

**Kurzscript zur Analysis im WS 2021/22,  
SS 2022 und WS 2022/23**

Sebastian Goette



## Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Grundlagen	1
1.a. Mengen	1
1.b. Vollständige Induktion	4
1.c. Angeordnete Körper	8
1.d. Vollständigkeit	11
Kapitel 2. Folgen, Reihen und Grenzwerte	15
2.a. Konvergenz von Folgen	15
2.b. Uneigentliche Konvergenz	18
2.c. Häufungspunkte und Kompaktheit	21
2.d. Komplexe Zahlen und Euklidische Norm	22
2.e. Reihen	26
2.f. Potenzreihen	29
Kapitel 3. Stetige Funktionen	33
3.a. Stetigkeit	33
3.b. Häufungspunkte und Grenzwerte	35
3.c. Eigenschaften stetiger Funktionen	37
3.d. Logarithmus und Winkelfunktionen	39
Kapitel 4. Differentialrechnung	43
4.a. Die Ableitung	43
4.b. Ableitungsregeln	45
4.c. Extrema und Mittelwertsatz	47
4.d. Höhere Ableitungen	50
Kapitel 5. Integralrechnung	55
5.a. Das Riemann-Integral	55
5.b. Das Integral stetiger Funktionen	58
5.c. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	60
5.d. Integral und Ableitung von Potenzreihen	64
5.e. Der Satz von Taylor	66
5.f. Gewöhnliche Differentialgleichungen	68
Kapitel 6. Metrische und topologische Räume	71
6.a. Metrische Räume	71
6.b. Topologische Räume und Stetigkeit	73
6.c. Grenzwerte von Funktionen	76
6.d. Kompaktheit	77
6.e. Normen und Äquivalenz von Normen	80
6.f. Zusammenhang	82

Kapitel 7. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$	83
7.a. Die Ableitung	83
7.b. Partielle Ableitungen und Richtungsableitungen	85
7.c. Höhere Ableitungen und die Taylorformel	87
7.d. Extrema und Konvexität	90
7.e. Der lokale Umkehrsatz	93
7.f. Der Satz über implizite Funktionen	95
7.g. Extrema unter Nebenbedingungen	97
Kapitel 8. Kurvenintegrale	99
8.a. Parameterabhängige Integrale	99
8.b. Bogenlänge und Kurvenintegrale erster Art	101
8.c. Pfaffsche Formen und Kurvenintegrale zweiter Art	103
8.d. Variationsrechnung	105
Kapitel 9. Differentialgleichungen	109
9.a. Lineare Differentialgleichungssysteme	109
9.b. Der Satz von Picard-Lindelöf	112
9.c. Differenzierbare Vektorfelder und Flüsse	116
9.d. Anwendung auf partielle Differentialgleichungen	117
Kapitel 10. Das Lebesgue-Maß	121
10.a. Äußere Maße	121
10.b. Konstruktion des Lebesgue-Maßes	124
10.c. Topologische Eigenschaften	127
10.d. Invarianzeigenschaften	129
Kapitel 11. Das Lebesgue-Integral	131
11.a. Messbare Funktionen	131
11.b. Definition des Integrals	133
11.c. Konvergenzsätze und Anwendungen	135
11.d. Die Sätze von Fubini und Tonelli	138
11.e. Die Integraltransformationsformel	140
11.f. Integration über Untermannigfaltigkeiten	143
Kapitel 12. Funktionenräume	147
12.a. Die Räume $L^p(\mu)$	147
12.b. $L^p$ -Funktionen auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$	150
12.c. Fourierreihen	152
12.d. Fréchet-Räume und der Schwartz-Raum	154
12.e. Die Fouriertransformation	156
Kapitel 13. Integralsätze	159
13.a. Volumenänderung und Divergenz	159
13.b. Das normale Oberflächenintegral	161
13.c. Der Divergenzsatz von Gauß	163
13.d. Der Rotationssatz von Stokes	165
Literatur	171

## Grundlagen

19.10.21

Aus der Schule kennen wir die natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\} \quad \text{und} \quad \mathbb{N}_+ = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

die ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\}$$

und die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}_+, \text{ggT}(p, q) = 1 \right\}$$

schon recht gut. Wir werden sie daher nicht komplett neu einführen, sondern nur einige für diese Vorlesung wichtige Eigenschaften hervorheben. Eine detailliertere Einführung findet sich in [5, Kap 1], [8, Anhang] oder in [3, Kap. 1].

Es gilt  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ . Wenn wir  $p \in \mathbb{Z}$  als  $\frac{p}{1} \in \mathbb{Q}$  schreiben, erhalten wir insgesamt

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Ausgehend von den obigen Zahlenmengen wollen wir später die *reellen Zahlen*  $\mathbb{R}$  beschreiben. Dabei wollen wir das Problem lösen, dass es

### 1.a. Mengen

Als erstes möchte ich einen „naiven“ Mengenbegriff einführen. Ein erster Versuch einer Beschreibung von Mengen stammt von Georg Cantor aus dem Jahr 1895.

„Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung  $M$  von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten  $m$  unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von  $M$  genannt werden) zu einem Ganzen.“

Auf der einen Seite ist wichtig, dass Elemente von Mengen stets „bestimmte, wohlunterschiedene Objekte“ sind. Wenn  $m$  ein Element von  $M$  ist schreiben wir

$$m \in M.$$

Auf der anderen Seite kann nicht jede Zusammenfassung solcher Objekte eine Menge sein. Bertrand Russell hat bereits 1903 einen Widerspruch im Zusammenhang mit dem obigen Begriff befunden: eine Menge ist ein Objekt unseres Denkens, und kann daher auch ein Element einer Menge sein. Insbesondere könnten wir die Menge aller Mengen betrachten, die sich nicht selbst enthalten:

$$(1.1) \quad M = \{ X \text{ Menge} \mid X \notin X \}.$$

Es muss dann entweder  $M \in M$  oder  $M \notin M$  gelten, aber beides führt zu einem Widerspruch (*Russellsche Antinomie*).

Wir führen daher eine naive Mengenlehre ein, die sich grob an den Axiomen von Zermelo und Fraenkel aus den Jahren 1907–1930 orientiert. Wir listen die für uns wichtigsten Axiome im Folgenden auf, und führen dabei auch gleich unsere Notation für Mengen ein. Erklärungen folgen direkt im Anschluss.

1.1. ANNAHME (naive Zermelo-Fraenkel-Axiome). *Mengen* haben die folgenden Eigenschaften.

- (1) *Extensionalität*. Zwei Mengen  $A, B$  sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente  $X$  enthalten:

$$\forall A \forall B \quad (A = B \iff (\forall X \in A \ X \in B \ \wedge \ \forall X \in B \ X \in A)) .$$

- (2) *Leere Menge*. Es gibt eine Menge  $\emptyset$ , die kein Element enthält:

$$\forall X \ \neg X \in \emptyset .$$

- (3) *Paarmenge*. Zu je zwei Objekten  $A, B$  gibt es eine Menge  $\{A, B\}$ , die genau  $A$  und  $B$  enthält:

$$\forall A \forall B \forall X \quad (X \in \{A, B\} \iff (X = A \vee X = B)) .$$

- (4) *Vereinigung*. Zu jeder Menge  $A$  von Mengen gibt es eine Menge  $\bigcup A$ , die genau die Elemente der Elemente von  $A$  enthält:

$$\forall A \forall X \quad (X \in \bigcup A \iff \exists B \in A \ X \in B)$$

- (5) *Unendliche Menge*. Es gibt eine Menge  $A$  von Mengen, die die leere Menge  $\emptyset$  und mit jedem Element  $X$  auch das Element  $X \cup \{X\}$  enthält:

$$\exists A \quad (\emptyset \in A \ \wedge \ \forall X \in A \ \bigcup \{X, \{X, X\}\} \in A)$$

- (6) *Potenzmenge*. Zur jeder Menge  $A$  existiert die Menge  $\mathcal{P}(A)$  aller Teilmengen von  $A$ , also

$$\forall A \forall X \quad (X \in \mathcal{P}(A) \iff \forall Y \in X \ Y \in A) .$$

- (7) *Aussonderung*. Es sei  $P(X)$  eine *Eigenschaft* von  $X$ , also ein Ausdruck, der für jedes  $X$  entweder wahr oder falsch ist. Dann bilden diejenigen Elemente einer Menge  $A$ , die  $P$  erfüllen, eine Teilmenge  $\{X \in A \mid P(X)\}$  von  $A$ , das heißt,

$$\forall A \forall Y \quad (Y \in \{X \in A \mid P(X)\} \iff (Y \in A \wedge P(Y))) .$$

- (8) *Ersetzung*. Es sei  $F$  eine *Operation*, die aus einer Menge  $X$  eine Menge  $F(X)$  macht. Dann können wir  $F$  auf jedes Element einer Menge  $A$  anwenden und erhalten eine neue Menge  $\{F(X) \mid X \in A\}$ , das heißt,

$$\forall A \forall Z \quad (Z \in \{F(X) \mid X \in A\} \iff \exists Y \in A \ F(Y) = Z) .$$

1.2. BEMERKUNG. Es folgen Erklärungen zu und Folgerungen aus den obigen Axiomen.

- Zu (1). *Notation*. Das Symbol „ $\forall$ “ heißt *Allquantor*. Der Ausdruck „ $\forall A$ “ bedeutet, dass die darauffolgende Aussage für alle  $A$  gilt, hier also der gesamte Rest der Zeile. Wir nennen  $A$  eine Variable; in diesem Abschnitt verwenden wir nur Großbuchstaben für Variablen.

In späteren Abschnitten werden wir immer noch eine Menge angeben, aus der die Variable hinter einem Allquantor stammen muss, so wie bei „ $\forall X \in A$ “ später in der Zeile (dieser Allquantor gilt für die folgende Aussage, nämlich  $X \in B$ ). Wenn wir das nicht tun, darf man für die Variable „alles“, in unserem Kontext also jede beliebige Menge einsetzen. *Bedeutung*. Eine Menge ist durch ihre Elemente bestimmt (und durch nichts anderes). Beispielsweise gilt

$$\{1, 2\} = \{1, 1 + 1\} \quad \text{oder auch} \quad \{1, 2\} = \{1, 2, 1, 1, 2\} ,$$

denn alle obigen Mengen haben genau die Elemente 1 und 2.

- Zu (2). Das Symbol  $\emptyset$  ist eine „Konstante“. Es steht für eine Menge mit der geforderten Eigenschaft. Die leere Menge ist wegen Extensionalität (1) eindeutig: wenn eine Menge  $A$  keine Elemente hat, folgt  $A = \emptyset$ .

Zu (3). Wir schreiben  $\{A, B\}$  für eine Menge mit den Elementen  $A$  und  $B$ . Wenn  $A \neq B$  gilt, hat diese Menge genau zwei Elemente.

Wenn  $A = B$  gilt, erhalten wir eine einelementige Menge  $\{A\}$ , denn nach (1) gilt

$$\{A, A\} = \{A\} .$$

Zu (4). *Notation.* Das Symbol „ $\exists$ “ heißt *Existenzquantor*. Der Ausdruck „ $\exists B \in A$ “ bedeutet, dass die folgende Aussage (hier  $X \in B$ ) für mindestens ein Element  $B$  von  $A$  richtig ist.

*Bedeutung.* Die Menge  $\bigcup A$  dürfen wir später etwas anschaulicher auch als

$$\bigcup A = \bigcup_{B \in A} B$$

schreiben. Nach (1) ist sie eindeutig bestimmt.

Um zwei Mengen  $A$  und  $B$  zu vereinigen, bilden wir zunächst die Paarmenge:

$$A \cup B = \bigcup \{A, B\} .$$

Zu (5). *Notation.* Im Ausdruck  $\exists A$  haben wir keine Menge angegeben, aus der  $A$  stammen muss. Das heißt, es muss nur „irgendein“  $A$  existieren, hier also eine beliebige Menge.

*Bedeutung.* Man kann natürliche Zahlen durch Mengen darstellen. Dabei schreiben wir  $0$  als leere Menge  $\underline{0} = \emptyset$ , und wenn wir für  $n \in \mathbb{N}$  schon eine Menge  $\underline{n}$  konstruiert haben, sei  $\underline{n+1} = \underline{n} \cup \{\underline{n}\}$ . Dann bekommen wir beispielsweise

$$\underline{1} = \underline{0} \cup \{0\} = \{0\} , \quad \underline{2} = \underline{1} \cup \{1\} = \{0, 1\} , \quad \text{und allgemein } \underline{n} = \{0, \dots, \underline{n-1}\} .$$

Insbesondere hat die Menge  $\underline{n}$  tatsächlich genau  $n$  Elemente.

Aus dem Prinzip der vollständiger Induktion 1.5 (5) ergibt sich später, dass die obige Menge  $A$  alle natürlichen Zahlen enthalten, also unendlich groß sein muss. Allerdings ist  $A$  durch das obige Axiom nicht eindeutig festgelegt, und wird im Folgenden auch keine Rolle mehr spielen. Daher haben wir auch keine spezielle Notation für diese Menge eingeführt.

Zu (6). Für den rechten Ausdruck  $\forall X \in B X \in A$  (der auch in (1) schon vorkam) schreiben wir später kurz

$$B \subset A .$$

Dabei benutzen wir das Symbol „ $\subset$ “ auch dann, wenn die beiden Mengen gleich sind.

Die Potenzmenge ist nie leer; sie enthält zumindest  $\emptyset$  und  $A$  selbst. Wegen Extensivität ist  $\mathcal{P}(A)$  durch  $A$  eindeutig festgelegt.

Zu (7). *Notation.* Im vorderen Teil des Ausdrucks  $\{X \in A \mid P(X)\}$  führen wir — ähnlich wie bei einem Existenz- oder Allquantor — eine Variable ein, hier  $X$ . Im hinteren Teil legen wir fest, welche Eigenschaft ein Element  $X$  von  $A$  erfüllen muss, um zur neuen Menge zu gehören. Dabei wollen wir nur „mathematische“ Eigenschaften verwenden, siehe Bemerkung 1.4.

Beim Aussonderungsaxiom ist es sehr wichtig, dass wir immer nur Teilmengen einer bereits bekannten Menge bilden (hier  $A$ ), siehe auch Bemerkung 1.3.

*Bedeutung.* Dieses Axiom und die damit verbundene Notation sind sehr wichtig, um Teilmengen einer vorgegebenen Menge zu finden und zu beschreiben. Als Beispiel führen wir Schnittmengen und relative Komplemente ein:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{X \in A \mid X \in B\} , \\ A \setminus B &= \{X \in A \mid \neg X \in B\} . \end{aligned}$$

Zu (8). *Notation.* Im hinteren Teil des Ausdrucks  $\{F(X) \mid X \in A\}$  führen wir eine Variable ein, hier  $X$ . Diese Variable dürfen wir im vorderen Teil benutzen, um ein Element der neuen

Menge zu konstruieren. Auch hier ist wichtig, dass  $X$  aus einer bereits bekannten Menge stammt, und dass  $F(X)$  ein „mathematischer“ Ausdruck ist.

*Bedeutung.* Dieses Axiom ist ebenfalls hilfreich, um neue Mengen zu beschreiben.

Falls  $F$  einfach eine Abbildung von einer Menge  $A$  in eine Menge  $B$  ist, die wir schon kennen (siehe Definition 1.9), können wir allerdings genausogut das Aussonderungssaxiom benutzen:

$$\{ F(X) \mid X \in A \} = \{ Y \in B \mid \exists X \in A Y = F(X) \} .$$

Wenn man oben die Begriffe „Eigenschaft“ und „Operation“ mit Methoden der Logik spezifiziert, und noch das „Fundierungsaxiom“ ergänzt, erhält man das Axiomensystem ZF („Zermelo-Fraenkel“).

Darüberhinaus wird häufig noch das „Auswahlaxiom“ gefordert, man spricht dann vom Axiomensystem ZFC (ZF und „choice“). Das Auswahlaxiom ist allerdings nicht ganz so leicht zu formulieren wie die anderen. Sie werden es später voraussichtlich in Gestalt des „Lemmas von Zorn“ kennenlernen.

Es ist nach Gödels zweitem Unvollständigkeitssatz von 1931 unmöglich zu zeigen, dass das Zermelo-Fraenkel-Axiomensystem widerspruchsfrei ist. Die Tatsache, dass auch knapp 100 Jahre nach seiner Formulierung noch kein Widerspruch gefunden wurde, spricht aber sehr dafür.

1.3. BEMERKUNG. In der Sprache von Zermelo und Fraenkel dürfen wir den Ausdruck (1.1) nicht hinschreiben. Dadurch umgehen wir die Russellsche Antinomie.

Wenn wir eine beliebige Menge  $M$  wählen, dann existiert mit Aussonderung (7) aber immerhin

$$N = \{ X \in M \mid \neg X \in X \} \subset M .$$

Wäre  $N \in M$ , dann würde  $N \in N$  wieder genau dann gelten, wenn  $N \notin N$ , ein Widerspruch.

Jede Menge  $M$  besitzt also eine Teilmenge  $N \subset M$  mit  $N \notin M$ . Insbesondere kann es keine „Menge aller Mengen“ geben.

1.4. BEMERKUNG. Wir haben nicht genau festgelegt, was „Eigenschaften“ und „Operationen“ sein sollen. Das ist aber wichtig, wie folgendes Beispiel zeigt. Wir betrachten

$$\{ X \in \mathbb{N} \mid X \text{ lässt sich auf deutsch nicht mit weniger als hundert Wörtern beschreiben} \} .$$

Wenn das eine wohldefinierte Menge wäre, hätte sie (als Teilmenge von  $\mathbb{N}$  nach Satz 1.22) ein kleinstes Element. Aber das wäre dann eine Zahl, die wir auf deutsch mit weniger als hundert Wörtern beschreiben können. Um solche Antinomien zu verhindern, dürfen wir für  $P$  nur „mathematische“ Kriterien zulassen. Was erlaubt ist und was nicht, sehen wir im Laufe der Zeit anhand der Aussagen in unser Vorlesung.

### 1.b. Vollständige Induktion

Mit Methoden der Logik und Mengenlehre lassen sich die natürlichen Zahlen relativ gut beschreiben, dabei dient das „Prinzip der vollständigen Induktion“ zur Charakterisierung von  $\mathbb{N}$ . Für die meisten Mathematiker ist vollständige Induktion jedoch in erster Linie eine sehr nützliche Beweismethode.

Wir benutzen in diesem Abschnitt in der Regel Großbuchstaben für Variablen, die für Mengen stehen können, und Kleinbuchstaben für Variablen, die für Zahlen oder allgemeinere Elemente von Mengen stehen können. Dabei ignorieren wir, dass wir im letzten Abschnitt so getan haben, also wären alle Objekte der Mathematik Mengen.

Die folgende Beschreibung der natürlichen Zahlen stammt von Peano aus dem Jahre 1889.

1.5. ANNAHME (Peano-Axiome). Die Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  hat folgende Eigenschaften.

- (1) Es gibt eine Zahl  $0 \in \mathbb{N}$ .
- (2) Jede Zahl  $n \in \mathbb{N}$  hat einen *Nachfolger*, geschrieben  $n + 1 \in \mathbb{N}$ .
- (3) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $n + 1 \neq 0$ .
- (4) Für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt  $n + 1 = m + 1$  genau dann, wenn  $m = n$ .
- (5) *Prinzip der vollständigen Induktion*. Es sei  $P$  eine Eigenschaft. Wenn  $P(0)$  gilt und für alle  $n \in \mathbb{N}$  aus  $P(n)$  auch  $P(n + 1)$  folgt, dann gilt  $P(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Wir haben in Bemerkung 1.2 zum Unendlichkeitsaxiom (5) bereits eine Beschreibung der natürlichen Zahlen durch Mengen gesehen, bei der Nachfolger von  $\underline{n}$  durch  $\underline{n} \cup \{\underline{n}\}$  beschrieben wird.

1.6. BEMERKUNG. Mit den Peano-Axiomen lassen sich manche „Operationen“ mit natürlichen Zahlen *rekursiv* definieren.

- (1) Die Addition zweier natürlicher Zahlen  $m, n$  lässt sich rekursiv in  $n$  definieren durch

$$m + 0 = m \quad \text{und} \quad m + (n + 1) = (m + n) + 1 .$$

Man beachte, dass „+1“ im letzten Ausdruck immer den Nachfolger bezeichnet.

Aus der Definition folgt aber, dass der Nachfolger von  $n$  die Summe von  $n$  und dem Nachfolger der 0 ist, das heißt, die beiden möglichen Lesarten von  $n+1$  führen zum gleichen Ergebnis.

- (2) Auch die Multiplikation lässt sich rekursiv definieren durch

$$m \cdot 0 = 0 \quad \text{und} \quad m \cdot (n + 1) = (m \cdot n) + m .$$

- (3) Potenzen definieren wir rekursiv durch

$$m^0 = 1 \quad \text{und} \quad m^{n+1} = m^n \cdot m .$$

- (4) Zu guter Letzt führen wir noch die *Fakultät*  $! : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ein durch

$$0! = 1 \quad \text{und} \quad (n + 1)! = n! \cdot (n + 1) .$$

Anschließend müssten wir jetzt beweisen, dass aus diesen Definitionen die bekannten Rechenregeln für natürliche Zahlen folgen. Aber das würde hier zu weit führen.

1.7. BEMERKUNG. Es folgen zwei Bemerkungen aus dem Bereich Logik / Mengenlehre.

- (1) Nach dem ersten Unvollständigkeitssatz von Gödel aus dem Jahr 1931 können wir die natürlichen Zahlen nicht mit endlich vielen Axiomen so gut beschreiben, dass wir jeden gültigen Satz über die natürlichen Zahlen aus diesen Axiomen folgern könnten — es sei denn, unser Axiomensystem wäre in sich widersprüchlich.
- (2) Aus den Peano-Axiomen folgt noch nicht, dass jede natürliche Zahl aus der 0 in endlich vielen Schritten durch Bilden des Nachfolgers hervorgeht.

Aber die Peano-Axiome gelten immerhin für die Menge der natürlichen Zahlen, die wir „kennen“. Und für die Zwecke dieser Vorlesung (und der meisten anderen Mathematik-Vorlesungen) reicht unsere Vorstellung von den natürlichen Zahlen in der Regel völlig aus.

Wir benutzen das Prinzip der vollständigen Induktion im Folgenden, um exemplarisch einige interessante Sätze zu beweisen. Manche von ihnen werden wir im Laufe der Vorlesung noch benutzen.

1.8. BEISPIEL (Geometrische Summe). Es sei  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 1$ . Dann gilt für alle  $n$

$$(P(n)) \quad \sum_{i=1}^n x^i = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x} .$$

Den Ausdruck auf der linken Seite können wir übrigens wie in Bemerkung 1.6 rekursiv für alle  $n \in \mathbb{N}$  definieren, dabei hat die „leere Summe“ ( $n = 0$ ) den Wert 0. Die folgende Variante wird auch häufig gebraucht:

$$\sum_{i=0}^n x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} .$$

Hier erhält man für  $n = 0$  den Wert 1.

Natürliche Zahlen dienen zum Zählen. Um Elemente von Mengen zu zählen, definieren wir zunächst Abbildungen zwischen Mengen und führen dann einige wichtige Eigenschaften ein.

1.9. DEFINITION. Es seien  $M$  und  $N$  Mengen. Eine *Abbildung*  $f: M \rightarrow N$  ordnet jedem Element  $X \in M$  ein Element  $f(X) \in N$  zu. Zwei Abbildungen  $f, g: M \rightarrow N$  heißen *gleich*, kurz  $f = g$ , wenn  $f(X) = g(X)$  für alle  $X \in M$  gilt.

Wichtig ist dabei, dass das Element  $f(X) \in N$  durch  $X \in M$  eindeutig bestimmt ist, und nicht noch von anderen Größen abhängt. Es gibt auch eine Möglichkeit, Abbildungen mit Hilfe von Mengen zu beschreiben. Aber dieser Zugang ist etwas umständlich und würde uns voraussichtlich nicht helfen, um Abbildungen besser zu verstehen. Daher tun wir so, als wären Abbildungen ein neuer Begriff.

1.10. DEFINITION. Es sei  $f: M \rightarrow N$  eine Abbildung zwischen Mengen. Dann heißt  $f$

(1) *injektiv*, wenn für alle  $X, Y \in M$  gilt

$$f(X) = f(Y) \implies X = Y ,$$

(2) *surjektiv*, wenn für alle  $Z \in N$  ein  $X \in M$  existiert mit

$$f(X) = Z ,$$

(3) *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

1.11. BEISPIEL. Sie kennen Abbildungen bereits aus der Schule, aber möglicherweise unter anderem Namen.

(1) Die Sinusfunktion ist eine Abbildung  $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sie ist weder injektiv noch surjektiv.

(2) Die Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist zwar injektiv, aber nicht surjektiv.

1.12. DEFINITION. Es seien  $f: M \rightarrow N$  und  $g: L \rightarrow M$  Abbildungen. Dann definieren wir die *Verkettung*  $f \circ g: L \rightarrow N$  (lies: *f nach g*) für alle  $X \in L$  durch

$$(f \circ g)(X) = f(g(X)) .$$

Außerdem definieren wir auf jeder Menge die *Identitätsabbildung*, kurz *Identität*  $\text{id}_M: M \rightarrow M$  für alle  $Y \in M$  durch

$$\text{id}_M(Y) = Y .$$

1.13. BEMERKUNG. Es seien  $f: M \rightarrow N$  und  $g: L \rightarrow M$  Abbildungen. Dann gelten folgende Implikationen.

(1) Wenn  $f$  und  $g$  injektiv sind, ist  $f \circ g$  injektiv.

(2) Wenn  $f$  und  $g$  surjektiv sind, ist  $f \circ g$  surjektiv.

(3) Wenn  $f$  und  $g$  bijektiv sind, ist  $f \circ g$  bijektiv.

(4) Wenn  $f \circ g$  injektiv ist, ist  $g$  injektiv (Übung).

(5) Wenn  $f \circ g$  surjektiv ist, ist  $f$  surjektiv (Übung).

1.14. BEMERKUNG. Eine Abbildung  $f: M \rightarrow N$  zwischen Mengen ist genau dann bijektiv, wenn sie *umkehrbar* ist, das heißt, wenn eine *Umkehrabbildung*  $g: N \rightarrow M$  existiert, so dass

$$g \circ f = \text{id}_M \quad \text{und} \quad f \circ g = \text{id}_N .$$

Um die Umkehrabbildung  $g: N \rightarrow M$  zu konstruieren, muss zu jedem  $Y \in N$  ein  $X \in M$  *existieren*, das man  $Y$  zuordnen kann, und  $X$  muss *eindeutig* durch  $Y$  bestimmt sein. Man fasst diese beiden Bedingungen zusammen und sagt, die Umkehrabbildung  $g$  sei *wohldefiniert*.

Wir betrachten wieder die Mengen  $\underline{n} = \{0, \dots, n-1\}$  aus Bemerkung 1.2 zum Unendlichkeitsaxiom (5). Dann gilt  $m \leq n$  genau dann, wenn  $\underline{m} \subset \underline{n}$ .

1.15. PROPOSITION (Schubfachprinzip). *Es seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $f: \underline{m} \rightarrow \underline{n}$  injektiv. Dann gilt  $m \leq n$ .*

1.16. DEFINITION. Eine Menge  $M$  heißt *endlich*, wenn es für ein  $n \in \mathbb{N}$  eine bijektive Abbildung  $f: \underline{n} \rightarrow M$  gibt. In diesem Fall heißt  $n = \#M$  die *Anzahl* der Elemente von  $M$ , und man sagt,  $M$  sei eine  *$n$ -elementige* Menge.

Falls keine solche Abbildung existiert, heißt  $M$  *unendlich*.

1.17. BEMERKUNG. Proposition 1.15 heißt „Schubfachprinzip“, da es im Umkehrschluss besagt: wenn man mehr Gegenstände in Schubladen legt, als man Schubladen zur Verfügung hat (also falls  $m > n$ ), dann liegen hinterher in mindestens einer Schublade zwei Gegenstände.

Proposition 1.15 garantiert, dass aus  $f: \underline{m} \rightarrow M$  bijektiv und  $h: \underline{n} \rightarrow M$  bijektiv bereits  $m = n$  folgt. Man sagt, die Anzahl  $\#M \in \mathbb{N}$  sei *wohldefiniert*.

Wir erweitern die Definition des Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$  aus der Schule, indem wir für  $n$  auch reelle Zahlen zulassen.

1.18. DEFINITION (Binomialkoeffizienten). Für  $x \in \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{N}$  sei

$$\binom{x}{0} = 1 \quad \text{und} \quad \binom{x}{k} = \prod_{i=1}^k \frac{x+1-i}{i} .$$

Auch  $\binom{x}{k}$  lässt sich in  $k$  rekursiv definieren.

1.19. SATZ (Additionstheorem für Binomialkoeffizienten). *Für alle  $x \in \mathbb{R}$  und alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt*

$$\binom{x+1}{k+1} = \binom{x}{k} + \binom{x}{k+1} .$$

Für  $n \in \mathbb{N}$  können wir  $\binom{n}{k}$  mit dem obigen Satz und dem Pascalschen Dreieck rekursiv berechnen.

1.20. SATZ. *Die Menge der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge hat  $\binom{n}{k}$  Elemente.*

Der folgende Satz gilt analog in jedem Körper (sogar in jedem kommutativen Ring).

1.21. SATZ (Binomische Formel). *Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} .$$

Den folgenden Satz haben wir in Bemerkung 1.4 schon benutzt.

1.22. SATZ. *Jede Teilmenge  $M \subset \mathbb{N}$  besitzt ein kleinstes Element.*

## 1.c. Angeordnete Körper

In diesem und dem nächsten Abschnitt wiederholen wir die reellen Zahlen, die wir aus der Schule kennen. In diesem Abschnitt geht es um Rechenregeln, die in den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ , aber beispielsweise auch in den rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  gelten. Dabei betrachten wir zum einen die Grundrechenarten, und zum anderen die Anordnung. Den entscheidenden Unterschied zwischen  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{Q}$  betrachten wir dann im nächsten Abschnitt.

Bei Körpern kommen Abbildungen wie Addition und Multiplikation vor, die von mehr als einem Argument abhängen. Um sie zu beschreiben, führen wir zunächst das kartesische Produkt ein.

1.23. DEFINITION. Es sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ , und  $M_1, \dots, M_n$  seien Mengen. Dann ist ihr *kartesisches Produkt* die Menge  $M_1 \times \dots \times M_n$ , die zu jedem  $X_1 \in M_1, \dots$  und jedem  $X_n \in M_n$  ein Element  $(X_1, \dots, X_n)$  enthält. Das Objekt  $(X_1, \dots, X_n)$  heißt *n-Tupel* (oder auch *Paar*, falls  $n = 2$ , *Tripel*, falls  $n = 3$ , und so weiter).

Ähnlich wie Abbildungen lassen sich auch kartesische Produkte mit Methoden der Mengenlehre durch Mengen beschreiben. Aber auch hier würde uns das das Verständnis nicht erleichtern, so dass wir kartesische Produkte stattdessen als neue Objekte einführen.

1.24. BEMERKUNG. Die Bedingung  $n \geq 2$  ist bei Tupeln nicht wirklich nötig. Man kann sich überlegen, dass jedes kartesische Produkt im Fall  $n = 0$  genau ein Tupel enthält, nämlich das leere  $( )$ . Und im Falle  $n = 1$  identifizieren wir das kartesische Produkt einfach mit der Menge  $M_1$ .

Bei einem Tupel ist die Reihenfolge der Einträge wichtig, im Gegensatz zu Mengen:

$$\{1, 2\} = \{2, 1\} \subset \mathbb{N}, \quad \text{aber} \quad (1, 2) \neq (2, 1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Außerdem darf ein Tupel dasselbe Element mehrfach enthalten:

$$\{1, 1\} = \{1\} \subset \mathbb{N}, \quad \text{aber} \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (2, 1, 1) \neq (2, 1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

1.25. BEMERKUNG. Es seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $M_1, \dots, M_n$  wie oben, und  $N$  eine weitere Menge. Dann können wir Abbildungen  $f: M_1 \times \dots \times M_n \rightarrow N$  betrachten. Solche Abbildungen ordnen je einem Element  $m_1 \in M_1, \dots, m_n \in M_n$  ein eindeutiges Element  $f(m_1, \dots, m_n) \in N$  zu (dabei haben wir ein Paar Klammern weggelassen). Wie in Bemerkung 1.24 kommt es hierbei auf die Reihenfolge der Argumente an.

Im Fall  $n = 1$  verhält sich alles genau wie in Definition 1.9, wir haben hier also nichts Neues konstruiert. Im Fall  $n = 0$  hat  $f$  nur einen einzigen Wert  $f() \in N$ , also verhält sich  $f$  in diesem Fall wie ein Element von  $N$ .

1.26. BEISPIEL. Sie kennen Beispiele von kartesischen Produkten und Abbildungen mit mehr als einem Argument.

- (1) Die Spielkarten in einem Skatspiel lassen sich beschreiben als kartesisches Produkt aus der Menge {Kreuz, Pik, Herz, Karo} der „Farben“ und der Menge {7, 8, 9, B, D, K, 10, A} der „Werte“.
- (2) Punkte in der Ebene werden in der analytischen Geometrie dargestellt durch zwei reelle Koordinaten, also beschreibt  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  die Euklidische Ebene — das kennen Sie aus der Schule. Analog beschreibt  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  den Euklidischen Raum.
- (3) Die Addition  $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ist eine Abbildung, die zwei natürlichen Zahlen eine weitere natürliche Zahl zuordnet. An Stelle von  $+(n, m)$  schreiben wir aber einfach  $n + m$ .

1.27. DEFINITION. Ein *Körper*  $(\mathbb{k}, +, \cdot, 0, 1)$  besteht aus einer Menge  $\mathbb{k}$ , zwei Abbildungen  $+: \mathbb{k} \times \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$  und  $\cdot: \mathbb{k} \times \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$ , und zwei Elementen  $0, 1 \in \mathbb{k}$ , so dass die folgenden Axiome gelten.

- (1) *Additive Gruppe*.  $(\mathbb{k}, +, 0)$  bildet eine abelsche Gruppe, das heißt, es gilt

(a) *Assoziativität.* Für alle  $x, y, z \in \mathbb{k}$  gilt

$$(x + y) + z = x + (y + z) .$$

(b) *Neutrales Element.* Für alle  $x \in \mathbb{k}$  gilt

$$0 + x = x .$$

(c) *Inverses Element.* Für alle  $x \in \mathbb{k}$  existiert ein Element  $y \in \mathbb{k}$ , so dass

$$x + y = 0 .$$

(d) *Kommutativität.* Für alle  $x, y \in \mathbb{k}$  gilt

$$x + y = y + x .$$

(2) *Nichttrivialität.* Es gilt  $0 \neq 1$ .

(3) *Multiplikative Gruppe.* Es sei  $\mathbb{k}^\times = \mathbb{k} \setminus \{0\}$ . Dann bildet auch  $(\mathbb{k}^\times, \cdot, 1)$  eine abelsche Gruppe.

(a) *Assoziativität.* Für alle  $x, y, z \in \mathbb{k}^\times$  gilt

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) .$$

(b) *Neutrales Element.* Für alle  $x \in \mathbb{k}^\times$  gilt

$$1 \cdot x = x .$$

(c) *Inverses Element.* Für alle  $x \in \mathbb{k}^\times$  existiert ein Element  $y \in \mathbb{k}^\times$ , so dass

$$x \cdot y = 1 .$$

(d) *Kommutativität.* Für alle  $x, y \in \mathbb{k}^\times$  gilt

$$x \cdot y = y \cdot x .$$

(4) *Distributivgesetze.* Für alle  $x, y, z \in \mathbb{k}$  gilt

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{und} \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z .$$

Die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  mit der üblichen Addition und Multiplikation erfüllen diese Eigenschaften bis auf (1c) und (3c). Um die additiven Inversen in (1c) zu erhalten, gehen wir zu den ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  über. In  $\mathbb{Z}$  gelten alle Axiome außer (3c). Um auch noch multiplikative Inverse zu bekommen, gehen wir zu den rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  über. In  $\mathbb{Q}$  gelten alle obigen Axiome, also bildet  $\mathbb{Q}$  einen Körper.

1.28. BEMERKUNG. Es folgen einige Erklärungen und kleinere Folgerungen aus den Axiomen.

(1) Wir benötigen (2), damit die Zahl 1 in (3) in der multiplikativen Gruppe  $\mathbb{k}^\times$  liegt.

(2) Für das additive inverse Element in (1c) schreiben wir  $-x$ , also gilt stets

$$x + (-x) = 0 .$$

(3) Das multiplikative inverse Element in (3c) dürfen wir nur für  $x \in \mathbb{k}^\times$ , also nur für  $x \neq 0$  bilden. Wir nennen es  $x^{-1}$ , also gilt

$$x \cdot x^{-1} = 1 .$$

(4) Multiplikation mit 0 ergibt wegen (4) stets 0. Insbesondere gelten (3a), (3b) und (3d) auch, wenn man für einzelne Variablen 0 einsetzt.

Später lassen wir den Punkt für die Multiplikation oft weg, wenn keine Gefahr einer Verwechslung besteht.

Als nächstes wollen wir Körper mit einer Anordnung betrachten. Eine „Relation“ auf einer Menge  $M$  ist nichts anderes als eine Eigenschaft von Elementen von  $M \times M$ , das heißt, für zwei Elemente von  $M$  ist sie entweder wahr oder falsch. Auch hier kommt es auf die Reihenfolge der Elemente an.

1.29. DEFINITION. Eine Ordnung auf einer Menge  $M$  ist eine Relation  $\prec$  auf  $M$  mit den folgenden Eigenschaften.

- (1) *Totalität* und *Antisymmetrie*. Für je zwei Elemente  $x, y$  von  $M$  gilt genau eine der drei Aussagen

$$x \prec y, \quad x = y \quad \text{oder} \quad y \prec x .$$

- (2) *Transitivität*. Für je drei Elemente  $x, y$  und  $z \in M$  gilt

$$(x \prec y \wedge y \prec z) \implies x \prec z .$$

Beispiele sind die Relation  $<$  auf  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  oder  $\mathbb{Q}$ , wie Sie sie aus der Schule kennen, und die Relation „steht im Wörterbuch vor“ auf der Menge der Wörter einer Sprache. Die Definition eines angeordneten Körpers sieht zunächst etwas anders aus.

1.30. DEFINITION. Ein *angeordneter Körper* ist ein Körper  $(\mathbb{k}, +, \cdot, 0, 1)$  mit einer Teilmenge  $\mathbb{k}_{>}$  positiver Elemente mit folgenden Eigenschaften

- (1) Für jedes  $x \in \mathbb{k}$  gilt genau eine der Aussagen

$$x = 0, \quad x \in \mathbb{k}_{>} \quad \text{oder} \quad -x \in \mathbb{k}_{>} .$$

- (2) Für alle  $x, y \in \mathbb{k}_{>}$  gilt

$$x + y \in \mathbb{k}_{>} \quad \text{und} \quad x \cdot y \in \mathbb{k}_{>} .$$

1.31. BEISPIEL. Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  bilden einen angeordneten Körper mit

$$\mathbb{Q}_{>} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} .$$

1.32. BEMERKUNG. Wir betrachten auf einem angeordneten Körper  $\mathbb{k}$  die Relation „ $<$ “, die für alle  $x, y \in \mathbb{k}$  durch

$$x < y \iff y - x \in \mathbb{k}_{>}$$

gegeben wird. Insbesondere bedeutet  $x \in \mathbb{k}_{>}$  genau  $x > 0$ . Außerdem schreiben wir

$$\begin{aligned} x > y &\iff y < x, \\ x \leq y &\iff x < y \vee x = y, \\ x \geq y &\iff y \leq x, \end{aligned}$$

Für  $\mathbb{Q}$  bedeuten diese Symbole das gleiche wie in der Schule.

Im Folgenden seien stets  $x, y, z, w \in \mathbb{k}$ .

- (1) Die Relation „ $<$ “ erfüllt die Ordnungsaxiome aus Definition 1.29.  
 (2) Sie ist mit der Addition verträglich, das heißt, es gilt

$$x < y \iff x + z < y + z .$$

- (3) Es sei  $z \neq 0$ . Falls  $0 < z$ , gilt

$$x < y \iff xz < yz .$$

Falls  $z < 0$ , gilt

$$x < y \iff yz < xz .$$

(4) Es sei  $x < y$  und  $z < w$ . Dann gilt

$$x + z < y + w .$$

Falls  $0 < x$  und  $0 < z$ , gilt außerdem

$$xz < yw .$$

(5) Es sei  $x \neq 0$ , dann gilt

$$0 < x^2 .$$

(6) Es sei  $0 < x$ , dann gilt

$$0 < 1/x .$$

(7) Falls  $x < y$  und  $0 < x$ , gilt

$$1/y < 1/x .$$

1.33. SATZ (Bernoulli-Ungleichung). Für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \geq -1$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx .$$

1.34. BEISPIEL. Man kann den Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen definieren durch  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  mit

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{C}} &= (0, 0) , & 1_{\mathbb{C}} &= (1, 0) , \\ (x, y) + (u, v) &= (x + u, y + v) , & \text{und} & & (x, y) \cdot (u, v) &= (xu - yv, xv + yu) . \end{aligned}$$

Die Zahl  $i = (0, 1)$  hat die Eigenschaft  $i^2 = -1$ . Man identifiziert  $x \in \mathbb{R}$  mit  $(x, 0)$  und schreibt später oft  $x + iy = (x, y)$ .

1.35. FOLGERUNG. Es gibt keine Teilmenge  $\mathbb{C}_{>} \subset \mathbb{C}$ , die die Axiome aus Definition 1.30 erfüllt.

In der linearen Algebra oder spätestens in der Algebra-Vorlesung lernen Sie endliche Körper kennen. Auch diese lassen sich nicht anordnen (aber aus einem anderen Grund).

### 1.d. Vollständigkeit

3.11.21

In diesem Abschnitt geben wir ein Axiom an, das garantiert, dass wir für die Zwecke der Analysis „genug“ Zahlen zur Verfügung haben. Unser Begriff von Vollständigkeit benötigt dabei zunächst einmal nur die Ordnung „ $<$ “ aus Bemerkung 1.32. Von den reellen Zahlen fordern wir Vollständigkeit, und haben  $\mathbb{R}$  damit in einem gewissen Sinne auch schon eindeutig beschrieben. Wir werden sehen, dass  $\mathbb{Q}$  nicht vollständig ist.

1.36. BEISPIEL. In  $\mathbb{Q}$  gibt es keine Zahl  $\frac{p}{q}$ , so dass  $(\frac{p}{q})^2 = 2$ .

Es gibt viele Möglichkeiten, Vollständigkeit eines angeordneten Körpers zu definieren. Manche dieser anderen Definitionen leiten wir im Laufe der Vorlesung noch als Folgerungen aus unserem Vollständigkeitsaxiom her.

1.37. DEFINITION. Es sei  $(M, <)$  eine Menge mit einer Ordnung. Eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{k}$  heißt von oben (von unten) beschränkt in  $M$ , wenn es ein Element  $x \in M$  gibt, so dass für alle  $y \in A$  gilt

$$y = x \vee y < x \quad (\text{beziehungsweise } y = x \vee x < y).$$

In diesem Fall heißt  $x$  eine obere (untere) Schranke von  $A$ .

Einen wichtigen Spezialfall bilden angeordnete Körper  $(\mathbb{k}, +, \cdot, 0, 1, \mathbb{k}_{>})$  mit der Ordnung „ $<$ “ aus Bemerkung 1.32. Die beiden folgenden Begriffe spielen in der Analysis eine große Rolle.

1.38. DEFINITION. Es sei  $(M, <)$  eine Menge mit einer Ordnung und  $A \subset M$ .

(1) Es sei  $A$  von oben beschränkt. Ein Element  $x \in M$  heißt *Supremum* von  $A$ , kurz

$$x = \sup A ,$$

wenn  $x$  eine obere Schranke von  $A$  ist, und wenn für jede andere obere Schranke  $z \in M$  von  $A$  entweder  $x = z$  oder  $x \prec z$  gilt.

(2) Es sei  $A$  von unten beschränkt. Ein Element  $x \in M$  heißt *Infimum* von  $A$ , kurz

$$x = \inf A ,$$

wenn  $x$  eine untere Schranke von  $A$  ist, und wenn für jede andere untere Schranke  $z \in M$  von  $A$  entweder  $x = z$  oder  $z \prec x$  gilt.

1.39. BEMERKUNG. Wenn  $A$  ein Supremum oder ein Infimum besitzt, dann ist es eindeutig. In diesem Fall ist die Schreibweise  $\sup A$  beziehungsweise  $\inf A$  gerechtfertigt.

Wenn wir aber nicht wissen, ob ein Supremum oder Infimum existiert, dürfen wir nicht einfach  $\sup A$  oder  $\inf A$  schreiben. Später werden wir „sup“ und „inf“ nur in Situationen benutzen, in denen wir die Existenz eines Supremums beziehungsweise Infimums (mit ein paar miesen Tricks) gewährleisten können.

1.40. BEISPIEL. Wir betrachten einige einfache Beispiele.

(1) In  $\mathbb{N}$  gilt

$$\sup\{3, 7, 12\} = 12 \quad \text{und} \quad \inf\{3, 7, 12\} = 3 .$$

(2) In  $\mathbb{Q}$  gilt

$$\inf\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\} = 0 .$$

Man beachte, dass das Infimum (genau wie das Supremum) kein Element der gegebenen Teilmenge sein muss.

(3) Die Teilmenge

$$A = \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid \left(\frac{p}{q}\right)^2 < 2\right\} \subset \mathbb{Q}$$

ist sowohl von oben als auch von unten beschränkt. Sie besitzt aber weder ein Supremum noch ein Infimum in  $\mathbb{Q}$ .

1.41. DEFINITION. Eine Menge  $(M, \prec)$  mit einer Ordnung heißt (*ordnungs-*) *vollständig*, wenn jede von oben (unten) beschränkte, nicht leere Teilmenge  $A \subset M$  ein Supremum (Infimum) besitzt.

Ein angeordneter Körper  $(\mathbb{k}, +, \cdot, 0, 1, \mathbb{k}_{>})$  heißt (*ordnungs-*) *vollständig*, wenn  $(\mathbb{k}, \prec)$  mit der Ordnung „ $\prec$ “ aus Bemerkung 1.32 vollständig ist.

1.42. BEISPIEL. Die rationalen Zahlen sind nicht ordnungsvollständig.

Den folgenden Satz kann man (in jedem gegebenen Modell der Mengenlehre) beweisen. Da wir mit reellen Zahlen „nur rechnen“ wollen, geben wir den Beweis nicht an. Am Ende des Kapitels können wir immerhin eine Beweismethode andeuten.

1.43. SATZ. *Es gibt einen ordnungsvollständigen angeordneten Körper, und er ist bis auf Isomorphie eindeutig.*

1.44. BEMERKUNG. „Bis auf Isomorphie eindeutig“ bedeutet: wenn sowohl  $(\mathbb{k}, +, \cdot, 0, 1, \mathbb{k}_{>})$  als auch  $(\mathbb{k}', +, \cdot, 0', 1', \mathbb{k}'_{>})$  ordnungsvollständige angeordnete Körper sind (der kleine Strich „ $'$ “

bedeutet dabei nicht „Ableitung“, sondern dient hier nur dazu, ein weiteres Symbol zu bekommen, das fast genauso aussieht, aber etwas anderes bedeutet), dann existiert eine bijektive Abbildung  $F: \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}'$ , die mit der Struktur verträglich ist. Das heißt, für alle  $x$  und alle  $y \in \mathbb{k}$  gilt

$$\begin{aligned} F(x + y) &= F(x) + F(y) , \\ F(xy) &= F(x) \cdot F(y) , \\ 0 < x &\Leftrightarrow 0 <' F(x) . \end{aligned}$$

Da die neutralen Elemente durch die Axiome 1.27 (1b) und (3b) eindeutig beschrieben werden, folgt daraus auch

$$F(0) = 0' \quad \text{und} \quad F(1) = 1' .$$

Mit anderen Worten verhalten sich  $\mathbb{k}$  und  $\mathbb{k}'$  völlig gleich (in beiden Körpern gelten genau die gleichen Rechenregeln, Sätze und so weiter).

1.45. ANNAHME. Es sei  $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \mathbb{R}_{>})$  ein ordnungsvollständiger angeordneter Körper, und es gelte

$$\{0, 1\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} .$$

Dabei seien Addition und Multiplikation auf  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Q}$  gerade die Einschränkung der Addition und Multiplikation von  $\mathbb{R}$  auf den jeweiligen Zahlbereich.

1.46. SATZ. Die reellen Zahlen bilden einen archimedisch angeordneten Körper, das heißt, für alle  $x \in \mathbb{R}_{>}$  und alle  $y \in \mathbb{R}_{>}$  existiert eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ , so dass

$$y < nx .$$

9.11.21

1.47. FOLGERUNG. Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  liegen dicht in  $\mathbb{R}$ , das heißt, für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x < y$  existiert eine rationale Zahl  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  mit

$$x < \frac{p}{q} < y .$$

1.48. BEMERKUNG. Wir können jetzt  $\mathbb{R}$  als Teilmenge der Potenzmenge  $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$  konstruieren nach einer Methode von Bertrand (1849) und Dedekind (1872). Ein *Dedekindscher Schnitt* ist eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{Q}$  mit folgenden Eigenschaften.

- (1) Es gilt weder  $A = \emptyset$  noch  $A = \mathbb{Q}$ .
- (2)  $A$  ist nach unten abgeschlossen, das heißt, für alle  $x \in A$  und alle  $y \in \mathbb{Q}$  mit  $y < x$  gilt  $y \in A$ .
- (3)  $A$  hat kein größtes Element, das heißt für alle  $x \in A$  existiert ein  $y \in A$  mit  $x < y$ .

Genauer gesagt, ist  $A$  die untere Menge eines Dedekindschen Schnittes; die obere Menge ist  $\mathbb{Q} \setminus A$ . Dann setzen wir

$$\underline{\mathbb{R}} = \{ A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \mid A \text{ ist Dedekindscher Schnitt} \} .$$

Die Idee hinter dieser Konstruktion ist folgende. Jeder Dedekindsche Schnitt  $A \in \underline{\mathbb{R}}$  steht am Ende für die Zahl  $\sup A \in \mathbb{R}$ ; diese existiert, da nach Voraussetzung  $A$  nicht leer und wegen (1) und (2) von oben beschränkt ist. Außerdem sorgt (3) dafür, dass jede rationale Zahl nur auf eine Weise dargestellt werden kann. Mit Hilfe der Dichtheit von  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  können wir uns überzeugen, dass wie auf diese Weise wirklich alle reellen Zahlen bekommen.

Um  $\mathbb{R}$  zu konstruieren, nützen uns diese Überlegungen allerdings nichts. Stattdessen müssen wir Addition und Multiplikation von Dedekindschen Schnitten definieren und zeigen, dass alle Axiome aus den Definitionen 1.27, 1.30 und 1.41 gelten. Danach identifizieren wir  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  mit dem Dedekindschen Schnitt

$$\underline{\frac{p}{q}} = \left\{ \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \mid \frac{r}{s} < \frac{p}{q} \right\} .$$



## Folgen, Reihen und Grenzwerte

In diesem Kapitel geht es im weitesten Sinne um „Näherungsverfahren“, die es einem ermöglichen, Zahlen, die man nicht genau kennt, so gut wie möglich anzunähern. Ein Beispiel ist das Heron-Verfahren zur Bestimmung von Quadratwurzeln, siehe Beispiel 2.18.

Eine zentrale Frage ist dabei, ob sich die Näherungslösungen, die man konstruiert, tatsächlich an einen gewissen Wert annähern. Das Heron-Verfahren liefert beispielsweise eine Folge rationaler Zahlen, aber erst nach Vervollständigung, also Übergang zu den reellen Zahlen, existiert ein Grenzwert. Bei Näherungsrechnungen in der Physik ist nicht immer klar, ob ein Grenzwert existiert—obwohl die berechneten Näherungen oft verblüffend genau mit Messergebnissen übereinstimmen.

Eine weitere Frage ist, ob der Grenzwert tatsächlich das gegebene Problem löst. Dazu müssen wir lernen, mit Grenzwerten zu rechnen.

Am Ende des Kapitels werden wir auch Reihen betrachten. Eigentlich ist das nur eine spezielle Methode zur Konstruktion von Folgen, aber Reihen sind in der Mathematik so häufig, dass es sich lohnt, sie näher anzuschauen.

### 2.a. Konvergenz von Folgen

Wir wollen Folgen reeller Zahlen betrachten und Begriffe wie „Konvergenz“ und „Grenzwert“ einführen. Dabei spielt die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  eine große Rolle.

2.1. DEFINITION. Wir definieren den *Absolutbetrag*  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und das Vorzeichen  $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \{1, 0, -1\}$  durch

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad \text{sign } x = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \text{ und} \\ -1 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$  stets  $x = \text{sign } x \cdot |x|$ . Man beachte, dass das Vorzeichen von 0 auch anders definiert werden kann.

2.2. BEMERKUNG. Für den Absolutbetrag gelten folgende Eigenschaften, wobei stets  $x, y \in \mathbb{R}$ .

(1) *Positivität*. Es gilt

$$|x| \geq 0 \quad \text{und} \quad |x| = 0 \iff x = 0.$$

(2) *Multiplikativität*. Es gilt

$$|xy| = |x| \cdot |y|.$$

(3) *Subadditivität*. Es gilt

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Darüberhinaus gilt noch

$$x \leq |x| \quad \text{und} \quad |y - x| \geq ||y| - |x||$$

2.3. BEMERKUNG. Wir können den Absolutbetrag benutzen, um den *Abstand*  $|x - y|$  zweier reeller Zahlen  $x, y \in \mathbb{R}$  zu beschreiben. Aus Bemerkung 2.2 ergeben sich die folgenden Eigenschaften für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

(1) *Positivität.* Es gilt

$$|x - y| \geq 0, \quad \text{und} \quad |x - y| = 0 \iff x = y.$$

(2) *Symmetrie.* Es gilt

$$|x - y| = |y - x|.$$

(3) *Dreiecksungleichung.* Es gilt

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|.$$

2.4. DEFINITION. Eine *Folge*  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (oder kurz  $(a_n)_n$ ) von Elementen einer Menge  $M$  (oder kurz *in*  $M$ ) ist eine Abbildung

$$a: \mathbb{N} \rightarrow M \quad \text{mit} \quad n \mapsto a_n \in M.$$

Man nennt  $a_n$  das *n-te Glied* der Folge und  $n \in \mathbb{N}$  seinen (*Folgen-*) *Index*.

Folgen in  $\mathbb{R}$  heißen auch Folgen reeller Zahlen. Wir lassen den Zusatz „ $\in \mathbb{N}$ “ in  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nur dann weg, wenn er aus dem Zusammenhang klar ist.

2.5. BEISPIEL. Manche Folgen lassen sich explizit angeben, zum Beispiel die Folge  $(n^2)_n$  in  $\mathbb{N}$ . Für andere Folgen gibt es rekursive Bildungsgesetze, wie etwa für die Folge  $(n!)_n$  in Bemerkung 1.6 (4). Wir dürfen aber auch über Folgen sprechen, deren Folgenglieder wir nicht explizit angeben können.

2.6. DEFINITION. Es sei  $(a_n)_n$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}$ . Dann *konvergiert*  $(a_n)_n$  (für  $n \rightarrow \infty$ ) gegen  $a$ , kurz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

genau dann, wenn es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$n \geq N \implies |a_n - a| < \varepsilon.$$

In diesem Fall heißt  $a$  der *Grenzwert* der Folge  $(a_n)_n$ , und  $(a_n)_n$  heißt *konvergent*. Falls der Grenzwert 0 ist, nennt man  $(a_n)_n$  eine *Nullfolge*. Falls kein  $a \in \mathbb{R}$  die obige Eigenschaft erfüllt, heißt  $(a_n)_n$  *divergent*.

Wenn  $\varepsilon$  und  $a$  gegeben sind, gilt

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon),$$

$$\text{wobei} \quad (b, c) = \{x \in \mathbb{R} \mid b < x \text{ und } x < c\}$$

das (*offene*) *Intervall* zwischen  $b, c \in \mathbb{R}$  bezeichne. Wir nennen  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  auch die  $\varepsilon$ -*Umgebung* von  $a$ . „Konvergenz gegen  $a$ “ bedeutet also, dass für jedes noch so kleine  $\varepsilon > 0$  nur für endlich viele Indizes  $n \in \mathbb{N}$  (nämlich höchstens die  $N$  vielen Indizes  $0, \dots, N - 1$ ) das Folgenglied  $a_n$  außerhalb der  $\varepsilon$ -Umgebung  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  liegt.

2.7. BEISPIEL. Wir beginnen mit zwei einfachen Beispielen, dazu sei  $c \in \mathbb{R}$ .

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c = c,$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2.8. PROPOSITION (Eindeutigkeit des Grenzwerts). *Wenn eine Folge  $(a_n)_n$  in  $\mathbb{R}$  gegen einen Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$  konvergiert, dann ist  $a$  eindeutig.*

Wir wollen uns jetzt Kriterien für Folgen überlegen, die uns helfen zu sehen, wann eine Folge konvergiert oder divergiert. Und wir wollen Rechenregeln kennenlernen, die uns bei der Bestimmung der Grenzwerte helfen.

2.9. DEFINITION. Eine Folge  $(a_n)_n$  reeller Zahlen heißt *von oben (unten) beschränkt* durch  $x \in \mathbb{R}$ , wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, dass

$$a_n \leq x \quad (\text{beziehungsweise } a_n \geq x).$$

In diesem Fall heißt  $x$  *obere (untere) Schranke*. Die Folge  $(a_n)_n$  heißt *beschränkt*, wenn sie sowohl von oben als auch von unten beschränkt ist.

2.10. PROPOSITION. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

2.11. BEISPIEL. Es sei  $q \in \mathbb{R}$ . Für die Folge  $(q^n)_n$  der Potenzen von  $q$  gibt es verschiedene Möglichkeiten.

- (1) Falls  $|q| > 1$ , ist die Folge unbeschränkt, also divergent.
- (2) Falls  $|q| < 1$ , konvergiert  $q^n$  gegen 0.
- (3) Falls  $q = 1$ , ist die Folge konstant und konvergiert somit gegen 1.
- (4) Falls  $q = -1$ , ist die Folge zwar beschränkt, aber dennoch divergent.

2.12. PROPOSITION (Rechenregeln für Grenzwerte). *Es seien  $(a_n)_n$  und  $(b_n)_n$  in  $\mathbb{R}$  konvergente Folgen mit*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Dann gilt auch

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b,$
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = ab,$

Falls  $b \neq 0$ , existiert  $N \in \mathbb{N}$  mit  $b_n \neq 0$  für alle  $n > N$ , und es gilt auch

- (3)  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n > N}} (a_n/b_n) = a/b$

In (3) „vergessen“ wir die Folgenglieder für  $n = 0, \dots, N$ . Da der Grenzwert ohnehin nur vom Verhalten der Folgenglieder für große  $n$  abhängt, ist das nicht schlimm. In allen drei Aussagen sind auch die Fälle interessant, in denen eine der beteiligten Folgen konstant ist.

2.13. BEMERKUNG (Bitte ignorieren, falls Sie noch keine lineare Algebra kennen). Für alle Folgen  $(a_n)_n$  und  $(b_n)_n$  in  $\mathbb{R}$  und alle  $r \in \mathbb{R}$  definieren wir

$$(a_n)_n + (b_n)_n = (a_n + b_n)_n \quad \text{und} \quad r \cdot (a_n)_n = (ra_n)_n.$$

Dadurch wird der Raum aller Folgen in  $\mathbb{R}$  zu einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Die Teilmengen

$$\begin{aligned} \{ (a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (a_n)_n \text{ Nullfolge} \} &\subset \{ (a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (a_n)_n \text{ konvergent} \} \\ &\subset \{ (a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (a_n)_n \text{ beschränkt} \} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \end{aligned}$$

bilden Unterräume, das heißt, sie sind unter Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen abgeschlossen. Nach Proposition 2.12 (1) und (2) (mit  $b_n = r$  konstant in (2)) ist der Limes eine lineare Abbildung vom Unterraum der konvergenten Folgen nach  $\mathbb{R}$ , und die Nullfolgen bilden gerade den Kern dieser Abbildung.

2.14. PROPOSITION (Grenzwerte und Ungleichungen). *Es seien  $(a_n)_n$  und  $(b_n)_n$  in  $\mathbb{R}$  konvergente Folgen mit*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

- (1) Falls für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung  $a_n \leq b_n$  gilt, gilt auch  $a \leq b$ .
- (2) Es gelte  $a = b$ , und es sei  $(c_n)_n$  eine weitere Folge in  $\mathbb{R}$ . Falls für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung  $a_n \leq c_n \leq b_n$  gilt, dann konvergiert auch  $(c_n)_n$  gegen  $a$ .

2.15. BEMERKUNG. Mit anderen Worten bleiben *schwache* Ungleichungen (also „ $\leq$ “ oder „ $\geq$ “) im Grenzwert erhalten. Für *strikte* Ungleichungen („ $<$ “ oder „ $>$ “) gilt das nicht immer. Sei etwa  $a_n = 0$  und  $b_n = 1/n$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt zwar  $a_n < b_n$ , aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n .$$

2.16. DEFINITION. Eine Folge  $(a_n)_n$  heißt *monoton steigend (fallend)*, wenn für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt

$$m < n \quad \implies \quad a_m \leq a_n \quad (\text{beziehungsweise } a_m \geq a_n) .$$

Sie heißt *streng monoton steigend (fallend)*, wenn für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  sogar

$$m < n \quad \implies \quad a_m < a_n \quad (\text{beziehungsweise } a_m > a_n) .$$

Das nächste Kriterium erlaubt es, Konvergenz zu prüfen, ohne dass man den Grenzwert kennt. Es gilt analog für monoton fallende und von unten beschränkte Folgen. Hier benötigen wir zum ersten Mal die (Ordnungs-) Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ , um zu zeigen, dass ein Grenzwert existiert.

2.17. SATZ (Monotoniekriterium). *Jede von oben beschränkte monoton steigende Folge in  $\mathbb{R}$  konvergiert.*

Aus Proposition 2.14 folgt: ist  $x$  eine obere Schranke für  $(a_n)_n$ , dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq x .$$

2.18. BEISPIEL. Wir können das Monotoniekriterium anwenden, um die Existenz von Quadratwurzeln positiver reeller Zahlen zu beweisen. Dazu benutzen wir das Heron-Verfahren. Es reicht,  $c > 1$  zu betrachten, denn  $\sqrt{1} = 1$  und  $\sqrt{1/c} = 1/\sqrt{c}$ . Wir definieren zwei Folgen  $(a_n)_n$  und  $(b_n)_n$  rekursiv durch

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 , & b_0 &= c , \\ a_{n+1} &= \frac{c}{b_{n+1}} , & \text{wobei} & & b_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} . \end{aligned}$$

Danach zeigen wir induktiv für alle  $n \in \mathbb{N}$  (Übung)

$$(1) \quad a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n .$$

Hieraus folgt mit dem Monotoniekriterium, dass beide Folgen konvergieren. Als nächstes zeigen wir

$$(2) \quad b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2^n} (b_0 - a_0) .$$

Hieraus folgt, dass beide Folgen den gleichen Grenzwert haben. Es folgt dann insbesondere

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = c ,$$

also ist der Grenzwert gerade  $\sqrt{c}$ .

## 2.b. Uneigentliche Konvergenz

Wir können bei divergenten Folgen verschiedene Fälle unterscheiden. Die Folge  $((-1)^n)_n$  beispielsweise springt nur zwischen zwei Werten hin und her, während  $(n^2)_n$  größer wird als jede beliebige reelle Zahl. Im letzteren Fall wollen wir sagen dürfen, dass die Folge „gegen unendlich konvergiert“.

Wir erweitern dazu die reellen Zahlen um zwei Elemente  $\infty$  und  $-\infty$  und nennen

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

die *erweiterte Zahlengerade*. Wir können die Ordnung „ $<$ “ von  $\mathbb{R}$  so auf  $\overline{\mathbb{R}}$  fortsetzen, dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$-\infty < x < \infty .$$

2.19. BEMERKUNG. Die erweiterte Zahlengerade erfüllt die Axiome einer Ordnung aus Definition 1.29. Also können wir auch Supremum und Infimum genau wie in Definition 1.38 definieren.

2.20. SATZ. *Jede Teilmenge der erweiterten Zahlengeraden besitzt ein Infimum und ein Supremum.*

Ab sofort dürfen wir für alle Teilmengen  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  also  $\inf A$  und  $\sup A$  schreiben. Wir haben damit das Versprechen aus Bemerkung 1.39 wahr gemacht. Die dort angesprochenen „miesen Tricks“ sind

- Vervollständigung von  $\mathbb{Q}$  zu  $\mathbb{R}$  und
- Hinzufügen der beiden Punkte im Unendlichen.

2.21. DEFINITION. Eine Teilmenge  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  heißt *Intervall*, wenn für alle  $x, y \in A$  und alle  $z \in \mathbb{R}$  mit  $x < z < y$  bereits  $z \in A$  gilt.

Mit den neuen unendlichen Punkten  $\pm\infty$  können wir alle Intervalle gut beschreiben.

2.22. PROPOSITION. *Es sei  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  ein Intervall, dann ist entweder*

$$(0) \quad A = \emptyset ,$$

oder es trifft genau eine der folgenden Aussagen zu:

$$(1) \quad A = [a, b] = \{ x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x \leq b \} \quad \text{mit } a \leq b ,$$

$$(2) \quad A = (a, b] = \{ x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x \leq b \} \quad \text{mit } a < b ,$$

$$(3) \quad A = [a, b) = \{ x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x < b \} \quad \text{mit } a < b ,$$

$$(4) \quad A = (a, b) = \{ x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x < b \} \quad \text{mit } a < b ,$$

wobei  $a = \inf A$ ,  $b = \sup A \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Man nennt die vier Fälle auch abgeschlossenes (1), links halboffenes (2), rechts halboffenes (3) beziehungsweise offenes Intervall (4).

Wir haben schon die  $\varepsilon$ -Umgebung  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  von  $a \in \mathbb{R}$  kennengelernt, und wir könnten  $\mathbb{R}$  als offenes Intervall  $(-\infty, \infty)$  schreiben. Man beachte, dass man die leere Menge auch als offenes Intervall  $\emptyset = (a, a)$  oder halboffenes Intervall  $(a, a]$  oder  $[a, a)$  schreiben könnte, wobei  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  beliebig ist.

Das folgende Verfahren ist eine Konsequenz aus dem Monotoniekriterium 2.17.

2.23. SATZ (Intervallschachtelung). *Es sei*

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \dots$$

*eine Folge von Intervallen in  $\mathbb{R}$  mit*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 .$$

*Dann existiert genau ein  $x \in \mathbb{R}$ , so dass*

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] = \{ x \in \mathbb{R} \mid \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } x \in [a_n, b_n] \} = \{x\} .$$

Ein Beispiel liefert das Heron-Verfahren 2.18. Ähnlich wie in Bemerkung 2.15 sieht man, dass Intervallschachtelung nur mit abgeschlossenen Intervallen immer funktioniert. Beispielsweise gilt

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset .$$

Als nächstes wollen wir Konvergenz gegen  $\pm\infty$  definieren. Da diese beiden Punkte keine reellen Zahlen sind, spricht man von „uneigentlicher“ Konvergenz.

2.24. DEFINITION. Eine Folge  $(a_n)_n$  in  $\mathbb{R}$  konvergiert (uneigentlich) gegen  $\infty$ , wenn für alle  $C \in \mathbb{R}$  eine Zahl  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > N$  gilt, dass  $a_n > C$ .

Wir hatten aus Proposition 2.10 gefolgert, dass jede unbeschränkte Folge in  $\mathbb{R}$  divergiert. Man beachte, dass in  $\overline{\mathbb{R}}$  jede Folge beschränkt ist, denn  $\infty$  ist stets eine obere und  $-\infty$  stets eine untere Schranke.

2.25. BEISPIEL. Betrachte die Folge  $(q^n)_n$  für  $|q| > 1$  wie in Beispiel 2.11 (1). Für  $q > 1$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty .$$

Für  $q < -1$  hingegen divergiert die Folge auch in  $\overline{\mathbb{R}}$ .

2.26. PROPOSITION. Es sei  $(a_n)_n$  eine Folge reeller Zahlen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (1) Die Folge  $(a_n)_n$  konvergiert uneigentlich gegen  $\infty$ .
- (2) Es gibt ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $a_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > N$ , und es gilt

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n > N}} \frac{1}{a_n} = 0 .$$

Für den Fall, dass der Grenzwert von  $(a_n)_n$  im Intervall  $(0, \infty)$  der positiven reellen Zahlen liegt, haben wir den Grenzwert der Folge  $(1/a_n)_n$  schon in Proposition 2.12 (3) bestimmt.

2.27. BEMERKUNG. Die Grundrechenarten lassen sich nicht einfach auf die erweiterte Zahlenreihe fortsetzen. Manche „Rechnungen“ lassen sich aber durch Grenzwertbetrachtungen rechtfertigen. Dazu seien  $(a_n)_n$  und  $(b_n)_n$  Folgen in  $\mathbb{R}$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \overline{\mathbb{R}} .$$

- (1) Addition. Es sei  $b \neq -\infty$ , dann folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty ,$$

also setzen wir  $\infty + b = \infty$ , solange  $b \neq -\infty$ .

Im Falle  $b = -\infty$  kann es sein, dass die Folge  $(a_n + b_n)_n$  gegen einen beliebigen Wert in  $\overline{\mathbb{R}}$  konvergiert. Sie könnte aber auch divergieren. Der Ausdruck  $\infty + (-\infty)$  ist daher nicht zulässig.

- (2) Multiplikation. Es sei  $b \neq 0$ , dann folgt (Übung)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n)_n = \begin{cases} \infty & \text{falls } b > 0, \text{ und} \\ -\infty & \text{falls } b < 0. \end{cases}$$

Wir setzen also  $\infty \cdot b = \text{sign}(b)\infty$ , falls  $b \neq 0$ . Analog verfahren mit  $(-\infty) \cdot b$ . Der Ausdruck  $\pm\infty \cdot 0$  ist wieder nicht zulässig.

## 2.c. Häufungspunkte und Kompaktheit

Nicht jede Folge hat einen Grenzwert, nicht einmal in  $\overline{\mathbb{R}}$ . Um divergente Folgen besser zu verstehen, betrachten wir ihre Häufungspunkte und Teilfolgen. Oftmals konvergiert wenigstens eine Teilfolge einer gegebenen Folge. Das ist zum Beispiel für beschränkte Folgen in  $\mathbb{R}$  immer der Fall.

2.28. DEFINITION. Es sei  $(a_n)_n$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ . Wir nennen  $a \in \mathbb{R}$  einen *Häufungspunkt* von  $(a_n)_n$ , wenn für alle  $\varepsilon > 0$  und alle  $N \in \mathbb{N}$  ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > N$  existiert, so dass  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

Wenn  $a$  Häufungspunkt ist, liegen in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  unendlich viele Folgenglieder von  $(a_n)_n$ . Analog kann man auch definieren, wann  $\pm\infty$  Häufungspunkte von  $(a_n)_n$  sind (Übung).

2.29. BEISPIEL. Betrachte die Folge  $((-1)^n)_n$  aus Beispiel 2.11 (4). Häufungspunkte sind 1 und  $-1$ . Außerdem gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{2k} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{2k+1} = -1 .$$

2.30. DEFINITION. Es sei  $(a_n)_n$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ . Eine *Teilfolge* von  $(a_n)_n$  ist eine Folge der Form  $(a_{n_i})_i$ , wobei  $(n_i)_i$  eine strikt monoton wachsende Folge in  $\mathbb{N}$  sei.

Wir können uns das so vorstellen, dass die Folge  $(n_i)_i$  eine unendliche Teilmenge von  $\mathbb{N}$  aufzählt. Wir möchten uns unter der Teilfolge  $(a_{n_i})_i$  also eine „unendliche Teilmenge“ der Folgenglieder von  $(a_n)_n$  vorstellen. Aber das geht nur auf dem obigen Umweg, da die Folgenglieder selbst ja keine unendliche Menge bilden müssen, siehe obiges Beispiel.

17.11.21

2.31. PROPOSITION. *Eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  ist genau dann Häufungspunkt einer Folge  $(a_n)_n$  in  $\mathbb{R}$ , wenn eine Teilfolge von  $(a_n)_n$  gegen  $a$  konvergiert.*

Wenn  $(a_n)_n$  konvergiert, ist der Grenzwert auf jeden Fall ein Häufungspunkt. Der folgende Satz lässt sich mit Intervallschachtelung 2.23 beweisen.

2.32. SATZ (Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$  hat einen Häufungspunkt in  $\mathbb{R}$ .*

2.33. BEMERKUNG. In den Übungen sehen wir, dass jede Folge in  $\mathbb{R}$  einen Häufungspunkt in  $\overline{\mathbb{R}}$  besitzt.

2.34. BEMERKUNG. Man nennt eine Teilmenge  $K \subset \mathbb{R}$  *kompakt*, wenn jede Folge mit Werten in  $K$  einen Häufungspunkt in  $K$  besitzt. Aus dem obigen Satz folgt, dass abgeschlossene Intervalle

$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$$

kompakt sind. Das gilt nicht mehr, wenn wir stattdessen  $A = [a, b] \setminus \{x\}$  für ein  $x \in [a, b]$  betrachten, denn  $x$  könnte der einzige Häufungspunkt einer Folge in  $A$  sein.

Erst recht gilt es nicht mehr, wenn wir das abgeschlossene Intervall  $[a, b] \cap \mathbb{Q}$  in den rationalen Zahlen betrachten. Hier braucht man also wieder die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ .

2.35. DEFINITION. Es sei  $(a_n)_n$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ . Dann definieren wir den *Limes superior* und den *Limes inferior* durch

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{ a_k \mid k \in \mathbb{N} \text{ und } k > n \} \in \overline{\mathbb{R}} \\ \text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{ a_k \mid k \in \mathbb{N} \text{ und } k > n \} \in \overline{\mathbb{R}} . \end{aligned}$$

2.36. BEMERKUNG. Man überlegt sich, dass die  $\overline{\mathbb{R}}$ -wertige Folge

$$(s_n)_n = \left( \sup \{ a_k \mid k \in \mathbb{N} \text{ und } k > n, \} \right)_n$$

monoton fällt. Falls sie konstant  $\infty$  ist, ist das auch ihr Grenzwert. Andernfalls existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $s_n < \infty$  für alle  $n \geq N$ . Falls  $s_n$  dann von unten beschränkt ist, hat die Folge einen

Grenzwert in  $\mathbb{R}$  nach dem Monotoniekriterium 2.17. Andernfalls ist  $-\infty$  ihr Grenzwert. Für alle Folgen in  $\mathbb{R}$  sind also Limes superior und genauso auch Limes inferior in  $\overline{\mathbb{R}}$  definiert .

2.37. PROPOSITION. *Es sei  $(a_n)_n$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ .*

- (1) *Wenn  $(a_n)_n$  beschränkt ist, sind ihr Limes inferior und ihr Limes superior beide endlich.*
- (2) *Wenn  $(a_n)_n$  beschränkt ist, ist der Limes inferior der kleinste und der Limes superior der größte Häufungspunkt.*
- (3) *Die Folge  $(a_n)_n$  konvergiert genau dann gegen  $x \in \overline{\mathbb{R}}$ , wenn*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = x .$$

Es folgt insbesondere, dass eine Teilfolge einer konvergenten Folge wieder gegen den gleichen Grenzwert konvergiert. Wir kommen zu einem weiteren wichtigen Konvergenz-Kriterium.

2.38. DEFINITION. Eine Folge  $(a_n)_n$  in  $\mathbb{R}$  heißt *Cauchy-Folge*, wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m > N$  und  $n > N$  gilt, dass

$$|a_m - a_n| < \varepsilon .$$

2.39. SATZ (Cauchy-Kriterium). *Eine Folge reeller Zahlen konvergiert genau dann in  $\mathbb{R}$ , wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

2.40. BEMERKUNG. Wir können jetzt etwas besser verstehen, was „Vollständigkeit“ bedeutet. Mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums 2.39 könnten wir nämlich auch das Monotoniekriterium 2.17 beweisen. Damit schließt sich der Kreis, und wir sehen, dass in einem archimedisch angeordneten Körper (siehe Satz 1.46) das Monotoniekriterium 2.17, Intervallschachtelung 2.23, der Satz von Bolzano-Weierstraß 2.32 und das Cauchy-Kriterium 2.39 alle zueinander äquivalent sind. Alle diese Sätze gelten in  $\mathbb{R}$ , aber nicht in  $\mathbb{Q}$ .

Darüberhinaus können wir mithilfe der Intervallschachtelung auch die Existenz des Supremums einer beliebigen nichtleeren, von oben beschränkten Teilmenge beweisen. Somit ist Ordnungsvollständigkeit eines angeordneten Körpers  $\mathbb{k}$  äquivalent dazu, dass  $\mathbb{k}$  archimedisch angeordnet ist und einer der vier oben genannten Sätze gilt.

Die Begriffe „Cauchy-Folge“ und „Konvergenz“ kann man etwas allgemeiner für sogenannte metrische Räume  $(M, d)$  definieren. Das sind Mengen  $M$  mit einer Abstandsfunktion  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , die gleichen Eigenschaften hat wie  $|x - y|$  in Bemerkung 2.3. Jede konvergente Folge ist Cauchy-Folge, das ergibt sich wie im Beweis des obigen Satzes aus der Dreiecksungleichung. Man nennt  $(M, d)$  *metrisch vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in  $M$  konvergiert. Somit besagt der obige Satz, dass  $\mathbb{R}$  metrisch vollständig ist.

In der Literatur wird daher gerne verlangt, dass  $\mathbb{R}$  Archimedisch angeordnet ist, und dass jede Cauchy-Folge konvergiert. Wenn man  $\mathbb{R}$  explizit konstruieren möchte, geht das mit Dedekindschen Schnitten (siehe Bemerkung 1.48) oder, indem man den  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum aller Cauchy-Folgen in  $\mathbb{Q}$  betrachtet, und dann den Unterraum der Nullfolgen in  $\mathbb{Q}$  heraufsteilt.

## 2.d. Komplexe Zahlen und Euklidische Norm

Wir können Konvergenz auch für Folgen in  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  definieren. Dazu führen wir die Euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^n$  ein. Außerdem betrachten wir die komplexen Zahlen aus Beispiel 1.34 etwas genauer. Das tun wir vor allem, um im nächsten Abschnitt auch mit komplexwertigen Reihen arbeiten zu können.

Unter dem  $\mathbb{R}^n$  für  $n \in \mathbb{N}$  verstehen wir das kartesische Produkt von  $n$  Kopien von  $\mathbb{R}$ , siehe Definition 1.23 und Beispiel 1.26 (2). Wir schreiben Vektoren hier der Einfachheit halber als Zeilen.

Der Raum  $\mathbb{R}^n$  bildet einen *Vektorraum*. Dazu definieren für alle  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  und alle  $r \in \mathbb{R}$  die Vektoraddition und skalare Multiplikation durch

$$\begin{aligned}x + y &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\rx &= (rx_1, \dots, rx_n).\end{aligned}$$

Der  $\mathbb{R}^n$  trägt viele mögliche Skalarprodukte. Wir betrachten auf  $\mathbb{R}^n$  das (*Standard-*) *Skalarprodukt*  $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Es ist für alle Vektoren  $x$  und  $y \in \mathbb{R}^n$  definiert durch

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Die *Euklidische Norm* auf  $\mathbb{R}^n$  ist definiert durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Sie kennen Skalarprodukt und Norm möglicherweise aus der Schule, zumindest auf  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$ . In der linearen Algebra II lernen Sie mehr über Skalarprodukte. Zu jedem Skalarprodukt gehört eine Norm, weitere Normen lernen Sie in Analysis II kennen. Wir können Skalarprodukte und Normen auch auf unendlich-dimensionalen Vektorräumen betrachten; das passiert aber erst systematisch in der Vorlesung Funktionalanalysis.

2.41. SATZ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung). Für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn einer der Vektoren ein nichtnegatives Vielfaches des anderen ist.

2.42. BEMERKUNG. Für die Euklidische Norm gelten ähnliche Rechenregeln wie für den Absolutbetrag, siehe Bemerkung 2.2. Es seien  $x, y \in \mathbb{R}^n$  und  $r \in \mathbb{R}$ .

(1) *Positivität*. Es gilt

$$\|x\| \geq 0 \quad \text{und} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0.$$

(2) *Multiplikativität*. Es gilt

$$\|ry\| = |r| \cdot \|y\|.$$

(3) *Subadditivität*. Es gilt

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Daraus schließen wir, dass der *Euklidische Abstand*  $d(x, y) = \|x - y\|$  die Rechenregeln aus Bemerkung 2.3 erfüllt.

Es sei  $(x^{(k)})_k$  eine Folge in  $\mathbb{R}^n$ , mit  $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ . Wir definieren Konvergenz, Grenzwert und Häufungspunkte von  $(x^{(k)})_k$  genau wie in den Definitionen 2.6 und 2.28. Dabei ist die  $\varepsilon$ -Umgebung eines Vektors  $x \in \mathbb{R}^n$  gerade ein Ball vom Radius  $\varepsilon$  (kurz:  $\varepsilon$ -Ball) der Form

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon\}.$$

Da wir keine Anordnung zur Verfügung haben, können wir allerdings keinen Limes superior oder Limes inferior definieren.

2.43. PROPOSITION. Es seien  $(x^{(k)})_k, (y^{(k)})_k$  Folgen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $(r_k)_k$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ , und  $x \in \mathbb{R}^n$ .

(1) Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x \iff \forall i \in \{1, \dots, n\} \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i.$$

(2) Analog zu den Rechenregeln aus Proposition 2.12 gilt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (x^{(k)} + y^{(k)}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} + \lim_{k \rightarrow \infty} y^{(k)}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (r_k \cdot x^{(k)}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} r_k \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} \\ \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \langle x^{(k)}, y^{(k)} \rangle &= \left\langle \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}, \lim_{k \rightarrow \infty} y^{(k)} \right\rangle. \end{aligned}$$

Wir definieren Cauchy-Folgen wie in Definition 2.38. Man sieht leicht, dass jede konvergente Folge in  $\mathbb{R}^n$  eine Cauchy-Folge ist. Da wir keine Anordnung zur Verfügung haben, erklären wir Vollständigkeit des  $\mathbb{R}^n$  über Cauchy-Folgen, siehe Bemerkung 2.40.

2.44. SATZ (Cauchy-Kriterium). *Der  $\mathbb{R}^n$  mit der Euklidischen Norm ist (metrisch) vollständig, das heißt, jede Cauchy-Folge konvergiert.*

Wir nennen eine Folge  $(x^{(k)})_k$  in  $\mathbb{R}^n$  *beschränkt*, wenn die Folge  $(\|x^{(k)}\|)_k$  beschränkt ist. Wie in Proposition 2.10 ist jede konvergente Folge beschränkt.

2.45. FOLGERUNG (aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{R}^n$  hat einen Häufungspunkt in  $\mathbb{R}^n$ .*

2.46. BEMERKUNG. In den meisten obigen Sätzen haben wir ausgenutzt, dass eine Folge  $(x^{(k)})_k$  im  $\mathbb{R}^n$  genau dann konvergiert, eine Cauchy-Folge ist, beziehungsweise beschränkt ist, wenn das gleiche für jede der Koordinatenfolgen  $(x_1^{(k)})_k$ , dots,  $(x_n^{(k)})_k$  in  $\mathbb{R}$  gilt.

Aber Vorsicht: es kann sein, dass  $x_i$  für alle  $i$  Häufungspunkt der Folge  $(x_i^{(k)})_k$  ist, aber  $x$  dennoch kein Häufungspunkt von  $(x^{(k)})_k$ .

Wir erinnern uns an die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ . Wie in Beispiel 1.34 seien  $z = x + iy$  und  $w = u + iv \in \mathbb{C}$  gegeben mit  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ , entsprechend  $z = (x, y)$ ,  $w = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} z + w &= (x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v) \\ \text{und} \quad zw &= (x + iy) \cdot (u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu). \end{aligned}$$

Geometrisch entspricht die Addition genau der Vektoraddition mit Hilfe von Parallelogrammen. Für die komplexe Multiplikation überlegen wir uns später eine Anschauung.

2.47. BEMERKUNG. Wir wollen nicht alle Körperaxiome aus Definition 1.27 nachrechnen. Stattdessen führen wir die wichtigsten Konstruktionen ein, um mit komplexen Zahlen arbeiten zu können. Im Folgenden seien stets  $z = x + iy$  und  $w = u + iv \in \mathbb{C}$  mit  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ .

(1) Wir definieren den *Realteil*  $\operatorname{Re}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  und den *Imaginärteil*  $\operatorname{Im}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\operatorname{Re} z = x \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} z = y.$$

Insbesondere ist auch der Imaginärteil eine reelle Zahl, und es gilt  $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$ .

(2) Wir definieren die *komplexe Konjugation*  $\bar{\cdot}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{\bar{z}} &= z, \\ \overline{z + w} &= \overline{(x + u) + i(y + v)} = \bar{z} + \bar{w} \\ \text{und} \quad \overline{zw} &= \overline{(xu - yv) + i(xv + yu)} = \bar{z} \cdot \bar{w}. \end{aligned}$$

(3) Eine komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  liegt genau dann in  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , wenn  $\bar{z} = z$ .

(4) Es gilt

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R} .$$

In Anlehnung an die Euklidische Norm definieren wir den *Absolutbetrag* von  $z$  durch

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \in \mathbb{R} .$$

(5) Für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  gelten die Rechenregeln aus Bemerkung 2.2, nämlich

$$\begin{aligned} |z| \geq 0 \quad \text{und} \quad |z| = 0 &\iff z = 0 , \\ |zw| &= |z| \cdot |w| , \\ |z + w| &\leq |z| + |w| . \end{aligned}$$

Falls  $z \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , hat der Absolutbetrag den gleichen Wert wie in Definition 2.1.

(6) Jetzt können wir die Existenz des multiplikativen Inversen überprüfen: für alle  $z \in \mathbb{C}^\times$  gilt

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z\bar{z}}{z\bar{z}} = 1 .$$

(7) Für den Abstand  $|z - w| \in \mathbb{R}$  zweier komplexer Zahlen  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt Bemerkung 2.3 analog, da wir dort nur die Rechenregeln aus Bemerkung 2.2 benutzt hatten.

Es gibt viele Gründe, komplexe Zahlen einzuführen und zu benutzen. Manche reelle Funktionen lassen sich besser mit Hilfe komplexer Funktionen verstehen, beispielsweise die Winkelfunktionen  $\sin$  und  $\cos$ ; mehr dazu später.

Aus Sicht der Algebra sind komplexe Zahlen wegen des folgenden Resultats wichtig. Wir werden es im zweiten Semester beweisen; andere Beweise lernen Sie möglicherweise in der Topologie oder der Funktionentheorie. Es gibt jedoch keinen rein algebraischen Beweis — in irgendeiner Form geht bei jedem Beweis die Vollständigkeit der reellen Zahlen ein.

Unter einem *Polynom* über einem Körper  $\mathbb{k}$  versteht man einen Ausdruck der Form

$$P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{k} \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Ist  $a_n \neq 0$ , so heißt  $P$  ein Polynom vom *Grad*  $n$  (das Nullpolynom  $P = 0$  hat nach Konvention den Grad  $-\infty$ ). Polynome vom Grad  $\leq 0$  heißen *konstant*. Für die Variable  $X$  kann man Zahlen aus  $\mathbb{k}$  einsetzen und erhält eine Funktion  $P: \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$ . Ist  $P(x) = 0$  für ein  $x \in \mathbb{k}$ , so heißt  $x$  eine *Nullstelle* von  $P$ .

2.48. SATZ (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht konstante Polynom über  $\mathbb{C}$  hat eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .*

Es sei  $(z_n)_n$  eine Folge in  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ . Wir definieren Konvergenz und Grenzwert von  $(z_n)_n$  genau wie in Definition 2.6. Dabei ist die  $\varepsilon$ -Umgebung einer komplexen Zahl  $z$  gerade eine Kreisscheibe mit Radius  $\varepsilon$  der Form

$$U_\varepsilon(z) = \{ w \in \mathbb{C} \mid |z - w| < \varepsilon \}.$$

In Analogie zu Proposition 2.43 gilt Folgendes.

2.49. PROPOSITION. *Es sei  $(z_n)_n$  eine Folge komplexer Zahlen.*

- (1) *Die Folge  $(z_n)_n$  konvergiert genau dann in  $\mathbb{C}$ , wenn die Folgen  $(\operatorname{Re} z_n)_n$  und  $(\operatorname{Im} z_n)_n$  in  $\mathbb{R}$  konvergieren.*
- (2) *Die Folge  $(z_n)_n$  konvergiert genau dann gegen  $z \in \mathbb{C}$ , wenn  $(\bar{z}_n)_n$  gegen  $\bar{z}$  konvergiert.*
- (3) *Die Rechenregeln aus Proposition 2.12 gelten analog für Folgen komplexer Zahlen.*

Bei komplexen Zahlen ist es möglich, einen Punkt  $\infty$  im Unendlichen hinzuzufügen. Man erhält dann die komplexe Zahlenkugel  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Dann gilt auch ein Analogon von Proposition 2.26. Aber darauf wollen wir hier nicht näher eingehen.

24.11.21

## 2.e. Reihen

Wir wollen jetzt unendliche Summen reeller oder komplexer Zahlen betrachten. Dazu führen wir Reihen ein und sehen, dass Reihen in gewisser Weise nichts anderes als speziell konstruierte Folgen sind. Im nächsten Abschnitt benutzen wir dann Potenzreihen, um einige spezielle Funktionen zu konstruieren.

2.50. DEFINITION. Es sei  $(a_n)_n$  eine Folge in  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ . Dann konvergiert die *Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

in  $\mathbb{k}$  mit den *Gliedern* oder *Summanden*  $a_n$  genau dann gegen den Grenzwert  $a \in \mathbb{k}$ , kurz

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a ,$$

wenn die Folge  $(s_n)_n$  der *Partialsommen* gegen  $a$  konvergiert, wobei

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k .$$

Wenn die Reihe nicht konvergiert, dann divergiert sie. Im Falle  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  definieren wir uneigentliche Konvergenz gegen  $\pm\infty$ , also Konvergenz in  $\overline{\mathbb{R}}$ , wie in Abschnitt 2.b.

Die Notation  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  kann somit sowohl die Folge der Partialsommen bezeichnen (etwa, wenn wir von Konvergenz sprechen) als auch ihren Grenzwert.

2.51. BEISPIEL. Die Formel für die geometrische Summe in Beispiel 1.8 lässt sich analog für alle  $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  beweisen. Zusammen mit Beispiel 2.11 erhalten wir die Konvergenz der *geometrischen Reihe*  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ .

(1) Wenn  $|q| < 1$ , konvergiert die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} .$$

(2) Wenn  $|q| \geq 1$ , divergiert die geometrische Reihe.

(3) Mit Hilfe der geometrischen Reihe können wir auch periodische Dezimalbrüche verstehen:

$$0,\bar{3} = 0,333\dots = \frac{3}{10} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} 10^{-i} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1-1/10} = \frac{1}{3} .$$

Und analog gilt  $0,\bar{9} = 1$ .

2.52. BEMERKUNG. In der obigen Definition haben wir aus der Reihe die Folge ihrer Partialsommen gemacht, um Konvergenz zu definieren. Umgekehrt könnten wir aus jeder Folge  $(b_n)_n$  eine Reihe machen, denn für die Folge  $(a_n)_n$  mit  $a_0 = b_0$  und  $a_n = b_n - b_{n-1}$  erhalten wir die Partialsommen

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = b_0 + (b_1 - b_0) + \dots + (b_n - b_{n-1}) = b_n ,$$

wie man mit vollständiger Induktion leicht überprüft.

Dennoch lohnt es sich, Folgen und Reihen separat zu betrachten, wie wir im Folgenden sehen werden.

2.53. BEMERKUNG. Man sieht leicht, dass bei einer konvergenten Reihe die Glieder eine Nullfolge bilden müssen. Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Beispielsweise divergiert die *harmonische Reihe*, das heißt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty .$$

2.54. SATZ (Leibniz-Kriterium). *Es sei  $(a_n)_n$  eine monoton fallende Nullfolge in  $\mathbb{R}$ . Dann konvergiert die alternierende Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k .$$

2.55. BEISPIEL. Wir können später zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2$$

der (natürliche) Logarithmus der Zahl 2 ist.

Wenn wir die Reihenglieder aber geschickt umsortieren, können wir jede beliebige Zahl in  $\overline{\mathbb{R}}$  als Grenzwert erhalten, siehe unten. Also gilt Kommutativität der Addition nicht mehr für „unendliche Summen“.

Als Beispiel betrachten wir die umsortierte Reihe, bei der nach jedem positiven Summanden zwei negative kommen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} \log 2 . \end{aligned}$$

Die Konvergenz der umsortierten Reihe ergibt sich ebenfalls aus der obigen Rechnung.

2.56. DEFINITION. Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  in  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  konvergiert genau dann *absolut*, wenn die Reihe der Absolutbeträge in  $\mathbb{R}$  konvergiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty .$$

2.57. PROPOSITION. *Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.*

Die Umkehrung gilt nicht, wie Bemerkung 2.53 zeigt.

Unter einer *Umordnung* einer gegebenen Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  verstehen wir eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{j(n)} , \quad \text{wobei } j: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ bijektiv sei.}$$

Man beachte, dass die umgeordnete Reihe völlig andere Partialsummen haben kann als die ursprüngliche. Wie sich der Grenzwert einer Reihe nach Umordnung verhält, hängt davon ab, ob sie absolut konvergiert.

2.58. SATZ (Umordnungssatz). *Wenn eine Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  in  $\mathbb{k}$  absolut gegen  $a$  konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung dieser Reihe ebenfalls absolut gegen  $a$ .*

2.59. SATZ (Riemannscher Umordnungssatz). Wenn eine Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  in  $\mathbb{R}$  konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, dann existiert für jedes  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  eine Umordnung der Reihe, die gegen  $x$  konvergiert. Es existieren auch Umordnungen, die in  $\overline{\mathbb{R}}$  divergieren.

In  $\mathbb{C}$  ist die Menge der möglichen Grenzwerte einer nicht absolut konvergenten Reihe entweder eine affine reelle Gerade in  $\mathbb{C}$  oder ganz  $\mathbb{C}$ , das folgt aus dem Steinitzschen Umordnungssatz.

Es folgen jetzt eine Reihe Kriterien für absolute Konvergenz.

2.60. SATZ (Majorantenkriterium). Für alle  $k \in \mathbb{N}$  seien  $a_k \in \mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  und  $b_k \in \mathbb{R}$ ,  $b_k \geq |a_k|$ . Wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

in  $\mathbb{R}$  konvergiert, dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

absolut in  $\mathbb{k}$ .

2.61. BEMERKUNG. Man nennt die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  auch *Majorante* der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ . Eine beliebige Majorante für viele Zwecke ist die geometrische Reihe aus Beispiel 2.51 für  $0 < q < 1$ , oder auch die folgende Reihe.

2.62. BEISPIEL. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergiert, denn eine Majorante ist für  $k \geq 2$  gegeben durch

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)},$$

und der Grenzwert dieser Reihe lässt sich explizit bestimmen (Übung).

2.63. BEMERKUNG. Dezimalbrüche sind konvergente Reihen: für  $n \in \mathbb{N}$  und  $d_1, d_2, \dots \in \{0, \dots, 9\}$  ist

$$n, d_1 d_2 d_3 \dots = n + \sum_{i=1}^{\infty} d_i \cdot 10^{-i}$$

mit Majorante  $\sum_{i=1}^{\infty} 10^{1-i}$ . Mit Hilfe der Dezimaldarstellung kann man leicht folgern, dass es keine surjektive Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  geben kann. Man sagt, die reellen Zahlen sind *überabzählbar*.

2.64. FOLGERUNG (Minorantenkriterium). Für alle  $k \in \mathbb{N}$  seien  $a_k \in \mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  und  $b_k \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq b_k \leq |a_k|$ . Wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

divergiert, dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

nicht absolut in  $\mathbb{k}$ .

2.65. BEMERKUNG. In diesem Fall heißt  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  eine *Minorante* von  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ . Eine beliebige Minorante ist zum Beispiel die harmonische Reihe aus Bemerkung 2.53.

Anhand der alternierenden harmonischen Reihe aus Beispiel 2.55 sieht man aber, dass die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  dennoch konvergieren kann, nur eben nicht absolut.

2.66. FOLGERUNG (Quotientenkriterium). *Es seien  $a_k \in \mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  mit  $a_k \neq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .*

(1) *Wenn*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

*dann konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut.*

(2) *Wenn*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1,$$

*dann divergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .*

Es sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ . Für positive reelle Zahlen folgt aus  $x < y$ , dass  $x^n < y^n$ . Daher können wir  $n$ -te Wurzeln positiver Zahlen  $x > 0$  definieren durch

$$\sqrt[n]{x} = \sup \{ y \in \mathbb{R} \mid y^n < x \}.$$

Es folgt  $(\sqrt[n]{x})^n = x = \sqrt[n]{x^n}$ .

2.67. FOLGERUNG (Wurzelkriterium). *Es seien  $a_k \in \mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .*

(1) *Wenn*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

*dann konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut.*

(2) *Wenn*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

*dann divergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .*

2.68. BEMERKUNG. Das Quotientenkriterium lässt sich aus dem Wurzelkriterium ableiten, denn falls  $a_k \neq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

In den Grenzfällen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1 \quad \text{und} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

ist keine Aussage möglich. Beispielsweise divergiert die harmonische Reihe (Bemerkung 2.53), während die Reihe aus Beispiel 2.62 absolut konvergiert.

## 2.f. Potenzreihen

Potenzreihen sind spezielle Reihen, in die man noch einen Parameter  $x$  einsetzen kann. Dadurch erhält man Funktionen in  $x$ . Die Partialsummen sind stets Polynome, können also nur durch die Grundrechenarten beschrieben werden. Das macht Potenzreihen interessant, um Funktionen zu beschreiben und gegebenenfalls auch zu approximieren.

2.69. DEFINITION. Es sei  $(a_n)_n$  eine Folge in  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Dann heißt der Ausdruck

$$R(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$$

eine *Potenzreihe* über  $\mathbb{k}$  in der *Variablen*  $X$  mit den *Koeffizienten*  $a_n$ . Es sei  $x \in \mathbb{k}$ . Wir sagen, dass  $R(X)$  bei  $X = x$  *konvergiert*, wenn die Reihe

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

in  $\mathbb{k}$  konvergiert. Wir nennen die Potenzreihe  $R(X)$  *konvergent*, falls  $R(X)$  an einer Stelle  $x \neq 0$  konvergiert, und ansonsten *divergent*.

2.70. LEMMA. Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$  konvergent für ein  $x_0 \in \mathbb{k}$ . Dann existiert eine Konstante  $C < \infty$ , so dass für alle  $x \in \mathbb{k}$  mit  $|x| < |x_0|$  und alle  $N \in \mathbb{N}$  gilt

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n x^n \right| \leq \frac{C}{|x_0| - |x|} \left| \frac{x}{x_0} \right|^N.$$

Insbesondere konvergiert die Potenzreihe absolut für alle  $x$  in

$$B_{|x_0|}(0) = \{ x \in \mathbb{k} \mid |x| < |x_0| \}.$$

Aus dem Lemma ergibt sich bereits, dass Potenzreihen immer auf einem ganzen Kreis in  $\mathbb{C}$  konvergieren, wenn sie für wenigstens ein  $x_0 \neq 0$  konvergieren. Das Lemma gibt auch Auskunft über die Konvergenzgeschwindigkeit. Sie wird besser, je weiter man vom Rand des Kreises entfernt ist.

Als nächstes können wir den Radius dieses Kreises mit Hilfe des Wurzelskriteriums zumindest theoretisch gut beschreiben.

2.71. SATZ UND DEFINITION (Konvergenzradius). Es sei  $R(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$  eine Potenzreihe über  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , dann heißt

$$\rho = 1 / \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty]$$

ihre Konvergenzradius, und es gilt:

- (1) Für alle  $x \in \mathbb{k}$  mit  $|x| < \rho$  konvergiert die Reihe  $R(x)$  absolut.
- (2) Für alle  $x \in \mathbb{k}$  mit  $|x| > \rho$  divergiert die Reihe  $R(x)$  in  $\mathbb{k}$ .

2.72. BEMERKUNG. Wir werden später sehen, dass  $R(x)$  im Inneren des *Konvergenzkreises*

$$B_\rho(0) = \{ x \in \mathbb{k} \mid |x| < \rho \}$$

eine stetige und beliebig oft differenzierbare Funktion darstellt. Tatsächlich ist  $B_\rho(0)$  eine Kreisscheibe, falls  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ , ansonsten einfach das um 0 symmetrische Intervall  $(-\rho, \rho)$ .

Auf dem Rand des Konvergenzkreises ist keine Aussage möglich. Betrachte etwa die Potenzreihen

$$R(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^k}{k^2}, \quad S(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^k}{k}, \quad \text{und} \quad T(X) = \sum_{k=1}^{\infty} X^k.$$

In allen drei Fällen ist der Konvergenzradius  $\rho = 1$ . Die erste Reihe konvergiert für alle  $x$  mit  $|x| = 1$  absolut (Beispiel 2.62), die zweite konvergiert für  $x = -1$  und divergiert für  $x = 1$  (Beispiele 2.53, 2.55), und die letzte divergiert für alle  $x$  mit  $|x| = 1$  (Beispiel 2.51).

2.73. BEISPIEL. Die *Exponentialreihe*

$$\exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

hat Konvergenzradius  $\infty$ . Wir wollen uns überlegen, dass sie eine Funktion darstellt, die ähnliche Rechenregeln wie eine Potenz  $z \mapsto e^z$  erfüllt. Dabei ist  $e = \exp(1)$  die *Eulersche Zahl*.

Die Exponentialfunktion  $x \mapsto \exp(x)$  erhalten wir auch, wenn wir uns vorstellen, dass ein Guthaben „kontinuierlich“ verzinst wird. Das führt auf die folgende Darstellung.

2.74. PROPOSITION. *Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt*

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Man beachte, dass die Folge in der Proposition deutlich langsamer konvergiert als die Exponentialreihe.

2.75. SATZ. *Die Eulersche Zahl  $e = \exp(1)$  ist irrational.*

Reihen lassen sich addieren, indem man ihre Summanden addiert, da sich dann auch die Partialsummen addieren. Genauso gilt für Potenzreihen

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) X^k.$$

Um die Rechenregeln für die Exponentialfunktion nachzuprüfen, brauchen wir eine Formel für das Produkt zweier beliebiger Reihen. Es handelt sich also um eine Art „Distributivgesetz“ für unendliche Summen. Man beachte: wenn beide Reihen absolut konvergieren, dann gilt das auch für ihre Produkt. Und wegen des Umordnungssatzes 2.58 kommt es dann nicht auf die genaue Reihenfolge der Summanden im Produkt an.

2.76. SATZ UND DEFINITION (Cauchy-Produkt). *Es seien  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell$  absolut konvergente Reihen in  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Dann konvergiert ihr Cauchy-Produkt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}\right)$$

*ebenfalls absolut und stellt das Produkt beider Reihen dar.*

Das Cauchy-Produkt von Potenzreihen ist selbst wieder eine Potenzreihe.

2.77. FOLGERUNG (Cauchy-Produkt von Potenzreihen). *Gegeben seien konvergente Potenzreihen  $R(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$  und  $S(X) = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell X^\ell$  mit Konvergenzradien  $\rho, \sigma > 0$ . Dann ist ihr Cauchy-Produkt die Potenzreihe*

$$(R \cdot S)(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}\right) X^n$$

*mit Konvergenzradius  $\geq \min(\rho, \sigma)$ .*

Wir bilden das Cauchy-Produkt von  $\exp(x)$  und  $\exp(y)$  als Reihen und erhalten

2.78. SATZ (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion). *Für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt*

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z + w).$$

2.79. FOLGERUNG (Weitere Rechenregeln für die Exponentialfunktion). Für alle  $z \in \mathbb{C}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  sowie  $n \in \mathbb{Z}$  gilt

- (1)  $\exp(z) \exp(-z) = 1$ , *insbesondere*  $\exp(z) \neq 0$ ,  
(2)  $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ ,  
(3)  $\exp(x) > 0$  *und*  $|\exp(iy)| = 1$ ,  
(4)  $\exp(nz) = \exp(z)^n$ .

Somit verhält sich die Exponentialreihe zumindest teilweise so, wie man es von einer Funktion der Form  $z \mapsto e^z$  erwarten würde.

Wir betrachten jetzt die Exponentialreihe für rein imaginäre Argumente, das heißt, für  $z = iy$  mit  $y \in \mathbb{R}$ . Es folgt  $\exp(iy) = \cos(y) + i \sin(y)$ , wobei die *Winkelfunktionen* definiert sind durch

$$\cos(X) = \operatorname{Re} \exp(iy) = \frac{\exp(iy) + \exp(-iy)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^{2k}}{(2k)!}$$

und

$$\sin(X) = \operatorname{Im} \exp(iy) = \frac{\exp(iy) - \exp(-iy)}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

2.80. PROPOSITION (Rechenregeln für die Winkelfunktionen). Für alle  $y \in \mathbb{R}$  gilt

(1)  $\cos(y)^2 + \sin(y)^2 = 1$ .

Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gelten die Additionstheoreme

(2)  $\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$

(3) *und*  $\sin(x + y) = \cos(x) \sin(y) + \sin(x) \cos(y)$ .

2.81. BEMERKUNG. Die Funktionen  $\cos$  und  $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  verhalten sich also genauso wie die Winkelfunktionen (in Bogenmaß), die Sie aus der Schule kennen. Weitere wichtige Eigenschaften der Winkelfunktionen leiten wir dann im nächsten Kapitel her.

2.82. BEMERKUNG. Um die komplexe Multiplikation besser zu verstehen, schreiben wir komplexe Zahlen in Polarkoordinaten, das heißt, es sei

$$z = x + iy = r \exp(i\varphi) = r \cos \varphi + ir \sin \varphi \quad \text{und} \quad w = u + iv = s \exp(i\psi) = s \cos \psi + is \sin \psi.$$

Die Zahlen  $r = |z|$  und  $s = |w|$  sind die Beträge, und  $\varphi$  und  $\psi$  heißen die *Argumente* der Zahlen  $z$  und  $w$ . Dann folgt

$$z \cdot w = rs \exp(i(\varphi + \psi)).$$

Also werden beim Multiplizieren die Beträge multipliziert, siehe Bemerkung 2.47 (5), und die Argumente addiert.

## KAPITEL 3

### Stetige Funktionen

Wir wollen jetzt stetige Funktionen auf Teilmengen von  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  betrachten. Außerdem führen wir Grenzwerte ein, die wir spätestens im vierten Kapitel zur Definition der Ableitung brauchen. Wir beweisen einige wichtige Sätze über stetige Funktionen auf Intervallen in  $\mathbb{R}$  und benutzen sie anschließend, um die Exponentialfunktion und die Winkelfunktionen besser zu verstehen.

#### 3.a. Stetigkeit

7.12.21

In diesem Kapitel betrachten wir stetige Funktionen. Stetigkeit von Funktionen und allgemeiner von Abbildungen ist ein sehr wichtiges Konzept in der Analysis. Daher versuchen wir, uns zunächst mit Hilfe einiger Beispiele eine gute Anschauung zu verschaffen.

3.1. DEFINITION. Es sei  $A \subset \mathbb{R}$  oder  $A \subset \mathbb{C}$  eine beliebige Teilmenge und  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Eine Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{k}$  heißt *stetig bei*  $x_0 \in A$ , wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle  $x \in A$  gilt

$$|x - x_0| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Wenn das für alle  $x_0 \in A$  gilt, heißt  $f$  *stetig*. Wir schreiben

$$C^0(A) = \{ f: A \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \} .$$

Da  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , ist jede Teilmenge von  $\mathbb{R}$  auch Teilmenge von  $\mathbb{C}$ , und jede Abbildung nach  $\mathbb{R}$  lässt sich als Abbildung nach  $\mathbb{C}$  auffassen. Also bräuchten wir hier eigentlich nur über Teilmengen von  $\mathbb{C}$  zu sprechen.

3.2. BEISPIEL. Wir beginnen mit einigen sehr elementaren Beispielen.

- (1) Konstante Funktionen sind stetig.
- (2) Es seien  $A \subset B \subset \mathbb{k}$  Teilmengen. Dann ist die *Inklusionsabbildung*  $\iota: A \rightarrow B$  stetig, wobei  $\iota(x) = x \in B$  für alle  $x \in A$ .
- (3) Der Absolutbetrag  $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig.
- (4) Die komplexe Konjugation aus Bemerkung 2.47 (2) ist stetig.
- (5) Die *Heaviside-Funktion*  $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (benannt nach Oliver Heaviside) ist gegeben durch

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \text{ und} \\ 1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Sie ist überall stetig außer an der Stelle  $x_0 = 0$ .

- (6) Wir betrachten die Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für alle } x \in \mathbb{Q}, \text{ und} \\ 0 & \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für alle } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ wobei } \frac{p}{q} \text{ ein gekürzter Bruch sei, und} \\ 0 & \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dann ist  $f$  nirgends stetig, und  $g$  genau bei allen irrationalen Zahlen  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  (Übung).

3.3. BEMERKUNG. Stetigkeit ist eine sogenannte *lokale* Eigenschaft: um festzustellen, ob eine Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{k}$  an einer Stelle  $x_0 \in A$  stetig ist, reicht es, für ein  $\varepsilon > 0$  die Funktion auf der Menge  $A \cap B_\varepsilon(x_0)$  zu kennen, dabei sei

$$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{k} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$$

der  $\varepsilon$ -Ball um  $x_0$  in  $\mathbb{k}$ .

Für eine beliebige Abbildung  $f: M \rightarrow N$  zwischen Mengen definieren wir das *Urbild* einer Teilmenge  $V \subset N$  durch

$$f^{-1}(V) := \{m \in M \mid f(m) \in V\}.$$

Dann können wir die obige Definition noch etwas umformulieren.

Eine Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{k}$  ist genau dann *stetig bei*  $x_0 \in A$ , wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass

$$B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0))).$$

Wir erinnern uns an die Verkettung von Abbildungen aus Definition 1.12.

3.4. PROPOSITION (Verkettung stetiger Funktionen). *Seien  $A, B \subset \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  Teilmengen und  $g: A \rightarrow \mathbb{k}$ ,  $f: B \rightarrow \mathbb{k}$  Funktionen mit  $\text{im } g \subset B$ . Wenn  $g$  bei  $x_0 \in A$  und  $f$  bei  $g(x_0) \in B$  stetig ist, dann ist auch die Verkettung  $f \circ g: A \rightarrow \mathbb{k}$  bei  $x_0$  stetig.*

3.5. FOLGERUNG. *Es seien  $A \subset B \subset \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  Teilmengen und  $f: B \rightarrow \mathbb{k}$  stetig. Dann ist die Einschränkung  $f|_A: A \rightarrow \mathbb{k}$  mit  $(f|_A)(x) = f(x)$  für alle  $x \in A$  auch stetig.*

Umgekehrt kann man im Sinne von Bemerkung 3.3 zeigen, dass  $f: A \rightarrow \mathbb{k}$  genau dann stetig ist, wenn es zu jedem  $x_0 \in A$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $f|_{A \cup B_\delta(x_0)}$  stetig ist.

3.6. PROPOSITION (Folgenstetigkeit). *Es sei  $A \subset \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  und  $f: A \rightarrow \mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  eine Funktion. Für jedes  $a \in A$  sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (1)  $f$  ist stetig bei  $a$ .
- (2)  $f$  ist folgenstetig bei  $a$ , das heißt, für jede Folge  $(x_n)_n$  in  $A$  mit Grenzwert  $a$  konvergiert  $(f(x_n))_n$  gegen  $f(a)$ .

Völlig analog ist Stetigkeit auf ganz  $A$  zur Folgenstetigkeit auf ganz  $A$  äquivalent, dabei heißt  $f$  folgenstetig auf  $A$ , wenn für alle konvergenten Folgen in  $A$  mit Grenzwert in  $A$  gilt, dass  $f$  mit dem Grenzwert „vertauscht“:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right).$$

Wir definieren Grundrechenarten für Funktionen  $f, g: A \rightarrow \mathbb{k}$  *punktweise* durch

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (fg)(x) &= f(x) \cdot g(x), \\ (f/g)(x) &= f(x)/g(x) \quad \text{falls } g(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in A. \end{aligned}$$

3.7. FOLGERUNG (Rechenregeln). *Wenn  $f, g: A \rightarrow \mathbb{k}$  bei  $a \in A$  stetig sind, dann sind auch  $f+g$ ,  $fg$ , und, falls  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in A$  auch  $f/g$  bei  $a$  stetig.*

3.8. BEMERKUNG. Die Menge aller Funktionen  $f: A \rightarrow \mathbb{k}$  bildet einen Vektorraum, und  $C^0(A)$  ist ein Unterraum.

3.9. BEMERKUNG. Eine *rationale Funktion*  $f: A \rightarrow \mathbb{k}$  ist eine Funktion der Form  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , wobei  $P$  und  $Q$  Polynome sind. Wichtig ist dabei nur, dass  $Q(x) \neq 0$  für alle  $x \in A$ . Mit Beispiel 3.2 (1) und (2) und Folgerung 3.7 sehen wir, dass rationale Funktionen stetig sind.

### 3.b. Häufungspunkte und Grenzwerte

Stetigkeit lässt sich auch mit Hilfe von Grenzwerten von Funktionen beschreiben. Solche Grenzwerte brauchen wir spätestens bei der Definition der Ableitung im nächsten Kapitel. Hier wollen wir sie benutzen, um stetige Funktionen etwas anders zu beschreiben, und um eine stetige Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{k}$  auf einen etwas größeren Definitionsbereich fortsetzen.

3.10. DEFINITION. Es sei  $A \subset \mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  eine Teilmenge. Ein Punkt  $x_0 \in \mathbb{k}$  heißt *Häufungspunkt* von  $A$ , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein Punkt  $x \in A$  existiert, so dass  $x \neq x_0$  und  $|x - x_0| < \varepsilon$ .

Das ist erst einmal ein anderer Begriff als in Definition 2.30.

3.11. PROPOSITION. Für jede Teilmenge  $A \subset \mathbb{k}$  und jedes  $x_0 \in \mathbb{k}$  sind äquivalent:

- (1) Es ist  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $A$ .
- (2) Es gibt eine Folge in  $A \setminus \{x_0\}$ , die gegen  $x_0$  konvergiert.
- (3) Für jedes  $\varepsilon > 0$  enthält der  $\varepsilon$ -Ball  $B_\varepsilon(x_0)$  um  $x_0$  unendlich viele Elemente von  $A$ .

3.12. BEISPIEL. Ob ein Punkt  $x_0$  Häufungspunkt von  $A$  ist, hat nichts damit zu tun, ob  $x_0 \in A$  gilt.

- (1) Es sei  $A = (0, 1)$ , dann ist  $[0, 1]$  die Menge aller Häufungspunkte von  $A$ .
- (2) Die Menge  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  ist *diskret*, das heißt, sie hat keine Häufungspunkte in  $\mathbb{R}$ .

Wenn wir allerdings  $\mathbb{N} \subset \overline{\mathbb{R}}$  betrachten, dann würden wir  $\infty$  als Häufungspunkt ansehen, denn es gibt eine Folge  $(n)_n$  in  $\mathbb{N}$ , die gegen  $\infty$  konvergiert.

3.13. DEFINITION. Es sei  $f: A \rightarrow \mathbb{k}$  eine Funktion und  $x \in \mathbb{k}$  ein Häufungspunkt von  $f$ . Dann hat  $f$  an der Stelle  $x_0$  den *Grenzwert*  $y_0 \in \mathbb{k}$ , kurz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 ,$$

wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle  $x \in A$  mit  $x \neq x_0$  und  $|x - x_0| < \delta$  gilt, dass  $|f(x) - y_0| < \varepsilon$ .

3.14. BEISPIEL. Wir geben hier wieder nur sehr elementare Beispiele.

- (1) Die Funktion  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$  ist an der Stelle  $x_0 = 1$  nicht definiert. Man überzeugt sich aber leicht, dass

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 .$$

- (2) Die Funktion  $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) = x/|x|$  hat an der Stelle  $x_0 = 0$  keinen Grenzwert. Wenn wir sie auf  $(0, \infty)$  einschränkten, hätte sie bei 0 den Grenzwert 1. Wenn wir sie auf  $(-\infty, 0)$  einschränkten, hätte sie bei 0 den Grenzwert  $-1$ .
- (3) Die Funktion  $f$  aus Beispiel 3.2 (6) hat nirgends einen Grenzwert (Übung).
- (4) Die Funktion  $g$  aus Beispiel 3.2 (6) hat an jeder Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}$  den Grenzwert 0 (Übung).

Im Beweis der folgenden Proposition sehen wir, warum Funktionsgrenzwerte nur bei Häufungspunkten sinnvoll sind.

3.15. PROPOSITION. Es sei  $A \subset \mathbb{k}$  eine Teilmenge mit Häufungspunkt  $x_0 \in \mathbb{k}$ . Wenn eine Funktion  $f$  bei  $x_0$  einen Grenzwert hat, dann ist er eindeutig.

3.16. BEMERKUNG. Die Grenzwertbegriffe aus den Definitionen 2.6, 2.24 und 3.13 unterscheiden sich auf den ersten Blick. Es gibt aber Gemeinsamkeiten.

- (1) Es geht stets um Abbildungen, entweder von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{k}$  beziehungsweise  $\overline{\mathbb{R}}$ , oder von  $A \subset \mathbb{k}$  nach  $\mathbb{k}$ .

- (2) Wir betrachten den Grenzwert an einem Häufungspunkt  $x_0$ . Bei Folgen fassen wir dazu  $x_0 = \infty$  als den einzigen Häufungspunkt von  $\mathbb{N}$  auf. „Beliebig nahe bei  $\infty$ “ heißt dann einfach „ $\geq N$  für beliebig große  $N \in \mathbb{N}$ “.
- (3) Damit der Wert der Abbildung dem Grenzwert nahe kommt, muss das Argument (bei Folgen also der Index) dem Häufungspunkt  $x_0$  beliebig nahe kommen. Beliebig nahe bei  $\infty$  bedeutet dabei das gleiche wie oben.

Wir lernen in Analysis II einen Formalismus kennen, der das alles vereinheitlicht.

Die folgende Proposition drückt Stetigkeit durch Grenzwerte aus, ganz in Analogie zu Proposition 3.6.

3.17. PROPOSITION. *Es sei  $f: A \rightarrow \mathbb{k}$  eine Funktion und  $x_0 \in A$ .*

- (1) *Wenn  $x_0$  kein Häufungspunkt von  $A$  ist, ist  $f$  bei  $x_0$  stetig.*  
 (2) *Wenn  $x_0$  Häufungspunkt von  $A$  ist, ist  $f$  genau dann bei  $x_0 \in A$  stetig, wenn*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

3.18. BEMERKUNG. Es seien  $A \subset B \subset \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  Teilmengen. Wir nennen  $g: B \rightarrow \mathbb{k}$  eine *Fortsetzung* von  $f: A \rightarrow \mathbb{k}$  auf  $B$ , wenn  $g|_A = f$  gilt. Fortsetzungen sind im Allgemeinen nicht eindeutig.

Sei jetzt  $f: A \rightarrow \mathbb{k}$  stetig und  $x_0 \in \mathbb{k} \setminus A$ . Falls  $x_0$  kein Häufungspunkt von  $A$  ist, kann man  $f$  auf  $A \cup \{x_0\}$  wegen Proposition 3.17 (1) beliebig fortsetzen.

Falls  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $A$  ist, dann folgt aus Proposition 3.17 (2), dass sich eine stetige Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{k}$  genau dann stetig auf  $A \cup \{x_0\}$  fortsetzen lässt, wenn  $f$  bei  $x_0$  einen Grenzwert besitzt. Für die stetige Fortsetzung  $g: A \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{k}$  muss dann gelten:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für alle } x \in A, \text{ und} \\ \lim_{a \rightarrow x_0} f(a) & \text{für } x = x_0. \end{cases}$$

Oft genug schreiben wir für die stetige Fortsetzung später auch wieder  $f$ .

3.19. BEISPIEL. Die Funktion  $f$  aus Beispiel 3.14 (1) lässt sich auf  $x_0 = 1$  durch  $f(1) = 2$  stetig fortsetzen. Die Funktion  $g$  aus 3.14 (2) besitzt bei  $x_0 = 0$  jedoch keine stetige Fortsetzung.

Zu guter Letzt definieren wir noch einseitige Grenzwerte. Dazu brauchen wir allerdings wieder eine Ordnung auf  $\mathbb{k}$ , also betrachten wir jetzt nur noch  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ .

3.20. DEFINITION. Es sei  $A \subset \mathbb{R}$ , und  $f: A \rightarrow \mathbb{k}$  eine Funktion. Für einen Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}$  definieren wir den *linksseitigen* und den *rechtsseitigen Grenzwert* bei  $x_0$  durch

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f|_{A \cap (-\infty, x_0)}(x) \quad \text{beziehungsweise} \quad \lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f|_{A \cap (x_0, \infty)}(x),$$

vorausgesetzt, dass  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $A \cap (-\infty, x_0)$  beziehungsweise  $A \cap (x_0, \infty)$  ist.

3.21. BEMERKUNG. Falls  $x_0$  Häufungspunkt sowohl von  $A \cap (-\infty, x_0)$  als auch von  $A \cap (x_0, \infty)$  ist, existiert der Grenzwert einer Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{k}$  genau dann, wenn sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert existieren und beide miteinander übereinstimmen.

Wenn beide einseitigen Grenzwerte bei  $x_0$  existieren, aber nicht übereinstimmen, sagen wir, dass  $f$  bei  $x_0$  eine *Sprungstelle* hat.

3.22. BEISPIEL. Wir geben zunächst zwei Funktionen mit einer Sprungstelle bei  $x_0 = 0$  an.

- (1) Für die Funktion  $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) = x/|x|$  gilt

$$\lim_{x \nearrow 0} g(x) = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 0} g(x) = 1.$$

(2) Für die Heaviside-Funktion  $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aus Beispiel 3.2 (5) gilt

$$\lim_{x \nearrow 0} H(x) = 0 \neq H(0) = 1 = \lim_{x \searrow 0} H(x).$$

Man beachte, dass hier der rechtsseitige Grenzwert mit dem Funktionswert übereinstimmt, der linksseitig jedoch nicht.

Sprungstellen sind aber nicht die einzigen Gründe dafür, dass eine gegebene Funktion an einer bestimmten Stelle nicht stetig ist, siehe etwa die Beispiele 3.14 (3) und (4).

### 3.c. Eigenschaften stetiger Funktionen

14.12.21

In diesem Abschnitt lernen wir den Zwischenwertsatz und den Umkehrsatz kennen. Beide Sätze gelten nur für reelle Funktionen und beruhen auf der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ . Außerdem folgern wir aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß, dass stetige Funktionen auf Kompakta ihr Supremum und ihr Infimum annehmen. Zu guter Letzt überlegen wir, was es heißt, dass eine Folge von Funktionen gegen eine Grenzfunktion konvergiert. Wenn eine solche Folge stetiger Funktionen gleichmäßig konvergiert, dann ist ihre Grenzfunktion wieder stetig. Damit können wir zeigen, dass Potenzreihen stetige Funktionen darstellen.

3.23. SATZ (Zwischenwertsatz). *Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann nimmt  $f$  jeden Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an.*

3.24. FOLGERUNG. *Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist auch  $\text{im } f$  ein Intervall.*

3.25. FOLGERUNG. *Jedes reelle Polynom von ungeradem Grad hat eine reelle Nullstelle.*

3.26. BEMERKUNG. Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und ohne Einschränkung  $f(a) < f(b)$ . Zu  $y \in (f(a), f(b))$  können wir ein  $x \in (a, b)$  mit  $f(x) = y$  mittels Intervallschachtelung 2.23 bestimmen, indem wir mit dem Intervall  $[a_0, b_0] = [a, b]$  starten und für  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  dasjenige der Intervalle  $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$  und  $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$  auswählen, für das  $f(a_{n+1}) \leq y \leq f(b_{n+1})$  gilt. Falls wir in einem Schritt Gleichheit erhalten, sind wir fertig. Andernfalls bestimmen wir  $x$  durch

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] = \{x\}.$$

Wir kennen den Begriff „Monotonie“ für Folgen aus Definition 2.16.

3.27. DEFINITION. Es sei  $A \subset \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *monoton steigend (fallend)*, wenn für alle  $x, y \in A$  mit  $x < y$  gilt

$$f(y) \geq f(x) \quad \text{beziehungsweise} \quad f(y) \leq f(x).$$

Sie heißt *streng* monoton steigend (fallend), wenn die entsprechende Ungleichung für alle  $x < y$  strikt ist.

3.28. SATZ (Umkehrsatz). *Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit Bild  $J = \text{im } f$ . Dann existiert genau dann eine Umkehrfunktion  $g: J \rightarrow I \subset \mathbb{R}$  wenn  $f$  streng monoton steigt oder fällt. In diesem Fall ist die Umkehrfunktion ebenfalls stetig.*

3.29. BEISPIEL. Die Potenzfunktionen  $f_n(x) = x^n$  steigen streng monoton auf  $[0, \infty)$  mit Bild  $[0, \infty)$ , also existiert eine Umkehrfunktion  $g_n: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  mit  $g_n(y) = \sqrt[n]{y}$ . Falls  $n$  ungerade ist, ist  $f_n$  sogar auf ganz  $\mathbb{R}$  monoton steigend, und wir können  $\sqrt[n]{y}$  für alle  $y \in \mathbb{R}$  definieren.

Wir wollen die Stetigkeit bei  $x_0 = 0$  zur Sicherheit überprüfen. Sei also  $\varepsilon > 0$  gegeben, dann setzen wir  $\delta = \varepsilon^n > 0$ . Für alle  $x \in \mathbb{R}$  (mit  $x \geq 0$  falls  $n$  gerade ist) gilt

$$|x - 0| = |x| < \delta = \varepsilon^n \quad \implies \quad \left| \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0} \right| = \sqrt[n]{|x|} < \sqrt[n]{\varepsilon^n} = \varepsilon .$$

Wir müssen zwar mit  $\varepsilon^n$  ein sehr kleines  $\delta$  wählen, aber es immer noch positiv, und das reicht für Stetigkeit aus.

3.30. DEFINITION. Es sei  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf einer beliebigen Menge  $A$ . Dann definieren wir das *Supremum* und das *Infimum* von  $f$  durch

$$\sup f = \sup_{x \in A} f(x) = \sup \{ f(x) \mid x \in A \} \quad \text{und} \quad \inf f = \inf_{x \in A} f(x) = \inf \{ f(x) \mid x \in A \} .$$

Falls  $x_{\max}$  existiert, so dass

$$\sup f = f(x_{\max})$$

heißt  $\sup f$  auch das *Maximum von  $f$*  und  $x_{\max}$  eine *Maximalstelle von  $f$* , und man sagt, dass die Funktion  $f$  bei  $x_{\max}$  ihr *Maximum annimmt*. Analog spricht man vom *Minimum*, falls eine *Minimalstelle*  $x_{\min} \in A$  mit  $f(x_{\min}) = \inf f$  existiert.

3.31. BEISPIEL. Die Funktion  $f(x) = x^2$  nimmt bei  $x = 0$  ihr Minimum an. Wenn wir  $f$  auf das Intervall  $[-2, 1]$  einschränken, nimmt sie ihr Maximum 4 bei  $-2$  an. Wenn wir sie auf das offene Intervall  $(-2, 1)$  einschränken, wird ihr Supremum 4 nicht angenommen.

Wir erinnern uns an Bemerkung 2.34: eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  heißt kompakt, wenn jede Folge in  $A$  einen Häufungspunkt in  $A$  hat. Ein Intervall ist genau dann kompakt, wenn es beschränkt und abgeschlossen ist.

3.32. SATZ. *Es sei  $K \subset \mathbb{k}$  kompakt, dann ist jede stetige Funktion  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und nimmt ihr Minimum und ihr Maximum an.*

Wir erinnern uns, dass kompakte Intervalle in den reellen Zahlen gerade Intervalle der Form  $[a, b]$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  sind, siehe Bemerkung 2.34.

3.33. FOLGERUNG. *Eine stetige Funktion bildet kompakte Intervalle auf kompakte Intervalle ab.*

Wir betrachten jetzt Folgen von Funktionen. Damit können wir zum Beispiel Potenzreihen besser verstehen.

3.34. DEFINITION. Es sei  $A \subset \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  eine Teilmenge und  $f, f_n: A \rightarrow \mathbb{k}$  Funktionen für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

(1) Die Folge  $(f_n)_n$  konvergiert *punktweise* gegen  $f$ , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in A .$$

(2) Die Folge  $(f_n)_n$  konvergiert *gleichmäßig* gegen  $f$ , wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $x \in A$  und alle  $n \geq N$  gilt

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

Mit anderen Worten können wir  $N$  bei gleichmäßiger Konvergenz zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  für alle  $x \in A$  auf einmal wählen. Bei punktweiser Konvergenz hingegen kann  $N$  durchaus von  $x$  abhängen.

3.35. BEISPIEL. Betrachte die Folge von Funktionen  $f_n(x) = x^n$  auf  $A = [0, 1]$ . Sie konvergiert punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1), \text{ und} \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Man beachte, dass die Grenzfunktion offensichtlich nicht stetig ist, obwohl alle  $f_n$  stetig sind.

3.36. SATZ. *Es sei  $(f_n)_n$  eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen. Dann ist auch die Grenzfunktion stetig.*

3.37. FOLGERUNG. *Jede Potenzreihe stellt im Innern ihres Konvergenzkreises eine stetige Funktion dar.*

3.38. BEMERKUNG. Es sei  $A \subset \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  wie oben mit  $A \neq \emptyset$ , dann definieren wir für Funktionen  $f: A \rightarrow \mathbb{k}$  die *Supremumsnorm*

$$\|f\|_{\text{sup}} = \sup |f| = \sup \{ |f(x)| \mid x \in A \} .$$

Sie hat ähnliche Eigenschaften wie der Absolutbetrag, siehe Bemerkungen 2.2 und 2.42. Es seien  $f, g: A \rightarrow \mathbb{k}$  und alle  $r \in \mathbb{k}$ .

(1) *Positivität.*

$$\|f\|_{\text{sup}} \geq 0 \quad \text{und} \quad \|f\|_{\text{sup}} = 0 \iff f = 0 .$$

(2) *Multiplikativität.*

$$\|rf\|_{\text{sup}} = |r| \cdot \|f\|_{\text{sup}} .$$

(3) *Subadditivität.*

$$\|f + g\|_{\text{sup}} \leq \|f\|_{\text{sup}} + \|g\|_{\text{sup}} .$$

Dementsprechend erhalten wir auch einen Abstandsbegriff  $d(f, g) = \|f - g\|_{\text{sup}}$  wie in Bemerkung 2.3.

Es sei jetzt  $(f_n)_n$  eine Folge von Funktionen  $f_n: A \rightarrow \mathbb{k}$ . Sie konvergiert genau dann gleichmäßig gegen  $f: A \rightarrow \mathbb{k}$ , wenn sie „in der Supremumsmetrik“ konvergiert, das heißt, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\text{sup}} = 0 .$$

### 3.d. Logarithmus und Winkelfunktionen

Mit den Methoden aus dem letzten Abschnitt wollen wir jetzt die Exponentialfunktion und die Winkelfunktionen besser verstehen. Da diese Funktionen in Abschnitt 2.f durch Potenzreihen definiert wurden, sind sie nach Folgerung 3.37 in Inneren ihres Konvergenzkreises, also laut Beispiel 2.73 auf ganz  $\mathbb{C}$ , stetig. Wir betrachten sie im Folgenden allerdings auf  $\mathbb{R}$ .

3.39. PROPOSITION. *Die reelle Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig und streng monoton steigend mit Bild  $(0, \infty)$ .*

Nach dem Umkehrsatz 3.28 existiert also eine stetige Umkehrfunktion.

3.40. DEFINITION (Logarithmus). Die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion heißt (*natürlicher*) *Logarithmus*

$$\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} .$$

3.41. FOLGERUNG. *Der natürliche Logarithmus ist eine stetige, streng monoton wachsende, bijektive Abbildung  $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , und für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt*

$$\log(1) = 0 , \quad \log(e) = 1 \quad \text{und} \quad \log(xy) = \log x + \log y .$$

3.42. DEFINITION. Es seien  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x > 0$ , dann definieren wir die *Potenz*  $x^y$  durch

$$x^y = e^{y \log x} .$$

Als Verkettung stetiger Funktionen und Rechenoperationen sind Potenzen  $x^y$  sowohl in  $x$  als auch in  $y$  stetig.

3.43. PROPOSITION (Rechenregeln für Potenzen). Für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$  mit  $x > 0$  gilt  $x^y > 0$  und

- (1)  $x^{y+z} = x^y \cdot x^z$ ,
- (2)  $(xy)^z = x^z \cdot y^z$ , falls auch  $y > 0$ ,
- (3) und  $(x^y)^z = x^{yz}$ .

Im Falle  $n \in \mathbb{Z}$  stimmt  $x^n$  mit der Potenz aus Bemerkung 1.6 (3) überein, und falls  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , gilt  $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ .

3.44. BEMERKUNG. Wir können ohne weiteres komplexe Exponenten zulassen. Die obigen Rechenregeln bleiben erhalten, wenn wir „ $> 0$ “ als „reell und  $> 0$ “ interpretieren. Die Basis  $x$  dürfen wir leider nicht einfach aus  $\mathbb{C}$  wählen, denn wir werden später sehen, dass die Exponentialfunktion auf  $\mathbb{C}$  nicht mehr umkehrbar ist.

Da  $\exp(1) = e$  gilt, dürfen wir jetzt auch  $\exp(z) = \exp(z \log e) = e^z$  schreiben.

Als nächstes wollen wir die Exponentialfunktion für imaginäre Argumente genauer betrachten. Nach Definition der Winkelfunktionen  $\cos$  und  $\sin$  gilt

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Mit Folgerung 2.79 und den Additionstheoremen 2.80 (2) und (3) erhalten wir erste Eigenschaften.

3.45. PROPOSITION. Die Winkelfunktionen sind stetig und haben folgende Eigenschaften.

- (1) Die Cosinus-Funktion ist gerade und die Sinus-Funktion ungerade, das heißt, für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$\cos(-t) = \cos t \quad \text{und} \quad \sin(-t) = -\sin t.$$

- (2) Für alle  $s, t \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} \cos s - \cos t &= -2 \sin \frac{s+t}{2} \sin \frac{s-t}{2}, \\ \sin s - \sin t &= 2 \cos \frac{s+t}{2} \sin \frac{s-t}{2}. \end{aligned}$$

3.46. SATZ UND DEFINITION (Kreiszahl  $\pi$ ). Die Funktion  $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt eine kleinste positive Nullstelle  $x_0 \in (0, 2)$ , und wir setzen  $\pi = 2x_0$ .

Somit liegt  $\pi$  zwischen 0 und 4. Das ist nicht sehr genau, soll aber für's erste reichen.

3.47. SATZ (Verhalten der Winkelfunktionen). Die Funktionen  $\cos$  und  $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  haben folgende Eigenschaften.

- (1) Für alle  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$  gilt  $\cos t \geq 0$  und  $\sin t \geq 0$ .
- (2) Die Funktion  $\cos$  ist streng monoton fallend und  $\sin$  streng monoton steigend auf  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .
- (3) Es gilt  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$  und  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ .
- (4) Für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$\sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right), \quad \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t, \quad \text{und} \quad \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t.$$

- (5) Die Funktionen  $\cos$  und  $\sin$  sind periodisch mit minimaler Periode  $2\pi$ , das heißt, für eine Zahl  $P \in \mathbb{R}$  gilt genau dann  $\cos(t + P) = \cos t$  (beziehungsweise  $\sin(t + P) = \sin t$ ) für alle  $t \in \mathbb{R}$ , wenn  $P$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  ist.

Wir kommen noch einmal auf die Polardarstellung komplexer Zahlen aus Bemerkung 2.82 zurück.

3.48. FOLGERUNG. *Jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  hat eine Darstellung der Form*

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{mit } r, \varphi \in \mathbb{R} \text{ und } r \geq 0.$$

*Falls  $z \neq 0$  und wir  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  verlangen, ist diese Darstellung eindeutig, und wir nennen  $\varphi = \arg(z)$  das Argument von  $z$ .*

Insbesondere lässt sich jede Zahl auf dem Einheitskreis als  $e^{i\varphi}$  schreiben, und diese Darstellung ist ebenfalls eindeutig, wenn wir  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  verlangen.

3.49. FOLGERUNG. *Die komplexe Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist stetig, surjektiv, und  $2\pi i$ -periodisch, aber nicht umkehrbar.*

Sei  $A \subset \mathbb{C}^\times$ . Eine Funktion  $\log: A \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\exp \circ \log = \text{id}_A$  nennt man einen *Zweig des komplexen Logarithmus*. Der *Hauptzweig des komplexen Logarithmus*  $\text{Log}: \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}$  wird definiert durch

$$\text{Log } z = \log |z| + i \arg z \quad \in \mathbb{R} + i(-\pi, \pi] \subset \mathbb{C}.$$

Er ist unstetig bei  $(-\infty, 0) \subset \mathbb{C}^\times$ .



## Differentialrechnung

In diesem Kapitel geht es um die Ableitung von Funktionen in einer reellen Variablen. Wir definieren den Begriff der Ableitung und benutzen ihn, um das globale Verhalten differenzierbarer Funktionen zu verstehen. Sie kennen das möglicherweise aus der Schule unter dem Namen „Kurvendiskussion“.

Einige interessante Sätze über differenzierbare Funktionen werden wir aber erst im nächsten Kapitel beweisen, da sie mit Methoden aus der Integralrechnung zugänglicher sind. Hierzu gehören etwa der Satz von Taylor über die Approximation von Funktionen durch Polynome, die man mit Hilfe der höheren Ableitungen bildet, oder Sätze über das Vertauschen von Ableitung mit dem Grenzwert einer Funktionenfolge.

### 4.a. Die Ableitung

Sie kennen die Ableitung aus der Schule als Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen in einem gegebenen Punkt. Die Tangentensteigung erhält man als Grenzwert von Sekantensteigungen, und genauso definieren wir die Ableitung auch hier. Wir können die Ableitung auch benutzen, um Funktionen in der Nähe eines Punktes durch lineare Funktionen zu approximieren. Dieser Standpunkt ist sowohl für die Definition der Ableitung im Mehrdimensionalen (in Analysis II) hilfreich, als auch der einfachste Spezialfall der Taylor-Entwicklung, die wir nächsten Kapitel besprechen.

4.1. DEFINITION. Es sei  $A \subset \mathbb{R}$  und  $x_0 \in A$  ein Häufungspunkt von  $A$ . Eine Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  heißt *differenzierbar an der Stelle  $x_0$* , wenn ihre *Ableitung*

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{k}$$

an der Stelle  $x_0$  existiert. Sie heißt *differenzierbar auf  $A$* , wenn sie für alle  $x_0 \in A$  bei  $x_0$  differenzierbar ist. Sie heißt *stetig differenzierbar auf  $A$* , wenn die Ableitung darüberhinaus eine stetige Funktion  $f': A \rightarrow \mathbb{k}$  definiert. Die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen auf  $A$  bezeichnen wir mit  $C^1(A; \mathbb{k})$  oder kurz  $C^1(A)$ , falls  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ .

Da wir einen Grenzwert zu bilden haben, müssen wir annehmen, dass  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $A$  ist. Und da  $f(x_0)$  in der Definition vorkommt, muss auch  $x_0 \in A$  gelten. Im Folgenden soll die Aussage „ $f$  ist bei  $x_0$  differenzierbar“ diese beiden Voraussetzungen stets implizieren. Man beachte, dass wir  $x = x_0$  bei der Definition des Grenzwertes ausgeschlossen haben. Auf diese Weise teilen wir in der obigen Definition nicht durch 0.

Andere Schreibweisen für die Ableitung sind

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

Sie sind vor allem dann hilfreich, wenn  $f$  nicht durch einen einzigen Buchstaben, sondern einen komplizierten mathematischen Ausdruck gegeben wird. Außerdem wird aus der Notation klar, welches die unabhängige Variable sein soll, nach der wir ableiten wollen.

Die Stetigkeit der Ableitung wird im Folgenden zunächst keine große Rolle spielen.

4.2. BEISPIEL. Wir leiten einige bekannte Funktionen ab.

- (1) Unter einer linearen Funktion verstehen wir eine Abbildung der Form  $f(x) = ax + b$  mit  $a, b \in \mathbb{k}$  (in der linearen Algebra würden wir korrekterweise „affin“ statt „linear“ sagen). Für alle  $x_0 \in \mathbb{R}$  folgt

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} a = a.$$

- (2) Der reelle Absolutbetrag ist bei  $x_0 = 0$  nicht differenzierbar, denn

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x - 0}{x - 0} = 1, \quad \text{aber} \quad \lim_{x \nearrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x + 0}{x - 0} = -1.$$

- (3) Für die Exponentialfunktion berechnen wir zunächst

$$\exp'(x_0) = \left. \frac{de^x}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Dabei haben wir im letzten Schritt  $x - x_0$  durch  $h$  ersetzt; offenbar geht  $h$  genau dann gegen 0, wenn  $x$  gegen  $x_0$  geht. Mit Hilfe der Exponentialreihe erhalten wir für  $h \neq 0$ , dass

$$\frac{e^h - 1}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{(k+1)!}.$$

Da dies wieder eine konvergente Potenzreihe in  $h$  ist (wie man mit Quotientenkriterium überprüfen kann), erhalten wir an der Stelle 0 den Grenzwert 1. Insgesamt folgt

$$\exp'(x_0) = \exp(x_0).$$

- (4) Für die Winkelfunktionen berechnen wir mit Proposition 3.45 (2) und einem ähnlichen Trick wie oben (Übung), dass

$$\cos'(x_0) = -\sin(x_0) \quad \text{und} \quad \sin'(x_0) = \cos(x_0).$$

Wir können die Ableitung von  $f$  bei  $x_0$  auch anders charakterisieren.

4.3. PROPOSITION. *Es sei  $x_0 \in A$  Häufungspunkt von  $A \subset \mathbb{R}$  und  $f: A \rightarrow \mathbb{k}$  wie oben. Für  $s \in \mathbb{k}$  sind äquivalent:*

- (1) die Funktion  $f$  ist differenzierbar bei  $x_0$  mit Ableitung  $s$ ;
- (2) die Funktion  $x \mapsto g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  lässt sich bei  $x_0$  stetig durch  $s$  fortsetzen;
- (3) es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + s(x - x_0))}{|x - x_0|} = 0.$$

4.4. BEMERKUNG. In (2) bemerken wir, dass die angegebene Funktion außerhalb von  $x_0$  stetig ist, wenn  $f$  stetig ist.

Die Aussage (3) bedeutet, dass die lineare Funktion  $x \mapsto h(x) = f(x_0) + s(x - x_0)$  die Funktion  $f$  bei  $x_0$  von erster Ordnung approximiert. Dabei bezieht sich die „erste Ordnung“ darauf, dass im Nenner  $|x - x_0|^1$  steht. Der Graph der Funktion  $h$  ist übrigens genau die Tangente an den Graphen der Funktion  $f$  bei  $x_0$ , wenn  $s = f'(x_0)$ .

Zum Vergleich: die Funktion  $f$  ist bei  $x_0$  genau dann stetig, wenn sie durch die konstante Funktion  $x \mapsto k(x) = f(x_0)$  von nullter Ordnung approximiert wird, das heißt, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|^0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0.$$

Um Funktionen von höherer Ordnung zu approximieren, benutzen wir im nächsten Kapitel Taylor-Polynome.

4.5. FOLGERUNG. Wenn  $f: A \rightarrow \mathbb{k}$  bei  $x_0$  differenzierbar ist, dann ist  $f$  bei  $x_0$  stetig.

#### 4.b. Ableitungsregeln

In diesem Abschnitt betrachten wir die üblichen Ableitungen von Summen, Produkten, Quotienten und Verkettungen von Funktionen. Außerdem überlegen wir uns, wann die Umkehrung einer gegebenen Funktion differenzierbar ist.

Die folgenden Rechenregeln kennen Sie aus der Schule. Wir beweisen sie noch einmal neu, dabei achten wir darauf, nicht mehr Differenzierbarkeit als nötig vorauszusetzen. Es gilt im Folgenden stets „Ableiten vor Grundrechenarten“.

4.6. PROPOSITION. Es seien  $f$  und  $g: A \rightarrow \mathbb{k}$  bei  $x_0 \in A$  differenzierbar. Dann gilt

$$(1) \quad (f + g)'(x_0) = (f' + g')(x_0) ,$$

$$(2) \quad (fg)'(x_0) = (f'g + fg')(x_0)$$

$$(3) \quad \text{und} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'g - fg'}{g^2}(x_0) , \quad \text{falls } g(x_0) \neq 0 .$$

4.7. BEISPIEL. Aus der Produktregel ergibt sich induktiv

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} ,$$

zunächst für  $n \in \mathbb{N}$ . Mit der Quotientenregel erhalten wir das gleiche Resultat auch für  $n \in \mathbb{Z}$ . Für Exponenten in  $\mathbb{R}$  (oder gar  $\mathbb{C}$ ) gilt die gleiche Formel, allerdings brauchen wir etwas andere Methoden, um das zu zeigen.

Wichtig ist an dieser Stelle, dass wir Polynome  $P$  und rationale Funktionen  $\frac{P}{Q}$  allein mit Produkt- und Quotientenregel ableiten können — diese Regeln lassen sich auch in einem algebraischen Kontext formalisieren und haben tatsächlich auch für Polynome und rationale Funktionen über anderen Körpern als  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  Bedeutung (allerdings nicht in dieser Vorlesung). Tatsächlich sehen wir, dass wir Polynome bereits über  $\mathbb{Q}$  ableiten können, da alle relevanten Grenzwerte im Falle von  $x_0 \in \mathbb{Q}$  bereits in  $\mathbb{Q}$  existieren. Für andere Funktionen von  $\mathbb{Q}$  nach  $\mathbb{Q}$  muss das nicht gelten.

4.8. SATZ (Kettenregel). Es seien  $A, B \subset \mathbb{R}$ ,  $g: A \rightarrow \mathbb{R}$  sei bei  $x_0 \in A$  differenzierbar mit  $\text{im } g \subset B$ , und  $f: B \rightarrow \mathbb{k}$  sei bei  $g(x_0)$  differenzierbar. Dann gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) g'(x_0) .$$

4.9. SATZ. Es seien  $A, B \subset \mathbb{R}$  und  $f: A \rightarrow B$  sei umkehrbar mit Umkehrfunktion  $g: B \rightarrow A$ . Falls  $f$  bei  $x_0 \in A$  differenzierbar mit  $f'(x_0) \neq 0$  und  $g$  bei  $y_0 = f(x_0)$  stetig ist, ist  $g$  bei  $y_0$  differenzierbar mit

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

Falls wir schon wissen, dass  $g$  bei  $y_0$  differenzierbar ist, können wir die Ableitung mittels der Kettenregel ausrechnen:

$$1 = \frac{dx}{dx} \Big|_{x=x_0} = (g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0) .$$

Aber wir wissen nicht immer, ob die Umkehrfunktion differenzierbar ist, und brauchen daher einen Beweis unabhängig von der Kettenregel.

4.10. BEISPIEL. Wir betrachten einige Umkehrfunktionen.

- (1) Die  $n$ -te Wurzel ist die Umkehrfunktion der  $n$ -ten Potenz. Aus Beispiel 4.7 folgt für  $y > 0$  und  $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$ , dass

$$\frac{d\sqrt[n]{y}}{dy} = \frac{1}{n x^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{y})^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$$

in der Notation aus Abschnitt 3.d. Falls  $n$  ungerade ist, funktioniert diese Rechnung auch für  $y < 0$ . Man vergleiche diese Formel mit der aus Beispiel 4.7.

Bei  $x_0 = 0$  hat die  $n$ -te Potenz Ableitung 0, falls  $n > 1$ . Tatsächlich ist  $\sqrt[n]{\cdot}$  bei  $y_0 = 0$  nicht differenzierbar, denn

$$\lim_{y \searrow 0} \frac{\sqrt[n]{y} - 0}{y - 0} = \lim_{y \searrow 0} y^{\frac{1}{n}-1} = \infty.$$

- (2) Der natürlichen Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Aus Beispiel 4.2 (3) folgt für alle  $y > 0$  mit  $x = \log y \in \mathbb{R}$ , dass

$$\log'(y) = \frac{1}{\exp'(\log y)} = \frac{1}{\exp(\log y)} = \frac{1}{y}.$$

- (3) Wir können jetzt beliebige Potenzen  $x^z$  mit  $x > 0$  für  $z \in \mathbb{C}$  mit der Kettenregel ableiten:

$$\frac{dx^z}{dx} = \frac{de^{z \log x}}{dx} = \frac{de^y}{dy} \Big|_{y=z \log x} \cdot \frac{d(z \log x)}{dx} = e^{z \log x} \cdot z \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{z} x^{z-1}.$$

Diese Ableitungsregel für den natürlichen Logarithmus ist vor allem deswegen interessant, weil  $\frac{1}{x} = x^{-1}$  die einzige Potenz  $x^k$  von  $x$  ist, die wir nicht als Ableitung der Funktion  $\frac{1}{k+1} x^{k+1}$  schreiben können.

- (4) Die Sinus-Funktion ist streng monoton steigend auf dem Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Wir definieren die Umkehrfunktion, den *Arcus-Sinus*

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

und erhalten mit Beispiel 4.2 (4), dass

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sin'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

denn auf dem Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ist der Cosinus nicht negativ, so dass  $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ .

- (5) Völlig analog definieren wir  $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  und erhalten

$$\arccos' y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

- (6) Zu guter Letzt betrachten wir den Tangens und seine Umkehrfunktion, den Arcus-Tangens

$$\tan = \frac{\sin}{\cos}: \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

und erhalten (Übung)

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad \text{und} \quad \arctan' y = \frac{1}{1+y^2}.$$

Ähnlich wie beim Logarithmus ist auch hier die Ableitung eine rationale Funktion.

#### 4.c. Extrema und Mittelwertsatz

Wenn eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall  $[a, b]$  eine durchschnittliche Steigung  $s$  hat, dann hat sie mindestens an einem Punkt Ableitung  $s$ . Dieser Satz ermöglicht es, aus der Kenntnis der Ableitungen globale Schlüsse über das Verhalten der Funktion zu ziehen. Ein Beispiel betrifft Monotonie, wie wir sie beim Umkehrsatz bereits gesehen haben. Außerdem lernen wir die Regel von l'Hospital kennen, mit der wir Grenzwerte auch dann berechnen können, wenn wir auf den ersten Blick nur „ $\frac{0}{0}$ “ erhalten.

Wir erinnern uns an die Schreibweise  $B_\varepsilon(x_0)$  aus Bemerkung 3.3.

4.11. DEFINITION. Es sei  $A \subset \mathbb{k}$ . Eine Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  nimmt bei  $x_0 \in A$  ein *lokales Minimum* (*lokales Maximum*) an, wenn ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass  $f(x) \geq f(x_0)$  ( $f(x) \leq f(x_0)$ ) für alle  $x \in B_\varepsilon(x_0) \cap A$  gilt.

Wenn die obige Ungleichung für alle obigen  $x \neq x_0$  strikt ist, heißt  $x_0$  ein *striktes* lokales Minimum beziehungsweise Maximum.

Wir fassen Minima und Maxima unter dem Oberbegriff *Extrema* zusammen. „Lokal“ bedeutet, dass die Extremaleigenschaft nur innerhalb von  $B_\varepsilon(x_0) \cap A$  zu gelten braucht, ein anderes Wort dafür ist „relativ“. Ein „globales“ (oder „absolutes“) Extremum ist natürlich erst recht ein lokales. Die Umkehrung muss aber nicht gelten, siehe unten.

Wir erinnern uns kurz an Satz 3.32, wonach stetige Funktionen auf Kompakta sogar globale Minima und Maxima haben. Unser erstes Ziel wird es sein, diese Extremstellen zu finden.

Sie kennen aus der Schule vermutlich bereits eine Charakterisierung lokaler Extrema mit Hilfe der Ableitung von  $f$ . Sie funktioniert aber nur für beidseitige Häufungspunkte des Definitionsbereichs.

4.12. DEFINITION. Sei  $A \subset \mathbb{R}$  eine Teilmenge. Ein Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}$  heißt *beidseitiger Häufungspunkt* von  $A$ , wenn  $x_0$  sowohl Häufungspunkt von  $A \cap (-\infty, x_0)$  als auch von  $A \cap (x_0, \infty)$  ist.

Es sei  $A \subset \mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  eine beliebige Teilmenge. Ein Punkt  $x_0 \in A$  heißt *innerer Punkt* von  $A$ , wenn ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass

$$B_\varepsilon(x_0) \subset A.$$

Wenn  $x_0 \in A$  kein innerer Punkt ist, heißt  $x_0$  ein *Randpunkt* von  $A$ .

Im Falle  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ist jeder innere Punkt automatisch beidseitiger Häufungspunkt. In der Praxis werden wir die folgenden Überlegungen meistens auf innere Punkte anwenden.

4.13. PROPOSITION (Charakterisierung lokaler Extrema). *Es sei  $A \subset \mathbb{R}$  gegeben und  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  sei an einem beidseitigen Häufungspunkt  $x_0$  von  $A$  differenzierbar. Wenn  $f$  ein lokales Extremum bei  $x_0$  hat, folgt  $f'(x_0) = 0$ .*

4.14. BEISPIEL. Wir betrachten drei einfache Beispiele

- (1) Um ein mögliches Extremum einer quadratischen Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

zu finden, betrachten wir die Gleichung

$$0 = f'(x_0) = 2ax_0 + b.$$

Falls  $a \neq 0$ , gibt es genau eine Lösung  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ .

Um festzustellen, ob ein (lokales) Minimum oder Maximum vorliegt, können wir zum Beispiel mit quadratischer Ergänzung arbeiten:

$$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Falls  $a > 0$  ( $a < 0$ ), liegt ein striktes Minimum (Maximum) vor. Es ist tatsächlich global, da das Ergänzungsargument für alle  $x \in \mathbb{R}$  funktioniert.

- (2) Wir betrachten jetzt die kubische Funktion

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1 .$$

Mit Ableiten finden wir ein lokales Maximum bei  $x = 0$  und ein lokales Minimum bei  $x = 1$ . Keine dieser Extremstellen ist global, wie man sich leicht überzeugt.

- (3) Zu guter Letzt betrachte

$$h(x) = x^3 .$$

Der einzige Punkt mit Ableitung  $h' = 0$  ist  $x = 0$ . Dennoch liegt kein lokales Extremum vor.

4.15. BEMERKUNG. Es sei  $A \subset \mathbb{R}$  und  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Wenn wir Extremstellen von  $f$  bestimmen sollen, erlaubt uns Proposition 4.13, diejenigen beidseitigen Häufungspunkte  $x$  von  $A$  auszuschließen, an denen  $f$  differenzierbar ist mit  $f'(x) \neq 0$ . Es bleiben also drei Typen von Punkten, die wir einzeln betrachten müssen.

- (1) Alle Punkte von  $A$ , die keine beidseitigen Häufungspunkte sind. Bei einem kompakten Intervall  $A = [a, b]$  sind das beispielsweise genau die Randpunkte  $x = a$  und  $x = b$ . Die Funktion  $f(x) = x$  nimmt bei  $x = a$  ihr Minimum und bei  $x = b$  ihr Maximum an, obwohl überall  $f'(x) = 1 \neq 0$  gilt.
- (2) Alle beidseitigen Häufungspunkte  $x_0 \in A$ , an denen  $f$  nicht differenzierbar (oder möglicherweise nicht einmal stetig) ist. Zum Beispiel nimmt der reelle Absolutbetrag sein Minimum an der Stelle  $x_0 = 0$  an, wo er nicht differenzierbar ist. An allen anderen Stellen  $x \neq 0$  hat er Ableitung  $\text{sign}(x) \neq 0$ .
- (3) Alle beidseitigen Häufungspunkte  $x_0 \in A$ , an denen  $f$  differenzierbar ist mit  $f'(x_0) = 0$ . Solche Punkte heißen auch „kritische Punkte“ von  $f$ . Wir kommen in Folgerung 4.20 darauf zurück, wie man bei einem kritischen Punkt herausfinden kann, ob tatsächlich eine Extremum vorliegt.

4.16. SATZ (Mittelwertsatz). *Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Dann existiert ein  $x_0 \in (a, b)$ , so dass*

$$(1) \quad f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

*Sei  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ebenfalls stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Dann existiert ein  $x_0 \in (a, b)$ , so dass*

$$(2) \quad (f(b) - f(a)) g'(x_0) = (g(b) - g(a)) f'(x_0) .$$

Der Spezialfall von (1) mit  $f(a) = f(b)$  heißt auch „Satz von Rolle“. Sowohl (1) als auch (2) lassen sich auf den Satz von Rolle zurückführen. Die allgemeinere Form (2) benötigen wir unten für die Regel von l'Hospital, siehe Folgerung 4.21.

4.17. FOLGERUNG. *Seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Falls  $f'(x) = g'(x)$  für alle  $x \in (a, b)$ , dann existiert  $c \in \mathbb{K}$ , so dass  $g(x) = f(x) + c$  für alle  $x \in [a, b]$ .*

4.18. BEISPIEL. Der Tangens Hyperbolicus  $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hat als Umkehrfunktion den Area Tangens Hyperbolicus  $\text{ar tanh}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  mit Ableitung

$$\text{ar tanh}' x = \frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} \right) .$$

Die gleiche Ableitung hat die Funktion  $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \frac{1}{2} (\log(1+x) - \log(1-x)) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}.$$

Tatsächlich kann man nachrechnen, dass

$$\tanh\left(\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}\right) = x.$$

Wir erinnern uns an den Monotoniebegriff für reelle Funktionen, wie wir ihn zum Beispiel für den Umkehrsatz gebraucht haben.

4.19. FOLGERUNG. *Es sei  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Dann ist  $f$*

- (1) *genau dann monoton steigend (fallend), wenn  $f' \geq 0$  ( $f' \leq 0$ ) auf ganz  $(a, b)$  gilt, und*
- (2) *streng monoton steigend (fallend), wenn  $f' > 0$  ( $f' < 0$ ) auf ganz  $(a, b)$  gilt.*

Die Umkehrung von (2) gilt nicht, wie am Beispiel der streng monoton steigenden Funktion  $f(x) = x^3$  mit  $f'(0) = 0$  leicht sehen kann.

Punkte, an denen die Ableitung ihr Vorzeichen ändert, sind Extremstellen.

4.20. FOLGERUNG. *Es sei  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f'(x_0) = 0$ .*

- (1) *Wenn  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass  $f'(x) \leq 0$  für alle  $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$  und  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ , dann hat  $f$  bei  $x_0$  ein lokales Minimum.*
- (2) *Wenn  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$  und  $f'(x) \leq 0$  für alle  $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ , dann hat  $f$  bei  $x_0$  ein lokales Maximum.*
- (3) *Wenn die obigen Ungleichungen strikt sind, hat  $f$  bei  $x_0$  ein striktes Minimum beziehungsweise Maximum.*

In keinem der obigen Fälle gilt die Umkehrung — man kann Beispiele von Funktionen konstruieren, deren Ableitung nahe  $x_0$  beliebig oft das Vorzeichen wechselt, und die dennoch bei  $x_0$  ein lokales Minimum oder Maximum haben (Übung).

Aus dem erweiteren Mittelwertsatz ergibt sich die Grundfassung der l'Hospital'schen Regel.

4.21. FOLGERUNG (Regel von l'Hospital). *Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit  $g'(x) \neq 0$  auf  $(a, b)$ . Falls*

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} g(x) = 0$$

und  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  für  $x \searrow a$  einen Grenzwert hat, gilt

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Die analoge Aussage gilt auch bei  $b$ .

Ein einfaches typisches Beispiel für die Regel von l'Hospital ist

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{1} = 1.$$

4.22. BEISPIEL. Es sei  $\cot = \frac{\cos}{\sin}: \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  der Kotangens. Wir betrachten

$$\lim_{x \searrow 0} (x \cot x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x}.$$

Die Funktionen  $f = \text{id} \cdot \cos$  und  $g = \sin$  sind differenzierbar, und

$$\lim_{x \searrow 0} (x \cos x) = 0 = \lim_{x \searrow 0} \sin x,$$

also dürfen wir die Regel von l'Hospital anwenden. Es folgt

$$\lim_{x \searrow 0} (x \cot x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1 \cdot \cos 0 - 0 \cdot \sin 0}{\cos 0} = 1 .$$

Wir erweitern den Begriff des Funktionsgrenzwerts aus Definition 3.13, indem wir zum einen  $\pm\infty$  als Grenzwerte zulassen, und zum anderen Grenzwerte bei  $\pm\infty$  betrachten. Dabei gehen wir ähnlich vor wie in Abschnitt 2.b.

4.23. DEFINITION. Es sei  $A \subset \mathbb{R}$ , und „ $\pm$ “ bedeute innerhalb einer Aussage entweder stets „+“ oder stets „-“.

- (1) Wenn für alle  $C \in \mathbb{R}$  ein  $x \in A$  mit  $\pm x > C$  existiert, heißt  $\pm\infty$  ein *Häufungspunkt* von  $A$ .
- (2) Sei  $\pm\infty$  Häufungspunkt von  $A$ , dann hat  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  bei  $\pm\infty$  den *Grenzwert*  $y \in \mathbb{R}$ , kurz

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = y ,$$

wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $D \in \mathbb{R}$  existiert, so dass  $|f(x) - y| < \varepsilon$  für alle  $x \in A$  mit  $\pm x > D$ .

- (3) Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  Häufungspunkt von  $A$ , dann hat  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  bei  $x_0$  den *Grenzwert*  $\pm\infty$ , kurz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty ,$$

falls für alle  $C > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass  $\pm f(x) > C$  für alle  $x \in A \setminus \{x_0\}$  mit  $|x - x_0| < \delta$ .

- (4) Analog definiert man

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty ,$$

wobei diesmal alle vier Kombinationen von Vorzeichen möglich sind.

Beachte, dass wir in (2) den Fall  $x = \pm\infty$  nicht explizit auszuschließen brauchen, da ohnehin  $\pm\infty \notin A$ , da  $A \subset \mathbb{R}$ .

4.24. BEMERKUNG. Wir können die obigen Grenzwerte auf *eigentliche Grenzwerte* zurückführen, beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a & \iff \lim_{x \searrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = a , \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty & \iff f(x) > 0 \text{ nahe } x_0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0 . \end{aligned}$$

Analog behandeln wir  $-\infty$  sowie den Fall, dass  $f$  bei  $\pm\infty$  den Grenzwert  $\pm\infty$  annimmt.

Wir erhalten folgende Varianten der l'Hospitalschen Regel (Übung).

4.25. FOLGERUNG. Es seien  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ , und  $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  seien differenzierbar mit  $g'(x) \neq 0$  auf  $(a, b)$ .

- (1) Die l'Hospitalsche Regel gilt analog bei  $a = -\infty$  und bei  $b = \infty$ .
- (2) Die l'Hospitalsche Regel gilt analog, wenn  $\lim_{x \searrow a} f(x) \in \{-\infty, \infty\}$  und  $\lim_{x \searrow a} g(x) \in \{-\infty, \infty\}$ .

#### 4.d. Höhere Ableitungen

Wenn die Ableitung  $f'$  einer Funktion  $f$  wieder differenzierbar ist, nennt man ihre Ableitung die zweite Ableitung von  $f$ . Induktiv definiert man höhere Ableitungen, falls möglich. Wir wollen uns hier vor allem anschauen, was die zweite Ableitung über Extremstellen und über Konvexität aussagen kann.

Die folgende Definition funktioniert immer dann, wenn jeder Punkt von  $A \subset \mathbb{R}$  ein Häufungspunkt von  $A$  ist, denn nur dann können wir  $f'$  auf ganz  $A$  definieren. Solche Mengen nennt man „perfekt“. Reelle Intervalle positiver Länge (also nicht  $[a, a]$ ) sind perfekt, und das soll uns für den Moment reichen.

4.26. DEFINITION. Es sei  $A \subset \mathbb{R}$  ein Intervall positiver Länge, und  $f: A \rightarrow \mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  eine Funktion. Wir betrachten  $f^{(0)} = f$  als „nullte Ableitung“ von  $f$  und definieren die  $k$ -te Ableitung von  $f$  für  $k \geq 1$  rekursiv als

$$f^{(k)} = (f^{(k-1)})',$$

falls  $f^{(k-1)}$  existiert und differenzierbar ist. Man schreibt  $f' = f^{(1)}$ ,  $f'' = f^{(2)}$  und so weiter.

Eine Funktion heißt  $k$ -fach differenzierbar, falls  $f^{(k)}$  existiert, und  $k$ -fach stetig differenzierbar, falls  $f^{(k)}$  existiert und stetig ist. Der Raum der  $k$ -fach stetig differenzierbaren Funktionen auf  $A$  wird mit  $C^k(A; \mathbb{k})$  bezeichnet, oder kurz mit  $C^k(A)$ , falls  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ .

Wenn  $f^{(k)}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  existiert, heißt  $f$  unendlich oft differenzierbar, und wir bezeichnen den Raum all dieser Funktionen mit  $C^\infty(A)$ .

Da die Schreibweise mit Strichen für höhere  $k$  immer unübersichtlicher wird, wird man selten mehr als  $f''''$  in der Literatur finden. Man beachte, dass die ersten  $k - 1$  Ableitungen einer  $k$ -fach differenzierbaren Funktion automatisch stetig sind. Aus diesem Grund sagen wir auch nur „unendlich oft differenzierbar“ und nicht „unendlich oft stetig differenzierbar“, denn beide Begriffe sind gleichbedeutend. Es gilt

$$C^\infty(A) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(A).$$

4.27. BEMERKUNG. Manchmal muss man die Regel von l'Hospital mehrfach hintereinander anwenden. Seien  $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  zwei  $k$ -fach differenzierbare Funktionen. Wenn beispielsweise für alle  $i = 0, \dots, k - 1$  gilt, dass

$$\lim_{x \searrow x_0} f^{(i)}(x) = 0 = \lim_{x \searrow x_0} g^{(i)}(x)$$

und  $g^{(i+1)}(x) \neq 0$  für alle  $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ , dann ergibt sich durch  $k$ -faches Anwenden der Regel von l'Hospital, dass

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)},$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert. Ein ähnlicher Fall kam in den Übungen bereits vor.

4.28. BEMERKUNG. Es sei  $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit einer Nullstelle bei  $x_0 \in (a, b)$ , und  $g$  sei bei  $x_0$  differenzierbar.

- (1) Wenn  $g'(x_0) > 0$ , dann hat  $g$  bei  $x_0$  einen *Vorzeichenwechsel* von negativ nach positiv, das heißt, es existiert  $\varepsilon > 0$  so dass

$$f|_{(x_0-\varepsilon, x_0)} < 0 \quad \text{und} \quad f|_{(x_0, x_0+\varepsilon)} > 0.$$

- (2) Wenn  $g'(x_0) < 0$ , dann hat  $g$  bei  $x_0$  einen *Vorzeichenwechsel* von positiv nach negativ.  
 (3) Wenn  $g'(x_0) = 0$  gilt, ist keine derartige Aussage möglich. Als Beispiel betrachte die Funktionen  $x \mapsto \pm x^2$  und  $x \mapsto \pm x^3$  bei  $x_0 = 0$ .

Wir wenden diese Überlegung auf die erste Ableitung einer Funktion  $f$  an einem kritischen Punkt  $x_0$  an; nach Bemerkung 4.15 (3) ist das ein Punkt mit  $f'(x_0) = 0$ . Dabei benutzen wir Folgerung 4.20.

4.29. PROPOSITION. Es sei  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  zweifach differenzierbar und  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f'(x_0) = 0$ .

- (1) Wenn  $f''(x_0) > 0$ , hat  $f$  bei  $x_0$  ein lokales Minimum.
- (2) Wenn  $f''(x_0) < 0$ , hat  $f$  bei  $x_0$  ein lokales Maximum.

Im Fall  $f''(x_0) = 0$  ist wieder keine derartige Aussage möglich. Später lernen wir, wie wir mit Hilfe höherer Ableitungen eventuell doch noch zeigen können, dass eine Extremstelle vorliegt.

4.30. DEFINITION. Es sei  $I$  ein Intervall. Eine Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *konvex* (*konkav*), falls für alle  $x, y, z \in I$  mit  $x < z < y$  gilt, dass

$$f(z) \leq \frac{y-z}{y-x} f(x) + \frac{z-x}{y-x} f(y) \quad \text{beziehungsweise} \quad f(z) \geq \frac{y-z}{y-x} f(x) + \frac{z-x}{y-x} f(y).$$

Sie heißt *strikt konvex* (*konkav*), wenn die obige Ungleichung für alle  $x < z < y$  strikt ist.

Ein einfaches Beispiel ist die quadratische Funktion  $f(x) = ax^2 + bx + c$  falls  $a \geq 0$ . Sie ist strikt konvex, falls  $a > 0$ .

4.31. BEMERKUNG. Wir setzen  $t = \frac{y-z}{y-x} \in (0, 1)$ , dann gilt  $1-t = \frac{z-x}{y-x}$  und  $z = tx + (1-t)y$ , und

$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y) \quad \text{für alle } x, y \in I \text{ und alle } t \in (0, 1)$$

ist eine äquivalente Umformulierung der Konvexitätsbedingung. Die Abbildung

$$t \longmapsto t(x, f(x)) + (1-t)(y, f(y))$$

beschreibt gerade die Sekante durch die Punkte  $(x, f(x))$  und  $(y, f(y))$ . Also ist eine Funktion genau dann konvex, wenn ihr Graph zwischen je zwei Punkten stets unterhalb oder auf der Sekante durch diese Punkte bleibt. Mit anderen Worten bilden die Punkte oberhalb des Graphen eine konvexe Teilmenge der Ebene  $\mathbb{R}^2$ . Im Falle einer konkaven Funktionen bilden die Punkte unterhalb des Graphen eine konvexe Menge. Den Punkt  $t(x, f(x)) + (1-t)(y, f(y))$  nennt man eine *Konvexkombination* von  $(x, f(x))$  und  $(y, f(y))$  für alle  $t \in (0, 1)$ .

Konvexe Funktionen sind unter anderem deswegen interessant, weil sich ihre Extremstellen einfach beschreiben lassen.

4.32. PROPOSITION. Es sei  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  konvex. Dann gilt:

- (1) Jedes lokale Minimum von  $f$  ist global. Wenn  $f$  strikt konvex ist, gibt es höchstens eine Minimalstelle.
- (2) Wenn  $f$  ein lokales Maximum bei  $z \in (a, b)$  hat, dann ist  $f$  auf einer Umgebung von  $z$  konstant. Wenn  $f$  strikt konvex ist, hat  $f$  kein lokales Maximum.

Der folgende Satz ist analog zur Folgerung 4.19 über den Zusammenhang zwischen Monotonie und dem Vorzeichen der ersten Ableitung. Da Konvexität ein wichtiger Begriff ist und nicht alle konvexen Funktionen differenzierbar sind, geben wir verschiedene Kriterien. Sie werden umso einfacher, je mehr Ableitungen existieren.

4.33. SATZ (Charakterisierung konvexer Funktionen). Es sei  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann sind äquivalent:

- (1) die Funktion  $f$  ist konvex,
- (2) für alle  $x \in (a, b)$  steigt die folgende Funktion monoton:

$$g_x: (a, b) \setminus \{x\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad g_x(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Wenn  $f$  differenzierbar ist, sind ebenfalls äquivalent:

(3) Für alle  $x, y \in (a, b)$  gilt

$$f(y) \geq f(x) + (y - x) f'(x) .$$

(4) Die Funktion  $f': (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  steigt monoton.

Wenn  $f$  zweifach differenzierbar ist, ist außerdem äquivalent

(5)  $f'' \geq 0$ .

Aus  $f'' > 0$  in (5) folgt, dass  $f'$  in (4) streng monoton steigt. Und wenn  $f'$  streng monoton steigt, dann ist  $f$  strikt konvex.

4.34. BEMERKUNG. Konvexe Funktionen müssen nicht differenzierbar sein, als Beispiel betrachte den Absolutbetrag  $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Aus (2) folgt aber, dass die *einseitigen Ableitungen*

$$f'^-(x) = \lim_{y \nearrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \nearrow x} g_x(y)$$

und

$$f'^+(x) = \lim_{y \searrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \searrow x} g_x(y)$$

an jeder Stelle  $x \in (a, b)$  existieren. Das reicht, um wie in Folgerung 4.5 zu schließen, dass  $f$  an jeder Stelle  $x_0 \in (a, b)$  stetig ist. Genauer gesagt gilt

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) ,$$

und somit ist  $f$  nach Bemerkung 3.21 und Proposition 3.17 (2) stetig bei  $x_0$ . Außerdem gilt

$$f'^-(x_0) \leq f'^+(x_0) \quad \text{und} \quad f'^+(x_0) \leq f'^-(x_1) \quad \text{falls } x_0 < x_1 .$$

Als Anwendung von Konvexität beweisen wir die folgende Ungleichung.

4.35. SATZ (Youngsche Ungleichung). *Es seien  $p, q > 1$  gegeben, so dass  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt für alle  $x, y \geq 0$ , dass*

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q .$$

4.36. FOLGERUNG (Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel). *Für alle  $x, y \geq 0$  gilt*

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2} .$$

Beide Ungleichungen lassen sich induktiv auf mehr als zwei Zahlen ausdehnen (Übung).

*i*



## Integralrechnung

19.1.22

Das Integral einer Funktion beschreibt auf der einen Seite den Flächeninhalt unter dem Funktionsgraphen. Auf der anderen Seite ist Integration nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in gewisser Weise die „Umkehroperation“ der Ableitung. Beide Aspekte werden wir kennenlernen. Wir können dann auch einige Sätze über differenzierbare Funktionen und ihre Ableitungen nachtragen, die wir schon im letzten Kapitel hätten beweisen können.

### 5.a. Das Riemann-Integral

Wir wollen den Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Funktionsgraph, der  $x$ -Achse, und zwei vertikalen Geraden durch die Punkte  $x = a$  und  $x = b$  bestimmen, sofern das möglich ist. Dabei zählen wir Flächenstücke oberhalb der  $x$ -Achse positiv und unterhalb der  $x$ -Achse negativ, jedenfalls, wenn  $a < b$ . Wir nehmen als, dass für ein Rechteck der Flächeninhalt gerade das Produkt der Seitenlängen ist. Und wir nehmen an, dass eine Vereinigung von Rechtecken, die sich höchstens entlang von Strecken überlappen, als Flächeninhalt die Summe der Flächeninhalte der einzelnen Rechtecke hat. Mit diesen Grundannahmen führen uns die folgenden Vorüberlegungen zur Definition des Riemann-Darboux-Integrals.

- (1) Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $a = x_0 < \dots < x_n = b$ . Falls eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben ist, so dass  $f|_{(x_{i-1}, x_i)}$  konstant mit Wert  $y_i$  ist, sollte der gesuchte Flächeninhalt den Wert

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) y_i$$

haben. Das bedeutet insbesondere, dass es auf die Werte von  $f$  an den endlich vielen Stellen  $x_i$  nicht ankommt. Solche Funktionen nennen wir *Treppenfunktionen*.

- (2) Gegeben zwei Funktionen  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \leq g$ , denen wir einen Flächeninhalt zuordnen können. Dann sollte der Flächeninhalt zu  $f$  nicht größer sein als der zu  $g$ .

Die folgende Definition stimmt nicht ganz mit der von Bernhard Riemann (1854) überein, sondern benutzt die Gaston Darboux zugeschriebene Methode der Unter- und Obersummen.

5.1. DEFINITION. Es sei  $a \leq b$  und  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Dann definieren wir das *untere* und das *obere Riemann-Darboux-Integral* von  $f$  über  $[a, b]$  durch

$$\int_a^b f(x) dx = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{(x_{i-1}, x_i)} f \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } a = x_0 < \dots < x_n = b \right\},$$

und

$$\overline{\int}_a^b f(x) dx = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{(x_{i-1}, x_i)} f \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } a = x_0 < \dots < x_n = b \right\}.$$

Wir nennen  $f$  (*Riemann-*) *integrierbar* über  $[a, b]$  mit (*Riemann-*) *Integral*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \overline{\int}_a^b f(x) dx,$$

wenn unteres und oberes Riemann-Darboux-Integral übereinstimmen.

Man nennt  $a = x_0 < \dots < x_n = b$  eine *Zerlegung* des Intervalls  $[a, b]$ , und die Summen in den Mengendefinitionen auf der rechten Seite die zugehörigen *Unter-* und *Obersummen*. Dabei schreiben wir kurz  $\inf_A f$  für  $\inf_{x \in A} f(x)$ , und analog  $\sup_A f$ . Nach Vorüberlegung ist keine Untersumme größer und keine Obersumme kleiner als der gesuchte Flächeninhalt. Vor allem aber ist keine Untersumme größer als eine Obersumme. Wenn eine Funktion integrierbar ist, heißt das also, dass man den gesuchten Flächeninhalt sowohl von unten als auch von oben durch die Inhalte bekannter geometrischer „Figuren“ (nämlich Vereinigungen von achsenparallelen Rechtecken) beliebig gut approximieren kann.

Wir setzen  $f$  als beschränkt voraus. Wäre  $f$  etwa nach oben unbeschränkt, so wäre jede Obersumme  $\infty$ , die Untersummen jedoch nicht. Also hätte eine unbeschränkte Funktion nach der obigen Definition keine Chance, integrierbar zu sein. Wir werden später „uneigentliche Integrale“ einführen, um dieses Problem zu lösen.

Die Notation für Integrale ist etwas umständlich. Unten und oben am Integralzeichen stehen die *untere* und die *obere Integralgrenze*. Es folgt ein Ausdruck, der *Integrand*, der unter anderem die *Integrationsvariable* enthalten kann. Welche das ist, wird hinter dem „ $d$ “ angegeben — hier also „ $x$ “. Zusammen nennt man  $dx$  auch das *Längenelement*. Physiker behandeln das Paar aus Integralzeichen und Längenelement gern wie ein Paar Klammern, so dass dazwischen beispielsweise auch Plus- oder Minuszeichen stehen dürften. In der Mathematik bindet das Integralzeichen so stark wie Multiplikation. Wenn wir also im Integranden eine Summe oder Differenz stehen haben, müssen wir ein zusätzliches Paar Klammern setzen.

5.2. BEISPIEL. Später werden wir fast alle Integrale, die wir überhaupt explizit angeben können, mit Hilfe des Hauptsatzes ausrechnen. Daher hier ein einfaches und zwei etwas unangenehme Beispiele.

- (1) Es sei  $f(x) = rx + s$  mit  $r, s \in \mathbb{R}$ . Der Einfachheit halber gelte  $r \geq 0$ . Es sei  $a < b$  mit  $d = b - a > 0$ . Der Einfachheit halber betrachten wir nur Zerlegungen mit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  ( $n \neq 0$  gilt automatisch, wenn  $b > a$ ) und  $x_i = a + \frac{di}{n}$ . Die zugehörigen Unter- und Obersummen berechnen wir als arithmetische Summen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{(x_{i-1}, x_i)} f &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{n} \left( r \left( a + \frac{d(i-1)}{n} \right) + s \right) \\ &= \frac{d}{n} \cdot \frac{n}{2} \left( r \left( a + b - \frac{d}{n} \right) + 2s \right) = \frac{b^2 - a^2 - d^2/n}{2} r + (b-a)s, \\ \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{(x_{i-1}, x_i)} f &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{n} \left( r \left( a + \frac{di}{n} \right) + s \right) \\ &= \frac{d}{n} \cdot \frac{n}{2} \left( r \left( a + \frac{d}{n} + b \right) + 2s \right) = \frac{b^2 - a^2 + d^2/n}{2} r + (b-a)s. \end{aligned}$$

Im Limes  $n \rightarrow \infty$  streben Unter- und Obersumme den gleichen Grenzwert

$$\frac{b^2 - a^2}{2} r + (b-a)s.$$

Nach Definition folgt mit unser Wahl der Zerlegungen bereits

$$\begin{aligned} \frac{b^2 - a^2}{2} r + (b - a)s &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{(x_{i-1}, x_i)} f \leq \int_a^b f(x) dx \\ &\leq \int_a^b f(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{(x_{i-1}, x_i)} f = \frac{b^2 - a^2}{2} r + (b - a)s . \end{aligned}$$

Somit gilt in der obigen Abschätzung überall Gleichheit. Also haben wir gezeigt, dass  $f$  Riemann-integrierbar ist, und den Wert des Integrals erfolgreich ausgerechnet.

- (2) Die Funktion  $f$  aus Beispiel 3.2 (6) ist nicht Riemann-integrierbar über  $[a, b]$  falls  $a < b$ , denn auf jedem Intervall positiver Länge hat sie Infimum 0 und Supremum 1. Wir erhalten daher

$$\int_a^b f(x) dx = 0 < b - a = \int_a^b f(x) dx .$$

In Analysis 3 betrachten wir stattdessen das Lebesgue-Integral. Dann werden wir argumentieren, dass das Lebesgue-Integral definiert ist und verschwindet, da die Funktion nur an „wenigen“ — nämlich abzählbar vielen — Stellen nicht den Wert 0 hat.

- (3) Die Funktion  $g$  aus Beispiel 3.2 (6) ist Riemann-integrierbar (Übung).

Wir tragen zunächst einmal einige wichtige Eigenschaften des Riemann-Integrals zusammen. Dazu gehören insbesondere das Integral von Treppenfunktionen (1) und die Monotonie (2) aus unseren Vorüberlegungen.

5.3. PROPOSITION (Linearität). *Die Riemann-integrierbaren Funktionen auf  $[a, b]$  bilden einen Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen, und das Integral ist linear. Das heißt: wenn  $f$  und  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar sind und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , dann ist  $\lambda f + \mu g$  ebenfalls integrierbar mit*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx .$$

5.4. PROPOSITION (Additivität). *Es seien  $a < b < c$ , und es sei  $f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Dann ist  $f$  genau dann über  $[a, c]$  integrierbar, wenn  $f$  über  $[a, b]$  und über  $[b, c]$  integrierbar ist, und es gilt*

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx .$$

Wir kommen zu den zwei Eigenschaften aus der Vorüberlegung.

5.5. PROPOSITION (Treppenfunktionen). *Es sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a = x_0 < \dots < x_n = b$  und  $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ . Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben mit  $f|_{(x_{i-1}, x_i)} = y_i$  für  $i = 1, \dots, n$ . Dann ist  $f$  integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) y_i .$$

5.6. PROPOSITION (Monotonie). *Es seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbare Funktionen mit  $f \leq g$  auf ganz  $[a, b]$ . Dann gilt*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx .$$

Den Gleichheitsfall für stetige Integranden betrachten wir in Proposition 5.16 (1).

Für eine Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir den Absolutbetrag  $|f| = |\cdot| \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , das heißt

$$|f|(x) = |f(x)| \quad \text{für alle } x \in A .$$

5.7. PROPOSITION. *Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Dann ist auch  $|f|: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, und es gilt*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx .$$

Wir schauen uns den Gleichheitsfall für stetige Integranden in dieser und der folgenden Abschätzung in Propositionen 5.16 (2)–(4) an.

Wir erinnern uns an die Supremumsnorm aus Bemerkung 3.38. Mit Monotonie ergibt sich eine Abschätzung für Integrale, die wir recht häufig benutzen werden.

5.8. FOLGERUNG (Fundamentale Abschätzung). *Für alle integrierbaren Funktionen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b - a) \|f\|_{\text{sup}} .$$

Als nächstes benötigen wir den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz aus Definition 3.34 (2); das ist der Konvergenzbegriff, der auf natürliche Weise zur Supremumsnorm gehört, siehe wieder Bemerkung 3.38. Das folgende Beispiel zeigt, dass punktweise Konvergenz nicht ausreicht, damit auch die Integrale von Funktionen konvergieren.

5.9. BEISPIEL. Für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  definiere  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{falls } 0 < x < \frac{1}{n}, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } x = 0 \text{ oder } x \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Dann konvergiert  $f_n$  punktweise gegen die konstante Funktion  $g \equiv 0$ . Nach Proposition 5.5 gilt

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1, \quad \text{aber} \quad \int_0^1 f(x) dx = 0 .$$

5.10. PROPOSITION (Stetigkeit). *Es sei  $(f_n)_n$  eine Folge integrierbarer Funktionen  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Wenn  $f_n$  gleichmäßig gegen eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert, dann ist auch  $f$  integrierbar mit*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx .$$

Das heißt, das Integral vertauscht mit Grenzwerten von (gleichmäßig konvergenten) Funktionenfolgen. „Stetigkeit des Integrals“ können wir also im Sinne von Proposition 3.6 verstehen.

## 5.b. Das Integral stetiger Funktionen

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass stetige Funktionen auf kompakten Intervallen Riemann-integrierbar sind. Zum Schluss beweisen wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

5.11. DEFINITION. Es sei  $A \subset \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  heißt *gleichmäßig stetig*, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle  $x, y \in A$  gilt

$$\|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon .$$

Der Unterschied zu Definition 3.1 besteht darin, dass  $\delta$  hier nur von  $\varepsilon$ , aber nicht von  $x$  (damals:  $x_0$ ) abhängen darf. Wir erinnern uns an Kompaktheit und daran, dass abgeschlossene Intervalle  $[a, b]$  kompakt sind, siehe Bemerkung 2.34.

5.12. SATZ. *Es sei  $f: A \rightarrow \mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  stetig und  $A \subset \mathbb{R}$  kompakt. Dann ist  $f$  gleichmäßig stetig.*

5.13. BEISPIEL. Kompaktheit ist unerlässlich. Dazu betrachte die Funktion  $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \cos \frac{1}{x} .$$

5.14. SATZ. *Gleichmäßig stetige Funktionen auf einem beschränkten Intervall lassen sich gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximieren.*

5.15. FOLGERUNG. *Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  stetig. Dann ist  $f$  integrierbar.*

Wir betrachten Gleichheit in den Abschätzungen 5.6–5.8; Stetigkeit ist dabei unerlässlich.

5.16. PROPOSITION. *Es sei  $a < b$ , und  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  seien stetig mit  $f \leq g$ .*

$$\begin{aligned} (1) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx & \iff f = g , \\ (2) \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx & \iff f \geq 0 \text{ oder } f \leq 0 , \\ (3) \quad \int_a^b |f(x)| dx = (b-a) \|f\|_{\text{sup}} & \iff f \equiv c \in \mathbb{R} \text{ konstant.} \\ (4) \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| = (b-a) \|f\|_{\text{sup}} & \iff f \equiv c \in \mathbb{R} \text{ konstant.} \end{aligned}$$

Der folgende Satz ist eine unmittelbare Konsequenz aus dem Zwischenwertsatz 3.23 und der Monotonie des Integrals. 26.1.22

5.17. SATZ (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Es seien  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann existiert eine Zwischenstelle  $x_1 \in (a, b)$ , so dass*

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx = f(x_1) (b-a) .$$

*Sei außerdem  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $g \geq 0$ . Dann existiert eine Zwischenstelle  $x_2 \in (a, b)$ , so dass*

$$(2) \quad \int_a^b (fg)(x) dx = f(x_2) \int_a^b g(x) dx .$$

5.18. BEMERKUNG. Wir machen uns ein paar Gedanken zu diesem Satz.

(1) Stetigkeit von  $f$  ist unerlässlich, wie das Beispiel  $f = \text{sign}$  zu (1) zeigt:

$$\int_{-1}^2 \text{sign}(x) dx = 1 \neq \text{sign}(x_1) \cdot 3 ,$$

denn  $\text{sign}$  nimmt an keiner Stelle den Wert  $\frac{1}{3}$  an.

(2) Wir können die Funktion  $g$  in der allgemeinen Fassung (2) als eine Art „Gewichtsfunktion“ auffassen. Das heißt, dass die Werte von  $f$  in Abhängigkeit von  $x$  mit dem Gewicht  $g(x)$  in das Integral eingehen.

(3) Wir brauchen  $g \geq 0$ , denn es existiert kein  $x_2 \in [-1, 1]$  mit

$$0 < \int_{-1}^1 x \cdot x dx = x_2 \int_{-1}^1 x dx = x_2 \cdot 0 .$$

(4) Es würde reichen,  $g$  als integrierbar anzunehmen. Dann ist  $fg$  ebenfalls integrierbar und der Satz gilt nach wie vor.

### 5.c. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wir zeigen, dass Ableiten und Integrieren zueinander nahezu inverse Operationen sind. Das erlaubt uns auch, aus den bekannten Ableitungsregeln Integrationstechniken herzuleiten.

Bislang haben wir nur Integrale  $\int_a^b$  mit  $a < b$  betrachtet. Die Additivität 5.4 des Integrals legt eine Konvention nahe, mit der wir Integrale für beliebige  $a, b \in \mathbb{R}$  betrachten können, nämlich

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \quad \text{falls } a = b, \text{ und}$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{falls } a > b.$$

5.19. SATZ (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $x_0 \in I$ . Dann ist die Funktion  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit*

$$(1) \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt ,$$

*auf ganz  $I$  differenzierbar mit Ableitung*

$$(2) \quad F' = f .$$

In Bemerkung 5.32 verallgemeinern wir den Hauptsatz auf eine etwas größere Klasse von Funktionen  $f$ , die unbeschränkt und an einzelnen Punkten unstetig sein dürfen.

5.20. BEMERKUNG. Man nennt  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  wie in (2) eine *Stammfunktion* von  $f$ . Nach Folgerung 4.17 ist  $F$  bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Dabei kann es für  $F$  eine Darstellung in der Form (1) geben, muss es aber nicht (beachte: aus (1) folgt  $F(x_0) = 0$ , also hat  $F$  dann eine Nullstelle in  $I$ ).

Die Menge aller Stammfunktionen von  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  bildet das *unbestimmte Integral*

$$\int f(x) dx .$$

Es heißt „unbestimmt“, da wir keine Integrationsgrenzen angeben. Wir schreiben gern

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} ,$$

aber das ist eigentlich falsch, denn wir benutzen  $x$  links als Integrationsvariable, während es rechts ja eigentlich für die obere Grenze steht. Außerdem schreiben wir „=“ anstelle von „ $\ni$ “. Da das unbestimmte Integral eben nur bis auf eine additive Konstante eindeutig ist, dürfen wir aus  $\int f(x) dx = F_1$  und  $\int f(x) dx = F_2$  also keinesfalls  $F_1 = F_2$  schließen!

5.21. FOLGERUNG. *Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $[a, b] \subset I$  und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit Stammfunktion  $F$ . Dann gilt*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

Für die rechte Seite führen wir die Notation  $F(x)|_{x=a}^b$  ein.

5.22. BEISPIEL. Mit den Überlegungen aus Kapitel 4 erhalten wir Stammfunktionen für einige bekannte Funktionen.

- (1) Es sei  $s \neq -1$ , dann ist  $\frac{1}{s+1} x^{s+1}$  eine Stammfunktion von  $x^s$  auf dem Intervall  $(0, \infty)$ , siehe Beispiel 4.10 (3). Falls  $s \in \mathbb{N}$  natürlich ist, erhalten wir die obige Stammfunktion sogar auf ganz  $\mathbb{R}$ , siehe Beispiel 4.7. Für  $s \in \mathbb{Z}$  gilt die obige Formel analog auch auf  $(-\infty, 0)$ .

- (2) Eine Stammfunktion von  $\frac{1}{x}$  auf  $(0, \infty)$  ist der Logarithmus  $\log$  nach Beispiel 4.10 (2). Für negative  $x$  erhalten wir ebenfalls eine Stammfunktion, nämlich  $x \mapsto \log(-x)$ . Daher liest man manchmal,  $\log|\cdot|$  sei die Stammfunktion von  $\frac{1}{x}$ . Das ist aber etwas ungenau, da  $\log|\cdot|$  nicht auf einem Intervall definiert ist und somit Überlegungen wie in Folgerung 4.17 nicht greifen.
- (3) Weitere Stammfunktionen ergeben sich aus den Beispielen 4.2 und 4.10 und aus den Übungen. Wir benutzen die etwas ungenaue Notation aus Bemerkung 5.20 und schreiben kurz

$$\int e^x dx = e^x, \quad \int \cos x dx = \sin x, \quad \int \sin x dx = -\cos x,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \quad \text{auf } (-1, 1), \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x.$$

Wir erinnern uns an rationale Funktionen aus Bemerkung 3.9. Die folgende Proposition ist eine Folgerung aus dem Fundamentalsatz der Algebra und einigen Resultaten aus der Algebra wie beispielsweise dem Euklidischen Algorithmus und der Charakterisierung des größten gemeinsamen Teilers. Wir geben daher keinen vollständigen Beweis.

5.23. PROPOSITION (Partialbruchzerlegung). *Es sei  $f = \frac{P}{Q}$  eine rationale Funktion, und es sei*

$$Q(X) = \prod_{i=1}^k (X - x_i)^{n_i} \cdot \prod_{i=1}^{\ell} (X + p_i X + q_i)^{m_i}$$

eine Zerlegung von  $Q$  in Primfaktoren, insbesondere gelte  $p_i^2 < 4q_i$  für  $i = 1, \dots, \ell$ . Dann existieren ein Polynom  $R$  und Zahlen  $a_{i,j}$  für  $i = 1, \dots, k$  und  $j = 1, \dots, n_i$  sowie  $b_{i,j}, c_{i,j}$  für  $i = 1, \dots, \ell$  und  $j = 1, \dots, m_i$ , so dass

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = R(X) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{i,j}}{(X - x_i)^j} + \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{b_{i,j}X + c_{i,j}}{(X + p_i X + q_i)^j}.$$

Die einzelnen Summanden (bis auf  $R$ ) in der obigen Formel heißen *Partialbrüche*, und die rechte Seite heißt die *Partialbruchzerlegung* von  $f$ . Sie ist (bis auf die Reihenfolge der Summanden) eindeutig.

5.24. BEISPIEL. Die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right)$$

haben wir in Beispiel 4.18 kennengelernt. Ganz analog dazu gilt

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} \right).$$

Auf der anderen Seite sind  $\frac{1}{x^2+1}$  und  $\frac{x}{x^2+1}$  bereits vollständig zerlegt, da für den Nenner  $p = 0$  und  $q = 1$  und somit  $p^2 < 4q$  gilt.

5.25. BEMERKUNG. Wir können zu jedem obigen Summanden eine Stammfunktion angeben. Dazu schränken wir  $\frac{P}{Q}$  zunächst auf ein Intervall ein, das keinen der Punkte  $x_1, \dots, x_k$  enthält. Für  $n \geq 2$  gilt

$$\int \frac{dx}{x - c} = \log|x - c| \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{(x - c)^n} = -\frac{1}{(n - 1)(x - c)^{n-1}}.$$

Für die Summanden der Form  $\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^n}$  mit  $p^2 < 4q$  können wir rekursiv Stammfunktionen als Linearkombinationen aus Funktionen der Form

$$\log(x^2 + px + q), \quad \arctan(rx + s) \quad \text{und} \quad \frac{tx + u}{(x^2 + px + q)^{n-1}}$$

finden (Übung). Aus Proposition 5.23 folgt also, dass man Integrale über rationale Funktionen explizit ausrechnen kann.

1.2.22

Aus der Kettenregel 4.8 ergibt sich mit dem Hauptsatz die Substitutionsregel. Wir formulieren sie hier für bestimmte Integrale. Die Fassung für unbestimmte Integrale betrachten wir anschließend in einem Beispiel.

5.26. PROPOSITION (Substitutionsregel). *Es sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion und  $f: \text{im } g \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt*

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt .$$

Es reicht, wenn  $f$  integrierbar ist. Wir verlangen der Einfachheit hier zusätzlich, dass  $f$  stetig ist. Manchmal braucht man ein geübtes Auge, um zu sehen, dass man die Substitutionsregel anwenden kann.

5.27. BEISPIEL. Ein interessanter Spezialfall ist die sogenannte *logarithmische Ableitung*

$$\frac{d}{dx}(\log g) = \frac{g'}{g} .$$

Die Substitutionsregel (mit  $f(x) = \frac{1}{x}$ ) impliziert

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log g(x) .$$

Als konkretes Beispiel berechnen wir

$$\int \tan x dx = - \int \frac{\cos' x}{\cos x} dx = - \log \cos x .$$

Die Version für bestimmte Integrale erhalten wir, indem wir bei jedem Integralzeichen die Unter- und Obergrenze dazuschreiben, und für jede Stammfunktion den Wert an der unteren von dem Wert an der oberen Grenze abziehen, beispielsweise mit der Notation  $\Big|_{x=a}^b$ .

Genauso kombinieren wir die Produktregel 4.6 (2) mit dem Hauptsatz.

5.28. PROPOSITION (Partielle Integration). *Es sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit Stammfunktion  $F$ , und  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_a^b (fg)(x) dx = (Fg)(x) \Big|_{x=a}^b - \int_a^b (Fg')(x) dx$$

Der Name „partielle Integration“ kommt daher, dass man nur einen Teil des Produkts integriert, und dafür einen Korrekturterm bekommt, bei dem der andere Faktor (hier  $g$ ) abgeleitet wird.

5.29. BEISPIEL. Im nächsten Beispiel setzen wir  $f = 1$  und  $F(x) = x$ . Dann erhalten wir

$$\int \log x dx = x \log x - \int x \frac{dx}{x} = x(\log x - 1) .$$

Für Umkehrfunktionen im Allgemeinen gibt es auch eine Integrationsregel, die man aus der Substitutionsregel herleiten kann (Übung). Die folgende Definition hätten wir schon früher machen können. Aber mit Hilfe des Hauptsatzes ist es leichter, Beispiele zu finden.

5.30. DEFINITION. Es sei  $[a, b) \subset \mathbb{R}$  ein halboffenes Intervall mit  $a < b \leq \infty$  und  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Wir nennen  $f$  *einfach uneigentlich integrierbar*, wenn  $f|_{[a, c]}$  für alle  $a < c < b$  integrierbar ist und das *uneigentliche Integral*

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x) dx \in \mathbb{R}$$

existiert. Analog definieren wir das einfache uneigentliche Integral über Intervalle der Form  $(a, b]$  mit  $-\infty \leq a < b$ . Eine Funktion  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  heißt einfach uneigentlich integrierbar, wenn es ein  $c \in (a, b)$  gibt, so dass das folgende uneigentliche Integral in  $\mathbb{R}$  existiert:

$$(2) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$$

Seien schließlich  $a = x_0 < \dots < x_n = b$ , so dass  $f$  auf jedem Intervall  $(x_{i-1}, x_i)$  einfach uneigentlich integrierbar ist. Dann heißt  $f$  *uneigentlich integrierbar* mit *uneigentlichem Integral*

$$(3) \quad \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx .$$

5.31. BEISPIEL. Wir haben alle bekannten Integrationstechniken zur Verfügung, bevor wir zum Grenzwert übergehen. Deshalb finden wir jetzt recht leicht Beispiele und Gegenbeispiele.

- (1) Sei  $s \in \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^{-s}$  ist genau dann uneigentlich integrierbar, wenn  $s > 1$ . In diesem Fall gilt

$$\int_1^\infty x^{-s} dx = \frac{1}{s-1} .$$

- (2) Auf  $(0, 1]$  ist die obige Funktion genau dann uneigentlich integrierbar, wenn  $s < 1$ . In diesem Fall gilt

$$\int_0^1 x^{-s} dx = \frac{1}{1-s} .$$

- (3) Es sei  $a < 0 < b$ . Betrachte  $f(x) = \frac{1}{x}$  auf  $[a, b] \setminus \{0\}$ . Nach (2) ist  $f$  nicht integrierbar, nicht einmal uneigentlich. Man betrachtet manchmal den *Cauchy-Hauptwert*

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left( \int_a^{x_0-\varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x) dx \right) ,$$

hier bei  $x_0 = 0$  mit Wert  $\log b - \log(-a)$ . Allerdings wollen wir das Integral nicht als seinen Cauchy-Hauptwert definieren, da dann manche Sätze über Integrale falsch würden.

5.32. BEMERKUNG. Es folgen einige Bemerkungen zu Definition 5.30.

- (1) Wegen Additivität 5.4 ist (2) unabhängig von der Wahl von  $c$ . Aus dem gleichen Grund können wir in (3) zusätzliche „Ausnahmepunkte“  $x_i$  hinzunehmen, ohne den Wert des Integrals zu verändern. Wir haben daher  $x_0 = a$  und  $x_n = b$  gesetzt, obwohl das vielleicht nicht nötig gewesen wäre.
- (2) Wir können den Hauptsatz 5.19 auch für uneigentlich integrierbare Funktionen formulieren, allerdings gilt die Aussage  $F'(x) = f(x)$  nur noch für  $x \in [a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ . Wir wollen  $F$  auch in dieser Situation eine Stammfunktion nennen.
- (3) Die Stammfunktion  $F$  aus (2) ist stetig, da alle links- und rechtsseitigen Grenzwerte existieren und dort, wo beide definiert sind, übereinstimmen. Aus diesem Grund bleibt Folgerung 5.21 auch für uneigentliche Integrale gültig.

- (4) Substitutionsregel und partielle Integration basieren auf dem Hauptsatz und lassen sich daher auf uneigentliche Integrale verallgemeinern. Wir wollen hier aber keine allgemeinen Formulierungen angeben. In den Beweisen der Propositionen 5.26 und 5.28 haben wir je ein Paar aus einem Integranden und einer Stammfunktion betrachtet (nämlich  $(f \circ g) \cdot g'$  und  $F \circ g$  beziehungsweise  $f'g + fg'$  und  $fg$ ). Im Einzelfall muss man überprüfen, ob diese Funktionenpaare den Hauptsatz im Sinne von (2) erfüllen.
- (5) Für die Cauchy-Hauptwerte aus Beispiel 5.31 (3) gilt die Substitutionsregel im obigen Sinne nicht.

## 5.d. Integral und Ableitung von Potenzreihen

2.2.22

Wir haben in Abschnitt 3.c gesehen, dass Folgen stetiger Funktionen nicht unbedingt gegen stetige Funktionen konvergieren. Hier wollen wir untersuchen, wann eine Folge differenzierbarer Funktionen gegen eine differenzierbare Funktion konvergiert, und zwar so, dass auch die Folge der Ableitungen gegen die Ableitung der Grenzfunktion konvergiert. Damit erhalten wir beispielsweise die Möglichkeit, auch beliebige Potenzreihen abzuleiten.

5.33. SATZ. *Es sei  $I$  ein Intervall,  $x_0 \in I$ , und  $(f_n)_n$  eine Folge in  $C^1(I)$ , so dass die Folge  $(f'_n)_n$  gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $(f_n(x_0))_n$  gegen  $y_0 \in \mathbb{R}$  konvergiert. Dann konvergiert  $(f_n)_n$  punktweise gegen eine Grenzfunktion  $f \in C^1(I)$  mit  $f' = g$ .*

5.34. BEMERKUNG. In den Übungen sehen wir, dass wir die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen wirklich benötigen.

Wenn das Intervall  $I$  beschränkt ist, konvergiert  $(f_n)_n$  sogar gleichmäßig; das ergibt sich aus dem Beweis. Falls  $I$  unbeschränkt ist, gilt das immer noch für jedes kompakte Teilintervall. Wir sagen dann, dass  $(f_n)_n$  lokal gleichmäßig konvergiert.

Mehr als lokal gleichmäßige Konvergenz können wir nicht erwarten, wie das Beispiel  $f_n(x) = \frac{x}{n}$  mit  $f'_n \equiv \frac{1}{n}$  zeigt.

Wir erinnern uns jetzt an Potenzreihen aus Abschnitt 2.f, insbesondere an den Konvergenzradius aus Satz 2.71. Aus Lemma 2.70 folgt, dass Potenzreihen auf jedem Kreis mit kleinerem Radius sogar gleichmäßig konvergieren. Im Beweis von Folgerung 3.37 haben wir damit bewiesen, dass Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzkreises stetige Funktionen darstellen.

5.35. FOLGERUNG. *Jede Potenzreihen ist im Inneren ihres Konvergenzkreises integrierbar und unendlich oft differenzierbar. Stammfunktionen und Ableitungen lassen sich gliedweise bestimmen.*

Mit „gliedweise“ ist gemeint, dass man jeden einzelnen Summanden  $a_k X^k$  einzeln integriert beziehungsweise ableitet, bevor man die unendliche Summe bildet.

5.36. BEISPIEL. Der Logarithmus  $\log$  ist bei 0 nicht definiert und lässt sich daher nicht unmittelbar als Potenzreihe darstellen. Für beliebige  $x_0 > 0$  erhalten wir mit Hilfe der obigen Folgerung und der Summenformel für die geometrische Reihe aus Beispiel 2.51 die Reihenentwicklung

$$\log(x + x_0) = \log x_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k x_0^k} x^k \quad \text{für alle } x \in (-x_0, x_0).$$

Wir können das umschreiben als

$$\log x = \log x_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k x_0^k} (x - x_0)^k \quad \text{für alle } x \in (0, 2x_0).$$

Wir nennen das die „Entwicklung des Logarithmus um  $x_0$ “, siehe unten.

Man kann zeigen, dass die obige Reihe für  $x_0 = 1$  auch auf dem Intervall  $[1, 2]$  gleichmäßig konvergiert (Übung). Damit erhalten wir den Grenzwert der alternierenden harmonischen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2,$$

siehe Beispiel 2.55. Man merkt aber, dass die obige Reihe viel zu langsam konvergiert, als dass man mit ihrer Hilfe  $\log 2$  berechnen würde. Erfolgversprechender ist es, stattdessen  $-\log 2 = \log \frac{1}{2}$  mit der obigen Potenzreihe auszurechnen.

5.37. DEFINITION. Es sei  $A \subset \mathbb{R}$  und  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Wir nennen  $f$  *analytisch* bei  $x_0 \in A$ , wenn es eine Zahl  $r > 0$  und eine Potenzreihe  $P$  mit Konvergenzradius  $\rho \geq r$  gibt, so dass

$$f(x) = P(x - x_0)$$

für alle  $x \in A \cap (x_0 - r, x_0 + r)$ . In diesem Fall heißt  $P$  die *Potenzreihenentwicklung von  $f$  um  $x_0$* . Wir nennen  $f$  *analytisch*, wenn sie in jedem Punkt von  $A$  analytisch ist.

Nach Folgerung 5.35 sind analytische Funktionen insbesondere unendlich oft differenzierbar. Bisher haben wir fast nur analytische Funktionen kennengelernt; das wird sich aber bald ändern. Man beachte, dass wir nur  $r \leq \rho$  fordern, nicht  $r = \rho$ . Das gibt uns später mehr Flexibilität, Funktionen zu konstruieren, die nicht überall analytisch sind.

Außerdem beachten wir, dass wir nicht *eine* Potenzreihenentwicklung für die gesamte Funktion  $f$  fordern, sondern nur eine um jeden Punkt. Anhand von Beispiel 5.36 sehen wir, dass das im Falle des Logarithmus sinnvoll ist.

Völlig analog würden wir komplexwertige Funktionen auf Teilmengen von  $\mathbb{C}$  behandeln, allerdings ersetzen wir dann das Intervall  $(x_0 - r, x_0 + r)$  in der obigen Definition durch den Kreis

$$B_r(x_0) = \{ x \in \mathbb{C} \mid |x - x_0| < r \}.$$

Solche Funktionen betrachtet man später in der Vorlesung „Funktionentheorie“.

Aus dem folgenden Ergebnis folgt nicht nur, dass jede Funktion an einer festen Stelle  $x_0$  höchstens durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann. Wir werden mit dieser Proposition auch zeigen, dass manche Funktionen überhaupt nicht durch Potenzreihen dargestellt werden können.

5.38. SATZ (Identitätssatz für Potenzreihen). *Es sei  $P$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $\rho > 0$ . Falls es eine Folge  $(x_n) \in (-\rho, \rho) \setminus \{0\}$  Grenzwert 0 gibt, so dass  $P(x_n) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, folgt bereits  $P = 0$ .*

Mit etwas mehr Mühe kann man sogar zeigen, dass eine analytische Funktion auf einem Intervall bereits durch ihre Werte auf einer Folge von Punkten festgelegt ist, die innerhalb des Intervalls konvergiert. Er gilt analog für analytische Funktionen auf zusammenhängenden Teilmengen von  $\mathbb{C}$  und wird in der Funktionentheorie bewiesen.

5.39. BEISPIEL. Wir geben Konstruktionen für  $C^\infty$ -Funktionen an, die man später häufig braucht.

(1) Wir definieren eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \text{ und} \\ e^{-1/x} & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Dann gilt  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  mit  $f^{(k)}(0) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Nach dem Identitätssatz 5.38 ist  $f$  bei 0 nicht analytisch.

- (2) Die Funktion  $f$  ist Grundlage für die Konstruktion sogenannter „Abschneidefunktionen“. Das sind  $C^\infty$ -Funktionen, die auf einer gegebenen abgeschlossenen Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}$  konstant den Wert 1 haben und auf einer dazu disjunkten abgeschlossenen Teilmenge  $B \subset \mathbb{R}$  verschwinden. Solche Funktionen sind in der Regel nicht analytisch. Als Beispiel einer Abschneidefunktion mit  $A = [x_1, \infty)$  und  $B = (-\infty, x_0]$  für  $x_0 < x_1$  betrachte

$$g(x) = \frac{f(x - x_0)}{f(x - x_0) + f(x_1 - x)} \in [0, 1] .$$

- (3) Sei jetzt  $x_2 < x_0$  und  $h \in C^\infty((x_2, \infty))$  beliebig. Wir können  $g$  auch benutzen, um mit Hilfe von  $h$  eine  $C^\infty$ -Funktion auf ganz  $\mathbb{R}$  durch

$$x \mapsto \begin{cases} (gh)(x) & \text{für } x > x_2, \text{ und} \\ 0 & \text{für } x < x_0 \end{cases}$$

zu definieren. Sie verhält sich auf  $A$  wie  $h$  und verschwindet auf  $B$ . So konstruierte Funktionen sind in der Regel nicht analytisch.

### 5.e. Der Satz von Taylor

8.2.22

Der Satz von Taylor ist eine Aussage über Approximation von Funktionen durch Polynome mit Hilfe der höheren Ableitungen, und gehört damit eher zur Differentialrechnung. Allerdings lässt er sich mit verschiedenen Restgliedern formulieren, von denen eins auf mehrfacher partieller Integration beruht, und taucht daher erst in diesem Kapitel auf.

Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $n$ -fach differenzierbare Funktion, für  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , und  $x_0 \in I$ . Dann definieren wir das  $k$ -te *Taylorpolynom* von  $f$  an der Stelle  $x_0$  als

$$T_n(f; x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} X^k .$$

Für  $n = \infty$  nennt man  $T(f; x_0) = T_\infty(f; x_0)$  die *Taylorreihe* von  $f$  bei  $x_0$ , und falls  $x_0 = 0$ , manchmal auch die *Maclaurin-Reihe* von  $f$ . Falls eine Funktion  $f$  überhaupt eine Potenzreihenentwicklung um  $x_0$  besitzt, dann hat sie die obige Gestalt. Zunächst einmal geht es aber darum, wie gut  $f$  durch die Taylorpolynome approximiert wird.

5.40. SATZ (Taylor). *Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $x_0 \in I$ , und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.*

- (1) Peano-Restglied. *Wenn  $f$  eine  $n$ -fach differenzierbare Funktion ist, dann existiert eine Funktion  $h: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0$ , so dass*

$$f(x) = T_n(f; x_0)(x - x_0) + h(x) (x - x_0)^n .$$

- (2) Lagrange-Restglied. *Wenn  $f$  eine  $(n+1)$ -fach differenzierbare Funktion ist, dann existiert für jedes  $x \in I$  ein  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$ , so dass*

$$f(x) = T_n(f; x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} .$$

- (3) Integral-Restglied. *Wenn  $f$  eine  $(n+1)$ -fach stetig differenzierbare Funktion ist, dann gilt*

$$f(x) = T_n(f; x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt .$$

Für kleine  $n$  enthält der Satz von Taylor nichts Neues. Variante (1) mit Peano-Restglied ist im Falle  $n = 0$  äquivalent zur Stetigkeit bei  $x_0$  nach Proposition 3.17 (2), und im Falle  $n = 1$  zur Differenzierbarkeit bei  $x_0$  nach Proposition 4.3 (3), siehe auch Bemerkung 4.4. Hier kommt es also nur auf das Verhalten von  $f$  nahe bei  $x_0$  an.

Variante (2) mit Lagrange-Restglied ist für  $n = 0$  äquivalent zum Mittelwertsatz 4.16 der Differentialrechnung. Insbesondere benötigen wir Differenzierbarkeit von  $f$  auf dem ganzen offenen Intervall zwischen den Punkten  $x$  und  $x_0$ , andernfalls finden wir Gegenbeispiele.

Variante (3) mit Integral-Restglied ist für  $n = 0$  äquivalent zur Folgerung (5.21) aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Die Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit lässt sich ein wenig abschwächen, siehe etwa Bemerkung 5.32 (3).

5.41. BEMERKUNG. Es gibt gewisse Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Restgliedern.

- (1) Wenn  $f$  eine  $k$ -fach differenzierbare Funktion mit  $k \geq 1$  ist, haben wir sowohl das Peano-Restglied für  $n = k$  als auch das Lagrange-Restglied für  $n = k - 1$  zur Verfügung. Wenn  $f$  sogar  $k$ -fach stetig differenzierbar ist, ergibt sich das Peano-Restglied aus dem Lagrange-Restglied im Grenzübergang  $x \rightarrow x_0$ .
- (2) Für  $f \in C^{n+1}(I)$  ergibt sich das Lagrange-Restglied aus dem Integral-Restglied mit Hilfe des Mittelwertsatzes 5.17 der Integralrechnung mit Gewichtsfunktion  $(x - t)^n$ .

5.42. BEMERKUNG. Es sei  $I$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  bei  $x_0$  analytisch. Mit Folgerung 5.35 kann man nachrechnen, dass die Taylor-Reihe bei  $x_0$  mit der Potenzreihenentwicklung von  $f$  um  $x_0$  übereinstimmt. Somit existiert  $\varepsilon > 0$ , so dass für alle  $x \in I$  mit  $|x - x_0| < \varepsilon$  gilt, dass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n .$$

Als Beispiele dazu betrachte beliebige Polynome, die geometrische Reihe aus Beispiel 2.51 (1), die Exponentialreihe aus Beispiel 2.73, die Winkelfunktionen vor Proposition 2.80 und die Logarithmusreihe aus Beispiel 5.36.

Der Satz von Taylor beschreibt, wie gut das  $n$ -te Taylor-Polynom von  $f$  bei  $x_0$  die Funktion  $f$  approximiert. Um das kurz und prägnant formulieren zu können, führen wir die *Landau-Symbole* ein. Sie werden auch in der Physik und in der Informatik häufig benutzt.

5.43. DEFINITION. Es sei  $I$  ein Intervall,  $x_0 \in I$ , und  $g, h: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  seien zwei Funktionen. Dann definiert man die *Landau-Symbole*

$$\begin{aligned} h = o(g) \text{ bei } x_0 &\iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = 0 , \\ \text{und } h = O(g) \text{ bei } x_0 &\iff \text{es gibt } \varepsilon > 0 \text{ und } C \in \mathbb{R}, \text{ so dass } |h(x)| \leq C |g(x)| \\ &\text{für alle } x \neq x_0 \text{ mit } |x - x_0| < \varepsilon . \end{aligned}$$

Analog definiert man  $o$  und  $O$  auch bei  $x_0 = -\infty$  oder  $\infty$ .

Man schreibt „bei  $x_0$ “ nicht mit, wenn die Stelle aus dem Zusammenhang klar ist. Man beachte, dass  $o(g)$  und  $O(g)$  Mengen von Funktionen beschreiben. Man muss diese Notation also mit genauso großer Vorsicht benutzen wie die Notation für das unbestimmte Integral in Bemerkung 5.20.

5.44. BEMERKUNG. Mit den Landau-Symbolen können wir die Genauigkeit der Taylor-Approximation angeben.

- (1) Der Satz 5.40 von Taylor mit Peano-Restglied (1) ist äquivalent zu

$$f(x) = T_n(f; x_0)(x) + o((x - x_0)^n) .$$

- (2) Mit Integral-Restglied (3) folgt sogar

$$f(x) = T_n(f; x_0)(x) + O((x - x_0)^{n+1}) .$$

Für das Lagrange-Restglied (2) gilt das auch, falls  $f^{(n+1)}$  nahe  $x_0$  beschränkt ist. Dass wir eine stärkere Aussage erhalten, liegt an den stärkeren Voraussetzungen. Die Funktion  $f(x) = x \sqrt[3]{x}$  ist bei  $x_0 = 0$  einmal differenzierbar mit  $T_1(f; x_0) = 0$ , und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, \quad \text{aber} \quad \frac{f(x)}{x^2} \text{ ist unbeschränkt.}$$

Folglich erhalten wir

$$f(x) = T_1(f; x_0) + o(x), \quad \text{aber nicht} \quad f(x) = T_1(f; x_0) + O(x^2).$$

- (3) Der Satz von Taylor besagt ausdrücklich nicht, dass für festes  $x \neq x_0$  die Approximation dadurch besser wird, dass wir  $n$  größer machen, wie bereits Beispiel 5.39 zeigt. Bemerkung 5.42 gilt nur für analytische Funktionen.
- (4) Für nicht analytische  $C^\infty$ -Funktionen  $f$  kann es sein, dass die Taylor-Reihe wie in Beispiel 5.39 konvergiert, aber nicht die Funktion  $f$  darstellt. Es kann aber auch passieren, dass die Taylor-Reihe von  $f$  überhaupt nicht konvergiert (also Konvergenzradius 0 hat). Dennoch werden auch diese Funktionen für  $x$  nahe genug bei  $x_0$  durch ihre Taylorpolynome approximiert.

5.45. BEISPIEL. Die Funktion  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+tx} dt$$

ist unendlich oft differenzierbar, aber ihre Taylorreihe bei  $x_0 = 0$  divergiert.

## 5.f. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine wichtige Motivationsquelle für Differential- und Integralrechnung ist die Physik. Einfache Probleme, zum Beispiel in der klassischen Mechanik, lassen sich durch Differentialgleichungen an Funktionen in einer Variablen beschreiben. Aber auch in anderen Naturwissenschaften kommen solche Differentialgleichungen vor. Wir lernen exemplarisch ein paar einfache Differentialgleichungen und dazu passende Lösungstechniken kennen. Insbesondere verstehen wir, warum das explizite Lösen einer Differentialgleichung manchmal „Integrieren“ genannt wird. Für eine systematische Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen inklusive Existenz- und Eindeutigkeitsüberlegungen verweisen wir auf das kommende Semester. Partielle Differentialgleichung (in denen die Funktionen von mehr als einer Veränderlichen abhängen) können Sie in speziellen Vorlesungen kennen und lösen lernen.

5.46. BEMERKUNG. Eine gewöhnliche Differentialgleichung  $k$ -ter Ordnung beschreibt eine Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  durch eine Gleichung in  $t$  und  $f(t), \dots, f^{(k)}(t)$ . Etwas allgemeiner könnten wir auch  $\mathbb{R}^n$ -wertige Funktionen betrachten, die alle von der gleichen Variablen  $t$  abhängen. In diesem Fall spricht man auch von „gekoppelten“ Differentialgleichungen.

- (1) Eine implizite gewöhnliche Differentialgleichung  $k$ -ter Ordnung ist gegeben durch einen Ausdruck der Form

$$G(t, x_0, \dots, x_k) = 0,$$

Dabei ist  $G$  auf einer geeigneten Teilmenge des  $\mathbb{R}^{k+2}$  definiert. Eine Lösung auf einem Intervall  $I$  ist eine Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$G(t, f(t), \dots, f^{(k)}(t)) = 0 \quad \text{für alle } t \in I.$$

Insbesondere müssen die Argumente für alle  $t$  im Definitionsbereich von  $G$  liegen. Hier sieht man bereits, dass wir im allgemeinsten Fall einiges Wissen über Funktionen in mehreren Veränderlichen brauchen, was uns zur Zeit noch fehlt.

- (2) Wir betrachten daher zunächst Differentialgleichungen in expliziter Form, das heißt, wir lösen nach der höchsten Ableitung auf, so dass

$$f^{(k)}(t) = F(t, f(t), \dots, f^{(k-1)}(t)) ,$$

wobei  $F$  jetzt nur noch von  $(k + 1)$  Variablen  $t$  und  $x_0, \dots, x_{k-1}$  abhängt. Wir nennen  $F$  einfach die „rechte Seite“ der Gleichung. Man kann jetzt verschiedene Spezialfälle unterscheiden.

5.47. BEMERKUNG. Wenn die rechte Seite nur von  $t$ , aber nicht von  $x_0, \dots, x_{k-1}$  abhängt, erhalten wir eine Lösung durch sukzessives Bilden von Stammfunktionen. Das heißt, wir setzen

$$f_{k-1} = \int F(t) dt , \quad f_{k-2} = \int f_{k-1}(t) dt , \quad \dots , \quad f = f_0 = \int f_1(t) dt .$$

Aus dem Hauptsatz folgt, dass  $f$  die Differentialgleichung löst. Da wir in jedem Schritt eine additive Konstante frei wählen dürfen, erhalten wir am Ende eine Lösung, die von  $k$  Parametern abhängt.

5.48. BEISPIEL. Ein einfaches Beispiel ist der *freie Fall* aus der Physik. Es sei  $g > 0$  die Erdbeschleunigung, die auf einen Körper wirkt. Die Funktion  $f(t)$  beschreibe die Höhe des Körpers zur Zeit  $t$ . Dann wird der freie Fall beschrieben durch die Differentialgleichung

$$f''(t) = -g .$$

Bei der Wahl einer Stammfunktion können wir zwei Parameter vorgeben, zum Beispiel die Höhe  $h_0$  und die vertikale Geschwindigkeit  $v_0$  zur Zeit 0. Als Stammfunktionen erhalten wir Geschwindigkeit und Höhe zur Zeit  $t$ , und zwar

$$f_1(t) = -gt + v_0 \quad \text{und} \quad f(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0t + h_0 .$$

Andere Fragestellungen sind möglich, zum Beispiel: „mit welcher Geschwindigkeit müssen wir einen Ball hochwerfen, damit er zur Zeit  $T > 0$  wieder in unserer Hand landet?“ In diesem Fall soll  $f(T) = h_0$  gelten, und wir erhalten

$$h_0 = -\frac{g}{2}T^2 + v_0T + h_0 \quad \text{mit der Lösung} \quad v_0 = \frac{g}{2}T .$$

5.49. BEMERKUNG. Eine Differentialgleichung, deren rechte Seite nicht von  $t$  abhängt, heißt *autonom*. Im Falle  $k = 1$  sei also  $f'(t) = F(f(t))$ . Wir raten Lösungen auf einem Intervall  $I = [t_0, t_1]$  mit Hilfe der folgenden Umformung:

$$t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t_1} 1 dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{f'(t)}{F(f(t))} dt = \int_{f(t_0)}^{f(t_1)} \frac{dx}{F(x)} = g(f(t_1)) - g(f(t_0))$$

für eine Stammfunktion  $g$  von  $\frac{1}{F}$ . Somit ist die Lösung  $f$  die Umkehrfunktion einer Stammfunktion von  $\frac{1}{F}$ . Dieser Ansatz funktioniert nur dann problemlos, wenn  $F$  stetig ist und nirgends den Wert 0 annimmt. Aber mitunter lassen sich Lösungen über solche kritischen Punkte hinweg fortsetzen.

5.50. BEISPIEL. Wir geben zwei einfache Beispiele.

- (1) *Exponentielles Wachstum*. Wenn die Änderungsrate proportional zum Wert ist (wie beispielsweise bei kontinuierlicher Verzinsung, siehe Proposition 2.74), erhalten wir die Differentialgleichung

$$f' = \lambda f .$$

Wir wissen bereits, dass  $C \exp(\lambda t)$  für jedes  $C \in \mathbb{R}$  eine Lösung ist. Die soeben skizzierte Methode liefert

$$g(x) = \int \frac{dx}{\lambda x} = \log \frac{|x|}{\lambda} + c ,$$

und somit  $f(t) = \pm e^{\lambda(t-c)}$ . Wir finden alle Lösungen bis auf  $f \equiv 0$ .

- (2) *Logistische Differentialgleichung.* Wir nehmen an, dass der Proportionalitätsfaktor in (1) linear abnimmt und an einer oberen Grenze  $K > 0$  verschwindet. Es tritt also eine Art „Sättigung“ ein, sobald sich die Lösung der „Kapazität“  $K$  annähert. Wir erhalten die Differentialgleichung

$$f' = \lambda f \cdot \left(1 - \frac{f}{K}\right).$$

Für die Lösung benutzen wir die Partialbruchzerlegung aus Proposition 5.23:

$$g(x) = \int \frac{dx}{\lambda x(1-x/K)} = \frac{1}{\lambda} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{\lambda} \int \frac{dx}{K-x} = \frac{1}{\lambda} \log \left| \frac{x}{K-x} \right| + c$$

Wir erhalten als Umkehrfunktion

$$f(t) = K \frac{e^{\lambda(t-c)}}{e^{\lambda(t-c)} \pm 1}.$$

Mit dem Minuszeichen erhalten wir eine negative Lösung auf  $(-\infty, c)$  sowie eine Lösung auf  $(c, \infty)$ , die überall größer als  $K$  ist. Beide Lösungen sind *maximal* in dem Sinne, dass sie sich nicht auf ein größeres Definitionsintervall ausdehnen lassen. Wenn wir das Pluszeichen wählen, erhalten wir eine Funktion auf ganz  $\mathbb{R}$  mit Werten in  $(0, K)$ , die für  $t \rightarrow -\infty$  gegen 0 und für  $t \rightarrow \infty$  gegen  $K$  konvergiert. Das ist die Familie von Lösungen (in Abhängigkeit von  $c$ ), die wir suchen. Außerdem gibt es noch die konstanten Lösungen  $f \equiv 0$  und  $f \equiv K$ .

5.51. BEMERKUNG. Der obige Trick lässt sich verallgemeinern auf Differentialgleichungen der Form

$$f'(t) = q(t) \cdot r(f(t)).$$

Hier hängt die rechte Seite zwar sowohl von  $t$  als auch von  $f(t)$  ab, hat aber immer noch eine sehr spezielle Form. Man rät eine Lösung durch *Trennung der Variablen* mit dem Ansatz

$$\int_{t_0}^{t_1} q(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{f'(t)}{r(f(t))} dt = \int_{f(t_0)}^{f(t_1)} \frac{dx}{r(x)}.$$

Sei also  $Q$  eine Stammfunktion von  $q$  und  $P$  eine Stammfunktion von  $p = \frac{1}{r}$  mit Umkehrfunktion  $h$ , dann sollte  $h \circ Q$  eine Lösung der obigen Differentialgleichung sein. Wir können zu  $P$  oder zu  $Q$  eine Integrationskonstante hinzufügen, um etwas allgemeiner die Lösung  $f(t) = h(Q(t) + c)$  zu erhalten.

5.52. BEISPIEL. Als Beispiel betrachten wir etwa

$$f'(t) = t f(t)^2 + t.$$

In der obigen Notation ist  $q(t) = t$  mit Stammfunktion  $Q(t) = \frac{x^2}{2}$  und  $p(x) = \frac{1}{1+x^2}$  mit Stammfunktion  $P(x) = \arctan x$ . Somit erhalten wir als Lösungsansatz

$$f(t) = \tan\left(\frac{t^2}{2} + c\right).$$

Die Funktion  $\tan = \frac{\sin}{\cos}$  ist an den Stellen  $(n + \frac{1}{2})\pi$  für  $n \in \mathbb{Z}$  nicht definiert, da  $\cos((n + \frac{1}{2})\pi) = 0$ . Wir erhalten maximale Lösungen  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  der obigen Differentialgleichung, wenn es ein  $n \in \mathbb{Z}$  gibt, so dass

$$\begin{aligned} & t^2 + 2c \in ((2n-1)\pi, (2n+1)\pi) \quad \text{für alle } t \in (a, b), \\ \text{und} \quad & \lim_{t \searrow a} (t^2 + 2c), \quad \lim_{t \nearrow b} (t^2 + 2c) \in \{(2n-1)\pi, (2n+1)\pi\}. \end{aligned}$$

## Metrische und topologische Räume

Hauptthema im zweiten Teil des Analysis-Zyklus ist die Analysis im Mehrdimensionalen. Das heißt, wir betrachten jetzt Funktionen von (Teilmengen des)  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$ . Solche Funktionen tauchen immer dann auf, wenn irgendwelche Größen von mehreren Parametern gleichzeitig abhängen. In der Physik sind das häufig mehrere Ortskoordinaten ( $n > 1$ ). Und manche Größen wie Kraftfelder haben an jeder Stelle mehrere Koordinaten ( $m > 1$ ). In den Wirtschaftswissenschaften könnte es zum Beispiel darum gehen, wieviel Geld einzelne Kunden für verschiedene Güter zu zahlen bereit sind, welche Umsatzerwartungen die Hersteller und die Händler haben, und welche Marktpreise sich daraus ergeben. In der Mathematik selbst schließlich gibt es geometrische Objekte, die man als Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  betrachten und analysieren kann. All das passiert aber erst ab dem nächsten Kapitel.

In diesem Kapitel wollen wir noch einmal unsere Überlegungen zu Konvergenz und Stetigkeit aus Analysis I (Kapitel 2 und 3) zusammenfassen. Gleichzeitig müssen wir diesen Begriffen auch im Mehrdimensionalen eine Bedeutung geben. Hier helfen uns metrische und topologische Räume. Und die Methoden, die wir hier erarbeiten, sollen uns dann in den folgenden Kapitel die Arbeit erleichtern. Grundbegriffe der linearen Algebra werden wir ab jetzt regelmäßig benötigen und daher auch voraussetzen.

### 6.a. Metrische Räume

25.4.22

Den Begriff des Abstandes zweier reeller Zahlen haben wir in Bemerkung 2.3 bereits eingeführt und seine wichtigsten Eigenschaften aufgelistet. Diese Eigenschaften hat er gemeinsam mit dem Euklidischen Abstand auf  $\mathbb{R}^n$  aus Bemerkung 2.42, dem Abstand auf  $\mathbb{C}$  aus Bemerkung 2.47, und dem Supremums-Abstand zweier stetiger Funktionen aus Bemerkung 3.38. Wir machen aus Bemerkung 2.3 daher einfach eine neue Definition.

6.1. DEFINITION. Ein *metrischer Raum*  $(M, d)$  besteht aus einer Menge  $M$  und einer Abbildung  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , der *Metrik* oder auch *Abstandsfunktion*, so dass folgende Axiome für alle  $p, q, r \in M$  gelten.

(1) *Positivität*. Es gilt

$$d(p, q) \geq 0, \quad \text{und} \quad d(p, q) = 0 \iff p = q.$$

(2) *Symmetrie*. Es gilt

$$d(q, p) = d(p, q).$$

(3) *Dreiecksungleichung*. Es gilt

$$d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r).$$

Einige Beispiele haben wir oben schon aufgelistet. Weitere finden Sie in den Übungen. In Abschnitt 6.e sehen wir, dass die meisten dieser Metriken von sogenannten „Normen“ herkommen.

Stetigkeit kennen wir für Funktionen zwischen Teilmengen der reellen Zahlen aus Definition 3.1. Diese Definition benutzt nur den Abstand zweier reeller Zahlen, also können wir sie sofort auf Abbildungen zwischen beliebigen metrischen Räumen übertragen.

6.2. DEFINITION. Es seien  $(M, d_M)$  und  $(N, d_N)$  metrische Räume. Eine Abbildung  $f: M \rightarrow N$  heißt *stetig bei*  $p \in M$ , wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle  $q \in M$  gilt

$$d_M(p, q) < \delta \quad \implies \quad d_N(f(p), f(q)) < \varepsilon .$$

Wenn das für alle  $p \in M$  gilt, heißt  $f$  *stetig*. Wir schreiben

$$C^0(M, N) = \{ f: M \rightarrow N \mid f \text{ stetig} \} .$$

Man beachte: wenn wir die obige Definition von Stetigkeit auf ganz  $M$  formal aufschreiben, hängt die Wahl von  $\delta > 0$  sowohl von  $\varepsilon > 0$  als auch von  $p$  ab. Wir sprechen von „gleichmäßiger Stetigkeit“, wenn  $\delta > 0$  nur von  $\varepsilon > 0$ , aber nicht von  $p$  abhängt.

6.3. BEISPIEL. Wir haben in Analysis I schon viele Beispiele von stetigen Funktionen von (Teilmengen von)  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  kennengelernt. Wir erinnern uns jetzt an die „Stetigkeit der Integration“ aus Abschnitt 5.a.

Dazu seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ , sei  $M = C^0([a, b])$  der Raum der stetigen Funktionen mit der Supremumsmetrik  $d_M = d_{\text{sup}}$  aus Bemerkung 3.38 und  $N = \mathbb{R}$  die reellen Zahlen mit  $d_{\mathbb{R}}(x, y) = |y - x|$ . Aus Linearität 5.3 und der fundamentalen Abschätzung 5.8 folgt für  $f, g \in C^0([a, b])$ , dass

$$d_{\mathbb{R}}\left(\int_a^b f(x) dx, \int_a^b g(x) dx\right) = \left|\int_a^b (g - f)(x) dx\right| \leq (b - a) \cdot \|g - f\|_{\text{sup}} = (b - a) \cdot d_{\text{sup}}(f, g) .$$

Gegeben  $\varepsilon > 0$  wählen wir also  $\delta = \frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ . Aus  $d_{\text{sup}}(f, g) < \delta$  folgt, dass sich die Integrale um weniger als  $\varepsilon$  unterscheiden. Somit ist Integration als Abbildung

$$\int_a^b \cdot dx: C^0([a, b]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

sogar gleichmäßig stetig.

6.4. BEMERKUNG. Folgen in beliebigen Mengen oder Räumen hatten wir in Definition 2.4 schon eingeführt. Sie sind in der Analysis sehr wichtig, denn ein gängiger Lösungs-Ansatz für analytische Probleme sieht wie folgt aus.

- (1) Konstruiere eine Folge, deren Glieder das Problem immer genauer approximativ lösen.
- (2) Finde eine konvergente Teilfolge, oder zeige, dass es eine gibt.
- (3) Beweise, dass ihr Grenzwert das Problem löst.

In dieser Vorlesung werden wir dieses Verfahren auch ein- oder zweimal anwenden.

Für die Definition des Grenzwerts haben wir Definition 2.6 nur den Abstand zweier reeller Zahlen verwendet, also können wir diese Definition mühelos auf metrische Räume übertragen.

6.5. DEFINITION. Es sei  $(p_n)_n$  eine Folge in einem metrischen Raum  $(M, d)$  und  $q \in M$ . Dann *konvergiert*  $(p_n)_n$  (für  $n \rightarrow \infty$ ) gegen  $q$ , kurz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = q ,$$

genau dann, wenn es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$n \geq N \quad \implies \quad d(p_n, q) < \varepsilon .$$

In diesem Fall heißt  $q$  der *Grenzwert* der Folge  $(p_n)_n$ , und  $(p_n)_n$  heißt *konvergent*. Falls kein  $q \in M$  die obige Eigenschaft erfüllt, heißt  $(p_n)_n$  *divergent*.

Der Grenzwert einer Folge ist in einem metrischen Raum eindeutig, falls er existiert. Dazu übertragen wir den Beweis von Proposition 2.8 (Übung).

Für Schritt (2) in Bemerkung 6.4 haben wir nicht viele Konvergenzkriterien zur Verfügung. Für das Monotoniekriterium 2.17 fehlt uns auf allgemeinen metrischen Räumen die Anordnung. Und für das Cauchy-Kriterium 2.39 benötigen wir den Begriff der Vollständigkeit.

6.6. DEFINITION. Eine Folge  $(p_n)_n$  in einem metrischen Raum  $(M, d)$  heißt *Cauchy-Folge*, wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m > N$  und  $n > N$  gilt, dass

$$d(p_m, p_n) < \varepsilon .$$

Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.

Wir wissen bereits, dass  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  vollständig sind. Tatsächlich ist Vollständigkeit für uns der Grund gewesen, von den rationalen zu den reellen Zahlen überzugehen. Und wir haben in Analysis I gesehen, dass viele wichtige Sätze über reelle Zahlen auf Vollständigkeit beruhen, und daher für  $\mathbb{Q}$  nicht gelten. Als Beispiel seien der Satz 2.32 von Bolzano-Weierstraß und der Zwischenwertsatz 3.23 genannt. In Satz 2.44 haben wir gesehen, dass  $\mathbb{R}^n$  mit der Euklidischen Metrik ebenfalls vollständig ist.

6.7. BEISPIEL. Der Raum  $(C^0(I), d_{\text{sup}})$  der stetigen Funktionen auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  mit der Supremumsmetrik aus Bemerkung 3.38 ist vollständig. Sei dazu  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge bezüglich der Supremumsmetrik. Dann ist für alle  $x \in I$  auch  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}$ , und somit konvergiert sie nach Satz 2.39. Also können wir eine Grenzfunktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  definieren durch

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \mathbb{R} .$$

Dann konvergiert  $(f_n)_n$  punktweise gegen  $f$ . Es gilt sogar  $d_{\text{sup}}(f, f_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , das heißt, die Folge  $(f_n)_n$  konvergiert *gleichmäßig* gegen  $f$ , siehe Definition 3.34. Aus Satz 3.36 folgt, dass die Grenzfunktion stetig ist, das heißt, wir haben einen Grenzwert in  $C^0(I)$  gefunden. Also ist  $(C^0(I), d_{\text{sup}})$  vollständig.

6.8. BEMERKUNG. Wir können den Beweis von Satz 3.36 auf stetige Abbildungen zwischen beliebigen metrischen Räumen  $(M, d_M)$  und  $(N, d_N)$  verallgemeinern. Das obige Argument funktioniert, wann immer der Zielraum  $(N, d_N)$  vollständig ist. Insgesamt sehen wir: wenn  $(N, d_N)$  vollständig ist, ist auch  $(C^0(M, N), d_{\text{sup}})$  vollständig.

Als eine erste Anwendung von Vollständigkeit formulieren wir einen wichtigen Satz, den wir später auch anwenden werden. Der Beweis verläuft wie in Bemerkung 6.4 und ist Übung.

6.9. SATZ (Banachscher Fixpunktsatz). *Es sei  $(M, d)$  ein vollständiger metrischer Raum,  $\kappa \in (0, 1)$ , und  $f: M \rightarrow M$  sei eine  $\kappa$ -Kontraktion, das heißt, für alle  $p, q \in M$  gilt*

$$d(f(p), f(q)) \leq \kappa d(p, q) .$$

*Dann hat  $f$  einen eindeutigen Fixpunkt, das heißt, es gibt einen Punkt  $p_0 \in M$ , so dass*

$$f(p) = p \iff p = p_0 .$$

## 6.b. Topologische Räume und Stetigkeit

Wir haben jetzt in Gestalt der metrischen Räume schon einen recht allgemeinen Begriff als Grundlage für Stetigkeit und Konvergenz gefunden. Allerdings sind metrische Räume eigentlich etwas zu fein für unseren Zweck — wenn man etwa alle Abstände verdoppelt, also  $d$  durch  $2d$  ersetzt, ändert sich zwar der metrische Raum, aber Stetigkeit und Konvergenz haben bezüglich beider Metriken die gleiche Bedeutung. Tatsächlich reicht es, einen guten Begriff von „Umgebungen“ zu haben, das heißt, von Mengen, die alle Punkte „sehr nahe“ an einem gegebenen Punkt  $p$  enthalten, wie zum Beispiel  $B_\varepsilon(p)$ . Eine Topologie liefert uns genau das. Auf der anderen Seite sind Topologien für Zwecke der Analysis oft etwas zu allgemein oder unspezifisch. Anhand von Beispielen sehen wir, dass manche vertraute Eigenschaften von Grenzwerten oder stetigen Abbildungen in allzu „wildem“ topologischen Räumen nicht mehr gelten.

6.10. BEMERKUNG. Wir schauen uns das Konzept einer Topologie zunächst anhand der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  genauer an. Dabei verwenden wir möglichst nur den Abstands begriff auf  $\mathbb{R}$ , damit wir anschließend alles auf beliebige metrische Räume übertragen können.

Wir nennen eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}$  *offen*, wenn zu jedem Punkt  $x \in A$  ein  $r > 0$  existiert, so dass

$$B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R} \mid d(x, y) < r \} \subset A .$$

Die Schreibweise  $B_r(x)$  kennen wir aus Lemma 2.70 und Bemerkung 3.3. Bezeichne wie immer  $\mathcal{P}$  die Potenzmenge, dann ist die Standard-Topologie auf  $\mathbb{R}$  gerade

$$\mathcal{O} = \{ V \subset \mathbb{R} \mid V \text{ offen} \} = \{ V \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in V \exists r > 0 B_r(x) \subset V \} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) .$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt, dass  $B_r(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und alle  $r > 0$  offen ist.

Wenn wir Folgenkonvergenz mit Hilfe der Topologie beschreiben können, haben wir schon viel erreicht, denn wir wissen dank Proposition 3.6, dass wir auch Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen mit Hilfe konvergenter Folgen beschreiben können (für allgemeine topologische Räume stimmt das allerdings nicht). Dazu brauchen wir einen neuen Begriff. Eine Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}$  heißt *Umgebung* von  $x \in \mathbb{R}$ , wenn es eine offene Menge  $A \subset \mathbb{R}$  gibt, so dass

$$x \in A \subset U ,$$

also existiert  $\varepsilon > 0$ , so dass  $B_\varepsilon(x) \subset U$ . Eine Folge  $(x_n)_n$  in  $\mathbb{R}$  konvergiert  $(x_n)_n$  genau dann gegen  $x \in \mathbb{R}$ , wenn für jede Umgebung  $U$  von  $x$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $x_n \in U$  für alle  $n \geq N$  gilt.

Wir erinnern uns an die Vereinigung  $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \subset M$  über eine Teilmenge  $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(M)$ .

6.11. DEFINITION. Ein *topologischer Raum*  $(M, \mathcal{O})$  besteht aus einer Menge  $M$  und einer Teilmenge  $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(M)$ , der *Topologie*, mit folgenden Eigenschaften.

- (1) *Nichttrivialität*. Es gilt stets  $\emptyset \in \mathcal{O}$  und  $M \in \mathcal{O}$ .
- (2) *Endliche Durchschnitte*. Seien  $V, W \in \mathcal{O}$ . Dann gilt auch  $V \cap W \in \mathcal{O}$ .
- (3) *Beliebige Vereinigungen*. Es sei  $\mathcal{V} \subset \mathcal{O}$  eine beliebige Teilmenge. Dann gilt auch  $\bigcup \mathcal{V} \in \mathcal{O}$ .

Eine Menge  $V \subset M$  heißt *offen*, wenn  $V \in \mathcal{O}$ . Wir nennen  $U \subset M$  eine *Umgebung* von  $p \in M$ , wenn es  $V \in \mathcal{O}$  gibt mit  $p \in V \subset U$ . Wir nennen  $A \subset M$  *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement  $M \setminus A$  offen ist.

Aus (2) schließt man induktiv, dass endliche Durchschnitte offener Mengen wieder offen sind. Bevor wir diese Axiome für die Topologie aus Bemerkung 6.10 zeigen und uns weitere Beispiele anschauen, definieren wir Konvergenz von Folgen in beliebigen topologischen Räumen wie oben.

6.12. DEFINITION. Es sei  $(M, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum, es sei  $q \in M$  und  $(p_n)_n$  eine Folge in  $M$ . Dann *konvergiert*  $(p_n)_n$  *gegen*  $q$  *in*  $(M, \mathcal{O})$ , kurz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = q ,$$

wenn zu jeder Umgebung  $U$  von  $q$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $p_n \in U$  für alle  $n \geq N$ .

6.13. BEISPIEL. Es sei  $M$  eine beliebige Menge.

- (1) *Diskrete Topologie*. Die volle Potenzmenge  $\mathcal{P}(M)$  erfüllt die obigen Axiome. Man nennt einen topologischen Raum  $(M, \mathcal{O})$  *diskret*, wenn  $\mathcal{O} = \mathcal{P}(M)$  gilt. Eine Folge  $(p_n)_n$  konvergiert genau dann gegen  $q \in M$ , wenn es  $N \in \mathbb{N}$  gibt mit  $p_n = q$  für alle  $n \geq N$ . Diese Topologie ist für die meisten Zwecke zu fein. Beim Verfahren aus Bemerkung 6.4 müsste man in Schritt (2) bereits eine Lösung kennen, um eine Teilfolge zu finden, die gegen sie konvergiert.

- (2) *Klumpentopologie*. Das andere Extrem ist die Topologie  $\mathcal{O} = \{\emptyset, M\}$ . Hier konvergiert jede Folge gegen jeden Punkt aus  $M$ . Wenn  $M$  zwei oder mehr Elemente hat, ist der Grenzwert also nicht mehr eindeutig. Diese Topologie ist für die meisten Zwecke zu grob. In Schritt (2) von Bemerkung 6.4 konvergiert zwar jede Folge, aber da jedes Objekt Grenzwert sein kann, können wir in Schritt (3) keine speziellen Aussagen über Grenzwerte erwarten.
- (3) *Metrische Topologie*. Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Wie in Bemerkung 6.10 definieren wir

$$B_r(x) = \{ y \in M \mid d(x, y) < r \} \subset M$$

und  $\mathcal{O}_d = \{ V \subset M \mid \forall x \in V \exists r > 0 B_r(x) \subset V \} \subset \mathcal{P}(M)$ .

Insbesondere erhalten im Falle  $M = \mathbb{R}$  und  $d(x, y) = |y - x|$  genau die Topologie aus Bemerkung 6.10. Die obigen Axiome muss man noch überprüfen.

In dieser Vorlesung werden wir (fast) nur metrische Topologien betrachten.

Die Argumente aus Bemerkung 6.10 funktionieren stets in der metrischen Topologie.

6.14. PROPOSITION. *Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Dann konvergiert eine Folge  $(p_n)_n$  in  $M$  genau dann gegen  $q \in M$  im Sinne von Definition 6.5, wenn sie in der metrischen Topologie im Sinne von Definition 6.12 konvergiert.*

Wir dürfen das Symbol „lim“ also verwenden, ohne zu sagen, ob wir gerade „metrisch“ oder „topologisch“ denken. Außerdem sind Grenzwerte in der metrischen Topologie eindeutig, falls sie existieren.

Man beachte, dass „abgeschlossen“ in der Topologie nicht das Gegenteil von „offen“ ist — eine Menge, die nicht offen ist, ist noch lange nicht abgeschlossen. Beispielsweise ist  $[0, 1) \subset \mathbb{R}$  in der metrischen Topologie weder offen noch abgeschlossen. Und die leere Menge  $\emptyset$  und der volle Raum  $M$  sind wegen (1) sowohl offen als auch abgeschlossen.

6.15. PROPOSITION. *Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Dann ist  $A \subset M$  genau dann in der metrischen Topologie auf  $M$  abgeschlossen, wenn jede Folge  $(a_n)_n$  in  $A$ , die in  $M$  konvergiert, ihren Grenzwert in  $A$  hat.*

Für beliebige topologische Räume gilt nur die Richtung „ $\Rightarrow$ “.

2.5.22

6.16. DEFINITION. Es seien  $(M, \mathcal{O}_M)$  und  $(N, \mathcal{O}_N)$  topologische Räume. Dann heißt eine Abbildung  $f: M \rightarrow N$  stetig im Punkt  $p \in M$ , wenn für jede Umgebung  $U \subset N$  von  $f(p)$  das Urbild  $f^{-1}(U)$  eine Umgebung von  $p$  ist.

Sie heißt stetig, wenn die Urbilder  $f^{-1}(V)$  aller offenen Mengen  $V \in \mathcal{O}_N$  in  $M$  offen sind.

Ein *Homöomorphismus* ist eine bijektive, stetige Abbildung, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.

6.17. PROPOSITION. *Es seien  $(M, \mathcal{O}_M)$  und  $(N, \mathcal{O}_N)$  topologische Räume.*

- (1) *Eine Teilmenge  $V \subset M$  ist genau dann offen, wenn sie Umgebung aller  $p \in V$  ist.*
- (2) *Eine Abbildung  $f: M \rightarrow N$  ist genau dann stetig, wenn sie in jedem Punkt stetig ist.*

6.18. PROPOSITION (vergleiche Proposition 3.4). *Es seien  $L, M, N$  topologische Räume,  $p \in L$ , und es seien  $f: M \rightarrow N$  und  $g: L \rightarrow M$  Abbildungen.*

- (1) *Wenn  $g$  bei  $p$  und  $f$  bei  $g(p)$  stetig ist, ist  $f \circ g$  bei  $p$  stetig.*
- (2) *Wenn  $f$  und  $g$  stetig sind, ist  $f \circ g$  stetig.*

Wir überzeugen uns im nächsten Abschnitt, dass Stetigkeit in der metrischen Topologie das gleiche bedeutet wie in Definition 6.2.

### 6.c. Grenzwerte von Funktionen

Zur Definition der Ableitung in Kapitel 4 haben wir Grenzwerte benutzt. Im nächsten Kapitel werden wir die Eigenschaft aus Proposition 4.3 (3) ins Mehrdimensionale übertragen. Dazu brauchen wir einen Grenzwertbegriff für Funktionen ähnlich wie in Abschnitt 3.b. Wir beginnen wieder damit, dass wir uns überlegen, an welchen Punkten wir überhaupt sinnvoll vom Grenzwert einer Funktion sprechen können.

6.19. BEMERKUNG. Es sei  $(M, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum und  $S \subset M$  eine Teilmenge. Dann definieren wir einige weitere Teilmengen von  $M$  und listen ihre Eigenschaften auf.

- (1) Das *Innere von  $S$*  ist die größte in  $M$  offene Teilmenge von  $S$ . Es gilt

$$\overset{\circ}{S} = \bigcup \{V \in \mathcal{O} \mid V \subset S\}.$$

- (2) Der *Abschluss von  $S$*  ist die kleinste in  $M$  abgeschlossene Obermenge von  $S$ , nämlich

$$\overline{S} = \bigcap \{M \setminus V \mid V \in \mathcal{O} \text{ mit } S \subset M \setminus V\}.$$

Da „offen“ und „abgeschlossen“ komplementär zueinander sind, gilt

$$M \setminus \overset{\circ}{S} = \overline{M \setminus S} \quad \text{und} \quad M \setminus \overline{S} = (M \setminus S)^\circ.$$

- (3) Der (*topologische*) *Rand von  $S$*  ist definiert als

$$\partial S = \overline{S} \setminus \overset{\circ}{S}.$$

- (4) Es sei  $T \subset S$  eine weitere Teilmengen. Dann heißt  $T$  *dicht* in  $S$ , wenn jede Umgebung  $U$  von jedem Punkt  $p \in S$  mindestens einen Punkt aus  $T$  enthält. Das gilt genau dann, wenn  $S \subset \overline{T}$ . Dieser und die folgenden Begriffe sind auch im Fall  $S = M$  noch interessant.
- (5) Wie in Definition 3.10 nennen wir  $p \in M$  einen *Häufungspunkt von  $S$* , wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt.

- Jede Umgebung  $U$  von  $p$  enthält einen Punkt von  $S \setminus \{p\}$ .
- Die Teilmenge  $\overline{S \setminus \{p\}}$  liegt dicht in  $S$ .
- Es gilt  $p \in S \setminus \{p\}$ .

Punkte in  $S$ , die keine Häufungspunkte sind, heißen *isoliert*.

6.20. DEFINITION. Es sei  $f: M \rightarrow N$  eine Abbildung zwischen topologischen Räumen,  $p_0 \in M$  ein Häufungspunkt von  $M$ , und  $f: M \setminus \{p_0\} \rightarrow N$  eine Abbildung. Wir sagen, dass  $f$  *bei  $p_0$  gegen  $q \in N$  konvergiert*, wenn für alle Umgebungen  $U$  von  $q \in N$  die Menge  $f^{-1}(U) \cup \{p_0\}$  eine Umgebung von  $p_0$  ist.

Im Falle  $M = N = \mathbb{R}$  mit der üblichen Topologie entspricht das genau Definition 3.13. Insbesondere verlangen wir nicht, dass  $f$  bei  $p_0$  definiert ist. Wir verlangen aber nach wie vor, dass  $p_0$  ein Häufungspunkt von  $M$  ist, da ansonsten jeder Punkt  $q \in N$  Grenzwert wäre. Wenn  $p_0$  Häufungspunkt ist, muss der Grenzwert trotzdem nicht eindeutig sein. Beispielsweise ist jeder Punkt  $q \in N$  Grenzwert, wenn  $N$  die Klumpentopologie aus Beispiel 6.13 (2) trägt.

6.21. PROPOSITION. *Sei  $M$  ein topologischer Raum,  $N$  ein metrischer Raum und  $f: M \setminus \{p_0\} \rightarrow N$  eine Abbildung. Falls  $f$  bei  $p_0$  gegen  $q \in N$  konvergiert, ist  $q$  eindeutig.*

In diesem Fall nennen wir  $q$  den *Grenzwert* von  $f$  bei  $p_0$  und schreiben kurz

$$\lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = q,$$

In Definition 3.13 haben wir auch Funktionen auf Teilmengen von  $\mathbb{R}$  betrachtet. In Bemerkung 6.26 sehen wir, dass wir solche Teilmengen selbst wieder als metrische oder topologische

Räume betrachten können. Damit überträgt sich die obige Definition auch auf Funktionen oder Abbildungen, die nicht auf ganz  $M$  definiert sind.

6.22. PROPOSITION (Siehe Proposition 3.17). *Sei  $f: M \rightarrow N$  eine Abbildung zwischen topologischen Räumen und  $p_0 \in M$ .*

- (1) *Wenn  $p_0$  kein Häufungspunkt von  $M$  ist, ist  $f$  bei  $p_0$  stetig.*
- (2) *Wenn  $p_0$  Häufungspunkt von  $M$  ist, ist  $f$  genau dann bei  $p_0 \in M$  stetig, wenn*

$$\lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = f(p_0) .$$

Wenn eine Abbildung  $f: M \setminus \{p_0\} \rightarrow N$  bei  $p_0$  einen eindeutigen Grenzwert  $q$  besitzt, können wir  $f$  durch  $f(p_0) = q$  auf ganz  $M$  fortsetzen. Nach der obigen Proposition ist die neue Funktion dann bei  $p_0$  stetig.

6.23. PROPOSITION. *Es seien  $(M, d_M)$  und  $(N, d_N)$  metrische Räume und  $p \in M$ . Dann ist eine Abbildung  $f: M \rightarrow N$  genau dann im Sinne von Definition 6.2 stetig bei  $p$ , wenn sie in den metrischen Topologien auf  $M$  und  $N$  im Sinne von Definition 6.16 bei  $p$  stetig ist.*

### 6.d. Kompaktheit

Wir übertragen den Begriff der Kompaktheit aus Bemerkung 2.34 auf topologische Räume. Es gelten ähnliche Eigenschaften wie in Abschnitt 3.c, insbesondere sind Bilder folgenkompakter Räume wieder folgenkompakt. In diesem Abschnitt wollen wir auch den Grenzwertbegriff etwas vereinheitlichen. Für uns ist Kompaktheit aus einem weiteren Grund wichtig: sie erlaubt uns, im nächsten Abschnitt zu zeigen, dass alle Normen auf dem  $\mathbb{R}^n$  die gleiche Topologie induzieren.

6.24. DEFINITION. Ein topologischer Raum  $(M, \mathcal{O})$  heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge in  $M$  eine konvergente Teilfolge besitzt.

Wir sagen ab sofort „folgenkompakt“, da „kompakt“ für allgemeine topologische Räume etwas anderes bedeutet. In metrischen Räumen hat eine Folge genau dann einen Häufungspunkt, wenn sie eine konvergente Teilfolge besitzt. Dazu übertragen wir den Beweis von Proposition 2.31. Daher ist die obige Definition für metrische Räume äquivalent zu der in Bemerkung 2.34.

6.25. BEMERKUNG. In Bemerkung 6.4, Schritt (2) können wir sowohl Vollständigkeit als auch Folgenkompaktheit benutzen, um eine konvergente Teilfolge zu finden. Jeder folgenkompakte metrische Raum ist insbesondere vollständig. Somit ist Folgenkompaktheit die stärkere der beiden Eigenschaften. Sie hängt im Gegensatz zur Vollständigkeit nur von der Topologie ab.

6.26. BEMERKUNG. Um Beispiele für folgenkompakte Räume angeben zu können, führen wir zunächst Unterräume ein. Es folgen die wichtigsten Definitionen und Eigenschaften.

- (1) Es sei zunächst  $(M, d_M)$  ein metrischer Raum und  $S \subset M$ . Dann können wir  $d_S = d_M|_{S \times S}$  als Metrik auf  $S$  verstehen. Wir nennen  $d_S$  die *von  $d_M$  induzierte Metrik* auf  $S$ .
- (2) Es sei jetzt  $(M, \mathcal{O}_M)$  ein topologischer Raum und  $S \subset M$  eine Teilmenge. Dann definieren wir die *Unterraum- oder Relativtopologie* auf  $S$  durch

$$\mathcal{O}_S = \{ V \cap S \mid V \in \mathcal{O}_M \} .$$

Die Axiome aus Definition 6.11 lassen sich leicht überprüfen.

- (3) Wenn  $(M, d_M)$  ein metrischer Raum ist und  $S \subset M$ , erhalten wir die gleiche Topologie auf  $S$ , indem wir die metrische Topologie zur induzierten Metrik  $d_S$  bilden, und indem wir die Unterraumtopologie zur metrischen Topologie auf  $M$  betrachten.
- (4) Bezüglich der Unterraumtopologie (oder -Metrik) ist die Inklusion  $\iota: S \rightarrow M$  stetig. Daraus folgt insbesondere, dass die Einschränkung einer stetigen Abbildung  $f: M \rightarrow N$  auf  $S$  wieder stetig ist, denn es gilt  $f|_S = f \circ \iota$ .

- (5) Es sei  $N$  ein weiterer metrischer oder topologischer Raum. Dann ist eine Abbildung  $f: N \rightarrow S$  genau dann stetig, wenn die Verkettung  $\iota \circ f: N \rightarrow M$  stetig ist.
- (6) Es sei  $S \subset M$ . Dann konvergiert eine Folge  $(p_n)_n$  in  $S$  genau dann bezüglich der Unterraumtopologie auf  $S$  gegen  $q \in S$ , wenn sie in  $M$  gegen  $q$  konvergiert.
- (7) Es sei  $R \subset S$  eine weitere Teilmenge. Dann stimmt die Unterraumtopologie von  $R \subset M$  mit der Unterraumtopologie von  $R \subset S$  überein.

Tatsächlich beschreiben die Eigenschaften (4) und (5) die Unterraumtopologie bereits vollständig (nicht jedoch die Metrik). In einer Topologie-Vorlesung heißt das die *universelle Eigenschaft* der Unterraumtopologie.

Obwohl die Topologien eng zusammenhängen, muss eine Teilmenge von  $S$ , die in der Unterraumtopologie offen ist, im umgebenden Raum nicht offen sein.

6.27. BEISPIEL. In der Unterraumtopologie von  $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$  sind genau die Intervalle der Form  $[-1, 1]$ ,  $(a, 1]$ ,  $[-1, b)$  und  $(a, b)$  offen, jeweils für  $-1 \leq a \leq b \leq 1$ . Zum Vergleich: in  $\mathbb{R}$  selbst ist davon nur  $(a, b)$  offen.

6.28. FOLGERUNG (aus Proposition 6.15). *Es sei  $K$  ein folgenkompakter topologischer Raum und  $A \subset K$  eine abgeschlossene Teilmenge. Dann ist  $A$  mit der Unterraumtopologie folgenkompakt.*

6.29. BEISPIEL. Sei  $d$  der Euklidische Abstand auf  $(\mathbb{R}^n, d)$ . Nach dem Satz 2.32 von Bolzano-Weierstraß und Proposition 2.43 ist eine Teilmenge  $K \subset \mathbb{R}^n$  genau dann folgenkompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

6.30. BEMERKUNG. Folgenkompakte metrische Räume  $(M, d)$  sind stets beschränkt in dem Sinne, dass es  $p \in M$  und  $r > 0$  gibt, so dass  $B_r(p) = M$  gilt. Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Zum Beispiel hat der Raum  $C^0(\mathbb{R})$  mit der Supremumsmetrik bezüglich der Supremumsmetrik beschränkte Teilmengen, die nicht folgenkompakt sind.

Die folgende Proposition entspricht Satz 3.32 und Folgerung 3.33.

6.31. PROPOSITION. *Es sei  $(M, \mathcal{O}_M)$  ein folgenkompakter topologischer Raum.*

- (1) *Es sei  $(N, \mathcal{O}_N)$  ein weiterer topologischer Raum und  $f: M \rightarrow N$  stetig. Dann ist das Bild  $\text{im}(f) \subset N$  in der Unterraumtopologie folgenkompakt.*
- (2) *Es sei  $f: N \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann nimmt  $f$  das Minimum und das Maximum an.*

6.32. BEMERKUNG. Manchmal kann man einen topologischen Raum  $M$  injektiv in einen etwas größeren topologischen Raum  $K$  abbilden, mit folgenden Eigenschaften.

- (1) Die Unterraumtopologie auf  $M \subset K$  ist die ursprüngliche Topologie auf  $M$ .
- (2) Der Raum  $K$  ist folgenkompakt. Also hat jede Folge in  $M$  eine in  $K$  konvergente Teilfolge.
- (3) Als Teilmenge von  $K$  ist  $M$  dicht. Also ist jeder Punkt von  $K$  ein Häufungspunkt von  $M$ .

In diesem Fall nennt man  $K$  eine *Kompaktifizierung* von  $M$ . Falls etwa  $M \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt ist, ist der Abschluss  $\bar{M} \subset \mathbb{R}^n$  eine Kompaktifizierung.

Wenn man ein analytisches Problem nach dem Schema in Bemerkung 6.4 lösen möchte, muss man manchmal zu einer Kompaktifizierung übergehen, um eine konvergente Teilfolge zu finden. In diesem Fall war der ursprüngliche Raum  $M$  möglicherweise zu klein.

Zum Schluss betrachten wir zwei spezielle Kompaktifizierungen. Wir können beide später benutzen, um manche Argumente zu vereinfachen, oder wenigstens zu vereinheitlichen.

6.33. BEISPIEL. Wir konstruieren eine Kompaktifizierung von  $\mathbb{R}$  in mehreren Schritten.

- (1) Das abgeschlossene Intervall  $[-1, 1]$  ist folgenkompakt, und  $(-1, 1) \subset [-1, 1]$  liegt dicht und trägt die Unterraumtopologie. Also ist  $[-1, 1]$  eine Kompaktifizierung des offenen Intervalls  $(-1, 1)$ .

- (2) Die Funktion  $\tanh: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$  ist stetig, monoton und bijektiv. Nach dem Umkehrsatz 3.28 ist sie ein Homöomorphismus. Als topologische Räume sind  $\mathbb{R}$  und  $(-1, 1)$  also „gleich“ (jede andere stetige, monotone, surjektive Funktion hätte es auch getan).

In beiden Fällen kommt die Topologie von der Metrik, aber die Metriken unterscheiden sich drastisch. Das Intervall  $(-1, 1)$  ist beschränkt (denn  $d_{|(-1,1)^2}$  nimmt Werte im endlichen Intervall  $[0, 2)$  an),  $\mathbb{R}$  jedoch nicht. Dafür ist  $\mathbb{R}$  vollständig,  $(-1, 1)$  jedoch nicht.

- (3) Mit (1) und (2) können wir  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$  aus Abschnitt 2.b mit  $[-1, 1]$  identifizieren. Dazu betrachten wir die Abbildung  $\iota: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$  mit

$$\iota(x) = \begin{cases} \tanh x & \text{falls } x \in \mathbb{R}, \text{ und} \\ \pm 1 & \text{falls } x = \pm\infty. \end{cases}$$

Da  $\iota$  bijektiv ist, erhalten wir auf  $\overline{\mathbb{R}}$  eine Topologie

$$\mathcal{O} = \{ \iota^{-1}(V) \mid V \subset [-1, 1] \text{ offen in der Unterraumtopologie von } [-1, 1] \subset \mathbb{R} \}.$$

Dadurch wird  $\overline{\mathbb{R}}$  zu einer Kompaktifizierung von  $\mathbb{R}$ .

- (4) Jetzt können wir die uneigentlichen Grenzwerte aus den Definitionen 2.24 und 4.23 als „gewöhnliche“ Grenzwerte auffassen. Das erspart uns die eine oder andere Fallunterscheidung.

6.34. BEISPIEL. Wir betrachten  $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  als abgeschlossene Teilmenge von  $\overline{\mathbb{R}}$  mit der Unterraumtopologie. Dadurch wird  $\overline{\mathbb{N}}$  zu einer Kompaktifizierung von  $\mathbb{R}$ . Wir fassen das in einem Diagramm zusammen:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N} & \hookrightarrow & \mathbb{R} & \xrightarrow{\tanh} & (-1, 1) \\ \downarrow & & \downarrow & \cong & \downarrow \\ \overline{\mathbb{N}} & \hookrightarrow & \overline{\mathbb{R}} & \xrightarrow{\cong} & [-1, 1]. \end{array}$$

Die Unterraumtopologie auf  $\overline{\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}$  wird gegeben durch

$$\mathcal{O} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \{ V \subset \overline{\mathbb{N}} \mid \overline{\mathbb{N}} \setminus V \text{ endlich} \}.$$

Sei jetzt  $(p_n)_n$  eine Folge in einem beliebigen topologischen Raum  $M$ , und sei  $q \in M$  ein weiterer Punkt. Wir definieren eine Abbildung  $f: \overline{\mathbb{N}} \rightarrow M$  durch

$$f(x) = \begin{cases} p_n & \text{falls } x = n \in \mathbb{N}, \text{ und} \\ q & \text{falls } x = \infty. \end{cases}$$

Da  $\infty$  der einzige Häufungspunkt von  $\overline{\mathbb{N}}$  ist, konvergiert  $p_n$  genau dann gegen  $q$ , wenn  $f$  stetig ist.

Beispielsweise folgt mit diesem Trick in Bemerkung 6.26 Aussage (6) aus (5). Als weitere Anwendung dieser Technik betrachten wir ein Analogon von Proposition 3.6.

6.35. PROPOSITION (Folgenstetigkeit). *Es sei  $f: M \rightarrow N$  eine Abbildung zwischen topologischen Räumen.*

- (1) *Wenn  $f$  bei  $p$  stetig ist, ist  $f$  auch folgenstetig bei  $p$ , das heißt, für jede Folge  $(p_n)_n$  in  $M$  mit Grenzwert  $p$  konvergiert  $(f(p_n))_n$  gegen  $f(p)$ .*
- (2) *Wenn  $M$  ein metrischer Raum ist, gilt auch die Umkehrung.*

Wir können manche Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen auf diese Proposition zurückführen, Beispielsweise gilt nach Proposition 2.43 für eine Folge  $((a_n, b_n))_n$  in  $\mathbb{R}^2$ , dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n) = (a, b) \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \quad \iff \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

Also sind Proposition 2.12 (1), (2) gleichbedeutend damit, dass Addition und Multiplikation als Abbildungen  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind.

Die letzte Proposition in diesem Abschnitt hilft uns später beim Umgang mit Parameter-abhängigen Integralen.

**6.36. PROPOSITION (Gleichmäßige Stetigkeit auf Kompakta).** *Es seien  $M, N$  metrische Räume und  $f: M \rightarrow N$  stetig. Wenn  $M$  kompakt ist, ist  $f$  sogar gleichmäßig stetig.*

Wir beachten, dass bei gleichmäßiger Stetigkeit die Zahlen  $\varepsilon > 0, \delta > 0$  unabhängig von den jeweiligen Punkten in  $M$  und  $N$  betrachtet werden. Daher benötigt dieser Begriff eine vorgegebene Metrik — die Topologie allein reicht nicht aus. Wenn  $M$  nicht kompakt ist, kann es Metriken geben, bezüglich derer  $f$  gleichmäßig stetig ist, und andere, für die das nicht stimmt.

Wir werden in Abschnitt 10.b noch einmal auf Kompaktheit zurückkommen.

### 6.e. Normen und Äquivalenz von Normen

Die meisten Metriken in dieser Vorlesung kommen von Normen auf Vektorräumen her; diesen Begriff führen wir gleich ein. Im Allgemeinen hängt die zugehörige Topologie (und damit unser Konvergenz- und Stetigkeitsbegriff) stark von der gewählten Norm ab. Für endlich-dimensionale Vektorräume, also insbesondere für den  $\mathbb{R}^n$ , gilt das jedoch nicht.

Die folgende Definition ist inspiriert von Bemerkung 2.2 über den Absolutbetrag.

**6.37. DEFINITION.** Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Eine *Norm* auf  $V$  ist eine Abbildung  $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$  mit den folgenden Eigenschaften für alle  $x, y \in V$  und alle  $r \in \mathbb{k}$ .

(1) *Positivität.* Es gilt

$$\|x\| \geq 0 \quad \text{und} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0 .$$

(2) *Homogenität.* Es gilt

$$\|rx\| = |r| \cdot \|x\| .$$

(3) *Subadditivität.* Es gilt

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

Beispiele sind neben dem Absolutbetrag auf  $\mathbb{k}$  aus Definition 2.1 beziehungsweise Bemerkung 2.47 (4) die Euklidische Norm aus Abschnitt 2.d und die Supremumsnorm aus Bemerkung 3.38.

**6.38. PROPOSITION.** *Sei  $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$  eine Norm auf einem  $\mathbb{k}$ -Vektorraum  $V$ , dann induziert  $\|\cdot\|$  eine Metrik  $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  durch*

$$d(v, w) = \|w - v\| \quad \text{für alle } v, w \in \mathbb{k}$$

und somit auch eine Topologie auf  $V$ .

Zwei Normen sollen „äquivalent“ heißen, wenn sie die gleiche Topologie induzieren. Das heißt, Begriffe wie Konvergenz und Stetigkeit bedeuten für äquivalente Normen das gleiche.

**6.39. PROPOSITION.** *Es seien  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  zwei Normen auf einem Vektorraum  $V$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *Die Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  induzieren die gleiche Topologie.*

(2) *Es gibt Konstanten  $0 < c \leq C$ , so dass für alle  $v \in V$  gilt*

$$c \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C \|v\|_1 .$$

Wir machen die zweite Aussage zur Definition.

6.40. DEFINITION. Zwei Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  auf einem Vektorraum  $V$  heißen *äquivalent*, wenn es Konstanten  $0 < c \leq C$  gibt, so dass für alle  $v \in V$  gilt

$$c \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C \|v\|_1 .$$

Mit Hilfe der obigen Proposition sieht man sofort, dass Äquivalenz von Normen eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen definiert.

6.41. SATZ. *Es sei  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann sind alle Normen auf  $\mathbb{k}^n$  zueinander äquivalent.*

Insbesondere induzieren alle Normen auf  $\mathbb{k}^n$  die gleiche metrische Topologie, und wir werden  $\mathbb{k}^n$  immer mit dieser Topologie betrachten, solange wir nichts anderes sagen.

6.42. BEISPIEL. Wir betrachten auf  $\mathbb{R}^n$  die folgenden drei Normen.

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |x_1| + \cdots + |x_n| , \\ \|x\|_2 &= \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} , \\ \|x\|_\infty &= \sup\{|x_1|, \dots, |x_n|\} . \end{aligned}$$

In den Übungen sehen wir, dass das alles Normen sind. Wir können für jedes Paar der obigen Normen Konstanten  $0 < c_n \leq C_n$  wie in Definition 6.40 in Abhängigkeit von  $n$  bestimmen. Dann beobachten wir, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{C_n} = 0 .$$

Das heißt, für jedes  $n$  kann man je zwei der obigen Normen vergleichen, aber der Vergleich wird mit großen  $n$  immer „ungenauer“.

Für die Analysis im  $\mathbb{R}^n$  ist es gut zu wissen, dass Stetigkeit und Grenzwerte nicht von der gewählten Norm abhängen. Auf unendlich-dimensionalen Vektorräumen gilt das nicht: dort kann es viele verschiedene Äquivalenzklassen von Normen geben.

6.43. BEISPIEL. Es sei  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall. Wir definieren die  $L^2$ -Norm auf  $C^0(I)$  durch

$$\|f\|_{L^2}^2 = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{für alle } f \in C^0(I) .$$

Sie ist nicht nur Supremumsnorm äquivalent (Übung).

6.44. FOLGERUNG. *Es sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  und  $V$  ein  $\mathbb{k}$ -Vektorraum mit einer Norm  $\|\cdot\|_V$ . Dann ist jede lineare Abbildung  $f: \mathbb{k}^n \rightarrow V$  stetig.*

6.45. BEMERKUNG. Im nächsten Kapitel betrachten wir Abbildungen  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , wobei  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Es sei  $\pi_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  die Projektion auf die  $i$ -te Komponente, das heißt, es gelte  $\pi_i(y) = y_i$ , oder äquivalent

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1(y) \\ \vdots \\ \pi_m(y) \end{pmatrix} .$$

Dann bezeichne  $f_i = \pi_i \circ f$  die  $i$ -te *Komponentenfunktion* von  $f$ , so dass

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} .$$

Solange es um Fragen wie Stetigkeit oder Differenzierbarkeit geht, reicht es, sich die Komponentenfunktionen einzeln anzuschauen. Das liegt an den folgenden Eigenschaften des  $\mathbb{R}^m$ , die für alle topologischen Räume  $M$ , alle  $p \in M$  und alle Abbildungen  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  gelten.

- (1) Die Projektionen  $\pi_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  sind stetig.
- (2) Eine Abbildung  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist genau dann bei  $p \in M$  stetig, wenn alle Komponentenfunktion  $f_i = \pi_i \circ f$  für  $i = 1, \dots, m$  bei  $p$  stetig sind.
- (3) Eine Abbildung  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist genau dann stetig, wenn alle Komponentenfunktionen stetig sind.
- (4) Sei  $p_0 \in M$  ein Häufungspunkt und  $y \in \mathbb{R}^m$ . Dann gilt

$$\lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = y \quad \iff \quad \text{für alle } i = 1, \dots, m \text{ gilt } \lim_{p \rightarrow p_0} f_i(p) = y_i .$$

Ähnlich wie in Bemerkung 6.26 wird wegen der Eigenschaften (1) und (2) (oder (1) und (3)) die Topologie auf  $\mathbb{R}^m$  eindeutig durch die Topologie auf  $\mathbb{R}$  bestimmt. Die anderen Eigenschaften ergeben sich daraus. Man nennt  $\mathbb{R}^m$  das Produkt der topologischen Räume  $\mathbb{R}, \dots, \mathbb{R}$ , und (1) und (3) heißen *universelle Eigenschaft* der Produkttopologie.

## 6.f. Zusammenhang

Als letzten Begriff betrachten wir den Zusammenhang topologischer Räume. In der Analysis trifft man manchmal auf Klassen „starrer“ Funktionen. Den Extremfall bilden differenzierbare Funktionen mit verschwindender Ableitung: kennt man eine solche Funktion an einem Punkt eines Intervalls, dann kennt man sie auf dem ganzen Intervall. Aber wenn die Funktion auf zwei disjunkten Intervallen definiert ist, könnte sie auf beiden Intervallen verschiedene Werte annehmen. Der Identitätssatz 5.38 ist ebenfalls eine Starrheitsaussage. In Beispiel 5.39 haben wir ihn „ausgetrickst“, um Funktionen zu basteln, die sich auf verschiedenen Teilintervallen von  $\mathbb{R}$  unterschiedlich verhalten. In diesem Abschnitt geht es jetzt um ein passendes mehrdimensionales Analogon des Begriffs „Intervall“. Wir suchen also Mengen, auf denen Starrheitsaussagen möglich sind wie im Eindimensionalen auf Intervallen.

6.46. DEFINITION. Es sei  $M$  ein topologischer Raum. Wir nennen  $M$

- (1) *zusammenhängend*, wenn es keine zwei offenen Mengen  $U, V \subset M$  gibt, so dass

$$U \cup V = M, \quad U \cap V = \emptyset, \quad \text{und} \quad U \neq \emptyset \neq V .$$

- (2) *wegzusammenhängend*, wenn es zu jedem Paar von Punkten  $p, q \in M$  eine stetige Abbildung  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  mit  $\gamma(a) = p$  und  $\gamma(b) = q$  gibt.

Eine Abbildung  $\gamma$  wie in (2) heißt *Weg von  $p$  nach  $q$* .

6.47. BEISPIEL. Intervalle sind zusammenhängend und wegzusammenhängend.

Beide Arten von Zusammenhang bleiben unter stetigen Abbildungen erhalten.

6.48. PROPOSITION. *Es sei  $f: M \rightarrow N$  eine stetige Abbildung. Wenn  $M$  (weg-) zusammenhängend ist, dann ist auch im  $f \subset N$  in der Unterraumtopologie (weg-) zusammenhängend.*

6.49. FOLGERUNG. *Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.*

6.50. BEMERKUNG. Die Umkehrung gilt nicht, dazu betrachte man die folgende abgeschlossene Teilmenge der Ebene  $\mathbb{R}^2$ .

$$\left( \{0\} \times [-1, 1] \right) \cup \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid x > 0 \right\} .$$

Für offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  bedeuten „zusammenhängend“ und „wegzusammenhängend“ das gleiche, aber das wollen wir hier nicht zeigen.

## KAPITEL 7

### Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

In diesem Kapitel wollen wir die Ergebnisse aus Kapitel 4 ins Mehrdimensionale übertragen. Zur Motivation betrachten wir eine Landkarte mit Höhenlinien und stellen uns die zugehörige Landschaft als krumme Fläche im  $\mathbb{R}^3$  vor. Wenn es keine Höhlen, Felsüberhänge oder ähnliches gibt, können wir eine Funktion  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , die Höhe, angeben, und erhalten den Graphen

$$\text{Gr}(h) = \{ (x, y, h(x, y)) \mid (x, y \in \mathbb{R}^2) \} \subset \mathbb{R}^3 .$$

In Analysis I haben wir Ableitung als Tangentensteigung definiert. Eine naheliegende Verallgemeinerung wäre in unserer Situation eine Ebene im  $\mathbb{R}^3$  tangential an den Graphen von  $h$  im Punkt  $(x, y, h(x, y))$ . Die Steigung dieser Ebene wäre dann die „totale“ Ableitung von  $h$  an der Stelle  $(x, y)$ . Sie besteht aus den Steigungen in  $x$ - und in  $y$ -Richtung, den „partiellen“ Ableitungen. Wenn wir aber in einer bergigen Gegend wandern gehen, interessiert uns statt dessen die Steigung in die Richtung, in die wir gerade laufen, eine „Richtungsableitung“. Diese drei Ableitungsbegriffe werden wir uns anschauen. Besonders schön sind Funktionen, deren partielle Ableitungen stetig sind, denn für sie hängen alle obigen Begriffe zusammen. Auf der anderen Seite braucht man später für schwierigere Probleme den Begriff der „schwachen Ableitung“. Ihn können wir hier nicht einführen, da er auf mehrdimensionaler Integration beruht, die erst in Analysis III zum Thema wird.

Wenn wir Punkte ohne Steigung in unserer Landschaft finden, können wir — wie im Eindimensionalen — fragen, ob es sich um (lokale) Extremstellen handelt. Dazu brauchen wir höhere Ableitungen, und auch ein Begriff wie Konvexität kann hilfreich sein. Schließlich können wir versuchen, unsere Höhe  $h(x, y)$  durch ein Polynom in den Variablen  $x$  und  $y$  anzunähern und erhalten den Satz von Taylor auch im Mehrdimensionalen.

Wir können uns auch fragen, wie wir die Höhenlinien  $h^{-1}(\{c\})$  auf der Landkarte bestimmen können, wenn wir nur  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  kennen. Dort, wo sie ungefähr in Ost-West-Richtung verlaufen, wollen wir sie als Graphen von Funktionen auf der  $x$ -Achse beschreiben, dort, wo sie eher nord-südlich verlaufen, als Graph von Funktionen auf der  $y$ -Achse. Hierbei hilft der Satz über implizite Funktionen, den wir aus einem mehrdimensionalen Umkehrsatze herleiten werden. Zu guter Letzt lernen wir in diesem Kapitel auch ein Verfahren kennen, um lokale Extrema von Funktionen auf derartigen Kurven oder Flächen zu bestimmen, wie etwa den nördlichsten Punkt auf einer Höhenlinie.

#### 7.a. Die Ableitung

Gegeben sei zunächst eine Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . In Proposition 4.3 haben wir drei äquivalente Formulierungen von Differenzierbarkeit gefunden. Wir wollen sie als Ansatz nehmen, um die „gesamte“ Funktion an einer gegebenen Stelle  $p \in \mathbb{R}^n$  abzuleiten. Wenn wir die ersten zwei Varianten naiv in unsere jetzige Situation übertragen, müssten wir einen Differenzenquotienten der Form  $\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$  betrachten. Im Zähler steht ein Vektor im  $\mathbb{R}^m$ , im Nenner einer im  $\mathbb{R}^n$ , und einen derartigen Bruch können wir im Allgemeinen nicht sinnvoll definieren.

Als Ausweg betrachten wir Variante 4.3 (3), bei der nur durch den Betrag  $\|x - p\|$  zu dividieren ist, und einen Vektor kann man durch einen Skalar dividieren. Das geht am Besten, wenn wir die Ableitung als lineare Abbildung  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  oder als  $m \times n$ -Matrix schreiben, so dass im Zähler

nur Vektoren im  $\mathbb{R}^m$  stehen. Da außerdem der Quotient im Grenzwert verschwinden soll, ist es wegen Satz 6.41 egal, welche Norm wir dazu benutzen.

7.1. DEFINITION. Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $p \in U$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung. Dann heißt  $f$  *total differenzierbar bei  $p$* , wenn es eine lineare Abbildung  $d_p f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , die *totale Ableitung von  $f$  and der Stelle  $p$*  gibt, so dass

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p) - d_p f(x - p)}{\|x - p\|} = 0.$$

Wenn das für alle  $p \in U$  gilt, heißt  $f$  *total differenzierbar* mit *totaler Ableitung*  $df: U \rightarrow M_{m,n}(\mathbb{R})$ .

Da  $U$  offen ist, existiert  $r > 0$ , so dass  $B_r(p) \subset U$ . Insbesondere ist  $p$  Häufungspunkt, und wir dürfen nach einem Grenzwert fragen. Wir identifizieren lineare Abbildungen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $m \times n$ -Matrizen, so dass  $d_p f$  einfach der Wert von  $df$  bei  $p$  ist, falls  $f$  auf ganz  $U$  total differenzierbar ist.

7.2. BEISPIEL. Eine allgemeine lineare (streng genommen affine) Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  hat die Gestalt  $f(x) = Ax + b$ , mit  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  und  $b \in \mathbb{R}^m$ . Sie ist total differenzierbar mit Ableitung  $d_p f = A$ .

Da andere Beispiele mit Hilfe der obigen Definition etwas mühsam auszurechnen sind, verschieben wir sie auf den nächsten Abschnitt.

7.3. BEMERKUNG. Wir können totale Differenzierbarkeit bei  $p$  äquivalent mit einem Landau-Symbol beschreiben durch

$$f(x) = f(p) + d_p f(x - p) + o(\|x - p\|).$$

Das ist bereits die Taylorentwicklung erster Ordnung mit Peano-Restglied wie in Satz 5.40 (1), siehe auch Bemerkung 5.44 (1); mehr dazu später in Satz 7.21.

Die Räume  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  spielen völlig unterschiedliche Rollen. Wie in Bemerkung 6.45 können wir anstelle von  $f$  die Komponentenfunktionen  $f_1, \dots, f_m: U \rightarrow \mathbb{R}$  einzeln betrachten. Die Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  wollen wir hingegen einstweilen nicht antasten.

7.4. PROPOSITION. *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $p \in U$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung.*

- (1) *Wenn  $f$  bei  $p$  total differenzierbar ist, ist die totale Ableitung eindeutig.*
- (2) *Wenn  $f$  bei  $p$  total differenzierbar ist, ist  $f$  bei  $p$  stetig.*
- (3) *Die Abbildung  $f$  ist genau dann total differenzierbar bei  $p$ , wenn die Komponentenfunktionen  $f_1, \dots, f_m: U \rightarrow \mathbb{R}$  total differenzierbar sind. In diesem Fall ist die totale Ableitung  $df_{i,p}$  von  $f_i$  bei  $p$  die  $i$ -te Zeile von  $d_p f$ .*

7.5. SATZ (Kettenregel). *Es seien  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $p \in \mathbb{R}^n$  und  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  und  $g: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  seien Abbildungen, so dass  $im\ g \subset V$ . Wenn  $g$  bei  $p$  und  $f$  bei  $g(p)$  total differenzierbar sind, dann ist auch  $f \circ g: U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  total differenzierbar, und es gilt*

$$d(f \circ g)_p = d_{g(p)} f \circ d_p g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell.$$

Da die totalen Abbildungen  $d_{g(p)} f$  und  $d_p g$  lineare Abbildungen oder Matrizen, aber im Allgemeinen nicht bloß Zahlen sind, kommt es auf der rechten Seite auf die Reihenfolge an.

Mit Hilfe der Kettenregel kann man viele andere Rechenregeln zeigen. Man erhält sogar für die eindimensionalen Spezialfälle in Proposition 4.6 neue Beweise. Wegen Proposition 7.4 reicht es, reellwertige Funktionen zu betrachten.

7.6. FOLGERUNG. Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $p \in U$ , und  $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$  bei  $p$  total differenzierbar. Dann gilt

$$(1) \quad d_p(f + g) = d_p f + d_p g,$$

$$(2) \quad d_p(fg) = f(p) d_p g + g(p) d_p f$$

$$(3) \quad \text{und} \quad d_p\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g(p)^2} (g(p) d_p f - f(p) d_p g), \quad \text{falls } g(p) \neq 0.$$

Selbstverständlich gilt das alles auf ganz  $U$ , wenn  $f$  und  $g$  auf ganz  $U$  total differenzierbar sind.

7.7. BEMERKUNG. Wir formulieren ein allgemeines Prinzip aus dem Beweis der obigen Folgerung. Immer, wenn eine Variable  $x \in \mathbb{R}^n$  mehrfach in einem Ausdruck auftritt, den wir ableiten wollen, können wir für jedes einzelne Vorkommen von  $x$  eine neue Variable einführen. Die so erhaltene Abbildung verketteten wir mit einer Abbildung, die einfach  $x$  abbildet auf  $(x, \dots, x)$ , so dass die Verkettung den ursprünglichen Ausdruck ergibt. Anschließend leiten wir mit der Kettenregel ab. Das ist so, als hätten wir nach jedem einzelnen „ $x$ “ im ursprünglichen Ausdruck separat abgeleitet.

7.8. BEISPIEL. Unter der Annahme, dass Ableitung und Integration bei festen Intervallgrenzen vertauschen (mehr dazu später) gilt

$$\frac{d}{dx} \int_0^x xt \, dt = xt|_{t=x} + \int_0^x t \, dt = x^2 + \frac{x^2}{2} = \frac{3}{2} x^2.$$

Mit Hilfe der Stammfunktion  $\int xt \, dt = \frac{xt^2}{2}$  erhalten wir ebenfalls

$$\frac{d}{dx} \int_0^x xt \, dt = \frac{d}{dx} \left( \frac{x^3}{2} \right) = \frac{3}{2} x^2.$$

## 7.b. Partielle Ableitungen und Richtungsableitungen

Es gibt eine einfachere Art und Weise, eine Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit Methoden der Analysis I abzuleiten. Dazu schränken wir die Funktion auf eine Gerade im  $\mathbb{R}^n$  ein und erhalten einen eindimensionalen Definitionsbereich. Wie im letzten Abschnitt können wir außerdem die Komponentenfunktionen einzeln betrachten. Das ist zwar konzeptuell nicht so schön wie totale Differenzierbarkeit, aber viel praktischer zum Rechnen. Am Ende des Abschnitts zeigen wir, dass stetige Differenzierbarkeit alle obigen Ableitungsbegriffe impliziert.

7.9. DEFINITION. Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $p \in U$  und  $v \in \mathbb{R}^n$ . Die Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt *differenzierbar bei  $p$  in Richtung  $v$* , wenn die Funktion  $t \mapsto f_i(x + tv)$  bei  $t = 0$  differenzierbar ist. Dann heißt

$$\partial_v f(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p + tv)$$

die Richtungsableitung von  $f$  bei  $p$  in Richtung  $v$ .

Wenn  $f$  bei  $p$  in Richtung der Einheitsvektoren  $e_1, \dots, e_n$  differenzierbar ist, heißt  $f$  bei  $p$  *partiell differenzierbar*, und  $\partial_j f(p) = \partial_{e_j} f(p)$  heißt die  *$j$ -te partielle Ableitung von  $f$  bei  $p$* . Wenn  $f$  an allen Stellen  $p \in U$  partiell differenzierbar ist, heißt  $f$  *partiell differenzierbar*.

Wenn  $f$  partiell differenzierbar ist, sind die partiellen Ableitungen Abbildungen  $\partial_j f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit den Komponentenfunktionen  $\partial_j f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ . Wichtig ist, dass wir für partielle und Richtungsableitungen ein „rundes“  $\partial$  und für die totale Ableitung ein „gewöhnliches“  $d$  verwenden.

Manchmal nennen wir die Koordinaten des  $\mathbb{R}^n$  nicht  $x_1, \dots, x_n$ , sondern  $x, y$  ( $n = 2$ ) oder  $x, y, z$  ( $n = 3$ ). In diesem Fall schreiben wir  $\partial_x f, \partial_y, \partial_z f$  anstelle von  $\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f$ . Andere Notationen sind zum Beispiel  $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_p$  für  $\partial_i f(p)$  oder  $\frac{\partial f}{\partial x}|_p$  für  $\partial_x f(p)$ , immer mit rundem  $\partial$ .

Proposition 7.4 (3) gilt analog. Und da wir es mit eindimensionalen Differentialen zu tun haben, überträgt sich auch Proposition 4.6.

7.10. FOLGERUNG. *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $p \in U$  und  $v \in \mathbb{R}^n$ .*

- (1) *Die Richtungsableitung  $\partial_v f(p)$  existiert genau dann, wenn die Richtungsableitungen  $\partial_v f_i(p)$  aller Komponentenfunktionen existieren. In diesem Fall gilt*

$$\partial_v f(p) = \begin{pmatrix} \partial_v f_1(p) \\ \vdots \\ \partial_v f_m(p) \end{pmatrix}.$$

- (2) *Es seien  $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$  bei  $p$  in Richtung  $v$  differenzierbar. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \partial_v(f+g)(p) &= \partial_v f(p) + \partial_v g(p), \\ \partial_v(fg)(p) &= f(p) \partial_v g(p) + g(p) \partial_v f(p) \\ \text{und} \quad \partial_v\left(\frac{f}{g}\right)(p) &= \frac{g(p) \partial_v f(p) - f(p) \partial_v g(p)}{g(p)^2}, \quad \text{falls } g(p) \neq 0. \end{aligned}$$

Die analogen Aussagen gelten auch für die partiellen Ableitungen.

7.11. BEMERKUNG. Wir vergleichen die Differenzierbarkeitsbegriffe.

- (1) Wenn  $f$  bei  $p$  total differenzierbar ist, dann ist  $f$  wegen der Kettenregel 7.5 bei  $p$  partiell differenzierbar, und die totale Ableitung  $d_p f$  wird gegeben durch die *Jacobi-Matrix* von  $f$  bei  $p$ , nämlich

$$d_p f = (\partial_j f_i(p))_{i,j} \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(p) & \cdots & \partial_n f_1(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(p) & \cdots & \partial_n f_m(p) \end{pmatrix}.$$

- (2) Wenn  $f$  bei  $p$  total differenzierbar ist, dann ist  $f$  bei  $p$  ebenfalls wegen der Kettenregel in jeder Richtung  $v \in \mathbb{R}^n$  differenzierbar, und man erhält die Richtungsableitung durch Matrixmultiplikation der Jacobi-Matrix mit dem Richtungsvektor  $v$ , also

$$\partial_v f(p) = d_p f \cdot v.$$

- (3) Eine partiell differenzierbare Funktion muss nicht stetig sein. Als Beispiel (Übung) betrachte  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq 0 \in \mathbb{R}^2, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } (x, y) = 0. \end{cases}$$

Wegen Proposition 7.4 (2) ist  $f$  bei 0 auch nicht total differenzierbar. Es existieren nicht einmal alle Richtungsableitungen bei 0 (Übung).

- (4) Eine Funktion, die überall in alle Richtungen differenzierbar ist, muss nicht total differenzierbar sein. Als Beispiel (Übung) betrachte  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

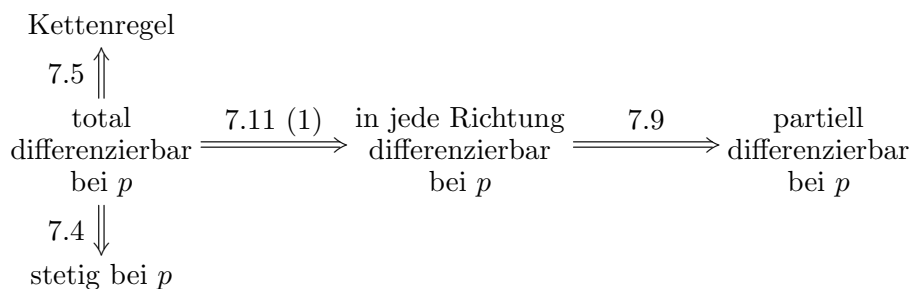
$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq 0 \in \mathbb{R}^2, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } (x, y) = 0. \end{cases}$$

- (5) Für die Kettenregel braucht man totale Differenzierbarkeit für die Funktion „links vom  $\circ$ “. Als Beispiel betrachte die obige Funktion  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und die Abbildung  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $t \mapsto (t, t)$ . Dann gilt (Übung)

$$d_{h(0)}g \cdot d_0h = (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1, \quad \text{aber} \quad d_0(g \circ h) = \frac{d}{dt}(-t) = -1.$$

Wir fassen das für eine feste Stelle  $p$  in einem kleinen Schaubild zusammen.

23. 5. 22



Der Ausweg ist aus diesem Wirrwarr verschiedener Definitionen ist eine weitere Definition.

7.12. DEFINITION. Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Eine Abbildung  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt *stetig differenzierbar*, wenn die partiellen Ableitungen  $\partial_1 f, \dots, \partial_n f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  auf ganz  $U$  existieren und stetig sind. Für den Raum der stetig differenzierbaren Funktionen schreiben wir  $C^1(U; \mathbb{R}^m)$ , beziehungsweise  $C^1(U)$  falls  $m = 1$ .

Korrekt wäre „stetig partiell differenzierbar“, aber die Bemerkung nach dem folgenden Satz rechtfertigt unsere kürzere Bezeichnung.

7.13. SATZ. *Jede stetig differenzierbare Funktion ist total differenzierbar.*

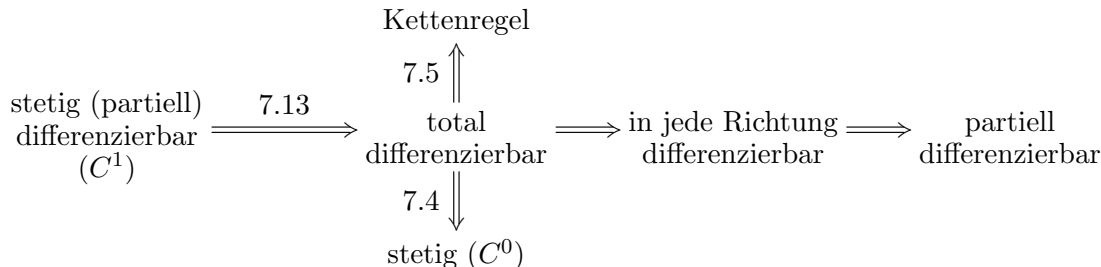
Bemerkung 7.11 (1) sagt uns dann, dass die Ableitung  $d_p f$  genau durch die Jacobi-Matrix der partiellen Ableitungen gegeben wird. Die Umkehrung des obigen Satzes gilt übrigens nicht einmal im Eindimensionalen. In den Übungen zu Analysis I hatten wir als Beispiel die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kennengelernt mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

7.14. BEMERKUNG. Insbesondere hängen die Einträge der Jacobi-Matrix  $d_p f$  stetig von  $p \in U$  ab. Da die Matrizen einen endlich-dimensionalen Vektorraum  $M_{m,n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{mn}$  bilden, erlaubt uns Bemerkung 6.45 (3), aus der Stetigkeit der (Komponenten der) partiellen Ableitungen  $\partial_j f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$  auf die Stetigkeit von  $df: U \rightarrow M_{m,n}(\mathbb{R})$  zu schließen. Wir müssen dazu noch nicht einmal eine Norm auf  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  wählen.

In der Praxis berechnet man die totale Ableitung einer Abbildung wenn möglich, indem man die partiellen Ableitungen ausrechnet und zeigt, dass sie stetig sind.

Es folgt ein Schaubild zur globalen Differenzierbarkeit.



### 7.c. Höhere Ableitungen und die Taylorformel

Die Ableitung einer Abbildung  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist eine Abbildung  $df: U \rightarrow M_{m,n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{mn}$ . Also kann  $df$  selbst wieder differenzierbar sein, und wenn das der Fall ist, können wir induktiv

höhere Ableitungen definieren. Der Einfachheit halber heiße „1-fach differenzierbar“ gerade total differenzierbar, und „1-fach stetig differenzierbar“ stetig differenzierbar.

7.15. DEFINITION. Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $k \geq 2$ . Eine Abbildung  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt *k-fach (stetig) differenzierbar*, wenn sie total differenzierbar und ihre Ableitung (stetig)  $k - 1$ -fach differenzierbar ist. Wir bezeichnen den Raum der  $k$ -fach stetig differenzierbaren Abbildungen auf  $U$  mit  $C^k(U; \mathbb{R}^m)$ , oder kurz mit  $C^k(U)$  falls  $m = 1$ .

Eine Abbildung heißt *unendlich oft differenzierbar*, wenn sie  $k$ -fach differenzierbar ist für alle  $k \in \mathbb{N}$ , und wir schreiben  $C^\infty(U; \mathbb{R}^m)$  beziehungsweise  $C^\infty(U)$  für den Raum aller unendlich oft differenzierbaren Abbildungen.

Da eine  $k$ -fach differenzierbare Funktion stetige  $(k - 1)$ -fache Ableitungen besitzt, sind unendlich oft differenzierbare Funktionen automatisch auch unendlich oft stetig differenzierbar. Wir erhalten also eine Folge von Inklusionen

$$C^0(U; \mathbb{R}^m) \supset C^1(U; \mathbb{R}^m) \supset \dots \supset C^\infty(U; \mathbb{R}^m) \quad \text{mit} \quad C^\infty(U; \mathbb{R}^m) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(U; \mathbb{R}^m).$$

Wenn  $f$  zweifach differenzierbar ist, bezeichne  $\partial_i \partial_j f$  die  $i$ -te partielle Ableitung von  $\partial_j f$ . Andere Schreibweisen sind zum Beispiel

$$\partial_i \partial_j f = \partial_{ij} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Falls  $i = j$ , schreibt man kurz

$$\partial_i^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Der folgende Satz erleichtert den Umgang mit zweiten und höheren Ableitungen sehr.

7.16. SATZ (Schwarz). *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^2(U; \mathbb{R}^m)$ . Für  $1 \leq i, j \leq n$  gilt dann*

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f.$$

Wegen Proposition 7.4 (3) brauchen wir im Beweis nur  $\mathbb{R}$ -wertige Abbildungen zu betrachten.

7.17. BEISPIEL. Es reicht nicht, dass die partiellen Ableitungen von  $f$  partiell differenzierbar sind. Dazu betrachte  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq 0, \text{ und} \\ 0 & \text{für } (x, y) = 0. \end{cases}$$

Hier sind die ersten Ableitungen  $\partial_x f$  und  $\partial_y f$  zwar stetig, aber bei  $(x, y) = 0$  nicht total differenzierbar, also erst recht nicht stetig differenzierbar, und es gilt

$$\partial_x \partial_y f(0) = 1, \quad \text{aber} \quad \partial_y \partial_x f(0) = -1.$$

25. 5. 22 Induktiv bedeutet der Satz von Schwarz für  $f \in C^k(U)$ , dass wir die Indizes  $i_1, \dots, i_k$  in  $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f$  beliebig umsortieren dürfen, ohne den Wert der Ableitung zu verändern. Es kommt also nur darauf an, wie oft wir in die Richtung eines jeden Einheitsvektors ableiten. Dazu führt man folgende Schreibweise ein.

7.18. DEFINITION. Eine *n-dimensionaler Multiindex* ist ein Element  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ . Wir definieren seinen *Grad* durch  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ . Für  $U \subset \mathbb{R}^n$  und  $f \in C^k(U)$  mit  $k \geq |\alpha|$  schreiben wir

$$\partial_\alpha f = \underbrace{\partial_1 \dots \partial_1}_{\alpha_1 \text{ mal}} \dots \underbrace{\partial_n \dots \partial_n}_{\alpha_n \text{ mal}} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Außerdem definieren wir noch

$$\begin{aligned}\alpha! &= \alpha_1! \cdots \alpha_n! , \\ \binom{|\alpha|}{\alpha} &= \frac{|\alpha|!}{\alpha!} , \\ \text{und } v^\alpha &= v_1^{\alpha_1} \cdots v_n^{\alpha_n} \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n .\end{aligned}$$

Die Schreibweise  $\partial_\alpha f$  ist vor allem dann hilfreich, wenn man mit vielen verschiedenen Multiindizes auf einmal arbeiten muss. Für eine einzelne höhere Ableitung benutzen wir lieber eine Schreibweise wie  $\partial_1^2 \partial_2^3 \partial_3 f$  oder  $\frac{\partial^6 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^3 \partial x_3}$  an Stelle von  $\partial_{(2,3,1)} f$ .

7.19. BEMERKUNG. Der *Multinomialkoeffizient*  $\binom{|\alpha|}{\alpha}$  ist so etwas wie ein verallgemeinerter Binomialkoeffizient. Tatsächlich gilt im Falle  $n = 2$  gerade

$$\frac{|\alpha|!}{\alpha!} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)!}{\alpha_1! \alpha_2!} = \binom{|\alpha|}{\alpha_1} = \binom{|\alpha|}{\alpha_2} .$$

Und für größere  $n$  gilt in Analogie zur ersten binomischen Formel die *Multinomialformel*

$$(v_1 + \cdots + v_n)^k = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|=k}} \binom{|\alpha|}{\alpha} v^\alpha = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} v^\alpha .$$

Für später vereinbaren wir, dass eine Summe über „ $|\alpha| = k$ “ wie im rechten Ausdruck immer eine Summe über alle Multiindizes vom Grad  $k$  in Dimension  $n$  sein soll; dabei sollte  $n$  aus dem Kontext klar sein.

7.20. BEMERKUNG. Es sei wieder  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$ . Wir wollen  $f$  auf eine Gerade durch einen Punkt  $p \in U$  einschränken. Dazu sei  $v \in \mathbb{R}^n$  ein Richtungsvektor. Wir schreiben

$$g(t) = p + tv \in \mathbb{R}^n .$$

Da  $U$  offen und  $g$  stetig ist, existiert ein offenes Intervall  $(a, b)$  um 0, so dass  $g((a, b)) \subset U$ . Für  $0 \leq \ell \leq k$  berechnen wir induktiv

$$(f \circ g)^{(\ell)}(0) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|=\ell}} \binom{\ell}{\alpha} \partial_\alpha f \cdot v^\alpha .$$

Mit dieser Beobachtung können wir den Satz 5.40 von Taylor ins Mehrdimensionale übertragen. Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $p \in U$  und  $f \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$ . Wir definieren das  *$n$ -dimensionale Taylorpolynom vom Grad  $k$*  durch

$$T_k(f; p) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial_\alpha f(p)}{\alpha!} X^\alpha \quad \text{in den Variablen } X = (X_1, \dots, X_n) .$$

7.21. SATZ (Taylor-Approximation). *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $p \in U$  und  $f \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$ .*

(1) Peano-Restglied. *Für alle  $q \in U$  gilt*

$$f(q) = T_k(f; p)(q - p) + o(\|q - p\|^k) .$$

(2) Lagrange-Restglied. *Es gelte  $m = 1$ . Außerdem sei  $r > 0$  gegeben mit  $B_r(p) \subset U$ . Dann existiert für alle  $q \in B_r(p)$  ein  $s \in (0, 1)$ , so dass*

$$f(q) = T_{k-1}(f; p)(q - p) + \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial_\alpha f((1-s)p + sq) (q - p)^\alpha .$$

(3) Integral-Restglied. Es sei  $r > 0$  wie in (2). Für alle  $q \in B_r(p)$  gilt

$$f(q) = T_{k-1}(f; p)(q - p) + \int_0^1 \sum_{|\alpha|=k} \frac{k(1-s)^{k-1}}{\alpha!} \partial_\alpha f((1-s)p + sq) (q-p)^\alpha ds.$$

Wir haben der Einfachheit halber in jedem Fall stetige Differenzierbarkeit gefordert; im Eindimensionalen waren wir etwas großzügiger. Die Formulierung (1) mit Peano-Restglied entspricht für  $k = 1$  gerade der totalen Differenzierbarkeit von  $f$ , wir erhalten also wieder Satz 7.13. Das Lagrange-Restglied funktioniert in der obigen Form nur für  $m = 1$ . Im Fall  $m > 1$  erhält man in der Regel für jede Komponentenfunktion von  $f$  eine andere Zwischenstelle.

7.22. BEMERKUNG. Wir können auch im Mehrdimensionalen die Taylorreihe

$$T(f; p) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\partial_\alpha f(p)}{\alpha!} X^\alpha$$

betrachten. Eine solche Reihe heißt *konvergent*, wenn es eine offene Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$  von 0 gibt, so dass  $T(f; p)(x)$  für alle  $x \in U$  absolut konvergiert (denn wir wollen uns keine bevorzugte Summationsreihenfolge ausdenken müssen). Wie im Eindimensionalen auch folgt daraus noch nicht, dass  $f(p+x) = T(f, p)(x)$  gilt, siehe Beispiel 5.39.

Allgemeiner kann man Potenzreihenentwicklungen um  $p$  definieren, indem man für jeden Multiindex  $\alpha$  einen Koeffizienten  $a_\alpha$  angibt und dann

$$f(q) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (q - p)^\alpha$$

betrachtet. Eine Abbildung  $f$ , die auf einer Umgebung  $U$  von  $p$  durch eine konvergente Potenzreihe beschrieben wird, heißt bei  $p$  *analytisch*. Man kann auch mehrdimensionale Potenzreihen wie in Abschnitt 5.d gliedweise ableiten.

Bemerkung 5.42 überträgt sich: Wenn eine Abbildung  $f$  auf einer Umgebung von  $p$  durch eine konvergente Potenzreihe gegeben wird, dann ist das gerade die Taylorreihe von  $f$  im Punkt  $p$ . Wir wollen darauf aber nicht weiter eingehen.

### 7.d. Extrema und Konvexität

In diesem Abschnitt schauen wir uns die zweite Ableitung genauer an, und zwar der Einfachheit halber im Fall  $m = 1$ , das heißt, wir betrachten nur Abbildungen  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ . Aus Kapitel 4 wissen wir im Eindimensionalen, dass die zweite Ableitung an einem kritischen Punkt, das heißt, an einem Punkt  $p$  mit  $d_p f = 0$ , Aufschluss geben kann, ob ein lokales Minimum oder Maximum vorliegt. Und eine  $C^2$ -Funktion auf einem Intervall ist genau dann konvex, wenn die zweite Ableitung nirgends negativ ist.

Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $p \in U$  und  $f \in C^2(U)$ . Die *Hesse-Matrix* von  $f$  an der Stelle  $p$  ist gerade die Matrix

$$d_p^2 f = (\partial_i \partial_j f(p))_{i,j} = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(p) & \cdots & \partial_1 \partial_n f(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f(p) & \cdots & \partial_n^2 f(p) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Nach dem Satz 7.16 von Schwarz ist sie symmetrisch. Wir fassen sie als *symmetrische Bilinearform* auf  $\mathbb{R}^n$  auf, das heißt, wir betrachten  $d_p^2 f$  als *Hesse-Form* mit

$$d_p^2 f(v, w) = v^t \cdot d_p^2 f \cdot w = \partial_v \partial_w f(p) \quad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^n,$$

dabei bezeichne  $v^t$  den zu einem Zeilenvektor transponierten Vektor  $v$ .

7.23. BEMERKUNG. Wir haben jetzt zwei Sorten von Ableitungsmatrizen kennengelernt: die Jacobi-Matrix und die Hesse-Matrix. Sie sind sehr unterschiedlich: die Jacobi-Matrix beschreibt eine lineare Abbildung, nämlich die erste Ableitung einer  $\mathbb{R}^m$ -wertigen Funktion, während die Hesse-Matrix eine Bilinearform beschreibt, nämlich die zweite Ableitung einer  $\mathbb{R}$ -wertigen Funktion.

Für die zweite Ableitung einer  $\mathbb{R}^m$ -wertigen Funktion bräuchten wir eine  $\mathbb{R}^m$ -wertige Bilinearform, die man durch ein dreidimensionales Schema von Zahlen beschreiben müsste. Für die  $k$ -te Ableitung bräuchten wir sogar ein  $(k+1)$ -dimensionales Schema mit  $n^k m$  Einträgen. Solche Objekte heißen „Tensoren“, wir werden darauf aber nicht näher eingehen.

Als nächstes brauchen wir einen Positivitätsbegriff für symmetrische Matrizen.

7.24. DEFINITION. Eine symmetrische reelle Matrix  $A \in M_n(\mathbb{R})$  heißt *positiv (semi-) definit*, wenn für alle  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gilt, dass  $v^t A v > 0$  ( $v^t A v \geq 0$ ). Wir schreiben dafür auch kurz  $A > 0$  ( $A \geq 0$ ).

Sie heißt *negativ (semi-) definit*, wenn  $-A$  positiv (semi-) definit ist. Dafür schreiben wir kurz  $A < 0$  ( $A \leq 0$ ).

Wenn  $A$  weder positiv semidefinit noch negativ semidefinit ist, heißt  $A$  *indefinit*.

In der linearen Algebra lernen Sie, dass  $A$  genau dann positiv (semi-) definit ist, wenn alle Eigenwerte von  $A$  positiv (nicht negativ) sind. Das wird uns hier aber im Moment nicht interessieren.

30. 5. 22

7.25. BEMERKUNG. Wir benutzen Begriffe wie „positiv“ und Symbole wie „ $<$ “, obwohl hier keine Ordnung im Sinne von Definition 1.29 vorliegt. Seien der Einfachheit halber  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$  symmetrisch.

- (1) Aus „ $A \geq 0$ “ folgt nicht „ $A > 0$  oder  $A = 0$ “, wie die Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  zeigt.
- (2) Es gilt auch nicht „ $A \geq 0$  oder  $A \leq 0$ “, wie man an der indefiniten Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  sieht.
- (3) Aus der obigen Definition folgt aber nach wie vor, dass  $A \geq 0$  und  $A \leq 0$  zusammen  $A = 0$  implizieren, denn wenn  $v^t A v = 0$  für alle  $v \in \mathbb{R}^2$  gilt, muss bereits  $A = 0$  sein.

Damit wir die obige Bedingung nicht für alle  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  überprüfen müssen, brauchen wir ein Kriterium aus der linearen Algebra. Wir erinnern uns, dass der  $k$ -te *Hauptminor* von  $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$  für  $1 \leq k \leq n$  definiert ist als Determinante der linken oberen  $k \times k$ -Untermatrix, also

$$\det((a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}) \in \mathbb{R}.$$

7.26. PROPOSITION (Sylvester- oder Hurwitz-Kriterium). *Eine symmetrische reelle Matrix ist genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren positiv sind.*

Die analoge Aussage für „positiv semidefinit“ wäre falsch. Und für „negativ definit“ ist es am einfachsten, das obige Kriterium auf das Negative der Matrix anzuwenden.

Der Satz von Taylor liefert uns jetzt ein Kriterium für lokale Extrema wie in Proposition 4.29.

7.27. FOLGERUNG. *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $p \in U$  und  $f$  total differenzierbar.*

- (1) *Wenn  $f$  bei  $p$  ein lokales Extremum hat, dann ist  $p$  ein kritischer Punkt, das heißt, es gilt  $d_p f = 0$ .*

Für  $f \in C^2(U)$  gilt außerdem:

- (2) *Wenn  $p$  ein kritischer Punkt mit  $d_p^2 f > 0$  ist, dann ist  $p$  ein striktes lokales Minimum von  $f$ , das heißt, es existiert eine Umgebung  $V \subset U$  von  $p$ , so dass  $f(q) > f(p)$  für alle  $q \in V \setminus \{p\}$ ;*
- (3) *Wenn  $f$  bei  $p$  ein lokales Minimum hat, dann ist  $p$  ein kritischer Punkt mit  $d_p^2 f \geq 0$ .*

Analoge Aussagen gelten für lokale Maxima.

7.28. BEMERKUNG. Sei jetzt  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine beliebige Teilmenge und  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Funktion. Dann ist es im Allgemeinen recht schwierig, Extremstellen von  $f$  zu finden.

- (1) Es sei  $p \in A$  ein Randpunkt, siehe Bemerkung 6.19 (3). Das heißt, es gibt kein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $B_\varepsilon(p) \subset A$  gilt. In diesem Fall ist  $d_p f$  möglicherweise nicht definiert, und wir können Folgerung 7.27 (1) nicht benutzen. Also müssen wir „von Hand“ überprüfen, ob ein lokales Extremum vorliegt. Wir kommen in Bemerkung 7.50 noch einmal auf dieses Problem zurück.
- (2) Es sei  $p \in A$  ein innerer Punkt, an dem  $f$  nicht differenzierbar ist. Dann können wir ein Extremum bei  $p$  nicht mit Hilfe von Folgerung 7.27 (1) ausschließen. Also müssen wir wieder „von Hand“ überprüfen, ob ein lokales Extremum vorliegt.
- (3) Wenn  $p$  ein innerer Punkt ist, an dem  $f$  differenzierbar ist mit  $d_p f \neq 0$ , liegt kein lokales Extremum vor.
- (4) Wenn  $p$  ein kritischer innerer Punkt ist, aber  $d_p^2 f$  nicht existiert, müssen wir wieder von Hand überprüfen, ob ein lokales Extremum vorliegt.

Ab sofort sei  $f$  in einer Umgebung  $V \subset A$  eines kritischen Punktes  $p$  von  $f$  zweimal stetig differenzierbar.

- (5) Wenn die Hesse-Form  $d_p^2 f$  positiv (negativ) definit ist, liegt ein lokales Minimum (Maximum) vor.
- (6) Wenn die Hesse-Form  $d_p^2 f$  indefinit ist, liegt kein lokales Extremum vor.
- (7) Wenn die Hesse-Form  $d_p^2 f$  positiv (negativ) semi-definit ist, müssen wir wieder „von Hand“ überprüfen, ob ein lokales Minimum (Maximum) vorliegt. Beides ist möglich, falls  $d_p^2 f = 0$ .

Fall (6) ist der einzige, den wir aus dem Eindimensionalen so noch nicht kennen. Und wenn wir alle lokalen Extremstellen aufgespürt haben, müssen wir noch überprüfen, ob es auch globale Extrema gibt.

Bevor wir uns konvexe Funktionen anschauen, benötigen wir zunächst den Begriff einer konvexen Menge. Dazu betrachten wir die *Strecke*

$$[p, q] = \{ (1-s)p + sq \mid s \in [0, 1] \}$$

zwischen zwei Punkten  $p, q \in \mathbb{R}^n$ . Das ist gerade die Menge der Konvexkombinationen von  $p$  und  $q$ , siehe Bemerkung 4.31. Die Notation ist in Analogie zu Intervallen gewählt, und wir können entsprechend auch  $(p, q)$ ,  $[p, q)$  und  $(p, q]$  definieren. Eine Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  heißt *konvex*, wenn sie mit je zwei Punkten  $p, q \in U$  auch die gesamte Strecke  $[p, q]$  enthält.

7.29. BEMERKUNG. Eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist genau dann konvex, wenn sie ein Intervall ist. Also sind konvexe Mengen eine mögliche Verallgemeinerung von Intervallen ins Mehrdimensionale.

Jetzt können wir Konvexität einer Funktion auf den eindimensionalen Begriff aus Definition 4.30 zurückführen.

7.30. DEFINITION. Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und konvex. Eine Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt (*strikt*) *konvex*, wenn für alle  $p, q \in U$  die Funktion

$$[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad s \longmapsto f((1-s)p + sq)$$

(strikt) konvex ist. Sie heißt (*strikt*) *konkav*, wenn  $-f$  (strikt) konvex ist.

Wie in Bemerkung 4.34 sind konvexe Funktionen mit offenem, konvexem Definitionsbereich stetig, aber das wollen wir hier nicht beweisen.

7.31. PROPOSITION. *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und konvex, und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  sei konvex und stetig. Dann ist für  $c \in \mathbb{R}$  die Subniveaumenge  $f^{-1}((-\infty, c))$  ebenfalls offen und konvex.*

Stetigkeit von  $f$  haben wir nur benutzt, um die Offenheit der Subniveaumenge zu zeigen. Wir hätten auch  $f^{-1}((-\infty, c])$  betrachten können. Diese Menge ist immer noch konvex, aber möglicherweise nicht offen (aber auch nicht notwendigerweise abgeschlossen).

7.32. BEISPIEL. Normen auf  $\mathbb{R}^n$  sind stets konvex, jedoch nicht strikt, falls  $n \geq 1$ . Der Normball

$$B_r(p) = \{ q \in \mathbb{R}^n \mid \|q - p\| < r \} = f^{-1}((-\infty, r))$$

ist daher offen und konvex, dabei sei  $f(x) = \|x - p\|$ .

In Satz 4.33 haben wir viele äquivalente Charakterisierungen konvexer Funktionen gegeben. Wir wollen hier einige davon ins Mehrdimensionale übertragen. Unter einer *linearen* (oder korrekter: *affinen*) Funktion verstehen wir eine Funktion  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  der Form

$$g(x) = Ax + b$$

mit  $A \in M_{1,n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$  und  $b \in \mathbb{R}$ . Affine Funktionen sind die einzigen Funktionen, die zugleich konvex und konkav sind. Wie im Eindimensionalen müssen konvexe Funktionen nicht differenzierbar sein, wir geben also auch Charakterisierungen an, die das nicht brauchen.

7.33. SATZ (Konvexität im Mehrdimensionalen). *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und konvex und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann sind äquivalent:*

- (1) *Die Funktion  $f$  ist konvex;*
- (2) *Zu jedem  $p \in U$  gibt es eine affine Funktion  $h_p$  mit  $h_p|_U \leq f$  und  $h_p(p) = f(p)$ .*

*Falls  $f$  total differenzierbar ist, sind auch äquivalent:*

- (3) *Für alle  $p, q \in U$  gilt*

$$f(p) + d_p f(q - p) \leq f(q);$$

- (4) *Das Differential  $df$  ist monoton, das heißt, für alle  $p, q \in U$  gilt*

$$(d_q f - d_p f)(q - p) \geq 0.$$

*Falls  $f \in C^2(U)$ , ist auch äquivalent:*

- (5) *Für alle  $p \in U$  ist  $d_p^2 f$  positiv semidefinit.*

*Wenn  $d_p^2 f$  für alle  $p$  positiv definit ist, gilt in (4) für alle  $q \neq p$  die strikte Ungleichung. Und wenn (4) für alle  $q \neq p$  strikt ist, dann ist  $f$  strikt konvex.*

Konvexität ist wie im Eindimensionalen auch hilfreich, wenn es darum geht, Minima zu finden.

7.34. PROPOSITION. *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und konvex und  $f \in C^0(U)$  konvex.*

- (1) *Jedes lokale Minimum von  $f$  ist globales Minimum.*
- (2) *Wenn  $f$  bei  $p \in U$  ein lokales Maximum hat, dann ist  $f$  auf einer Umgebung  $V \subset U$  von  $p$  konstant.*
- (3) *Wenn  $p$  ein kritischer Punkt einer konvexen  $C^1$ -Funktion ist, dann nimmt  $f$  bei  $p$  das globale Minimum an.*

## 7.e. Der lokale Umkehrsatz

In diesem Abschnitt übertragen wir das Newton-Verfahren ins Mehrdimensionale. Anschließend benutzen wir es, um einen lokalen Umkehrsatz zu beweisen. Im Gegensatz zum Eindimensionalen gibt es keine einfachen lokalen Kriterien (wie Monotonie), die äquivalent zur globalen Umkehrbarkeit sind.

Zunächst erinnern wir uns an das Newton-Verfahren im Eindimensionalen. Ein Beispiel für das eindimensionale Newton-Verfahren ist das Heron-Verfahren zum Ziehen von Quadratwurzeln, das wir aus den Übungen zur Analysis I kennen. In den Übungen versuchen wir analog, in  $\mathbb{C}$  eine Wurzel

aus  $-1$  zu ziehen. Um eine Nullstelle einer  $C^2$ -Funktion  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  zu finden, startet man in der Nähe einer (vermuteten) Nullstelle  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f'(x_0) \neq 0$  und definiert  $N_f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

auf einer kleinen Umgebung von  $x_0$ , auf der  $f'$  nirgends verschwindet. Aus

$$N_f(x_0) = x_0 \quad \text{und} \quad N'_f(x_0) = 0$$

folgt mit dem eindimensionalen Satz 5.40 (2) von Taylor mit Lagrange-Restglied, dass

$$|N_f(x) - x_0| = O(|x - x_0|^2).$$

Also existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $N_f$  das Intervall  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  auf sich selbst abbildet und für alle  $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  die Folge  $x, N_f(x), N_f^2(x), \dots$  quadratisch gegen  $x_0$  konvergiert. Das Newton-Verfahren funktioniert aber nur dann, wenn es eine Nullstelle  $x_0$  mit  $f'(x_0) \neq 0$  gibt und man nah genug an  $x_0$  startet — was man aber oft im Vorhinein gar nicht weiß.

Wir übertragen das Newton-Verfahren ins Mehrdimensionale. Dazu sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^2(U; \mathbb{R}^n)$ . Es sei  $f(x_0) = y_0$  und  $d_{x_0}f \in M_n(\mathbb{R})$  sei invertierbar. Da die Menge  $GL(n, \mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$  der invertierbaren Matrizen offen ist, existiert eine offene Umgebung  $V \subset U$  von  $x_0$ , so dass  $d_x f$  für alle  $x \in V$  invertierbar ist. Wir definieren den Iterationsschritt  $N_{f,y_0}: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  im Newton-Verfahren durch

$$N_{f,y_0}(x) = x - (d_x f)^{-1} \cdot (f(x) - y_0).$$

Die Eigenschaften sind die gleichen wie im Eindimensionalen.

**7.35. SATZ (Newton-Verfahren).** *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U$ ,  $f \in C^2(U; \mathbb{R}^n)$  und  $y_0 = f(x_0)$ . Es sei  $d_{x_0}f \in M_n(\mathbb{R})$  invertierbar. Dann existiert eine Umgebung  $V \subset \mathbb{R}^n$  von  $x_0$ , auf der das Newton-Verfahren quadratisch konvergiert, das heißt, zu einer gegebenen Norm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{R}^n$  existiert  $C > 0$ , so dass*

$$\|N_{f,y_0}(x) - x_0\| \leq C \|x - x_0\|^2 \quad \text{für alle } x \in V.$$

Somit konvergiert für ein  $x \in V$  die Folge  $x, N_{f,y_0}(x), \dots$  quadratisch gegen  $x_0$  für alle  $x \in V$  mit  $\|x - x_0\| < \frac{1}{C}$ . Für den Beweis benutzen wir den Satz 7.21 von Taylor. Wir können die Voraussetzung zu  $C^1$  abschwächen. In diesem Fall existiert immer noch für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass

$$\|N_{f,y_0}(x) - x_0\| \leq \varepsilon \|x - x_0\| \quad \text{für alle } x \in B_\delta(f(x_0)).$$

Man sagt, die Konvergenz sei *superlinear*.

**7.36. BEMERKUNG.** Das Newton-Verfahren konvergiert sehr schnell, wenn es denn konvergiert. Aber es gibt auch prinzipielle Probleme.

- (1) Wie im Eindimensionalen auch weiß man im Vorhinein oft nicht, mit welchem Wert  $x$  man die Newton-Iteration beginnen soll.
- (2) Matrizen zu invertieren ist numerisch aufwändig und mitunter auch fehleranfällig. Daher löst man lieber das lineare Gleichungssystem

$$d_x f \cdot v = f(x) - y_0$$

und setzt anschließend  $N_{f,y_0}(x) = x - v$ .

- (3) Wenn die Funktion  $f$  nicht explizit bekannt ist, sondern aus Näherungswerten rekonstruiert werden muss, kann man die Ableitung nicht zuverlässig bestimmen. In diesem Fall sind unter Umständen andere, weniger effiziente Näherungsverfahren besser geeignet.

Eigentliches Ziel dieses Abschnitts ist der Umkehrsatz im Mehrdimensionalen.

7.37. SATZ (Umkehrsatze). *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U$  und  $f \in C^k(U; \mathbb{R}^n)$  mit  $k \geq 1$ . Wenn  $d_{x_0}f \in M_n(\mathbb{R})$  invertierbar ist, existieren Umgebungen  $V \subset U$  von  $x_0$  und  $W \subset \mathbb{R}^n$  von  $y_0 = f(x_0)$ , so dass die Einschränkung  $f|_V$  eine Umkehrabbildung  $g \in C^k(W; \mathbb{R}^n)$  besitzt. Für alle  $y \in W$  gilt*

$$d_y g = (d_{g(y)} f)^{-1} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass wir keinen so schönen Satz wie den eindimensionalen Umkehrsatze 3.28 erwarten dürfen.

7.38. BEISPIEL. Die komplexe Exponentialfunktion hat als  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Gestalt

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y) \quad \text{und} \quad d_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist  $d_{(x,y)} f$  in jedem Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  invertierbar. Dennoch existiert keine globale Umkehrfunktion, denn außer 0 wird jeder Wert unendlich oft angenommen. Für alle  $n \in \mathbb{Z}$  gilt nämlich

$$f(x, y + 2\pi n) = f(x, y).$$

Anderserseits können wir auf jedem Streifen der Form  $\mathbb{R} \times (y_0 - \pi, y_0 + \pi)$  einen Zweig des komplexen Logarithmus als Umkehrfunktion angeben.

Im ersten Schritt des Beweises benutzen wir eine Variation des Newton-Verfahrens, um eine stetige Umkehrfunktion zu konstruieren. Die Differenzierbarkeit lässt sich dann ähnlich wie im Eindimensionalen beweisen. Um die höheren Ableitungen von  $g$  zu finden, hilft folgende Überlegung.

7.39. PROPOSITION. *Es sei  $U: \mathbb{R}^k$  offen und  $A \in C^1(U; M_m(\mathbb{R}))$  eine Abbildung, so dass  $A(x) \in GL(m, \mathbb{R})$  für alle  $x \in U$ . Dann gilt*

$$d_x(A^{-1}) = -A(x)^{-1} \cdot d_x A \cdot A(x)^{-1} \quad \text{für alle } x \in U.$$

## 7.f. Der Satz über implizite Funktionen

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass ein lineares Gleichungssystem  $Ax = b$  eine eindeutige Lösung hat, wenn  $A$  invertierbar ist. Das entspricht der Situation im letzten Abschnitt. Wenn  $A \in M_{\ell,n}(\mathbb{R})$  surjektiv ist, dann hat  $Ax = b$  einen  $(n - \ell)$ -dimensionalen affinen Lösungsraum. Wir betrachten die „nicht-lineare“ Variante dieses Problems. Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^1(U; \mathbb{R}^\ell)$ , so dass  $d_{x_0} f \in M_{\ell,n}(\mathbb{R})$  surjektiv ist, und  $y_0 = f(x_0)$ . Dann ist die Lösungsmenge der Gleichung  $f(x) = y_0$  zumindest nahe  $x_0$  ein „gekrümmter Raum“. Solche Räume nennen wir  $(n - \ell)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$ . Ein Beispiel sind die Höhenlinien in der Einleitung zu diesem Kapitel.

Der folgende Satz hilft uns, die lokale Struktur der Lösungsmenge der Gleichung  $f(x) = y_0$  zu verstehen. Er folgt unmittelbar aus dem mehrdimensionalen Umkehrsatze.

7.40. SATZ (über implizite Funktionen). *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^k(U; \mathbb{R}^\ell)$  mit  $n \geq \ell$ ,  $m = n - \ell$  und  $k \geq 1$ . Für ein  $p \in U$  sei die Matrix  $(\frac{\partial f_i}{\partial x_{m+j}}(p))_{i,j \leq \ell} \in M_\ell(\mathbb{R})$  invertierbar. Dann existiert eine Umgebung  $V \times V' \subset U$  von  $p$  mit  $V \subset \mathbb{R}^m$ ,  $V' \subset \mathbb{R}^\ell$ , eine Umgebung  $W \subset \mathbb{R}^\ell$  von  $q = f(p)$  und eine Abbildung  $g \in C^k(V \times W; \mathbb{R}^\ell)$  mit  $g(p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_\ell) = (p_{m+1}, \dots, p_n)$ , so dass*

$$f^{-1}(\{y\}) \cap V \times V' = \{ (x, g(x, y)) \mid x \in V \} \quad \text{für alle } y \in W.$$

Dieser Satz erlaubt uns, die Urbilder von Punkten  $y$  nahe  $q = f(p)$  lokal nahe  $p$  als Graphen von Funktionen  $g(\cdot, y): V \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  zu schreiben. Dabei ist der Graph von  $g(\cdot, y)$  genau die rechte Seite der obigen Gleichung. In der Literatur wird manchmal nur die Einschränkung  $g|_{V \times \{q\}}$  betrachtet,

die dann auch nur die Menge  $f^{-1}(q)$  lokal beschreibt. Im Spezialfall  $\ell = n$  entspricht der obige Satz dem Umkehrsatz, allerdings übernimmt  $V'$  jetzt die Rolle von  $V$ .

Wir erhalten den Satz aus dem Umkehrsatz, indem wir  $f$  zu einer Abbildung  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  vergrößern mit

$$F(x) = (x_1, \dots, x_m, f_1(x), \dots, f_\ell(x)),$$

aus deren lokaler Inversen  $G$  wir die Abbildung  $g$  rekonstruieren können.

Bis jetzt haben wir den Begriff „kritischer Punkt“ nur für  $\mathbb{R}$ -wertige Abbildungen  $f$  betrachtet; die Bedingung war  $d_x f = 0$ . Für  $\mathbb{R}^\ell$ -wertige Abbildungen ist  $d_x f = 0$  aber nicht die Verallgemeinerung, mit der wir arbeiten wollen.

7.41. DEFINITION. Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^k(U; \mathbb{R}^\ell)$  mit  $k \geq 1$ . Dann heißt  $x \in U$  ein *regulärer Punkt* von  $f$ , wenn  $d_x f \in M_{\ell,n}(\mathbb{R})$  surjektiv ist, und ansonsten *kritischer Punkt*.

Ein Element  $y \in \mathbb{R}^\ell$  heißt *regulärer Wert* von  $f$ , wenn alle  $x \in f^{-1}(\{y\})$  reguläre Punkte sind, und ansonsten *kritischer Wert*.

Insbesondere kann  $f(x)$  kritischer Wert sein, obwohl  $x \in U$  regulär ist, aber nicht umgekehrt.

7.42. DEFINITION. Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt *m-dimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit*, wenn es zu jedem Punkt  $p \in M$  eine Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$  von  $p$ , eine offene Teilmenge  $V \subset \mathbb{R}^n$  und einen Diffeomorphismus  $\Phi: U \rightarrow V$  gibt, so dass

$$U \cap M = \Phi^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

Somit ist eine Untermannigfaltigkeit eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , so dass  $M \subset \mathbb{R}^n$  lokal diffeomorph ist zu  $\mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ . Es gibt aber noch andere Charakterisierungen von Untermannigfaltigkeiten.

7.43. DEFINITION. Es sei  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen. Eine  $C^1$ -Abbildung  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *Immersion*, wenn sie an jedem Punkt  $p \in V$  injektives Differential  $d_p g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  hat.

Eine Abbildung  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *Einbettung*, wenn sie  $V$  homöomorph auf im  $g \subset \mathbb{R}^n$  abbildet. Eine Immersion, die zugleich eine Einbettung ist, heißt *Parametrisierung* von im  $g \subset \mathbb{R}^n$ .

7.44. FOLGERUNG (Satz vom regulären Wert). Für eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$ ,  $k \geq 1$  und  $n = m + \ell$  sind äquivalent:

- (1) die Teilmenge  $M$  ist eine *m-dimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit*,
- (2) zu jedem  $p \in M$  existiert eine Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$  von  $p$  und eine Abbildung  $f \in C^k(U; \mathbb{R}^\ell)$  mit regulärem Wert 0, so dass  $M \cap U = f^{-1}(0)$ ,
- (3) zu jedem Punkt  $p \in M$  existiert eine Umgebung  $W \subset M$  von  $p$  in der Unterraumtopologie auf  $M \subset \mathbb{R}^n$ , eine offene Menge  $V' \subset \mathbb{R}^m$  und eine Parametrisierung  $g \in C^k(V'; \mathbb{R}^n)$  von  $W$ .

Wir können eine Untermannigfaltigkeit also auf verschiedene Weisen darstellen. Je nach Problemstellung ist die eine oder die andere Betrachtungsweise geeigneter.

7.45. BEISPIEL. Es bezeichne  $\|\cdot\|$  die Euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist

$$f(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

unendlich oft differenzierbar, und alle Werte außer 0 sind regulär. Die *Einheitssphäre*  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  wird gegeben durch  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 = 1\}$ . Der Satz über implizite Funktionen liefert Parametrisierungen der Form

$$g_{i,\pm}: B_1(0) \subset \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ \longmapsto \left( x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{i-1}^2 - x_{i+1}^2 - \dots - x_n^2}, x_{i+1}, \dots, x_n \right).$$

In den Übungen lernen wir andere Parametrisierungen kennen.

## 7.g. Extrema unter Nebenbedingungen

Zu guter Letzt wollen wir noch Extremstellen von Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten bestimmen. Man spricht dann auch gern von *Extrema unter Neben- oder Zwangsbedingungen*.

Es sei also  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit und  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, deren Extremstellen wir bestimmen möchten. Wenn wir für jeden Punkt  $p \in M$  eine Parametrisierung  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  kennen, so dass  $x_0 \in V \subset \mathbb{R}^m$  gerade auf  $p$  abgebildet wird, dann können wir die Funktion  $h \circ g: V \rightarrow \mathbb{R}$  betrachten und ihre Extremstellen mit den Methoden aus Abschnitt 7.d bestimmen. Dazu sollte  $h \circ g$  mindestens zweimal stetig differenzierbar sein. Das können wir sicherstellen, indem wir verlangen, dass  $h$  nicht nur auf  $M$  sondern auf einer offenen Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$  von  $p$  definiert ist, und  $h \in C^2(U)$  gilt.

Falls wir keine explizite Parametrisierung kennen, beschreiben wir  $M$  lokal als Urbild eines regulären Wertes einer  $C^1$ -Funktion  $f$  wie in Folgerung 7.44 (2). Wir wissen, dass wir eine Parametrisierung mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen erhalten können. Es kann aber passieren, dass wir keine Parametrisierung finden, mit der sich angenehm rechnen lässt. Daher geben wir einen anderen Weg an, um Extremstellen zu finden.

**7.46. SATZ (Lagrangesche Multiplikatorregel).** *Es sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit,  $p \in M$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Umgebung von  $p$ , und  $0$  sei regulärer Wert von  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  mit  $\ell = n - m$ , so dass  $f^{-1}(0) = M \cap U$ . Sei  $h \in C^1(U)$ , dann betrachte die Funktion*

$$L: M_{1,\ell}(\mathbb{R}) \times U \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad L(\lambda, x) = h(x) + (\lambda \circ f)(x) = h(x) + \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \cdot f_i(x).$$

*Dann ist  $p$  genau dann kritischer Punkt von  $h|_{M \cap U}$ , wenn  $\lambda \in \mathbb{R}^\ell$  existiert, so dass  $(\lambda, p)$  ein kritischer Punkt von  $L$  ist.*

**7.47. BEMERKUNG.** Die Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$  heißen *Lagrange-Multiplikatoren*. Sie lassen sich physikalisch als Komponenten einer „Zwangskraft“ verstehen, die einen Körper auf der gegebenen Untermannigfaltigkeit  $M$  hält. Wir stellen uns vor, dass  $h$  ein Potential ist (beispielsweise die „Höhe“ eines Punktes, falls wir an klassische Gravitation denken). Der Körper ist bei  $p \in M$  in Ruhelage genau dann, wenn  $p$  ein kritischer Punkt von  $h|_M$  ist. Dennoch wirkt auf  $p$  die Kraft  $-d_p h \in M_{1,n}(\mathbb{R})$  „senkrecht zu  $M$ “, und diese wird kompensiert von der „Zwangskraft“

$$-(\lambda \circ d_p f) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i d_p f_i \in M_{1,n}(\mathbb{R}).$$

Das entspricht dem dritten Newtonschen Gesetz. Im Abschnitt 8.c werden wir es wieder mit Kräften zu tun haben, die wir auch dort punktweise als lineare Abbildungen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  auffassen werden.

**7.48. BEISPIEL.** Als Beispiel kann man sich vorstellen, dass man einen Stein an einem dünnen Stab nach unten hält. Durch den Stab kann sich der Stein nur auf einer Kugel im  $\mathbb{R}^3$  bewegen, und am unteren Punkt dieser Kugel ist er in Ruhelage. Wir betrachten also (unter Vernachlässigung der Masse)

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \quad \text{und} \quad h(x, y, z) = z.$$

Dann erhalten wir  $L(\lambda, x, y, z) = z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$  und

$$dL = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, 2\lambda x, 2\lambda y, 1 + 2\lambda z).$$

Die einzigen kritischen Punkte von  $L$  sind  $(\lambda_\pm, p_\pm) = \pm(-\frac{1}{2}, 0, 0, 1)$ . Die Kraft  $-\lambda_\pm d_{p_\pm} f = (0, 0, 1)$ , mit der man den Stein festhält, ist genau die Zwangskraft, die den Stein auf dieser Kugel hält, und sie kompensiert die nach unten wirkende Gravitation  $-d_{p_\pm} h = -(0, 0, 1)$ .

Um festzustellen, ob eine lokale Extremstelle vorliegt, betrachten wir die modifizierte Hesse-

Matrix

$$d_{p_{\pm}}^2 h + \lambda d_{p_{\pm}}^2 f = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix} \Big|_{p_{\pm}} = \mp \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Einschränkung auf  $\ker(d_{p_{\pm}} f) = \mathbb{R}^2 \times 0$  ist negativ definit bei  $p_+$  und positiv definit bei  $p_-$ .

7.49. SATZ. *Es seien  $M, U, f, h$  und  $L$  wie in Satz 7.46 gegeben, und sei  $(\lambda, x)$  ein kritischer Punkt von  $L$ .*

- (1) *Dann ist  $x$  ein lokales Minimum von  $h|_M$ , falls die Hesse-Matrix  $d_p^2 h + \sum \lambda_i \cdot d_p^2 f_i$  auf  $0 \times \ker(d_x f)$  positiv definit ist.*
- (2) *Falls  $x$  ein lokales Minimum von  $h|_M$  ist, ist die Hesse-Matrix  $d_p^2 h + \sum \lambda_i \cdot d_p^2 f_i$  auf  $0 \times \ker(d_x f)$  positiv semidefinit.*

Für lokale Maxima wenden wir das Kriterium auf  $-h$  an. Es gibt auch ein Kriterium analog zu Proposition 7.26, dass die Definitheit im obigen Satz anhand spezieller Hauptminoren der sogenannten „geränderten Hesse-Matrix“  $d^2 L \in M_{n+\ell}(\mathbb{R})$  überprüft. Da es recht kompliziert ist und aus meiner Sicht nicht besonders effizient zum Rechnen, lassen wir es hier weg.

7.50. BEMERKUNG. Wir kommen noch einmal auf Bemerkung 7.28 (1) zurück und suchen Extremstellen einer Funktion  $h$  auf dem Rand einer Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  in dem Fall, dass dieser Rand glatt ist. Es sei also  $p \in \partial A$  ein Randpunkt, es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Umgebung von  $p$  und  $f \in C^k(U)$  mit  $k \geq 1$ , so dass 0 regulärer Wert von  $f$  ist und

$$A \cap U = f^{-1}((-\infty, 0]).$$

Insbesondere gehört also der Rand  $\partial A \cap U$  noch zu  $A$  und ist eine  $(n-1)$ -dimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .

Es sei  $h: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^k$ -Funktion (wenn  $h$  bei  $p$  nicht differenzierbar ist, müssen wir natürlich wieder „von Hand“ überprüfen, ob bei  $p$  ein Extremum vorliegt).

- (1) Wenn  $p \in \partial A$  ein lokales Minimum von  $h|_A$  ist, dann ist  $p$  insbesondere auch ein lokales Minimum von  $h|_{\partial A}$ , das heißt, das notwendige Kriterium aus Satz 7.46 muss erfüllt sein.
- (2) Wenn darüberhinaus  $k \geq 2$  gilt und auch das hinreichende Kriterium aus Satz 7.49 erfüllt ist, dann wissen wir immerhin, dass  $p$  ein lokales Minimum von  $h|_{\partial A}$  ist. Andernfalls müssen wir „von Hand“ weitermachen.
- (3) Als nächstes betrachten wir den Lagrange-Multiplikator  $\lambda$ , so dass  $d_p h + \lambda d_p f = 0$ . Wenn er positiv ist, wird  $h$  zum Rand von  $A$  hin kleiner, und jedes lokale Minimum  $p$  von  $h|_{\partial A}$  mit  $\lambda > 0$  ist auch ein lokales Minimum von  $h|_A$ . Im Falle  $\lambda < 0$  hingegen liegt kein lokales Minimum auf  $A$  vor.
- (4) Wenn  $\lambda = 0$  ist, ist  $p$  ein kritischer Punkt von  $h$  als Funktion auf  $\mathbb{R}^n$ . Falls  $h$  auf  $\mathbb{R}^n$  bei  $p$  ein lokales Minimum hat, gilt das erst recht auf  $A$ . Anderfalls müssen wir wieder „von Hand“ schauen, ob ein lokales Minimum auf  $A$  vorliegt.

7.51. BEISPIEL. Wir kommen auf Beispiel 7.48 zurück, allerdings hängen wir den Stein diesmal an einem dünnen Faden auf, so dass er sich im abgeschlossenen Einheitsball  $D^3 \subset \mathbb{R}^3$  frei bewegen darf. Da  $dh \neq 0$  auf  $D^3$ , bleiben nur die kritischen Punkte  $p_{\pm}$  auf dem Rand als mögliche Extremstellen. Beim lokalen Minimum  $p_-$  von  $h|_{\partial A}$  ist  $\lambda_- = \frac{1}{2} > 0$ , also haben wir ein lokales Minimum von  $h_A$  nach (3). Analog dazu ist  $p_+$  lokales Maximum. Da  $A$  kompakt ist und es keine weiteren Kandidaten für Extrema gibt, sind  $p_-$  und  $p_+$  sogar globale Extremstellen.

Noch ein bisschen komplizierter wird es, wenn wir Extremstellen auf Untermannigfaltigkeiten  $M \subset \mathbb{R}^n$  mit Rand suchen. Im Wesentlichen sind die Überlegungen aber ähnlich wie oben.

## Kurvenintegrale

Wir haben Integration in der Analysis I in erster Linie als Umkehroperation zur Differentiation kennengelernt. In diesem Kapitel soll es nun etwas mehr um geometrische und physikalische Anwendungen der eindimensionalen Integration gehen — das mehrdimensionale Integral behandeln wir erst in Analysis III ausführlich. Allerdings werden unsere eindimensionalen Integrationswege stets in irgendeinem Sinn in einem mehrdimensionalen Raum verlaufen, so dass wir Methoden aus dem vorangegangenen Kapitel einsetzen können.

Als erstes wollen wir uns überlegen, wie sich ein einfaches Integral verändert, wenn man den Integranden stetig oder differenzierbar abändert. Die entsprechenden Resultate haben uns in Kapitel 5 noch gefehlt. Sie bilden eine weitere Grundlage für die folgenden Abschnitte.

Anschließend möchten wir gern die Länge einer stetigen Kurve bestimmen — zunächst, indem wir sie durch Polygonzüge approximieren, anschließend mit Hilfe eines passenden Integrals. Wenn wir dann noch eine Funktion auf dem umgebenden Raum mit in das Integral schreiben, erhalten wir das Kurvenintegral erster Art (Integration nach der Bogenlänge).

In der Physik möchte man oft ein Vektorfeld längs einer Kurve integrieren. Zum Beispiel möchte man wissen, wieviel Energie nötig ist, um einen Gegenstand durch ein Kraftfeld zu bewegen. Das führt auf den Begriff des Kurvenintegrals zweiter Art. Je nach Art des Kraftfeldes hängt die Gesamtenergie nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges ab, oder ändert sich zumindest nicht, wenn man den Weg innerhalb einer vorgegebenen Menge stetig variiert. Gleichzeitig erhalten wir auch eine Umkehroperation zur mehrdimensionalen totalen Ableitung.

Zu guter Letzt versuchen wir, bestimmte Integrale zu minimieren, indem wir den Integrationsweg variieren. Dazu betrachten wir exemplarisch eine bestimmte Klasse von Problemen und erhalten daraus durch partielle Integration die sogenannten Euler-Lagrange-Gleichungen. Das sind gewöhnliche Differentialgleichungen, die wir dann im nächsten Kapitel gründlicher anschauen wollen.

### 8.a. Parameterabhängige Integrale

Unter einem parameterabhängigen Integral verstehen wir ein bestimmtes Integral wie in Analysis I, dessen Integrand aber von zusätzlichen Parametern abhängen darf. Dazu nehmen wir an, dass der Integrand auf einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  definiert ist, die das Integrationsintervall  $[a, b] \times \{0\}$  enthält. Dann betrachten wir für ausreichend kleine  $y \in \mathbb{R}^n$  das Integral

$$\int_a^b f(x, y) dx ,$$

das jetzt von den Parametern  $y$  abhängt.

8.1. BEMERKUNG. Es sei  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen mit  $[a, b] \times \{0\} \subset U$ . Aus der Kompaktheit von  $[a, b]$  schließen wir, dass es einen Radius  $r > 0$  gibt, so dass  $[a, b] \times B_r(0) \subset U$ . Wir dürfen im obigen Integral daher alle  $y \in B_r(0)$  einsetzen.

8.2. SATZ. Es sei  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen mit  $[a, b] \times B_r(0) \subset U$ , es sei  $f \in C^k(U)$  gegeben und

$$(1) \quad g(y) = \int_a^b f(x, y) dx .$$

Dann gilt  $g \in C^k(B_r(0))$ , und falls  $k \geq 1$ , auch

$$(2) \quad \partial_{y_i} g(y) = \int_a^b \partial_{y_i} f(x, y) dx .$$

Also darf man unter den genannten Voraussetzungen Integration und Differentiation vertauschen. Der Beweis beruht auf der gleichmäßigen Stetigkeit stetiger Funktionen auf Kompakta (Proposition 6.36) und dem Mittelwertsatz 4.16. Wir haben ihn in Beispiel 7.8 bereits benutzt.

Mitunter brauchen wir den obigen Satz auch für uneigentliche Integrale, siehe Definition 5.30. In diesem Fall können wir Proposition 6.36 nicht anwenden. Stattdessen kontrollieren wir die Größe der Integranden „von Hand“. Wir erhalten auf diese Weise zwar nicht die allgemeinste Version des obigen Satzes, aber eine recht handbare Verallgemeinerung.

8.3. DEFINITION. Es seien  $-\infty \leq a = x_0 < \dots < x_n = b \leq \infty$ , und  $g: [a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_n\} \rightarrow [0, \infty)$  sei uneigentlich integrierbar. Dann *dominiert*  $g$  die Funktion  $f$ , wenn  $f$  ebenfalls auf  $[a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$  definiert ist und  $|f(x)| \leq g(x)$  für alle  $x \in [a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$  gilt.

Man nennt  $g$  manchmal auch *Majorante*, in Anlehnung an das Majorantenkriterium 2.60.

8.4. BEMERKUNG. Seien  $f, g$  wie oben. Wenn  $f$  stetig ist (oder zumindest auf jedem kompakten Teilintervall von  $[a, b] \setminus \{a_0, \dots, a_N\}$  Riemann-integrierbar), ist  $f$  auch uneigentlich integrierbar. Das Argument hierzu ist ähnlich wie beim Majorantenkriterium 2.60.

8.5. SATZ (Dominierte Konvergenz). Es seien  $-\infty \leq a = x_0 < \dots < x_n = b \leq \infty$ ,  $g: [a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_n\} \rightarrow [0, \infty)$  sei uneigentlich integrierbar,  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $y_0 \in U$  und

$$f: ([a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}) \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig. Falls  $f(\cdot, y)$  für alle  $y \in U \setminus \{y_0\}$  von  $g$  dominiert wird, wird auch  $f(\cdot, y_0)$  von  $g$  dominiert, und es gilt

$$(1) \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx .$$

Falls darüberhinaus die partiellen Ableitungen  $\partial_{y_i} f$  für  $i = 1, \dots, n$  existieren, stetig sind und von  $g$  dominiert werden, gilt auch

$$(2) \quad \partial_{y_i} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \partial_{y_i} f(x, y) dx .$$

8.6. BEISPIEL. Wir betrachten auf  $(0, 1) \times (-1, \infty)$  die Funktion

$$f(x, y) = x^y .$$

Für alle  $y \geq c > -1$  wird  $f(\cdot, y)$  von der uneigentlich integrierbaren Funktion  $g(x) = x^c$  dominiert. Insbesondere gilt

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_0^1 x^y dx = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{1+y} = \frac{1}{1+y_0} = \int_0^1 \lim_{y \rightarrow y_0} x^y dx ,$$

obwohl für  $y \leq 0$  die Integranden nicht gleichmäßig konvergieren. Insbesondere ist der obige Satz also stärker als die „Stetigkeit des Integrals“ 5.10. Gleichzeitig sehen wir, dass wir mitunter für verschiedene Teilmengen der Parametermenge verschiedene Majoranten brauchen.

Wir kommen in Analysis III noch einmal auf Grenzwerte von Integralen zurück. Als Anwendung der obigen Theorie betrachten wir die  $\Gamma$ -Funktion, die wir in den Übungen zu Analysis I schon teilweise eingeführt hatten.

8.7. BEISPIEL. Wir erinnern uns, dass wir  $t^z = e^{z \log t} \in \mathbb{C}$  definiert hatten für  $t > 0$  und  $z \in \mathbb{C}$ . Wir definieren jetzt die  $\Gamma$ -Funktion  $\Gamma: \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{C}$ , zunächst nur für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} z > 0$  durch

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt .$$

Mit Hilfe von Satz 8.5 sieht man, dass  $\Gamma$  auf der rechten Halbebene  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$  eine  $C^\infty$ -Funktion definiert (Übung).

Auf der anderen Seite liefert partielle Integration (Übung zu Analysis I), dass

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = -t^{z-1} e^{-t} \Big|_{t=0}^\infty + \int_0^\infty z t^{z-1} e^{-t} dt = z \Gamma(z)$$

für alle  $z$  mit  $\operatorname{Re} z > 1$ . Mit Hilfe dieser sogenannten „Funktionalgleichung“ können wir  $\Gamma$  zu einer  $C^\infty$ -Funktion auf  $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$  fortsetzen. Für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} z > -k$ ,  $-z \notin \mathbb{N}$  setzen wir einfach

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z \cdots (z+k-1)} \Gamma(z+k) .$$

### 8.b. Bogenlänge und Kurvenintegrale erster Art

27. 6. 22

Eine stetige Abbildung von einem Intervall in einen topologischen Raum nennt man einen Weg oder eine Kurve, siehe etwa Abschnitt 6.f. Einer Kurve in einem metrischen Raum kann man eine Länge zuordnen, indem man sie durch eine Folge von Punkten approximiert und die Abstände zwischen diesen Punkten aufsummiert. Für  $C^1$ -Kurven im  $\mathbb{R}^n$  kann man die Länge auch durch ein Integral ausdrücken. In diesem Abschnitt wollen wir das verstehen und beweisen, dass die kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten gerade Strecken sind.

Es sei zunächst  $(M, d)$  ein metrischer Raum,  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall, und  $\gamma: I \rightarrow M$  eine beliebige Abbildung. Für jede Folge  $t_0 < \cdots < t_n$  von „Stützstellen“ in  $I$  betrachten wir

$$\sum_{i=1}^n d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) .$$

Im  $\mathbb{R}^n$  ist das genau die Länge eines Polygonzuges durch die Punkte  $\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_n)$ . Nimmt man weitere Punkte hinzu, wird die obige Summe eventuell größer, aber wegen der Dreiecksungleichung sicher nicht kleiner. Daher ist die folgende Definition sinnvoll.

8.8. DEFINITION. Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $\gamma: I \rightarrow M$  eine stetige Kurve in einem metrischen Raum  $(M, d)$ . Dann definieren wir die *Länge* von  $\gamma$  durch

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } t_0, \dots, t_n \in I \text{ mit } t_0 < \cdots < t_n \right\} .$$

Wir nennen  $\gamma$  *rektifizierbar*, wenn  $L(\gamma) < \infty$ .

Stetigkeit ist für die obige Definition eigentlich nicht erforderlich. Aber bei einer unstetigen Kurve  $\gamma$  würden wir auch Abstände zwischen Sprungstellen von  $\gamma$  mit messen. Das ist aber nicht immer gewünscht.

8.9. BEMERKUNG. Es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  eine stetige Kurve. Dann gilt stets  $L(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(b))$ . Im Falle von Gleichheit nennt man  $\gamma$  eine *kürzeste Kurve* zwischen  $\gamma(a)$  und  $\gamma(b)$ . Falls man je zwei Punkte in  $M$  durch einen kürzesten Weg verbinden kann, nennt man  $(M, d)$  einen *Längenraum*. In den Übungen sehen wir, dass man mit Hilfe der Kurvenlänge eine neue  $[0, \infty]$ -wertige Metrik

auf  $M$  definieren kann. Auf Längenräumen stimmt sie mit  $d$  überein, die Umkehrung gilt jedoch nicht.

8.10. BEMERKUNG. Es sei  $\|\cdot\|$  die Euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^n$ , und es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine kürzeste Kurve. Dann beschreibt  $\gamma$  genau die Strecke von  $\gamma(a)$  nach  $\gamma(b)$ .

Die obige Definition ist zwar sehr allgemein, aber auch unpraktisch, wenn man mit ihr rechnen oder Sätze beweisen möchte.

8.11. SATZ. Es sei  $\|\cdot\|$  die Euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^n$  und  $d$  die zugehörige Metrik. Es sei  $a \leq b$ . Dann ist jede  $C^1$ -Kurve  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  rektifizierbar, und es gilt

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

8.12. BEISPIEL. Wir parametrisieren einen Bogen auf dem Einheitskreis als Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ . Dann gilt  $\|\gamma'(t)\| = 1$  für alle  $t \in [a, b]$  und es folgt  $L(\gamma) = b - a$ . Man sagt auch,  $\gamma$  sei nach Bogenlänge parametrisiert. Dementsprechend heißt der zugrundeliegende Winkelbegriff auch „Bogenmaß“, siehe Bemerkung 2.81.

29. 6. 22 8.13. BEMERKUNG. Es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve und  $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$  ein Homöomorphismus. Dann nennt man  $\gamma \circ \varphi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine *Umparametrisierung* von  $\gamma$ . Die Länge ist *invariant unter Umparametrisierung*, das heißt, es gilt  $L(\gamma) = L(\gamma \circ \varphi)$  (Übung).

Sei jetzt  $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$  eine *reguläre Kurve*, das heißt, für alle  $t \in [a, b]$  gilt  $\gamma'(t) \neq 0$ . Dann existiert eine  $C^1$ -Umparametrisierung  $\varphi: [0, L(\gamma)] \rightarrow [a, b]$ , so dass  $\gamma \circ \varphi$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, das heißt, so dass  $\|(\gamma \circ \varphi)'(t)\| = 1$  für alle  $t \in [0, L(\gamma)]$  (Übung).

8.14. BEMERKUNG. Wenn  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  regulär ist, dann hat jeder innere Punkt  $t \in \overset{\circ}{I}$  nach Folgerung 7.44 eine Umgebung der Form  $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset I$  für ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $\text{im}(\gamma|_{(t-\varepsilon, t+\varepsilon)})$  eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

Wenn eine  $C^1$ -Kurve  $\gamma$  nicht regulär ist, kann sie Singularitäten haben. Das sind Punkt  $\gamma(t)$ , bei denen  $\text{im}(\gamma|_{(t-\varepsilon, t+\varepsilon)})$  für kein  $\varepsilon > 0$  eine Untermannigfaltigkeit ist. Als Beispiel betrachte

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \gamma(t) = (x^3, x^2).$$

Dann kann  $\gamma$  auch keine  $C^1$ -Umparametrisierung nach Bogenlänge haben.

Zu guter Letzt definieren wir noch „Kurvenintegrale erster Art“, das sind einfach Integrale von Funktionen längs Kurven.

8.15. DEFINITION. Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^0(U)$ ,  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  eine  $C^1$ -Kurve und  $\|\cdot\|$  die Euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^n$ . Dann definieren wir das *Kurvenintegral erster Art* durch

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Dabei bezeichnet „ $ds$ “ das *Bogenelement* von  $\gamma$ , das heißt, „ $ds$ “ steht für „ $\|\gamma'(t)\| dt$ “ in der gegebenen Parametrisierung. Der Buchstabe „ $s$ “ selbst wird gern für einen Bogenlängenparameter verwendet. Das Kurvenintegral erster Art ist invariant unter  $C^1$ -Umparametrisierung (Übung). Falls  $\gamma$  wie in Bemerkung 8.13 nach Bogenlänge parametrisiert ist, vereinfacht sich das obige Integral zu

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b (f \circ \gamma)(s) ds.$$

### 8.c. Pfaffsche Formen und Kurvenintegrale zweiter Art

Als nächstes wollen wir Vektorfelder — genauer: Pfaffsche Formen — über Kurven integrieren. Dafür gibt es zunächst einmal eine physikalische Interpretation: wieviel Energie ist nötig, um einen Körper entlang einer gegebenen Kurve durch ein Kraftfeld zu bewegen? Mit den gleichen Methoden können wir aber auch zur vorgegebenen ersten Ableitung einer Funktion eine Stammfunktion rekonstruieren, oder mit Hilfe eines passenden Vektorfeldes den Inhalt einer Fläche berechnen, indem wir über den Rand integrieren.

Im Gegensatz zum Bogenlängenintegral spielt hier immer der ganze Geschwindigkeitsvektor  $\gamma'$  der Kurve  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Rolle, und nicht bloß seine Länge. Ein Kraftfeld ordnet jedem Punkt  $p \in \mathbb{R}^n$  eine lineare Abbildung  $\alpha_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zu. Der Wert  $\alpha_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$  ist dann genau die Kraft, die man zur Zeit  $t$  braucht, um einen Körper entlang von  $\gamma$  zu bewegen. Wir geben jetzt eine mathematische Beschreibung.

8.16. DEFINITION. Eine 1-Form oder Pfaffsche Form auf einer offenen Menge  $U$  ist eine Abbildung  $\alpha: U \rightarrow M_{1,n}(\mathbb{R})$ , und wir schreiben  $\alpha_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  für ihren Wert an der Stelle  $p \in U$ . Falls  $\alpha$  stetig und  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Kurve ist, definieren wir das *Kurvenintegral zweiter Art*

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_a^b \alpha_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt .$$

Das Kurvenintegral ist invariant unter richtungserhaltender  $C^1$ -Umparametrisierung, das heißt, unter Umparametrisierungen  $\gamma \circ \varphi$  mit  $\varphi' > 0$ . (Übung). Wir haben  $\alpha: U \rightarrow M_{1,n}(\mathbb{R})$  geschrieben. Der Zielraum ist zwar isomorph zu  $\mathbb{R}^n$ , so dass wir uns  $\alpha$  auch als ein Vektorfeld vorstellen könnten. Allerdings ist ein solcher Isomorphismus im mathematischen Sinne nicht „natürlich“. Die Formulierung mit  $M_{1,n}(\mathbb{R})$  lässt sich beispielsweise leichter auf Kurven in gekrümmten Räumen übertragen.

8.17. BEMERKUNG. Wir können das Differential  $df: U \rightarrow M_{1,n}(\mathbb{R})$  einer  $C^1$ -Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  als Pfaffsche Form auffassen. Aus der Kettenregel folgt für alle  $C^1$ -Kurven  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dass

$$\int_{\gamma} df = \int_a^b d(f \circ \gamma)(t) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) .$$

Das heißt, das Kurvenintegral hängt in diesem Fall nur von den Endpunkten von  $\gamma$ , aber nicht von  $\gamma$  selbst ab.

Physikalisch heißt das, dass das Kraftfeld  $\alpha = df$  ein *Potential*  $f$  besitzt. In diesem Fall entspricht die Energie, die man braucht, um einen Körper von einem Punkt  $p$  zu einem Punkt  $q$  zu bewegen genau der Potentialdifferenz  $f(q) - f(p)$ , unabhängig vom Weg. Typische Beispiele sind statische (klassische) Gravitations- und elektrische Felder.

Umgekehrt sei jetzt  $\alpha \in C^0(U, M_{1,n}(\mathbb{R}))$  eine Pfaffsche Form, für die das Kurvenintegral *weg-unabhängig* ist, das heißt, für alle  $C^1$ -Kurven  $\gamma$  von  $p$  nach  $q$  hat das Kurvenintegral  $\int_{\gamma} \alpha$  den gleichen Wert. Wenn  $U$  offen und zusammenhängend ist, definieren wir eine Funktion  $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ , indem wir  $p \in U$  fixieren und für alle  $q \in U$  eine  $C^1$ -Kurve  $\gamma$  von  $p$  nach  $q$  wählen und

$$g(q) = \int_{\gamma} \alpha$$

setzen. Es folgt  $g(p) = 0$ , und man kann zeigen, dass  $g \in C^1(U)$  mit  $dg = \alpha$ .

Bevor wir uns ausführlicher mit Kurvenintegralen befassen, hier eine einfache, aber hilfreiche Folgerung aus unserer fundamentalen Integralabschätzung 5.8.

8.18. SATZ (Schrankensatz). *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  konvex und  $f \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$ , und auf  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  seien Normen gewählt. Dann gilt für alle  $p, q \in U$ , dass*

$$\|f(q) - f(p)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \|q - p\|_{\mathbb{R}^n} \cdot \sup \{ \|d_x f(v)\|_{\mathbb{R}^m} \mid x \in U \text{ und } v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|v\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1 \} .$$

Wenn  $U$  offen ist, hat jeder Punkt in  $U$  eine konvexe Umgebung in  $U$ , auf die wir den obigen Satz anwenden können.

8.19. FOLGERUNG. *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  wegzusammenhängend und  $f \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$  mit  $df = 0$ . Dann ist  $f$  konstant.*

Man darf sich jetzt fragen, ob man einer Pfaffschen Form  $\alpha$  ansehen kann, ob das zugehörige Kurvenintegral wegunabhängig ist, ohne dass man alle Kurvenintegrale ausrechnen oder eine Stammfunktion angeben muss. Wir werden sehen, dass das für manche Gebiete  $U$  möglich ist. Im Folgenden sei wieder  $(e_1, \dots, e_n)$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$ .

8.20. DEFINITION. Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Wir nennen eine Pfaffsche Form  $\alpha \in C^k(U; M_{1,n}(\mathbb{R}))$

- (1) *exakt*, wenn  $k \geq 0$  und eine Funktion  $f \in C^{k+1}(U)$  mit  $\alpha = df$  existiert, und
- (2) *geschlossen*, wenn  $k \geq 1$  und für alle  $1 \leq i < j \leq n$  gilt, dass

$$\partial_i(\alpha(e_j)) = \partial_j(\alpha(e_i)) .$$

8.21. PROPOSITION. *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Für eine Pfaffsche Form  $\alpha \in C^k(U; M_{1,n}(\mathbb{R}))$  sind äquivalent:*

- (1) *die Form  $\alpha$  ist exakt, und*
- (2) *das Kurvenintegral  $\int_\gamma \alpha$  hängt nur von den Endpunkten von  $\gamma$  ab.*

8.22. BEMERKUNG. Aus dem Satz von Schwarz folgt, dass jede exakte  $C^2$ -Form  $\alpha$  geschlossen ist. Die Umkehrung muss nicht gelten, dazu betrachte auf  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  mit den Koordinatenfunktionen  $x, y: U \rightarrow \mathbb{R}$  die Pfaffsche Form  $\frac{1}{x^2+y^2} (x dy - y dx)$  (Übung).

8.23. DEFINITION. Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $p, q \in U$ . Zwei  $C^k$ -Kurven  $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow U$  heißen  $C^k$ -homotop in  $U$ , wenn es eine  $C^k$ -Abbildung  $h: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$  gibt, so dass

$$\begin{aligned} h(a, s) &= p && \text{für alle } s \in [0, 1] , \\ h(b, s) &= q && \text{für alle } s \in [0, 1] , \\ \text{und } h(t, s) &= \gamma_s(t) && \text{für alle } t \in [a, b] \text{ und } s = 0, 1 . \end{aligned}$$

In diesem Fall heißt  $h$  eine *Homotopie zwischen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$* .

Wir nennen  $U$  *einfach zusammenhängend*, wenn für je zwei Punkte  $p, q \in U$  und je zwei Kurven  $\gamma_0, \gamma_1$  von  $p$  nach  $q$  eine Homotopie zwischen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  existiert.

8.24. BEISPIEL. Jede konvexe offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  ist einfach zusammenhängend, denn für zwei Wege  $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow U$  liegt auch die Homotopie

$$h(t, s) = (1 - s) \gamma_0(t) + s \gamma_1(t)$$

wieder in  $U$ .

Die nächste Proposition ist eine Anwendung des Satzes 8.2 über parameterabhängige Integrale.

8.25. PROPOSITION. *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\alpha \in C^1(U; M_{1,n}(\mathbb{R}))$  geschlossen und  $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow U$  seien  $C^2$ -homotope  $C^2$ -Kurven von  $p$  nach  $q$ . Dann gilt*

$$\int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha .$$

8.26. FOLGERUNG. *Auf einer offenen, einfach zusammenhängenden Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  sind alle geschlossenen Pfaffschen Formen exakt.*

Im Beweis dieser Folgerung konstruieren wir unter anderem eine  $C^1$ -Kurve von zwischen zwei Punkten  $p, q$ , die nahe  $q$  die Form  $t \mapsto q + (t-1)v$  hat. Dazu benutzen wir eine Abschneidefunktion wie in Beispiel 5.39 (2).

8.27. BEMERKUNG. Es gilt auch die Umkehrung: wenn alle geschlossenen Paffschen Formen auf einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  exakt sind, dann ist  $U$  einfach zusammenhängend. Das wollen wir hier aber nicht beweisen.

Wir könnten jetzt auch die erste de Rham-Kohomologie von  $U$  definieren als Quotient der Vektorräume der geschlossenen modulo der exakten  $C^1$ -Formen. Für hinreichend einfache Gebiete ist dieser Vektorraum endlich-dimensional.

8.28. BEMERKUNG. Als letztes wollen wir uns umgekehrt einmal die nicht geschlossene Pfaffsche Form  $x dy$  in der Ebene anschauen. Es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine geschlossene  $C^1$ -Kurve, das heißt, es gilt  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , die ein Gebiet  $U$  im positiven Drehsinn umläuft. Das heißt,  $\gamma$  sei (bis auf Anfangs- und Endpunkt) injektiv, es gelte  $\partial U = \text{im } \gamma$ , und  $U$  liege stets „links“ von  $\gamma$ . Dann beschreibt  $\int_\gamma x dy$  gerade den Flächeninhalt von  $U$ . Was das bedeutet und warum das so ist lernen wir allerdings erst in Analysis III.

### 8.d. Variationsrechnung

Im nächsten Kapitel wollen wir uns systematisch mit Differentialgleichungen beschäftigen. Insbesondere zeigen wir, dass Differentialgleichungen mit hinreichend gutartigen Koeffizienten immer eine eindeutige Lösung haben, zumindest über einen gewissen Zeitraum. In diesem Abschnitt wollen wir unsere bisherigen Erkenntnisse nutzen, um einige Differentialgleichungen zu konstruieren. Dabei geht es hier immer darum, bestimmte Integrale entlang von Kurven zu minimieren. Zum Beispiel skizzieren wir einen alternativen Zugang zur Tatsache, dass kürzeste Kurven im  $\mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Metrik Geraden sind. Und wir versuchen, die Kettenlinie im Treppenhaus des Mathe-Instituts zu verstehen. Und auf der Seite der Physik betrachten wir das „Prinzip der kleinsten Wirkung“ in einigen Spezialfällen. Im Allgemeinen betrachtet man in der Variationsrechnung auch Abbildungen zwischen höherdimensionalen Räumen, was dann zu partiellen Differentialgleichungen führen kann.

Im Gegensatz zur „direkten Methode der Variationsrechnung“ aus Bemerkung 6.4 versuchen wir hier also, Lösungen von Minimierungsproblemen auf Lösungen von Differentialgleichungen zurückzuführen. Auch die Gegenrichtung ist interessant: wenn man eine Differentialgleichung lösen möchte, ist es oft hilfreich, wenn manche Lösungen zugleich ein Variationsproblem minimieren. Denn wenn man die Lösungen der Differentialgleichung nicht gut genug beschreiben kann, kann man es alternativ mit Bemerkung 6.4 versuchen. Allerdings lässt nicht jede Differentialgleichung eine solche Beschreibung zu.

Da die Variationsrechnung ihren Ursprung in der Physik hat, wollen wir hier physikalische Begriffe benutzen. Wir betrachten eine Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  im *Konfigurationsraum*  $\mathbb{R}^n$ . Wir werden uns für Eigenschaften dieser Kurve interessieren, die sowohl vom *Ort*  $q = \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$  als auch von der *Geschwindigkeit*  $v = \dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\gamma \in \mathbb{R}^n$ , und möglicherweise sogar von der *Zeit*  $t \in \mathbb{R}$  abhängen. Der Raum  $\mathbb{R}^{2n}$  der möglichen Kombinationen aus Orten und Geschwindigkeiten heißt *Phasenraum*, und wenn wir die Zeit noch mit hinzunehmen, erhalten wir den *Zustandsraum*  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Jede Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  liefert also Abbildungen

$$(*) \quad (\gamma, \dot{\gamma}): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \quad \text{und} \quad (\cdot, \gamma, \dot{\gamma}): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1} .$$

Eine *Lagrangefunktion* ist dann einfach eine Funktion auf dem Phasen- beziehungsweise dem Zustandsraum, je nachdem, ob das System explizit von der Zeit abhängt oder nicht, also

$$L: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{beziehungsweise} \quad L: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R} .$$

Diese Lagrangefunktion hat mit dem  $L$  aus der Multiplikatorregel 7.46 nur den Namen gemeinsam. Für eine  $C^1$ -Kurve  $\gamma[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  betrachten wir das *Wirkungsfunktional*

$$S(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt \quad \text{beziehungsweise} \quad S(\gamma) = \int_a^b L(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt .$$

Wenn  $L$  nur auf einer Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^{2n}$  beziehungsweise  $U \subset \mathbb{R}^{2n+1}$  definiert ist, dürfen wir nur Kurven betrachten, für die die Abbildung (\*) Werte in  $U$  annimmt.

In der Mathematik wird  $S$  manchmal auch als „Energiefunktional“ der Kurve  $\gamma$  verstanden. Das ist dann sinnvoll, wenn man als Konfigurationsraum den Raum aller Kurven vorgibt, und eine Familie von Kurven betrachtet, die dann von weiteren Parametern abhängt — das wollen wir hier aber nicht tun. Außerdem betrachten wir im Folgenden der Einfachheit halber nur zeitunabhängige Lagrangefunktionen.

8.29. BEISPIEL. Es folgen einige Beispiele.

- (1) Es sei  $L(q, v) = \|v\|$  die Euklidische Norm der Geschwindigkeit. Dann ist  $S(\gamma)$  gerade die Bogenlänge aus Satz 8.11. Da  $L$  bei  $v = 0$  nicht differenzierbar ist, betrachten wir  $L$  nur auf  $U = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ . Also dürfen wir nur reguläre Kurven betrachten, das heißt, Kurven  $\gamma$  mit  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$ , siehe Bemerkung 8.13.
- (2) Es sei  $V$  ein *Potential*, das heißt, eine Funktion auf dem Konfigurationsraum (also in der Ortvariablen  $q$ ), zum Beispiel  $V = q_3$  für das Gravitationsfeld auf der Erde. In der klassischen Mechanik betrachtet man

$$L(q, v) = \frac{\|v\|^2}{2} - V(q) .$$

- (3) Um die Kettenlinie im Treppenhaus des Mathe-Instituts zu beschreiben, multiplizieren wir das Gravitations-Potential  $q_3$  aus Bemerkung 7.47 und Beispiel 7.48 mit dem Bogenelement aus (1) und erhalten zunächst  $L(q, v) = q_3 \|v\|$  mit dem gleichen Definitionsbereich  $U$  wie in (1). Eine minimale Kurve muss also ihre „durchschnittliche Höhe“ minimieren. Außerdem wollen wir die Länge  $\ell = \ell(\gamma)$  der Kurve vorgeben (kleines  $\ell$ , damit wir sie nicht mit der Lagrange-Funktion verwechseln). Das liefert uns eine Zwangsbedingung, und das neue Wirkungsfunktional

$$S(\gamma, \lambda) = \int_a^b \gamma_3(t) \|\dot{\gamma}(t)\| dt + \lambda \left( \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt - \ell \right) = \int_a^b (\gamma_3(t) + \lambda) \|\dot{\gamma}(t)\| dt - \lambda \ell$$

analog zu Satz 7.46 — wir verzichten allerdings auf den Beweis dieses Satz in unserem neuen Kontext. Die Ableitung nach  $\lambda$  verschwindet genau dann, wenn  $\ell = \ell(\gamma)$ . Da nur der vordere Summand auf der rechten Seite von  $\gamma$  abhängt, betrachten wir ihn fortan als „modifiziertes Wirkungsfunktional“.

Der Name „Variationsrechnung“ kommt daher, dass wir Kurven mit infinitesimal nahen Kurven vergleichen wollen. Dazu führen wir den Begriff einer Variation ein. Analog zu Kurven kann man beliebige Abbildungen zwischen höherdimensionalen Räumen „variieren“.

8.30. DEFINITION. Es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^k$ -Kurve. Eine  $C^k$ -Variation von  $\gamma$  mit festen Endpunkten ist eine  $C^k$ -Abbildung  $\bar{\gamma}: [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass für alle  $t \in [a, b]$  und alle  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  gilt

$$\bar{\gamma}(t, 0) = \gamma(t) , \quad \bar{\gamma}(a, s) = \gamma(a) , \quad \text{und} \quad \bar{\gamma}(b, s) = \gamma(b) .$$

Wir schreiben  $\gamma_s = \bar{\gamma}(\cdot, s): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Die Ableitung  $\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}|_{s=0}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt auch das *Variationsvektorfeld* von  $\bar{\gamma}$ .

Es sei  $L \in C^1(\mathbb{R}^{2n})$  eine Lagrangefunktion. Wir nennen eine  $C^2$ -Kurve  $\gamma$  *stationär*, wenn für jede  $C^2$ -Variation  $\bar{\gamma}$  von  $\gamma$  mit festen Endpunkten

$$0 = \left. \frac{\partial S(\gamma_s)}{\partial s} \right|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s} \int_a^b L(\gamma_s(t), \dot{\gamma}_s(t)) dt$$

gilt. Wenn  $\gamma$  das Funktional  $S$  unter allen  $C^2$ -Kurven von  $a$  nach  $b$  minimiert, dann ist  $\gamma$  insbesondere stationär. Wir benötigen eine  $C^2$ -Variation, da wir die Ableitung  $\dot{\gamma}_s$  in  $L$  einsetzen und anschließend noch einmal ableiten.

6. 6. 22

8.31. SATZ (Euler-Lagrange-Gleichung). *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^{2n}$  offen und  $L \in C(U)$  eine Lagrangefunktion. Eine  $C^2$ -Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \in U$  für alle  $t \in [a, b]$  ist genau dann stationär, wenn*

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_i}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right) \quad \text{for all } t \in [a, b] \text{ and all } i = 1, \dots, n.$$

In der obigen Gleichung bilden man die partiellen Ableitungen von  $L$  nach den unabhängigen Variablen  $q_1, \dots, q_n$  beziehungsweise  $v_1, \dots, v_n$  bevor man  $(\gamma_s(t), \dot{\gamma}_s(t))$  einsetzt. Diese Ableitungen bilden die Komponenten eines Vektors in  $M_{1,n}(\mathbb{R})$ . Anschließend leitet man die rechte Seite noch nach  $t$  ab. In der Physik-Literatur finden sich oft etwas kürzere Formulierungen. Im Beweis sehen wir, dass

$$\left. \frac{\partial S(\gamma_s)}{\partial s} \right|_{s=0} = \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right) \right) \left( \left. \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s} \right|_{s=0} \right) dt.$$

Wäre der Term innerhalb der großen Klammer nicht überall null, so könnten wir ein Variationsfeld und eine passende Variation von  $\gamma$  mit festen Endpunkten finden, für das  $\left. \frac{\partial S(\gamma_s)}{\partial s} \right|_{s=0} \neq 0$ . Das gleiche Argument funktioniert genauso auch, wenn  $L$  zusätzlich von der Zeit abhängt.

8.32. BEISPIEL. Wir bestimmen die Euler-Lagrange-Gleichungen zu den Lagrangefunktionen aus Beispiel 8.29.

(1) Für  $v \neq 0$  gilt

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\langle v, \cdot \rangle}{\|v\|},$$

und für reguläre Kurven  $\gamma$  erhalten wir die Euler-Lagrange-Gleichung

$$0 = \frac{\|\dot{\gamma}\|^2 \langle \ddot{\gamma}, \cdot \rangle - \langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \langle \dot{\gamma}, \cdot \rangle}{\|\dot{\gamma}\|^3}$$

Wenn wir  $\dot{\gamma}$  einsetzen, wird daraus schlicht  $0 = 0$ , wir erhalten also keine Aussage über diese Komponente von  $\ddot{\gamma}$ . Das liegt daran, dass wir  $\gamma$  nach Bemerkung 8.13 umparametrisieren dürfen, ohne die Länge zu verändern. Für einen Vektor  $w$  senkrecht auf  $\dot{\gamma}$  hingegen folgt

$$0 = \|\dot{\gamma}\|^2 \langle \ddot{\gamma}, w \rangle.$$

Das bedeutet, dass  $\dot{\gamma}$  bei einer stationären Kurve immer in die gleiche Richtung zeigen muss. Jetzt sieht man, dass es wichtig war, sich auf reguläre Kurven zu beschränken. Andernfalls dürfte die Kurve sich auf einer Gerade durch  $\gamma(a)$  und  $\gamma(b)$  vor und zurück bewegen, und wäre nicht mehr minimal (und auch nicht stationär).

(2) In diesem Beispiel erhalten wir die Bewegungsgleichung der klassischen Mechanik, nämlich

$$\langle \ddot{\gamma}, \cdot \rangle = -dV.$$

Wenn wir  $-dV$  als Kraft auffassen, entspricht das genau dem zweiten Newtonschen Gesetz.

- (3) Wir betrachten das modifizierte Funktional aus Beispiel 8.29 (3). Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$\|\dot{\gamma}\| \langle e_3, \cdot \rangle = \frac{d}{dt} \left( (\gamma_3(t) + \lambda) \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \right).$$

Als Lösungen erhalten wir senkrechte Geraden sowie Kurven der Form

$$\gamma(t) = \left( v_1(t - t_1), v_2(t - t_2), c \cosh \frac{t - t_3}{c} - \lambda \right)$$

für  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$  mit  $v_1^2 + v_2^2 = 1$ ,  $c > 0$  und  $t_1, t_2, t_3$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ , sowie Umparametrisierungen, da das Kurvenintegral erster Art invariant unter Umparametrisierungen ist. Wir berechnen die Länge von  $\gamma$  als

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = c \sinh \frac{t - t_3}{c} \Big|_a^b = a^b.$$

Nach dem Satz von Noether gehört zu jeder kontinuierlichen Symmetrie der Lagrangefunktion eine Erhaltungsgröße. Das bedeutet, dass eine gewisse Größe entlang jeder stationären Kurve invariant bleibt. Wir werden diesen Satz nicht in voller Allgemeinheit beweisen. Stattdessen betrachten wir hier als Spezialfall die Energie- und Impulserhaltung.

8.33. SATZ (Energieerhaltung). Sei  $U \subset \mathbb{R}^{2n}$  und  $L: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lagrangefunktion. Dann ist die Energie

$$E: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad E(q, v) = \frac{\partial L(q, v)}{\partial v}(v) - L(q, v)$$

entlang jeder stationären  $C^2$ -Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \in U$  für alle  $t \in [a, b]$  konstant.

Man beachte, dass wir eine zeitunabhängige Lagrangefunktion angegeben haben. Für zeitabhängige Lagrangefunktionen gilt im Allgemeinen keine Energieerhaltung.

8.34. SATZ (Impulserhaltung). Sei  $U \subset \mathbb{R}^{2n}$  und  $L: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lagrangefunktion. Wenn  $L$  nicht von der Ortskoordinate  $q_i$  abhängt, dann ist der Impuls

$$P_i: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad P_i(q, v) = \frac{\partial L(q, v)}{\partial v}(e_i)$$

entlang jeder stationären  $C^2$ -Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \in U$  für alle  $t \in [a, b]$  konstant.

Dieser Satz gilt genauso auch dann, wenn  $L$  zusätzlich von der Zeit  $t$  abhängt. Wenn  $L$  überhaupt nicht von  $q$  abhängt, erhalten wir den Impuls als Erhaltungsgröße in  $M_{1,n}(\mathbb{R})$ . In den Übungen schauen wir uns Energie und Impuls am Beispiel der Bogenlänge an.

Außerdem lernen wir noch einen Zugang zur Bogenlänge kennen, der zwar nicht mehr unter Umparametrisierung invariant ist, dafür aber auf ganz  $\mathbb{R}^{2n}$  definiert und insgesamt leichter zu handhaben ist als das Bogenelement aus Beispiel 8.29 (1).

8.35. BEMERKUNG. Im physikalischen Sinne handelt es sich hier übrigens nur im Beispiel 8.29 (2) um Energie und Impuls, und auch erst, nachdem man die Massen der beteiligten Objekte in die Formeln eingefügt hat. Im Falle eines Teilchens mit Masse  $m$  und Gravitationspotential  $mV$  erhalten wir beispielsweise

$$L(q, v) = m \frac{\|v\|^2}{2} - mV(q), \quad E(q, v) = m \frac{\|v\|^2}{2} + mV(q) \quad \text{und} \quad P(q, v) = m \langle v, \cdot \rangle.$$

Der Impuls bleibt hier aber nur dann erhalten, wenn  $V$  konstant ist und die Gravitationskraft  $-dV$  somit verschwindet.

Die „Höhe“  $h(q) = q_3$  ist invariant unter Verschiebung in Richtung  $e_1$  und  $e_2$ , somit bleiben im Falle  $V = h$  zumindest die ersten beiden Komponenten  $mv_1$  und  $mv_2$  des Impulses erhalten.

## Differentialgleichungen

Wir haben in Abschnitt 5.f gewöhnliche Differentialgleichungen kennengelernt, das sind Gleichungen, in denen eine Funktion  $f$  in einer Variablen (typischerweise  $t$ ) und einige ihrer Ableitungen vorkommen. Wir haben im Abschnitt 8.d gesehen, dass sich manche Probleme aus der Physik (z.B. klassische Mechanik), aber auch aus der Geometrie (kürzeste Kurven) durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschreiben lassen. In diesem Kapitel wollen wir zeigen, dass gewöhnliche Differentialgleichungen mit ausreichend regulären Koeffizienten bei passenden Anfangswerten immer eine Lösung besitzen. Außerdem zeigen wir, dass diese Lösung stetig von den Anfangswerten abhängt.

Zunächst wollen wir uns aber lineare Differentialgleichungen genauer anschauen. Im einfachsten Fall können wir sie explizit lösen. Im Allgemeinen verstehen wir wenigstens ungefähr, wie sich die Lösungen verhalten. Außerdem sei auf die Methode „Trennung der Variablen“ aus Bemerkung 5.51 verwiesen, die wir auch im letzten Abschnitt wieder verwendet haben.

### 9.a. Lineare Differentialgleichungssysteme

Wir beginnen mit linearen Differentialgleichungssystemen. Sie verhalten sich in gewissem Sinne ähnlich wie „unendlich-dimensionale lineare Gleichungssystem“. Allerdings gibt es leider nur für wenige Spezialfälle explizite Lösungsverfahren. Wir setzen in diesem Abschnitt bereits den Satz von Picard-Lindelöf aus dem folgenden Abschnitt voraus, wonach jedes hinreichend gutartige gewöhnliche Differentialgleichungssystem bei gegebener Anfangszeit  $t_0$  und gegebenem Anfangswert  $v_0$  stets eine eindeutige Lösung  $u$  auf einem maximalen Definitionsintervall  $I$  um  $t_0$  mit  $u(t_0) = v_0$  besitzt.

9.1. DEFINITION. Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ . Ein *lineares Differentialgleichungssystem*

$$(1) \quad f' = A \cdot f + b$$

auf  $I$  besteht aus einer  $C^k$ -Funktion  $A: I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ , der *Koeffizientenmatrix*, und einer  $C^k$ -Funktion  $b: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , der *Inhomogenität*. Das Gleichungssystem (1) heißt *homogen*, wenn  $b = 0$  auf ganz  $I$  gilt, ansonsten *inhomogen*.

Eine  $C^{k+1}$ -Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die (1) erfüllt, heißt *Lösung* des Differentialgleichungssystems. Seien  $t_0 \in I$  und  $v_0 \in \mathbb{R}^n$  gegeben, dann heißt  $f$  eine Lösung mit  $f(t_0) = v_0$  eine *Lösung des Anfangswertproblems*

$$(2) \quad \begin{cases} f'(t) = A(t) \cdot f(t) + b(t), \\ f(t_0) = v_0. \end{cases}$$

Man spricht hier stets von einem Anfangswertproblem, auch wenn  $t_0$  mitten in oder gar am Ende des Definitionsintervalles  $I$  liegt. Man lässt gewissermaßen beginnend bei  $t = t_0$  die „Zeit“  $t$  in beide Richtungen laufen. Man beachte, dass wir Lösungen hier auf dem gesamten Definitionsintervall  $I$  betrachten. Tatsächlich lässt sich (2) stets auf ganz  $I$  lösen, aber das können wir erst später zeigen.

Völlig analog können wir  $C^n$ -wertige Koeffizientenmatrizen  $A$ , Inhomogenitäten  $b$  und Lösungen  $f$  zulassen. Dazu brauchen wir nur  $C^n$  mit  $\mathbb{R}^{2n}$  zu identifizieren. Allerdings wollen wir nur unabhängige Parameter  $t \in I \subset \mathbb{R}$  betrachten.

Im Beweis der folgenden Proposition greifen wir vor auf den Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf.

9.2. PROPOSITION (Superpositionsprinzip). *Es seien  $I \subset \mathbb{R}$  und  $A \in C^k(I, M_n(\mathbb{R}))$ ,  $b \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$  wie in Definition 9.1.*

- (1) *Die Lösungen des homogenen Differentialgleichungssystems*

$$f' = A \cdot f$$

*bilden einen  $n$ -dimensionalen Vektorraum.*

- (2) *Es sei  $g_0$  eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems 9.1 (1). Dann sind die Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems genau die Funktionen der Form  $f + g_0$ , wobei  $f$  eine Lösung des homogenen Systems ist.*

Der Name „Superpositionsprinzip“ bedeutet, dass die Summe (Superposition) zweier Lösungen wieder eine Lösung ist. Im Falle (2) ist eine davon homogen, die andere inhomogen. Man nennt  $g$  auch die „spezielle“ und  $g + f$  die „allgemeine“ Lösung des inhomogenen Systems.

13. 7. 22

9.3. BEMERKUNG. Wir betrachten zunächst den Fall  $n = 1$ . Es sei  $a \in C^k(I)$  gegeben.

- (1) Die homogene lineare Differentialgleichung

$$f' = a f$$

können wir mit Trennung der Variablen (Bemerkung 5.51) lösen: Es sei  $h$  eine Stammfunktion von  $a$ , dann ist

$$f(t) = e^{h(t)} c$$

für alle  $c \in \mathbb{R}$  eine Lösung; weitere Lösungen gibt es nicht.

- (2) Wir können das Anfangswertproblem zu  $t_0 \in I$  und  $v \in \mathbb{R}$  lösen, indem wir  $c = e^{-h(t_0)} v$  wählen und erhalten  $f(t) = e^{h(t)-h(t_0)} v$ . Alternativ schreiben wir

$$f(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) v$$

- (3) Um die inhomogene Differentialgleichung zu lösen, machen wir folgenden Ansatz („Variation der Konstanten“): Wir ersetzen die Integrationskonstante  $c$  in (1) durch eine Funktion  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  und betrachten  $f = e^h g$ . Es folgt

$$f' = a f + e^h g',$$

also ist  $f$  genau dann eine Lösung des inhomogenen Systems

$$f' = a f + b,$$

wenn  $g$  eine Stammfunktion von  $e^{-h} b$  ist.

- (4) Alle weiteren Lösungen erhalten wir, indem wir Lösungen des homogenen Systems addieren. Insbesondere lösen wir das Anfangswertproblem  $f(t_0) = v_0$  mit

$$f(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) v_0 + \int_{t_0}^t \left(\exp\left(\int_u^t a(s) ds\right) b(u) du\right).$$

Um dieses Verfahren auf höhere Dimensionen zu übertragen, benötigen wir den Begriff der Fundamentallösung. Eine Fundamentallösung beschreibt eine Basis des Lösungsraums.

9.4. DEFINITION. Es seien  $I \subset \mathbb{R}$  und  $A \in C^k(I, M_n(\mathbb{R}))$  wie in Definition 9.1. Dann heißt eine Abbildung  $F \in C^{k+1}(I, M_n(\mathbb{R}))$  *Fundamentallösung* des homogenen Gleichungssystems  $f' = A \cdot f$ , wenn

$$F' = A \cdot F$$

auf ganz  $I$  gilt und die Matrix  $F(t_0)$  für ein  $t_0 \in I$  invertierbar ist.

Wenn  $F$  eine Fundamentallösung ist, dann ist  $F(t)$  für alle  $t \in I$  invertierbar, das folgt aus der Lösbarkeit des Anfangswertproblems zu einer beliebigen Zeit  $t_1 \in I$  und dem Superpositionsprinzip 9.2. Es bezeichne  $E_n$  die  $n$ -dimensionale Einheitsmatrix.

9.5. PROPOSITION (Variation der Konstanten). *Es seien  $I \subset \mathbb{R}$  und  $A \in C^k(I, M_n(\mathbb{R}))$ ,  $b \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$  wie in Definition 9.1.*

- (1) *Zu jedem  $t_0 \in I$  existiert eine Fundamentallösung  $F$  des homogenen Systems  $f' = A \cdot f$  mit  $F(t_0) = E_n \in M_n(\mathbb{R}^n)$ . Die Lösung des homogenen Anfangswertproblems mit  $f(t_0) = v_0 \in \mathbb{R}^n$  wird gegeben durch*

$$f(t) = F(t) \cdot v.$$

- (2) *Sei  $F$  die Fundamentallösung aus (1) und  $v_0 \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist*

$$f(t) = F(t) \cdot \left( v_0 + \int_{t_0}^t F(u)^{-1} b(u) du \right)$$

*die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems mit  $f(t_0) = v_0 \in \mathbb{R}^n$ .*

Da Matrizen über  $\mathbb{C}$  oft leichter zu handhaben sind, gehen wir für einen kleinen Moment zu  $\mathbb{k}^n$ -wertigen Funktionen über, mit  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$

9.6. BEMERKUNG. Wenn die Matrix  $A$  konstant ist, können wir eine Fundamentallösung mithilfe der Matrix-Exponentiation definieren. Es sei dazu  $\|\cdot\| : M_n(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Norm auf dem Raum der Matrizen über  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , so dass  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ . Eine solche Norm haben wir bereits im Beweis des Umkehrsatzes 7.37 benutzt. Dann folgt

$$\exp(\|A\|) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A^k\| \geq \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right\|,$$

insbesondere konvergiert die Exponentialreihe auch dann absolut, wenn man statt einer Zahl eine Matrix einsetzt. Wir setzen daher

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Man beachte, dass im Allgemeinen  $\exp(A) \cdot \exp(B)$  nicht das gleiche ist wie  $\exp(A+B)$  (Übung).

9.7. PROPOSITION. *Es sei  $A \in M_n(\mathbb{R})$  konstant und  $t_0 \in \mathbb{R}$ , dann ist  $F(t) = \exp((t-t_0)A)$  die Fundamentallösung der Differentialgleichung  $f' = A \cdot f$  mit  $F(t_0) = E_n$ .*

9.8. BEMERKUNG. Es sei  $G \in GL_n(\mathbb{k})$  mit  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  eine invertierbare Matrix und  $A \in M_n(\mathbb{k})$ , dann gilt

$$\exp(GAG^{-1}) = G \exp(A) G^{-1}$$

Wir können jetzt die Jordansche Normalform benutzen, um Fundamentallösungen explizit anzugeben.

9.9. BEMERKUNG. Gegeben sei ein Differentialgleichungssystem der Form

$$(1) \quad \begin{aligned} f_1^{(k_1)} &= F_1(f_1^{(k_1-1)}, \dots, f_1, \dots, f_n^{(k_n-1)}, \dots, f_n), \\ &\vdots \\ f_n^{(k_n)} &= F_n(f_1^{(k_1-1)}, \dots, f_1, \dots, f_n^{(k_n-1)}, \dots, f_n), \end{aligned}$$

nicht notwendigerweise linear. Wir können daraus ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung machen, indem wir Hilfsfunktionen

$$f_{1,0} = f_1, \dots, f_{1,k_1-1} = f_1^{(k_1-1)}, \quad \dots, \quad f_{n,0} = f_n, \dots, f_{n,k_n-1} = f_n^{(k_n-1)}$$

einführen. Dann erhalten wir ein äquivalentes Differentialgleichungssystem der Form

$$(2) \quad \begin{aligned} f'_{1,0} &= f_{1,1}, \quad \dots, \quad f'_{1,k_1-1} = F_1(f_{1,k_1-1}, \dots, f_{1,0}, \quad \dots, \quad f_{n,k_n-1}, \dots, f_{n,0}), \\ &\vdots \\ f'_{n,0} &= f_{n,1}, \quad \dots, \quad f'_{n,k_n-1} = F_n(f_{1,k_1-1}, \dots, f_{1,0}, \quad \dots, \quad f_{n,k_n-1}, \dots, f_{n,0}). \end{aligned}$$

Anfangsbedingungen für (2) bei  $t_0$  haben die Form

$$f_{1,0}(t_0) = v_{1,0}, \dots, f_{1,k_1-1}(t_0) = v_{1,k_1-1}, \quad \dots, \quad f_{n,0}(t_0) = v_{n,0}, \dots, f_{n,k_n-1}(t_0) = v_{n,k_n-1},$$

mit  $v_{1,0}, \dots, v_{n,k_n-1} \in \mathbb{R}$ . Somit verlangen wir für (1), dass

$$f_1(t_0) = v_{1,0}, \dots, f_1^{(k_1-1)}(t_0) = v_{1,k_1-1}, \quad \dots, \quad f_n(t_0) = v_{n,0}, \dots, f_n^{(k_n-1)}(t_0) = v_{n,k_n-1}.$$

9.10. BEISPIEL. Es sei  $a > 0$ . Das Potential  $V(x) = \frac{a^2}{2} x^2$  in Beispiel 8.29 (2) liefert nach Beispiel 8.32 (2) den (klassischen) harmonischen Oszillator

$$f''(t) = -d_{f(t)}V = -a^2 f(t).$$

Er beschreibt näherungsweise ein Faden- oder Federpendel mit sehr kleiner Auslenkung. Mit einem ähnlichen Trick wie in der obigen Bemerkung führen wir die Hilfsfunktion  $g = f'/a$  ein und erhalten ein äquivalentes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}' = A \cdot \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

in  $f$  und  $g = f'/a$ . Wir erhalten ein Fundamentalsystem

$$F(t) = \begin{pmatrix} \cos(at) & \sin(at) \\ -\sin(at) & \cos(at) \end{pmatrix} = \exp(tA).$$

### 9.b. Der Satz von Picard-Lindelöf

In diesem Satz formulieren und beweisen wir einen zentralen Satz über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Wir haben diesen Satz in den Abschnitten 5.f und 9.a bereits stillschweigend vorausgesetzt. Wir betrachten zunächst den zeitunabhängigen Fall, da er etwas einfacher zu formulieren ist. Anschließend führen wir den zeitabhängigen Fall auf den zeitunabhängigen Fall zurück.

9.11. BEISPIEL. Es seien  $a < b$ , dann betrachten wir die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} (t-a)^3 & \text{für } t \leq a, \\ 0 & \text{für } t \in [a, b], \text{ und} \\ (t-b)^3 & \text{für } t \geq b. \end{cases}$$

Jede dieser Funktionen erfüllt die Differentialgleichung

$$f' = 3 f^{\frac{2}{3}}.$$

Also ist das Anfangswertproblem mit  $f(t_0) = 0$  nicht eindeutig lösbar, nicht einmal auf einer beliebig kleinen Umgebung von  $t_0$ , denn wir erhalten unter anderem  $(t-t_0)^3$  und die konstante Funktion 0 als Lösung.

Man beachte, dass die rechte Seite  $y \mapsto 3y^{\frac{2}{3}}$  im obigen Beispiel (sogar gleichmäßig) stetig ist. Um Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu erhalten, müssen wir den Begriff der Stetigkeit etwas verschärfen. Wir werden im Beweis sehen, dass Eindeutigkeit wichtig ist, wenn wir eine Lösung finden wollen, die auch stetig vom Anfangswert abhängt.

9.12. DEFINITION. Es seien  $(M, d_M)$ ,  $(N, d_N)$  metrische Räume. Eine Abbildung  $F: M \rightarrow N$  heißt *Lipschitz-stetig* mit *Lipschitz-Konstante*  $\Lambda$  (kurz  $\Lambda$ -Lipschitz), wenn

$$d_N(F(p), F(q)) \leq \Lambda \cdot d_M(p, q)$$

für alle  $p, q \in M$  gilt.

Wir nennen  $F: M \rightarrow N$  *lokal Lipschitz*, wenn für jeden Punkt  $p \in M$  eine Umgebung  $U$  von  $p$  und eine Konstante  $\Lambda$  existiert, so dass  $F|_U$  die Lipschitz-Eigenschaft mit Lipschitz-Konstante  $\Lambda$  erfüllt.

9.13. BEMERKUNG. Es folgen elementare Eigenschaften.

- (1) Lokale Lipschitz-Funktionen sind stetig.
- (2) Lipschitz-Funktionen sind gleichmäßig stetig. Die Umkehrung dieser Aussagen gilt nicht, siehe oben und Übung.
- (3) Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen und  $F \in \mathcal{C}^1(U; V)$ . Wenn

$$\Lambda = \sup_{p \in U} \|d_p F\|_{\text{op}} = \sup_{p \in U} \sup_{\|v\| \leq 1} \|d_p F(v)\| < \infty$$

und  $U$  konvex ist, ist  $\Lambda$  eine globale Lipschitz-Konstante für  $F$ .

- (4) Stetig differenzierbare Funktionen sind lokal Lipschitz.

Die zwei letzten Eigenschaften folgen aus dem Schrankensatz 8.18.

9.14. DEFINITION. Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Eine Funktion  $g: U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *unterhalbstetig*, wenn für alle  $p \in U$  alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass

$$g(q) > g(p) - \varepsilon \quad \text{für alle } q \in U \text{ mit } |q - p| < \delta.$$

Wenn  $-f$  unterhalbstetig ist, heißt  $f$  *oberhalbstetig*.

Mit anderen Worten kann eine unterhalbstetige Funktion nicht an einer Stelle  $p$  plötzlich „nach oben“ springen. Man kann das auch für Funktionen mit Werten in  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  definieren. Äquivalent kann man Ober- und Unterhalbstetigkeit auch für reellwertige Funktionen auf beliebigen topologischen Räumen betrachten.

9.15. SATZ (Picard-Lindelöf). *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei lokal Lipschitz.*

- (1) *Dann existieren Funktionen  $t_-: U \rightarrow [-\infty, 0)$ ,  $t_+: U \rightarrow (0, \infty]$  und eine stetige Abbildung*

$$F: W_{t_-, t_+} = \{(p, t) \in U \times \mathbb{R} \mid t \in (t_-(p), t_+(p))\} \rightarrow U$$

*mit  $F(p, 0) = p$  für alle  $p \in U$ , die in Richtung  $t$  partiell differenzierbar ist mit*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(p, t) = X(F(p, t)).$$

- (2) *Wenn  $\tau_-, \tau_+$  und  $G: W_{\tau_-, \tau_+} \rightarrow U$  ebenfalls (1) erfüllen, dann gilt  $t_- \leq \tau_-$ ,  $\tau_+ \leq t_+$  und  $G = F|_{W_{\tau_-, \tau_+}}$ .*
- (3) *Die Funktion  $t_+$  ist unterhalbstetig, und  $t_-$  ist oberhalbstetig.*

Der Beweis beruht auf einer Umformulierung der Differentialgleichung zu einer Integralgleichung und dem Banachschen Fixpunktsatz 6.9.

9.16. BEMERKUNG. Es sei  $F: W_{t_-, t_+} \rightarrow U$  wie oben.

- (1) Eigenschaft (1) besagt für jedes  $p \in U$ , dass  $f(t) = F(p, t)$  eine Lösung des zeitunabhängigen Differentialgleichungssystems  $f' = X(f)$ , also

$$\begin{aligned} f'_1 &= X_1(f_1, \dots, f_n), \\ &\vdots \\ f'_n &= X_n(f_1, \dots, f_n), \end{aligned}$$

mit  $f(0) = p$  ist. Somit beschreibt  $F$  Lösungen für alle Anfangswertprobleme mit Anfangszeit  $t_0 = 0$ . In diesem Sinne ist  $F$  eine Art *Fundamentallösung*, siehe Definition 9.4, auch wenn das Gleichungssystem hier nicht notwendig linear ist. Da  $F$  stetig ist, hängen die Lösungen  $f$  stetig vom Anfangswert  $p$  ab. Später betrachten wir auch die stetige Abhängigkeit von den „Koeffizienten“  $X$ .

- (2) Eigenschaft (2) sagt, dass jede obige Lösung  $f(t) = F(p, t)$  in dem Sinne *maximal* ist, dass sie nicht auf ein größeres Definitionsintervall als  $(t_-(p), t_+(p))$  fortgesetzt werden kann. Und (3) garantiert, dass für Anfangswerte nahe  $p$  das maximale Definitionsintervall nicht auf einmal viel kleiner sein kann als für  $p$  — es könnte allerdings deutlich größer werden (Übung).
- (3) Wenn wir der Lösungskurve zunächst bis zur Zeit  $t \in (t_-(p), t_+(p))$  folgen und den dortigen Wert  $q = F(p, t)$  als neuen Startwert nehmen, erhalten wir eine Lösungskurve mit um die Zeit  $t$  verschobenen Anfangsbedingungen. Aus der Eindeutigkeitsaussage folgt

$$\begin{aligned} s \in (t_-(q), t_+(q)) &\iff s + t \in (t_-(p), t_+(p)) \\ \text{und } F(q, s) &= F(F(p, t), s) = F(p, t + s). \end{aligned}$$

Die obige Gleichung heißt manchmal auch die *Flusseigenschaft* von  $F$ . Sie gilt nur für Lösungen zeitunabhängiger Differentialgleichungssysteme.

20. 7. 22

Mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf können wir auch zeitabhängige Differentialgleichungssysteme behandeln. Im Folgenden betrachten wir also  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  für eine offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  und fassen die nullte Koordinate als Zeit  $t$  auf. Wir ergänzen  $X$  zu  $\left(\frac{1}{X}\right): U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Die 1 in der ersten Komponente sorgt dafür, dass die Zeitkoordinate  $t$  mit Geschwindigkeit 1 fortschreitet. Wir machen also aus der Zeitkoordinate eine weitere Ortskoordinate, so dass der zeitabhängige Fall in Dimension  $n$  zu einem Spezialfall des zeitunabhängigen Falls in Dimension  $n+1$  wird. Unsere allgemeine Lösung  $F(t, p, s)$  hängt jetzt ab von der Anfangszeit  $t$ , dem Anfangswert  $p$  (so dass  $(t, p) \in U$ ) und dem Zeitparameter  $s$ . Dann sei  $F(t, p, s) \in U$  mit  $F_0(t, p, s) = s$ .

9.17. FOLGERUNG. *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen und  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Zu jedem Punkt  $(t_0, p) \in U$  existiere eine Umgebung der Form  $I \times V$  mit  $V \subset \mathbb{R}^n$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  und eine Konstante  $C < \infty$ , so dass  $X|_{\{t\} \times V}$  für alle  $t \in I$  Lipschitz mit Lipschitz-Konstante  $C$  ist.*

- (1) *Dann existieren Funktionen  $t_-, t_+: U \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mit  $t_-(t, p) < t$  und  $t_+(t, p) > t$  für alle  $(t, p) \in U$  und eine stetige Abbildung*

$$F: W_{t_-, t_+} = \{ (t, p, s) \in U \times \mathbb{R} \mid s \in (t_-(t, p), t_+(t, p)) \} \rightarrow U$$

*mit  $F(t, p, t) = (t, p)$  für alle  $(t, p) \in U$  und  $F_0(t, p, s) = s$  falls  $(t, p, s) \in W_{t_-, t_+}$ , und*

$$\frac{\partial F}{\partial s}(t, p, s) = \begin{pmatrix} 1 \\ X(F(t, p, s)) \end{pmatrix}.$$

- (2) *Wenn  $\tau_-, \tau_+$  und  $G: W_{\tau_-, \tau_+} \rightarrow U$  ebenfalls (1) erfüllen, dann gilt  $t_- \leq \tau_-$ ,  $\tau_+ \leq t_+$  und  $G = F|_{W_{\tau_-, \tau_+}}$ .*
- (3) *Die Funktion  $t_+$  ist unterhalbstetig, und  $t_-$  ist oberhalbstetig.*

Im Beweis müssen wir sicherstellen, dass die obige, schwächere Lipschitz-Bedingung ausreicht. Diese schwächere Bedingung brauchen wir unten für Folgerung 9.22.

9.18. BEMERKUNG. Es sei  $F: W_{t_-, t_+} \rightarrow U$  wie oben.

(1) Es sei  $(t, p) \in U$ . Die Funktion  $f: (t_-(t, p), t_+(t, p)) \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$f(s) = \begin{pmatrix} F_1(t, p, s) \\ \vdots \\ F_n(t, p, s) \end{pmatrix}$$

löst das zeitabhängige Anfangswertproblem

$$\begin{cases} f'(s) = X(s, f(s)) , \\ f(t) = p . \end{cases}$$

(2) Es sei  $(t, p) \in U$  und  $s \in (t_-(t, p), t_+(t, p))$ . Wegen der Eindeutigkeitsaussage gilt

$$(t_-(F(t, p, s)), t_+(F(t, p, s))) = (t_-(t, p), t_+(t, p))$$

und  $F(s, q, u) = F(F(t, p, s), u) = F(t, p, u)$  für alle  $u \in (t_-(t, p), t_+(t, p))$ .

Das entspricht der Flusseigenschaft aus Bemerkung 9.16 (3).

Wir wollen uns jetzt anschauen, was es bedeutet, wenn wir ein Anfangswertproblem nicht für alle  $t \in \mathbb{R}$  lösen können.

9.19. PROPOSITION. *Es seien  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  und  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  wie in Folgerung 9.17, und  $f: (a, b) \rightarrow U$  sei die maximale Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} f'(t) = X(t, f(t)) , \\ f(t_0) = p_0 . \end{cases}$$

*Falls  $b < \infty$ , existiert für jedes Kompaktum  $K \subset U$  ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $(t, f(t)) \notin K$  für alle  $t > b - \varepsilon$ . Analoges gilt, falls  $a > -\infty$ .*

Anschaulich gesprochen: falls eine Lösung nicht für beliebig große Zeiten definiert ist, verlässt sie den Definitionsbereich in endlicher Zeit. Insbesondere kann es nicht vorkommen, dass die Lösung in einer kompakten Teilmenge des Definitionsbereichs immer schneller herumirrt. Der Beweis benutzt die folgende Abschätzung.

9.20. LEMMA (Grönwall). *Es sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta, f \in C^0([a, b])$  Funktionen mit  $\beta \geq 0$  und*

$$f(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s) f(s) ds \quad \text{für alle } t \in [a, b] .$$

*Dann gilt*

$$f(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s) \beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(u) du\right) ds \quad \text{für alle } t \in [a, b] .$$

9.21. BEMERKUNG. Falls die Funktion  $f$  im obigen Lemma differenzierbar ist, hat man eine etwas einfachere Formulierung (ohne  $\alpha$ ). Sei  $\beta \in C^0([a, b])$ ,  $f \in C^1([a, b])$ . Aus

$$f'(t) \leq \beta(t) f(t) \quad \text{für alle } t \in [a, b]$$

folgt

$$f(t) \leq f(a) \exp\left(\int_a^t \beta(s) ds\right) \quad \text{für alle } t \in [a, b] ,$$

und zwar ohne zusätzliche Annahmen an das Vorzeichen von  $\beta$ .

Zu guter Letzt holen wir jetzt den Existenz- und Eindeigkeitssatz für lineare Differentialgleichungssysteme nach, den wir im letzten Abschnitt bereits vorausgesetzt hatten. Dabei ist vor allem wichtig, dass alle Lösungen immer auf das gesamte Definitionsintervall  $I$  fortgesetzt werden können. Man beachte, dass sich die abgeschwächte Lipschitz-Bedingung in Folgerung 9.17 bei einem linearen Differentialgleichungssystem aus der Linearität ergibt. Wir müssen sie also nicht explizit voraussetzen.

9.22. FOLGERUNG. Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $A: I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  sei stetig. Dann ist das lineare Gleichungssysteme  $f' = A \cdot f$  für jeden Anfangswert auf ganz  $I$  eindeutig lösbar.

9.23. BEMERKUNG. Nach einem Satz von Peano existieren Lösungen auch dann noch, wenn  $X$  nur stetig, aber nicht notwendigerweise lokal Lipschitz ist. Allerdings sind sie nicht immer eindeutig, siehe Beispiel 9.11.

### 9.c. Differenzierbare Vektorfelder und Flüsse

In diesem Abschnitt betrachten wir noch einmal zeitabhängige Differentialgleichungssysteme, diesmal allerdings mit differenzierbaren Koeffizienten. Die Koeffizienten  $X$  einer linearen Differentialgleichung auf  $U \subset \mathbb{R}^n$  nennt man auch *Vektorfeld*. Die Lösung  $F$  aus dem Satz von Picard-Lindelöf nennt man *Fluss*. Das (möglicherweise zeitabhängige) Vektorfeld gibt also an, wie schnell und in welche Richtung der Fluss (zur jeweiligen Zeit) fließt.

Oftmals benutzt man Vektorfelder, um Abbildungen mit bestimmten Eigenschaften zu konstruieren. Man möchte — wenn möglich — differenzierbare Lösungen erhalten. In diesem Abschnitt sehen wir, dass differenzierbare Vektorfelder auch zu differenzierbaren Flüssen führen.

9.24. BEMERKUNG. Auf den ersten Blick ist das ganz einfach. Man leitet die Differentialgleichung  $F'(t, q) = X(t, F(t, q))$  ab und erhält

$$(\partial_i F)'(t, q) = \partial_i(F'(t, q)) = \partial_i(X(t, F(t, q))) = \sum_j \partial_j X(t, F(t, q)) \cdot \partial_i F_j(t, q).$$

Mithin erfüllt  $\partial_i F$  ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem, das wir mit Folgerung 9.22 lösen können.

Das Problem bei dieser Überlegung besteht darin, dass wir gar nicht wissen, ob  $\partial_i F$  überhaupt existiert. Wir müssen beim Beweis also etwas sorgfältiger sein. In jedem Fall sehen wir aber, dass wir ein zeitabhängiges Differentialgleichungssystem lösen müssen, denn  $\partial_j X(t, F(t, q))$  hängt in der Regel via  $F(t, q)$  von  $t$  ab, selbst wenn  $X$  selbst nicht von  $t$  abhängt.

9.25. SATZ (Picard-Lindelöf; differenzierbare Version). Es sei  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen und  $X \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$  mit  $k \geq 1$ . Es sei  $F: W_{t_-, t_+} \rightarrow U$  eine maximale Lösung wie in Folgerung 9.17 mit  $F(t, p, t) = (t, p)$  für alle  $(t, p) \in U$ . Dann gilt  $F \in C^k(W_{t_-, t_+}, U)$ .

Man beachte, dass dann auch  $\frac{\partial F(t, p, s)}{\partial s} = X(F(t, p, s))$  eine  $C^k$ -Funktion ist.

Bis jetzt wissen wir nur, wie  $F$  von der Zeit und von den Anfangswerten abhängen. Mit einem kleinen Trick finden wir heraus, was passiert, wenn wir die Koeffizienten  $X$  abändern. Dazu betrachten wir jetzt eine Menge  $V \subset \mathbb{R}^{n+1+m}$  und ein zeit- und parameterabhängiges Vektorfeld  $X: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Für jedes  $v \in \mathbb{R}^m$  betrachten wir ein zeitabhängiges Differentialgleichungssystem auf dem Definitionsbereich

$$U_v = \{ (t, p) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (t, p, v) \in V \}.$$

Zusätzlich zu den Variablen  $t$  (Anfangszeit),  $p$  (Anfangswert) und  $s$  (Zeitparameter) brauchen wir noch den Parameter  $v$  als zusätzliches Argument.

9.26. FOLGERUNG. Es sei  $V \subset \mathbb{R}^{n+1+m}$  offen und  $X: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei lokal Lipschitz (beziehungsweise  $C^k$ ). Dann hängt die maximale Lösung  $F: W_{t_-, t_+} \rightarrow V$  des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial s}(t, p, v, s) &= X_1(s, F(t, p, v, s), v), \\ &\vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial s}(t, p, v, s) &= X_n(s, F(t, p, v, s), v) \end{aligned}$$

mit  $F(t, p, v, t) = p$  stetig (beziehungsweise  $C^k$ ) von den Parametern  $v$  ab.

Mit dem Grönwall-Lemma 9.20 können wir diese Abhängigkeit bei Bedarf genauer abschätzen. Die obige Folgerung ist unter anderem in der Regelungstechnik wichtig. Beispielsweise kann man manche chemischen Prozess als Differentialgleichungen modellieren. Die einzelnen Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  können unter anderem die Konzentrationen verschiedener Moleküle sowie die aktuelle Temperatur sein. Zusätzliche Parameter  $v_1, \dots, v_m$  können zum Beispiel Zufluss bestimmter Moleküle oder die Heizung beziehungsweise Kühlung sein. Wenn der weitere Verlauf des Prozesses differenzierbar von diesen Parametern abhängt, kann man durch geschickte Modifikation der Parameter den Prozess in eine gewünschte Richtung lenken.

9.27. BEMERKUNG. Mit dem Satz von Picard-Lindelöf können wir auch den Satz 7.40 über implizite Funktionen beweisen.

#### 9.d. Anwendung auf partielle Differentialgleichungen

Partielle Differentialgleichungen und partielle Differentialgleichungssysteme betreffen Funktionen, die auf einer Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  definiert sind, also  $f \in C^k(\Omega)$  oder  $f \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$ . Dabei können beliebig viele partielle Ableitungen von  $f$  in den Gleichungen auftauchen. Oftmals gibt man *Randbedingungen* vor; im einfachsten Fall verlangt man etwa  $f|_{\partial\Omega} = 0$ . Falls eine der Variablen die Zeit ist, kann man zusätzlich Anfangsbedingungen vorschreiben.

Die Lösungstheorie partieller Differentialgleichungen ist im Allgemeinen sehr kompliziert und erfordert Methoden, die weit über Analysis II hinausgehen. In diesem Abschnitt beschreiben wir kurz verschiedene Szenarien, in denen man partielle Differentialgleichungen in Spezialfällen auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückführen kann.

9.28. BEISPIEL. Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Wir modellieren eine *schwingende Saite* mit Hilfe einer Funktion  $f \in C^k(I \times \mathbb{R})$ , so dass  $f(x, t)$  die Auslenkung an der Stelle  $x$  zur Zeit  $t$  beschreibt. Die Rückstellkraft ist proportional zur zweiten Ortsableitung von  $f$ , und wir erhalten im einfachsten Fall die lineare partielle Differentialgleichung

$$(a) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = C \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \\ f|_{\partial I \times \mathbb{R}} = 0, \end{cases}$$

für ein  $C > 0$ .

Wenn wir eine *Eigenfunktion*  $s_\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$  des Differentialoperators  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$  finden, der die Randbedingung erfüllt, das heißt, wenn

$$(b) \quad \begin{cases} s_\lambda'' = \lambda s_\lambda, \\ s_\lambda|_{\partial I} = 0, \end{cases}$$

dann erhalten wir eine Lösung von (a) der Form

$$(c) \quad f(x, t) = s_\lambda(x) \cdot g_\lambda(t)$$

genau dann, wenn  $g_\lambda \in C^k(\mathbb{R})$  die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(d) \quad \ddot{g}_\lambda = C\lambda g_\lambda$$

erfüllt. Dieses Verfahren nennt man *Separationsansatz*.

Wir betrachten Lösungen von (b), zunächst ohne die Randbedingung  $s_\lambda|_{\partial I} = 0$ . Dazu nehmen wir  $I = [0, \ell]$  an.

- (1) Falls  $\lambda > 0$ , erhalten wir ein Fundamentalsystem aus den Lösungen  $e^{\sqrt{\lambda}x}$  und  $e^{-\sqrt{\lambda}x}$ . Die einzige Linearkombination, die die Randbedingungen erfüllt, ist 0. Also gibt es keine interessanten Lösungen der Form (c) mit  $\lambda < 0$ .
- (2) Falls  $\lambda = 0$ , erhalten wir die fundamentalen Lösungen 1 und  $x$ . Auch hier ist 0 die einzige Lösung des Randwertproblems, und wir finden keine interessante Lösung von (c) mit  $\lambda = 0$ .
- (3) Falls  $\lambda < 0$ , bilden  $\cos(\sqrt{-\lambda}x)$  und  $\sin(\sqrt{-\lambda}x)$  ein Fundamentalsystem. Aus  $s_\lambda(0) = 0$  folgt  $s_\lambda = c \sin(\sqrt{-\lambda}x)$ . Die weiteren Nullstellen dieser Funktion liegen bei  $\frac{\pi n}{\sqrt{-\lambda}}$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ . Also erhalten wir eine Lösung von (b) genau dann, wenn  $\ell = \frac{\pi n}{\sqrt{-\lambda}}$ , oder äquivalent, wenn  $\lambda = -\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2$ . Da die Gleichung (d) ganz ähnliche Lösungen hat, erhalten wir insgesamt Lösungen der Form

$$(e) \quad \sin \frac{\pi n x}{\ell} \cos \frac{\sqrt{C} \pi n t}{\ell} \quad \text{und} \quad \sin \frac{\pi n x}{\ell} \sin \frac{\sqrt{C} \pi n t}{\ell} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_> .$$

Nach dem Superpositionsprinzip ist jede Linearkombination von Lösungen der obigen Form wieder eine Lösung des Problems. Man kann sogar zeigen, dass sich jede hinreichend schöne Lösung von (a) als konvergente unendliche Linearkombination der obigen Lösungen schreiben lässt.

Eine Lösung (e) zu  $n \in \mathbb{N}_>$  hat in  $t$  die Periode  $\frac{2\ell}{\sqrt{C}n}$ . Ihr Kehrwert ist die *Frequenz*  $\frac{\sqrt{C}n}{2\ell}$ , das heißt, die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit. Man sieht, dass die Frequenzen linear von der ganzen Zahl  $n$  abhängen. Das ist das *Obertonspektrum* der schwingenden Seite. Die Grundfrequenz ist  $\frac{\sqrt{C}}{2\ell}$ . Um sie zu verändern, kann man  $C$  oder  $\ell$  variieren. Bei einer Geige oder Gitarre verändert man  $C$  beim Stimmen, und  $\ell$ , wenn man einen Ton greift. Man erhält höhere Obertöne, indem man Flageolett spielt.

9.29. BEISPIEL. Anstelle einer schwingenden Saite betrachten wir jetzt eine schwingende Luftsäule. Wenn der Durchmesser viel kleiner als die Länge ist, wird sie durch die gleiche Differentialgleichung beschrieben. Allerdings erhält man je nach Instrument andere Randbedingungen. Bei der Klarinette hat man beispielsweise

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = C \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \\ f(0, \cdot) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\ell) = 0, \end{cases}$$

für ein  $C > 0$ . Wenn man den Separationsansatz wie oben durchführt, erhält man jetzt die Lösungen

$$\sin \frac{\pi(2n-1)x}{2\ell} \cos \frac{\sqrt{C} \pi(2n-1)t}{2\ell} \quad \text{und} \quad \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2\ell} \sin \frac{\sqrt{C} \pi(2n-1)t}{2\ell} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_> .$$

Bei einer Klarinette haben wir also einen Grundton mit der Frequenz  $\frac{\sqrt{C}}{4\ell}$ , und die Frequenzen der Obertöne sind die ungeraden Vielfachen der Grundfrequenz.

9.30. BEISPIEL. Wir betrachten jetzt eine Pauke mit einem runden Fell vom Radius  $R$ , und zwar gleich in beliebig großer Dimension  $n$ . Die lineare partielle Differentialgleichung für  $F \in C^k(D_R^n \times \mathbb{R})$  lautet diesmal

$$(a) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = C \Delta F, \\ F|_{S_R^1 \times \mathbb{R}} = 0. \end{cases}$$

Dabei fassen wir die zweiten Ortsableitungen zum *Laplace-Operator*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

zusammen. Hätten wir ein rechteckiges Fell genommen, dann könnten wir den obigen Separationsansatz mit  $n + 1$  Variablen anwenden. Hier betrachten wir zunächst nur radialsymmetrische Lösungen.

Mit einem Separationsansatz kommen wir auf die Differentialgleichung

$$(b) \quad \begin{cases} \Delta S_\lambda = C \lambda S_\lambda, \\ S_\lambda|_{S_R^{n-1}} = 0 \end{cases}$$

für  $S_\lambda \in C^k(D_R^n)$ . Eine *radialsymmetrische* Funktion  $S_\lambda \in C^k(D_R^n \times \mathbb{R})$  ist eine Funktion der Form

$$(c) \quad S_\lambda(x_1, \dots, x_n) = s_\lambda\left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right).$$

Es folgt

$$(d) \quad (\Delta S_\lambda)(x_1, \dots, x_n) = \left(s_\lambda'' + \frac{n-1}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} s_\lambda'\right)(x_1, \dots, x_n).$$

Also haben wir die partielle Differentialgleichung (b) durch unsere Symmetrieannahme (c) zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(e) \quad \begin{cases} s_\lambda''(r) + \frac{n-1}{r} s_\lambda' = \lambda s_\lambda, \\ s_\lambda'(0) = 0, \\ s_\lambda(R) = 0 \end{cases}$$

reduziert. Ohne die Annahme  $s_\lambda'(0) = 0$  wäre die Funktion  $S_\lambda$  in (c) bei 0 nicht differenzierbar.

Die Differentialgleichung (e) hat nichttriviale Lösungen nur für  $\lambda < 0$ . Indem wir  $s_\lambda(r) = r^{1-\frac{n}{2}} g(\sqrt{-\lambda} r)$  setzen und  $x = \sqrt{-\lambda} r$  definieren, erhalten wir aus (e) die *Besselsche Differentialgleichung*

$$x^2 g''(x) + x g'(x) + \left(x^2 - \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2\right) g(x) = 0.$$

Als Lösung betrachten wir die *Bessel-Funktion*

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(\nu+k+1) k!}$$

mit  $\nu = \frac{n}{2} - 1$ , dabei ist  $\Gamma$  die Funktion aus Beispiel 8.7. Für die Funktion  $s_\lambda$  erhalten wir die Potenzreihe

$$s_\lambda(r) = (-\lambda)^{\frac{n}{2}-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \left(\frac{r}{2}\right)^{2k}}{\Gamma\left(k + \frac{n}{2}\right) k!},$$

wobei wir den konstanten Vorfaktor natürlich weglassen dürfen.



## Das Lebesgue-Maß

Wir haben in Kapitel 4 das Riemann-Integral behandelt, das Sie vermutlich aus der Schule kennen. In den folgenden Kapiteln führen wir einen anderen Integrationsbegriff ein. Das erlaubt uns nicht nur, deutlich mehr Funktionen zu integrieren, sondern liefert vor allem auch wesentlich stärkere Konvergenzsätze. Damit können wir beispielsweise Räume von (Klassen von) Funktionen konstruieren, die bezüglich gewisser Integralnormen vollständig sind. Mehr zu diesen Räumen können Sie später in Vorlesungen über Funktionalanalysis oder partielle Differentialgleichungen lernen.

Zur Definition des Lebesgue-Integrals trennen wir den Volumenbegriff (das *Maß*) ein Stück weit von der Definition des Integrals. In diesem Kapitel führen wir (äußere) Maße ein, die Integrationstheorie folgt dann im nächsten Kapitel. Wir behandeln speziell das Lebesgue-Maß. Es ist das eindeutige Isometrie-invariante Maß auf dem  $\mathbb{R}^n$ , das ist einem gewissen Sinn gut zur Topologie und Geometrie des  $\mathbb{R}^n$  passt. In einem späteren Kapitel werden wir Maße auf Untermannigfaltigkeiten definieren.

In der Wahrscheinlichkeitstheorie werden Sie viele weitere Maßräume kennenlernen, und wichtige Größen wie Erwartungswerte und Varianzen werden über Integrale definiert. Auch wenn die zugrundeliegenden Maßräume oft völlig verschieden von den hier betrachteten sind, sind die Begriffe „Maß“ und „Integral“ genau die, die wir hier kennenlernen werden.

### 10.a. Äußere Maße

Ein Maß soll für so etwas sein wie ein Volumenbegriff für Teilmengen eines vorgegebenen Raumes (etwa  $\mathbb{R}^n$ ). Das heißt, es sollte Werte in  $[0, \infty]$  annehmen, und additiv sein unter abzählbaren disjunkten Vereinigungen. Leider sind diese Bedingungen restriktiver, als es auf den ersten Blick scheint, mehr dazu in Bemerkung 10.44. Daher führen wir zunächst äußere Maße mit deutlich schwächeren Eigenschaften ein. Danach suchen wir nach „schönen“ Teilmengen, für die sich das äußere Maß so verhält, wie wir es von einem Volumenbegriff erwarten. Dieses Vorgehen entspricht im Wesentlichen der Konstruktion eines Maßes nach dem Maßerweiterungssatz von Caratheodory.

Wir erinnern uns an die Potenzmenge  $\mathcal{P}(M)$  aller Teilmengen von  $M$  aus Abschnitt 1.a und an die erweiterte Zahlengerade  $[-\infty, \infty]$  aus Abschnitt 2.b. Nach Bemerkung 2.27 dürfen wir zwei Elemente aus  $[0, \infty]$  addieren. Reihen mit nichtnegativen Summanden haben Grenzwerte in  $[0, \infty]$ , siehe Abschnitt 2.e. Sollte mindestens ein Summand  $\infty$  sein, ist der Grenzwert der Reihe ebenfalls  $\infty$ . In der Maß- und Integrationstheorie benutzt man den griechischen Buchstaben  $\sigma$  als Symbol für alles, was mit abzählbaren Summen oder abzählbaren Vereinigungen verträglich ist.

**10.1. DEFINITION.** Es sei  $M$  eine Menge. Ein *äußeres Maß* auf  $M$  ist eine Abbildung  $\mu: \mathcal{P} \rightarrow [0, \infty]$  mit folgenden Eigenschaften.

- (1) Es gilt  $\mu(\emptyset) = 0$ .
- (2)  *$\sigma$ -Subadditivität.* Sei  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Teilmengen von  $M$ , dann gilt

$$A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) .$$

Insbesondere gilt  $\mu(A) \leq \mu(B)$  falls  $A \subset B \subset M$ . Außerdem gilt  $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$  für beliebige  $A, B \subset M$ .

10.2. DEFINITION. Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf einer Menge  $M$ . Eine Teilmenge  $A \subset M$  heißt  $\mu$ -messbar, wenn für alle  $B \subset M$  gilt

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A).$$

Mit anderen Worten ist  $A$  genau dann  $\mu$ -messbar, wenn  $\mu(C \cup D) = \mu(C) + \mu(D)$  für alle  $C, D \subset M$  mit  $C \subset A$  und  $D \cap A = \emptyset$  gilt. Da  $\mu(B) \leq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$  aus Subadditivität folgt, hätte es gereicht, hier  $\mu(B) \geq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$  zu fordern. Aus diesem Grund würde es in obiger Definition reichen, nur  $B$  mit  $\mu(B) < \infty$  zu betrachten. Wir sehen weiter unten, dass sich ein äußeres Maß auf seinen messbaren Mengen so verhält, wie wir es von einem Volumen erwarten. Wenn das Maß aus dem Kontext klar ist, schreiben wir nur noch „messbar“.

Eine kleine Warnung: „ $A$  ist messbar“ ist weder dazu äquivalent, dass  $\mu(A)$  definiert ist (ist es bei einem äußeren Maß ja immer), noch dass  $\mu(A) < \infty$ .

10.3. BEISPIEL. Es sei  $M$  eine beliebige Menge.

- (1) Das Nullmaß ordnet jeder Teilmenge  $A \subset M$  den Wert 0 zu. Es ist ein äußeres Maß, und alle Teilmengen von  $M$  sind 0-messbar.
- (2) Sei  $x \in M$ . Das *Dirac-Maß* ist definiert durch

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Alle Teilmengen  $A \subset M$  sind Dirac-messbar.

- (3) In Anlehnung an Definition 1.16 betrachten wir das *Zählmaß*

$$\#: \mathcal{P}(M) \longrightarrow \bar{\mathbb{N}} \subset [0, \infty],$$

das jeder endlichen Menge die Anzahl ihrer Elemente zuordnet und jeder unendlichen Menge den Wert  $\infty$ . Wir haben in einer Übung zu Analysis I gesehen, dass

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

Das reicht, um  $\sigma$ -Subadditivität zu beweisen und zu zeigen, dass alle Teilmengen von  $M$  messbar sind (Übung).

10.4. DEFINITION. Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf einer Menge  $M$ . Eine Teilmenge  $A \subset M$  heißt  $\mu$ -Nullmenge genau dann, wenn  $\mu(A) = 0$ .

10.5. BEMERKUNG. Wir listen ein paar elementare Eigenschaften auf.

- (1) Jede  $\mu$ -Nullmenge ist  $\mu$ -messbar.
- (2) Jede Teilmenge einer  $\mu$ -Nullmenge ist wieder eine  $\mu$ -Nullmenge.
- (3) Eine abzählbare Vereinigung von  $\mu$ -Nullmengen ist wieder eine  $\mu$ -Nullmenge.

10.6. PROPOSITION UND DEFINITION. *Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf einer Menge  $M$  und  $A \subset M$ . Dann ist die Einschränkung  $\mu|_A$  von  $\mu$  auf  $A$  mit*

$$\mu|_A(B) = \mu(A \cap B) \quad \text{für alle } B \subset M$$

*wieder ein äußeres Maß auf  $M$ , und jede  $\mu$ -messbare Teilmenge ist auch  $\mu|_A$ -messbar.*

10.7. DEFINITION. Es sei  $M$  eine Menge. Eine Teilmengen  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(M)$  heißt  $\sigma$ -Algebra auf  $M$ , wenn

- (1)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ,
- (2)  $A \in \mathcal{A} \implies M \setminus A \in \mathcal{A}$ ,
- (3)  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  Folge in  $\mathcal{A} \implies \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ .

10.8. BEISPIEL. Es sei  $M$  eine Menge, dann sind  $\{\emptyset, M\}$  und  $\mathcal{P}(M)$  jeweils  $\sigma$ -Algebren auf  $M$ .

Da wir Komplemente bilden dürfen, ist eine  $\sigma$ -Algebra auch unter abzählbaren Durchschnitten abgeschlossen. Man vergleiche das mit dem Begriff einer Topologie aus Definition 6.11. Dort sind auf der einen Seite beliebige, also auch überabzählbare Vereinigungen offener Mengen wieder offen, auf der anderen Seite aber nur endliche Durchschnitte. Und in vielen Fällen ist das Komplement einer offenen Menge selbst nicht offen. Kurz gesagt sind sowohl Topologien als auch  $\sigma$ -Algebren Teilmengen der Potenzmenge, mit ähnlichen, aber im Detail unterschiedlichen Eigenschaften. In den nächsten Abschnitten werden wir uns auch anschauen müssen, wie sich ein spezielles Maß, das Lebesgue-Maß bezüglich der Topologie des  $\mathbb{R}^n$  verhält.

Wir können jetzt auch den „richtigen“ Begriff eines Maßes einführen.

10.9. DEFINITION. Es sei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf einer Menge  $M$ . Ein Maß auf  $\mathcal{A}$  ist eine  $\sigma$ -additive Abbildung  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ , das heißt, für jede Folge  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkter Elemente von  $\mathcal{A}$  gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i).$$

Man nennt  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  einen Maßraum, wenn  $M$  eine Menge,  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $M$  und  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  ein Maß ist.

Wir ergänzen: ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $M$  ist ein Maß auf  $M$  mit  $\mu(M) = 1$ , und ein Maßraum  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  heißt Wahrscheinlichkeitsraum, wenn  $\mu(M) = 1$ .

Im Unterschied zu einem äußeren Maß ist  $\mu$  also nur auf einer Teilmenge der Potenzmenge definiert. Dafür verlangen wir aber strikte  $\sigma$ -Additivität anstelle der deutlich schwächeren  $\sigma$ -Subadditivität.

10.10. SATZ. Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf einer Menge  $M$ . Dann bilden die  $\mu$ -messbaren Mengen eine  $\sigma$ -Algebra auf  $M$ , und  $\mu$  definiert auf  $\mathcal{A}$  ein Maß im Sinne der obigen Definition.

Das heißt insbesondere, dass sich  $\mu$  auf (abzählbaren) disjunkten Vereinigungen  $\mu$ -messbarer Mengen so verhält, wie wir es von einem Volumenbegriff erwarten würden. In allen Beispielen in 10.3 erhalten wir die ganze Potenzmenge als  $\sigma$ -Algebra der messbaren Mengen. Beim Lebesgue-Maß wird das nicht mehr so sein, siehe Bemerkung 10.44. Weitere Beispiele folgen in den Übungen.

10.11. BEMERKUNG. Wir können also jedes äußere Maß  $\mu$  zu einem „echten“ Maß auf der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  der  $\mu$ -messbaren Mengen einschränken. Nach Bemerkung 10.5 (2) enthält  $\mathcal{A}$  alle Teilmengen aller Nullmengen. Einen Maßraum  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  mit dieser Eigenschaft nennt man „vollständig“ — das hat aber nichts mit Ordnungsvollständigkeit (Definition 1.41) oder metrischer Vollständigkeit (Definition 6.6) zu tun.

Umgekehrt können wir jedes Maß  $\mu$  auf einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  auf  $M$  zu einem äußeren Maß  $\bar{\mu}$  auf ganz  $M$  ausdehnen durch

(\*) 
$$\bar{\mu}(B) = \inf \{ \mu(A) \mid A \in \mathcal{A} \text{ und } B \subset A \}.$$

Jedes Element von  $\mathcal{A}$  ist  $\bar{\mu}$ -messbar mit  $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$ . Satz 10.10 liefert also unter Umständen nicht genau das ursprüngliche Maß  $\mu$ , sondern eine Fortsetzung auf eine möglicherweise größere  $\sigma$ -Algebra. Wenn wir (\*) auf das neue Maß anwenden, erhalten wir wieder genau  $\bar{\mu}$  (Übung).

In (\*) approximieren wir beliebige Teilmengen  $B$  „von außen“ durch messbare Mengen, daher der Begriff „äußeres Maß“. Jetzt wird auch klar, warum wir nur  $\sigma$ -Subadditivität an Stelle von  $\sigma$ -Additivität verlangt haben. Die beiden obigen Konstruktionen sind „beinahe invers“ zueinander. Wir haben uns für den Zugang über äußere Maße entschieden.

10.12. PROPOSITION (Stetigkeit). *Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf einer Menge  $M$  und  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge  $\mu$ -messbarer Teilmengen von  $M$ .*

$$\begin{aligned} A_0 \subset A_1 \subset \dots & \implies \mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i), \\ A_0 \supset A_1 \supset \dots \quad \text{und} \quad \mu(A_0) < \infty & \implies \mu\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i). \end{aligned}$$

Zu guter Letzt können wir Maße und  $\sigma$ -Algebren längs beliebiger Abbildungen vorwärtsschieben. Dazu erinnern wir uns an das Urbild aus Bemerkung 3.3. Sei  $f: M \rightarrow N$  eine beliebige Abbildung zwischen Mengen, dann erhalten wir eine Abbildung  $f^{-1}: \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathcal{P}(M)$  mit  $V \mapsto f^{-1}(V)$ . Sei jetzt  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(M)$ , dann erhalten wir analog  $(f^{-1})^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}(N)$ .

10.13. PROPOSITION UND DEFINITION. *Es sei  $f: M \rightarrow N$  eine Abbildung von Mengen.*

(1) *Sei  $\mu: \mathcal{P}(M) \rightarrow [0, \infty]$  ein äußeres Maß auf  $M$ . Dann ist*

$$f_*\mu = \mu \circ f^{-1}: \mathcal{P}(N) \rightarrow [0, \infty] \quad \text{mit} \quad f_*\mu(V) = \mu(f^{-1}(V))$$

*ein äußeres Maß auf  $N$ , das Bildmaß von  $\mu$  unter  $f$ .*

(2) *Es sei  $B \subset N$ . Wenn  $f^{-1}(B) \subset M$  eine  $\mu$ -messbare Teilmenge ist, dann ist  $B$  eine  $f_*\mu$ -messbare Teilmenge.*

(3) *Sei  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(M)$  eine  $\sigma$ -Algebra. Dann ist*

$$f_*\mathcal{A} = (f^{-1})^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}(N) \quad \text{mit} \quad B \in f_*\mathcal{A} \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

*eine  $\sigma$ -Algebra auf  $N$ , die Bild- $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{A}$  unter  $f$ .*

*Sei insbesondere  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum, dann induziert  $f$  einen Maßraum  $(N, f_*\mathcal{A}, f_*\mu)$ .*

Wenn  $\mu$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, dann auch  $f_*\mu$ , denn

$$f_*\mu(N) = \mu(f^{-1}(N)) = \mu(M) = 1.$$

Während sich Bildmaße sehr einfach abstrakt definieren lassen, ist es nicht immer einfach, sie konkret zu bestimmen.

10.14. BEISPIEL. Wir betrachten das Zählmaß  $\#$  auf der einpunktigen Menge  $\{*\}$ . Es sei  $M$  eine Menge,  $x \in M$ , und  $f: \{*\} \rightarrow M$  sei die eindeutige Abbildung mit  $f(*) = x$ . Dann gilt

$$f_*\# = \delta_x.$$

## 10.b. Konstruktion des Lebesgue-Maßes

Wir konstruieren jetzt das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^n$  als äußeres Maß. Die für den Augenblick wichtigsten Eigenschaften des Lebesgue-Maßes beweisen wir in den folgenden Abschnitten.

Es seien  $I_1, \dots, I_n$  Intervalle mit Grenzen  $a_i \leq b_i$ , das heißt  $(a_i, b_i) \subset I_i \subset [a_i, b_i]$ . Dann nennen wir  $Q = I_1 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$  einen Quader im  $\mathbb{R}^n$  und schreiben  $|Q| = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$  für sein „anschauliches Volumen“.

10.15. PROPOSITION UND DEFINITION. Das (äußere) Lebesgue-Maß einer Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist definiert als

$$\lambda^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} |Q_i| \mid (Q_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ Folge von Quadern im } \mathbb{R}^n \text{ mit } A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} Q_i \right\}.$$

Die Menge der  $\lambda^n$ -messbaren Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  heißt die Lebesgue- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{L}^n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ .

Man beachte, dass wir die Menge  $A$  „von außen“ durch Vereinigungen von Quadern approximieren. Satz 10.10 macht aus dem oben definierten äußeren Lebesgue-Maß das Lebesgue-Maß auf  $\mathcal{L}^n$ , das wir auch wieder mit  $\lambda^n$  bezeichnen wollen. Wir erhalten also einen Maßraum  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, \lambda^n)$ .

10.16. BEISPIEL. Es sei  $p \in \mathbb{R}^n$  und  $J \subsetneq \{1, \dots, n\}$ , dann ist

$$E_{p,J} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = p_j \text{ für alle } j \in \{1, \dots, n\} \setminus J\}$$

ein echter achsenparalleler affiner Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  ( $J$  gibt die Koordinatenrichtungen an, in die sich  $E$  vom Punkt  $p$  aus erstrecken darf). Dann folgt

$$\lambda^n(E_{p,J}) = 0.$$

Bemerkung 10.5 liefert uns weitere Nullmengen, beispielsweise abzählbare Vereinigungen von Teilmengen verschiedener solcher Unterräume.

Insbesondere ist  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  bezüglich des eindimensionalen Lebesgue-Maßes eine Nullmenge.

Aus der Definition des Lebesgue-Maßes ergibt sich für einen Quader  $Q$  unmittelbar  $\lambda^n(Q) \leq |Q|$ , da  $Q$  sich selbst überdeckt. Wir wollen Gleichheit mit einem Kompaktheitsargument beweisen. Dazu brauchen wir einen anderen Kompaktheitsbegriff als in Kapitel 6.d.

10.17. DEFINITION. Es sei  $(M, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum. Eine *offene Überdeckung* von  $M$  ist eine Teilmenge  $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ , so dass

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = M.$$

Ein topologischer Raum  $M$  heißt *kompakt*, wenn jede Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $M$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt, das heißt, eine endliche Teilmenge  $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$  mit  $\bigcup \mathcal{U}_0 = M$ .

Diese Eigenschaft heißt auch *Heine-Borel-Eigenschaft*, denn nach dem Satz von Heine-Borel gilt sie für  $A \subset \mathbb{R}^N$  genau dann, wenn  $A$  beschränkt und abgeschlossen ist. Wir erinnern uns, dass  $A$  nach dem Satz 2.32 von Bolzano-Weierstraß genau dann folgenkompakt ist (siehe Definition 6.24), wenn  $A$  beschränkt und abgeschlossen ist.

Tatsächlich sind Kompaktheit und Folgenkompaktheit für alle metrischen Räume äquivalent. Um das zu beweisen, führen wir noch zwei weitere Begriffe ein, die in der Analysis ebenfalls gelegentlich hilfreich sind.

10.18. DEFINITION. Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum.

- (1) Dann heißt  $M$  *präkompakt* oder *total beschränkt*, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  endlich viele Punkte  $p_1, \dots, p_N$  gibt, so dass

$$M = \bigcup_{i=1}^N B_\varepsilon(p_i).$$

- (2) Sei  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(M)$  eine Überdeckung von  $M$ . Eine Zahl  $\rho > 0$  heißt *Lebesgue-Zahl* von  $\mathcal{U}$ , wenn zu jedem  $p \in M$  eine Menge  $U \in \mathcal{U}$  existiert, so dass  $B_\rho(p) \subset U$ .

Wir fassen die wichtigsten Eigenschaften kompakter metrischer Räume in einem Satz zusammen.

10.19. SATZ. *Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum mit metrischer Topologie  $\mathcal{O}_d$ . Dann sind äquivalent*

- (1)  *$M$  ist kompakt.*
- (2)  *$M$  ist folgenkompakt.*
- (3) *Es gilt*
  - (a)  *$M$  ist präkompakt, und*
  - (b) *jede offene Überdeckung von  $M$  besitzt eine Lebesgue-Zahl.*

Alternativ zu (3) hätten wir auch präkompakt und vollständig fordern können. Man beachte: obwohl Kompaktheit und Folgenkompaktheit für beliebige topologische Räume betrachtet werden können, sind sie im Allgemeinen nicht äquivalent. Es gibt topologische Räume, die kompakt, aber nicht folgenkompakt sind und umgekehrt. Sowohl für „(1)  $\Rightarrow$  (2)“ als auch für „(1)  $\Leftarrow$  (2)“ wird also eine Metrik auf  $M$  benötigt.

10.20. BEMERKUNG. Präkompaktheit ist schwächer als Kompaktheit. Beispielsweise ist jede Teilmenge eines präkompakten metrischen Raumes wieder präkompakt. Aber eine Teilmenge eines kompakten metrischen Raumes ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist. Beispielsweise ist ein offener Ball im  $\mathbb{R}^n$  präkompakt, aber nicht kompakt.

Aufgrund der Definition 10.15 erwarten wir  $\lambda^n(Q) = |Q|$  für alle Quader im  $\mathbb{R}^n$ . Dazu muss man zeigen, dass man  $Q$  nicht besonders clever durch eine Folge von Quadern mit kleinerem Gesamtvolumen überdecken kann.

10.21. PROPOSITION. *Jeder Quader  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ist Lebesgue-messbar mit  $\lambda^n(Q) = |Q|$ .*

Um später das Lebesgue-Maß besser beschreiben zu können, versuchen wir hier, es mit Hilfe immer feinerer „Gitter“  $2^{-k}\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$  zu approximieren. Dazu sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{Z}^n$ ,

$$Q_{k,m} = \{2^{-k}(m+x) \mid x \in [0,1]^n\} \subset \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \mathcal{W}_k = \{Q_{k,m} \mid m \in \mathbb{Z}^n\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Für eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  definieren wir

$$\begin{aligned} \underline{F}^k(A) &= \bigcup \{Q \in \mathcal{W}^k \mid Q \subset A\} & \underline{F}(A) &= \bigcup_{k=0}^{\infty} \underline{F}^k(A), \\ \overline{F}^k(A) &= \bigcup \{Q \in \mathcal{W}^k \mid Q \cap A \neq \emptyset\}, & \overline{F}(A) &= \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{F}^k(A). \end{aligned}$$

Zwei Würfel  $Q_{k,m_1}$  und  $Q_{k,m_2} \in \mathcal{W}_k$  sind entweder gleich oder  $Q_{k,m_1} \cap Q_{k,m_2}$  liegt in einem echten affinen Koordinatenunterraum, also in einer Nullmenge wie in Beispiel 10.16. Wegen Proposition 10.21 ist das Lebesgue-Maß einer Menge der Form  $\overline{F}^k(A)$  oder  $\underline{F}^k(A)$  also gerade das  $2^{-kn}$ -fache der Anzahl der Würfel aus  $\mathcal{W}^k$ , aus denen sie sich zusammensetzt.

Wir erinnern uns an das Innere  $\overset{\circ}{A}$  und den Abschluss  $\overline{A}$  einer Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$ , siehe Bemerkung 6.19. Jetzt können wir das Lebesgue-Maß für spezielle Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  approximieren.

10.22. PROPOSITION. *Es sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge. Dann gilt*

- (1)  $\overset{\circ}{A} \subset \underline{F}(A) \subset A \subset \overline{F}(A) \subset \overline{A},$
- (2)  $\lambda^n(A) = \lambda^n(\underline{F}(A)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^n(\underline{F}^k(A))$  *falls  $A$  offen ist, und*
- (3)  $\lambda^n(A) = \lambda^n(\overline{F}(A)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^n(\overline{F}^k(A))$  *falls  $A$  kompakt ist.*

*Inbesondere sind offene Teilmengen und kompakte Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  Lebesgue-messbar.*

In Analogie zum Riemann-Integral aus Kapitel 4 könnten wir eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  *Riemann-messbar* nennen, falls  $\lambda^n(\underline{F}(A)) = \lambda^n(\overline{F}(A))$  gilt. Zur Warnung: nicht jede offene oder kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist Riemann-messbar.

### 10.c. Topologische Eigenschaften

In diesem Abschnitt wollen wir überprüfen, dass sich das Lebesgue-Maß mit der Topologie des  $\mathbb{R}^n$  verträgt. Dazu zeigen wir, dass das Lebesgue-Maß ein sogenanntes Radon-Maß ist. Insbesondere sind alle offenen Mengen Lebesgue-messbar. Die offenen Mengen erzeugen eine  $\sigma$ -Algebra, deren Elemente man Borelmengen nennt. Nach Satz 10.10 sind alle Borelmengen ebenfalls Lebesgue-messbar.

Ein Radon-Maß nimmt außerdem auf kompakten Mengen endliche Werte an. Des weiteren gilt für Radon-Maße, dass sich jede messbare Menge von Innen durch kompakte Mengen approximieren lässt. Daraus wird insbesondere folgen, dass sich jede messbare Menge nur um eine Nullmenge von einer Borelmenge unterscheidet. Tatsächlich reicht es bei einem Radon-Maß, den Wert für alle Borelmengen zu kennen. Daher wird in manchen Büchern das Lebesgue-Maß nur für Borelmengen definiert.

10.23. PROPOSITION UND DEFINITION. *Es sei  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(M)$  gegeben. Dann heißt*

$$\bigcap \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(M) \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra mit } \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \} \subset \mathcal{P}(M)$$

die von  $\mathcal{E}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra.

*Es sei  $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(M)$  eine Topologie auf der Menge  $M$ . Die von  $\mathcal{O}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra heißt auch die Borel- $\sigma$ -Algebra des topologischen Raums  $(M, \mathcal{O})$ .*

Wenn jede offene Menge  $\mu$ -messbar ist, ist nach Satz 10.10 auch jede Borelmenge  $\mu$ -messbar. Man sagt dann auch,  $\mu$  sei ein *Borelmaß*, allerdings wird dieser Begriff unterschiedlich verwendet (manche Autoren verlangen von einem Borelmaß zusätzlich, dass  $\mu$  lokal endlich ist, siehe Definition 10.29 (2)). Wenn wir auf dem  $\mathbb{R}^n$  arbeiten, betrachten wir stillschweigend immer die metrische Topologie  $\mathcal{O}_d$  auf  $\mathbb{R}^n$  aus Beispiel 6.13 (3) zum Euklidischen Abstand  $d(x, y) = \|y - x\|$ .

10.24. FOLGERUNG (aus Proposition 10.22). *Jede Borelmenge im  $\mathbb{R}^n$  ist Lebesgue-messbar.*

Im Hinblick auf andere wichtige Maße geben wir ohne Beweis noch ein weiteres Kriterium an.

10.25. DEFINITION. Ein äußeres Maß auf einem metrischen Raum  $(M, d)$  heißt *metrisch*, wenn für alle Teilmengen  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  gilt

$$0 < \inf \{ d(x, y) \mid x \in A, y \in B \} \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) .$$

10.26. SATZ (Caratheodory-Kriterium, [7, Satz 2.1]). *Es sei  $\mu$  ein metrisches äußeres Maß auf einem metrischen Raum  $(M, d)$ . Dann ist jede Borelmenge  $\mu$ -messbar.*

10.27. BEISPIEL. Das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^n$  ist metrisch. Weitere Beispiele metrischer äußerer Maße folgen in den Übungen.

Die  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen ist nicht einfach zu konstruieren. Man könnte etwa mit den offenen Mengen starten. In jedem Schritt betrachtet man dann die Mengen aus dem Schritt davor, ihre Komplemente, und alle abzählbaren Vereinigungen solcher Mengen. Dann kann es sein, dass man abzählbar viele solcher Schritte braucht, bis man alle Borelmengen erzeugt hat.

10.28. SATZ (Innere Approximation durch abgeschlossene Mengen). *Es sei  $\mu$  ein Maß auf einem metrischen Raum, so dass jede offene Menge  $\mu$ -messbar ist. Dann existieren für jede Borelmenge  $E$  mit  $\mu(E) < \infty$  abgeschlossene Mengen  $C_i \subset E$  mit*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(C_i) = \mu(E) .$$

Insbesondere kann man jede Borelmenge von endlichem Maß in eine Nullmenge und eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen zerlegen. In Proposition 10.22 hatten wir eine solche Approximation für offene Mengen gezeigt.

10.29. DEFINITION. Ein äußeres Maß  $\mu$  auf einem metrischen Raum  $M$  heißt *Radonmaß*, wenn

- (1) alle Borelmengen  $\mu$ -messbar sind,
- (2) es *lokal endlich* ist, das heißt, wenn jeder Punkt eine Umgebung von endlichem Maß besitzt, und
- (3) es *Borel-regulär* ist, das heißt, wenn für jede Teilmenge  $E \subset M$  eine Borelmenge  $B \subset M$  mit  $E \subset B$  und  $\mu(E) = \mu(B)$  existiert.

10.30. BEMERKUNG. Wir beginnen mit zwei Beobachtungen.

- (1) Aus Eigenschaft (2) folgt mit Satz 10.19 (1), dass jede kompakte Teilmenge von  $M$  endliches Maß hat.
- (2) Die Menge  $B$  in Eigenschaft (3) heißt auch *Borelhülle* von  $E$ . Wenn  $E$  messbar ist mit  $\mu(E) < \infty$ , folgt  $\mu(B \setminus E) = 0$ . Wenn  $E$  nicht messbar ist, gilt  $\mu(B \setminus E) > 0$ .

10.31. BEISPIEL. Wir betrachten zunächst einige einfache Maße auf einem beliebigen metrischen Raum  $M$ , unter anderem die aus Beispiel 10.3.

- (1) Für das Nullmaß sind (1) und (2) offensichtlich erfüllt, und in Bedingung (3) können wir stets  $B = M$  wählen.
- (2) Für das Dirac-Maß  $\delta_x$  zu  $x \in M$  sind (1) und (2) ebenfalls erfüllt. Bedingung (3) ist genau dann erfüllt, wenn  $M \setminus \{x\} \subset M$  eine Borelmenge ist. In einem metrischen Raum ist das immer der Fall, denn einpunktige Mengen sind abgeschlossen. Aber für die Klumpentopologie aus Beispiel 6.13 (2) wäre die Bedingung nicht erfüllt, wenn  $M$  mehr als einen Punkt enthält.
- (3) Für das Zählmaß ist (1) stets erfüllt. Es gibt aber viele metrische Räume, die nicht-leere, endliche, offene Teilmengen besitzen (zum Beispiel  $\mathbb{R}^n$ ), so dass (2) verletzt ist. Bedingung (3) ist jedoch erfüllt, denn wenn  $E$  endlich ist, ist  $E$  abgeschlossen und somit Borelmenge. Und wenn  $E$  unendlich ist, wählen wir  $B = M$ .
- (4) In den Übungen haben wir das äußere Maß

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{für } A = \emptyset \text{ und} \\ 1 & \text{für } A \neq \emptyset \end{cases}$$

angeschaut. Hier ist (1) für keinen metrischen Raum mit mehr als einem Punkt erfüllt. Auf der anderen Seite gelten (2) und (3) immer.

10.32. SATZ. *Das Lebesgue-Maß ist ein Radon-Maß auf  $\mathbb{R}^n$ .*

Im Folgenden listen wir noch einige Eigenschaften von Radon-Maßen auf, die wir später benutzen werden.

10.33. PROPOSITION. *Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf einem metrischen Raum  $M$  und  $E \subset M$  eine  $\mu$ -messbare Teilmenge mit  $\mu(E) < \infty$ . Wenn alle Borelmengen  $\mu$ -messbar sind und  $\mu$  Borel-regulär ist, dann ist  $\mu|_E$  ein Radon-Maß.*

Für die folgenden Eigenschaften von Radon-Maßen benötigen wir zwei weitere topologische Bedingungen.

10.34. DEFINITION. Ein topologischer Raum  $M$  heißt

- (1)  *$\sigma$ -kompakt*, wenn eine Folge von Kompakta  $K_i \subset M$  mit  $\bigcup_{i=0}^{\infty} K_i = M$  existiert, und
- (2) *lokal kompakt*, wenn jeder Punkt von  $M$  eine kompakte Umgebung in  $M$  besitzt.

10.35. PROPOSITION. Für einen topologischen Raum  $M$  sind äquivalent:

- (1)  $M$  ist lokal kompakt und  $\sigma$ -kompakt,
- (2)  $M$  besitzt eine kompakte Ausschöpfung, das heißt, es gibt kompakte Teilmengen  $K_i \subset M$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  mit

$$K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad M = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i .$$

10.36. BEISPIEL. Der Raum  $\mathbb{R}^n$  mit der üblichen metrischen Topologie ist  $\sigma$ -kompakt und lokal kompakt. Wir können dazu beispielsweise  $K_i = \overline{B_i(0)}$  betrachten.

10.37. SATZ (Approximationssatz für Radon-Maße). Es sei  $\mu$  ein Radon-Maß auf einem  $\sigma$ -kompakten, lokal kompakten metrischen Raum  $M$ . Für alle  $E \subset M$  gilt dann

- (1)  $\mu(E) = \inf \{ \mu(U) \mid U \text{ offen mit } E \subset U \} ,$
- (2)  $\mu(E) = \sup \{ \mu(K) \mid K \text{ kompakt mit } K \subset E \} ,$  falls  $E$  messbar ist.

Die Eigenschaften (1) und (2) heißen auch *äußere beziehungsweise innere Regularität*. In der Literatur werden mitunter diese beiden Eigenschaften anstelle der Borel-Regularität in der Definition eines Radon-Maßes gefordert. Zumindest für lokal kompakte,  $\sigma$ -kompakte Räume erhält man eine äquivalente Definition. Und wir haben im Beweis von Satz 10.32 gesehen, dass sich die obige Definition 10.29 für ein konkretes äußeres Maß (wie das Lebesgue-Maß) leichter überprüfen lässt.

10.38. FOLGERUNG. Es sei  $\mu$  ein Radon-Maß auf einem  $\sigma$ -kompakten, lokal kompakten metrischen Raum  $M$ . Für jede Teilmenge  $E \subset M$  sind äquivalent

- (1)  $E$  ist  $\mu$ -messbar,
- (2) es gibt eine Borelmenge  $B \subset E$  mit  $\mu(E \setminus B) = 0$ , und
- (3) es gibt eine Borelmenge  $C \supset E$  mit  $\mu(C \setminus E) = 0$ .
- (4) es gibt Borelmengen  $B, C$  mit  $B \subset E \subset C$  und  $\mu(C \setminus B) = 0$ .

Dabei kann  $B$  als abzählbare Vereinigung kompakter Teilmengen und  $C$  als abzählbarer Durchschnitt offener Teilmengen gewählt werden.

Wenn die Bedingungen aus Satz 10.37 erfüllt sind, reicht es insbesondere, ein Radon-Maß auf allen Borel-Mengen zu kennen.

#### 10.d. Invarianzeigenschaften

Man sieht leicht, dass das Lebesgue-Maß invariant unter Translationen ist. Tatsächlich ist das Lebesgue-Maß auf der Borel- $\sigma$ -Algebra des  $\mathbb{R}^N$  das einzige translationsinvariante Radon-Maß, für das der Einheitswürfel Maß 1 hat. Daraus folgt, dass das Lebesgue-Maß invariant unter allen Isometrien des  $\mathbb{R}^n$  ist. Wir können uns sogar überlegen, wie sich das Lebesgue-Maß unter beliebigen linearen oder affinen Abbildungen des  $\mathbb{R}^n$  verhält.

10.39. SATZ (Charakterisierung des Lebesgue-Maßes). Es sei  $\mu$  ein translationsinvariantes Radon-Maß auf  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt

$$\mu = \mu([0, 1]^n) \lambda^n .$$

Wir erinnern uns daran, dass jede Isometrie des  $\mathbb{R}^n$  von der Form  $F(x) = Ax + b$  ist mit  $A \in O(n)$  und  $b \in \mathbb{R}^n$ . Dabei ist die *orthogonale Gruppe* des  $\mathbb{R}^n$  definiert als

$$O(n) = \{ B \in M_n(\mathbb{R}) \mid B \cdot B^t = E_n \} .$$

10.40. FOLGERUNG. Das Lebesgue-Maß ist Isometrie-invariant.

10.41. BEISPIEL. Es sei  $V \subsetneq \mathbb{R}^n$  ein echter Untervektorraum und  $p \in \mathbb{R}^n$ . Dann gibt es eine Isometrie  $F$  des  $\mathbb{R}^n$ , die den affinen Unterraum  $A = p + V$  auf einen achsenparallelen Unterraum  $E$  abbildet. Dieser hat Maß 0 nach Beispiel 10.16. Aus der Isometrieinvarianz folgt

$$\lambda^n(A) = \lambda^n(F^{-1}(E)) = (F_*\lambda^n)(E) = \lambda^n(E) = 0.$$

Mit der Gitterapproximation aus Proposition 10.22 hätten wir das nur im Fall  $V = \{0\}$  und  $A = \{p\}$  zeigen können. Das liegt daran, dass  $A$  andernfalls nicht kompakt ist.

10.42. BEMERKUNG. In den Übungen haben wir das Hausdorff-Maß  $\mathcal{H}^s$  für beliebige metrische Räume kennengelernt. Es ist stets metrisch, also sind alle Borelmengen Hausdorff-messbar nach Satz 10.26. Für  $s = n$  kann man tatsächlich zeigen, dass  $\mathcal{H}^n = \vartheta \lambda^n$  für ein  $\vartheta \in (0, \infty)$ .

Wir betrachten es jetzt auf  $\mathbb{R}^n$ . Da wir nur die Metrik zur Konstruktion benötigen, ist das Hausdorff-Maß automatisch Isometrie-invariant, insbesondere Translations-invariant. Dennoch ergibt sich aus den Übungen, dass im allgemeinen  $\mathcal{H}^s$  nicht als  $\vartheta \lambda^n$  geschrieben werden kann. Das liegt daran, dass  $\mathcal{H}^s$  für  $s < n$  nicht lokal endlich ist.

Tatsächlich hat das Hausdorff-Maß für  $s < n$  weniger Nullmengen als das Lebesgue-Maß. Sei etwa  $A \subsetneq \mathbb{R}^n$  ein echter affiner Unterraum der Dimension  $m < n$ , dann kann man zeigen, dass  $0 < \mathcal{H}^m(A \cap B_R(0)) < \infty$  für alle  $R > 0$ , für die  $A \cap B_R(0) \neq \emptyset$ .

Für beliebige Zahlen  $0 \leq s < n$  gibt es Teilmengen  $F \subset \mathbb{R}^n$ , für die  $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ . Falls  $s$  keine ganze Zahl ist, nennt man solche Mengen auch *Fraktale*.

Mit dem Satz über die Hauptachsentransformation aus linearen Algebra kann man zeigen, dass jede Matrix  $A \in M_n(\mathbb{R})$  eine *Polarzerlegung*  $A = BDC$  mit besitzt, so dass  $B, C \in O(n)$  sind und  $D$  eine Diagonalmatrix mit nichtnegativen Einträgen ist.

10.43. FOLGERUNG (Lineare Transformationsformel). *Es sei  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine affine Abbildung der Form  $F(x) = Ax + b$  mit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  und  $b \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt*

$$\lambda^n(F([0, 1]^n)) = |\det A|.$$

*Falls  $A$  invertierbar ist, folgt*

$$F_*\lambda^n = |\det A|^{-1} \lambda^n.$$

10.44. BEMERKUNG. Wir nehmen an, dass es eine Teilmenge  $A \subset [0, 1]$  gibt, so dass

$$\#((\mathbb{Q} + x) \cap A) = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Das Auswahlaxiom würde beispielsweise die Existenz einer solchen Menge garantieren. Dann ist  $A$  nicht Lebesgue-messbar. Insbesondere kann es wegen Satz 10.39 kein translationsinvariantes Maß  $\mu$  auf  $\mathbb{R}^n$  geben, für das alle Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  messbar sind und  $\mu([0, 1]^n) = 1$  gilt (es sei denn, man verzichtet auf das Auswahlaxiom).

## Das Lebesgue-Integral

In diesem Kapitel definieren wir zu jedem Maßraum ein Integral. Anschließend zeigen wir die wichtigsten Eigenschaften dieses Integralbegriffs. Dazu zählen neben Linearität, Additivität und Monotonie wie in Abschnitt 5.a vor allem deutlich stärkere Konvergenzsätze.

Speziell für das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^n$  beweisen wir zusätzlich die Sätze von Fubini und Tonelli, mit deren Hilfe man das Lebesgue-Integral in ein Mehrfach-Integral umschreiben kann, sowie eine Transformationsformel. Mit diesen Hilfsmitteln lassen sich manche einfacheren Lebesgue-Integrale als iterierte Riemann-Integrale umschreiben.

### 11.a. Messbare Funktionen

Im Folgenden sei stets  $\mu$  ein äußeres Maß auf einer Menge  $M$ . Wir denken in erster Linie an das Lebesgue-Maß  $\lambda^n$  auf  $\mathbb{R}^n$ , aber die folgenden Konstruktionen funktionieren für alle anderen äußeren Maße ganz genauso. Wir erinnern uns an die Topologie von  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} \cong [-1, 1]$  aus Beispiel 6.33. Der Begriff „messbar“ ist für Räume mit  $\sigma$ -Algebren das Analogon zu „stetig“ für topologische Räume nach Definition 6.16.

11.1. DEFINITION. Es sei  $f: M \rightarrow N$  eine Abbildung.

- (1) Seien  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(M)$  und  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(N)$   $\sigma$ -Algebren. Dann heißt  $f$  *messbar bezüglich  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$* , wenn  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  für alle  $B \in \mathcal{B}$ .
- (2) Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$ . Dann heißt  $f$   *$\mu$ -messbar*, wenn  $f$  bezüglich der  $\sigma$ -Algebra der  $\mu$ -messbaren Mengen aus Satz 10.10 messbar ist.
- (3) Falls wir im Fall  $N = \overline{\mathbb{R}}$  oder  $N = \mathbb{C}$  keine  $\sigma$ -Algebra angeben, meinen wir mit  $\mathcal{B}$  die Borel- $\sigma$ -Algebra aus Definition 10.23.

Mit anderen Worten ist  $f$  genau dann messbar bezüglich  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$ , wenn  $\mathcal{B} \subset f_*\mathcal{A}$ . Wenn  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(N)$  die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$  erzeugt, reicht es sogar,  $\mathcal{E} \subset f_*\mathcal{A}$  zu prüfen. Wenn klar ist, welche  $\sigma$ -Algebren gemeint sind, lassen wir sie in der Notation oft weg. Für  $f: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  bedeute „messbar“ also messbar bezüglich eines vorher festgelegten äußeren Maßes  $\mu$  auf  $M$  und der Borel- $\sigma$ -Algebra auf  $\overline{\mathbb{R}}$ .

11.2. BEMERKUNG. Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$ .

- (1) Für eine Teilmenge  $A \subset M$  ist die *charakteristische Funktion von  $A$* , definiert durch

$$\chi_A: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad \text{mit} \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \notin A, \text{ und} \\ 1 & \text{falls } x \in A, \end{cases}$$

genau dann  $\mu$ -messbar, wenn  $A$  eine  $\mu$ -messbare Menge ist.

- (2) Wenn  $M$  ein topologischer Raum ist und alle Borelmengen  $\mu$ -messbar sind, sind alle stetigen Funktionen  $f: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar. Das gilt insbesondere für Radon-Maße wie beispielsweise das Lebesgue-Maß. Es gilt auch, wenn  $(M, d)$  ein metrischer Raum ist und  $\mu$  ein metrisches Maß ist, wie zum Beispiel ein Hausdorff-Maß (siehe Übungen).

Da wir später messbare  $\overline{\mathbb{R}}$ -wertige Funktionen integrieren wollen, möchten wir möglichst einfache Kriterien für Messbarkeit haben.

11.3. PROPOSITION. *Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$  und  $f: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (1)  *$f$  ist  $\mu$ -messbar.*
- (2) *Für alle  $r \in \mathbb{R}$  ist  $f^{-1}([-\infty, r])$  eine  $\mu$ -messbare Teilmenge.*
- (3) *Für alle  $r \in \mathbb{R}$  ist  $f^{-1}([-\infty, r])$  eine  $\mu$ -messbare Teilmenge.*
- (4) *Für alle  $r \in \mathbb{R}$  ist  $f^{-1}((r, \infty])$  eine  $\mu$ -messbare Teilmenge.*
- (5) *Für alle  $r \in \mathbb{R}$  ist  $f^{-1}([r, \infty])$  eine  $\mu$ -messbare Teilmenge.*

*Darüberhinaus erhalten wir weitere äquivalente Aussagen, wenn wir in (2)–(5) jeweils „ $r \in \mathbb{R}$ “ durch „ $r \in \mathbb{Q}$ “ ersetzen.*

Häufig möchten wir auch mehrere messbare Funktionen miteinander verknüpfen. Da nicht alle Rechnungen mit  $\pm\infty$  erlaubt sind, müssen wir allerdings etwas aufpassen.

11.4. PROPOSITION. *Es sei  $U \subset \overline{\mathbb{R}}^k$  offen und  $g: U \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  stetig. Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$ , und  $f_1, \dots, f_k: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  seien  $\mu$ -messbar. Dann ist auch die folgende Abbildung  $\mu$ -messbar:*

$$g(f_1, \dots, f_k): M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},$$

$$g(f_1, \dots, f_k)(x) = \begin{cases} g(f_1(x), \dots, f_k(x)) & \text{falls } (f_1(x), \dots, f_k(x)) \in U, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zum Integrieren würden wir später zusätzlich fordern, dass die Menge

$$A = \{x \in M \mid (f_1(x), \dots, f_k(x)) \notin U\} \subset M$$

eine  $\mu$ -Nullmenge ist, damit unsere willkürliche Wahl des Wertes 0 für die „schlechten“ Punkte aus  $A$  den Wert des Integrals nicht beeinflusst.

11.5. BEMERKUNG. Es seien  $f, g: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar. Dann sind die Funktionen

$$-f, \quad \min(f, g) \quad \text{und} \quad \max(f, g)$$

ebenfalls  $\mu$ -messbar. Die Funktionen

$$\begin{aligned} 1/f & \text{ mit Ausnahmemenge } f^{-1}(0), \\ f + g & \text{ mit Ausnahmemenge } (f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}(\infty)) \cup (f^{-1}(\infty) \cap g^{-1}(-\infty)), \\ f \cdot g & \text{ mit Ausnahmemenge } (f^{-1}(\{-\infty, \infty\}) \cap g^{-1}(0)) \cup (f^{-1}(0) \cap g^{-1}(\{-\infty, \infty\})) \end{aligned}$$

sind ebenfalls  $\mu$ -messbar, falls wir die Ausnahmemenge wie in der obigen Proposition auf 0 abbilden.

11.6. DEFINITION. Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf einer Menge  $M$ . Dann gilt eine Eigenschaft für  $\mu$ -fast alle  $x \in M$  oder kurz  $\mu$ -fast überall, wenn die Teilmenge von Punkten, für die sie nicht gilt, eine  $\mu$ -Nullmenge bildet.

Wenn  $\mu$  aus dem Kontext klar ist, lassen wir es mitunter weg.

11.7. BEMERKUNG. Später werden wir häufiger Funktionen, die  $\mu$ -fast überall übereinstimmen, miteinander identifizieren. Für den Augenblick überlegen wir uns, dass „ $\mu$ -fast überall gleich“ eine Äquivalenzrelation ist (Übung), und dass jede Funktion, die  $\mu$ -fast überall mit einer gegebenen Funktion übereinstimmt, selbst wieder  $\mu$ -messbar ist.

11.8. PROPOSITION. *Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$  und  $(f_i)_i$  eine Folge  $\mu$ -messbarer,  $\overline{\mathbb{R}}$ -wertiger Funktionen auf  $M$ . Dann erhalten wir  $\mu$ -messbare,  $\overline{\mathbb{R}}$ -wertige Funktionen*

$$\inf_{i \rightarrow \infty} f_i, \quad \sup_{i \rightarrow \infty} f_i, \quad \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i \quad \text{und} \quad \limsup_{i \rightarrow \infty} f_i.$$

*Falls für  $\mu$ -fast alle  $x \in M$  der Grenzwert  $f(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x)$  existiert, ist  $f$  auch  $\mu$ -messbar.*

## 11.b. Definition des Integrals

Im Folgenden sei stets  $\mu$  ein äußeres Maß auf einer Menge  $M$ . Wir denken in erster Linie an das Lebesgue-Maß  $\lambda^n$  auf  $\mathbb{R}^n$ , aber die folgenden Konstruktionen funktionieren für alle anderen äußeren Maße ganz genauso. Man konstruiert das Integral über  $M$  üblicherweise in drei Schritten. Als erstes betrachtet man nichtnegative Treppenfunktionen (die hier allerdings allgemeiner definiert werden als in Proposition 5.5). Als nächstes approximiert man beliebige nichtnegative messbare Funktionen durch Treppenfunktionen. Und im letzten Schritt zerlegt man beliebige messbare Funktion in einen Positiv- und einen Negativteil.

Beim Riemann-Integral haben wir zunächst das Definitionsintervall in kleinere Teile geteilt und dort die Funktion von unten und von oben durch Treppenfunktionen approximiert. Beim Lebesgue-Integral zerteilt man stattdessen den Wertebereich in kleine Teile.

11.9. DEFINITION. Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$ . Eine  $\mu$ -Treppenfunktion auf  $M$  ist eine  $\mu$ -messbare Funktion  $f: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , die nur endlich viele Werte annimmt. Den Raum aller  $\mu$ -Treppenfunktionen bezeichnen wir mit  $T(\mu)$ , und wir schreiben

$$T^+(\mu) = \{ f \in T(\mu) \mid f \geq 0 \} .$$

Für eine Treppenfunktionen  $f \geq 0$  definieren wir das  $\mu$ -Integral durch

$$(11.1) \quad \int_M f d\mu = \sum_{y \in \text{im}(f)} y \mu(f^{-1}(y)) \in [0, \infty] .$$

Man beachte, dass die Summe auf der rechten Seite nach Voraussetzung nur endlich viele Summanden hat.

11.10. BEMERKUNG. Wenn wir eine Treppenfunktion  $f \geq 0$  in der Form

$$f = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{A_i}$$

schreiben können, wobei  $c_i \geq 0$  sei und  $A_i \subset M$  messbar für alle  $i \in \{1, \dots, N\}$ , dann folgt

$$\int_M f d\mu = \sum_{i=1}^N c_i \mu(A_i) .$$

Im nächsten Schritt sei  $f \geq 0$  eine  $\mu$ -messbare Funktion. Dann definieren wir

$$(11.2) \quad \int_M f d\mu = \sup \left\{ \int_M g d\mu \mid g \in T^+(\mu) \text{ mit } g \leq f \right\} .$$

Falls  $f$  bereits eine Treppenfunktion ist, wird das Supremum rechts für  $g = f$  angenommen, und das Integral hat den gleichen Wert wie in (11.1). Für den letzten Schritt benötigen wir die Zerlegung einer Funktion in ihren Positiv- und ihren Negativteil.

11.11. DEFINITION. Es sei  $f: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Funktion. Dann definieren wir ihren *Positivteil*  $f^+: M \rightarrow [0, \infty]$  und ihren *Negativteil*  $f^-: M \rightarrow [0, \infty]$  durch

$$f^+(x) = \max(0, f(x)) \quad \text{und} \quad f^- = (-f)^+ .$$

Es folgt  $f = f^+ - f^-$ , und an jeder Stelle  $x \in M$  ist höchstens eine der beiden Funktionen rechts von 0 verschieden. Außerdem sind  $f^+$  und  $f^-$  nach Bemerkung 11.5 messbar, wenn  $f$  messbar ist. Wir definieren das Integral von  $f$  als

$$(11.3) \quad \int_M f d\mu = \int_M f^+ d\mu - \int_M f^- d\mu$$

unter der Voraussetzung, dass nicht beide Integrale rechts den Wert  $\infty$  annehmen. Im Falle  $f \geq 0$  erhalten wir den gleichen Wert wie in (11.2).

11.12. DEFINITION. Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf einer Menge  $M$ . Eine Funktion  $f: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  heißt  $\mu$ -integrierbar, wenn sie  $\mu$ -messbar ist und

$$\int_M f^+ d\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int_M f^- d\mu < \infty .$$

Man beachte, dass wir das Integral für eine etwas größere Klasse von Funktionen definiert haben. Es ist manchmal nützlich, zu sagen, eine Funktion habe unendliches Integral. Aber da wir mit  $\infty$  nicht beliebig rechnen können, machen wir die obige Einschränkung. Äquivalent können wir sagen, dass  $f$  genau dann integrierbar ist, wenn  $\int_M f d\mu$  definiert und endlich ist.

Wir würden jetzt am liebsten unmittelbar die wesentlichen Eigenschaften des Integrals zeigen. Das ist aber leider nicht so einfach wie beim Riemann-Integral. Tatsächlich werden wir bereits einen Konvergenzsatz benutzen, um das Integral von  $f + g$  auszurechnen.

11.13. BEISPIEL. Es sei  $M = \mathbb{N}$  und  $\#$  das Zählmaß. Eine Funktion auf  $\mathbb{N}$  ist eine Folge von Zahlen in  $[-\infty, \infty]$ , und da alle Teilmengen von  $\mathbb{N}$  messbar sind, ist auch jede Folge  $\#$ -messbar. Eine Folge  $(a_i)_i$  ist genau dann  $\#$ -integrierbar, wenn die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

absolut konvergiert. Für den Beweis benutzen wir auch Satz 11.23 unten. Etwas allgemeiner existiert

$$\int_{\mathbb{N}} a d\# = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \in \overline{\mathbb{R}}$$

falls mindestens der Positiv- oder der Negativteil der obigen Reihe konvergiert.

11.14. PROPOSITION (Monotonie). *Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$  und  $f, g: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  seien  $\mu$ -messbar. Dann gilt*

(1) *Wenn  $\mu$ -fast überall  $f = g$  gilt und  $\int_M f d\mu$  existiert, dann existiert auch  $\int_M g d\mu$ , und*

$$\int_M f d\mu = \int_M g d\mu .$$

(2) *Wenn  $\mu$ -fast überall  $f \leq g$  gilt und beide Integrale existieren, gilt*

$$\int_M f d\mu \leq \int_M g d\mu .$$

(3) *Wenn  $\mu$ -fast überall  $|f| \leq g$  gilt und  $g$  integrierbar ist, dann ist auch  $f$  integrierbar.*

(4) *Wenn  $\mu$ -fast überall  $f \leq g$  gilt und entweder  $\int_M f d\mu$  existiert und nicht den Wert  $-\infty$  hat oder  $\int_M g d\mu$  existiert und nicht den Wert  $\infty$  hat, existieren beide Integrale.*

Die Funktion  $g$  in (3) heißt auch eine *Majorante* von  $f$ . In der Analysis I haben wir meistens über Intervalle integriert, selten über ganz  $\mathbb{R}$ . Auch hier wollen wir Integrale über Teilmengen  $A \subset M$  einführen. Wir benutzen dazu charakteristische Funktionen  $\chi_A$ , siehe Bemerkung 11.2 (1).

11.15. DEFINITION. Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf einer Menge  $M$  und  $A \subset M$  eine  $\mu$ -messbare Teilmenge. Dann definieren wir das  $\mu$ -Integral von  $f$  über  $A$  durch

$$\int_A f d\mu = \int_M \chi_A \cdot f d\mu ,$$

falls die rechte Seite existiert. Wenn  $f^+$  und  $f^-$  endliches  $\mu$ -Integral über  $A$  haben, nennen wir  $f$   $\mu$ -integrierbar über  $A$ .

Wegen Proposition 11.14 (1) ändert sich das obige Integral nicht, wenn man  $A$  um eine Nullmenge abändert.

11.16. BEISPIEL. Es sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Betrachte die Funktion  $f_\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$  falls  $x \neq 0$ . Dann gilt

$$\int_{B_1(0)} f d\lambda^n < \infty \iff \alpha < n$$

und

$$\int_{\mathbb{R} \setminus B_1(0)} f d\lambda^n < \infty \iff \alpha > n .$$

Diese Funktionen sind beliebte Majoranten.

11.17. PROPOSITION (Additivität). *Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$ , und es seien  $A \subset M$ ,  $B \subset M$  messbar mit  $\mu(A \cap B) = 0$ . Die folgende Gleichung gilt, falls linke und rechte Seite definiert sind:*

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu ,$$

wobei die linke Seite der Gleichung genau dann existiert, wenn die rechte Seite existiert. Und  $f$  ist genau dann über  $A \cup B$  integrierbar, wenn  $f$  über  $A$  und über  $B$  integrierbar ist.

11.18. BEMERKUNG. Etwas allgemeiner als in Definition 11.15 könnten wir auch

$$\int_A f d\mu = \int_M f d(\mu|_A)$$

für beliebige Teilmengen  $A \subset M$  definieren. Für messbare  $A$  ist das das gleiche wie zuvor.

Aber es könnte nicht messbare, disjunkte Teilmengen  $A, B \subset M$  geben mit  $\mu(A \cup B) < \mu(A) + \mu(B)$ , und folglich hätten wir

$$\int_{A \cup B} 1 d\mu = \mu(A \cup B) < \mu(A) + \mu(B) = \int_A 1 d\mu + \int_B 1 d\mu ,$$

was unser Anschauung und Proposition 11.17 widerspräche.

11.19. PROPOSITION. *Wenn  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-messbar und eigentlich Riemann-integrierbar ist gemäß Definition 5.1, dann existiert das Lebesgue-Integral  $\int_{[a,b]} f d\lambda^1$  und es gilt*

$$\int_{[a,b]} f d\lambda^1 = \int_a^b f(x) dx .$$

Der Beweis bleibt Übung. In Zukunft werden wir für eindimensionale Lebesgue-Integrale mitunter die gleiche Notation wie für Riemann-Integrale benutzen, solange dadurch keine Verwirrung entsteht.

11.20. BEMERKUNG. Die obige Proposition stimmt nicht für uneigentliche Riemann-Integrale wie in Definition 5.30 (Übung). Das ist das gleiche Phänomen wie in Beispiel 11.13, wo eine Reihe konvergieren kann, auch wenn sie nicht absolut konvergiert und somit nicht als Integral über  $\mathbb{N}$  mit dem Zählmaß existiert.

### 11.c. Konvergenzsätze und Anwendungen

In diesem Abschnitt beweisen wir zwei Konvergenzsätze, eine für eine monoton steigenden Folge nicht-negativer Funktionen, und einen für eine Folge dominierter oder majorisierter Funktionen. Daraus können wir bereits einige wichtige Eigenschaften des Lebesgue-Integrals herleiten.

11.21. SATZ (von Beppo Levi; Monotone Konvergenz). *Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$  und  $f_k: M \rightarrow [0, \infty]$  für  $k \in \mathbb{N}$  eine Folge  $\mu$ -messbarer Funktionen mit  $f_{k+1} \geq f_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt*

$$\int_M \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k d\mu = \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_M f_k d\mu .$$

11.22. BEMERKUNG. Monotone Konvergenz funktioniert nur für nicht-negative Funktionen. Betrachte etwa die Folge  $f_k(x) = -2^{-k}$  von Funktionen auf  $\mathbb{R}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f_k d\lambda^1 = -\infty \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, \quad \text{aber} \quad \int_{\mathbb{R}} \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k d\lambda^1 = \int_{\mathbb{R}} 0 d\lambda^1 = 0 .$$

Als erste Folgerung können wir hieraus die Linearität des Integrals herleiten.

11.23. SATZ. *Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$ . Dann bilden die  $\mu$ -integrierbaren Funktionen von  $M$  nach  $\mathbb{R}$  einen reellen Vektorraum  $V$ , und das Integral  $\int_M \cdot d\mu: V \rightarrow \mathbb{R}$  ist linear.*

11.24. BEMERKUNG. Wir haben die Funktionswerte  $\pm\infty$  nicht zugelassen um keine Probleme mit der Vektorraumstruktur zu bekommen. Wenn wir aber beispielsweise eine  $\mu$ -integrierbare Funktion  $f$  betrachten, folgt

$$\mu(f^{-1}(\infty)) = \mu(f^{-1}(-\infty)) = 0 .$$

Gemäß Proposition 11.14 dürfen wir  $f$  auf einer Nullmenge abändern, ohne das Integral von  $f$  zu verändern, das heißt, in den meisten Fällen dürfen wir bei einer  $\mu$ -integrierbaren Funktion annehmen, dass sie Werte in  $\mathbb{R}$  annimmt. Später werden wir dieses und andere Probleme umgehen, indem wir integrierbare Funktionen identifizieren, die fast überall gleich sind.

11.25. PROPOSITION UND DEFINITION. *Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$  und  $\vartheta: M \rightarrow [0, \infty]$  sei  $\mu$ -messbar. Dann definiert*

$$\mu_{f\vartheta}(E) = \inf \left\{ \int_A \vartheta d\mu \mid A \text{ ist } \mu\text{-messbar mit } E \subset A \right\}$$

*ein äußeres Maß auf  $M$  mit folgenden Eigenschaften.*

(1) *Alle  $\mu$ -messbaren Mengen  $E \subset M$  sind  $\mu_{f\vartheta}$ -messbar, und es gilt*

$$\mu_{f\vartheta}(E) = \int_E \vartheta d\mu .$$

(2) *Jede  $\mu$ -Nullmenge ist ebenfalls eine  $\mu_{f\vartheta}$ -Nullmenge.*

(3) *Für  $\mu$ -messbare Funktionen  $f: M \rightarrow [0, \infty]$  gilt*

$$\int_E f d\mu_{f\vartheta} = \int_E f\vartheta d\mu .$$

*Man nennt  $\vartheta$  auch die Dichtefunktion oder kurz Dichte von  $\mu_{f\vartheta}$  bezüglich  $\mu$ .*

Wenn  $\int_M \vartheta d\mu = 1$  gilt, nennt man  $\vartheta$  auch eine *Wahrscheinlichkeitsdichte*. Das folgende wichtige Resultat ist eine Folgerung aus dem Satz 11.21 über monotone Konvergenz.

11.26. LEMMA (Fatou). *Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$  und  $f_k: M \rightarrow [0, \infty]$  für  $k \in \mathbb{N}$  eine Folge  $\mu$ -messbarer Funktionen. Dann gilt*

$$\int_M \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_M f_k d\mu .$$

Schließlich kommen wir zu einem weiteren Kriterium, das es uns erlaubt, von punktweiser Konvergenz auf die Konvergenz der Integrale zu schließen. Wir erinnern wir uns dazu an den Abschnitt 8.a über parameterabhängige Integrale, in dem wir ähnliche Resultate bereits betrachtet hatten.

11.27. SATZ (von Lebesgue; dominierte Konvergenz). *Sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$  und  $g: M \rightarrow [0, \infty]$  sei  $\mu$ -integrierbar. Sei  $f_k: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Folge  $\mu$ -messbarer Funktionen, die  $\mu$ -fast überall gegen  $f: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  konvergiert. Wenn  $|f_k| \leq g$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , dann ist  $f$  integrierbar mit*

$$\int_M f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M f_k d\mu .$$

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung von Satz 8.5 (1); man beachte etwa, dass wir hier keine „Ausnahmemenge“ festlegen müssen.

Als nächstes wollen wir noch die Punkte (1) und (2) aus Satz 8.5 übertragen. Als Parameterraum wählen wir einen metrischen Raum, da wir im Satz von Lebesgue mit Folgen arbeiten müssen und wir für metrische Räume wissen, dass Stetigkeit und Folgenstetigkeit äquivalent sind, siehe Proposition 6.14.

11.28. FOLGERUNG. *Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$ , und  $g: M \rightarrow [0, \infty]$  sei  $\mu$ -integrierbar. Es sei  $(N, d)$  ein metrischer Raum,  $q_0 \in N$  und  $f: M \times N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Funktion, so dass*

- (1)  $f(\cdot, q): M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  für alle  $q \in N$  messbar ist und  $\mu$ -fast überall  $|f(\cdot, q)| \leq g$  gilt, und
- (2)  $(p, \cdot): N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  für  $\mu$ -fast alle  $p \in M$  im Punkt  $q_0$  stetig ist.

Dann erhalten wir eine bei  $q_0$  stetige Funktion

$$F: N \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(q) = \int_M f(p, q) d\mu(p) = \int_M f(\cdot, q) d\mu .$$

11.29. SATZ. *Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$ , und  $g: M \rightarrow [0, \infty]$  sei  $\mu$ -integrierbar. Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f: M \times I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so dass  $f(\cdot, x): M \rightarrow \mathbb{R}$  für alle  $x \in I$  integrierbar ist. Dann definiere  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  durch*

$$F(x) = \int_M f(\cdot, x) d\mu .$$

Sei  $x_0 \in I$ . Für  $\mu$ -fast alle  $p \in M$  gelte

- (1)  $f(p, \cdot): I \rightarrow \mathbb{R}$  ist bei  $x_0 \in I$  differenzierbar und
- (2) für alle  $x \in I$  mit  $x \neq x_0$  ist

$$\frac{|f(p, x) - f(p, x_0)|}{|x - x_0|} \leq g(p)$$

Dann ist  $\frac{\partial f}{\partial x}$  integrierbar, und es gilt

$$F'(x_0) = \int_M \frac{\partial f}{\partial x}(p, x_0) d\mu(p) .$$

Die folgende Variante des obigen Satzes ist etwas leichter zu handhaben.

11.30. FOLGERUNG. *Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$ , und  $g: M \rightarrow [0, \infty]$  sei  $\mu$ -integrierbar. Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f: M \times U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so dass  $f(\cdot, x): M \rightarrow \mathbb{R}$  für alle  $x \in U$  integrierbar ist. Dann definiere  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  durch*

$$F(x) = \int_M f(\cdot, x) d\mu .$$

Für fast alle  $p \in M$  sei  $f(p, \cdot) \in C^1(U)$  mit

$$|\partial_i f(p, \cdot)| \leq g \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Dann ist  $F \in C^1(U)$  mit

$$\partial_i F(x) = \int_M \partial_i f(p, x) d\mu(p) \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n \text{ und alle } x \in U.$$

Wir haben in den Übungen bereits gesehen, dass für eigentlich Riemann-integrierbare Funktionen das Riemann-Integral mit dem Lebesgue-Integral bezüglich  $\lambda^1$  übereinstimmt. Das folgende Resultat charakterisiert (eigentliche) Riemann-Integrierbarkeit.

11.31. SATZ. *Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Dann ist  $f$  genau dann Riemann-integrierbar, wenn*

$$\lambda^1(\{x \in [a, b] \mid f \text{ ist nicht stetig bei } x\}) = 0.$$

Wir haben außerdem gesehen, dass eine uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion  $f$  nur dann Lebesgue-integrierbar ist, wenn  $|f|$  ebenfalls uneigentlich Riemann-integrierbar ist.

#### 11.d. Die Sätze von Fubini und Tonelli

Wenn wir über ein Produkt von Räumen integrieren müssen, ist es oft einfacher, über eine Koordinate nach der anderen zu integrieren. Nach dem Satz von Fubini ist das möglich, wenn die Funktion auf dem Produktraum integrierbar ist. Dieser Satz basiert auf dem Cavalierischen Prinzip, das Sie möglicherweise aus der Schule kennen.

11.32. BEISPIEL. Wenn wir das Volumen eines dreidimensionalen Körpers  $K \subset \mathbb{R}^3$  berechnen wollen, können wir nach dem Cavalierischen Prinzip zunächst die Flächen der Querschnitte

$$K_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in K\} \subset \mathbb{R}^2$$

berechnen und anschließend über  $z$  integrieren. Sei etwa  $C$  ein Kegel mit Grundfläche  $B_1^2(0) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$  und Spitze  $e_3$ ,  $H = B_1^3(0) \cap \{z \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$  eine Halbkugel und  $Z = B_1^2(0) \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$  ein Zylinder, dann finden wir

$$\text{vol}(C) = \frac{\pi}{3}, \quad \text{vol}(H) = \frac{2\pi}{3}, \quad \text{und} \quad \text{vol}(Z) = \pi.$$

Für die Gleichung  $\text{vol}(C) + \text{vol}(H) = \text{vol}(Z)$  gibt es eine schöne elementargeometrische Erklärung.

11.33. DEFINITION. Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$  und  $\nu$  ein äußeres Maß auf  $N$ . Dann definieren wir das *Produktmaß*  $\mu \times \nu$  auf  $M \times N$  durch

$$\mu \times \nu(E) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) \nu(B_i) \mid A_i \subset M, B_i \subset N \text{ messbar mit } E \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \times B_i \right\}.$$

Gemäß Übung ist  $\mu \times \nu$  ein äußeres Maß.

11.34. LEMMA. *Seien  $A \subset M$  und  $B \subset N$  messbar, dann ist auch  $A \times B \subset M \times N$  messbar mit*

$$\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B).$$

11.35. BEISPIEL. Es seien  $m, n \geq 0$ , dann gilt

$$\lambda^m \times \lambda^n = \lambda^{m+n} \quad \text{auf } \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}.$$

Um das Cavalierische Prinzip zu beweisen, brauchen wir eine weitere technische Eigenschaft von Maßen.

11.36. DEFINITION. Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf einer Menge  $M$ . Eine Teilmenge  $E \subset M$  heißt  $\sigma$ -endlich, wenn es eine Folge messbarer Teilmengen  $E_i \subset M$  mit  $\mu(E_i) < \infty$  gibt, so dass

$$E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i .$$

Das Maß  $\mu$  heißt  $\sigma$ -endlich, wenn  $M$  selbst eine  $\sigma$ -endliche Menge ist. Eine Funktion  $f: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  heißt  $\sigma$ -endlich, wenn  $f^{-1}(\overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}) \subset M$  eine  $\sigma$ -endliche Teilmenge ist.

11.37. BEMERKUNG. Wir beginnen mit ein paar einfachen Überlegungen.

- (1) Wenn  $E \subset M$  eine  $\sigma$ -endliche Teilmenge ist, ist  $E$  insbesondere  $\mu$ -messbar. Wir dürfen annehmen, dass  $E_i \subset E_{i+1}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Wenn  $\mu$  ein  $\sigma$ -endliches Maß ist, ist jede messbare Teilmenge von  $M$  ebenfalls  $\sigma$ -endlich.
- (2) Das Lebesgue-Maß ist  $\sigma$ -endlich. Allgemeiner ist jedes Radon-Maß auf einem lokal-kompakten,  $\sigma$ -kompakten Raum  $\sigma$ -endlich.

11.38. SATZ (Cavalierisches Prinzip). *Es seien  $\mu, \nu$  äußere Maße auf  $M$  beziehungsweise  $N$ , und es sei  $E \subset M \times N$  eine  $\sigma$ -endliche Teilmenge bezüglich des Produktmaßes. Dann ist*

$$E_q = \{ p \in M \mid (p, q) \in E \} \subset M$$

für  $\nu$ -fast alle  $q \in N$  eine  $\mu$ -messbare Menge, die Funktion  $q \mapsto \mu(E_q)$  ist  $\nu$ -messbar, und es gilt

$$(\mu \times \nu)(E) = \int_N \mu(E_q) d\nu(q) .$$

11.39. BEISPIEL. Wir dürfen nicht auf  $\sigma$ -Endlichkeit verzichten. Es sei etwa  $M = N = [0, 1]$ ,  $\mu = \lambda^1$  und  $\nu = \#$ . Wir betrachten die Diagonale  $E = \{ (x, x) \mid x \in [0, 1] \} \subset [0, 1]^2$ . Dann gilt

- (1)  $\int_{[0,1]} \lambda^1(E_y) d\#(y) = \int_{[0,1]} 0 d\# = 0 ,$
- (2)  $\int_{[0,1]} \#(E_x) d\lambda^1(x) = \int_{[0,1]} 1 d\lambda^1 = 1 ,$
- (3) und  $(\lambda^1 \times \#)(E) = \infty .$

Man kann sich davon überzeugen, dass  $E$  in der Tat nicht  $\sigma$ -endlich ist bezüglich  $\lambda^1 \times \#$ .

11.40. SATZ (Fubini). *Es seien  $\mu$  und  $\nu$  äußere Maße auf  $M$  und  $N$ , und  $f: M \times N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  sei  $\sigma$ -endlich und integrierbar bezüglich des Produktmaßes. Dann gilt*

- (1) für  $\nu$ -fast alle  $q \in N$  ist  $f(\cdot, q): M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine  $\mu$ -integrierbare Funktion,
- (2) die Funktion  $q \mapsto \int_M f(\cdot, q) d\mu$  ist  $\nu$ -integrierbar, und
- (3) es gilt

$$\int_{M \times N} f d(\mu \times \nu) = \int_N \int_M f(p, q) d\mu(p) d\nu(q) .$$

Da das Lebesgue-Maß  $\sigma$ -endlich ist, stellt die  $\sigma$ -Endlichkeit von  $f$  in der Praxis für uns keine Einschränkung dar. Selbstverständlich dürfen wir die Rollen von  $M$  und  $N$  vertauschen. Bei Mehrfachintegralen spielt die Integrationsreihenfolge also keine Rolle. Und wenn wir den Satz von Fubini mehrfach auf eine hinreichend „schöne“ Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  anwenden, können wir ein Lebesgue-Integral als  $n$ -faches Riemann-Integral schreiben und unter Umständen sogar explizit ausrechnen, siehe Übungen.

Der einzige Nachteil des Satzes von Fubini besteht darin, dass wir die Integrierbarkeit von  $f$  voraussetzen müssen.

11.41. BEISPIEL. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy dx &= \int_{-1}^1 \frac{-y}{x^2 + y^2} \Big|_{y=-1}^1 dx = -2 \arctan x \Big|_{x=-1}^1 \\ &= -\pi = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy . \end{aligned}$$

Aus der Existenz des Mehrfach-Integrals folgt also nicht die Existenz des Produktintegrals. Wir können das obige Beispiel „um  $\frac{\pi}{4}$  drehen“ und erhalten

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy dx = 0 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dx dy .$$

Jetzt stimmen die beiden Mehrfachintegrale überein, aber man kann sich überzeugen, dass

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \int_0^1 \frac{-y}{x^2 + y^2} \Big|_{x=0}^1 dy = \int_0^1 \left( \frac{1}{y} - \frac{y}{1 + y^2} \right) dy = \infty .$$

Der folgende Satz ist in gewissem Sinne eine „Umkehrung“ des Satzes von Fubini.

11.42. SATZ (Tonelli). *Es sei  $f: M \times N \rightarrow [0, \infty]$  eine  $\sigma$ -endliche Funktion. Falls*

- (1)  $f(\cdot, q): M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  für  $\nu$ -fast alle  $q \in N$  eine  $\mu$ -integrierbare Funktion ist und
- (2)  $q \mapsto \int_M f(\cdot, q) d\mu$  eine  $\nu$ -integrierbare Funktion ist,

*ist  $f$  eine  $\mu \times \nu$ -integrierbare Funktion.*

Wir dürfen den Satz von Tonelli für beliebige Funktionen  $f: M \times N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  auf  $|f|$  anwenden, um gegebenenfalls eine Majorante für  $f$  im Sinne von Proposition 11.14 (3) zu erhalten. Anschließend können wir das Integral dann mit dem Satz von Fubini ausrechnen.

### 11.e. Die Integraltransformationsformel

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, wie sich Lebesgue-Integrale unter Diffeomorphismen des Integrationsbereichs verhalten. Wir geben zunächst eine abstrakte Transformationsformel unter Benutzung des Bildmaßes an. Danach betrachten wir ganz speziell das Lebesgue-Maß aus dem vorigen Kapitel, um das Bildmaß explizit angeben zu können. Wir erinnern uns zunächst an das Bildmaß aus Proposition 10.13.

11.43. PROPOSITION (Abstrakte Transformationsformel). *Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$ ,  $F: M \rightarrow N$  eine beliebige Abbildung und  $f: N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Funktion. Dann gilt*

- (1)  $f$  ist  $F_*\mu$ -messbar  $\iff f \circ F$  ist  $\mu$ -messbar,
- (2)  $f$  ist  $F_*\mu$ -integrierbar  $\iff f \circ F$  ist  $\mu$ -integrierbar,
- (3) 
$$\int_N f dF_*\mu = \int_M (f \circ F) d\mu ,$$

wobei die linke Seite von Gleichung (3) genau dann definiert ist, wenn die rechte Seite definiert ist.

Diese Formel ist zwar recht einfach zu zeigen, hilft aber nicht bei der Bestimmung des Bildmaßes. Um eine handhabbare Formel zu bekommen, betrachten wir nur Diffeomorphismen gemäß folgender Definition.

11.44. DEFINITION. Es seien  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $k \in \overline{\mathbb{N}}$  mit  $k \geq 1$ . Eine Abbildung  $\Phi: U \rightarrow V$  heißt  $C^k$ -Diffeomorphismus, wenn sie bijektiv ist und sowohl  $\Phi$  als auch die Umkehrabbildung  $k$ -fach stetig differenzierbar sind.

Im Fall  $k = 0$  spricht man von einem Homöomorphismus, siehe Definition 6.16.

11.45. BEISPIEL. Die folgenden Diffeomorphismen eignen sich, um Probleme mit besonderen Symmetrieeigenschaften im  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  zu behandeln. Auch zum Integrieren sind sie manchmal hilfreich, siehe die Beispiele 11.48–11.50.

- (1) *Polarkoordinaten*. Betrachte  $\Phi: (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0] \times \{0\}$  mit

$$\Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) .$$

Für die Umkehrfunktion identifizieren wir  $\mathbb{R}^2$  mit  $\mathbb{C}$  und benutzen den komplexen Absolutbetrag aus und die Argumentfunktion  $\arg$  aus Folgerung 3.48. Dann gilt

$$(x, y) = \Phi(|x + iy|, \arg(x + iy)) \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0] \times \{0\} .$$

- (2) *Zylinderkoordinaten*. Wir fügen zu Polarkoordinaten noch eine dritte Koordinate hinzu, die Höhe, und betrachten  $\Phi: (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0] \times \{0\}) \times \mathbb{R}$  mit

$$\Phi(r, \varphi, h) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) .$$

Die Umkehrfunktion bestimmt man entsprechend.

- (3) *Kugelkoordinaten*. Zusätzlich zum Radius führen wir zwei Winkel ein, die auf der Kugeloberfläche in etwa der geographischen Länge und Breite entsprechen. Betrachte  $\Phi: (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (\mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0] \times \{0\}) \times \mathbb{R}$  mit

$$\Phi(r, \varphi, \psi) = (r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi) .$$

Sei  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine differenzierbare Abbildung auf einer offenen Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Dann bezeichne  $d_p F \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  die Ableitung an der Stelle  $p \in U$ . Im Falle  $m = n$  können wir den Absolutbetrag der Determinante dieser Ableitung bilden und erhalten eine neue Abbildung

$$|\det dF| : U \rightarrow \mathbb{R} ,$$

die sogenannte *Jacobi-Determinante*. Es folgt das Hauptresultat dieses Abschnitts.

11.46. SATZ (Transformationsformel). *Es seien  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\Phi: U \rightarrow V$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus.*

- (1) *Sei  $A \subset U$  Lebesgue-messbar, dann ist auch  $\Phi(A) \subset V$  Lebesgue-messbar, und es gilt*

$$\lambda^n(\Phi(A)) = \int_A |\det d\Phi| d\lambda^n .$$

- (2) *Sei  $f: V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  Lebesgue-integrierbar, dann ist auch  $f \circ \Phi: U \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  Lebesgue-integrierbar, und es gilt*

$$\int_V f d\lambda^n = \int_U (f \circ \Phi) \cdot |\det d\Phi| d\lambda^n .$$

In der Terminologie von Proposition 11.43 ist  $\lambda^n$  auf  $V$  somit das Bildmaß von  $\lambda^n_{|\det d\Phi|}$  auf  $U$  unter  $\Phi$ . Wir können auch über messbare Teilmengen  $A \subset U$  integrieren und erhalten die Formel

$$\int_{\Phi(A)} f d\lambda^n = \int_A (f \circ \Phi) \cdot |\det d\Phi| d\lambda^n .$$

Die folgende Proposition wird im Beweis der Transformationsregel benötigt.

11.47. PROPOSITION. *Es seien  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\Phi: U \rightarrow V$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus. Für alle  $A \subset U$  gilt:*

- (1) *wenn  $A$  eine Lebesgue-Nullmenge ist, ist  $\Phi(A)$  eine Lebesgue-Nullmenge, und*  
 (2) *wenn  $A$  Lebesgue-messbar ist, ist  $\Phi(A)$  Lebesgue-messbar.*

11.48. BEISPIEL. Wir berechnen mit den Sätzen 11.40, 11.42 von Fubini und Tonelli und der Transformationsformel für die Polarkoordinaten aus Beispiel 11.45 (1) das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \pi \int_0^{\infty} e^{-s} ds = \pi$$

und erhalten damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Allgemeiner sei  $A \in M_n(\mathbb{R})$  eine positiv definite selbstadjungierte Matrix, dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle x, Ax \rangle} d\lambda^n(x) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}.$$

11.49. BEISPIEL. Wir definieren die  $\Gamma$ -Funktion  $\Gamma: \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad \text{für } \operatorname{Re} z > 0.$$

Dann gilt

- (1)  $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z),$
- (2)  $\Gamma(n+1) = n!$  für alle  $n \in \mathbb{N},$
- (3)  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- (4) und  $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}$  für alle  $n \in \mathbb{N}.$

Um die  $\Gamma$ -Funktion für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$  zu erhalten, schreiben wir  $z = (z+n) - n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  so, dass  $\operatorname{Re}(z+n) > 0$ , und wenden anschließend (1)  $n$ -mal auf den Wert von  $\Gamma(z+n)$  an.

11.50. BEISPIEL. In Analogie zu Polar- und Kugelkoordinaten kann man auch auf  $\mathbb{R}^n$  den Radius und  $(n-1)$ -verschiedene Winkel  $(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \in D_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$  einführen. Die Jacobi-Determinante hat dann die Form

$$|\det d\Phi| = r^{n-1} f(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$$

für eine nicht-negative Funktion  $f: D_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Indem man ein  $n$ -dimensionales Gaußsches Integral ausrechnet, erhält man

$$\begin{aligned} \pi^{\frac{n}{2}} &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\cdot\|^2} d\lambda^n \\ &= \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr \cdot \int_{D_{n-1}} f(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) d\varphi_1 \cdots d\varphi_{n-1} \\ &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \int_{D_{n-1}} f(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) d\varphi_1 \cdots d\varphi_{n-1}. \end{aligned}$$

Das Integral über  $D_{n-1}$  wollen wir als die Oberfläche  $\omega_{n-1}$  des Einheitsballes im  $\mathbb{R}^n$  auffassen, mehr dazu im nächsten Abschnitt. Wir erhalten ohne weiteres Rechnen die Formel

$$\omega_{n-1} = \int_{D_{n-1}} f(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) d\varphi_1 \cdots d\varphi_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Zusammen mit Beispiel 11.49 erhalten wir die vertrauten Werte

$$\omega_0 = 2, \quad \omega_1 = 2\pi, \quad \text{und} \quad \omega_2 = 4\pi.$$

In den obigen Koordinaten können wir jetzt auch das Volumen des Einheitsballes ausrechnen und erhalten

$$\Omega_n = \lambda^n(B_1(0)) = \int_0^1 \omega_{n-1} r^{n-1} dr = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} .$$

Für kleine  $n$  erhalten wir

$$\Omega_0 = 1 , \quad \Omega_1 = 2 , \quad \Omega_2 = \pi , \quad \text{und} \quad \Omega_3 = \frac{4\pi}{3} .$$

Man beachte, dass jede dieser Zahlen ein rationales Vielfaches einer ganzzahligen Potenz von  $\pi$  ist. Dabei erhöht sich der Exponent um 1, wenn man  $n$  um 2 vergrößert. Das liegt mit daran, dass die  $\Gamma$ -Funktion an halbzahligen Stellen ein rationales Vielfaches von  $\sqrt{\pi}$  ist, siehe Beispiel 11.49 (4).

### 11.f. Integration über Untermannigfaltigkeiten

Die Integraltransformationsformel und die obige Berechnung der Kugeloberfläche  $\omega_{n-1}$  motivieren eine Formel für ein Maß auf beliebigen Untermannigfaltigkeiten. Tatsächlich kann man zeigen, dass dieses Maß auf  $m$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten proportional zum Hausdorff-Maß  $\mathcal{H}^m$  ist, wobei der Proportionalitätsfaktor nur von der Dimension  $m$  abhängt. Diese Rechnung wollen wir hier aber nicht durchführen. Wir begnügen uns damit, zu zeigen, dass das „Oberflächenmaß“ wohldefiniert ist.

Zunächst erinnern wir uns an den Begriff einer  $m$ -dimensionalen  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  aus Definition 7.42. Dort haben wir *Untermannigfaltigkeitskarten* eingeführt, nämlich Diffeomorphismen  $\Phi: U \rightarrow V$  zwischen offenen Teilmengen  $U, V \subset \mathbb{R}^n$ , so dass

$$U \cap M = \Phi^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\}) .$$

In Folgerung 7.44 haben wir zwei weitere Charakterisierungen von Untermannigfaltigkeiten kennengelernt falls  $k \geq 1$ . Für uns sind insbesondere *Parametrisierungen* wichtig, das sind Einbettungen  $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen, siehe Definition 7.43. Insbesondere haben Parametrisierungen injektives Differential  $d_x\psi$  für alle  $x \in V$  und sind Homöomorphismen auf ihr Bild. In der Regel ist im  $\psi$  eine echte Teilmenge von  $M$ . Mitunter können wir es aber immerhin einrichten, dass  $M \setminus \text{im } \psi$  eine Nullmenge ist bezüglich des Maßes, das wir jetzt konstruieren wollen.

11.51. BEMERKUNG. In der Transformationsformel beschreibt die Jacobi-Determinante die Volumenverzerrung eines Diffeomorphismus. Wir benötigen jetzt eine ähnliche Konstruktion für Einbettungen  $g: V \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$  mit  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen. In diesem Fall ist die Jacobi-Matrix  $d_p g \in M_{n,m}(\mathbb{R})$  rechteckig mit  $m \leq n$  und hat keine Determinante falls  $m < n$ . Stattdessen betrachten wir die sogenannte *Gramsche Determinante*

$$\sqrt{\det(A^t A)} \quad \text{für } A \in M_{n,m}(\mathbb{R}) ,$$

wobei  $A^t$  die transponierte Matrix bezeichne. Wir schauen uns dieses Konstrukt etwas genauer an.

- (1) Die Matrix  $A^t A$  ist stets symmetrisch und positiv semi-definit. Sie ist positiv definit genau dann, wenn  $A$  eine injektive Abbildung  $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  beschreibt. Folglich gilt stets  $\sqrt{\det(A^t A)} \geq 0$ , und  $\sqrt{\det(A^t A)} > 0$  gilt genau dann, wenn  $A$  injektiv ist.
- (2) Im Fall  $m = n$  gilt

$$\sqrt{\det(A^t A)} = |\det A| .$$

- (3) Im Allgemeinen beschreibt die Gramsche Determinante von  $A$  das anschauliche  $m$ -dimensionale Volumen des Parallelotops, das die Spalten von  $A$  aufspannen.

- (4) Wenn man  $A$  durch Hinzufügen von Spalten der Länge 1, die auf im  $A$  und zueinander senkrecht sind, zu einer quadratischen Matrix  $D$  ergänzt, gilt  $|\det D| = \sqrt{\det(A^t A)}$ . Das entspricht einer mehrfachen Anwendung des Cavalierischen Prinzips auf einen Zylinder mit Grundfläche im  $A$  und Höhe 1.

Wir können also getrost die Gramsche Determinante  $\sqrt{\det(A^t A)}$  zur Definition des  $m$ -dimensionalen Volumens des Parallelotops in (3) heranziehen.

Sei jetzt  $\psi: V \rightarrow M$  eine  $C^k$ -Parametrisierung (einer Teilmenge) von  $M \subset \mathbb{R}^n$  mit  $k \geq 1$ . Wir möchten ein Volumenmaß  $\text{vol}_M$  (oder auch  $\text{vol}^m$  oder einfach nur  $\text{vol}$ ) auf  $M$  so definieren, dass

$$\text{vol}_M(\psi(A)) = \int_A \sqrt{\det(d\psi^t d\psi)} d\lambda^m$$

für alle Lebesgue-messbaren Teilmengen  $A \subset V$  gilt. Das heißt, wir ersetzen die Jacobi-Determinante aus der Transformationsformel 11.46 durch die Gramsche Determinante. Im eindimensionalen Fall erhalten wir übrigens genau das Bogenlängen-Integral aus Satz 8.11. Im Sinne von Proposition 11.43 wäre  $\text{vol}_M|_{\text{im } \psi}$  also das Bildmaß von  $\lambda^m_{\int \sqrt{\det(d\psi^t d\psi)}}$  unter der Parametrisierung  $\psi$ . Als erstes überlegen wir uns, dass verschiedene Parametrisierungen den gleichen Volumenbegriff liefern.

11.52. PROPOSITION (Invarianz des Volumenmaßes). *Es sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit,  $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^m$  offen, und  $\psi_i: V_i \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$  zwei Parametrisierungen von  $M$ . Es sei  $A \subset \text{im } \psi_1 \cap \text{im } \psi_2$ , und es sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann gilt*

- (1)  $A_1 = \psi_1^{-1}(A)$  ist genau dann  $\lambda^m$ -messbar, wenn  $A_2 = \psi_2^{-1}(A)$  eine  $\lambda^m$ -messbare Teilmenge ist,
- (2)  $(f \circ \psi_1)|_{A_1}$  ist genau dann  $\lambda^m$ -messbar, wenn  $(f \circ \psi_2)|_{A_2}$  eine  $\lambda^m$ -messbare Funktion ist,
- (3) Falls die obigen Bedingungen erfüllt sind, gilt

$$\int_{A_1} (f \circ \psi_1) \sqrt{\det(d\psi_1^t d\psi_1)} d\lambda^m = \int_{A_2} (f \circ \psi_2) \sqrt{\det(d\psi_2^t d\psi_2)} d\lambda^m.$$

wobei das linke Integral genau dann existiert, wenn das rechte Integral existiert.

Da wir ein Radon-Maß auf Untermannigfaltigkeiten definieren möchten, schauen wir uns zunächst die Topologie auf  $M \subset \mathbb{R}^n$  an, die vom Euklidischen Abstand inzudiert wird. Nach Bemerkung 6.26 ist es dabei egal, ob wir erst den Euklidischen Abstand auf  $M$  einschränken und dazu die metrische Topologie betrachten, oder die Unterraumtopologie von  $M \subset \mathbb{R}^n$ .

11.53. PROPOSITION. *Jede  $m$ -dimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist ein lokal kompakter,  $\sigma$ -kompakter metrischer Raum bezüglich der Einschränkung der Euklidischen Metrik auf  $M$ .*

Wir fassen unsere Vorüberlegungen zusammen.

11.54. SATZ. *Es sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit mit  $k \geq 1$ . Dann existiert ein eindeutiges Radon-Maß  $\text{vol}_M$  auf  $M$  mit folgenden Eigenschaften.*

- (1) Eine Teilmenge  $E \subset M$  ist genau dann  $\text{vol}_M$ -messbar, wenn  $\psi^{-1}(E) \subset V$  Lebesgue-messbar ist für jede Parametrisierung  $\psi: V \rightarrow M$  von  $M$ .
- (2) Eine Teilmenge  $E \subset M$  ist genau dann eine  $\text{vol}_M$ -Nullmenge, wenn  $\psi^{-1}(E) \subset V$  eine Lebesgue-Nullmenge ist für jede Parametrisierung  $\psi: V \rightarrow M$  von  $M$ .
- (3) Sei  $E \subset M$  eine  $\text{vol}_M$ -messbare Teilmenge von  $M$ , so dass  $E = \psi(A)$  für eine Parametrisierung  $\psi: V \rightarrow M$  und eine Teilmenge  $A \subset V$ , dann gilt

$$\text{vol}_M(E) = \int_A \sqrt{\det(d\psi^t d\psi)} d\lambda^m.$$

Wenn wir eine Familie von Parametrisierungen  $\psi_i: V_i \rightarrow M$  mit  $i \in I$  gegeben haben, so dass

$$\text{vol}_M \left( M \setminus \bigcup_{i \in I} \text{im } \psi_i \right) = 0 ,$$

reicht es in (1) und (2), jeweils nur die Parametrisierungen  $\psi_i$  mit  $i \in I$  zu betrachten.

Zur Integration über  $M$  erhalten wir mittels Proposition 11.25 die Formel

$$\int_M f \, d\text{vol}_M = \int_V (f \circ \psi) \sqrt{\det(d\psi^t d\psi)} \, d\lambda^m$$

in dem Spezialfall, dass  $f: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  außerhalb im  $\psi$  verschwindet. Im Allgemeinen können wir entweder versuchen, eine Parametrisierung  $\psi: V \rightarrow M$  so zu finden, dass  $M \setminus \text{im } \psi$  eine  $\text{vol}_M$ -Nullmenge wird. Oder aber wir finden mit Hilfe von Proposition 11.53 eine Folge von Parametrisierungen  $\psi_i: V_i \rightarrow M$  und eine Folge messbarer, paarweise disjunkter Teilmengen  $E_i \subset \text{im } \psi_i \subset M$ , so dass

$$M = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} \text{im } \psi_i .$$

In diesem Fall gilt

$$\int_M f \, d\text{vol}_M = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\psi_i^{-1}(E_i)} (f \circ \psi_i) \sqrt{\det(d\psi_i^t d\psi_i)} \, d\lambda^m .$$

11.55. FOLGERUNG. *Es sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit und  $L \subset \mathbb{R}^n$  eine  $\ell$ -dimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit mit  $k \geq 1$  und  $\ell < m \leq n$ , und es gelte  $L \subset M$ . Dann ist  $L$  eine  $\text{vol}_M$ -Nullmenge.*

Mit Hilfe dieser Folgerung ist es oft möglich, Integrale über Untermannigfaltigkeiten mit Hilfe von sehr wenigen Parametrisierungen zu berechnen. Dazu muss man zeigen, dass die Bilder der Parametrisierungen disjunkt sind und das Komplement als Vereinigung von Untermannigfaltigkeiten kleinerer Dimension geschrieben werden kann.

11.56. BEISPIEL. Betrachte die Einheitskugel  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  und Kugelkoordinaten  $\Psi: D = (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow S^2$  mit

$$\Psi(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$$

analog zu Beispiel 11.45 (3). Wir zerlegen das Komplement

$$S^2 \setminus \text{im } \Psi = \left\{ \begin{pmatrix} -\cos \psi \\ 0 \\ \sin \psi \end{pmatrix} \mid \psi \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

in zwei 0-dimensionale Untermannigfaltigkeiten, nämlich Nord- und Südpol  $\{\pm e_3\}$ , und eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit, bestehend aus einem Meridian gegenüber vom Nullmeridian. Somit beschreibt  $\Psi$  die Kugel  $S^2$  bis auf eine Nullmenge, und wir erhalten

$$\int_{S^2} f \, d\text{vol}_{S^2} = \int_D (f \circ \Psi) \sqrt{\det(d\Psi^t d\Psi)} \, d\lambda^2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} f \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} \cos \psi \, d\varphi \, d\psi .$$

Analog verfahren wir mit  $S^m$  für  $m > 2$ . In diesem Sinne ist die Berechnung der Kugeloberfläche  $\omega_m$  in Beispiel 11.50 zu verstehen. Dabei können wir Bemerkung 11.51 (4) benutzen, um die Jacobi-Determinante aus obigem Beispiel mit der hier benötigten Gramschen Determinante zu identifizieren.

11.57. BEMERKUNG. Jetzt fehlt uns nur noch eine geometrische Charakterisierung des Volumenmaßes. Im Fall  $m = 0$  ist eine Untermannigfaltigkeit eine diskrete Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$ , und  $\text{vol}_M$  ist einfach das Zählmaß  $\#$  auf  $M$ . Im Fall  $m = 1$  haben wir schon gesehen, dass unser Maß die Bogenlänge aus Satz 8.11 auf messbare Teilmengen verallgemeinert. In den Übungen stellen wir für rektifizierbare Kurven  $\gamma$  einen Zusammenhang zwischen der Bogenlänge und  $\mathcal{H}^1(\text{im } \gamma)$  her. Für eindimensionale Untermannigfaltigkeiten  $C \subset \mathbb{R}^n$  haben wir damit  $d\text{vol}_C = \mathcal{H}^1|_C$  gezeigt.

Für größere  $m$  könnten wir zunächst zeigen, dass das  $m$ -dimensionale Hausdorff-Maß auf  $\mathbb{R}^m$  mit  $\vartheta_m \lambda^m$  übereinstimmt für eine Zahl  $\vartheta_m \in (0, \infty)$ , die nur von  $m$  abhängt. Anschließend könnten wir zeigen, dass  $\mathcal{H}^m(E) = \vartheta_m \text{vol}_M(E)$  für alle  $\text{vol}_M$ -messbaren Teilmengen  $E \subset M$  einer  $m$ -dimensionalen  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  gilt. Damit hätten wir  $\text{vol}_M$  allein mit Hilfe der Metrik auf  $M$  konstruiert. Allerdings sind diese beiden Beweise recht aufwändig. Gleichzeitig hätten wir damit übrigens auch gezeigt, dass  $m$ -dimensionale  $C^k$ -Mannigfaltigkeiten für  $k \geq 1$  Hausdorff-Dimension  $m$  haben.

## Funktionenräume

In diesem Kapitel wollen wir Räume integrierbarer Funktionen betrachten. Aus Abschnitt 7.c kennen wir bereits die Räume  $C^k(U)$  für  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $k \in \mathbb{N}$ . Diese Räume tragen Normen, die sie zu Banachräumen (das heißt, zu vollständigen normierten Vektorräumen) machen. Daher sind die Räume  $C^k(U)$  prinzipiell gut geeignet zum Lösen analytischer Probleme, siehe etwa Bemerkung 6.4. Allerdings ist  $k$ -fache Differenzierbarkeit — ja selbst Stetigkeit — bei manchen Problemstellungen eine viel zu starke Einschränkung. Daher betrachten wir weitere Funktionenräume.

Für jeden Maßraum  $(M, \mu)$  lassen sich für alle  $p \in [1, \infty]$  Banachräume  $L^p(\mu)$  konstruieren. Wenn  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\mu = \lambda^n|_\Omega$  ist, sind diese Räume zumindest für  $p < \infty$  die Vervollständigung des Raums der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf  $\mathbb{R}^n$  bezüglich der jeweiligen Norm. Da sich  $L^p$ -Funktionen nicht klassisch ableiten lassen, stellen wir ohne detaillierte Erläuterungen das Konzept der schwachen Ableitung vor.

Wir schauen uns zu guter Letzt Fourierreihen und die Fouriertransformation an. Hier wird eine  $L^2$ -Funktion als Summe (beziehungsweise Integral) von Schwingungen geschrieben. Wir reißen mögliche Anwendungen nur kurz an.

### 12.a. Die Räume $L^p(\mu)$

In diesem Abschnitt definieren wir die Räume  $L^p(\mu)$  über beliebigen Maßräumen und beweisen einige grundlegende Eigenschaften. Speziellere Resultate für das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^n$  und offenen Teilmengen davon folgen im nächsten Abschnitt.

Wir erinnern uns, dass zwei Funktionen  $f, g$  auf  $M$  fast überall gleich sind, wenn die Menge  $\{f \neq g\}$  eine Nullmenge bildet. In diesem Fall schreiben wir kurz  $f \sim g$ . Dann ist „ $\sim$ “ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Funktionen auf  $M$ , siehe Übungen und Bemerkung 11.7. Wir erinnern uns an Normen auf Vektorräumen aus Definition 6.37 und die von ihnen induzierten Metriken aus Proposition 6.38. Im Folgenden sei der Grundkörper stets  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .

12.1. DEFINITION. Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$  und  $1 \leq p \leq \infty$ . Für eine messbare Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{k}$  definieren wir  $\|f\|_{L^p} \in [0, \infty]$  durch

$$\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left( \int_M |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} & \text{falls } p < \infty, \text{ und} \\ \inf \{ s \in [0, \infty] \mid \mu\{|f| > s\} = 0 \} & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Wir definieren

$$L^p(\mu; \mathbb{k}) = \{ f: M \rightarrow \mathbb{k} \mid f \text{ messbar mit } \|f\|_{L^p} < \infty \} / \sim.$$

Im Fall  $p = \infty$  nennt man  $\|f\|_{L^\infty}$  auch das „essentielle Supremum“ von  $|f|$ . Dabei handelt es sich um die kleinste obere Schranke für fast alle Funktionswerte. Wenn der Grundkörper  $\mathbb{k}$  aus dem Kontext klar ist, schreiben wir nur  $L^p(\mu)$ .

Im Falle  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  hätten wir auch  $\overline{\mathbb{R}}$ -wertige Funktionen zulassen können. Allerdings kann eine  $L^p$ -Funktion höchstens auf einer Nullmenge die Werte  $\pm\infty$  annehmen, so dass wir durch die Einschränkung auf  $\mathbb{R}$ -wertige Funktionen keine Elemente von  $L^p(\mu; \mathbb{R})$  verlieren.

12.2. BEMERKUNG. Wir können Homogenität von  $\|\cdot\|_{L^p}$  leicht überprüfen. Auch  $\|f\|_{L^p} \geq 0$  ist klar. Aus  $\|f\|_{L^p} = 0$  folgt aber nur  $f = 0$  fast überall. Daher müssen wir oben den Quotienten nach „ $\sim$ “ bilden. Auf der anderen Seite ändert sich der Wert von  $\|f\|_{L^p}$  nicht, wenn man  $f$  auf einer Nullmenge abändert. Also ist  $\|\cdot\|_{L^p}$  wohldefiniert. Wir beweisen Subadditivität mit der Minkowski-Ungleichung 12.6.

In Analysis I haben wir gelernt, dass Funktionen Abbildungen sind. Die Elemente von  $L^p(\mu; \mathbb{k})$  sind in der Regel keine Abbildungen mehr. Das liegt daran, dass aus  $f \sim g$  nicht  $f(x) = g(x)$  folgt. Die Auswertung einer  $L^p$ -„Funktion“ an einer Stelle  $x \in M$  ist somit nicht wohldefiniert. Manche Autoren benutzen für Elemente von  $L^p(\mu; \mathbb{k})$  daher andere Buchstaben (typischerweise  $u, v, \dots$ ). Wir werden trotzdem weiterhin von Funktionen sprechen und die Buchstaben  $f, g, \dots$  benutzen.

Ein Vektorraum mit einer Norm heißt auch *normierter Vektorraum*. Wir nennen einen normierten Vektorraum *vollständig*, wenn er als metrischer Raum mit der induzierten Metrik vollständig ist, siehe Definition 6.6.

12.3. DEFINITION. Ein *Banachraum* ist ein vollständiger normierter Vektorraum.

Wir wollen zeigen, dass  $L^p(\mu; \mathbb{k})$  ein Banachraum ist. Zunächst müssen wir die Dreiecksungleichung oder Subadditivität aus Definition 6.37 (3) beweisen. Wir erinnern uns an die Youngsche Ungleichung 4.35.

12.4. SATZ (Hölder-Ungleichung). *Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$  und es seien  $p, q \in [1, \infty]$  so, dass  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Es seien  $f \in L^p(\mu; \mathbb{k})$  und  $g \in L^q(\mu; \mathbb{k})$ , dann ist  $fg \in L^1(\mu; \mathbb{k})$  mit*

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q} .$$

Man nennt  $p, q$  wie oben auch *konjugierte Exponenten*. Im Fall  $p = q = 2$  erhalten wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

12.5. BEMERKUNG. Besonders interessant ist der Spezialfall  $p = q = 2$ . Wir erhalten eine Abbildung

$$L^2(\mu; \mathbb{k}) \times L^2(\mu; \mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k} \quad \text{mit} \quad (f, g) \mapsto \int \bar{f}g d\mu ,$$

von der wir später sehen werden, dass sie ein Skalarprodukt auf  $L^2(\mu; \mathbb{k})$  definiert.

12.6. SATZ (Minkowski-Ungleichung). *Für  $f, g \in L^p(\mu; \mathbb{k})$  gilt*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} .$$

Insbesondere definiert  $\|\cdot\|_{L^p}$  tatsächlich eine Norm auf  $L^p(\mu; \mathbb{k})$ . Bevor wir uns um die Vollständigkeit kümmern, wollen wir zunächst zwei Schlussfolgerungen aus der Hölder-Ungleichung ziehen.

12.7. BEMERKUNG. Es seien  $p$  und  $q \in [1, \infty]$  konjugierte Exponenten. Dann liefert jedes Element  $g \in L^q(\mu; \mathbb{k})$  eine stetige lineare Abbildung

$$L^p(\mu; \mathbb{k}) \longrightarrow \mathbb{k} \quad \text{mit} \quad f \mapsto \int_M fg d\mu .$$

Bei einem topologischen Vektorraum  $V$  nennt man den Raum der stetigen linearen Abbildungen in den Grundkörper den (*topologischen*) *Dualraum*  $V^*$  von  $V$ . Wir erhalten eine lineare Abbildung

$$F: L^q(\mu; \mathbb{k}) \longrightarrow L^p(\mu; \mathbb{k})^* \quad \text{mit} \quad g \mapsto F(g) = \int_M \cdot g d\mu .$$

Wenn  $V$  ein normierter Vektorraum ist, trägt auch  $V^*$  eine Norm, nämlich

$$\|\alpha\|_{V^*} = \sup\{\alpha(v) \mid v \in V \text{ und } \|v\| \leq 1\}.$$

Für  $g \in L^q(\mu; \mathbb{k})$  gilt  $\|g\|_{L^p(\mu; \mathbb{k})^*} \leq \|g\|_{L^q}$ , also ist die Abbildung  $L^q(\mu; \mathbb{k}) \rightarrow L^p(\mu; \mathbb{k})^*$  sogar stetig. Man kann zeigen, dass diese Abbildung für  $p \in [1, \infty)$  sogar eine Isometrie ist.

12.8. BEMERKUNG. Es seien jetzt  $p, q, r \in [1, \infty]$  gegeben, so dass  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ . Dann sind  $\frac{p}{r}$  und  $\frac{q}{r}$  konjugierte Exponenten. Seien  $f \in L^p(\mu; \mathbb{k})$  und  $g \in L^q(\mu; \mathbb{k})$ , dann folgt aus der Hölder-Ungleichung, dass

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}.$$

Punktweise Multiplikation liefert somit eine bilineare und stetige Abbildung

$$L^p(\mu; \mathbb{k}) \times L^q(\mu; \mathbb{k}) \longrightarrow L^r(\mu; \mathbb{k}).$$

Das bedeutet, dass man in  $L^p$ -Räumen zu verschiedenen Exponenten  $p$  arbeiten muss, sobald man Funktionen miteinander multipliziert. Dieses Problem hat man mit  $C^k$ -Räumen nicht.

Die folgende Aussagen ist ein wichtiges Hilfsmittel im Beweis des Satzes von Riesz und Fischer. Gleichzeitig lernen wir etwas über absolute Konvergenz in  $L^p(\mu)$ .

12.9. PROPOSITION. *Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$  und  $p \in [1, \infty)$  und  $(g_k)_k$  eine Folge in  $L^p(\mu)$ , so dass  $\sum_k \|g_k\|_{L^p} < \infty$ . Dann konvergiert  $f_k = \sum_{i=0}^k g_i$  sowohl  $\mu$ -fast überall punktweise als auch in  $L^p(\mu)$  gegen eine Funktion  $f \in L^p(\mu)$ .*

12.10. SATZ (Riesz-Fischer). *Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$  und  $p \in [1, \infty]$ . Dann ist der Vektorraum  $(L^p(\mu; \mathbb{k}), \|\cdot\|_{L^p})$  vollständig, also ein Banachraum.*

Im Folgenden schreiben wir kurz  $L^p(\mu; \mathbb{k})$  für das Paar  $(L^p(\mu; \mathbb{k}), \|\cdot\|_{L^p})$ .

12.11. FOLGERUNG (aus dem Beweis des obigen Satzes). *Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$ ,  $p \in [1, \infty]$ , und  $(f_i)_i$  eine Folge von Funktionen auf  $M$  mit  $\|f_i\|_{L^p} < \infty$ . Wenn  $f_i$  in der  $L^p$ -Norm gegen  $f \in L^p(\mu; \mathbb{k})$  konvergiert, dann konvergiert eine Teilfolge punktweise  $\mu$ -fast überall gegen  $f$ .*

12.12. BEMERKUNG. (1) Da  $L^p$ -Funktionen nur fast überall bestimmt sind, kann man auch nur fast überall Konvergenz erwarten. Auf der anderen Seite stimmt die Formulierung der Folgerung unabhängig davon, welche konkreten Repräsentanten der  $f_i$  betrachtet werden.

(2) In der Regel konvergiert nicht die gesamte Folge  $\mu$ -fast überall. Dazu schreibe  $n \in \mathbb{N}_+$  als  $n = 2^k + j$  mit  $0 \leq j < 2^k$  und definiere

$$f_n = \chi_{[2^{-k}j, 2^{-k}(j+1)]}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dann konvergiert zwar  $f_n$  gegen 0 in der  $L^p$ -Norm für alle  $p < \infty$ , aber für alle  $x \in [0, 1]$  gilt  $\limsup f_n(x) = 1$ , so dass die Folge an keiner Stelle punktweise gegen 0 konvergiert.

Die folgende Aussage über dominierte Konvergenz in  $L^p$  haben wir im Beweis von Satz 12.10 benutzt. Wir werden sie im nächsten Abschnitt weiter verwenden.

12.13. PROPOSITION. *Es sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$  und  $p \in [1, \infty)$  und  $(f_k)_k$  eine in  $L^p(\mu)$ , die fast überall punktweise gegen eine Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{k}$  konvergiert. Wenn eine Funktion  $h \in L^p(\mu)$  existiert, so dass  $|f_k| \leq h$  für alle  $k$  fast überall gilt, dann konvergiert  $(f_k)_k$  auch in  $L^p(\mu)$  gegen  $f$ .*

## 12.b. $L^p$ -Funktionen auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

In diesem Abschnitt betrachten wir anstelle beliebiger Maßräume nur noch offene Teilmengen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit dem Lebesgue-Maß. Um mit  $L^p$ -Funktionen auf  $\Omega$  zu arbeiten, ist es manchmal hilfreich, sie durch stetige Funktionen zu approximieren. Das geht zumindest für  $p \in [1, \infty)$  gut und liefert uns eine alternative Beschreibung dieser  $L^p$ -Räume. In den Übungen sehen wir, dass wir anstelle von  $C^0$ -Funktionen sogar  $C^\infty$ -Funktionen zur Approximation verwenden dürfen.

Außerdem wollen wir uns anschauen, wie sich  $L^p$ -Funktionen trotz Bemerkung 12.2 ableiten lassen. Wir führen den Begriff der schwachen Ableitung ein, bei der eine Funktion  $f$  nur integriert werden muss. Neben der stetigen partiellen Differenzierbarkeit ist schwache Differenzierbarkeit wohl das wichtigste Differenzierbarkeitskonzept in der Analysis. Wir betrachten hier dennoch nur die Definition und einzelne Beispiele. Mehr zur schwachen Ableitung lernt man zum Beispiel in Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen oder Funktionalanalysis.

12.14. DEFINITION. Es sei  $M$  ein topologischer Raum und  $f: M \rightarrow \mathbb{k}$  eine stetige Funktion, dann definieren wir ihren *Träger* durch

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}} \subset M.$$

Den Raum der stetigen Funktionen auf  $M$  mit kompaktem Träger bezeichnen wir mit  $C_c^0(M)$ .

Manchmal findet man stattdessen die Notation  $C_0^0(M)$ . Wir benutzen  $C_0^0(M)$  für einen anderen Raum, siehe unten.

12.15. SATZ. *Es sei  $M$  ein lokal kompakter,  $\sigma$ -kompakter metrischer Raum und  $\mu$  ein Radon-Maß auf  $M$ . Es sei  $1 \leq p < \infty$ , dann liegt  $C_c^0(M)$  dicht in  $L^p(\mu)$ .*

Wir denken in erster Linie an  $M = \Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\mu = \lambda^n$ , in diesem Fall schreiben wir kurz  $L^p(\Omega)$  für  $L^p(\lambda^n|_\Omega)$ . Der Satz gilt aber beispielsweise auch für das Volumen-Maß auf Untermannigfaltigkeiten oder für die Lebesgue-Stieltjes-Maße auf  $\mathbb{R}$  aus den Übungen. In den Übungen approximieren wir  $L^p$ -Funktionen für  $p < \infty$  durch glatte Funktionen mit kompaktem Träger für  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\mu = \lambda^n$ . Ein analoges Resultat dazu gilt immerhin noch für Untermannigfaltigkeiten mit dem Volumenmaß.

12.16. BEMERKUNG. Der obige Satz gibt uns eine alternative Definition von  $L^p(\Omega)$  als Vervollständigung von  $C_c^0(\Omega)$  unter der  $L^p$ -Norm, falls  $p < \infty$ . Diese Konstruktion ist analog zur Konstruktion von  $\mathbb{R}$  aus  $\mathbb{Q}$ , allerdings funktioniert sie nicht für beliebige Maßräume.

Wir kennen bereits Beispiele von Folgen stetiger Funktionen, die punktweise gegen unstetige Grenzfunktionen konvergieren, siehe etwa Beispiel 3.35. Bemerkung 12.12 zeigt, dass Konvergenz in  $L^p$  nur noch fast überall punktweise Konvergenz impliziert, daher dürfen wir uns nicht wundern, wenn eine Folge stetiger Funktion in  $L^p$  eine nur noch messbare Grenzfunktion haben kann. Außerdem verstehen wir auch, dass die Grenzfunktion nur noch fast überall bestimmt sein muss.

An dieser Stelle sei daran erinnert, dass wir  $L^p(\Omega)$  mit Hilfe Lebesgue-messbarer Funktionen definiert haben. Andere Autoren verlangen stattdessen, dass Elemente von  $L^p(\Omega)$  durch Borel-messbare Funktionen repräsentiert werden können. Wir haben in den Übungen gesehen, dass wir jede Lebesgue-messbare Funktion durch eine Borel-messbare Funktion ersetzen dürfen, die fast überall gleich ist. Beide Definitionen von  $L^p(\Omega)$  führen also zum gleichen Raum.

Für  $p = \infty$  ist Satz 12.15 falsch. Tatsächlich ist der Abschluss  $C_0^0(\Omega) = \overline{C_c^0(\Omega)}$  von  $C_c^0(\Omega)$  unter der  $L^\infty$ -Norm ein echter Teilraum von  $L^\infty(\Omega)$ , siehe Übung. Daher liefert die Vervollständigung von  $C_c^0(\Omega)$  unter der  $L^\infty$ -Norm nur den Raum  $C_0^0(\Omega)$ . Zum einen gibt es viele  $L^\infty$ -Funktionen, die keinen stetigen Repräsentanten haben und deswegen nicht in  $\overline{C_c^0(\Omega)}$  liegen können. Zum anderen gibt es auch beschränkte stetige Funktionen, die zum „Rand“ von  $\Omega$  hin nicht gegen 0 gehen und deswegen nicht  $\overline{C_c^0(\Omega)}$  liegen.

12.17. BEMERKUNG. Als Vorbereitung für die Definition der schwachen Ableitung betrachten wir den Raum  $C_c^\infty(\Omega)$  der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger. Diese Funktionen werden wir *Testfunktionen* nennen, da wir später gewisse Aussagen (wie schwache Differenzierbarkeit) mit ihnen testen werden. Es gibt andere Funktionenräume, die einen ähnlichen Zweck erfüllen, und deren Elemente man daher genauso gut Testfunktionen nennen dürfte, wie etwa Schwartz-Funktionen, siehe Definition 12.33.

Da eine Funktion  $f$  außerhalb ihres Trägers konstant ist, gilt  $\text{supp } df \subset \text{supp } f$ , und entsprechend für alle höheren Ableitungen. Ab sofort betrachten wir das Lebesgue-Maß auf offenen Teilmengen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Man kann zeigen, dass  $C_c^\infty(\Omega) \subset C_c^0(\Omega)$  bezüglich der  $L^p$ -Norm dicht liegt für alle  $1 \leq p < \infty$  (Übung). Zusammen mit Satz 12.15 bedeutet das, dass man  $L^p$ -Funktionen sogar durch Testfunktionen approximieren kann.

Für eine messbare Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{k}$  existiert das Integral

$$\int_{\Omega} f \varphi \, d\lambda^n$$

genau dann für alle Testfunktionen  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , wenn  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ , das heißt, wenn jeder Punkt  $p \in \Omega$  eine Umgebung  $U \subset \Omega$  besitzt, so dass  $f|_U \in L^1(U)$  (Übung). Solche Funktionen heißen *lokal integrierbar*. Sie können zum „Rand“ von  $\Omega$  hin beliebig schnell wachsen. Beispielsweise sind alle stetigen Funktionen auf  $\Omega$  lokal integrierbar, wohingegen ihr Integral über ganz  $\Omega$  nicht notwendigerweise existiert. Auf der anderen Seite ist etwa  $x \mapsto \frac{1}{x}$  auf  $\mathbb{R}$  bei 0 nicht lokal integrierbar. Wie in Definition 12.1 betrachten wir auch lokal integrierbare Funktionen nur bis auf Gleichheit fast überall. Für alle  $p \in [1, \infty]$  gilt dann  $L^p(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ .

Der Raum  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  trägt übrigens keine offensichtliche Norm. Er ist aber ein Fréchet-Raum, das heißt, er ist vollständig bezüglich einer Metrik, die von einer Folge von (Halb-)Normen herkommt, siehe Abschnitt 12.d.

Zur Definition der schwachen Ableitung benutzen wir partielle Integration. Dadurch vermeiden wir es, über einzelne Funktionswerte sprechen zu müssen.

12.18. DEFINITION. Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, und  $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  seien lokal integrierbar. Es sei  $v \in \mathbb{R}^n$ . Dann hat  $f$  *schwache Ableitung  $g$  in Richtung  $v$* , wenn für alle Testfunktionen  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  gilt, dass

$$\int_{\Omega} g \varphi \, d\lambda^n = - \int_{\Omega} f \partial_v \varphi \, d\lambda^n .$$

Wir nennen  $f$  *schwach differenzierbar mit schwacher Ableitung  $df: \mathbb{R}^n \rightarrow L^1_{\text{loc}}(\Omega)$* , wenn  $f$  in jede Richtung  $v \in \mathbb{R}^n$  schwach differenzierbar ist mit Ableitung  $df(v)$ .

Wenn die schwache Ableitung existiert, ist sie eine lineare Abbildung.

12.19. BEMERKUNG. Man kann die folgenden Aussagen beweisen.

- (1) Wenn  $f$  schwach in Richtung  $v$  ableitbar ist, ist die schwache Ableitung eindeutig.
- (2) Wenn die Richtungsableitung  $\partial_v f$  von  $f$  existiert und stetig ist, dann ist  $f$  auch schwach in Richtung  $v$  differenzierbar mit schwacher Ableitung  $\partial_v f$ .
- (3) Es gelten die üblichen Rechenregeln wie Linearität und Produktregel (soweit sinnvoll, siehe Bemerkung 12.8).

12.20. BEISPIEL. Wir betrachten Funktionen auf  $\mathbb{R}$  und wählen die Ableitungsrichtung  $v = e_1$ .

- (1) Die Betragsfunktion  $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist schwach ableitbar, und ihre Ableitung ist die Vorzeichenfunktion  $\text{sign}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (2) Die Vorzeichenfunktion  $\text{sign}$  besitzt keine schwache Ableitung. Es reicht also nicht, dass sie fast überall klassisch differenzierbar ist.

Bemerkung 12.19 (1) und Beispiel 12.20 (2) beruhen auf der folgenden wichtigen Aussage.

12.21. LEMMA (Fundamentallemma der Variationsrechnung). *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  eine Funktion, so dass*

$$\int_{\Omega} f\varphi \, d\lambda^n \geq 0$$

für alle  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  mit  $\varphi \geq 0$ . Dann gilt  $f \geq 0$  fast überall.

Wenn das obige Integral für alle  $\varphi \geq 0$  verschwindet, folgt also bereits  $f = 0$  fast überall, indem man sowohl  $f$  als auch  $-f$  betrachtet. Da  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  alle  $L^p$ -Räume umfasst, gilt das erst recht für  $f \in L^p(\Omega)$ . Entsprechende Aussagen erhält man auch für lokal kompakte,  $\sigma$ -kompakte metrische Räume mit einem Radon-Maß  $\mu$ , wenn man  $C_c^\infty(\Omega)$  durch  $C_c^0(M)$  ersetzt.

12.22. BEMERKUNG. In Analogie zu Definition 7.15 können wir auch höhere schwache Ableitungen definieren. Der Satz von Schwarz überträgt sich unmittelbar auf die höheren schwachen Ableitungen, da er für die Testfunktionen richtig ist. In der Analysis betrachtet man für  $k \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq p \leq \infty$  den Sobolev-Raum  $W^{k,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$  aller  $L^p$ -Funktionen, die  $k$ -fach schwach differenzierbar sind, und deren schwache Ableitungen bis zur Ordnung  $k$  wieder in  $L^p(\Omega)$  liegen. Indem man die  $L^p$ -Norm aller schwachen Ableitungen von  $f$  bis zur Ordnung  $k$  zusammenaddiert, erhält man eine Norm  $\|f\|_{W^{k,p}}$ , und  $(W^{k,p}(\Omega), \|f\|_{W^{k,p}})$  ist wieder ein Banachraum.

Die Beispiele oben zeigen, dass das direkte Arbeiten mit Definition 12.18 recht mühsam sein kann. Aus diesem Grund benutzt man gern Approximationssätze für Sobolev-Räume ähnlich wie Satz 12.15, allerdings approximiert man mit glatten Funktionen. Auf der anderen Seite muss man in der Regel auch Funktionen zulassen, die nicht kompakt getragen sind. Dann kann man Sätze über Sobolev-Funktionen mitunter dadurch beweisen, dass man sie durch glatte Funktionen approximiert, für die der Beweis deutlich einfacher wird.

## 12.c. Fourierreihen

Fourier hat vor circa 200 Jahren behauptet, man könne jede willkürliche Funktion auf einem kompakten Intervall durch bestimmte Linearkombinationen trigonometrischer Funktionen approximieren. Erst nach mehr als 50 Jahren konnte Harnack zeigen, dass quadrat-integrierbare Funktionen im quadratischen Mittel durch Fouriersummen approximiert werden können.

Wir konzentrieren uns in diesem Abschnitt auf den Hilbertraum  $L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$ , den wir leicht mit den komplexwertigen  $L^2$ -Funktionen auf dem Kreis  $S^1$  identifizieren können. Es stellt sich heraus, dass die periodischen Funktionen  $t \mapsto e^{ikt}$  eine Hilbert-Orthogonalbasis dieses Raumes bilden. Wenn wir stattdessen über  $\mathbb{R}$  arbeiten möchten, können wir ausnutzen, dass die reellwertigen Funktionen  $\cos k \cdot$  und  $\sin k \cdot$  über  $\mathbb{C}$  den gleichen Unterraum von  $L^2$  aufspannen wie  $e^{ik \cdot}$  und  $e^{-ik \cdot}$ .

12.23. BEMERKUNG. Sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $M$ , dann erhalten wir ein Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_M \bar{f}g \, d\mu$$

auf einem geeigneten Raum von Funktionen, und die zugehörige Norm ist die  $L^2$ -Norm. Aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Satz 12.4 für  $p = q = 2$ ) ist dieses Skalarprodukt auf  $L^2(\mu; \mathbb{k})$  wohldefiniert, und die zugehörige Norm ist vollständig. Nach Konstruktion ist  $L^2(\mu; \mathbb{k})$  gleichzeitig der größte Raum messbarer Funktionen auf  $M$ , auf dem die obige Definition sinnvoll ist.

12.24. DEFINITION. Ein *Hilbertraum* ist ein Vektorraum mit Skalarprodukt, der unter der induzierten Norm vollständig ist.

Hilberträume sind also spezielle Banachräume, und nach Vorbemerkung ist  $L^2(\mu; \mathbb{k})$  stets ein Hilbertraum. In dem Spezialfall, dass wir es mit dem Zählmaß  $\mu = \#$  auf einer Menge  $M$  zu tun haben, schreibt man kurz  $\ell^p(M; \mathbb{k})$  für  $L^p(\#; \mathbb{k})$ , im Fall  $M = \mathbb{N}$  oder  $\mathbb{Z}$  sogar nur noch  $\ell^p(\mathbb{k})$ . In diesem Abschnitt interessiert uns vor allem  $\ell^2(\mathbb{C})$  über der Menge  $\mathbb{Z}$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle a, b \rangle_{\ell^2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{a(k)} b(k) .$$

12.25. BEMERKUNG. Wir betrachten jetzt die Funktionen  $w_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$  auf dem Intervall  $(-\pi, \pi)$ . Eine einfache Rechnung liefert

$$\langle w_k, w_\ell \rangle_{L^2(-\pi, \pi)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\ell-k)x} dx = \delta_{k\ell} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = \ell, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also bilden die Funktionen  $(w_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  einen  $L^2$ -orthonormalen „Rahmen“.

Wir wollen zeigen, dass sie sogar eine *Hilbertbasis* von  $L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$  bilden, das heißt, dass sich jede  $L^2$ -Funktion  $f$  durch Linearkombinationen der  $w_k$  in der  $L^2$ -Norm beliebig gut approximieren lässt. Es gilt sogar etwas mehr, nämlich dass es *Fourierkoeffizienten*  $\hat{f} \in \ell^2(\mathbb{C})$  gibt, so dass

$$(12.1) \quad f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) w_k \quad \in L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C}) ,$$

insbesondere konvergiert die obige Reihe in  $L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$ . Umgekehrt liefert jede Folge  $\hat{f} \in \ell^2(\mathbb{C})$  eine Funktion in  $L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$ .

Unter der Annahme (12.1) können wir die Fourierkoeffizienten berechnen, denn dann gilt

$$(12.2) \quad \langle w_k, f \rangle_{L^2} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \langle w_k, w_\ell \rangle_{L^2} \hat{f}(\ell) = \hat{f}(k) .$$

Wenn wir  $f, g \in L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$  als Fourierreihen schreiben können, zeigt eine ähnliche Rechnung, dass

$$(12.3) \quad \langle f, g \rangle_{L^2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k) = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{\ell^2} .$$

Mit den obigen Rechnungen bleibt nur noch zu zeigen, dass sich jede  $L^2$ -Funktion tatsächlich in der Form (12.1) schreiben lässt.

12.26. SATZ (Harnack). *Sei  $f \in L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$  eine Funktion. Dann liegen ihre wie in (12.2) definierten Fourierkoeffizienten  $\hat{f}$  in  $\ell^2(\mathbb{C})$ , und die Fourierreihe (12.1) konvergiert in  $L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$  gegen  $f$ .*

In den Übungen schauen wir uns genauer an, wie  $L^2$ -Funktionen auf  $(-\pi, \pi)$  mit  $2\pi$ -periodischen Funktionen auf  $\mathbb{R}$  oder äquivalent mit Funktionen auf dem Einheitskreis  $S^1$  zusammenhängen. Insbesondere betrachten wir auch schwache Ableitungen und ihre Fourierkoeffizienten. Das folgende Resultat wurde von Parseval behauptet und erst wesentlich später von Fischer und Riesz bewiesen.

12.27. FOLGERUNG (Fischer-Riesz, Parseval). *Die Fouriertransformation*

$$\mathcal{F}: L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{C}) \quad \text{mit} \quad \mathcal{F}(f) = \hat{f}$$

*ist eine Isometrie von Hilberträumen.*

Tatsächlich kann man zeigen, dass je zwei Hilberträume mit einer abzählbar unendlichen Hilbertbasis isometrisch sind. Für  $L^p$ -Räume mit  $p \neq 2$  gilt das nicht mehr.

## 12.d. Fréchet-Räume und der Schwartz-Raum

Wir kennen schon einige Banachräume, haben aber noch keine geeignete Norm auf Räumen wie  $C^k(\Omega)$  oder  $C^\infty(\Omega)$  gefunden. Das liegt daran, dass eine einzelne Norm nicht ausreicht, um diese Räume gut zu beschreiben. In diesem Abschnitt betrachten wir sogenannte Fréchet-Räume, das sind Räume, die bezüglich einer abzählbaren Folge von (Halb-) Normen vollständig sind.

Anschließend betrachten wir Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$ , die beliebig oft differenzierbar sind, und die genau wie ihre Ableitungen und höheren Ableitungen für große  $x \in \mathbb{R}^n$  schnell abfallen, nämlich schneller als  $(1 + \|x\|)^{-k}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Im nächsten Abschnitt wird uns dieser Raum dabei helfen, die Fouriertransformation besser zu verstehen.

12.28. LEMMA. *Es sei  $(d_k)_k$  eine Folge von Metriken auf einer Menge  $M$ . Dann definiert*

$$d(p, q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-k} d_k(p, q)}{1 + d_k(p, q)}$$

eine Metrik auf  $M$  mit folgenden Eigenschaften.

- (1) Für alle  $k$  ist  $\text{id}: (M, d) \rightarrow (M, d_k)$  stetig.
- (2) Sei  $X$  ein beliebiger topologischer Raum, dann ist  $f: X \rightarrow (M, d)$  genau dann stetig, wenn  $f: X \rightarrow (M, d_k)$  für alle  $k$  stetig ist.
- (3) Eine Folge  $(p_i)_i$  in  $M$  konvergiert genau dann bezüglich jeder der Metriken  $d_k$ , wenn sie bezüglich  $d$  konvergiert.
- (4) Eine Folge  $(p_i)_i$  in  $(M, d)$  ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn sie bezüglich jeder Metrik  $d_k$  eine Cauchy-Folge ist.

Den Beweis von (4) ist eine Übung.

12.29. BEMERKUNG. Wir dürfen im obigen Lemma auch  $[0, \infty]$ -wertige Metriken  $d_k$  zulassen, und wir dürfen für jedes einzelne  $d_k$  Positivität abschwächen zu  $d_k \geq 0$  und  $d_k(p, p) = 0$  für alle  $p \in M$ . Dann erhalten wir mit obigem Beweis eine *Halbmetrik*  $d$ , das heißt, es gelten noch die Axiome (2) und (3) aus Definition 6.1, sowie  $d(p, p) = 0$  für alle  $p \in M$ . Auf Vektorräumen kann man analog  $[0, \infty]$ -wertige *Halbnormen*  $\|\cdot\|_k$  betrachten, das heißt, man verzichtet in Definition 6.37 auf die Positivität (1). Dennoch kann man unter Umständen auf Positivität schließen: entweder ist eine der beteiligten Halbmetriken  $d_k$  positiv, oder man ist in einer Situation wie im Beispiel 12.32 (2) unten.

Man beachte, dass die Wahl der Metrik  $d$  willkürlich ist. Hier geht es vor allem darum, zu zeigen, dass die in (1)–(3) beschriebene Topologie auf  $M$  von einer Metrik herkommt. Und anhand der Punkte (1)–(3) sieht man, dass es für die Topologie gar nicht auf die Reihenfolge der  $d_k$  ankommt. Entscheidend ist, dass wir höchstens abzählbar viele Metriken vorgeben. Auch die Vollständigkeit von  $(M, d)$  in der folgenden Definition hängt in Wirklichkeit nicht von der genauen Konstruktion von  $d$  ab.

12.30. DEFINITION. Es sei  $M$  eine Menge mit einer Folge  $(d_k)_k$  von Halbmetriken, so dass  $d$  in Lemma 12.28 eine Metrik definiert. Dann heißt die von  $d$  induzierte Topologie auf  $M$  die von den Halbmetriken  $d_k$  induzierte *Fréchet-Topologie*.

Falls  $M = V$  ein Vektorraum ist und  $d$  von einer Folge von Halbnormen  $\|\cdot\|_k$  induziert wird, heißt  $(V, d)$  der *Fréchet-Raum* zu den Halbnormen  $\|\cdot\|_k$ , falls er vollständig ist.

Wenn alle  $d_k$  übereinstimmen, ist die Fréchet-Topologie zur ursprünglichen Topologie äquivalent. Insofern ist jede metrische Topologie eine Fréchet-Topologie, und jeder Banachraum ist ein Fréchet-Raum.

12.31. BEMERKUNG. Es sei  $d_k$  eine Folge von (Halb-) Metriken auf  $M$ . Wir nehmen an, es gäbe eine Folge vollständiger metrischer Räume  $(M_k, d_{M_k})$  und Abbildungen  $F_k: M \rightarrow M_k$  so dass

$$(*) \quad \max_{\ell \leq k} d_\ell(p, q) = d_{M_k}(F_k(p), F_k(q)) .$$

Anstelle des Maximums könnte links zum Beispiel auch nur  $d_k$  stehen, oder die Summe über die  $d_\ell$  mit  $\ell \leq k$ , je nach Problem. Im Beweis von Proposition 12.35 (1) reichen uns sogar Konstanten  $0 < c_k \leq C_k < \infty$ , so dass

$$c_k d_{M_k}(F_k(p), F_k(q)) \leq \max_{\ell \leq k} d_\ell(p, q) \leq C_k d_{M_k}(F_k(p), F_k(q)) .$$

Sei jetzt  $(p_i)_i$  eine Cauchy-Folge in  $(M, d)$ . Nach Lemma 12.28 (4) erfüllt  $(p_i)_i$  die Cauchy-Folgen-Bedingung bezüglich der Halbmetriken  $d_k$  für jedes  $k$ . Also ist  $(F_k(p_i))_i$  eine Cauchy-Folge in  $M_k$  wegen (\*). Es sei  $q_k$  ihr Grenzwert. Wenn es ein Element  $q \in M$  mit  $F_k(q) = q_k$  gibt, dann ist  $q$  der Grenzwert der Folge  $(p_i)_i$  (Übung). Um Vollständigkeit von  $(M, d)$  zu zeigen, müssen wir also

- (1) geeignete vollständige Räume  $(M_k, d_{M_k})$  und Abbildungen  $F_k: M \rightarrow M_k$  finden, die (\*) erfüllen,
- (2) zu jeder Cauchy-Folge in  $M$  die Grenzwerte  $q_k$  der Bildfolgen in  $M_k$  bestimmen, und
- (3) zeigen, dass  $q \in M$  mit  $F_k(q) = q_k$  existiert.

12.32. BEISPIEL. Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Mit dem obigen Verfahren konstruieren wir einige Fréchet-Räume von Funktionen auf  $\Omega$ , die Details sind Übung.

- (1) Es sei  $BC^\infty(\Omega)$  der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf  $\Omega$ , für die  $f$  und alle höheren Ableitungen beschränkt sind. Der Raum  $BC^\infty(\Omega)$  trägt eine Fréchet-Metrik, die von den Halbnormen

$$\|f\|_k = \sup\{ |\partial_\alpha f(x)| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ Multiindex mit } |\alpha| = k \text{ und } x \in \Omega \}$$

induziert wird. Für  $k = 0$  erhalten wir die übliche Supremumsnorm. Wenn eine Folge  $(f_i)_i$  bezüglich  $d$  konvergiert, konvergiert sie in allen  $C^k$ -Normen, das heißt, die Funktionen  $(f_i)_i$  und alle ihre höheren Ableitungen konvergieren gleichmäßig.

- (2) Wir wählen eine kompakte Ausschöpfung  $K_k$  von  $\Omega$ . Dann erhalten wir eine Folge von Halbnormen auf  $C^0(\Omega)$  mit

$$\|f\|_k = \|f|_{K_k}\|_{\text{sup}} \quad \text{für } f \in C^0(\Omega) .$$

Wenn eine Folge  $(f_i)_i$  bezüglich  $d$  konvergiert, konvergiert sie gleichmäßig auf allen Kompakta in  $\Omega$ . Manchmal spricht man daher auch von „kompakter Konvergenz“. Anstelle der  $C^0$ -Norm können wir auch  $C^\ell$ -Normen betrachten, und erhalten gleichmäßige  $C^\ell$ -Konvergenz auf allen Kompakta.

- (3) Wir kombinieren (1) und (2). Dann erhalten wir eine Folge von Halbnormen auf  $C^\infty(\Omega)$  mit

$$\|f\|_k = \sup\{ |\partial_\alpha f(x)| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ Multiindex mit } |\alpha| = k \text{ und } x \in K_k \} .$$

Wenn eine Folge  $(f_i)_i$  bezüglich  $d$  konvergiert, konvergiert sie im Sinne von (1) mit all ihren Ableitungen gleichmäßig auf allen Kompakta in  $\Omega$ .

- (4) Völlig analog zu (2) finden wir ausgehend von den  $L^1$ -Normen auf  $L^1(K_k)$  auch eine Fréchet-Metrik auf dem Raum  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  aus Bemerkung 12.17. Wenn wir stattdessen mit  $L^p$ -Normen starten, erhalten wir den Raum  $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ .

Auch wenn wir das hier nicht zeigen können: in der Regel existiert keine Norm auf dem jeweiligen Raum, die die angegebene Fréchet-Topologie induziert.

Wir kommen zu einem sehr speziellen Fréchet-Raum von Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$ . Dazu betrachten wir für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Normen

$$\|f\|_k = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha| \leq k} (1 + \|x\|^2)^k |\partial_\alpha f(x)| \quad \text{für } f \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Für  $k = 0$  erhalten wir die Supremumsnorm.

12.33. DEFINITION. Es sei  $n \geq 1$ . Man definiert den *Schwartz-Raum*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{k}) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{k}) \mid \|f\|_k < \infty \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \},$$

versehen mit der von den  $\|\cdot\|_k$  induzierten Fréchet-Topologie.

12.34. BEMERKUNG. Man sagt, dass Elemente  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{k})$  und ihre Ableitungen  $\partial_\alpha f$  schneller abfallen als jede rationale Funktion. Somit sind Schwartz-Funktionen einerseits allgemeiner als glatte Testfunktionen, also Elemente von  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , andererseits deutlich spezieller als beispielsweise Sobolev-Funktionen. Sei  $B \in M_n(\mathbb{R})$  eine positiv definite, selbstadjungierte Matrix,  $\beta \in \mathbb{N}^n$  und  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , dann ist beispielsweise

$$x \mapsto x^\beta e^{-\langle x-x_0, B(x-x_0) \rangle}$$

ein typisches Element von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ .

12.35. PROPOSITION. Sei  $n \geq 1$  und  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , und  $d$  bezeichne die Fréchet-Metrik auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{k})$  aus Definition 12.33.

- (1) Der Schwartz-Raum  $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{k}), d)$  ist vollständig.
- (2) Der Raum der glatten Testfunktionen  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{k})$  liegt dicht in  $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{k}), d)$ .
- (3) Der Schwartz-Raum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{k})$  liegt dicht in  $(L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{k}), \|\cdot\|_{L^p})$  für alle  $p \in [1, \infty)$ .
- (4) Der Schwartz-Raum liegt dicht in  $(C_0^0(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ .

12.36. BEMERKUNG. Das Produkt einer Schwartz-Funktion mit einem Polynom in den  $x_i$  ist wieder eine Schwartz-Funktion. Alle höheren Ableitungen von Schwartz-Funktionen sind ebenfalls wieder Schwartz-Funktionen. Das Produkt zweier Schwartz-Funktionen ist wieder eine Schwartz-Funktion. In den Übungen haben wir die Faltung zweier Funktionen kennengelernt. Die Faltung zweier Schwartz-Funktionen liefert ebenfalls wieder eine Schwartz-Funktion. Wir können also etliche Rechenoperationen ausführen, ohne den Schwartz-Raum zu verlassen. Das werden wir im nächsten Abschnitt ausnutzen.

## 12.e. Die Fouriertransformation

Wenn wir das Intervall  $I = (-\pi, \pi)$  bei der Konstruktion der Fourierreihe immer weiter vergrößern, liefert eine einfache Skalierung, dass die „Frequenzen“  $\xi$  der zugehörigen Funktionen  $x \mapsto e^{i\xi x}$  auf der reellen Achse immer weiter zusammenrücken. Jetzt könnte man vermuten, dass man im „Grenzfall“  $I = \mathbb{R}$  die gesamte reelle Achse als möglichen Frequenzraum bekommt. Diese Vermutung wird sich als richtig herausstellen, das heißt, wir konstruieren in diesem Abschnitt einen Isomorphismus von Hilberträumen  $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ , so dass der Funktion  $e^{i\xi \cdot}$  gerade der Punkt  $\xi \in \mathbb{R}$  entspricht.

Man beachte dabei, dass  $e^{i\xi \cdot}$  keine  $L^2$ -Funktion ist. Wir können eine Reihe wie oben (12.1) also gar nicht sinnvoll hinschreiben, sondern erwarten stattdessen eine Integraldarstellung. Anstelle der diskreten Fourierkoeffizienten in (12.2) tritt die Fourier-Transformierte

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx .$$

Die obige Formel konvergiert für  $f \in L^1(\mathbb{R})$  und liefert sogar eine stetige (aber in der Regel nicht mehr integrierbare) Funktion  $\hat{f}$ . Da diese Darstellung für  $f \in L^2(\mathbb{R})$  nicht unmittelbar sinnvoll ist, schränken wir uns zunächst auf Schwartz-Funktionen ein. Gleichzeitig betrachten wir das Problem direkt auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Wir schreiben kurz  $d^n x$  für das Lebesgue-Volumenelement  $d\lambda^n(x)$ .

12.37. PROPOSITION. *Die Fouriertransformation*

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \xi, x \rangle} f(x) d^n x$$

definiert eine stetige lineare Abbildung  $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Für  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  gelten folgende Rechenregeln.

- (1)  $\xi^\alpha \hat{f}(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \widehat{\partial_\alpha f}(\xi)$ ,
- (2)  $\partial_\alpha \hat{f}(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f}(\xi)$ ,
- (3)  $\widehat{\hat{f}g}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \widehat{f * g}(\xi)$ .

Diese Eigenschaften erlauben uns später, einfache partielle Differentialgleichungen mit Hilfe der Fouriertransformation zumindest formal zu lösen. Auch für die Physik ist die obige Beobachtung interessant. Die Punkte (1) und (2) besagen beispielsweise, dass die Fouriertransformation den quantenmechanischen Ortsoperator  $x_j \cdot$  in den Impulsoperator  $i\partial_j$  überführt und umgekehrt.

12.38. BEISPIEL. Wir betrachten die Funktion  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  mit

$$g(x) = e^{-\frac{\|x\|^2}{2}},$$

siehe Bemerkung 12.34, insbesondere gilt  $\hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Aus  $(x_j + \partial_j)g = 0$  folgt mit den obigen Rechenregeln sofort  $(\partial_j + \xi_j)\hat{g} = 0$ , oder äquivalent

$$\partial_j \left( e^{\frac{\|\xi\|^2}{2}} \hat{g}(\xi) \right) = 0.$$

Wie in Beispiel 11.50 berechnet man  $\hat{g}(0) = 1$ , und somit gilt

$$\hat{g}(\xi) = e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}}.$$

12.39. BEMERKUNG. Wir reskalieren die Funktion  $g$  zu  $g_\rho(x) = g(\rho x)$  mit  $\rho > 0$  und erhalten völlig analog  $\widehat{g_\rho}(\xi) = \rho^{-n} g_{1/\rho}$ . Schließlich erinnern wir uns an die Faltung aus den Übungen. Für Schwartz-Funktionen  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  folgt

$$\lim_{\rho \searrow 0} (2\pi\rho^2)^{-\frac{n}{2}} g_{\frac{1}{\rho}} * f = f.$$

Wir wissen bereits, dass  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{k})$  in  $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{k})$  dicht liegt. Die folgenden Rechnungen helfen, die Fouriertransformation auf  $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{k})$  fortzusetzen und ihre Umkehrabbildung zu finden.

12.40. LEMMA. *Für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{k})$  sei  $\mathcal{F}^* f = \check{f}$  definiert durch  $\check{f}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$ . Dann gilt*

- (1)  $\langle f, \hat{g} \rangle_{L^2} = \langle \check{f}, g \rangle_{L^2}$ ,
- (2)  $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2} = \langle f, g \rangle_{L^2}$ .

12.41. SATZ UND DEFINITION (Fouriertransformation). *Die Fouriertransformation auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  lässt sich eindeutig zu einer stetigen Abbildung  $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  fortsetzen, so dass für*

alle  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  gilt

- (1)  $\langle f, \mathcal{F}g \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{F}^* f, g \rangle_{L^2}$ , wobei  $\mathcal{F}^* f(\xi) = \mathcal{F}f(-\xi)$ ,
- (2)  $\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle_{L^2} = \langle f, g \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{F}^* f, \mathcal{F}^* g \rangle_{L^2}$ ,
- (3)  $\mathcal{F}^* \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^* = \text{id}_{L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})}$ .

Eigenschaft (2) heißt auch die „Plancherel-Identität“, vor allem im Fall  $g = f$ .

12.42. BEMERKUNG. Die Rechenregeln in Proposition 12.37 (1) und (2) übertragen sich in dem Sinne, dass beispielsweise die höhere schwache Ableitung  $\partial_\alpha \hat{f}$  in  $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  genau dann existiert, wenn die Funktion  $x^\alpha f$  in  $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  liegt, und die obige Formel in dem Fall gilt. Das gibt uns eine alternative Definition der Sobolev-Räume  $H^k(\mathbb{R}^n) = W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$ , vergleiche Bemerkung 12.22. Wir definieren

$$H^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{k}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{k}) \mid (1 + \|\cdot\|^2)^{\frac{k}{2}} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \right\}$$

mit der Norm

$$\|f\|_{H^k} = \|(1 + \|\cdot\|^2)^{\frac{k}{2}} \hat{f}\|_{L^2}.$$

Diese Norm ist äquivalent zur  $W^{k,2}$ -Norm aus Bemerkung 12.22, und man kann zeigen, dass  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{k})$  bezüglich dieser Norm dicht liegt in  $H^k(\mathbb{R}^n) = W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$ . Darüberhinaus müssen wir nicht mehr verlangen, dass  $k \in \mathbb{N}$ , sondern können Sobolev Räume für beliebige  $k \in \mathbb{R}$  betrachten. Für  $k < 0$  sind das allerdings keine Unterräume von  $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{k})$  mehr. Stattdessen würden wir für  $k < 0$  den Raum  $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{k})$  (oder auch gleich  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{k})$ ) bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{H^k}$  vervollständigen. Auch diese Räume werden manchmal in der Analysis verwendet.

Aus den Folgerungen 11.28 und 11.30 aus dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz erhalten wir einen wichtigen Spezialfall des Sobolevschen Einbettungssatzes.

12.43. SATZ (Sobolev). *Es seien  $\ell, n \in \mathbb{N}$  und  $k \in \mathbb{R}$  mit  $\ell < k - \frac{n}{2}$ . Dann wird jede Sobolev-Funktion  $f \in H^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{k})$  durch eine  $C^\ell$ -Funktion dargestellt, die wir wieder mit  $f$  bezeichnen, und es existiert eine Konstante  $C$ , die nur von  $k, \ell$  und  $n$  abhängt, so dass*

$$\|f\|_{C^\ell} \leq C \|f\|_{H^k}.$$

Dieser Satz gilt auch auf offenen Teilmengen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , und für beliebige  $p$  existiert eine Abbildung  $W^{k,p}(\Omega) \rightarrow C^\ell(\Omega)$  wie oben, falls  $\ell < k - \frac{n}{p}$ . Man nennt  $k - \frac{n}{p}$  in diesem Zusammenhang auch die „Sobolev-Zahl“. All das wollen wir hier nicht beweisen. Wir merken uns aber, dass wir eine etwas höhere schwache Ableitbarkeit voraussetzen müssen, um daraus Stetigkeit oder klassische Differenzierbarkeit schließen zu können.

## Integralsätze

In diesem Kapitel betrachten wir zwei Integralsätze: den Divergenzatz von Gauß und den Rotationsatz von Stokes. Dabei beschränken wir uns auf Gebiete im  $\mathbb{R}^n$  beziehungsweise Flächen im  $\mathbb{R}^3$ . Der Satz von Gauß spielt zum einen eine Rolle in der Analysis, zum Beispiel im Beweis der Greenschen Formeln für den Laplace-Operator. Zum anderen haben beide Sätze auch eine differentialtopologische Interpretation, die wir kurz anreißen. In der modernen Formulierung würde man dafür stattdessen Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten einführen und einen allgemeinen Satz von Stokes beweisen. Darauf verzichten wir aus Zeitgründen. Zu guter Letzt werden beide Sätze auch in der Physik benutzt, unter anderem in der Elektrodynamik.

Wenn man Wasser in einem Topf erhitzt, dehnt es sich aus. Wenn der Topf vorher voll war, läuft es über. Der Satz von Gauß liefert eine mathematische Beschreibung dieses Phänomens. Dabei ist das Wasser ständig in Bewegung, was wir durch den Fluss eines Vektorfeldes  $X$  beschreiben können, siehe Abschnitt 9.c. Wenn das Wasser ständig in Bewegung ist, muss man erst einmal bestimmen, um wieviel das Volumen an einer Stelle zunimmt. Wir messen das mit der Divergenz  $\operatorname{div} X$  des Vektorfeldes  $X$ . Außerdem muss man feststellen, wieviel Wasser an einer gegebenen Stelle das Gebiet verlässt. Dazu führen wir ein normales Oberflächenintegral analog zum Kurvenintegral zweiter Art aus Abschnitt 8.c ein. Der Satz von Gauß besagt, dass die totale Volumenänderung, also das Integral der Divergenz  $\operatorname{div} X$  über das gesamte Gebiet, mit der insgesamt austretenden Wassermenge, also dem normalen Oberflächenintegral von  $X$  über den Rand, übereinstimmt.

### 13.a. Volumenänderung und Divergenz

In diesem Abschnitt führen wir die Divergenz eines Vektorfeldes als Volumenänderung des zugehörigen Flusses ein. Wir betrachten das Problem zunächst für offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ , später dann auch auf Untermannigfaltigkeiten.

Es sei also  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $X \in C^k(U; \mathbb{R}^n)$  ein (zeitunabhängiges) Vektorfeld auf  $U$  mit  $k \geq 2$ . Es sei  $E \subset U$  offen und  $\varepsilon > 0$  klein genug, so dass der Fluss von  $X$  auf  $E \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  definiert ist, siehe Satz 9.15 von Picard-Lindelöf. Insbesondere existiert  $F: E \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ , so dass

$$F|_{E \times \{0\}} = \operatorname{id}_E \quad \text{und} \quad F'(p, t) = \frac{dF}{dt}(p, t) = X(F(p, t)) \quad \text{für alle } p \in E \text{ und alle } t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Nach der differenzierbaren Fassung 9.25 des Satzes von Picard-Lindelöf ist  $F$  dann ebenfalls  $C^k$ .

Um zu verstehen, wie  $F_t = F(\cdot, t)$  das Volumen einer Teilmenge  $E \subset U$  verändert, kombinieren wir die Integraltransformationsformel 11.46 mit Folgerung 11.30 und erhalten

$$\frac{d}{dt} \operatorname{vol}(F_t(E)) = \frac{d}{dt} \int_E \det(dF_t) d\lambda^n = \int_E \frac{d}{dt} \det(dF_t) d\lambda^n.$$

Dabei dürfen wir die Betragsstriche um die Determinante weglassen, da  $dF_0 = \operatorname{id}$  positive Determinante hat und das Vorzeichen sich nicht ändern kann.

Wir erinnern uns an die *Spur* einer quadratischen Matrix  $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{k})$ . Sie ist definiert als

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{j=1}^n a_{jj} \in \mathbb{k}.$$

13.1. LEMMA (Ableitung der Determinante). *Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , und  $A: I \rightarrow GL_n(\mathbb{k})$  sei differenzierbar. Dann gilt*

$$\frac{d}{dt} \det(A(t)) = \operatorname{tr} \left( \frac{dA}{dt} \cdot A(t)^{-1} \right) \det(A(t)).$$

Für den Fluss  $F_t$  gilt  $\frac{dF_t}{dt} = X \circ F_t$ , somit erhalten wir für die Änderung des Volumenelements die Formel

$$\frac{d}{dt} \det(dF_t) = \operatorname{tr}(dX \circ F_t) \det(dF_t),$$

und insgesamt

$$\frac{d}{dt} \operatorname{vol}(F_t(E)) = \int_E \operatorname{tr}(dX \circ F_t) \det(dF_t) d\lambda^n = \int_{F_t(E)} \operatorname{tr}(dX) d\lambda^n.$$

Den Integranden nennt man auch die *Divergenz von  $X$*  und schreibt  $\operatorname{div} X = \operatorname{tr}(dX)$ .

13.2. BEMERKUNG. Wir können jetzt bereits zur Motivation eine elementare Version des Satzes von Gauß herleiten. Dazu betrachten wir als Gebiet den linken Halbraum  $\mathbb{R}_-^n = (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Damit kein Wasser „im Unendlichen verschwindet“, nehmen wir an, dass unser Vektorfeld

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

kompakten Träger hat. Dann hat auch die Divergenz

$$\operatorname{div} X = \sum_{j=1}^n \partial_j X_j$$

kompakten Träger und ist insbesondere integrierbar. Aus dem Hauptsatz 5.19 der Differential- und Integralrechnung und dem Satz 11.40 von Fubini folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_-^n} \operatorname{div} X d\lambda^n &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 (\partial_1 X_1 + \cdots + \partial_n X_n)(x) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} X_1(x_1, \dots, x_n) \Big|_{x_1=-\infty}^0 dx_2 \cdots dx_n \\ &\quad + \cdots + \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} X_n(x_1, \dots, x_n) \Big|_{x_n=-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots dx_{n-1} \\ &= \int_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}} X_1 d\lambda^{n-1}. \end{aligned}$$

Wir dürfen  $X_1$  als den Anteil von  $X$  auffassen, der senkrecht zum Rand  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  von  $\mathbb{R}_-^n$  steht.

Die obige Rechnung macht den bereits den Hauptteil des Beweises des Divergenzsatzes von Gauß aus. Um diese Rechnung benutzen zu können, müssen wir allerdings Diffeomorphismen  $\psi: V \rightarrow U \subset E$  mit  $U \subset E$  und  $V \subset \mathbb{R}_-^n$  offen finden, die den Rand  $V \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  auf  $U \cap \partial E$  abbilden. Das heißt, wir müssen verstehen, wie sich  $X$  und  $\operatorname{div} X$  unter Diffeomorphismen verhalten.

13.3. PROPOSITION. Seien  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $k \geq 1$ , und  $\psi: V \rightarrow U$  ein  $C^k$ -Diffeomorphismus.

- (1) Dann existiert zu jedem  $C^{k-1}$ -Vektorfeld  $X$  auf  $U$  ein eindeutiges  $C^{k-1}$ -Vektorfeld  $Y$  auf  $V$ , so dass

$$X \circ \psi = d\psi \cdot Y = \partial_Y \psi = \sum_{j=1}^n \partial_j \psi \cdot Y_j: V \rightarrow \mathbb{R}^n .$$

- (2) Für  $k \geq 2$  gilt

$$(\operatorname{div} X) \circ \psi \cdot |\det d\psi| = \operatorname{div}(|\det d\psi| Y) .$$

- (3) Falls eine  $C^1$ -Funktion  $g$  existiert, so dass  $\psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + g(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$  für alle  $x \in V$  und  $X$  von Klasse  $C^1$  ist, ist die Divergenz von  $Y$  definiert, und es gilt

$$(\operatorname{div} X) \circ \psi = \operatorname{div} Y .$$

Die Bedingung in (1) impliziert für die Flüsse  $F_t$  von  $X$  und  $G_t$  von  $Y$ , dass

$$F_t \circ \psi = \psi \circ G_t$$

auf dem Definitionsbereich von  $G_t$  gilt. Wir dürfen  $\psi$  also als Diffeomorphismus von „Mengen mit Fluss“ auffassen. Man sagt dann auch, die Vektorfelder  $X$  und  $Y$  seien  $\psi$ -verwandt. Falls  $X$  und  $Y$  ebenfalls  $C^2$  sind, erhalten wir einen alternativen Beweis von (2).

Die Formel für die Divergenz in (3) an sich ist nicht überraschend, denn man rechnet leicht nach, dass  $d\psi$  in diesem Fall eine obere Dreiecksmatrix mit Determinante 1 ist, so dass sich die Formel aus (2) vereinfacht. Überraschend ist aber, dass  $g$  und damit auch  $\psi$  nur noch von Klasse  $C^1$  sein müssen. Da wir nur diesen Fall brauchen, verzichten wir auf den Beweis der allgemeineren Formel in (2).

### 13.b. Das normale Oberflächenintegral

Um den Randbeitrag im Satz von Gauß zu verstehen, brauchen wir zunächst einen handhabbaren Begriff für Mengen mit glattem Rand. Dabei wollen wir unter „Rand“ — im Gegensatz zu Bemerkung 6.19 (3) — hier nur solche Randpunkte betrachten, die zu  $E$  gehören. Das Innere  $\overset{\circ}{E}$  sei definiert wie in Bemerkung 6.19 (1). Für den Rand benutzen wir wieder die Bezeichnung  $\partial$  in der Hoffnung, dass das nicht zu Verwirrungen führt.

13.4. DEFINITION. Es sei  $E \subset \mathbb{R}^n$  eine beliebige Teilmenge. Wir definieren den (*geometrischen*) Rand von  $E$  durch

$$\partial E = E \setminus \overset{\circ}{E} .$$

Wir sagen,  $E$  habe  $C^k$ -Rand mit  $k \geq 1$ , wenn es zu jedem Punkt  $p \in \partial E$  eine Umgebung  $U$  von  $p$  und eine  $C^k$ -Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  mit regulärem Wert 0 gibt, so dass

$$U \cap E = f^{-1}((-\infty, 0]) .$$

Insbesondere ist der Rand selbst dann nach dem Satz vom regulären Wert (Folgerung 7.44) eine  $(n-1)$ -dimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit.

Wenn wir im Folgenden einen Index  $j \in \{1, \dots, n\}$  fixieren, bezeichnen wir die Projektion von  $x$  auf die Hyperebene  $\{x_j = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$  mit  $x' = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

13.5. FOLGERUNG (aus dem Satz 7.40 über implizite Funktionen). Es sei  $E \subset \mathbb{R}^n$  und  $k \geq 1$ , dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (1) Die Teilmenge  $E \subset \mathbb{R}^n$  hat  $C^k$ -Rand.

- (2) Zu jedem Punkt  $p \in \partial E$  existiert ein Index  $j \in \{1, \dots, n\}$ , eine Umgebung  $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$  von  $p'$ , ein  $\varepsilon > 0$  und eine  $C^k$ -Funktion  $g: V \rightarrow (p_j - \varepsilon, p_j + \varepsilon)$ , so dass für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x' \in V$  und  $x_j \in (p_j - \varepsilon, p_j + \varepsilon)$  gilt

$$x \in E \iff x_j \leq g(x').$$

- (3) Zu jedem Punkt  $p \in \partial E$  existieren Umgebungen  $U$  von  $p$  und  $W$  von  $0$  im  $\mathbb{R}^n$  und ein  $C^k$ -Diffeomorphismus  $\psi: W \rightarrow U$ , so dass für alle  $x \in W$  gilt

$$\psi(x) \in E \iff x_1 \leq 0 \quad \text{und} \quad \psi(x) \in \partial E \iff x_1 = 0.$$

Mit anderen Worten sieht  $E$  wegen (2) nach einer geeigneten Umnummerierung der Koordinaten lokal so aus wie die Menge unterhalb des Graphen einer  $C^1$ -Funktion  $g$ . Ohne Einschränkung sei  $j = 1$ , dann können wir den Diffeomorphismus  $\psi$  in (3) so wählen, dass

$$\psi(x_1, x') = (x_1 + g(x'), x').$$

**13.6. PROPOSITION UND DEFINITION.** *Es sei  $E \subset \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge mit  $C^k$ -Rand, wobei  $k \geq 1$ , und  $p \in \partial E$ . Ein Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  heißt tangential zu  $\partial E$  am Punkt  $p$ , wenn er entsprechend der Punkte in Folgerung 13.5 eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt.*

- (1) Für eine Funktion  $f$  wie in Definition 13.4 gilt  $d_p f \cdot v = 0$ .
- (2) Für eine Funktion  $g$  wie in 13.5 (2) gilt  $v_j = d_p g \cdot v'$ .
- (3) Mit  $\psi: W \rightarrow U$  wie in 13.5 (3) existiert  $w \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ , so dass  $v = d_{\psi^{-1}(p)} \psi \cdot w$ .

Die Menge aller Tangentialvektoren am Punkt  $p$  bezeichnen wir mit  $T_p \partial E$ .

**13.7. PROPOSITION UND DEFINITION.** *Es sei  $E \subset \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge mit  $C^k$ -Rand, wobei  $k \geq 1$ , und  $p \in \partial E$ . Ein Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  heißt normal zu  $\partial E$  am Punkt  $p$ , wenn er bezüglich des Standardskalarprodukts senkrecht zu  $T_p \partial E$  ist. Wir nennen ihn auswärtig, wenn er entsprechend der Punkte in Folgerung 13.5 eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt.*

- (1) Für eine Funktion  $f$  wie in Definition 13.4 gilt  $d_p f \cdot v > 0$ .
- (2) Für eine Funktion  $g$  wie in 13.5 (2) gilt  $v_j > d_p g \cdot v'$ .
- (3) Mit  $\psi: W \rightarrow U$  wie in 13.5 (3) existiert  $w \in \mathbb{R}^n$  mit  $w_1 > 0$ , so dass  $v = d_{\psi^{-1}(p)} \psi \cdot w$ .

Dann existiert genau ein auswärtiger normaler Einheitsvektor  $\nu(p)$  an jedem Punkt  $p \in \partial E$ , und die Abbildung  $\nu: \partial E \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist stetig.

Tatsächlich ist  $\nu$  sogar eine  $C^{k-1}$ -Abbildung; dazu müssten wir aber erst einmal den Begriff einer  $C^{k-1}$ -Abbildung längs  $\partial E$  definieren.

Unter dem *Normalenanteil* eines Vektorfeldes  $X$  entlang  $\partial E$  verstehen wir das Skalarprodukt  $\langle \nu, X \rangle: \partial E \rightarrow \mathbb{R}$ . Im Folgenden bezeichne  $\text{vol}_{\partial E}$  das Maß auf der Untermannigfaltigkeit  $\partial E$  aus Satz 11.54.

**13.8. PROPOSITION.** *Es seien  $U$  und  $V \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\psi: V \rightarrow U$  ein  $C^k$ -Diffeomorphismus, so dass  $U \cap E = \text{im } \psi|_{V \cap \mathbb{R}^n}$ . Es seien  $X, Y$  Vektorfelder auf  $U$  beziehungsweise  $V$ , so dass  $X \circ \psi = d\psi \cdot Y$ , und es sei  $\nu: \partial E \rightarrow \mathbb{R}^n$  das auswärtige Einheitsnormalenfeld. Dann gilt*

$$(1) \quad \int_{\partial E \cap U} \langle X, \nu \rangle d\text{vol}_{\partial E} = \int_{V \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}} |\det d\psi| Y_1 d\lambda^{n-1}.$$

Falls eine  $C^1$ -Funktion  $g$  existiert, so dass  $\psi(x_1, x') = (x_1 + g(x'), x')$  für alle  $x = (x_1, x') \in V$ , gilt

$$(2) \quad \int_{\partial E \cap U} \langle X, \nu \rangle d\text{vol}_{\partial E} = \int_{V \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}} Y_1 d\lambda^{n-1}.$$

Ähnlich wie in Proposition 13.3 interessieren wir uns nur für die einfachere Gleichung (2) und lassen den Beweis von (1) daher weg.

### 13.c. Der Divergenzsatz von Gauß

Wir können jetzt den Satz von Gauß beweisen. Dazu überdecken wir eine Teilmenge  $E \subset \mathbb{R}^n$  mit  $C^k$ -Rand durch Bilder von Parametrisierungen  $\psi: V \rightarrow U$  wie in Folgerung 13.5. Anschließend schreiben wir das Vektorfeld  $X$  als eine Summe von Vektorfeldern, deren Träger jeweils in einer der betrachteten Mengen  $U$  liegen. Da wir zur Bildung der Divergenz ableiten müssen, können wir nicht einfach mit charakteristischen Funktionen passender Teilmengen multiplizieren wie in Abschnitt 11.f. Stattdessen konstruieren wir eine sogenannte *Partition der Eins*.

Wir erinnern uns an den Begriff einer offenen Überdeckung aus Definition 10.17, den wir hier leicht abwandeln. Außerdem erinnern wir uns an die Begriffe „lokal kompakt“ und „ $\sigma$ -kompakt“ aus Definition 10.34. Im Beweis des Satzes 13.10 von Gauß zeigen wir insbesondere auch, dass Gebiete mit  $C^k$ -Rand diese beiden Eigenschaften haben.

13.9. SATZ (Partition der Eins). *Es sei  $E \subset \mathbb{R}^n$  lokal kompakt und  $\sigma$ -kompakt, und  $\mathcal{U}$  eine Menge offener Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ , so dass  $E \subset \bigcup \mathcal{U}$ . Dann existiert eine Familie  $(\rho_i)_{i \in I}$  von  $C^\infty$ -Funktionen  $\rho_i: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ , so dass*

- (1) *zu jedem  $i \in I$  ein  $U \in \mathcal{U}$  mit  $\text{supp } \rho_i \subset U$  existiert,*
- (2) *zu jedem  $x \in E$  eine Umgebung von  $x$  existiert, auf der nur endlich viele der  $\rho_i$  nicht identisch verschwinden,*
- (3) *und für alle  $x \in E$  gilt*

$$\sum_{i \in I} \rho_i = 1 .$$

Dieser Satz kommt häufig zum Einsatz, wenn wir eine globale Konstruktion nur lokal durchführen können. Eigenschaft (1) erlaubt uns zunächst, uns auf einzelne Teilmengen  $U \in \mathcal{U}$  einzuschränken, auf denen wir unser Problem vorläufig lösen können. Eigenschaft (2) sagt uns, dass wir lokal immer mit endlichen Summen arbeiten dürfen und somit keine Konvergenzbetrachtungen brauchen. Und dank Eigenschaft (3) liefert Multiplikation unserer vorläufigen Lösungen mit  $\rho_i$  und anschließende Summation eine Konvexkombination. Für unsere konkrete Anwendung können wir uns beispielsweise überlegen, dass

$$\text{div } X = \sum_{i \in I} \text{div}(\rho_i X)$$

gilt, da sich die auftretenden Ableitungen der  $\rho_i$  wegen Eigenschaft (3) wieder wegheben.

13.10. SATZ (Divergenzsatz, Gauß). *Es sei  $E \subset \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge mit  $C^k$ -Rand,  $k \geq 1$ , und es sei  $X$  ein  $C^1$ -Vektorfeld mit kompaktem Träger in  $E$ . Es bezeichne  $\nu: \partial E \rightarrow \mathbb{R}^n$  das auswärtige Einheitsnormalenfeld. Dann gilt*

$$\int_E \text{div } X \, d\lambda^n = \int_{\partial E} \langle \nu, X \rangle \, d\text{vol}_{\partial E} .$$

Wenn wir annehmen, dass  $E$  kompakt ist, können wir auf die Bedingung, dass  $X$  kompakten Träger hat, verzichten. Allerdings taucht diese Bedingung im Beweis dann doch wieder auf, analog zu Bemerkung 13.2.

13.11. BEMERKUNG. Mit ein bisschen mehr Mühe können wir auch Teilmengen betrachten, deren Rand nur stückweise  $C^1$  ist. Dazu zählen beispielsweise Quader und andere Polyeder. In diesem Fall sollten die „Ecken und Kanten“ eine  $\text{vol}_{\partial E}$ -Nullmenge bilden, die wir im Beweis dann weglassen können.

Wir können sogar noch weiter gehen. Wenn wir die Divergenz mit schwachen Ableitungen definieren, reichen uns  $W^{1,1}$ -Vektorfelder. Es gibt einen Spursatz, der es uns erlaubt, daraus ein  $L^1$ -Vektorfeld auf  $\partial E$  zu bekommen, wobei der Rand dazu auch nur Lipschitz zu sein braucht. Diese

„schwache“ Formulierung des Satzes von Gaußes lernen Sie möglicherweise in einer Vorlesung über Funktionalanalysis oder partielle Differentialgleichungen kennen.

13.12. BEMERKUNG. Wir können den Divergenzsatz ähnlich anwenden wie das Kurvenintegral zweiter Art in Bemerkung 8.28 (auf die wir in Bemerkung 13.17 nochmal zu sprechen kommen). Dazu betrachten wir ein Vektorfeld  $X$  mit Divergenz  $\operatorname{div} X = 1$  auf ganz  $\mathbb{R}^n$ , beispielsweise können wir  $X(x) = x_1 e_1$  oder  $X(x) = \frac{x}{n}$  wählen. Für jede kompakte Teilmenge  $E \subset \mathbb{R}^n$  mit ausreichend regulärem Rand (siehe oben) gilt dann

$$\operatorname{vol}(E) = \int_{\partial E} \langle X, \nu \rangle d\operatorname{vol}_{\partial E} .$$

Das heißt, wir können das Volumen von  $E$  durch eine Integration über den Rand bestimmen.

Für die nächste Folgerung benötigen wir auch den Gradienten einer  $C^k$ -Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ , das ist nicht anderes als die totale Ableitung von  $f$ , aufgefasst als Vektor, das heißt, es gilt

$$\operatorname{grad} f = df^t \quad \text{und} \quad \langle \operatorname{grad} f, X \rangle = df \cdot X = \partial_X f$$

für Vektorfelder  $X$  auf  $U$ . Außerdem erinnern wir uns an den Laplace-Operator  $\Delta: C^k(U) \rightarrow C^{k-2}(U)$  aus Beispiel 9.30. Es gilt

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f .$$

Wir erhalten die Greenschen Formeln, indem wir den Divergenzsatz auf ein Vektorfeld der Form  $X = f \operatorname{grad} g$  anwenden. Für  $\langle \operatorname{grad} g, \nu \rangle$  dürfen wir auch  $\partial_\nu g$  schreiben.

13.13. FOLGERUNG (Greensche Formeln). *Es sei  $E \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet mit  $C^k$ -Rand.*

(1) *Für Funktionen  $f \in C_c^1(E)$ ,  $g \in C_c^2(E)$  gilt*

$$\int_E (f \Delta g + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle) d\lambda^n = \int_{\partial E} f dg \cdot \nu d\operatorname{vol}_{\partial E} .$$

(2) *Für Funktionen  $f, g \in C_c^2(E)$  gilt*

$$\int_E f \Delta g - \int_{\partial E} f \partial_\nu g d\operatorname{vol}_{\partial E} = \int_E g \Delta f - \int_{\partial E} g \partial_\nu f d\operatorname{vol}_{\partial E}$$

13.14. BEMERKUNG. Die Greenschen Formeln sagen einiges über den Laplace-Operator aus, sofern wir geeignete Randbedingungen wählen, so dass die Randterme in 13.13 (1) und (2) verschwinden. Wir nehmen dazu der Einfachheit halber an, dass  $E$  kompakt ist.

(1) *Dirichlet-Randbedingung.* Wir betrachten

$$C_D^2(E) = \{ f \in C^2(E) \mid f|_{\partial E} = 0 \} .$$

Für alle  $f, g \in C_D^2(E)$  folgt

$$\langle f, -\Delta g \rangle_{L^2} = \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle_{L^2} = \langle -\Delta f, g \rangle_{L^2} .$$

Eine ähnliche Randbedingung haben wir im Eindimensionalen in Beispiel 9.28 betrachtet.

(2) *Neumann-Randbedingungen.* Wir betrachten

$$C_N^2(E) = \{ f \in C^2(E) \mid df|_{\partial E} \cdot \nu = 0 \} .$$

Für alle  $f, g \in C_N^2(E)$  folgt wieder

$$\langle f, -\Delta g \rangle_{L^2} = \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle_{L^2} = \langle -\Delta f, g \rangle_{L^2} .$$

Diese Randbedingung haben wir in Beispiel 9.29 bei  $x = \ell$  gestellt.

Man sagt, der Operator  $-\Delta$  sei formal selbstadjungiert und positiv (semi-) definit unter Dirichlet-(Neumann-) Randbedingungen.

Auch die obigen Schlussfolgerungen lassen sich auf geeignete Sobolev-Räume ausdehnen. Mehr dazu lernen Sie in einer Vorlesung über Funktionalanalysis oder partielle Differentialgleichungen.

### 13.d. Der Rotationssatz von Stokes

Es folgt ein weiterer Integralsatz, den wir der Einfachheit halber nur im  $\mathbb{R}^2$  und im  $\mathbb{R}^3$  formulieren und beweisen wollen. Unter dem „Satz von Stokes“ versteht man heutzutage in der Regel einen wesentlich allgemeineren Integralsatz für Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten mit Rand. Die beiden folgenden Sätze sind Spezialfälle davon, die sich etwas einfacher formulieren lassen, und die auch in der Physik eine Rolle spielen.

Wir betrachten die Multiplikation mit  $i \in \mathbb{C}$  als Automorphismus des  $\mathbb{R}^2$  mit der Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für ein Vektorfeld  $X \in C^k(U; \mathbb{R}^2)$  auf  $U \subset \mathbb{R}^2$  mit  $k \geq 1$  definieren wir seine *Rotation* als Funktion

$$\operatorname{rot} X = \operatorname{div}(-JX) = \partial_1 X_2 - \partial_2 X_1 \in C^{k-1}(U).$$

Sie beschreibt so etwas wie die „lokale Verwirbelung“ durch das Vektorfeld  $X$ .

Wenn ein Gebiet im  $\mathbb{R}^2$  einen  $C^1$ -Rand hat, wollen wir ihn durch reguläre Kurven beschreiben. Nach Bemerkung 8.13 sind das  $C^1$ -Kurven  $\gamma$ , deren Geschwindigkeitsvektor  $\gamma'$  nirgends verschwindet. Im Sinne von Definition 7.43 ist  $\gamma$  dann eine Parametrisierung des Randes. Wenn wir diese Kurven „richtig herum“ durchlaufen, erhalten wir als auswärtiges Einheitsnormalenvektorfeld entlang  $\gamma$  gerade

$$\nu \circ \gamma = -\frac{1}{|\gamma'|} J\gamma'.$$

**13.15. DEFINITION.** Es sei  $E \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet mit  $C^k$ -Rand,  $k \geq 1$ , und auswärtigem Normalenfeld  $\nu: \partial E \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Wir sagen, dass der Rand  $\partial E$  von  $E$  von einer Familie regulärer Kurven  $(\gamma_a: I_a \rightarrow \mathbb{R}^2)_{1 \leq a \leq N}$  mit  $N \in \mathbb{N}$  *einmal positiv umlaufen wird*, wenn

- (1) für alle  $a$  und alle  $t \in I_a$  die Basis  $(\nu(\gamma_a(t)), \gamma'_a(t))$  positiv orientiert ist,
- (2) zu jedem  $p \in \partial E$  ein  $a \in \{1, \dots, N\}$  und ein  $t \in I_a$  mit  $\gamma_a(t) = p$  existiert und
- (3) aus  $\gamma_a(s) = \gamma_b(t)$  bereits  $a = b$  und  $s = t$  folgt, es sei denn,  $s \in \partial I_a$  und  $t \in \partial I_b$  seien Randpunkte.

Wenn  $E$  ein kompaktes Gebiet mit  $C^1$ -Rand ist, kann man aus Definition 13.4 schließen, dass endlich viele Kurven ausreichen, um den Rand zu beschreiben. Wir erinnern uns an das Kurvenintegral zweiter Art aus Definition 8.16 und betrachten  $\langle X, \cdot \rangle$  als Pfaffsche Form auf  $\mathbb{R}^2$ .

**13.16. SATZ (Rotationssatz in der Ebene).** *Es sei  $E \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet mit  $C^1$ -Rand, den eine Familie von  $C^1$ -Kurven  $\gamma_a: I_a \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $1 \leq k \leq N$  einmal positiv umläuft, und es sei  $X \in C^1(E; \mathbb{R}^2)$  ein Vektorfeld auf  $E$ . Dann gilt*

$$\int_E \operatorname{rot} X \, d\lambda^2 = \sum_{a=1}^N \int_{\gamma_a} \langle X, \cdot \rangle$$

**13.17. BEISPIEL.** Zu Bemerkung 8.28 betrachten wir das Vektorfeld

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \operatorname{rot} X = \partial_x x = 1 \quad \text{und} \quad \langle X, \cdot \rangle = x \, dy.$$

Dann folgt sofort

$$\lambda^2(E) = \int \operatorname{rot} X \, d\lambda^2 = \int_{\gamma} x \, dy .$$

Da eine Drehung des  $\mathbb{R}^3$  immer eine Drehachse und eine Winkelgeschwindigkeit hat, können wir sie durch einen Vektor im  $\mathbb{R}^3$  beschreiben, dessen Richtung die Drehachse und dessen Länge die Winkelgeschwindigkeit angibt. Für ein Vektorfeld  $X \in C^k(U; \mathbb{R}^3)$  definieren wir seine Rotation als „infinitesimale Drehung“ durch „ $d \times X$ “, also

$$\operatorname{rot} X = \text{„det} \begin{pmatrix} \partial_1 & X_1 & \cdot \\ \partial_2 & X_2 & \cdot \\ \partial_3 & X_3 & \cdot \end{pmatrix} \text{“} = \begin{pmatrix} \partial_2 X_3 - \partial_3 X_2 \\ \partial_3 X_1 - \partial_1 X_3 \\ \partial_1 X_2 - \partial_2 X_1 \end{pmatrix} \in C^{k-1}(U; \mathbb{R}^3) .$$

In der letzten Komponente steht gerade die Formel für die zweidimensionale Rotation.

Für den Satz von Stokes brauchen wir einen Begriff von „Orientierung“ einer Fläche im  $\mathbb{R}^3$ . In unserem Zusammenhang dürfte es das einfachste sein, eine Orientierung durch Wahl eines Normalenvektors festzulegen. Dann erbt gleichzeitig jeder Tangentialraum  $T_p M$  von  $M$  eine Orientierung, so dass Voranstellen des Normalenvektors an eine positiv orientierte Basis von  $T_p M$  eine positive orientierte Basis des  $\mathbb{R}^3$  liefert.

13.18. DEFINITION. Wir nennen eine  $C^k$ -Hyperfläche  $M \subset \mathbb{R}^n$  mit  $k \geq 1$  *zweiseitig*, wenn es ein stetiges, nirgends verschwindendes, normales Vektorfeld an  $M$  gibt. Eine (*normale*) *Orientierung* einer zweiseitigen Hyperfläche ist die Wahl eines solchen Vektorfeldes. Wenn es darüberhinaus überall Länge 1 hat, nennen wir es das *positive Einheitsnormalenfeld*  $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

13.19. BEISPIEL. Viele Hyperflächen sind zweiseitig, aber nicht alle.

- (1) Es sei  $E \subset \mathbb{R}^n$  kompaktes Gebiet mit  $C^k$ -Rand für ein  $k \geq 1$ . Dann ist  $\partial E$  immer eine zweiseitige Hyperfläche, und wir können das auswärtige Einheitsnormalenfeld aus Definition 13.7 als positives Einheitsnormalenfeld wählen. Für die  $(n-1)$ -Sphäre  $S^{n-1} = \partial D^n$  erhalten wir  $\nu(x) = x$ .
- (2) Das Möbiusband ist nicht zweiseitig. Es ist auch nicht orientierbar.

Für den Integranden im dreidimensionalen Satz von Stokes benötigen wir eine Beschreibung des Normalenvektorfeldes. Dazu sei eine  $C^k$ -Parametrisierung  $\psi: V \rightarrow U \subset M \subset \mathbb{R}^3$  einer Fläche  $M$  im  $\mathbb{R}^3$  gegeben. Dann definieren wir ein Einheitsnormalenfeld an  $M$  durch

$$\nu \circ \psi = \frac{\partial_x \psi \times \partial_y \psi}{\sqrt{\det(d\psi^t d\psi)}} ,$$

dabei nutzen wir aus, dass  $\sqrt{\det(d\psi^t d\psi)} = \|\partial_x \psi \times \partial_y \psi\|$ , da beide Größen die Fläche des von den Spalten von  $d\psi$  aufgespannten Parallelogramms im  $\mathbb{R}^3$  beschreiben, siehe Bemerkung 11.51. Wenn dieses Einheitsnormalenfeld die falsche Richtung hat, ändern wir bei einer der Koordinaten das Vorzeichen.

13.20. DEFINITION. Wir nennen eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine *m-dimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit mit  $C^\ell$ -Rand*, wobei  $\ell \leq k$ , wenn es Teilmenge  $\partial M \subset M$  mit folgenden Eigenschaften gibt.

- (1) Die Teilmenge  $M \setminus \partial M \subset \mathbb{R}^n$  ist eine *m-dimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit*.
- (2) Für jeden Punkt  $p \in \partial M$  existiert eine Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$  von  $p$ , eine offene Teilmenge  $V \subset \mathbb{R}^n$ , ein  $C^k$ -Diffeomorphismus  $\varphi: U \rightarrow V$  und eine  $C^\ell$ -Funktion  $g: \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$M \cap U = \varphi^{-1}(\{(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^{n-m} \mid (x, y, z) \in V \text{ und } x \leq g(y)\})$$

und

$$\partial M \cap U = \varphi^{-1}(\{(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^{n-m} \mid (x, y, z) \in V \text{ und } x = g(y)\}) .$$

Der Rand  $\partial M$  ist eine Verallgemeinerung des geometrischen Randes aus Definition 13.4. Er ist selbst eine  $(m - 1)$ -dimensionale  $C^\ell$ -Untermannigfaltigkeit. Der Rand einer Fläche im  $\mathbb{R}^3$  ist also eine Kurve.

13.21. DEFINITION. Wir sagen, dass eine Familie regulärer  $C^\ell$ -Kurven  $(\gamma_a: I_a \rightarrow \partial F)_a$  den Rand einer orientierten Fläche  $F \subset \mathbb{R}^3$  *einmal positiv umläuft*, wenn für alle  $t \in I_a$  eine Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$  von  $p$ , eine offene Teilmenge  $V \subset \mathbb{R}^n$ , ein Diffeomorphismus  $\psi: V \rightarrow U$  und eine  $C^\ell$ -Funktion  $g$  wie in Definition 13.20 (2) mit  $\det d\psi > 0$  existieren, sowie

- (1) eine intervallförmige Umgebung  $J \subset I_a$  von  $t$  und eine monoton steigende Funktion  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\gamma_a(s) = \psi \begin{pmatrix} g(f(s)) \\ f(s) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } s \in J$$

- (2) ein Vektorfeld  $W: V \cap \mathbb{R}_-^2 \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $W_3 > 0$  und

$$\nu \circ \psi = d\psi \cdot W: V \cap \mathbb{R}_-^2 \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

so dass zu jedem  $p \in \partial E$  ein  $a \in \{1, \dots, N\}$  und ein  $t \in I_a$  mit  $\gamma_a(t) = p$  existiert und aus  $\gamma_a(s) = \gamma_b(t)$  bereits  $a = b$  und  $s = t$  folgt, es sei denn,  $s \in \partial I_a$  und  $t \in \partial I_b$  seien Randpunkte.

13.22. SATZ (Rotationssatz; Stokes). *Es sei  $X$  ein  $C^1$ -Vektorfeld im  $\mathbb{R}^3$  und  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine orientierte  $C^2$ -Fläche mit positivem Einheitsnormalenfeld  $\nu$  und mit  $C^1$ -Rand, den eine Familie regulärer  $C^1$ -Kurven  $\gamma_a: I_a \rightarrow \mathbb{R}^3$  für  $1 \leq a \leq N$  einmal positiv umläuft. Dann gilt*

$$\int_M \langle \text{rot } X, \nu \rangle d\text{vol}_M = \sum_{a=1}^N \int_{\gamma_a} \langle X, \cdot \rangle.$$

13.23. BEMERKUNG. Wir betrachten noch einmal alle obigen Differentialoperatoren, der Einfachheit halber diesmal nur für glatte Funktionen und Vektorfelder. Auf  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen betrachten wir

$$0 \longrightarrow C^\infty(U) \xrightarrow{\text{grad}} C^\infty(U; \mathbb{R}^2) \xrightarrow{\text{rot}} C^\infty(U) \longrightarrow 0.$$

Den analoge Integralsatz für den Gradienten haben wir in Bemerkung 8.17 kennengelernt. Wir können ihn umschreiben als

$$\int_\gamma \langle \text{grad } f, \cdot \rangle = \int_{\partial\gamma} f.$$

Nach dem Satz 7.16 von Schwarz verschwindet die Verkettung  $\text{rot} \circ \text{grad}$  stets. Tatsächlich ist die Pfaffsche Form  $\langle X, \cdot \rangle$  genau dann geschlossen, wenn  $\text{rot } X = 0$  gilt. Und sie ist genau dann exakt, wenn eine Funktion  $f$  existiert, so dass

$$\langle X, \cdot \rangle = df \quad \iff \quad X = \text{grad } f.$$

Nach Folgerung 8.26 gilt auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet also  $\text{rot } X = 0$  genau dann, wenn eine Funktion  $f$  mit  $\text{grad } f = X$  existiert.

Auf  $U \subset \mathbb{R}^3$  offen betrachten wir stattdessen

$$0 \longrightarrow C^\infty(U) \xrightarrow{\text{grad}} C^\infty(U; \mathbb{R}^2) \xrightarrow{\text{rot}} C^\infty(U; \mathbb{R}^2) \xrightarrow{\text{div}} C^\infty(U) \longrightarrow 0.$$

Völlig analog zum obigen gilt  $\text{rot} \circ \text{grad} = 0$  und  $\text{div} \circ \text{rot} = 0$  (während  $\text{div} \circ \text{grad} = \Delta$  ja den Laplace-Operator liefert, der im Allgemeinen nicht verschwindet).

All diese Überlegungen führen am Ende zum sogenannten de Rham-Komplex, den wir hier aber nicht einführen wollen. Man kann dann von jeder Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  die sogenannte

de Rham-Kohomologie berechnen. Im Falle von  $U \subset \mathbb{R}^3$  offen betrachtet man etwa

$$\begin{aligned} H_{\text{dR}}^0(U) &= \ker(\text{grad}) , \\ H_{\text{dR}}^1(U) &= \ker(\text{rot}) / \text{im}(\text{grad}) \\ \text{und} \quad H_{\text{dR}}^2(U) &= \ker(\text{div}) / \text{im}(\text{rot}) . \end{aligned}$$

Für hinreichend einfache Gebiete sind das erstaunlicherweise endlich-dimensionale Vektorräume. Beispielsweise besteht  $H_{\text{dR}}^0(U)$  genau aus den lokal konstanten Funktionen und ist somit genau dann isomorph zu  $\mathbb{R}$  wenn  $U \neq \emptyset$  zusammenhängend ist, siehe Abschnitt 6.f.

Schwieriger wird es bei  $H_{\text{dR}}^1(U)$  und  $H_{\text{dR}}^2(U)$ . Nach Folgerung 8.26 gilt  $H_{\text{dR}}^1(U) = 0$ , wenn  $U$  einfach zusammenhängend ist. Die Sätze von Gauß und Stokes können dabei helfen, nicht verschwindende Elemente von  $H_{\text{dR}}^k(U)$  zu entdecken.

13.24. BEISPIEL. Wir betrachten auf  $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  das Vektorfeld

$$X(x) = \frac{x}{\|x\|^3} \quad \text{mit} \quad \text{div} X = 0 .$$

Es folgt

$$\int_{S^2} \langle X, \nu \rangle d\text{vol}_{S^2} = \text{vol}(S^2) = 4\pi \neq 0 ,$$

Normale Integration über  $S^2$  ist auf  $H^2(U; \mathbb{R}^3)$  wohldefiniert, denn für alle  $Y \in C^\infty(U; \mathbb{R}^3)$  gilt nach dem Satz von Stokes

$$\int_{S^2} \langle \text{rot} Y, \nu \rangle d\text{vol}_{S^2} = \int_{\partial S^2} \langle Y, \cdot \rangle = 0 ,$$

da  $\partial S^2 = \emptyset$ . Also repräsentiert  $X$  ein nichttriviales Element von  $H_{\text{dR}}^2(U)$ . Auf der anderen Seite kann man zeigen, dass  $H_{\text{dR}}^2(\mathbb{R}^3) = 0$ . Man kann auch zeigen, dass für diffeomorphe Gebiete die de Rham-Kohomologien isomorph sind. Daraus können wir schließen, dass  $U$  nicht zu  $\mathbb{R}^3$  diffeomorph sein kann.

Wir sehen auch, dass es kein kompaktes Gebiet  $E \subset U$  mit Rand  $S^2$  gibt (es gilt zwar  $S^2 = \partial D^3$ , aber  $D^3 \not\subset U$ ). Denn falls es solch ein  $E$  gäbe, wäre nach dem Divergenzsatz

$$\int_{S^2} \langle X, \nu \rangle d\text{vol}_{S^2} = \int_E \text{div} X d\lambda^3 = 0 .$$

13.25. BEMERKUNG. Um die Bedeutung der Integralsätze in der Physik zu verstehen, schauen wir uns den klassischen Elektromagnetismus auf einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^3$  des Raumes und einem Zeitintervall  $I$  an. Die entscheidenden Größen sind

- (1) das elektrische Feld  $E: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,
- (2) das Magnetfeld  $B: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,
- (3) die elektrische Ladungsdichte  $\rho: U \times I \rightarrow \mathbb{R}$ , und
- (4) die elektrische Stromdichte  $j: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Außerdem brauchen wir zwei Naturkonstanten  $\mu_0$  und  $\varepsilon_0$ . Dann gelten die *Maxwell-Gleichungen*

$\text{div} E = \rho / \varepsilon_0$	Gaußsches Gesetz,
$\text{div} B = 0$	Gaußsches Gesetz für Magnetfelder,
$\text{rot} E = -\partial_t B$	Faradaysches Gesetz,
$\text{rot} B = \mu_0(j + \varepsilon_0 \partial_t E)$	Ampèresches Gesetz.

Mit Hilfe der obigen Integralsätze erhalten wir daraus globale Aussagen. Dazu sei  $V \subset U$  kompaktes Gebiet mit  $C^1$ -Rand, und  $A \subset U$  eine kompakte  $C^2$ -Fläche mit  $C^1$ -Rand.

- (1) Der elektrische Fluss durch die Oberfläche ist proportional zur Gesamtladung im Inneren:

$$\int_{\partial V} \langle E, \nu \rangle d\text{vol}_{\partial V} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho d\lambda^3 .$$

- (2) Der Fluss eines Magnetfeldes durch ein Volumen verschwindet immer. Das bedeutet, es gibt keine „magnetischen Monopole“.
- (3) Die Änderung des Magnetfeldes entlang einer Fläche induziert ein elektrisches Feld auf dem Rand:

$$\int_{\partial A} \langle E, \cdot \rangle = - \int_A \langle \partial_t B, \nu \rangle d\text{vol}_A .$$

- (4) Die magnetische Zirkulation entlang der Kurve  $\partial A$  ergibt sich aus dem Strom durch die Fläche und der Änderung des elektrischen Feldes:

$$\int_{\partial A} \langle B, \cdot \rangle = \mu_0 \int_A \langle j, \nu \rangle d\text{vol}_A + \mu_0 \varepsilon_0 \int_A \langle \partial_t E, \nu \rangle d\text{vol}_A .$$



## Literatur

- [1] H. Amann, J. Escher, *Analysis I*, Grundstudium Mathematik, 2. Aufl. Birkhäuser, Basel, 2002
- [2] O. Forster, *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, Grundkurs Mathematik, 12. Aufl., Springer Spektrum, Heidelberg, 2016
- [3] S. Goette, *Lineare Algebra I-II*, <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/goette/Skripten/LA.pdf>
- [4] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis. Teil 1*, 7. Aufl., Teubner, Stuttgart, 1990
- [5] E. Kuwert, *Analysis I*, <https://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/Ana3/HPANA3/skript1.pdf>
- [6] —, *Analysis II*, <https://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/Ana3/HPANA3/skript.pdf>
- [7] —, *Analysis III*,  
<https://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/Ana3/HPANA3/SkriptAna3.pdf>
- [8] H. Mildenerger, *Lineare Algebra I*, 2021
- [9] F. Modler, M. Kreh, *Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1*, 4. Aufl., Springer Spektrum, Berlin, 2018