $[0,1]$ auf $V \times [0,1] \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Wir definieren einen Operator $\frac{\partial}{\partial t} \colon \Omega^k(V \times [0,1]) \to \Omega^k(V \times [0,1])$ durch

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\Biggl(\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le m+1} a_{i_1,\dots,i_k}\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\Biggr) \\
&\qquad = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le m} \frac{\partial a_{i_1,\dots,i_k}}{\partial t}\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}
\end{aligned}$$

und definieren $d_V^k \colon \Omega^k(V \times [0,1]) \to \Omega^{k+1}(V \times [0,1])$ durch

$$d^k_{V\times[0,1]} = d_V^k + dt \wedge \frac{\partial}{\partial t} \;.$$

Nach Formel $(*)$ im Beweis von Satz 8.14 und der Definition des totalen Differentials enthält d_V^k genau diejenigen Terme, in denen in Richtung der Vektoren $e_1, \dots, e_m$ abgeleitet wird.

Es sei $\alpha \in \Omega^k(U)$. Wir schreiben $H^*\alpha \in \Omega^k(V \times [0,1])$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
H^*\alpha &= \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le m+1} a_{i_1,\dots,i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\
&= \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le m} a_{i_1,\dots,i_k}\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\
&\qquad + (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<\dots<i_{k-1}\le m} a_{i_1,\dots,i_{k-1},m+1}\, \underbrace{dt}_{dx^{m+1}} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}} \\
&= \beta + dt \wedge \iota_{e_{m+1}} H^*\alpha
\end{aligned}$$

mit

$$\beta \in \mathcal{C}^\infty(V \times [0,1], \Lambda^k\mathbb{R}^m) \qquad \text{und} \qquad \iota_{e_{m+1}} H^*\alpha \in \mathcal{C}^\infty(V \times [0,1], \Lambda^{k-1}\mathbb{R}^m) \;.$$

Daraus folgt mit Satz 8.14 (4), dass

$$\begin{aligned} H^* d_U^k \alpha &= d_{V\times[0,1]}^k H^*\alpha = d(\beta + dt \wedge \iota_{e_{m+1}} H^*\alpha) \\ &= dt \wedge \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} - d_V^{k-1}\big(\iota_{e_{m+1}} H^*\alpha\big) \right) + d_V^k \beta \;, \end{aligned}$$

denn $dt \wedge dt \frac{\partial}{\partial t} = 0$.

Nach der obigen Konstruktion kommen in den Formen β, $\frac{\partial\beta}{\partial t}$, $d_V\beta$, $\iota_{e_{m+1}} H^*\alpha$ und $d_V(\iota_{e_{m+1}} H^*\alpha)$ nur Dachprodukte der Basisformen $dx_1, \dots, dx_m$, aber nicht dx_{m+1} vor; es folgt

$$\iota_{e_{m+1}} \frac{\partial \beta}{\partial t} = \iota_{e_{m+1}} d_V \beta = \iota_{e_{m+1}} d_V\big(\iota_{e_{m+1}} H^*\alpha\big) = 0$$

und $$\iota_{e_{m+1}} \left(dt \wedge \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} - d_V\big(\iota_{e_{m+1}} H^*\alpha\big) \right)\right) = \frac{\partial \beta}{\partial t} - d_V\big(\iota_{e_{m+1}} H^*\alpha\big) \;.$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} h^{k+1} d^k \alpha &= \int_0^1 \iota_{e_{m+1}} \left(dt \wedge \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} - d_V\big(\iota_{e_{m+1}} H^*\alpha\big) \right) + d_V^k \beta \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} - d_V\big(\iota_{e_{m+1}} H^*\alpha\big) \right) dt \;. \end{aligned}$$

Um $d^{k-1} h^k \alpha$ auszurechnen, erinnern wir uns an Aufgabe 2 von Blatt II.9, wonach Integration und Ableitung vertauschen, falls die Ableitung gleichmäßig stetig ist, siehe auch Proposition 7.115. Für $f \in \mathcal{C}^1([a,b]\times[0,1])$ etwa gilt

$$\frac{d}{ds} \int_0^1 f(s,t)\, dt = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\, dt \;.$$

Da d_V nur in Richtung $e_1, \dots, e_m$, aber nicht in Richtung e_{m+1} ableitet und $[0,1]$ kompakt ist, folgt

$$d_V \int_0^1 \gamma\, dt = \int_0^1 d_V \gamma\, dt \in \Omega^k(V)$$

für alle $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(V \times [0,1], \Lambda^{k-1}\mathbb{R}^m)$. Wir erhalten also

$$d_V^{k-1} h^k \alpha = \int_0^1 d_V^{k-1}\big(\iota_{e_{m+1}} H^*\alpha\big)\, dt \;.$$

Für $y \in V$ und $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^m$ folgt Behauptung (1) aus dem Hauptsatz 5.47 der Differential- und Integralrechnung , denn

$$\begin{aligned} &(h^{k+1} d^k \alpha - d^{k-1} h^k \alpha)_y(v_1, \dots, v_k) \\ &\qquad = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \beta_{(y,t)}(v_1, \dots, v_k)\, dt = \beta_{(y,t)}(v_1, \dots, v_k)\big|_{t=0}^1 \\ &\qquad = (H^*\alpha)_{(y,t)}(v_1, \dots, v_k)\big|_{t=0}^1 = (G^*\alpha - F^*\alpha)_y(v_1, \dots, v_k) \;, \end{aligned}$$

da $dt(v_i) = 0$ für $i = 1, \dots, k$, und da $H|_{V\times\{0\}} = F$ und $H|_{V\times\{1\}} = G$.

Aussage (2) folgt unmittelbar aus (1), denn sei $\alpha \in \ker d_U^k$ geschlossen, dann ist

$$G^*\alpha - F^*\alpha = h^{k+1}\underbrace{d_U^k\alpha}_{=0} + d_V^{k-1}h^k\alpha \in \operatorname{im} d_V^{k-1}$$

exakt, somit $G^*[\alpha] = F^*[\alpha] \in H^k_{\mathrm{dR}}(V)$. □

Dieser Satz sagt etwas über die induzierten Abbildungen zwischen den Kohomologien verschiedener offener Mengen aus. Wir wollen nun Aussagen über die Kohomologien selbst beweisen. Dabei hilft uns, dass die de Rham-Kohomologie ein Funktor ist.

8.23. Definition. Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, und A, B seien Objekte von $\mathcal{C}$. Ein Morphismus $f \in \hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ heißt *Isomorphismus*, wenn er ein *Inverses* besitzt, wenn es also $g \in \hom_{\mathcal{C}}(B, A)$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$ gibt . Isomorphismen in der Kategorie $\mathcal{C}^\infty$ heißen *Diffeomorphismen.* Wenn $[F]$ Isomorphismen in $\mathcal{H}^\infty$ ist, heißt $F \in \mathcal{C}^\infty(V, U)$ *glatte Homotopieäquivalenz.*

8.24. Bemerkung. (1) Ist $f \in \hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ ein Isomorphismus, so ist das Inverse eindeutig bestimmt nach Übung 3 von Blatt III.11.

(2) Ist $\mathcal{F}$ ein Funktor von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ und $f \in \hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ ein Isomorphismus, dann ist $\mathcal{F}f$ ebenfalls ein Isomorphismus. Sei nämlich $g \in \hom_{\mathcal{C}}(B, A)$ invers zu f, dann gilt

$$(\mathcal{F}g) \circ (\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}\,\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{\mathcal{F}A}\ ,$$
$$(\mathcal{F}f) \circ (\mathcal{F}g) = \mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}\,\mathrm{id}_B = \mathrm{id}_{\mathcal{F}B}$$

falls $\mathcal{F}$ kovariant ist, beziehungsweise

$$(\mathcal{F}f) \circ (\mathcal{F}g) = \mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}\,\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{\mathcal{F}A}\ ,$$
$$(\mathcal{F}g) \circ (\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}\,\mathrm{id}_B = \mathrm{id}_{\mathcal{F}B}$$

falls $\mathcal{F}$ kontravariant ist.

(3) Es sei $f \in \mathcal{C}^\infty(V, U)$ eine Homotopieäquivalenz, also besitzt $[f] \in \hom_{\mathcal{H}^\infty}(V, U)$ ein Inverses $[g]$ mit $g \in \mathcal{C}^\infty(U, V)$. Dann folgt $[f \circ g] = \mathrm{id}_U$ und $[g \circ f] = \mathrm{id}_V$, also gibt es Homotopien $H\colon U \times [0, 1] \to U$ und $K\colon V \times [0, 1] \to V$ mit

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(g(x)), & \qquad & H(x, 1) = x, \\ K(y, 0) &= g(f(y)) & \text{und} \qquad & H(y, 1) = y \end{aligned}$$

für alle $x \in U$ und alle $y \in V$.

(4) Nach Satz 8.22 hängt F^* nur von $[F] \in \hom_{\mathcal{H}^\infty}(V, U)$ ab. Also dürfen wir $H^\bullet_{\mathrm{dR}}$ als Funktor von $\mathcal{H}^\infty$ nach $\mathcal{C}h^\bullet_{\mathbb{R}}$ auffassen. Im folgenden Diagramm spielt es also keine Rolle, auf welchem Weg man von $\mathcal{C}^\infty$ zu $\mathcal{C}h^\bullet_{\mathbb{R}}$ unten rechts gelangt:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^\infty \arrow[r] \arrow[d, "(\Omega^\bullet, d^\bullet)"'] & \mathcal{H}^\infty \arrow[d, "H^\bullet_{\mathrm{dR}}"] \\ \mathcal{C}h^\bullet_{\mathbb{R}} \arrow[r, "H^\bullet"'] & \mathcal{C}h^\bullet_{\mathbb{R}} \end{tikzcd}$$

8.25. Folgerung (Homotopieinvarianz der de Rham-Kohomologie II). *Es sei $F\colon V \to U$ eine Homotopieäquivalenz, dann ist $F^*\colon H^k_{\mathrm{dR}}(U) \to H^k_{\mathrm{dR}}(V)$ ein linearer Isomorphismus für alle $k \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Wir kombinieren Satz 8.22 mit der obigen Bemerkung. □

Übrigens ist F^* nach Bemerkung 8.18 mit den Dachprodukten verträglich, wir erhalten also auch einen Isomorphismus von Ringen, genauer, von $\mathbb{R}$-Algebren.

Die obige Folgerung wenden wir an, um das Poincaré-Lemma für Formen beliebigen Grades zu beweisen.

8.26. Definition. Eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *glatt zusammenziehbar*, wenn es $x_0 \in U$ und eine Abbildung $H\colon U \times [0,1] \to U$ mit $H(x,0) = x_0$ und $H(x,1) = x$ für alle $x \in U$ gibt.

8.27. Bemerkung.
(1) Nach Definition 8.20 ist U genau dann glatt zusammenziehbar, wenn die konstante Abbildung $p_{x_0}\colon U \to \{x_0\} \subset U$ homotop zu id_U ist. Wir schreiben diese Abbildung als Hintereinanderschaltung
$$p_{x_0} = \iota \circ p\colon\ U \xrightarrow{\ p\ } \mathbb{R}^0 \xrightarrow{\ \iota\ } U$$
mit $p(x) = 0 \in \mathbb{R}^0$ für alle $x \in U$ und $\iota(0) = x_0$. Umgekehrt gilt $p \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^0}$. Nach Bemerkung 8.24 (3) ist also U genau dann glatt zusammenziehbar, wenn U glatt homotopieäquivalent zu $\mathbb{R}^0$ ist.
(2) Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig* bezüglich $x_0 \in U$, wenn $H(x,t) = tx + (1-t)x_0 \in U$ für alle $x \in U$ und alle $t \in [0,1]$. Sternförmige offene Mengen sind mittels H glatt zusammenziehbar.
(3) Vor Definition 5.32 haben wir konvexe Mengen definiert. Eine konvexe Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist sternförmig bezüglich jedes Punktes $x_0 \in U$. Also sind konvexe offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ stets glatt zusammenziehbar.

8.28. Satz (Poincaré-Lemma). *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und glatt zusammenziehbar. Dann gilt*
$$H^k_{\mathrm{dR}}(U) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } k = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst}\ , \end{cases}$$
und Elemente von $H^0_{\mathrm{dR}}(U)$ werden durch konstante Funktionen repräsentiert.

Beweis. Aus Folgerung 8.25 und Bemerkung 8.27 (1) folgt, dass
$$p^*\colon H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^0) \to H^k_{\mathrm{dR}}(U)$$
für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist, wobei wieder $p \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^0)$ durch $p(x) = 0$ für alle $x \in U$ gegeben ist.

Um $H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^0)$ zu bestimmen, überlegen wir uns, dass $\Omega^k(\mathbb{R}^0) = 0$ für alle $k \neq 0$ und
$$\Omega^0(\mathbb{R}^0) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^0, \mathbb{R}) = \mathbb{R}\ ,$$

da $\mathbb{R}^0$ aus genau einem Punkt besteht. Es folgt $d^k_{\mathbb{R}^0} = 0$ für alle k, also

$$H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^0) = \ker d^k_{\mathbb{R}^0} / \operatorname{im} d^{k-1}_{\mathbb{R}^0} = \Omega^k(\mathbb{R}^0)/0 = \Omega^k(\mathbb{R}^0)\;,$$

woraus die erste Behauptung folgt. Zur zweiten sei

$$a \in \mathbb{R} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^0, \mathbb{R}) = H^0_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^0)\;,$$

dann ist $p^*a \in \Omega^0(U)$ die konstante Funktion mit Wert a. Da $\Omega^{-1}(U) = 0$, sind alle geschlossenen 0-Formen von dieser Gestalt. □

Dieser Beweis ist wesentlich kürzer als der des Poincaré-Lemmas 6.108 für 1-Formen, allerdings hatten wir dort die schwächere Voraussetzung, dass U einfach zusammenhängend ist, und daher etwas mehr zu zeigen.

8.29. Bemerkung. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenziehbar, $k \neq 0$ und $\alpha \in \Omega^k(U)$ geschlossen, also $d\alpha = 0$.

(1) Da $H^k_{\mathrm{dR}}(U) = 0$ für alle $k \neq 0$, gilt $\ker d^k_U = \operatorname{im} d^{k-1}_U$. Also ist die Differentialgleichung $d\beta = \alpha$ in $\Omega^{k-1}(U)$ lösbar, aber nicht eindeutig. Seien etwa $\beta, \gamma \in \Omega^{k-1}(U)$ mit $d\beta = d\gamma = \alpha$ gegeben, dann ist $d(\gamma - \beta) = 0$. Für $k = 1$ folgt $\gamma = \beta + c$, wobei c eine konstante Funktion auf U darstellt. Für $k \geq 2$ folgt $\gamma = \beta + d\eta$ für eine beliebige $(k-2)$-Form η.

(2) Wir können eine Lösung von $d\beta = \alpha$ mit Hilfe von Satz 8.22 angeben. Sei nämlich $p_{x_0} \colon U \to U$ die konstante Abbildung auf den Punkt x_0 und H eine Homotopie von p_{x_0} zu id_U, dann setze

$$\beta = h\alpha = \int_0^1 \iota_{e_{n+1}} H^*\alpha \, dt\;.$$

Aus Satz 8.22 (1) und $d\alpha = 0$ folgt

$$d\beta = dh\alpha + h \underbrace{d\alpha}_{=0} = \mathrm{id}_U^*\,\alpha - \underbrace{p_{x_0}^*\alpha}_{=0} = \alpha\;,$$

wobei $p_{x_0}^*\alpha = 0$ für $k \geq 1$, da $(p_{x_0})' = 0$.

8.3. Untermannigfaltigkeiten mit Rand

In diesem Abschnitt erweitern wir die Kategorien $\mathcal{C}^\infty$ und $\mathcal{H}^\infty$ um glatte Untermannigfaltigkeiten mit Rand und ihre glatten Abbildungen. Wir lernen Tangentialvektoren und Differentialformen auf diesen Objekten kennen und definieren wieder die de Rham-Kohomologie. Viele Resultate aus dem letzten Abschnitt übertragen sich auf die neue Situation.

8.30. Definition. Es sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt m-dimensionale *$\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit mit Rand*, wenn zu jedem Punkt $x \in M$ eine Umgebung U von x in $\mathbb{R}^n$, eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ und ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus $\varphi \colon U \to V$ mit

$$U \cap M = \varphi^{-1}\bigl(V \cap \bigl((-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}\bigr)\bigr)$$

existiert. Solch ein φ heißt *Untermannigfaltigkeitskarte* von M um x. Der *Rand* von M ist definiert als

$$\partial M = \bigl\{x \in M \bigm| \varphi(x) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\} \text{ für eine } \\ \text{Untermannigfaltigkeitskarte } \varphi \text{ von } M \text{ um } x\bigr\} .$$

Eine (lokale) $\mathcal{C}^k$-*Parametrisierung* von M ist eine $\mathcal{C}^k$-Immersion $\psi\colon W \to M$ mit $W \subset (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1}$ offen, falls

$$\psi^{-1}(\partial M) = W \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} .$$

8.31. Bemerkung. (1) Es seien φ und ψ zwei Untermannigfaltigkeitskarten von M um x, ohne Einschränkung mit dem selben Definitionsbereich $U \subset \mathbb{R}^n$, und die erste Koordinate $\varphi_1(x)$ von $\varphi(x)$ sei negativ. Es folgt

$$\varphi^{-1}\bigl(B_r^{\mathbb{R}^m}(x) \times \{0\}\bigr) \subset U \cap M$$

für $r \in (0, -\varphi_1(x))$ klein genug, so dass $B_r(x) \subset \operatorname{im} \varphi$ und $B_r^{\mathbb{R}^m}(x) \subset (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$. Aber dann gilt auch

$$(\psi \circ \varphi^{-1})\bigl(B_r^{\mathbb{R}^m}(x) \times \{0\}\bigr) \subset (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\} .$$

Nun sind $\psi \circ \varphi^{-1}\colon \operatorname{im} \varphi \to \operatorname{im} \psi$ und die Einschränkung

$$\psi \circ \varphi^{-1} |_{B_r^{\mathbb{R}^m}(x) \times \{0\}} \colon B_r^{\mathbb{R}^m}(x) \to (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1}$$

lokale Diffeomorphismen. Insbesondere kann $\psi_1 \circ \varphi^{-1}|_{\mathbb{R}^m}$ bei $\varphi(x)$ kein lokales Maximum haben, denn dann wäre $(\psi_1 \circ \varphi^{-1}|_{\mathbb{R}^m})'(\varphi(x)) = 0$. Daher muss $\psi_1(x) = (\psi_1 \circ \varphi^{-1}(\varphi(x)) < 0$ gelten. Wir schließen umgekehrt, dass $\varphi_1(x) = 0$ genau dann, wenn $\psi_1(x) = 0$, also

$$\varphi(x) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\} \quad \Longleftrightarrow \quad \psi(x) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\} .$$

Es folgt für alle Untermannigfaltigkeitskarten, dass

$$\partial M \cap U = \varphi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}) .$$

(2) Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$, $\psi\colon U \to V$ wie oben. Aus (1) folgt, dass ∂M eine $(m-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist, denn um $x \in \partial M$ ist

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \\ \varphi_1(x) \end{pmatrix}$$

eine $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeitskarte von ∂M im Sinne von Definition 6.94.

(3) Jede Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ im Sinne von Definition 6.94 ist eine Untermannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = \emptyset$ im Sinne von Definition 8.30. Denn sei $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ Untermannigfaltigkeitskarte von M

um $x \in M \cap U$. Falls $\varphi_1(x) \geq 0$, wählen wir $x_0 > \varphi_1(x)$ und ersetzen φ durch die Abbildung

$$y \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(y) - x_0 \\ \varphi_2(y) \\ \vdots \\ \varphi_n(y) \end{pmatrix}$$

auf U. Sei also ohne Einschränkung $\varphi_1(x) < 0$, dann schränken wir φ ein auf die offene Umgebung $\varphi^{-1}((-\infty, 0) \times \mathbb{R}^{n-1})$ von x. Es folgt

$$M \cap \varphi^{-1}((-\infty, 0) \times \mathbb{R}^{n-1}) = \varphi^{-1}(((-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}) \cap V) ,$$

also ist die Einschränkung eine Untermannigfaltigkeitskarte im Sinne der neuen Definition, und es gilt

$$\begin{aligned} &\partial M \cap \varphi^{-1}((-\infty, 0) \times \mathbb{R}^{n-1}) \\ &\qquad = \varphi^{-1}(((-\infty, 0) \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\})) = \emptyset . \end{aligned}$$

(4) Aus (2) und (3) folgt $\partial(\partial M) = 0$ für alle Untermannigfaltigkeiten mit Rand.

(5) Zu jeder lokalen $\mathcal{C}^k$-Parametrisierung $\psi \colon W \to \mathbb{R}^n$ von M und jedem $y \in W$ lässt sich analog zu Bemerkung 7.84 eine Untermannigfaltigkeitskarte $\varphi \colon U \to V$ um $x = \psi(y)$ mit

$$\psi|_{V \cap W} = \bigl(\psi|_{U \cap M}\bigr)^{-1} \colon V \cap W \to U \cap M$$

konstruieren. Außerdem ist stets

$$\psi|_{V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1})}$$

eine lokale $\mathcal{C}^k$-Parametrisierung des Randes ∂M.

8.32. Bemerkung. (1) Es sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatt und $c \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von f. Dann ist

$$M = f^{-1}((-\infty, c]) \subset \mathbb{R}^n$$

eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand

$$\partial M = f^{-1}(\{c\}) .$$

Denn für $x \in M$ mit $f(x) < c$ sei $U = f^{-1}((-\infty, c))$, dann ist id_U eine Untermannigfaltigkeitskarte von M um x im Sinne der alten Definition 6.94, und wir können wie in Bemerkung 8.31 (3) fortfahren.

Falls $f(x) = c$ gilt, konstruieren wir wie im Beweis des Satzes 6.96 vom regulären Wert eine Karte φ der Gestalt

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} f(x) - c \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_j \end{pmatrix}$$

auf einer geeigneten Umgebung U von x, wobei wir $j \in \{1, \dots, n\}$ so wählen, dass $\partial_j f(x) \neq 0$. Dann gilt wieder $\varphi_1(y) \leq 0$ genau dann, wenn $f(y) \leq c$, also $y \in M$ für alle $y \in U$.

(2) Wir können die Konstruktion in (1) mit Bemerkung 8.31 (3) kombinieren. Sei dazu $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatt, so dass c ein regulärer Wert von $f|_M$ ist, wie etwa in der Lagrangeschen Multiplikatorregel 6.98 , siehe auch Definition 8.37 unten. Dann ist

$$N = f^{-1}((-\infty, c]) \cap M$$

eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand

$$\partial N = f^{-1}(\{c\}) \cap M .$$

Dazu behandeln wir Punkte in $N \setminus \partial N$ wie in Bemerkung 8.31 (3), und für Punkte $x \in \partial N$ und eine Untermannigfaltigkeitskarte φ von M um x konstruieren wir eine Karte

$$y \mapsto \begin{pmatrix} f(y) - c \\ \varphi_1(y) \\ \vdots \\ \varphi_{j-1}(y) \\ \varphi_{j+1}(y) \\ \vdots \\ \varphi_n(y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

wie oben mit $1 \leq j \leq m$ und $\partial_j f \neq 0$, gegebenenfalls nach Verkleinern von U. Das ist möglich, da c regulärer Wert von $f|_M$ ist, siehe unten. Ein Punkt $y \in U$ bildet genau dann nach $(-\infty] \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ ab, wenn $f(y) \leq c$ und $\varphi_{m+1}(y) = \dots = \varphi_n(y)$, also $y \in M$ gilt.

(3) 8.32.3 Sei schließlich $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit mit Rand und $A \subset M$ abgeschlossen, dann ist auch $M \setminus A$ eine Untermannigfaltigkeit mit Rand, da jeder Punkt $x \in M \setminus A$ eine Untermannigfaltigkeitskarte $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ besitzt, die wir auf $U \setminus A$ einschränken können. Insbesondere können wir stets Teile des Randes weglassen.

8.33. Beispiel. (1) Die Menge $(0,1) \times [0,1] \subset \mathbb{R}^n$ ist Untermannigfaltigkeit mit Rand $(0,1) \times \{0,1\}$, nicht jedoch $(0,1] \times (0,1]$, da wir um den Punkt $(1,1)$ herum keine Untermannigfaltigkeitskarte konstruieren können.

(2) Die obere Halbkugel

$$\left\{ x \in S^n \;\middle|\; x_{n+1} \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

ist Untermannigfaltigkeit mit Rand $S^{n-1} \times \{0\}$.

(3) Auch

$$\left\{ x \in S^n \;\middle|\; x_{n+1} \geq 0 \text{ und } x_n > 0 \text{ falls } x_{n+1} = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

ist Untermannigfaltigkeit, diesmal mit Rand

$$\left\{ x \in S^{n-1} \times \{0\} \;\middle|\; x_n > 0 \right\} .$$

Als nächstes wollen wir Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten mit Rand betrachten. Wir erinnern uns, dass M die Unterraumtopologie aus Definition 6.9 trägt, somit können wir stetige Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten mit Rand definieren. Um differenzierbare Abbildungen zu definieren, verwenden wir Parametrisierungen, da wir noch nicht wissen, wie man Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten ableitet.

8.34. Definition. Es sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, und $M \subset \mathbb{R}^p$, $N \subset \mathbb{R}^q$ seien $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeiten der Dimension m beziehungsweise n mit Rand. Eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung von M nach N ist eine stetige Abbildung $F\colon M \to N$, so dass zu jedem Punkt $x \in M$ eine $\mathcal{C}^k$-Parametrisierung $\psi\colon W \to M \subset \mathbb{R}^p$ mit $x \in \operatorname{im} \psi$ existiert, so dass $F \circ \psi\colon W \to N$, aufgefasst als Abbildung nach $\mathbb{R}^q$, k-fach stetig differenzierbar ist. Man nennt $\mathcal{C}^\infty$-Abbildungen auch *glatte Abbildungen*. Die Menge aller $\mathcal{C}^k$-Abbildungen von M nach N wir mit $\mathcal{C}^k(M,N)$ bezeichnet.

8.35. Bemerkung. (1) Auf die Wahl der Parametrisierung $\psi\colon W \to M$ kommt es in der obigen Definition nicht an. Sei nämlich $\chi\colon V \to M$ eine weitere Parametrisierung, dann dürfen wir nach Einschränken von ψ, χ annehmen, dass ψ injektiv ist und $\operatorname{im} \psi = \operatorname{im} \chi$. Wie in Bemerkung 7.86 (2) ist $\psi^{-1} \circ \chi\colon V \to W$ ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus. Sei $F\colon M \to N \subset \mathbb{R}^q$ stetig, dann betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, equal] & M \arrow[r, "F"] & N \\ V \arrow[u, "\chi"] \arrow[r, "\psi^{-1}\circ\chi"] & W \arrow[u, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Es ist $F \circ \psi \in \mathcal{C}^k(W; \mathbb{R}^q)$ genau dann, wenn

$$F \circ \chi = (F \circ \psi) \circ (\psi^{-1} \circ \chi) \in \mathcal{C}^k(V; \mathbb{R}^q) .$$

(2) Es seien $F\colon M \to N$, $\psi\colon W \to M$ und $x \in \operatorname{im} \psi$ wie oben, und $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^q$ sei eine $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeitskarte von N um $F(x)$. Nach Einschränken von ψ gelte $F(x) \in \operatorname{im}(F \circ \psi) \subset U$. Da

$$\operatorname{im}(\varphi \circ F \circ \psi) \subset \operatorname{im} \varphi|_{U \cap N} = V \cap ((-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) ,$$

dürfen wir $\varphi \circ F \circ \psi$ als Abbildung von W nach $V \cap ((-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^n$ auffassen. Da φ ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus ist, ist $F \circ \psi \in \mathcal{C}^k(W, \mathbb{R}^q)$ genau dann, wenn $\varphi \circ F \circ \psi \in \mathcal{C}^k(W, \mathbb{R}^n)$, betrachte dazu

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "F"] & N \arrow[d, "\varphi"'] \\ W \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "\varphi\circ F\circ\psi"] & V . \end{tikzcd}$$

(3) Es seien $M \subset \mathbb{R}^p$, $N \subset \mathbb{R}^q$ und $L \subset \mathbb{R}^r$ $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeiten mit Rand, und $F\colon M \to N$, $G\colon L \to M$ seien $\mathcal{C}^k$-Abbildungen. Wir wollen zeigen, dass $F \circ G \in \mathcal{C}^k(L; N)$. Dazu sei $x \in L$, $\psi\colon V \to L$ eine $\mathcal{C}^k$-Parametrisierung mit $x \in \operatorname{im} \psi$, und $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^p$ eine $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeitskarte von M um den Punkt $G(x)$. Es sei $W =$

$\operatorname{im}\varphi \cap ((-\infty,0] \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\})$ und $\chi = \varphi^{-1}|_W \colon W \to M$ die zu φ gehörige Parametrisierung. Wir dürfen $\operatorname{im}\psi \subset U$ annehmen. Betrachte

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "G"] & M \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "\varphi"'] & N \\ V \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "\varphi\circ G\circ\psi"] & W \arrow[u, shift right, "\chi"'] & \end{tikzcd}$$

Dann gilt

$$(F \circ G) \circ \psi = \underbrace{(F \circ \chi)}_{\in \mathcal{C}^k(W;\mathbb{R}^q)} \circ \underbrace{(\varphi \circ G \circ \psi)}_{\in \mathcal{C}^k(V;W)} \in \mathcal{C}^k(V;\mathbb{R}^q)\ ,$$

und da das um jeden Punkt $x \in L$ geht, ist $F \circ G$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung.

(4) Wir erweitern unsere Kategorie $\mathcal{C}^\infty$ und betrachten die Menge

$$\{M \subset \mathbb{R}^n \mid n \in \mathbb{N}, M \text{ glatte Untermannigfaltigkeit mit Rand}\}$$

von Objekten, die auch alle offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$ umfasst. Für zwei Objekte M, N setzen wir wieder $\hom_{\mathcal{C}^\infty}(M,N) = \mathcal{C}^\infty(M;N)$. Nach (3) können wir $\mathcal{C}^\infty$-Abbildungen verketten, und die Axiome (1) und (2) aus Definition 8.8 sind erfüllt.

Man beachte, dass das Bilden des Randes *kein* Funktor von $\mathcal{C}^\infty$ nach $\mathcal{C}^\infty$ ist, da eine glatte Abbildung $F\colon M \to N$ im allgemeinen den Rand ∂M nicht auf ∂N abbildet.

8.36. Bemerkung. Wir geben einige Beispiele von $\mathcal{C}^k$-Abbildungen.

(1) Es sei $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeitskarte von $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $U \cap M$ ebenfalls eine $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit mit Rand, und die Einschränkung

$$\varphi|_{U\cap M}\colon U \cap M \to W = V \cap ((-\infty,0] \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\})$$

ist ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus. Man nennt $\varphi|_{U\cap M}$ auch *Karte* von M (anders als in Definition 6.94), und ihr Inverses, die Parametrisierung $\psi = (\varphi|_{U\cap M})^{-1}$ ist ebenfalls ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus.

(2) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit mit Rand. Dann sind die Inklusionen $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $\partial M \hookrightarrow M$ und $\partial M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^k$-Abbildungen.

Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten mit Rand sind glatte alternierende Multilinearformen auf dem Raum der Tangentialvektoren. Wir müssen also zunächst Tangentialvektoren einführen. Sei also $k \geq 1$, $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit mit Rand, $x \in M$ und $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeitskarte von M um x. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt tangential an M im Punkt x, wenn

$$\varphi'_x(v) = \varphi'(x) \cdot v \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n\ .$$

Dieser Begriff hängt nicht von der Wahl von φ ab, denn sei ψ eine weitere $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeitskarte von M um p, ohne Einschränkung mit dem gleichen

Definitionsbereich U, dann betrachte

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi"'] & U \arrow[d, "\psi"] \\ \operatorname{im}\varphi \arrow[r, "\psi\circ\varphi^{-1}"] & \operatorname{im}\psi\,. \end{tikzcd}$$

Es gilt

$$\psi'_x(v) = ((\psi\circ\varphi^{-1})\circ\varphi)'_x(v) = (\psi\circ\varphi^{-1})'_{\varphi(x)}(\varphi'_x(v))$$

nach der Kettenregel. Der $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus $\psi\circ\varphi^{-1}$ bildet $\varphi(U)\cap((-\infty,0]\times\mathbb{R}^{m-1}\times\{0\})$ auf $\psi(U)\cap((-\infty,0]\times\mathbb{R}^{m-1}\times\{0\})$ ab, somit bildet $(\psi\circ\varphi^{-1})'_{\varphi(x)}$ Vektoren aus $\mathbb{R}^m\times\{0\}$ wieder nach $\mathbb{R}^m\times\{0\}$ ab, und es folgt

$$\varphi'_x(v)\in\mathbb{R}^m\times\{0\} \quad\longleftrightarrow\quad \psi'_x(v)\in\mathbb{R}^m\times\{0\}\,.$$

Da φ_x linear ist, bilden die Tangentialvektoren einen Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Sei $\chi\colon W\to M$ eine lokale Parametrisierung von M, etwa $\chi=(\varphi|_{U\cap M})^{-1}$, dann ist $\operatorname{im}\chi'_y$ der Raum der tangentialen Vektoren an M im Punkt $\chi(y)\in M$.

8.37. Definition. Es sei $M\subset\mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit mit Rand und $\varphi\colon U\to\mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeitskarte von M um $x\in M$. Dann heißt

$$T_xM=(\varphi'_x)^{-1}(\mathbb{R}^m\times\{0\})\subset\mathbb{R}^n$$

der *Tangentialraum* von M im Punkt x, und die Elemente $v\in T_xM$ heißen *Tangentialvektoren*.

Es sei $F\colon M\to N$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung und ist $\psi=(\varphi|_{U\cap M})^{-1}\colon W\to\mathbb{R}^n$ die zu φ gehörige Parametrisierung, dann ist die *Ableitung* $F_{*x}\colon T_xM\to T_{F(x)}N$ definiert durch

$$F_{*x}(v)=(F\circ\psi)'_{\varphi(x)}(\varphi'_x(v))\,.$$

Ein Punkt $x\in M$ heißt *regulärer Punkt* von F wenn $F_{*x}\colon T_xM\to T_{F(x)}M$ surjektiv ist, und *singulärer* oder *kritischer Punkt* sonst. Ein Punkt $y\in N$ heißt *regulärer Wert* von F, wenn alle $x\in F^{-1}(\{y\})$ reguläre Punkte sind, und *singulärer* oder *kritischer Wert* sonst.

Die Bezeichnungen „regulär“, „singulär“ und „kritisch“ entsprechen genau denen in Definition 6.92.

8.38. Bemerkung. Es seien M, N und $F\colon M\to N$ wie oben.

(1) Es sei $x\in\partial M$. Dann gibt es zwei verschiedene Tangentialräume im Punkt x, nämlich

$$T_x(\partial M)\subset T_xM\subset\mathbb{R}^n\,,$$

mit $\dim T_x(\partial M)=m-1$ und $\dim T_xM=m$.

(2) Nach Definition 8.37 ist $\varphi'_x(v) \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^p$. Die Abbildung $F \circ \psi$ bildet von $W = \operatorname{im} \varphi \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$ nach $N \subset \mathbb{R}^q$ ab. Also ist $w = (F \circ \psi)'_{\varphi(x)}(\varphi'_x(v)) \subset \mathbb{R}^q$ definiert. Um zu zeigen, dass $w \in T_{F(x)}N$, wählen wir eine Untermannigfaltigkeitskarte $\vartheta \colon V \to \mathbb{R}^q$ von N um $F(x)$. Gegebenenfalls nach Verkleinern von U und W dürfen wir annehmen, dass $x \in U$ und $(F \circ \psi)(W) \subset V \cap N$. Betrachte

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "\varphi"'] & N \arrow[d, "\vartheta"] \\ W \arrow[u, shift right, "\psi"'] \arrow[r, "\vartheta\circ F\circ\psi"] & \mathbb{R}^n \times \{0\} \;. \end{tikzcd}$$

Insbesondere bildet $\vartheta \circ F \circ \varphi$ nach $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^q$ ab. Aus der Kettenregel 6.57 folgt

$$\begin{aligned} \vartheta'_{F(x)}(w) &= \big(\vartheta'_{F(x)} \circ (F \circ \psi)'_{\varphi(x)}\big)(\varphi'_x(v)) \\ &= (\vartheta \circ F \circ \psi)'_{\varphi(x)}(\varphi'_x(v)) \in \mathbb{R}^n \times \{0\} \;, \end{aligned}$$

somit $w \in T_{F(x)}N$. Insbesondere erhalten wir tatsächlich eine Abbildung $F_{*x} T_x M \to T_{F(x)}N$, und diese ist linear als Verkettung linearer Abbildungen.

(3) Als nächstes müssen wir zeigen, dass F_{*x} nicht von der Wahl der Untermannigfaltigkeitskarte φ abhängt. Sei also χ eine weitere Untermannigfaltigkeitskarte von M um x, ohne Einschränkung mit dem gleichen Definitionsbereich. Dann ist $\chi \circ \varphi^{-1} \colon \operatorname{im} \varphi \to \operatorname{im} \chi$ ein Diffeomorphismus, der $\operatorname{im} \varphi \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$ diffeomorph auf $\operatorname{im} \chi \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$ abbildet. Es seien $\psi = (\varphi|_{U \cap M})^{-1}$ und $\vartheta = (\chi|_{U \cap M})^{-1}$. Betrachte

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, equal] \arrow[d, shift right, "\varphi"'] & M \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "\chi"'] & N \\ W \arrow[u, shift right, "\psi"'] \arrow[r, "\chi\circ\varphi^{-1}"] & V \arrow[u, shift right, "\vartheta"'] & \end{tikzcd}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} (F \circ \vartheta)'_{\chi(x)}(\chi'_x(v)) = \big((F \circ \psi)'_{\varphi(x)} \circ (\varphi \circ \chi^{-1})'_{\chi(x)}\big)& \\ \big((\chi \circ \varphi^{-1})'_{\varphi(x)}(\varphi'_x(v))\big) &= (F \circ \psi)'_{\varphi(x)}(\varphi'_x(v)) \;, \end{aligned}$$

und die Definition der Ableitung hängt nicht von der Wahl von φ ab.

(4) Für die Ableitung gilt eine Kettenregel. Seien dazu $F \colon M \to N$ und $G \colon L \to M$ $\mathcal{C}^k$-Abbildungen, seien $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^p$, $\chi \colon V \to \mathbb{R}^q$ Untermannigfaltigkeitskarten von L um x beziehungsweise von M um $G(x)$, und seien $\psi = (\varphi|_{U \cap L})^{-1} \colon W \to L$ und $\vartheta = (\chi|_{V \cap M})^{-1} \colon Z \to M$ die zugehörigen Parametrisierungen. Betrachte

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "G"] \arrow[d, shift right, "\varphi"'] & M \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "\chi"'] & N \\ W \arrow[u, shift right, "\psi"'] \arrow[r, "\chi\circ\varphi^{-1}"] & Z \arrow[u, shift right, "\vartheta"'] & \end{tikzcd}$$

Dann folgt aus der Kettenregel wie in Bemerkung 8.35 (3), dass

$$\begin{aligned}(F\circ G)_{*x}(v) &= \big((F\circ G\circ\psi)'_{\varphi(x)}\circ\varphi'_x\big)(v)\\ &= \big((F\circ\vartheta)'_{\chi(G(x))}\circ\chi'_{G(x)}\circ(G\circ\psi)'_{\varphi(x)}\circ\varphi'_x\big)(v)\\ &= (F_{*G(x)}\circ G_{*x})(v)\ .\end{aligned}$$

(5) Es seien jetzt $f\colon M\to\mathbb{R}$ und $F\colon N\to M$ glatte Abbildungen. Wir können bereits die totale Ableitung df mit

$$df_x\in(T_xM)^*=\Lambda^1T_xM \text{ und } df_x(v)=f_{*x}(v)$$

für alle $x\in M$ und alle $v\in T_xM$ definieren, und wir können df mit F nach N zurückziehen zu

$$(F^*df)_y=df_{F(y)}\circ F_{*x}=d(f\circ F)_x\ .$$

Wir können jetzt Diferentialformen auf Untermannigfaltigkeiten definieren. Da wir in Abschnitt 8.2 Wert auf Funktorialität gelegt haben, erhalten wir mit wenig zusätzlicher Arbeit auch die äußere Ableitung und die de Rham-Kohomologie in diesem Kontext.

8.39. Definition. Eine *alternierende Differentialform* α vom Grad k, kurz *k-Form*, auf einer $\mathcal{C}^\ell$-Untermannigfaltigkeit $M\subset\mathbb{R}^n$ mit Rand mit $\ell\le 1$ ordnet jedem Punkt $x\in M$ eine alternierende Multilinearform $\alpha_x\in\Lambda^kT_xM$ zu. Es sei $F\colon N\to M$ eine $\mathcal{C}^\ell$-Abbildung, dann ist die zurückgeholte k-Form $F^*\alpha$ auf N definiert durch

$$(F^*\alpha)_y=(F_{*y})^*\alpha_{F(y)}\ .$$

Eine k-Form α auf einer $\mathcal{C}^\infty$-Untermannigfaltigkeit M mit Rand heißt *glatt*, wenn zu jedem $x\in M$ eine lokale $\mathcal{C}^\infty$-Parametrisierung $\psi\colon W\to M$ existiert, so dass $\psi^*\alpha$ glatt ist. Der Raum der glatten k-Formen auf M wird mit $\Omega^k(M)$ bezeichnet, und wir setzen $\Omega^\bullet(M)=\oplus_{k\in\mathbb{Z}}\Omega^k(M)$.

8.40. Bemerkung. (1) Auf die Wahl der $\mathcal{C}^\infty$-Parametrisierung $\psi\colon W\to M$ kommt es wie immer nicht an. Sei $\chi\colon V\to M$ eine weitere Parametrisierung, ohne Beschränkung mit $\operatorname{im}\psi=\operatorname{im}\chi$, und sei ψ injektiv, dann ist $\psi^{-1}\circ\chi\colon V\to W$ ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus. Betrachte

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, equal] & M \\ V \arrow[u, "\chi"] \arrow[r, "\psi^{-1}\circ\chi"] & W\ . \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Aus der Kettenregel aus Bemerkung 8.38 (4) folgt

$$\begin{aligned}(\chi^*\alpha)_y &= \big(\psi_{*(\psi^{-1}\circ\chi)(y)}\circ(\psi^{-1}\circ\chi)_{*y}\big)^*\alpha_{\chi(y)}\\ &= \big((\psi^{-1}\circ\chi)_{*y}\big)^*\big((\psi_{*(\psi^{-1}\circ\chi)(y)})^*\alpha_{\chi(y)}\big)=\big((\psi^{-1}\circ\chi)^*(\psi^*\alpha)\big)_y\ ,\end{aligned}$$

also ist $\chi^*\alpha=(\psi^{-1}\circ\chi)^*(\psi^*\alpha)$ genau dann glatt, wenn $\psi^*\alpha$ glatt ist.

(2) Der Raum $\Omega^\bullet(M)$ ist ein reeller Vektorraum, und für glatte Abbildungen $F\colon N \to M$ ist $F^*\colon \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(N)$ linear. Aus Bemerkung 8.38 (4) folgt für F wie oben und $G\colon M \to L$ wie in (1), dass

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*\colon \Omega^\bullet(L) \to \Omega^\bullet(N) \;.$$

Also können wir den Funktor $\Omega^\bullet$ aus Bemerkung 8.13 zu einem kontravarianten Funktor auf unserer neuen Kategorie $\mathcal{C}^\infty$ aus Bemerkung 8.35 (4) ausdehnen.

Wir hatten df für $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ bereits in Bemerkung 8.38 (5) definiert. Jetzt erklären wir die äußere Ableitung $d_M^k\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$. Wir erklären das Dachprodukt wieder durch

$$(\alpha \wedge \beta)_x = \alpha_x \wedge \beta_x \text{ für alle } \alpha, \beta \in \Omega^\bullet(M) \text{ und alle } x \in M \;.$$

8.41. Satz. *Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ und alle $\mathcal{C}^\infty$-Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$ mit Rand existiert genau eine Abbildung $d_M^k\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ mit den Eigenschaften* (1) – (4) *aus Satz 8.14.*

Beweis. Durch Satz 8.14 ist d_U^k für offene Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^m$ bereits eindeutig bestimmt. Die gleichen Argumente legen d_W^k auf offenen Teilmengen $W \subset (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1}$ eindeutig fest, und Formel $(*)$ aus dem Beweis von Satz 8.14 gilt unverändert.

Sei nun M eine Untermannigfaltigkeit mit Rand und $\psi\colon W \to M$ eine Parametrisierung, dann folgt aus der Natürlichkeit (4), dass

$$\psi^*(d_M^k \alpha) = d_W^k(\psi^* \alpha) \;.$$

Da $\psi_{*y}\colon \mathbb{R}^m \to T_{\psi(y)}M$ für alle $y \in W$ ein linearer Isomorphismus ist, ergibt sich die Eindeutigkeit von $d_M^k \alpha$.

Es bleibt zu zeigen, dass $d_M^k \alpha$ wohldefiniert ist und die Eigenschaften (1) – (4) besitzt. Seien etwa $\psi\colon W \to M$, $\chi\colon V \to M$ zwei Parametrisierungen wie in Bemerkung 8.40 (1), dann folgt aus Satz 8.14 (4), dass

$$\begin{aligned} \chi^*(d_M^k \alpha) &= (\psi^{-1} \circ \chi)^*(\psi^*(d_M^k \alpha)) = (\psi^{-1} \circ \chi)^*(d_W^k(\psi^* \alpha)) \\ &= d_V^k((\psi^{-1} \circ \chi)^*(\psi^* \alpha)) = d_V^k(\chi^* \alpha) \;. \end{aligned}$$

Ähnlich beweist man die Natürlichkeit (4), dazu sei $F\colon N \to M$ glatt und $\chi\colon V \to N$ jetzt Parametrisierung von N, ohne Einschränkung mit $\operatorname{im}(F \circ \chi) \subset \operatorname{im} \psi$. Wir nehmen an, dass $\psi = (\varphi|_{U \cap M})^{-1}$ für eine Untermannigfaltigkeitskarte $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ von M. Betrachte

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "F"] & M \arrow[d, shift right, "\varphi"'] \\ V \arrow[u, "\chi"] \arrow[r, "\varphi \circ F \circ \psi"] & W \arrow[u, shift right, "\psi"'] \end{tikzcd} \;.$$

Aus Bemerkung 8.35 (2) folgt

$$\begin{aligned}\chi^*(F^* d_M^k \alpha) &= (\psi \circ \varphi \circ F \circ \chi)^*(d_M^k \alpha) = (\underbrace{\varphi \circ F \circ \chi}_{V \to W})^*(\psi^* d_M^k \alpha)\\ &= (\varphi \circ F \circ \chi)^*(d_W^k(\psi^*\alpha)) = d_V^k((\varphi \circ F \circ \chi)^*(\psi^*\alpha))\\ &= d_V^k(\chi^*\alpha) = \chi^*(d_N^k(F^*\alpha)) \;.\end{aligned}$$

Um (1) nachzuweisen, sei $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, und es gelte $\psi = (\varphi|_{U\cap M})^{-1}$ wie oben. Für die totale Ableitung df an der Stelle $x \in M$ und $v \in T_xM$ gilt dann

$$df_x(v) = (f \circ \psi)'_{\varphi(x)}(\varphi'_x(v)) = (d_W^0(f \circ \psi))_{\varphi(x)}(\varphi'_x(v)) \;,$$

es folgt

$$\begin{aligned}(\psi^* df)_y(w) &= (d_W^0(f \circ \psi))_{\varphi(\psi(y))}(\varphi'_{\psi(y)}(\psi'_y w))\\ &= (\psi^* d_M^0 f)_y(w) \;.\end{aligned}$$

Die Eigenschaften (2) und (3) folgen wieder aus Satz 8.14:

$$\begin{aligned}\psi^*(d_M^{k+1}(d_M^k\alpha)) &= d_W^{k+1}(d_W^k(\psi^*\alpha)) = 0 \;,\\ \psi^*(d_M^{k+\ell}(\alpha \wedge \beta)) &= d_W^{k+\ell}(\psi^*\alpha \wedge \psi^*\beta)\\ &= (d_W^k(\psi^*\alpha)) \wedge \psi^*\beta + (-1)^k \psi^*\alpha \wedge (d_W^\ell(\psi^*\beta))\\ &= \psi^*((d_M^k\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d_M^\ell \beta))\end{aligned}$$

für alle $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^\ell(M)$. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

8.42. Definition. Die Abbildung $d_M^k \colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ aus Satz 8.41 heißt *äußere Ableitung*, der Komplex $(\Omega^\bullet(M), d_M^\bullet)$ der *de Rham-Komplex*, und $H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M) = H^\bullet(\Omega^\bullet(U), d_U^\bullet)$ die *de Rham-Kohomologie* von M.

8.43. Bemerkung. Bemerkung 8.18 gilt analog, insbesondere erhalten wir zwei kontravariante Funktoren von unserer neuen Kategorie $\mathcal{C}^\infty$ aus Bemerkung 8.35 (4) nach $\mathcal{C}h^\bullet_{\mathbb{R}}$, die eine Untermannigfaltigkeit M mit Rand auf $(\Omega^\bullet(M), d_M^\bullet)$ beziehungsweise $H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M)$ abbilden. Indem wir das Dachprodukt mit hinzunehmen, erhalten wir Funktoren in die Kategorie der $\mathbb{R}$-Algebren.

8.44. Definition. Es seien $M \subset \mathbb{R}^p$, $N \subset \mathbb{R}^q$ offen und $F, G \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$. Eine *glatte Homotopie* von F nach G ist eine glatte Abbildung $H \in \mathcal{C}^\infty(N \times [0,1], M)$ mit

$$H(y,0) = F(y) \qquad \text{und} \qquad H(y,1) = G(y)$$

für alle $y \in N$. Zwei Abbildungen F, $G \in \mathcal{C}^\infty(N,M)$ heißen glatt *homotop*, kurz $F \sim G$, wenn eine glatte Homotopie von F nach G existiert.

8.45. Bemerkung.
(1) Wie in Bemerkung 8.21 (1) zeigt man wieder, dass homotop zu sein eine Äquivalenzrelation ist. Ihre Äquivalenzklassen heißen glatte Homotopieklassen.
(2) Seien jetzt F, $G \in \mathcal{C}^\infty(V,U)$ und D, $E \in \mathcal{C}^\infty(W,V)$ jeweils homotop zueinander, dann sind auch $F \circ D$ und $G \circ E$ homotop zueinander wie in Bemerkung 8.21 (2). Also ist die Äquivalenzrelation aus (1) verträglich mit der Verkettung glatter Abbildungen.

(3) Wegen (1) und (2) können wir unsere Kategorie $\mathcal{H}^\infty$ aus 8.21 (3) erweitern um glatte Untermannigfaltigkeiten als Objekte, und Homotopieklassen glatter Abbildungen als Morphismen. Dann gibt es wieder einen Funktor von $\mathcal{C}^\infty$ nach $\mathcal{H}^\infty$, der jedes Objekt M auf sich selbst und jeden Morphismus $F \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$ auf seine Homotopieklasse $[F]$ abbildet. Wenn $[F] \in \hom_{\mathcal{H}^\infty}(N, M)$ ein Isomorphismus ist, nennen wir $F \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$ nach wie vor eine *glatte Homotopieäquivalenz*.

Wenn $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit mit Rand $\partial M \neq \emptyset$ ist, bilden die Punkte in $\partial M \times \{0,1\}$ Kanten in $M \times [0,1]$, so dass $M \times [0,1] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ selbst keine Untermannigfaltigkeit mit Rand mehr darstellt. Dennoch können wir glatte Abbildungen und Differentialformen auf $M \times [0,1]$ wie gehabt betrachten.

Für alle $(x,t) \in M \times [0,1]$ im Tangentialraum gilt

$$e_{n+1} \in T_{(x,t)}(M \times [0,1]) = T_x M \oplus \mathbb{R} e_{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

unabhängig von $t \in [0,1]$, und wir können

$$\begin{aligned} \iota_{e_{n+1}} \colon \Omega^k(M \times [0,1]) &\to \Omega^{k-1}(M \times [0,1]) \\ \int_0^1 \cdot \, dt \colon \Omega^k(M \times [0,1]) &\to \Omega^k(M) \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ wie in Abschnitt 8.2 definieren.

Wir erinnern uns an den Begriff der Koketten-Homotopie aus Satz 8.22 (1).

8.46. Satz (Homotopieinvarianz der de Rham-Kohomologie III). *Es seien $M \subset \mathbb{R}^p$, $N \subset \mathbb{R}^q$ glatte Untermannigfaltigkeiten mit Rand und $H \in \mathcal{C}^\infty(N \times [0,1]; M)$ eine glatte Homotopie zwischen F, $G \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$. Definiere $h^k \colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(N)$ durch*

$$h^k \alpha = \int_0^1 \iota_{e_{q+1}} H^* \alpha \, dt ,$$

dann gilt:

(1) *die Familie $h^\bullet$ ist eine Koketten-Homotopie zwischen F^* und $G^* \colon \Omega^k(M) \to \Omega^k(N)$;*
(2) *es gilt $F^* = G^* \colon H^k_{\mathrm{dR}}(M) \to H^k_{\mathrm{dR}}(N)$;*
(3) *wenn $F \colon M \to N$ eine Homotopieäquivalenz ist, dann ist $F^* \colon H^k_{\mathrm{dR}}(M) \to H^k_{\mathrm{dR}}(N)$ ein linearer Isomorphismus für alle $k \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Es reicht, Aussage (1) zu zeigen, dann folgen (2) und (3) wie Satz 8.22 und Folgerung 8.25.

Zu (1) wählen wir eine Parametrisierung $\psi \colon W \to N$ von N und betrachten $\overline{\psi} \colon W \times [0,1] \to N \times [0,1]$ als Parametrisierung von $N \times [0,1]$, mit

$$\overline{\psi}(y,t) = (\psi(y), t) \in N \times [0,1] .$$

Man überzeugt sich leicht, dass

$$\overline{\psi}^* \iota_{e_{q+1}} \alpha = \iota_{e_{q+1}} \overline{\psi}^* \alpha \qquad \text{und} \qquad \psi^* \int_0^1 \alpha \, dt = \int_0^1 \overline{\psi}^* \alpha \, dt$$

für alle $\alpha \in \Omega^\bullet(M \times [0,1])$. Daher gilt

$$\psi^* h^k \alpha = \int_0^1 \iota_{e_{q+1}} \overline{\psi}^* \circ H^* \alpha \, dt = \int_0^1 \iota_{e_{q+1}} (H \circ \overline{\psi})^* \alpha \, dt \, .$$

Die Abbildung $H \circ \overline{\psi}$ ist eine Homotopie zwischen $F \circ \psi$ und $G \circ \psi$. Aus Satz 8.22 (1) und Satz 8.41 (4) folgt

$$\psi^*(d_N^{k-1} h^k \alpha + h^{k+1} d_M^k \alpha) = (G \circ \psi)^* \alpha - (F \circ \psi)^* \alpha = \psi^*(G^* \alpha - F^* \alpha) \, .$$

Da $\psi^* \colon \Lambda^\bullet T_{\psi(y)} N \to \Lambda^\bullet \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus ist, folgt Behauptung 1. □

8.4. Integration von Differentialformen

Wir verallgemeinern das Kurvenintegral aus Abschnitt 6.6 zu einem Integral von m-Formen über m-dimensionale Untermannigfaltigkeiten mit Rand. Dazu benötigen wir auch einen Orientierungsbegriff.

8.47. Bemerkung. Es sei zunächst $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\alpha \in \Omega^n(U)$. Wir schreiben

$$\alpha_x = a_{1,\dots,n}(x) \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \alpha_x(e_1, \dots, e_n) \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

und nennen α integrierbar, falls das Integral

$$\int_U \alpha = \int_U \alpha_x(e_1, \dots, e_n) \, d\lambda^n(x) \in \mathbb{R}$$

existiert und endlich ist. Hier ist $d\lambda^n$ das Lebesgue-Maß aus Definition 7.26. Sei jetzt $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \colon V \to U$ ein Diffeomorphismus, dann folgt aus der Transformationsformel 7.81 und Bemerkung 8.7 (5), dass

$$\begin{aligned}
\int_V F^* \alpha &= \int_V ((F_{*y})^* \alpha_{F(y)})(e_1, \dots, e_n) \, d\lambda^n(y) \\
&= \int_V \det(F'_y) \alpha_{F(y)}(e_1, \dots, e_n) \, d\lambda^n(y) \\
&= \int_{F(V)} \operatorname{sign}(\det F'_{F^{-1}(x)}) \, \alpha_x(e_1, \dots, e_n) \, d\lambda^n(x) \\
&= \int_U \operatorname{sign}((\det F') \circ F^{-1}) \, \alpha \, .
\end{aligned}$$

Insbesondere ist das Integral einer n-Form invariant unter Zurückholen mit einem Diffeomorphismus, falls dieser positive Jacobi-Determinante hat. Das liegt daran, dass die Jacobi-Determinante in der Transformationsformel als Betrag eingeht, in Bemerkung 8.7 (5) jedoch mit ihrem Vorzeichen.

Wenn wir über Untermannigfaltigkeiten integrieren wollen, müssen wir zunächst Orientierungen auf den einzelnen Tangentialräumen geeignet festlegen. Anschließend können wir dann bezüglich einer Parametrisierung integrieren.

8.48. Definition. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum. Eine *Orientierung* von V ist eine Menge $o \subset V^n$ von Basen von V, so dass für je zwei Basen $(v_1, \dots, v_n)$ und $(w_1, \dots, w_n)$ mit $w_i = \sum_j a_{ij} v_i$ gilt:

(1) wenn $\det((a_{ij})_{i,j}) < 0$, dann liegt genau eine der beiden Basen in o.

Basen in o heißen *positiv* (*orientiert*).

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand. Eine *Orientierung* o von M ordnet jedem Punkt $x \in M$ eine Orientierung o_x von T_xM mit folgender Eigenschaft zu:

(2) Zu jedem $x \in M$ existiert eine Parametrisierung $\psi\colon W \to M$ mit $x \in \operatorname{im}\psi$, so dass die Basis
$$(\psi_{*y}e_1, \dots, \psi_{*y}e_m)$$
entweder für alle $y \in W$ positiv ist, oder für keins.

Im ersten Fall heißt die Parametrisierung ψ *positiv* (*orientiert*). Eine *orientierte Untermannigfaltigkeit* mit Rand ist eine Untermannigfaltigkeit mit Rand mit einer Orientierung. Falls es eine Orientierung auf M gibt, heißt M *orientierbar*, ansonsten heißt M *nicht orientierbar*.

8.49. Bemerkung. (1) Es sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Alle Basen $(w_1, \dots, w_n)$ mit $w_j = \sum_i a_{ij}v_i$, so dass $\det((a_{ij})_{i,j}) > 0$, bilden eine Orientierung von V, alle anderen bilden eine weitere, die *entgegengesetzte Orientierung;* das folgt aus Bedingung 8.48 (1) und der Multiplikativität der Determinante und ihres Vorzeichens. Mehr Orientierungen als diese zwei gibt es nicht.

(2) Falls $V = \mathbb{R}^n$, so heißt die Orientierung o mit $(e_1, \dots, e_n) \in o$ die *kanonische* Orientierung.

(3) Bedingung (8.48) in Definition 8.48 sagt, dass die Orientierungen im Bild von $\psi\colon W \to M$ „stetig vom Punkt abhängen“. Wir definieren $o(\psi)\colon W \to \{1, -1\}$ so, dass $o(\psi) = 1$ genau dann gilt, wenn die Basis $\bigl(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\psi}{\partial x_m}\bigr) = (\psi_*e_1, \dots, \psi_*e_m)$ positiv ist. Dann ist $o(\psi)$ lokal konstant.

Sei $\chi\colon V \to M$ eine weitere Parametrisierung, ohne Einschränkung injektiv mit $\operatorname{im}\psi = \operatorname{im}\chi$, dann betrachte
$$\begin{array}{ccc} M & = & M \\ {\scriptstyle\psi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\chi} \\ W & \xrightarrow{\chi^{-1}\circ\psi} & V \end{array} .$$
Aus der Multiplikativität der Determinante folgt
$$(o(\chi) \circ (\chi^{-1} \circ \psi)) \cdot \operatorname{sign}(\det(\chi^{-1} \circ \psi)') = o(\psi) .$$

(4) Eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit M ist genau orientierbar, wenn es eine glatte m-Form $w \in \Omega^m(M)$ mit $w_x \neq 0$ für alle $x \in M$ gibt. In diesem Fall definiert w eine Orientierung o mit
$$o_x = \{(v_1, \dots, v_m) \in (T_xM)^m \mid w_x(v_1, \dots, v_m) > 0\} .$$
Wie man w für eine gegebene orientierte Untermannigfaltigkeit mit Rand konstruiert, sehen wir später.

8.50. Beispiel. (1) Die Sphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist orientierbar. Dazu betrachten wir die $(n-1)$-Form $\alpha \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\alpha_x = \iota_x(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) .$$

Zurückziehen auf S^{n-1} liefert $\iota^*\alpha \in \Omega^{n-1}(S^{n-1})$. Diese Form verschwindet nirgends, denn wir können $v_1 = x$ für $x \in S^{n-1}$ zu einer Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$ ergänzen. Dann bildet $(v_2, \dots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von T_xS^{n-1}, und es gilt

$$\alpha_x(v_2, \dots, v_n) = (dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)(v_1, \dots, v_n) = \pm 1 .$$

Im Fall $n = 1$ ist $\alpha \in \Omega^0(S^0) = \mathcal{C}^\infty(S^0)$ mit $\alpha_{\pm 1} = \pm 1$. Wir schließen, dass die induzierte Orientierung o die Gestalt $o_1 = \{()\}$, $o_{-1} = \emptyset$ hat. Also ist $T_1S^0 \cong \mathbb{R}^0$ kanonisch orientiert, $T_{-1}S^0$ jedoch entgegengesetzt.

(2) Wir betrachten das Möbiusband $M = \operatorname{im}\psi$ mit $\psi\colon \mathbb{R} \times (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\psi(s,r) = \begin{pmatrix} \left(1 + r\cos\frac{s}{2}\right)\cos s \\ \left(1 + r\cos\frac{s}{2}\right)\sin s \\ r\sin\frac{s}{2} \end{pmatrix} .$$

Man beachte, dass ψ eine Immersion ist, also eine Parametrisierung, und dass $\psi(s + 2\pi, r) = \psi(s, -r)$. Wir können M nicht orientieren, denn setzt man die Basis $\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}, \frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{(0,0)}$ in s-Richtung um 2π weiter fort, so erhält man die entgegengesetzt orientierte Basis $\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}, \frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{(2\pi,0)} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial s}, -\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{(0,0)}$ am gleichen Punkt.

8.51. Bemerkung. Wenn es eine bijektive Parametrisierung $\psi\colon W \to M$ gibt, können wir das Integral von $\alpha \in \Omega^m(M)$ definieren durch

$$\int_M \alpha = \int_W o(\psi) \cdot \psi^*\alpha = \int_W o(\psi) \cdot \alpha_{\psi(x)}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\psi}{\partial x_m}\Big)\, d\lambda^m(X) .$$

Das ist wohldefiniert, denn für eine andere bijektive Parametrisierung $\chi\colon V \to M$ folgt aus den Bemerkungen 8.47 und 8.49 (3), dass

$$\begin{aligned} \int_V o(\chi) \cdot \chi^*\alpha &= \int_{(\chi^{-1}\circ\psi)(W)} o(\psi) \cdot (\operatorname{sign}(\det(\chi^{-1}\circ\psi)') \circ (\chi^{-1}\circ\psi)^{-1}) \cdot \chi^*\alpha \\ &= \int_W o(\psi) \cdot (\chi^{-1}\circ\psi)^*\chi^*\alpha = \int_W o(\psi) \cdot \psi^*\alpha . \end{aligned}$$

Wir erinnern uns an den Träger $\operatorname{supp} f$ einer Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ aus Definition 7.117. Analog definieren wir für $\alpha \in \Omega^k(M)$ den Träger

$$\operatorname{supp}\alpha = \overline{\{x \in M \mid \alpha_x \neq 0\}} \subset M$$

und schreiben $\Omega^k_0(M)$ für den Vektorraum aller glatten k-Formen auf M mit kompaktem Träger und $\Omega^\bullet_0(M)$ für die direkte Summe all dieser Räume. Um eine Form mit kompaktem Träger $K = \operatorname{supp}\alpha \subset M$ über eine orientierte Untermannigfaltigkeit M mit Rand zu integrieren, schreiben wir α als Summe von Formen, deren Träger jeweils im Bild einer einzigen Parametrisierung ψ liegt, integrieren diese wie oben, und addieren die Ergebnisse. Dazu hilft folgendes Resultat.

8.52. Lemma. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit mit Rand und $K \subset M$ kompakt. Dann existiert $U \subset M$ offen mit $K \subset U$, endlich viele injektive Parametrisierungen $\psi_i \colon W_i \to M$ und endlich viele nichtnegative Funktionen $\rho_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ mit Träger* $\operatorname{supp} \rho_i \subset \operatorname{im} \psi_i$ *für $i = 1, \dots, N$, so dass*

$$\sum_{i=1}^N \rho_i(x) = 1 \qquad \text{für alle } x \in U\ .$$

Man nennt $(\rho_i)_i$ auch eine *Partition der Eins*. Dieser Begriff existiert allgemeiner auch für $U = M$, selbst wenn M nicht kompakt ist; uns reicht im Folgenden aber die obige Aussage.

Beweis. Zu jedem Punkt $x \in M$ finden wir eine injektive Parametrisierung $\psi_x \colon W_x \to M$ mit $x = \psi_x(y) \in \operatorname{im} \psi_x$, etwa $\psi_x = (\varphi_x|_{U_x \cap M})^{-1}$ für eine Untermannigfaltigkeitskarte φ_x von M um x. Wir bestimmen $r_x > 0$ so, dass

$$B_{r_x}^{\mathbb{R}^m}(y) \cap ((-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1}) \subset W_x \subset (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1}\ .$$

Sei g die $\mathcal{C}^\infty$-Funktion aus Beispiel 7.113 mit $\operatorname{supp} g = \overline{B_1(0)}$, dann definieren wir $f_x \in \mathcal{C}^\infty(M)$ durch

$$f_x(z) = \begin{cases} g\Big(2\frac{\varphi_x(z)-y}{r_x}\Big) & \text{falls } z \in \operatorname{im} \psi_x, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst}\ . \end{cases}$$

Dann ist

$$\operatorname{supp} f_x = \psi_x\Big(\overline{B_{\frac{r_x}{2}}^{\mathbb{R}^m}(y) \cap ((-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1})}\Big)$$

eine kompakte Teilmenge von $\operatorname{im} \psi_x \subset M$.

Es reichen endlich viele der offenen Teilmengen

$$f_x^{-1}((0, \infty)) = \psi_x\Big(B_{\frac{r_x}{2}}^{\mathbb{R}^m}(y) \cap ((-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1})\Big)$$

nach der Heine-Borel-Eigenschaft aus Definition 6.29 aus, um K zu überdecken. Seien $f_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$ die zugehörigen Funktionen und $\psi_i \colon W_i \to M$ die zugehörigen Parametrisierungen mit $i = \{1, \dots, N\}$, dann setze

$$U = \bigcup_{i=1}^N f_i^{-1}((0, \infty)) \supset K\ ,$$

so dass $f_1 + \dots + f_N > 0$ auf ganz U. Wir definieren

$$\rho_i = \frac{f_i}{f_1 + \dots + f_N} \in \mathcal{C}^\infty(U)$$

mit Träger $\operatorname{supp} \rho_i \subset \operatorname{supp} f_i \cap U \subset \operatorname{im} \psi_i$ und $\rho_1 + \dots + \rho_N = 1$ auf ganz U. □

8.53. Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit mit Rand und $\alpha \in \Omega_0^m(M)$. Dann wähle $U \supset \operatorname{supp} \alpha$, $f_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ und $\psi_i \colon W_i \to M$ mit $\operatorname{supp} f_i \subset \operatorname{im} \psi_i$ für $i = 1, \dots, N$ wie in Lemma 8.52 und definiere das *Integral* von α über M durch

$$\int_M \alpha = \sum_{i=1}^N \int_{W_i} o(\psi_i) \cdot (\rho_i \alpha)_{\psi_i(y)} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \psi_i}{\partial x_m} \right) d\lambda^m(y) \;.$$

Wir können allgemeiner messbare und integrierbare m-Formen auf M analog zu Abschnitt 7.3 definieren. Mit den Methoden aus Abschnitt 7.9 würde in Analogie zu Satz 7.120 folgen, dass $\Omega_0^m(M)$ dicht im Raum der integrierbaren Formen liegen. Allerdings hätten wir Mühe, die äußere Ableitung zu definieren, und der Satz von Stokes wäre in dieser Allgemeinheit auch falsch, siehe unten.

8.54. Proposition. *Das Integral in Definition 8.53 ist wohldefiniert.*

Beweis. Da $\operatorname{supp} \alpha$ kompakt ist, ist auch $\operatorname{supp}(\rho_i \alpha) \subset \operatorname{supp} \alpha$ als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums wieder kompakt. Nach Satz 6.32 ist also auch

$$\operatorname{supp}(\psi_i^*(\rho_i \alpha)) = \psi_i^{-1}(\operatorname{supp}(\rho_i \alpha)) \subset W_i \subset \mathbb{R}^m$$

kompakt, da $\psi_i^{-1} \colon \operatorname{im} \psi_i \to W_i$ stetig ist. Also existiert jedes einzelne Integral nach Bemerkung 7.56 (1).

Es seien U, $V \subset M$ offen mit $\operatorname{supp} \alpha \subset U \cap V$, $\rho_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $\delta_j \in \mathcal{C}^\infty(V)$ mit $\operatorname{supp} \rho_i \subset \operatorname{im} \psi_i$, $\operatorname{supp} \delta_j \subset \operatorname{im} \chi_j$ für injektive Parametrisierungen $\psi_i \colon W_i \to M$, $\chi_j \colon X_j \to M$, für $i \in \{1, \dots, N\}$ und $j \in \{1, \dots, P\}$. Wir betrachten die Funktionen $\rho_i \delta_j \in \mathcal{C}^\infty(U \cap V)$ mit

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^P \rho_i \delta_j = 1 \qquad \text{auf ganz} \qquad U \cap V$$

$$\text{und} \;\; \operatorname{supp}(\rho_i \delta_j) \subset \operatorname{supp} \rho_i \cap \operatorname{supp} \delta_j \subset \operatorname{im} \psi_i \cap \operatorname{im} \chi_j \;.$$

Unsere Behauptung folgt aus Bemerkung 8.51, denn

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \int_{W_i} o(\psi_i) \cdot \psi_i^*(\rho_i \alpha) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^P \int_{W_i} o(\psi_i) \cdot \psi_i^*(\rho_i \delta_j \alpha) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^P \int_{X_j} o(\chi_j) \cdot \chi_j^*(\rho_i \delta_j \alpha) = \sum_{j=1}^P \int_{X_j} o(\chi_j) \cdot \chi_j^*(\delta_j \alpha) \;.\end{aligned}$$

□

8.55. Bemerkung. Wir sammeln einige elementare Eigenschaften des Integrals.

(1) *Diffeomorphismen-Invarianz.* Es seien M, N orientierte Untermannigfaltigkeiten mit Rand und $F \colon N \to M$ glatt. Wir definieren $o(F) \colon N \to \{1, -1\}$ analog zu Bemerkung 8.49 (3) so, dass $o(F) = 1$ genau an

den Punkten $y \in N$ gilt, an denen $F'_y\colon T_yN \to T_{F(y)}M$ die Orientierung erhält, also orientierte Basen auf orientierte Basen abbildet. Ist $\psi\colon W \to N$ eine Parametrisierung von N, so ist $F \circ \psi\colon W \to M$ eine Parametrisierung von M mit

$$o(F \circ \varphi) = o(\psi) \cdot (o(F) \circ \psi) \; .$$

Aus Definition 8.53 folgt für $\alpha \in \Omega^m(M)$ dann

$$\begin{aligned}\int_M \alpha &= \sum_i \int_{W_i} o(F \circ \psi_i) \cdot (F \circ \psi_i)^* \alpha \\ &= \sum_i \int_{W_i} o(\psi_i) \cdot \psi_i^* (o(F) \cdot \alpha) = \int_N o(F) \cdot \alpha \; .\end{aligned}$$

(2) Es sei $\psi\colon W \to M$ eine injektive Parametrisierung, die bis auf eine Nullmenge bezüglich des Volumenmaßes vol_M aus Definition 7.89 auch surjektiv ist. Das ist beispielsweise dann der Fall, wenn $M \setminus \operatorname{im} \psi$ Vereinigung von Untermannigfaltigkeiten kleinerer Dimension ist, siehe Proposition 7.91 und Beispiel 7.92. Dann gilt

$$\int_M \alpha = \int_W o(\psi) \cdot \psi^* \alpha \; .$$

Hierfür reicht sogar aus, dass $\operatorname{supp}(\alpha) \setminus \operatorname{im} \psi$ eine vol_M-Nullmenge ist.

(3) Zur Berechnung des Integrals $\int_M \alpha$ bietet es sich also an, M entlang von Untermannigfaltigkeiten kleinerer Dimension so zu zerschneiden, dass die einzelnen Teile sich diffeomorph parametrisieren lassen.

8.56. Bemerkung. Wir wollen jetzt einen Zusammenhang zum Integral aus Abschnitt 7.8 herstellen, und gleichzeitig aus einer Orientierung eine Form wie in Bemerkung 8.49 (4) konstruieren.

Sei also $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit mir Rand. Wir definieren $\omega_x \in \Lambda^m T_xM$ so, dass $\omega_x(v_1, \dots, v_m)$ für eine positiv orientierte Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_m)$ gilt. Mit den Überlegungen in Bemerkung 7.87 (2) sehen wir, dass für eine Parametrisierung $\psi\colon W \to M$ dann

$$\psi^* \omega = o(\psi) \cdot \det(\psi'^t \cdot \psi')^{\frac{1}{2}} \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

folgt. Insbesondere ist ω glatt und verschwindet nirgends. Wir haben also eine Form wie in Bemerkung 8.49 (4) gefunden.

Es sei $f \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$ eine Funktion mit kompaktem Träger, dann wähle U, $(\rho_i)_i$, $(\psi_i)_i$ wie in Lemma 8.52. Der Vergleich mit Definition 7.89 zeigt, dass

$$\begin{aligned}\int_M f \, d\,\mathrm{vol}_M &= \sum_i \int_M \rho_i \cdot f \, d\,\mathrm{vol}_M \\ &= \sum_i \int_{W_i} o(\psi_i) \cdot ((\rho_i \cdot f) \circ \psi_i) \cdot o(\psi_i) \cdot \det(\psi_i'^t \cdot \psi_i')^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^m \\ &= \sum_i \int_M \rho_i \cdot f \cdot \omega = \int_M f \cdot \omega \; .\end{aligned}$$

Also entspricht dem Volumenmaß vol_M einer orientierten Untermannigfaltigkeit mit Rand die Form ω, die daher *Volumenform* genannt wird.

Sei jetzt $\alpha \in \Omega_0^m(M)$ beliebig. Da $\Lambda^m T_xM$ stets eindimensional ist, existiert $f\colon M \to \mathbb{R}$ mit $\alpha = f\cdot\omega$, und man überzeugt sich leicht, dass $f \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$. Wir haben also das Integral einer m-Form auf das Integral aus Abschnitt 7.8 zurückgeführt. Allerdings ist die Form ω nicht invariant unter Diffeomorphismen, so dass wir nach wie vor mit Differentialformen weiterrechnen werden.

8.5. Die Sätze von Stokes und Gauß

Wir wollen jetzt den Hauptsatz 5.47 der Differential- und Integralrechnung auf das Integral von Differentialformen über Untermannigfaltigkeiten mit Rand verallgemeinern. Anschließend geben wir eine Reihe von Anwendungen.

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit mit Rand ∂M, dann bezeichnet $\iota\colon \partial M \to M$ die Inklusionsabbildung. Die Abbildung $\iota_*\colon T_x(\partial M) \to T_xM$ ist stets injektiv, und ihr Bild ein Unterraum der Kodimension 1.

8.57. Definition. Es sei $x \in \partial M$. Ein Vektor $v \in T_xM$ weist nach *außen*, wenn für eine Karte $\varphi\colon U \to V$ um x die erste Komponente des Vektors $\varphi_{*x}(v) = \varphi'_x(v) \subset \mathbb{R}^n$ positiv ist.

Es sei o_x eine Orientierung auf T_xM und $v_1 \in T_xM$ ein nach außen weisender Vektor, dann ist die *Randorientierung* o_x^∂ auf $T_x(\partial M)$ definiert durch

$$(v_2, \dots, v_m) \in o_x^\partial \quad\Longleftrightarrow\quad (v_1, \dots, v_m) \in o_x$$

für alle Basen $(v_2, \dots, v_m)$ von $T_x(\partial M)$.

8.58. Bemerkung. (1) Seien φ, χ zwei Untermannigfaltigkeitskarten von M um $x \in \partial M$, ohne Einschränkung mit dem gleichen Definitionsbereich, dann bildet $(\chi\circ\varphi^{-1})$ die Menge im $\varphi \cap ((-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\})$ auf im $\chi \cap ((-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\})$. Für $y = \varphi(x) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ folgt

$$\big((\chi\circ\varphi^{-1})'_y(w)\big)_1 > 0 \quad\Longleftrightarrow\quad w_1 > 0$$

für alle $w \in \mathbb{R}^m \times \{0\}$. Also hängt die Definition von „außen“ nicht von der Wahl von φ ab.

(2) Seien v_1, $v_1' \in T_xM$ zwei nach außen weisende Vektoren und $(v_2, \dots, v_m)$ eine Basis von $T_x(\partial M)$. Dann sind $(v_1, \dots, v_m)$ und $(v_1', v_2, \dots, v_m)$ Basen von T_xM, und die Basiswechselmatrix hat die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} c & & & \\ * & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ * & & & 1 \end{pmatrix}$$

mit $c > 0$ und $* \in \mathbb{R}$ beliebig; alle anderen Einträge verschwinden. Insbesondere gilt $\det A > 0$, und die Orientierung o_x^∂ hängt nicht von der Wahl von v_1 ab.

(3) Sei $\psi = (\varphi|_{U\cap M})^{-1} \colon W \to M$ eine Parametrisierung von M um $x \in \partial M$, dann weist der Vektor $\psi_{*y}(e_1) \in T_xM$ nach außen. Definiere

$$\partial W = \{(z_2, \dots, z_m) \mid (0, z_2, \dots, z_m) \in W\} \subset \mathbb{R}^{m-1}$$

und $\psi^\partial \colon \partial W \to \partial M$ durch $\psi^\partial(z) = \psi(0, z)$, dann definiert ψ^∂ eine Parametrisierung des Randes ∂M mit

$$o(\psi^\partial) = o(\psi) \circ \iota \; .$$

(4) Sei M eine orientierte Untermannigfaltigkeit ohne Rand und $c \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von $v \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dann sind

$$M^+ = f^{-1}([0, \infty)) \qquad \text{und} \qquad M^- = f^{-1}((-\infty, 0])$$

Untermannigfaltigkeiten mit Rand

$$\partial M^+ = \partial M^- = f^{-1}(\{0\}) \; ,$$

aber M^+ und M^- induzieren entgegengesetzte Orientierungen auf dem Rand $f^{-1}(\{0\})$, denn für $x \in M$ mit $f(x) = 0$ weist $v \in T_xM$ bezüglich M^+ nach außen, wenn er bezüglich M^- nach innen weist, und umgekehrt.

8.59. Satz (Stokes). *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit mit Rand ∂M, der die Randorientierung trägt. Für alle $\alpha \in \Omega_0^{m-1}(M)$ gilt dann*

$$\int_{\partial M} \iota^*\alpha = \int_M d\alpha \; .$$

Beweis. Wir wählen U, $(\rho_i)_i$, $(\psi_i)_i$ zu $\operatorname{supp}\alpha \subset M$ wie in Lemma 8.52. Die äußere Ableitung d und das Integral sind additiv, also gilt

$$\int_{\partial M} \iota^*\alpha = \sum_i \int_{\partial W_i} o(\psi_i) \cdot \psi_i^{\partial *}(\rho_i \cdot \alpha)$$

und

$$\int_M d\alpha = \int_M d \sum_i \rho_i \alpha = \sum_i \int_{W_i} o(\psi_i) \cdot d\psi_i^*(\rho_i \cdot \alpha)$$

wegen der Natürlichkeit der äußeren Ableitung.

Da $\operatorname{supp}\alpha$ kompakt ist, ist auch $\operatorname{supp}(\rho_i\alpha) \subset \operatorname{supp}\alpha$ als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums wieder kompakt. Nach Satz 6.32 sind also auch

$$\operatorname{supp}(d\psi_i^*(\rho_i \cdot \alpha)) \subset \operatorname{supp}(\psi_i^*(\rho_i\alpha)) = \psi_i^{-1}(\operatorname{supp}(\rho_i\alpha)) \subset \mathbb{R}^m$$

und

$$\operatorname{supp}(\psi_i^{\partial *}(\rho_i \cdot \alpha)) \subset \psi_i^{-1}(\operatorname{supp}(\rho_i\alpha)) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \subset \mathbb{R}^{m-1}$$

kompakt. Wir definieren $\beta \in \Omega_0^{m-1}((-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1})$ durch

$$\beta_x = \begin{cases} (o(\psi_i) \cdot \psi_i^*(\rho_i \cdot \alpha))_x & \text{falls } x \in W_i \; , \text{ und} \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Dann ist β glatt, denn für alle $x \in W_i$ ist β auf der Umgebung W_i von x glatt, und für alle $x \notin W_i$ verschwindet β auf der offenen Menge $((-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1}) \setminus \operatorname{supp}(\psi_i^*(\rho_i \cdot \alpha))$, denn $\operatorname{supp}(\psi_i^*(\rho_i\alpha))$ ist ja kompakt, also auch abgeschlossen.

Nach diesen Vorüberlegungen reicht es, den Satz für $\beta \in \Omega_0^{m-1}((-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1})$ zu beweisen. Im folgenden bedeutet ein Dach „$\widehat{\cdot}$“ über einem Ausdruck, dass dieser Ausdruck in einem Produkt, einer Aufzählung oder ähnlichem weggelassen wird. Mit $b_i = \beta(e_1, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_m)$ gilt insbesondere

$$\beta = \sum_{i=1}^m b_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m$$

$$\text{und} \qquad d\beta = \sum_{i,j=1}^m \partial_j b_i \, dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m$$

$$= \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \partial_i b_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m \; .$$

Da $\operatorname{supp} \beta$ kompakt ist, existiert $C > 0$ mit

$$\operatorname{supp} \beta \subset [-C, 0] \times [-C, C]^{m-1} \; ,$$

insbesondere gilt $\beta_x = \partial \beta_x = 0$, falls $|x_i| \geq C$ für ein $i \in \{1, \dots, m\}$. Wir berechnen also mit dem Satz 7.73 (2) von Fubini und dem Hauptsatz 5.47 für $i \geq 2$, dass

$$\int_{(-\infty,0]\times\mathbb{R}^{m-1}} (-1)^{i-1} \partial_i b_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$$

$$= \int_{-C}^0 \underbrace{\int_{-C}^C \cdots \int_{-C}^C}_{m-1} (-1)^{i-1} \partial_i b_i(x) \, dx_i \, dx_2 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_m \, dx_1$$

$$= \int_{-C}^0 \underbrace{\int_{-C}^C \cdots \int_{-C}^C}_{m-2} (-1)^{i-1} \underbrace{b_i(x)\big|_{X_i=-C}^C}_{=0} \, dx_2 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_m \, dx_1 = 0 \; .$$

Für $i = 1$ hingegen erhalten wir analog

$$\int_{(-\infty,0]\times\mathbb{R}^{m-1}} \partial_1 b_1 \, d\lambda^m$$

$$= \int_{-C}^C \cdots \int_{-C}^C \int_{-C}^0 \partial_1 b_1(x) \, dx_1 \dots dx_m$$

$$= \int_{-C}^C \cdots \int_{-C}^C \underbrace{b_{2,\dots,m}(x)\big|_{x_1=-c}^0}_{=b_1(0,x_2,\dots,x_m)} \, dx_2 \dots dx_m = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \iota^* \beta \; ,$$

denn

$$(\iota^* \beta)_{(x_2,\dots,x_m)} = b_1(0, x_2, \dots, x_m) \, dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_m \; .$$

Aus den obigen Gleichungen folgt also

$$\int_{(-\infty,0]\times\mathbb{R}^{m-1}} d\beta = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \iota^* \beta \; . \qquad \square$$

8.60. Bemerkung. Die Form α im Satz von Stokes hat kompakten Träger. Auf diese Bedingung kann man nicht verzichten. Sei etwa $M = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial M = \emptyset$ und $\alpha = x_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$, dann folgt

$$0 \neq \operatorname{vol} B_1(0) = \int_M d\alpha \neq \int_\emptyset \alpha = 0 \ .$$

Geht man zum abgeschlossenen Ball $D_1(0)$ mit Rand S^{n-1} über, dann stimmt der Satz von Stokes wieder, da dann $\operatorname{supp} \alpha = D_1(0)$ kompakt ist.

8.61. Definition. Eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ mit Rand heißt *geschlossen*, wenn M kompakt ist und $\partial M = \emptyset$.

8.62. Folgerung. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensioale, orientierte geschlossene Untermannigfaltigkeit, sei $N \subset \mathbb{R}^p$ eine beliebige Untermannigfaltigkeit mit Rand, und sei $F\colon M \to N$ glatt. Dann gilt*

(1) *Es sei $\alpha \in \Omega^m(M)$ geschlossen, dann hängt das Integral $\int_M \alpha$ nur von $[a] \in H^m_{dR}(M)$ ab.*
(2) *Es sei $\alpha \in \Omega^m(N)$ geschlossen, dann hängt das Integral $\int_M F^*\alpha$ nur von $[\alpha] \in H^m_{dR}(N)$ und der Homotopieklasse von $F\colon M \to N$ ab.*

Beweis. Formen in $[\alpha]$ unterscheiden sich nur um exakte Formen $d\beta$ für $\beta \in \Omega^{m-1}(M)$. Aus Satz 8.59 von Stokes folgt

$$\int_M d\beta = \int_\emptyset \iota^*\beta = 0 \ ,$$

also folgt (1). Aussage (2) ergibt sich aus (1) und der Homotopieinvarianz der de Rham-Kohomologie aus Satz 8.22 (2). □

Es sei M eine m-dimensionale kompakte, orientierte Untermannigfaltigkeit mit Rand und $H\colon M \times [0,1]$ eine Homotopie zwischen F, $G\colon M \to N$ mit $H(x,t) = F(x) = G(x)$ für alle $x \in \partial M$ und alle $t \in [0,1]$. Mit etwas mehr Mühe als oben beweist man für geschlossene $\alpha \in \Omega^m(N)$, dass

$$\int_M F^*\alpha = \int_M G^*\alpha \ ,$$

aber dieses Integral hängt immer noch von der Form α ab, nicht nur von $[\alpha]$.

8.63. Beispiel. Man kann diese Folgerung beispielsweise benutzen, um von de Rham-Kohomologieklassen $[a] \in H^\bullet_{dR}(N)$ zu zeigen, dass sie nicht verschwinden.

(1) Es sei M eine m-dimensionale, geschlossene, orientierte Untermannigfaltigkeit und $\omega \in \Omega^m(M)$ die Volumenform aus Bemerkung 8.56. Es gilt $d\omega = 0$, da $\Omega^{m+1}(M) = 0$, und

$$\int_M \omega = \operatorname{vol}(M) > 0 \ ,$$

also folgt $[w] \neq 0$ in $H^m_{\mathrm{dR}}(M)$. Für $m \geq 1$ ergibt sich aus dem Poincaré-Lemma 8.28, dass m-dimensionale, geschlossene, orientierbare Untermannigfaltigkeiten niemals zusammenziehbar sein können.

(2) Wir betrachten die Form $\alpha \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ aus Aufgabe 3 von Blatt 14 mit

$$\alpha_x = |x|^{-n} \, \iota_x(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) .$$

Wir hatten dort gesehen, dass $d\alpha = 0$. Es sei $F_r \colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ für $r > 0$ gegeben durch

$$F_r(x) = rx ,$$

dann hatten wir auch gesehen, dass

$$\int_{S^{n-1}} F_r^* \alpha = \int_{S^{n-1}} d\operatorname{vol}_{S^{n-1}} = \operatorname{vol}(S^{n-1}) > 0 ,$$

also folgt wieder $[\alpha] \neq 0 \in H^{n-1}_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, und auch $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist nicht zusammenziehbar. Außerdem sind die Abbildungen F_r alle zueinander homotop, so dass die obigen Integrale gemäß Folgerung 8.62 (2) alle denselben Wert liefern.

Wir wollen uns jetzt einigen analytischen Spezialfällen und Anwendungen zuwenden. Es sei $\omega = dx \wedge dy \wedge dx$ die Volumenform auf einer dreidimensionalen Untermannigfaltigkeit $U \subset \mathbb{R}^3$ wie in Bemerkung 8.56. In Aufgabe 4 von Blatt 11 hatten wir Isomorphismen $\Phi_i \colon \Omega^i(U) \to \mathcal{C}^\infty(U;\mathbb{R}^3)$ für $i = 1, 2$ und $\Phi_3 \colon \Omega^3(U) \to \mathcal{C}^\infty(U)$ so definiert, dass

$$\alpha = \langle \cdot, \Phi_1(\alpha) \rangle, \qquad \beta = \iota_{\Phi_2(\beta)} \omega \qquad \text{und} \qquad \gamma = \Phi_3(\gamma) \cdot \omega$$

für $\alpha \in \Omega^1(U)$, $\beta \in \Omega^2(U)$, $\gamma \in \Omega^3(U)$. In Aufgabe 2 von Blatt 13 hatten wir Operatoren

$$\operatorname{grad} \colon \mathcal{C}^\infty(U) \to \mathcal{C}^\infty(U;\mathbb{R}^3), \quad \operatorname{rot} \colon \mathcal{C}^\infty(U;\mathbb{R}^3) \to \mathcal{C}^\infty(U;\mathbb{R}^3)$$

und $\operatorname{div} \colon \mathcal{C}^\infty(U;\mathbb{R}^3) \to \mathcal{C}^\infty(U)$ definiert mit

$$\Phi_1(\operatorname{grad} f) = df, \qquad \Phi_2(\operatorname{rot} V) = d\Phi_1(V) \qquad \text{und} \qquad \Phi_3(\operatorname{div} V) = d\Phi_2(V)$$

für $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ und $V \in \mathcal{C}^\infty(U;\mathbb{R}^3)$. Diese Operatoren haben die Form

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rot} V = \begin{pmatrix} \partial_2 V_3 - \partial_3 V_2 \\ \partial_3 V_1 - \partial_1 V_3 \\ \partial_1 V_2 - \partial_2 V_1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{div} V = \partial_1 V_1 + \partial_2 V_2 + \partial_3 V_3 .$$

8.64. Bemerkung. Wir kennen bereits drei Spezialfälle des Satzes von Stokes; weitere ergeben sich aus Aufgabe 2 von Blatt 13 und den Aufgaben 1, 2 von Blatt 14.

(1) Es sei $M = [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$, dann ist M eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand $\{a, b\}$. In jedem Punkt $x \in M$ sei (e_1) eine positive Basis von $T_xM \cong \mathbb{R}$. Wir wählen Parametrisierungen $\psi, \chi \colon (a - b, 0] \to M$ mit

$$\psi(y) = y + b \qquad \text{und} \qquad \chi(y) = a - y ,$$

so dass $o(\psi) = 1$ und $o(\chi) = -1$. Für eine 0-Form f erhalten wir den Hauptsatz 5.47 zurück:

$$\int_a (f'(x)\,dx = \int_M df = \int_{\partial M} \iota^* f = f(b) - f(a)\ .$$

(2) Es seien $\gamma\colon [a,b] \to U \subset \mathbb{R}^n$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$ glatt. Als Motivation für die Definition 6.101 des Kurvenintegrals hatten wir

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_{\partial M} \iota^*(f \circ \gamma) = \int_M d(f \circ \gamma) = \int_\gamma df$$

gezeigt. Diese Formel haben wir auch im Beweis von Poincaré-Lemmas 6.108 benutzt. Wenn γ eine injektive Immersion ist, dann ist $N = \operatorname{im}\gamma$ eine Untermannigfaltigkeit, und $\gamma\circ\psi$, $\gamma\circ\chi$ mit $\psi, \chi\colon (a-b;0] \to \mathbb{R}$ wie oben sind Parametrisierungen. Wir schreiben die obige Formel um zu

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_{\partial N} \iota^* f = \int_N df = \int_\gamma df\ .$$

(3) Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine glatte, geschlossene Kurve mit $\gamma^{(k)}(a) = \gamma^{(k)}(b)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, die eine Fläche $A \subset \mathbb{R}^2$ umläuft. Dann ist $M = A \cup \operatorname{im}\gamma$ eine Untermannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = \operatorname{im}\gamma$. Wir orientieren A durch die kanonische Orientierung des $\mathbb{R}^2$ und sagen, dass γ die Fläche A *positiv* umläuft, wenn $(\dot\gamma(t))$ für alle $t \in [a,b]$ eine positive Basis von $T_{\gamma(t)}(\partial M)$ ist. In diesem Fall umläuft γ die Fläche A „entgegen dem Uhrzeigersinn.“ Es sei $\alpha \in \Omega^1(M)$ eine der Formen

$$x\,dy, \qquad -y\,dx \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)\ ,$$

so dass $d\alpha = dx\,dy$ die Volumenform auf A aus Bemerkung 8.56 ist. Wie in Beispiel 6.111 gilt

$$\operatorname{vol}(A) = \int_M d\alpha = \int_{\partial M} \iota^*\alpha = \int_\gamma \alpha\ .$$

(4) Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $V\colon M \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit kompaktem Träger. Nach Aufgabe 2 von Blatt 13 gilt für die Rotation

$$\iota_{\operatorname{rot} V}(dx \wedge dy \wedge dz) = d(\langle, V, \cdot\rangle)$$

und nach Aufgabe 2 von Blatt 14 ist

$$\int_M \langle \operatorname{rot} V, \nu\rangle\, d\operatorname{vol}_M = \int_M d(\langle V, \cdot\rangle) = \int_{\partial M} \langle V, \cdot\rangle\ ,$$

wobei $\nu\colon M \to \mathbb{R}^3$ der dort definierte positive Normalenvektor sei. Die rechte Seite lässt sich wieder als Kurvenintegral schreiben, siehe Aufgabe 1 von Blatt 14. Diese Gleichung wird oft als Satz von Stokes oder Rotationssatz bezeichnet.

(5) Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine dreidimensionale Untermannigfaltigkeit mit glattem Rand ∂M und $V\colon M \to \mathbb{R}^3$ ein glattes Vektorfeld mit kompaktem Träger. Wie in Aufgabe 2 von Blatt 13 gilt

$$\operatorname{div} V \cdot dx \wedge dy \wedge dz = d(\iota_V(dx \wedge dy \wedge dz))\ ,$$

und nach Aufgabe 2 von Blatt 14 ergibt sich

$$\int_M \operatorname{div} V \, d\operatorname{vol}_M = \int_{\partial M} \langle V, \nu \rangle \, d\operatorname{vol}_{\partial M}$$

aus dem Satz von Stokes. Diese Gleichung wird oft Satz von Gauß oder Divergenzsatz genannt. Wir lernen noch eine Verallgemeinerung kennen.

Wenn man sich das Vektorfeld V als das Geschwindigkeitsfeld der Bewegung eines Gases zu einer festen Zeit vorstellt, beschreibt $\operatorname{rot} V$ den Drehanteil der Bewegung: die Richtung von $\operatorname{rot} V$ gibt die Drehachse und der Betrag die Drehgeschwindigkeit an. Der Rotationssatz besagt anschaulich: der „umlaufende Anteil" der Bewegung am Rand der Fläche M ist das Integral über den „Drehanteil in Richtung der Fläche" (d.h.: Anteil mit Drehachse in Normalenrichtung). Analog dazu sagt der Divergenzsatz, dass der „Gesamtdurchfluss" durch die Fläche ∂M dem Integral über die „Volumenveränderung" im Innern entspricht.

8.65. Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit mir Rand. Ein *tangentiales Vektorfeld* ist eine glatte Abbildung $V : M \to \mathbb{R}^n$, so dass $V_x \in T_x M$ für alle $x \in M$.

Die *Divergenz* $\operatorname{div} V \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ist definiert durch

$$\operatorname{div} V \cdot \omega = d(\iota_V \omega)$$

für eine Volumenform $\omega \in \Omega^m(U)$ wie in Bemerkung 8.56 für eine orientierte Teilmenge $U \subset M$.

Das *äußere Normalenfeld* $\nu : \partial M \to \mathbb{R}^n$ von M ordnet $x \in \partial M$ den nach außen weisenden Vektor $\nu_x \in T_x M$ der Länge 1 zu mit $\langle \nu_x, w \rangle = 0$ für alle $w \in T_x(\partial M)$.

8.66. Bemerkung. (1) Da $d(\iota_V \omega) \in \Omega^m(M)$, ist $\operatorname{div} V$ auf U eindeutig bestimmt. Ändert man die Orientierung auf U, so wird ω zu $-\omega$, aber $\operatorname{div} V$ bleibt erhalten. Also ist $\operatorname{div} V$ auf ganz M definiert, auch wenn M selbst nicht orientierbar ist und keine globale Volumenform trägt. Auf $\mathbb{R}^n$ hat die Divergenz die einfache Form

$$\operatorname{div} V = \sum_{i=1}^n \partial_i V_i \;,$$

auf Untermannigfaltigkeiten ist die Formel komplizierter. Insbesondere ist die Divergenz nicht verträglich mit beliebigen Diffeomorphismen.

(2) Es sei $U \subset M$ wie oben und $F : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ glatt mit

$$F(x, 0) = x \qquad \text{und} \qquad F_{*(x,0)}(e_{n+1}) = V_x \;.$$

Wenn wir $F_t(x) = F(x, t)$ setzen, beschreibt $F_t(x)$ die Position eines „Teilchens" zur Zeit t, das zur Zeit 0 am Punkt x war und sich irgendwie auf M bewegt, und zur Zeit 0 die Geschwindigkeit V_x hatte. Das

Volumen der Menge im (F_t) dieser Teilchen verändert sich zur Zeit 0 wie

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{F_t(U)}\omega = \frac{d}{dt}\int_U F_t^*\omega &= \int_{U\times\{0\}}\frac{\partial}{\partial t}(F^*\omega)\\ &= \int_{U\times\{0\}} d\iota_{e_{n+1}}F^*\omega = \int_{U\times\{0\}} dF^*\iota_V\omega\\ &= \int_{U\times\{0\}} F_0^*(d\iota_V\omega) = \int_U \operatorname{div} V\cdot\omega\end{aligned}$$

nach Aufgabe 3 von Blatt 13, da $F_0 = \mathrm{id}_U$ und $F_{*(x,0)}e_{n+1} = V_x$. Also beschreibt $\operatorname{div} V$ anschaulich die lokale Volumenänderung einer Teilchenmenge, die sich mit Geschwindigkeit V bewegt.

(3) Analog dazu beschreibt $\langle\nu, V\rangle\colon \partial M \to \mathbb{R}$ die Geschwindigkeit, mit der solche Teilchen M durch den Rand ∂M verlassen, falls V nach außen weist, bzw. in M hineinströmen, falls V nach innen weist.

Das folgende Resultat zeigt, dass das Integral über die Volumenveränderung im Inneren von M genau dem Integral des Durchflusses durch den Rand entspricht, und verallgemeinert Bemerkung 8.64 (5).

8.67. Satz (Gauß; Divergenzsatz). *Es sei V ein tangentiales Vektorfeld an eine Untermannigfaltigkeit M mit Rand ∂M, so dass* $\operatorname{supp} V \subset M$ *kompakt ist, und ν das äußere Normalenfeld, dann gilt*

$$\int_M \operatorname{div} V\, d\operatorname{vol}_M = \int_{\partial M}\langle\nu, V\rangle\, d\operatorname{vol}_{\partial M}\ .$$

Beweis. Wenn M orientierbar ist, fixieren wir eine Volumenform $\omega \in \Omega^m(M)$ und betrachten die Form $\alpha = \iota_V\omega \in \Omega_0^{m-1}(M)$. Es gilt $d\alpha = \operatorname{div} V\cdot\omega$ nach Definition 8.65.

Für $x \in \partial M$ sei $(v_2,\dots,v_m)$ eine positive Basis von $T_x(\partial M)$, dann ist $(\nu_x, v_2,\dots,v_m)$ eine positive Basis von T_xM. Also ist $\iota_\nu\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ eine Volumenform auf ∂M. Da ω alternierend und multilinear ist, gilt

$$\begin{aligned}\iota_V\omega(v_2,\dots,v_m) &= \omega(\langle\nu,V\rangle\nu + \sum_{i=2}^m\langle\nu,v_i\rangle v_i, v_2,\dots,v_m)\\ &= \langle\nu,V\rangle\iota_\nu\omega\ ,\end{aligned}$$

also gilt $\iota^*\alpha = \langle\nu,V\rangle\iota_\nu\omega$ auf ∂M.

Aus den obigen Gleichungen folgt

$$\int_M \operatorname{div} V\, d\operatorname{vol}_M = \int_M d\alpha = \int_{\partial M}\iota^*\alpha = \int_{\partial M}\langle\nu,V\rangle\, d\operatorname{vol}_{\partial M}\ .$$

Falls M nicht orientierbar ist, wähle U, $(\rho_i)_i$, $(\psi_i)_i$ zu $\operatorname{supp} V$ wie in Lemma 8.52. Die Parametrisierungen induzieren Orientierungen auf $\operatorname{im} \psi_i$. Es folgt

$$\begin{aligned} \int_M \operatorname{div} V \, d\operatorname{vol}_M &= \sum_{i=1}^N \int_{\operatorname{im} \psi_i} \operatorname{div}(\rho_i V) \, d\operatorname{vol}_M \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\operatorname{im} \psi_i^\partial} \langle \nu, \rho_i V \rangle \, d\operatorname{vol}_{\partial M} = \int_{\partial M} \langle \nu, V \rangle \, d\operatorname{vol}_{\partial M} \ . \qquad \square \end{aligned}$$

8.68. Bemerkung. Der Satz von Gauß lässt sich ohne Orientierungen und sogar ohne Differentialformen-Kalkül formulieren, wenn man eine Formel für die Divergenz ohne ω angibt. Er lässt sich mit ähnlichen Methoden wie der Satz von Stokes beweisen, allerdings machen die Formel für die Divergenz und die Gramsche Determinante den Beweis etwas unübersichtlicher. Aus dem Divergenzsatz lässt sich dann der Satz von Stokes herleiten. Der hier gewählte Zugang ist etwas umständlicher, aber wesentlich übersichtlicher.

Viel Erfolg bei der Klausur.

Notation

Stichwortverzeichnis