

**Topologie — WS 10/11**  
**Algebraische Topologie — SS 11**

Sebastian Goette



## Einführung

Bevor wir mit dem eigentlichen Stoff der Vorlesung beginnen, möchte ich Ihnen ein paar Beispiele geben, zum einen Aussagen, die sich in der Sprache der Topologie formulieren lassen, zum anderen Aussagen aus anderen Gebieten der Mathematik, die sich aber topologisch beweisen lassen. Nicht alle diese Beispiele werden in der Vorlesung tatsächlich auftreten, weil sie zum Teil etwas mehr Hintergrundwissen brauchen — sei es topologisch, sei es aus einem anderen Gebiet der Mathematik — als wir in dieser Vorlesung lernen können.

0.1. BEISPIEL. Sei

$$B^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1 \}$$

die (offene) Einheitskreisscheibe, und sei

$$D^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1 \}$$

ihr Abschluss.

Der *Brouwersche Fixpunktsatz* besagt:

0.2. SATZ (Brouwer). *Jede stetige Abbildung  $f: D^n \rightarrow D^n$  der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe auf sich selbst hat mindestens einen Fixpunkt.*

Das heißt, es existiert  $x_0 \in D^n$  mit

$$f(x_0) = x_0 .$$

Hierbei bedeutet stetig das gleiche wie in der Analysis.

Vergleichen Sie diesen Satz mit dem Fixpunktsatz von Banach:

0.3. SATZ (Banach). *Sei  $X$  ein vollständiger normierter Vektorraum, und sei  $F: X \rightarrow X$  eine Abbildung zu der ein  $\lambda < 1$  existiert, so dass*

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \lambda \|x - y\| \tag{*}$$

*für alle  $x, y \in X$ . Dann hat  $F$  einen eindeutigen Fixpunkt.*

Wir vergleichen die Sätze von Banach und Brouwer.

- (1) Der Satz von Banach ist insofern allgemeiner, als das er für mehr Räume funktioniert, denn der Satz von Brouwer gilt nur für gewisse Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ . Er ist schärfer, denn er liefert einen *eindeutigen* Fixpunkt. Außerdem liefert der Beweis ein Verfahren zur approximativen Bestimmung des Fixpunkts.
- (2) Der Satz von Brouwer ist insofern allgemeiner, als er mehr Abbildungen zulässt. Wir könnten nämlich den Satz von Brouwer auch für Abbildungen  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  formulieren, so dass  $F(D^n) \subset D^n$ . Aus dem Banachschen Satz folgt ja unter anderem, dass der Einheitskreis um den Fixpunkt in sich abgebildet wird. Auf der anderen Seite kann eine Abbildung den Einheitskreis in sich abbilden, ohne dass sie die Lipschitz-Bedingung (\*) erfüllt. Der Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes sagt uns allerdings nicht, wie wir den Fixpunkt auffinden können.

Die Sätze sind also verschieden. Der Banachsche Fixpunktsatz ist ein „metrischer“ Satz, während der Brouwersche Fixpunktsatz ein „topologischer“ Satz ist.

0.4. BEISPIEL. Unter der  $n$ -dimensionale Einheitssphäre verstehen wir die Menge

$$S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1 \} .$$

Ein Einheitsvektorfeld auf der  $S^n$  ist eine stetige Abbildung  $V: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass

$$|V(x)| = 1 \quad \text{und} \quad V(x) \perp x .$$

0.5. SATZ (vom Igel). *Sei  $n$  gerade, dann existiert kein stetiges Einheitsvektorfeld auf  $S^n$ .*

Mit anderen Worten: ein gerade-dimensionaler Igel ohne Glatzpunkt lässt sich nicht kämmen (Igel lassen sich sowieso nicht kämmen — sie stellen ihre Stacheln auf, wenn man's versucht).

Auf der anderen Seite existiert solch ein Vektorfeld immer, wenn  $n$  ungerade ist. In diesem Fall identifizieren wir  $\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{C}^{\frac{n+1}{2}}$  und setzen einfach  $V(x) = ix$ .

0.6. BEISPIEL. Das folgende Beispiel ist mit dem zweiten verwandt, auch wenn man das nicht auf den ersten Blick erkennen kann. Sei  $A$  eine Algebra über  $\mathbb{R}$ , d.h.,  $A$  ist ein reeller Vektorraum, und es existiert eine  $\mathbb{R}$ -bilineare Multiplikationsabbildung  $*$ :  $A \times A \rightarrow A$ . Diese muss weder assoziativ noch kommutativ sein.

Wir nennen  $A$  eine *Divisionsalgebra*, wenn zu jedem  $a \in A \setminus 0$  ein  $a' \in A$  existiert, so dass

$$a' * (a * b) = (b * a) * a' = b$$

für alle  $b \in A$  gilt.

0.7. SATZ (Kervaire, Milnor). *Die einzigen endlich-dimensionalen Divisionsalgebren über  $\mathbb{R}$  sind  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  (die Quaternionen) und  $\mathbb{C}a$  (die Oktaven).*

Diesen Satz werden wir in der Vorlesung sicherlich nicht beweisen. Genau wie beim Fundamentalsatz der Algebra handelt es sich hier um einen rein algebraischen Satz, der sich aber nur mit analytischen / topologischen Methoden beweisen lässt. Die Liste der algebraischen Resultate, die mit topologischen Methoden bewiesen werden, wird immer länger.

## Kapitel 1 — Grundbegriffe

Wir lernen in diesem Kapitel den Begriff des topologischen Raumes und der stetigen Abbildungen kennen. Außerdem definieren wir noch zahlreiche Eigenschaften von topologischen Räumen und Abbildungen, und beweisen ein paar kleine Sätze, die wir in späteren Kapiteln benötigen werden. Einiges sollte aus Analysis bekannt sein — zumindest im metrischen Fall.

### 1.1. Metrische Räume

Wir erinnern uns kurz an die Definition von metrischen Räumen und stetigen Abbildungen im Sinne der Analysis. Wenn wir von einer Definition „im Sinne der Analysis“ sprechen, meinen wir damit eine Definition, die mit „für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ...“ beginnt.

1.1. DEFINITION. Ein *metrischer Raum* ist ein Paar  $(X, d)$  aus einer Menge  $X$  und einer Abbildung  $d: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ , die

- (1) *positiv* ist, das heißt,  $d(x, y) = 0$  genau dann, wenn  $x = y$ ,
- (2) *symmetrisch* ist, das heißt,  $d(x, y) = d(y, x)$ , und
- (3) die *Dreiecksungleichung*  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$  erfüllt,

jeweils für alle  $x, y, z \in X$ .

1.2. BEISPIEL. Es folgen einige einfache Beispiele von Metriken.

- (1)  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$ , jeweils mit  $d(x, y) = |y - x|$ .
- (2) Jeder normierte Vektorraum  $(V, \|\cdot\|)$  ist metrisch mit  $d(x, y) = \|y - x\|$ .
- (3) Jede Menge  $M$  trägt eine Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \text{ und} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (4) Jede Teilmenge  $Y$  eines metrischen Raumes  $(X, d)$  ist wieder ein metrischer Raum mit der induzierten Metrik  $d|_Y = d|_{Y \times Y}$ .

Weitere Beispiele folgen in den Übungen 1.102 und 1.104.

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $\varepsilon > 0$  und  $x \in X$ . Der  $\varepsilon$ -Ball um  $x$  ist die Menge

$$B_\varepsilon(x) = \{x' \in X \mid d(x, x') < \varepsilon\}.$$

1.3. DEFINITION. Seien  $(X, d), (Y, d')$  metrische Räume. Eine Abbildung  $F: (X, d) \rightarrow (Y, d')$  heißt *stetig am Punkt*  $x \in X$ , falls für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass

$$F(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(F(x)).$$

$F$  heißt *stetig*, wenn  $F$  an allen Punkten  $x \in X$  stetig ist.

Das ist genau die Definition, die Sie aus Analysis kennen. Wir erinnern uns an eine weitere Definition. Im folgenden bezeichne  $\mathcal{P}X$  die Potenzmenge von  $X$ . Da wir es in der Topologie häufig mit Mengen von Mengen — wie der Potenzmenge — zu tun haben, verwenden wir für solche Mengen kalligraphische Buchstaben, um sie zum Beispiel von Punktmenge zu unterscheiden.

1.4. DEFINITION. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $U \subset X$  heißt *offen in  $X$* , wenn zu jedem  $x \in U$  ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass  $B_\varepsilon(x) \subset U$ . Die Gesamtheit aller offenen Mengen  $\mathcal{O}_d \subset \mathcal{P}X$  heißt die *metrische Topologie*. Sei  $x \in X$ , dann heißt eine beliebige Teilmenge  $V \subset X$  eine *Umgebung von  $x$* , wenn es eine offene Menge  $U$  gibt mit  $x \in U \subset V$ .

1.5. BEMERKUNG. Die Offenheit einer Menge  $U$  hängt ab vom umgebenden Raum  $X$  und der gewählten Metrik  $d$ . So ist etwa die Menge  $[-\pi, \pi] \cap \mathbb{Q}$  offen in  $\mathbb{Q}$ , aber nicht in  $\mathbb{R}$ .

1.6. BEMERKUNG. Zu Definition 1.4 äquivalent ist die folgende Charakterisierung offener und abgeschlossener Mengen in metrischen Räumen. Eine Teilmenge  $A \subset X$  ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Folge  $(a_i)_i$  in  $A$ , die in  $(X, d)$  im Sinne der Analysis konvergiert, der Grenzwert  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i$  in  $A$  liegt. Eine Teilmenge  $U \subset X$  ist offen, wenn  $X \setminus U$  abgeschlossen ist.

Zur Erinnerung: zwei Normen  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|'$  auf einem Vektorraum  $V$  heißen *äquivalent*, wenn es Konstanten  $0 < c, C < \infty$  gibt, so dass

$$c \|v\| \leq \|v\|' \leq C \|v\|$$

für alle  $v$ . Sei  $V \cong \mathbb{R}^n$  endlich dimensional, dann sind alle Normen äquivalent. Auf unendlich-dimensionalen Vektorräumen gibt es hingegen viele paarweise inäquivalente Normen, und entsprechend viele verschiedene Topologien.

1.7. BEMERKUNG. Zwei Normen auf einem  $\mathbb{R}$ - oder  $\mathbb{C}$ -Vektorraum induzieren genau dann die gleiche Topologie, wenn sie äquivalent sind.

BEGRÜNDUNG. Seien  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|'$  äquivalent. Aus

$$d(x, y) = \|y - x\| \leq \frac{1}{c} \|y - x\|' = \frac{1}{c} d'(x, y)$$

folgt  $B'_{c\varepsilon}(x) \subset B_\varepsilon(x)$ , wobei  $B'_{c\varepsilon}(x)$  einen Ball bezüglich  $d'$  bezeichne. Somit enthält jeder metrische Ball bezüglich  $d'$  einen metrischen Ball bezüglich  $d$ . Die umgekehrte Behauptung zeigt man genauso. Hieraus folgt die Gleichheit der Topologien.

Wir nehmen jetzt an, dass  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|'$  die gleiche Topologie induzieren. Bälle  $B_r(x) \subset V$  sind offen, denn für jeden Punkt  $y \in B_r(x)$  folgt  $B_{r-\|x-y\|}(y) \subset B_r(x)$  aus der Dreiecksungleichung. Insbesondere ist  $B_1(0) \subset V$  offen. Da  $\|\cdot\|'$  die gleiche Topologie induziert, existiert  $r > 0$ , so dass der  $\|\cdot\|'$ -Ball  $B'_r(0)$  vom Radius  $r$  um 0 in  $B_1(0)$  enthalten ist. Aus  $\|x\|' < r$  folgt also  $\|x\| < 1$ , und mit  $c = \frac{1}{r}$  erhalten wir daraus

$$c \|v\| \leq \|v\|'$$

für alle  $v \in V$ . Die andere Ungleichung folgt entsprechend.  $\square$

Wir wollen jetzt zeigen, wie man Stetigkeit auch definieren kann, wenn man nicht die Metrik kennt, sondern nur ihre offenen Mengen.

1.8. SATZ. Seien  $(X, d)$  und  $(Y, d')$  metrische Räume. Eine Abbildung  $F: (X, d) \rightarrow (Y, d')$  ist genau dann stetig, wenn die Urbilder aller offenen Teilmengen von  $Y$  in  $X$  wiederum offen sind.

Zusammen mit Bemerkung 1.7 folgt, dass die Stetigkeit einer Abbildung  $F: (V, d) \rightarrow (W, d')$  zwischen zwei normierten Vektorräumen nur von den Äquivalenzklassen der Normen  $d$  und  $d'$  abhängt. Dieses Faktum ist aus Analysis bekannt.

BEWEIS. Wir nehmen an, dass  $F$  stetig ist im Sinne von Definition 1.3. Sei  $V \subset Y$  offen, und sei  $x \in F^{-1}(V) \subset X$  beliebig. Da  $V$  offen ist, existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $B_\varepsilon(F(x)) \subset V$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $F$  existiert ein  $\delta > 0$ , so dass  $F(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(F(x)) \subset V$  gilt, insbesondere folgt  $B_\delta(x) \subset F^{-1}(V)$ . Da  $x$  beliebig war, ist also  $F^{-1}(V)$  offen in  $X$ .

Wir nehmen jetzt an, dass Urbilder offener Mengen offen sind. Seien jetzt  $x \in X$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben. Da der Ball  $B_\varepsilon(F(x))$  in  $Y$  offen ist, ist auch  $U = F^{-1}(B_\varepsilon(F(x)))$  offen in  $X$ , und natürlich liegt  $x$  in  $U$ . Also existiert ein  $\delta > 0$ , so dass  $B_\delta(x) \subset U$  gilt. Es folgt  $F(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(F(x))$ . Da  $x$  und  $\varepsilon$  beliebig waren, ist  $F$  also stetig im Sinne von Definition 1.3.  $\square$

## 1.2. Topologische Räume

Wir erinnern uns an die Definition topologischer Räume und stetiger Abbildungen aus der Analysis.

1.9. BEMERKUNG. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, und sei  $\mathcal{O}_d$  die von  $d$  definierte Topologie auf  $X$ .

- (1) Die leere Menge  $\emptyset$  und  $X$  selbst sind nach Definition 1.4 offen, gehören also zu  $\mathcal{O}$ .
- (2) seien  $U_1, \dots, U_k$  offen, und sei  $x \in U_1 \cap \dots \cap U_k$ . Da die  $U_i$  offen sind, existieren  $\varepsilon_i > 0$ , so dass  $B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$ . Sei  $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ , dann ist  $\varepsilon > 0$ , und es gilt  $B_\varepsilon(x) \subset U_1 \cap \dots \cap U_k$ . Da  $x$  beliebig war, ist  $U_1 \cap \dots \cap U_k$  also wieder offen.
- (3) Sei  $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_d$  eine beliebig grosse Ansammlung offener Mengen. Sei

$$x \in \bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U,$$

dann existiert also ein  $U \in \mathcal{U}$ , so dass  $x \in U$ . Da  $U$  offen ist, existiert  $\varepsilon > 0$ , so dass  $B_\varepsilon(x) \subset U \subset \bigcup \mathcal{U}$ . Da  $x$  beliebig war, ist  $\bigcup \mathcal{U}$  also wieder offen.

Wir benutzen diese drei Beobachtungen über  $\mathcal{O}_d$ , um den allgemeinen Begriff einer Topologie zu definieren.

1.10. DEFINITION. Sei  $X$  eine Menge. Eine *Topologie* auf  $X$  ist eine Teilmenge  $\mathcal{O}$  der Potenzmenge  $\mathcal{P}X$  mit folgenden Eigenschaften.

- (1) Die leere Menge  $\emptyset$  und  $X$  selbst liegen in  $\mathcal{O}$ .
- (2) Seien  $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{O}$ , dann liegt auch  $U_1 \cap \dots \cap U_k \in \mathcal{O}$ .
- (3) Sei  $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ , dann liegt auch  $\bigcup \mathcal{U}$  in  $\mathcal{O}$ .

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar  $(X, \mathcal{O})$  aus einer Menge  $X$  und einer Topologie  $\mathcal{O}$  auf  $X$ .

1.11. BEISPIEL. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, dann definiert  $\mathcal{O}_d$  nach Bemerkung 1.9 eine Topologie auf  $X$ . Umgekehrt heißt eine Topologie  $\mathcal{O}$  auf  $X$  *metrisierbar*, wenn es eine Metrik  $d$  auf  $X$  gibt, so dass  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$ . Die meisten topologischen Räume, denen wir später begegnen, werden metrisierbar sein. Dennoch gibt es interessante und wichtige topologische Räume, die nicht metrisierbar sind.

1.12. BEISPIEL. Sei  $X$  eine beliebige Menge. Wir definieren zwei "triviale" Topologien auf  $X$ .

- (1) Sei  $\mathcal{O}_\delta = \mathcal{P}X$ , dann ist jede Teilmenge von  $X$  offen bezüglich  $\mathcal{O}_\delta$ . Wir nennen  $\mathcal{O}_\delta$  die *diskrete Topologie* auf  $X$ . Die diskrete Topologie wird von der Metrik aus Beispiel 1.2 (3) induziert.
- (2) Das andere Extrem ist  $\mathcal{O}_K = \{\emptyset, X\} \subset \mathcal{P}X$ . Diese Topologie heißt *Klumpentopologie* (*indiskrete Topologie*). Diese Topologie ist nur metrisierbar, wenn  $X$  höchstens einen Punkt enthält, wie wir später sehen werden.

Die Topologie ist die Menge aller offenen Teilmengen. Wir definieren entsprechend die Begriffe „Umgebung“ und „abgeschlossene Menge“ wie gehabt.

1.13. DEFINITION. Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum. Eine Teilmenge  $U \subset X$  heißt *offen* bezüglich  $\mathcal{O}$ , falls  $U \in \mathcal{O}$ . Sei  $x \in X$  und  $V \subset X$  mit  $x \in V$ , dann heißt  $V$  eine *Umgebung* von  $x$

bezüglich  $\mathcal{O}$ , falls es eine offene Menge  $U \in \mathcal{O}$  gibt, so dass  $x \in U \subset V$  gilt. Sei  $A \subset X$ , dann heißt  $A$  *abgeschlossen* bezüglich  $\mathcal{O}$ , falls das Komplement  $X \setminus A$  offen ist.

1.14. DEFINITION. Sei  $(X, \mathcal{O})$  topologischer Raum, und sei  $Y \subset X$  eine beliebige Teilmenge. Das *Innere*  $\overset{\circ}{Y}$  von  $Y$  ist die größte offene Teilmenge von  $X$ , die ganz in  $Y$  enthalten ist. Der *Abschluss*  $\overline{Y}$  von  $Y$  ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von  $X$ , die  $Y$  enthält. Der *Rand* von  $Y$  ist die Menge  $\partial Y = \overline{Y} \setminus \overset{\circ}{Y}$ .

1.15. BEMERKUNG. Sei  $(X, \mathcal{O})$  topologischer Raum, und sei  $Y \subset X$  eine beliebige Teilmenge. Es gilt

$$\overset{\circ}{Y} = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{O} \\ U \subset Y}} U \quad \text{und} \quad \overline{Y} = \bigcap_{\substack{X \setminus A \in \mathcal{O} \\ A \supset Y}} A.$$

Die erste Menge ist offen nach Definition 1.10 (3). Für die zweite zeigt man analog, dass das Komplement abgeschlossen ist. Ausserdem ist

$$\overline{X \setminus Y} = X \setminus \overset{\circ}{Y}, \quad (X \setminus Y)^\circ = X \setminus \overline{Y}, \quad \text{und} \quad \partial(X \setminus Y) = \partial Y.$$

1.16. BEISPIEL. Das Innere und der Abschluss einer Menge hängen vom umgebenden Raum und seiner Topologie ab. Sei  $V = [-\pi, \pi] \cap \mathbb{Q}$ , dann gilt

$$\begin{array}{lll} \text{in } \mathbb{Q} : & \overset{\circ}{V} = V, & \overline{V} = V, & \partial V = \emptyset, \\ \text{und in } \mathbb{R} : & \overset{\circ}{V} = \emptyset, & \overline{V} = [-\pi, \pi], & \partial V = [-\pi, \pi]. \end{array}$$

Falls es klar ist, von welcher Topologie  $\mathcal{O}$  auf  $X$  wir reden, lassen wir den Zusatz „bezüglich  $\mathcal{O}$ “ in der Regel weg. Wir haben in Satz 1.8 ein „topologisches“ Kriterium für die Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen kennengelernt. Wir erheben dieses Kriterium zur Definition.

1.17. DEFINITION. Eine Abbildung  $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  zwischen topologischen Räumen heißt *stetig* genau dann, wenn Urbilder offener Mengen offen sind, wenn also  $F^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$  für alle  $U \in \mathcal{O}_Y$ . Es bezeichne  $C(X, Y)$  die Menge aller stetigen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ .

Wenn eine stetige Abbildung  $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  bijektiv ist und  $F^{-1}: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$  ebenfalls stetig ist, heißt  $F$  ein *Homöomorphismus*.

- 1.18. BEISPIEL. (1) Nach Satz 1.8 sind Abbildungen zwischen metrischen Räumen genau dann im topologischen Sinne stetig, wenn sie im metrischen Sinne stetig sind.  
(2) Seien  $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$  topologische Räume, und sei  $y_0$  ein Punkt in  $Y$ . Die konstante Abbildung  $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  mit  $F(x) = y_0$  für alle  $x \in X$  ist immer stetig, denn für jede offene Menge  $U \subset Y$  gilt

$$F^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{O}_X & \text{falls } y_0 \notin U, \text{ und} \\ X \in \mathcal{O}_X & \text{falls } y_0 \in U. \end{cases}$$

1.19. BEMERKUNG. Seien  $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y), (Z, \mathcal{O}_Z)$  topologische Räume.

- (1) Die Identität  $\text{id}_X: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$  auf  $X$  mit  $\text{id}_X(x) = x$  für alle  $x \in X$  ist immer stetig, denn für alle  $U \in \mathcal{O}_X$  gilt

$$\text{id}_X^{-1}(U) = U \in \mathcal{O}_X.$$

- (2) Seien  $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  und  $G: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$  stetige Abbildungen, dann ist auch  $G \circ F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$  stetig. Sei nämlich  $U \subset Z$  offen in  $Z$ , dann ist  $G^{-1}(U)$  offen in  $Y$ , und somit ist  $F^{-1}(G^{-1}(U))$  offen in  $X$ . Da also  $(G \circ F)^{-1}(U) = F^{-1}(G^{-1}(U)) \in \mathcal{O}_X$  für alle  $U \in \mathcal{O}_Z$ , ist  $G \circ F$  stetig.

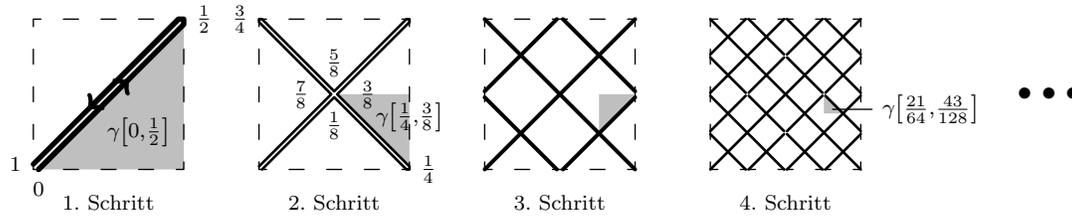


ABBILDUNG 1. Eine flächenfüllende Kurve

Mit einer *Klasse* bezeichnen wir eine beliebige Ansammlung von Mengen. Manche Klassen sind Mengen, alle anderen nennt man echte Klassen. Ein Beispiel für eine echte Klasse ist die Klasse aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Da Elemente von Klassen selbst bloß Mengen und keine echten Klassen sind, erhalten wir hier kein Paradoxon.

1.20. DEFINITION. Eine *Kategorie*  $\mathcal{C}$  besteht aus

- (1) einer Klasse von *Objekten*  $\text{obj}(\mathcal{C})$ ,
- (2) zu je zwei Objekten  $X, Y \in \text{obj}(\mathcal{C})$  einer Menge  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  von *Morphismen*,
- (3) je einem ausgezeichneten Morphismus  $\text{id}_X \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$  für jedes Objekt  $X \in \text{obj}(\mathcal{C})$ ,  
und
- (4) zu je drei Objekten  $X, Y, Z \in \text{obj}(\mathcal{C})$  einer *Verkettung*

$$\circ: \text{hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \quad \text{mit} \quad (f, g) \mapsto g \circ f,$$

so dass die folgenden zwei Axiome gelten.

*Identität.* Seien  $X, Y \in \text{obj}(\mathcal{C})$  und  $f \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ , dann gilt

$$f = f \circ \text{id}_X = \text{id}_Y \circ f.$$

*Assoziativität.* Seien  $X, Y, Z, W \in \text{obj}(\mathcal{C})$  und  $f \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ,  $g \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ ,  $h \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$ , dann gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

1.21. BEISPIEL. Es folgen einige typische Beispiele von Kategorien.

- (1) Die Kategorie *Set* hat als Objekte alle Mengen, und als Morphismen alle Abbildungen zwischen Mengen.
- (2) Die Kategorie *Grp* hat als Objekte alle Gruppen, und als Morphismen alle Gruppenhomomorphismen.
- (3) Sei  $\mathbb{k}$  ein Körper, dann hat die Kategorie  $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$  als Objekte alle  $\mathbb{k}$ -Vektorräume, und als Morphismen alle  $\mathbb{k}$ -linearen Abbildungen.
- (4) Die Kategorie *Top* hat als Objekte alle topologischen Räume, und als Morphismen alle stetigen Abbildungen, siehe Bemerkung 1.19.

In jedem dieser Beispiele ist die Identität die Identität der zugrundeliegenden Menge, und die Komposition die Hintereinanderschaltung von Abbildungen.

Schließlich wollen wir an ein pathologisches Beispiel erinnern, das uns zeigt, dass stetige Abbildungen mitunter unerwartete Eigenschaften an den Tag legen.

1.22. BEISPIEL. Es gibt stetige, surjektive Abbildungen vom Einheitsintervall  $I = [0, 1]$  in die Menge  $I \times I \subset \mathbb{R}^2$ . Zum Beispiel kann man zwei Kopien der Kochschen Schneeflockenkurve aneinandersetzen, siehe Abbildung 1. Die entstehende Kurve  $\gamma$  ist stetig, sogar  $\frac{1}{2}$ -Höldersch. In jedem Schritt  $\gamma_{i+1}$  wird jede Strecke der Kurve  $\gamma_i$  durch vier Strecken der halben Länge ersetzt. Man überzeugt sich, dass die Folge  $(\gamma_i)_i$  gleichmäßig konvergiert. Den Bildpunkt  $\gamma(t)$  kann man durch Intervallschachtelung bestimmen.

Wir können auch verschiedene Topologien auf ein und demselben Raum vergleichen.

1.23. DEFINITION. Seien  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{O}'$  zwei Topologien auf einer Menge  $X$ . Dann ist  $\mathcal{O}'$  *feiner* als  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{O}$  *größer* als  $\mathcal{O}'$ , wenn  $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ .

1.24. BEMERKUNG. Eine Topologie  $\mathcal{O}'$  auf  $X$  ist nach Definition 1.17 genau dann feiner als  $\mathcal{O}$ , wenn die Identität  $\text{id}_X: (X, \mathcal{O}') \rightarrow (X, \mathcal{O})$  stetig ist. Mit Bemerkung 1.19 (2) folgt: Sei die Abbildung  $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  stetig, sei  $\mathcal{O}'_X$  feiner als oder gleich  $\mathcal{O}_X$ , und sei  $\mathcal{O}'_Y$  größer als oder gleich  $\mathcal{O}_Y$ , dann ist auch  $F: (X, \mathcal{O}'_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}'_Y)$  stetig.

1.25. BEISPIEL. Sei  $X = \mathbb{R}^n$ , sei  $\mathcal{O}_d$  die metrische Topologie zur Standardmetrik, und sei  $\mathcal{O}_f$  die Topologie zur französischen Eisenbahnmetrik. Dann ist die diskrete Topologie  $\mathcal{O}_\delta = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  aus Beispiel 1.12 (1) feiner als  $\mathcal{O}_f$ , die Topologie  $\mathcal{O}_f$  ist feiner als  $\mathcal{O}_d$ , und  $\mathcal{O}_d$  ist wiederum feiner als die Klumpentopologie  $\mathcal{O}_K = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$  aus Beispiel 1.12 (2).

### 1.3. Trennungseigenschaften

Wir untersuchen die Frage, ob es in einem topologischen Raum genug offene Mengen gibt, so dass man vorgegebene Punkte oder Teilmengen voneinander „trennen“ kann.

Wir beantworten diese Frage zunächst für metrische Räume. Sei dazu  $I = ([0, 1], \mathcal{O}_d)$  das reelle Einheitsintervall, wie üblich versehen mit der metrischen Topologie.

1.26. SATZ. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann gilt bezüglich  $\mathcal{O}_d$ :

- (1) *einpunktige Teilmengen von  $X$  sind abgeschlossen;*
- (2) *seien  $A_0, A_1 \subset X$  abgeschlossen und disjunkt, dann existieren disjunkte offene Mengen  $U_0, U_1 \in \mathcal{O}$  mit  $A_0 \subset U_0$  und  $A_1 \subset U_1$ ;*
- (3) *seien  $A_0, A_1 \subset X$  abgeschlossen und disjunkt, dann gibt es eine stetige Funktion  $f: X \rightarrow I$  mit  $A_0 = f^{-1}\{0\}$  und  $A_1 = f^{-1}\{1\}$ .*

BEWEIS. Zu (1). Zu zeigen ist die Offenheit von  $X \setminus \{x\}$  für ein beliebiges  $x \in X$ . Sei dazu  $x \neq y \in X$ , dann folgt

$$B_{d(x,y)}(y) \subset X \setminus \{x\}.$$

Also ist  $X \setminus \{x\}$  offen nach 1.4.

(3)  $\longrightarrow$  (2). Wähle  $f$  wie in (3). Da  $f$  stetig ist, sind die Mengen  $U_0 = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$  und  $U_1 = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$  disjunkt und offen in  $X$ , da  $[0, \frac{1}{2})$  und  $(\frac{1}{2}, 1]$  disjunkt und offen in  $I$  sind.

Punkt (3) lassen wir als Übung 1.110. □ □

1.27. DEFINITION. Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{O})$  hat die *Trennungseigenschaft* oder erfüllt das *Trennungsaxiom*

- (T0) wenn es zu je zwei Punkten  $x \neq y$  in  $X$  eine offene Menge  $U \in \mathcal{O}$  gibt mit  $x \in U, y \notin U$  oder  $x \notin U, y \in U$ ,
- (T1) wenn alle einpunktigen Mengen  $\{x\}$  für  $x \in X$  abgeschlossen sind,
- (T2) oder ist ein *Hausdorff-Raum*, wenn es zu je zwei Punkten  $x \neq y$  in  $X$  disjunkte offene Mengen  $U, V \in \mathcal{O}$  mit  $x \in U$  und  $y \in V$  gibt,
- (T3) wenn es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge  $A \subset X$  und jedem Punkt  $x \in X \setminus A$  disjunkte offene Mengen  $U, V \in \mathcal{O}$  mit  $A \subset U$  und  $x \in V$  gibt,
- (T3a) wenn es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge  $A \subset X$  und jedem Punkt  $x \in X \setminus A$  eine stetige Funktion  $f: (X, \mathcal{O}) \rightarrow I$  mit  $f(A) \subset \{0\}$  und  $f(x) = 1$  gibt,
- (T4) wenn es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen  $A, B \subset X$  disjunkte offene Mengen  $U, V \in \mathcal{O}$  mit  $A \subset U$  und  $B \subset V$  gibt.

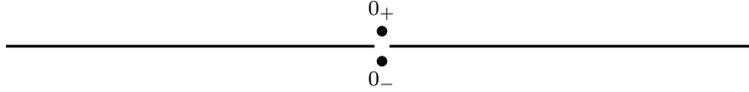


ABBILDUNG 2. Ein nicht Hausdorffscher Raum

Ein topologischer Raum heißt *regulär*, wenn er die Eigenschaften (T1) und (T3) erfüllt, *vollständig regulär*, wenn er die Eigenschaften (T1) und (T3a) erfüllt, und *normal*, wenn er die Eigenschaften (T1) und (T4) erfüllt.

Die für uns zunächst wichtigste Trennungseigenschaft ist „hausdorffsch“. Bemerkung 1.28 und Beispiel 1.29 sollen das verdeutlichen.

1.28. BEMERKUNG. Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum.

- (1) Wenn  $(X, \mathcal{O})$  hausdorffsch ist, dann hat jede Folge in  $X$  höchstens einen Grenzwert. Das heißt, zu jeder Folge  $(x_i)_i$  gibt es höchstens einen Punkt  $x \in X$ , so dass für jede Umgebung  $U$  von  $x$  fast alle Folgenglieder  $x_i$  in  $U$  liegen. Denn wäre  $y \in X \setminus \{x\}$  ein weiterer Grenzwert, so könnte man  $x$  und  $y$  durch disjunkte offene Umgebungen  $U$  und  $V$  trennen, und fast alle Folgenglieder müssten in  $U \cap V = \emptyset$  liegen.
- (2) Wenn sich zwei Punkte  $x, y \in X$  nicht durch disjunkte offene Umgebungen trennen lassen, gilt  $f(x) = f(y)$  für jede stetige Funktion  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Denn wäre  $f(x) \neq f(y)$ , so könnte man  $f(x)$  und  $f(y)$  in  $\mathbb{R}$  durch disjunkte offene Intervalle  $I, J \subset \mathbb{R}$  trennen. Aber dann trennten  $f^{-1}(I)$  und  $f^{-1}(J)$  bereits  $x$  und  $y$ .

1.29. BEISPIEL. Betrachte den Raum  $X = (-1, 0) \cup \{0_+, 0_-\} \cup (0, 1)$  mit der folgenden Topologie  $\mathcal{O}$ . Eine Teilmenge  $U \subset X$  sei offen, wenn zu jedem Punkt  $x \in U \setminus \{0_+, 0_-\}$  ein  $\varepsilon_x > 0$  mit  $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subset U \setminus \{0_+, 0_-\}$  existiert, und falls  $0_- \in U$  oder  $0_+ \in U$ , ein  $\varepsilon_0 > 0$  mit  $(-\varepsilon_0, 0) \cup (0, \varepsilon_0) \subset U$  existiert, siehe Abbildung 2. Man überzeugt sich leicht, dass  $(X, \mathcal{O})$  die Trennungseigenschaften (T0) und (T1) erfüllt. Die Hausdorff-Eigenschaft (T2) ist jedoch verletzt, da der Schnitt je zweier Umgebungen von  $0_+$  und  $0_-$  eine kleine Menge der Form  $(-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon)$  mit  $\varepsilon > 0$  enthält. Als Beispiel für eine Folge mit zwei Grenzwerten betrachten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0_+ \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0_- .$$

Ein wichtiges Hilfsmittel in der Topologie ist das Lemma von Urysohn, wonach jeder (T4)-Raum „viele stetige Funktionen“ trägt.

1.30. LEMMA (Urysohn). Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein (T4)-Raum. Dann existiert zu je zwei abgeschlossenen, disjunkten Teilmengen  $A, B \subset X$  eine stetige Funktion  $f: X \rightarrow I$  mit  $f|_A \equiv 0$  und  $f|_B \equiv 1$ .

BEWEIS. Sei

$$D = \left\{ a 2^{-k} \mid a, k \in \mathbb{N}, 0 \leq a \leq 2^k \right\}$$

die Menge der dyadischen Zahlen im Einheitsintervall  $I$ . Wir wollen induktiv zu allen  $d \in D$  eine offene Menge  $U_d$  konstruieren, so dass  $A \subset \bar{U}_d \subset U_{d'} \subset X \setminus B$  für alle  $d, d' \in D$  mit  $d < d'$ . Für  $t \in I$  definieren wir dann offene Mengen

$$U_t = \bigcup_{d \in D \cap [0, t]} U_d ,$$

und wiederum gilt  $\bar{U}_t \subset U_{t'}$  für alle  $t, t' \in I$  mit  $t < t'$ , da zwischen  $t$  und  $t'$  noch beliebig viele dyadische Zahlen liegen.

Mit  $U_t = \emptyset$  für  $t < 0$  und  $U_t = X$  für  $t > 1$  definieren wir

$$f(x) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid x \in U_t\} \in [0, 1].$$

Aus  $A \subset U_0 \subset U_1 \subset X \setminus B$  folgt sofort  $f|_A \equiv 0$  und  $f|_B \equiv 1$ . Um Stetigkeit zu zeigen, betrachten wir für  $t \in I$  und  $x \in X$  mit  $f(x) = t$  sowie  $\varepsilon > 0$  das Intervall  $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \cap I$ . Sei  $0 < \delta < \varepsilon$ , dann folgt

$$x \in U_{t+\delta} \setminus \overline{U}_{t-\delta} \subset f^{-1}(t - \varepsilon, t + \varepsilon),$$

also ist  $f$  stetig.

Nun zur Konstruktion der Familie  $(U_d)_{d \in D}$ . Zu (T4) äquivalent ist die folgende Aussage: sei  $A \subset Y \subset X$ ,  $A$  abgeschlossen und  $Y$  offen, dann existiert eine offene Menge  $U$ , so dass  $A \subset U \subset \overline{U} \subset Y$ .

Wir wählen also zunächst  $U_0 \in \mathcal{O}$  mit  $A \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset X \setminus B$ , und  $U_1 \in \mathcal{O}$  mit  $\overline{U}_0 \subset U_1 \subset \overline{U}_1 \subset X \setminus B$ . Seien jetzt alle  $U_d$  mit Nenner  $2^k$  bestimmt, dann wählen wir  $U_{(2a+1)2^{-k-1}}$  induktiv so, dass

$$\overline{U}_{a \cdot 2^{-k}} \subset U_{(2a+1)2^{-k-1}} \subset \overline{U}_{(2a+1)2^{-k-1}} \subset U_{(a+1)2^{-k}}. \quad \square$$

1.31. BEMERKUNG. Urysohn's Lemma 1.30 ist nicht ganz so stark wie Satz 1.26 (3), denn dort galt sogar  $f^{-1}(0) = A$  und  $f^{-1}(1) = B$ . Wenn nämlich  $f^{-1}(0) = A$  gilt, dann können wir die abgeschlossene Menge  $A$  als Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen schreiben, etwa

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left[0, \frac{1}{n}\right).$$

Und das muss in allgemeinen (T4)-Räumen nicht gelten.

1.32. BEMERKUNG. Aus Satz 1.26 und den obigen Definitionen ergeben sich die folgenden Implikationen.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{metrisierbar} & \implies & \text{normal} & \implies & \begin{array}{c} \text{vollständig} \\ \text{regulär} \end{array} & \implies & \text{regulär} & \implies & \begin{array}{c} \text{hausdorffsch} \\ \text{(T2)} \end{array} & \implies & \text{(T1)} & \implies & \text{(T0)} \\ & & & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & & & & \\ & & & & \text{(T4)} & & \text{(T3a)} & \implies & \text{(T3)} & & & & & \end{array}$$

Aus metrisierbar folgt normal wegen Satz 1.26. Die drei vertikalen Pfeile beruhen direkt auf den Definitionen. Aus (T3a) folgt (T3) wie (2) aus (3) in Satz 1.26, genauso folgt regulär aus vollständig regulär. Um aus regulär hausdorffsch zu folgern, ersetzen wir die abgeschlossene Menge in (T3) durch einen Punkt, der nach (T1) abgeschlossen ist. Aus normal folgt vollständig regulär mit (T1) und Urysohns Lemma 1.30. Aus hausdorffsch folgt (T1) wie im Beweis von 1.26 (1), und (T1)-Räume sind offensichtlich (T0).

In den Übungen 1.111–1.113 wird deutlich, dass in der Tat die Eigenschaften (T3), (T3a) und (T4) ohne (T1) wenig Aussagekraft besitzen.

#### 1.4. Basen und Abzählbarkeitseigenschaften

Um eine Topologie  $\mathcal{O}$  zu definieren, ist es häufig unbequem, alle offenen Mengen anzugeben. Stattdessen sucht man möglichst kleine Teilmengen  $\mathcal{U}$  von  $\mathcal{O}$ , so dass  $\mathcal{O}$  selbst die größte Topologie ist, für die alle Mengen in  $\mathcal{U}$  offen sind. So wird man auf die Begriffe „Basis“ und „Subbasis“ geführt. Für spätere Überlegungen ist es oft hilfreich zu wissen, dass manche topologischen Räume eine „kleine“ — sprich abzählbare — Basis besitzen.

1.33. DEFINITION. Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum. Eine Teilmenge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$  heißt *Basis* von  $\mathcal{O}$ , wenn

$$\mathcal{O} = \left\{ \bigcup \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \subset \mathcal{B} \right\} = \left\{ \bigcup_{i \in I} U_i \mid I \text{ Menge, } U_i \in \mathcal{B} \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Eine Teilmenge  $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$  heißt *Subbasis* von  $\mathcal{O}$ , wenn die Menge

$$\{ U_1 \cap \dots \cap U_k \mid k \in \mathbb{N}, U_1, \dots, U_k \in \mathcal{S} \}$$

eine Basis von  $\mathcal{O}$  bildet.

Mit anderen Worten:  $\mathcal{B}$  ist eine Basis, wenn sich jede offene Menge als (beliebige) Vereinigung von Elementen aus  $\mathcal{B}$  schreiben lässt.  $\mathcal{S}$  ist eine Subbasis, wenn sich jede offene Menge als (beliebige) Vereinigung von Durchschnitten je endlich vieler Elemente aus  $\mathcal{S}$  schreiben lässt. Insbesondere ist jede Basis auch eine Subbasis.

1.34. BEISPIEL. Es folgen Basen und Subbasen für einige uns wohlbekannte Topologien.

- (1) Sei  $X$  eine Menge. Die einpunktigen Teilmengen von  $X$  bilden eine Basis der diskreten Topologie  $\mathcal{O}_\delta$  auf  $X$ . Die Menge  $\{X\}$  bildet eine Basis der Klumpentopologie  $\mathcal{O}_K$ , und die leere Menge bildet eine Subbasis, denn  $\bigcap \emptyset = X \in \mathcal{P}X$ .
- (2) Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, dann bildet die Menge  $\mathcal{B}$  aller metrischen Bälle mit rationalem Radius eine Basis der metrischen Topologie  $\mathcal{O}_d$ . Sei nämlich  $U \in \mathcal{O}_d$ . Nach Definition 1.4 existiert zu jedem  $x \in U$  ein Radius  $0 < r_x \in \mathbb{Q}$  so dass  $B_{r_x}(x) \subset U$ . Also gilt

$$U = \bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x) \quad \text{und} \quad \{ B_{r_x}(x) \mid x \in U \} \subset \mathcal{B}.$$

Darüberhinaus ist eine Teilmenge  $V \subset X$  genau dann eine Umgebung von  $x \in X$ , wenn sie einen der abzählbar vielen offene Bälle  $B_r(x)$  mit  $0 < r \in \mathbb{Q}$  enthält.

- (3) Sei  $X = \mathbb{R}^n$  mit der Standard-Topologie versehen. Dann bildet die Menge aller metrischen Bälle mit rationalem Radius um Mittelpunkte mit rationalen Koordinaten bereits eine Basis der metrischen Topologie. Diese Basis ist abzählbar, während  $\mathcal{O}$  selbst überabzählbar ist.

Die letzten beiden Beispiele sollen als Motivation für die folgende Definition dienen.

1.35. DEFINITION. Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum. Dann hat  $(X, \mathcal{O})$  die *Abzählbarkeitseigenschaft* oder erfüllt das *Abzählbarkeitsaxiom*

- (A1) wenn jeder Punkt  $x \in X$  eine abzählbare Menge  $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{P}X$  von Umgebungen besitzt, so dass  $V \subset X$  genau dann eine Umgebung von  $x$  ist, wenn es ein  $U \in \mathcal{U}_x$  mit  $U \subset V$  gibt, und
- (A2) wenn  $\mathcal{O}$  eine abzählbare Basis besitzt.

Eine Teilmenge  $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{O}$  wie in (A1) heißt auch *Umgebungsbasis*. Aus (A2) folgt (A1), denn sei  $\mathcal{B}$  eine abzählbare Basis von  $X$  und  $x \in X$ , dann ist

$$\mathcal{U}_x = \{ U \in \mathcal{B} \mid x \in U \}$$

eine abzählbare Umgebungsbasis von  $x$ . Das zweite Abzählbarkeitsaxiom lässt sich benutzen, um topologische Argumente induktiv über kleine Mengen zu führen. Das erste Abzählbarkeitsaxiom wird häufig benötigt, um topologische Begriffe über Folgen zu erklären, so wie im folgenden Satz.

1.36. SATZ. Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum mit der Abzählbarkeitseigenschaft (A1). Dann ist eine Menge  $A \subset X$  genau dann abgeschlossen, wenn sie folgenabgeschlossen ist, das heißt, wenn jede Folge  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  in  $A$ , die in  $X$  konvergiert, ihre Grenzwerte in  $A$  annimmt.

Beachte, dass der Grenzwert einer Folge nicht eindeutig sein muss, wenn der Raum nicht Hausdorff (T2) ist.

BEWEIS. Sei  $A$  abgeschlossen, und sei  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X$  eine Folge mit Grenzwert  $x \in X \setminus A$ . Wir wollen zeigen, dass dann nicht alle  $a_i$  in  $A$  liegen können. Da  $X \setminus A$  eine offene Umgebung von  $a$  ist, existiert ein  $i_0 > 0$ , so dass  $a_i \notin A$  für alle  $i \geq i_0$ .

Sei umgekehrt  $A$  nicht abgeschlossen, das heißt, es gibt einen Punkt  $x \notin A$ , so dass jede Umgebung  $V$  von  $x$  die Menge  $A$  schneidet. Da (A1) gilt, können wir eine abzählbare Umgebungsbasis  $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von  $x$  wählen. Da endliche Durchschnitte offener Mengen offen sind, sind endliche Durchschnitte von Umgebungen von  $x$  wiederum Umgebungen von  $x$ , und wir setzen  $U_i = V_1 \cap \dots \cap V_i$ . Dann ist  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Umgebungsbasis mit der Eigenschaft, dass  $U_j \subset U_i$  für alle  $j \geq i$ . Sei  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $a_i \in A \cap U_i$ . Eine Teilmenge  $V \subset X$  ist Umgebung von  $x$  genau dann, wenn es ein  $i_0$  gibt mit  $U_i \subset V$  für alle  $i \geq i_0$ . Es folgt  $a_i \in V$  für alle  $i \geq i_0$ . Daraus folgt, dass  $x$  ein Grenzwert unserer Folge  $a_i$  ist.  $\square$

1.37. BEMERKUNG. Für allgemeine metrisierbare Räume gilt nur (A1), siehe Beispiel 1.34 (2). Es gilt aber der *erste Metrisationssatz von Urysohn*: Wenn  $(X, \mathcal{O})$  die zweite Abzählbarkeitseigenschaft (A2) hat, dann ist  $(X, \mathcal{O})$  genau dann metrisierbar, wenn  $(X, \mathcal{O})$  regulär ist, also (T1) und (T3) erfüllt. Man beachte, dass  $(X, \mathcal{O})$  nach Satz 1.26 dann sogar normal ist.

Die allgemeinen Metrisationssätze von Bing und Nagata-Smirnov geben ein genaues topologisches Äquivalent zur Metrisierbarkeit, sind aber leider nicht ganz so einfach zu formulieren.

Wir können eine Subbasis oder Basis aber auch dazu verwenden, eine Topologie zu definieren.

1.38. SATZ. Sei  $X$  eine Menge, und seien  $\mathcal{B}, \mathcal{S} \subset \mathcal{P}X$  beliebig.

- (1) Wenn für je endlich viele  $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}$  mit  $k \geq 0$  eine Untermenge  $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$  existiert, so dass  $B_1 \cap \dots \cap B_k = \bigcup \mathcal{U}$ , dann existiert eine eindeutige Topologie  $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$  auf  $X$  mit Basis  $\mathcal{B}$ . Wir nennen  $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$  die durch die Basis  $\mathcal{B}$  definierte Topologie.
- (2) Es existiert eine eindeutige Topologie  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$  auf  $X$  mit Subbasis  $\mathcal{S}$ . Sei  $\mathcal{O}_X$  eine beliebige Topologie auf  $X$  mit  $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}_X$ , dann gilt  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}} \subset \mathcal{O}_X$ . Wir nennen  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$  die durch die Subbasis  $\mathcal{S}$  definierte Topologie.

Insbesondere ist  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$  die *kleinste* oder *größte* Topologie auf  $X$ , bezüglich der alle Mengen der Subbasis  $\mathcal{S}$  offen sind.

BEWEIS. Zu (1). Die Menge  $\mathcal{O} = \{ \bigcup \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \subset \mathcal{B} \}$  enthält  $\emptyset = \bigcup \emptyset$  und erfüllt Axiom (3) in Definition 1.10. Nach Voraussetzung gilt  $X = \bigcap \emptyset \subset \mathcal{O}$ , somit ist auch Axiom (1) erfüllt. Um Axiom (2) zu zeigen, seien  $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k \subset \mathcal{B}$ , dann folgt

$$\left( \bigcup \mathcal{U}_1 \right) \cap \dots \cap \left( \bigcup \mathcal{U}_k \right) = \bigcup_{U_1 \in \mathcal{U}_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}_k} U_1 \cap \dots \cap U_k.$$

Nach Voraussetzung gilt  $U_1 \cap \dots \cap U_k \in \mathcal{O}$  für alle Terme auf der rechten Seite, und da Axiom (3) gilt, auch für deren Vereinigung. Also ist  $\mathcal{O}$  eine Topologie.

Man sieht leicht, dass jede Topologie  $\mathcal{O}'$ , die  $\mathcal{B}$  enthält, alle offenen Mengen aus  $\mathcal{O}$  enthalten muss, also folgt  $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ . Wäre umgekehrt  $U \in \mathcal{O}' \setminus \mathcal{O}$ , dann liesse  $U$  sich nicht als Vereinigung von Elementen aus  $\mathcal{O}$  schreiben,  $\mathcal{B}$  wäre dann also keine Basis von  $\mathcal{O}'$ . Also ist  $\mathcal{O}_{\mathcal{B}} = \mathcal{O}$  die einzige Topologie mit Basis  $\mathcal{B}$ .

Zu (2) setze

$$\mathcal{B} = \{ U_1 \cap \dots \cap U_k \mid k \geq 0, U_1, \dots, U_k \in \mathcal{S} \},$$

dann erfüllt  $\mathcal{B}$  die Voraussetzung von (1) und definiert eine Topologie  $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$  mit Subbasis  $\mathcal{S}$ . Wie unter (1) lässt sich zeigen, dass das die einzige Topologie auf  $X$  mit Subbasis  $\mathcal{S}$  ist; in der Tat enthält jede Topologie  $\mathcal{O}_X$  mit  $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}_X$  bereits  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ .  $\square$

## 1.5. Konstruktionen topologischer Räume

In diesem Abschnitt lernen wir, wie man aus bekannten topologischen Räumen neue topologische Räume gewinnen kann.

Sei  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie von Mengen, dann bezeichne  $\coprod_i X_i$  die disjunkte Vereinigung dieser Mengen, und  $\iota_i: X_i \hookrightarrow \coprod_i X_i$  sei die Inklusion der Menge  $X_i$  in die disjunkte Vereinigung. Da die Mengen  $X_i$  nicht immer paarweise disjunkt sind, müssen wir die disjunkte Vereinigung beliebiger Mengen erst konstruieren, zum Beispiel wie folgt:

$$\coprod_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} \{i\} \times X_i \subset I \times \bigcup_{i \in I} X_i \quad \text{und} \quad \iota_i(x_i) = (i, x_i).$$

1.39. DEFINITION. Sei  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume. Die *topologische Summe* der  $X_i$  ist definiert als

$$\coprod_i (X_i, \mathcal{O}_i) = \left( \coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup \right) \quad \text{mit} \quad \mathcal{O}_\sqcup = \left\{ U \subset \coprod_i X_i \mid \iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Wenn wir  $X_i$  mit der Teilmenge  $\iota_i(X_i) \subset \coprod_i X_i$  identifizieren, dann ist  $U \subset \coprod_i X_i$  genau dann offen, wenn  $U \cap X_i$  für alle  $i \in I$  in  $X_i$  offen ist.

Wir überprüfen, dass  $\mathcal{O}_\sqcup$  eine Topologie ist. Dazu nutzen wir elementare Eigenschaften der Urbild-Abbildung  $\iota_i^{-1}$  aus, nämlich

$$\begin{aligned} \iota_i^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \in \mathcal{O}_i, & \iota_i^{-1}(X) &= X_i \in \mathcal{O}_i, \\ \iota_i^{-1}(U_i \cap \dots \cap U_k) &= \iota_i^{-1}(U_i) \cap \dots \cap \iota_i^{-1}(U_k) \in \mathcal{O}_i & \text{und} & \quad \iota_i^{-1}\left(\bigcup \mathcal{U}\right) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i \end{aligned}$$

für  $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{O}$  und  $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ .

1.40. SATZ. Sei  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume.

- (1) Die Topologie  $\mathcal{O}_\sqcup$  ist die feinste Topologie auf der disjunkten Vereinigung  $\coprod_i X_i$ , für die alle Abbildungen  $\iota_i: X_i \hookrightarrow \coprod_i X_i$  stetig sind.
- (2) Die Topologie  $\mathcal{O}_\sqcup$  ist die einzige Topologie  $\mathcal{O}$  auf  $\coprod_i X_i$ , so dass eine beliebige Abbildung  $F$  von  $(\coprod_i X_i, \mathcal{O})$  in einen beliebigen topologischen Raum  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  genau dann stetig ist, wenn alle Abbildungen  $F \circ \iota_i: (X_i, \mathcal{O}_i) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$  stetig sind.
- (3) Der Raum  $(\coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup)$  zusammen mit den Abbildungen  $(\iota_i: X_i \rightarrow \coprod_i X_i)_{i \in I}$  ist ein Koproduct der Räume  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$  in der Kategorie  $\mathbf{Top}$ , das heißt, zu jedem Objekt  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  und jeder Familie von Morphismen  $(F_i: (X_i, \mathcal{O}_i) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z))_{i \in I}$  existiert genau ein Morphismus  $F: \coprod_i X_i \rightarrow Z$ , so dass  $F_i = F \circ \iota_i$  für alle  $i \in I$ .

1.41. BEMERKUNG. Die charakteristische Eigenschaft (2) der topologischen Summe wird durch das linke kommutative Diagramm veranschaulicht.

$$\begin{array}{ccc} (X_i, \mathcal{O}_i) & \xrightarrow{F \circ \iota_i} & (Z, \mathcal{O}_Z) \\ \iota_i \downarrow & \nearrow F & \\ (\coprod_i X_i, \mathcal{O}) & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (X_i, \mathcal{O}_i) & \xrightarrow{F_i} & (Z, \mathcal{O}_Z) \\ \iota_i \downarrow & \dashrightarrow F & \\ (Y, \mathcal{O}_Y) & & \end{array} \quad (1.42)$$

Ein Raum  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  mit stetigen Abbildungen  $\iota_i: X_i \rightarrow Y$  ist genau dann ein *Koproduct* im Sinne von Satz 1.40 (3), wenn zu jedem Raum  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  mit stetigen Abbildungen  $F_i: X_i \rightarrow Z$  genau eine stetige Abbildung  $F$  wie im rechten Diagramm existiert.

Wie bei vielen universellen Konstruktionen folgt, dass das Koprodukt bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt ist durch (3). Wenn also ein anderer Raum  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  mit Abbildungen  $(\eta_i: X_i \rightarrow Y)_i$  die Koprodukteigenschaft erfüllt, dann gibt es genau einen Homöomorphismus  $G: \coprod_i X_i \rightarrow Y$  mit  $\eta_i = G \circ \iota_i$  für alle  $i$ . Dazu betrachten wir die folgenden vier Diagramme.

$$\begin{array}{ccc}
(X_i, \mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\eta_i} & (Y, \mathcal{O}_Y) \\
\downarrow \iota_i & \nearrow G & \\
(\coprod_i X_i, \mathcal{O}) & & 
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
(X_i, \mathcal{O}_i) & \xleftarrow{\iota_i} & (\coprod_i X_i, \mathcal{O}) \\
\downarrow \eta_i & \nearrow H & \\
(Y, \mathcal{O}_Y) & & 
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(X_i, \mathcal{O}_i) & \xleftarrow{\iota_i} & (\coprod_i X_i, \mathcal{O}) \\
\downarrow \iota_i & \nearrow \text{id} & \\
(\coprod_i X_i, \mathcal{O}) & & 
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
(X_i, \mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\eta_i} & (Y, \mathcal{O}_Y) \\
\downarrow \eta_i & \nearrow \text{id} & \\
(Y, \mathcal{O}_Y) & & 
\end{array}$$

Die ersten beiden Diagramme zeigen die Existenz eindeutiger Abbildungen  $G$  und  $H$ , die letzten zwei Diagramme zeigen, dass  $H = G^{-1}$ , so dass  $G$  in der Tat ein Homöomorphismus ist. Da dieser Homöomorphismus stets eindeutig ist, kann man mit seiner Hilfe je zwei verschiedene Modelle für das Koprodukt miteinander identifizieren.

BEWEIS des Satzes 1.40. Zu (1) sei  $\mathcal{O}$  eine beliebige Topologie auf  $\coprod_i X_i$ . Es sind genau dann alle Inklusionsabbildungen  $\iota_i: X_i \rightarrow \coprod_i X_i$  stetig, wenn

$$\iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i \quad \text{für alle } U \in \mathcal{O} \text{ und alle } i \in I$$

gilt, wenn also  $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_\sqcup$ .

Zu (2) seien  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  und  $F: (\coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$  wie im Satz vorgegeben. Wenn  $F$  stetig ist, sind alle Abbildungen  $F \circ \iota_i$  stetig, da  $\iota_i$  nach (1) stetig ist.

Seien jetzt alle Abbildungen  $F \circ \iota_i$  stetig, und sei  $U \subset Z$  offen, dann ist

$$\iota_i^{-1}(F^{-1}(U)) = (F \circ \iota_i)^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i$$

offen in  $X_i$  für alle  $i \in I$ . Nach Definition 1.39 gilt  $F^{-1}(U) \in \mathcal{O}_\sqcup$ , also ist  $F$  stetig.

Zur Eindeutigkeit sei  $\mathcal{O}$  eine weitere Topologie auf  $\coprod_i X_i$  mit der in (2) geforderten Eigenschaft. Für alle topologischen Räume  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  ist also jede Abbildung  $F: \coprod_i X_i \rightarrow Z$  genau dann stetig, wenn  $F \circ \iota_i$  für alle  $i \in I$  stetig ist. Wir wählen  $Z = \coprod_i X_i$  mit verschiedenen Topologien und  $F = \text{id}$  und schließen wie folgt. Da

$$\text{id}: \left( \coprod_i X_i, \mathcal{O} \right) \rightarrow \left( \coprod_i X_i, \mathcal{O} \right)$$

stetig ist, sind alle

$$\iota_i = \text{id} \circ \iota_i: (X_i, \mathcal{O}_i) \rightarrow \left( \coprod_i X_i, \mathcal{O} \right)$$

stetig, und nach (1) ist  $\mathcal{O}$  gröber als  $\mathcal{O}_\sqcup$ . Da nach (1) alle

$$\text{id} \circ \iota_i: (X_i, \mathcal{O}_i) \rightarrow \left( \coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup \right)$$

stetig sind, ist auch

$$\text{id}: \left( \coprod_i X_i, \mathcal{O} \right) \rightarrow \left( \coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup \right)$$

stetig. Also ist  $\mathcal{O}$  nach Bemerkung 1.24 feiner als  $\mathcal{O}_\sqcup$ . Insgesamt folgt also  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\sqcup$  wie behauptet.

Zu (3) seien  $f_i: X_i \rightarrow Z$  stetig. Die einzige Abbildung  $f: \prod_i X_i \rightarrow Z$  mit  $f \circ \iota_i = f_i$  für alle  $i$  wird gegeben durch

$$f(i, x_i) = f_i(x_i),$$

und  $f$  ist stetig nach (2). □

Als nächstes wollen wir Unterräume topologischer Räume betrachten.

1.43. DEFINITION. Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein topologischer Raum, und sei  $Y \subset X$ . Die *Unterraumtopologie* (auch *Relativ-, Spur- oder induzierte Topologie*)  $\mathcal{O}_Y$  ist definiert durch

$$\mathcal{O}_Y = \{ Y \cap U \mid U \in \mathcal{O}_X \}.$$

Man überlegt sich, dass  $\mathcal{O}_Y$  eine Topologie ist, denn

$$\emptyset = Y \cap \emptyset \in \mathcal{O}_Y, \quad Y = Y \cap X \in \mathcal{O}_Y,$$

$$(Y \cap U_1) \cap \cdots \cap (Y \cap U_k) = Y \cap (U_1 \cap \cdots \cap U_k) \in \mathcal{O}_Y \quad \text{und} \quad \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (Y \cap U) = Y \cap \bigcup U$$

für alle  $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{O}_X$  und  $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_X$ .

Auch die Unterraumtopologie wird durch eine Eigenschaft charakterisiert.

1.44. SATZ. Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein topologischer Raum und sei  $Y \subset X$  versehen mit der Unterraumtopologie  $\mathcal{O}_Y$ . Dann gilt:

- (1)  $\mathcal{O}_Y$  ist die grösste Topologie auf  $Y$ , für die die Inklusion  $\iota: Y \hookrightarrow X$  stetig ist.
- (2)  $\mathcal{O}_Y$  ist die einzige Topologie, für die eine Abbildung  $F$  von einem beliebigen topologischen Raum  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  nach  $Y$  genau dann stetig ist, wenn die Abbildung  $\iota \circ F: Z \rightarrow X$  stetig ist.

BEWEIS. Da  $\iota^{-1}(U) = U \cap Y$  gilt, folgt (1) bereits aus der Definition von  $\mathcal{O}_Y$ .

Zu (2) sei zunächst  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  ein beliebiger topologischer Raum, und sei  $F: Z \rightarrow Y$  eine Abbildung. Für eine offene Menge  $V = U \cap Y \in \mathcal{O}_Y$  gilt

$$F^{-1}(V) = F^{-1}(\iota^{-1}(U)) = (\iota \circ F)^{-1}(U),$$

also ist  $F$  genau dann stetig bezüglich  $\mathcal{O}_Y$ , wenn  $\iota \circ F$  stetig ist bezüglich  $\mathcal{O}_X$ .

Um zu zeigen, dass  $\mathcal{O}_Y$  die einzige Topologie mit dieser Eigenschaft ist, wählen wir eine beliebige Topologie  $\mathcal{O}$  auf  $Y$ , die die in (2) geforderte Eigenschaft besitzt. Wir machen weiter wie im Beweis von Satz 1.40. Da  $\text{id}: (Y, \mathcal{O}) \rightarrow (Y, \mathcal{O})$  stetig ist, ist auch  $\iota = \iota \circ \text{id}: (Y, \mathcal{O}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$  stetig, und nach (1) ist  $\mathcal{O}$  feiner als  $\mathcal{O}_Y$ . Umgekehrt ist  $\iota = \iota \circ \text{id}: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$  stetig, also ist auch  $\text{id}: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (Y, \mathcal{O})$  stetig, und  $\mathcal{O}$  ist gröber als  $\mathcal{O}_Y$  nach Bemerkung 1.24. Also stimmen  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{O}_Y$  überein. □

1.45. DEFINITION. Seien  $(X, \mathcal{O}_X)$  und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  topologische Räume. Eine *Einbettung* von  $X$  nach  $Y$  ist eine injektive Abbildung  $F: X \hookrightarrow Y$ , so dass die induzierte Abbildung von  $(X, \mathcal{O}_X)$  nach  $F(X) \subset Y$  mit der Unterraumtopologie ein Homöomorphismus ist.

Wir betrachten jetzt die Produkttopologie. Dazu bezeichnen wir mit

$$\prod_i X_i = \{ (x_i)_{i \in I} \mid x_i \in X_i \}$$

das kartesische Produkt einer Familie  $(X_i)_{i \in I}$  von topologischen Räumen über einer beliebigen Indexmenge  $I$ , und mit  $\pi_i: X \rightarrow X_i$  die Projektion auf die  $i$ -te Komponente.

1.46. DEFINITION. Sei  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume. Das *topologische Produkt* der  $X_i$  ist definiert als

$$\prod_i (X_i, \mathcal{O}_i) = \left( \prod_i X_i, \mathcal{O}_{\prod} \right),$$

wobei  $\mathcal{O}_\square$  erzeugt wird von der Subbasis

$$\mathcal{S}_\square = \bigcup_{i \in I} \{ \pi_i^{-1}(U_i) \mid U_i \in \mathcal{O}_i \}.$$

Da wir  $\mathcal{O}_\square$  über mit Hilfe einer Subbasis erklärt haben, wissen wir aus Satz 1.38, dass  $\mathcal{O}_\square$  eine Topologie ist. Ein endlicher Durchschnitt von Mengen aus  $\mathcal{S}_\square$  hat die Gestalt

$$\prod_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(U_i) \quad \text{mit } U_i \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I \text{ und } U_i = X_i \text{ für fast alle } i \in I.$$

Mit anderen Worten: eine Teilmenge  $U \subset \prod_i X_i$  ist genau dann offen, wenn jeder Punkt  $x$  eine Umgebung der obigen Form hat. Auch hier haben wir wieder eine universelle Eigenschaft.

1.47. SATZ. Sei  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume.

- (1) Die Topologie  $\mathcal{O}_\square$  ist die grösste Topologie auf  $\prod_i X_i$ , für die alle Abbildungen  $\pi_i: \prod_i X_i \rightarrow X_i$  stetig sind.
- (2) Die Topologie  $\mathcal{O}_\square$  ist die einzige Topologie  $\mathcal{O}$  auf dem kartesischen Produkt  $\prod_i X_i$ , so dass eine Abbildung  $G$  von einem beliebigen topologischen Raum  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  in das Produkt  $\prod_i X_i$  genau dann stetig ist, wenn die Abbildungen  $\pi_i \circ G$  für alle  $i \in I$  stetig sind.
- (3) Der Raum  $(\prod_i X_i, \mathcal{O}_\square)$  zusammen mit den Abbildungen  $(\pi_i: \prod_i X_i \rightarrow X_i)_{i \in I}$  ist ein Produkt in der Kategorie  $\mathcal{Top}$ , das heißt, zu jedem topologischen Raum  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  und jeder Familie stetiger Abbildungen  $(G_i: Z \rightarrow X_i)_{i \in I}$  existiert genau eine stetige Abbildung  $G: Z \rightarrow Y$ , so dass  $G_i = \pi_i \circ G$  für alle  $i \in I$ .

1.48. BEMERKUNG. Die charakterisierende Eigenschaft (2) des Produkts wird durch das linke Diagramm veranschaulicht.

$$\begin{array}{ccc}
 & (\prod_i X_i, \mathcal{O}) & \\
 G \nearrow & \downarrow \pi_i & \\
 (Z, \mathcal{O}_Z) & \xrightarrow{\pi_i \circ G} & (X_i, \mathcal{O}_i)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & (Y, \mathcal{O}_Y) & \\
 G \dashrightarrow & \downarrow \eta_i & \\
 (Z, \mathcal{O}_Z) & \xrightarrow{G_i} & (X_i, \mathcal{O}_i)
 \end{array}
 \tag{1.49}$$

Ein Raum  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  mit stetigen Abbildungen  $\eta_i: Y \rightarrow X_i$  ist genau dann ein Produkt im Sinne von Satz 1.47 (3), wenn für alle  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  mit stetigen Abbildungen  $G_i: Z \rightarrow X_i$  genau eine stetige Abbildung  $G$  wie im rechten Diagramm existiert.

Das Produkt ist ebenfalls bis auf eindeutige Isomorphismen eindeutig bestimmt. Da sich die beiden Diagramme in (1.42) und (1.49) jeweils nur in der Richtung der Pfeile unterscheiden, sagt man, die beiden Konstruktionen in den Definitionen 1.39 und 1.46 seien zueinander *dual*. Daher rührt die Wahl der Bezeichnungen und der Symbole „ $\prod$ “ und „ $\coprod$ “.

Man beachte, dass (geeignet formulierte) universelle Eigenschaften wie in Satz 1.40 (3) oder Satz 1.47 (3) zwar die Eindeutigkeit der beschriebenen Objekte (bis auf eindeutige Isomorphismen) garantieren können, aber nicht die Existenz. Man muss also für jede Kategorie (wie  $\mathcal{Set}$ ,  $\mathcal{Top}$  oder  $\mathcal{Vec}_k$ ) erst beweisen, dass sie Produkte und Koprodukte enthält.

BEWEIS von Satz 1.47. Die Subbasis  $\mathcal{S}_\square$  enthält genau die Urbilder der offenen Teilmengen von  $X_i$  unter den Abbildungen  $\pi_i$ . Also sind alle  $\pi_i$  bezüglich einer Topologie  $\mathcal{O}$  auf  $\prod_{i \in I} X_i$  genau dann stetig, wenn  $\mathcal{O}_\square \subset \mathcal{O}$ , und es folgt Behauptung (1).

Zu (2) sei  $G$  stetig. Dann sind auch die Abbildungen  $\pi_i \circ G$  stetig nach (1).

Seien umgekehrt alle Abbildungen  $\pi_i \circ G$  stetig. Da die Abbildung  $G^{-1}: \mathcal{P}(\prod_i X_i) \rightarrow \mathcal{P}Z$  mit Vereinigungen und Durchschnitten vertauscht, folgt Stetigkeit von  $G$  bereits, wenn  $G^{-1}(U) \in \mathcal{O}_Z$  nur für alle  $U \in \mathcal{S}_\square$  gilt. Aber

$$G^{-1}(\pi_i^{-1}(U_i)) = (\pi_i \circ G)^{-1}U_i \in \mathcal{O}_Z$$

wegen Stetigkeit der Abbildungen  $\pi_i \circ G$ .

Der Beweis der Eindeutigkeit ist völlig analog zu den Beweisen der Sätze 1.40 (2) und 1.44 (2). Behauptung (3) folgt wie in Satz 1.40 (3) aus der entsprechenden Eigenschaft des kartesischen Produkts und (2).  $\square$

1.50. BEMERKUNG. Eine andere natürliche Topologie auf  $\prod_i X_i$  ist die *Box-Topologie*  $\mathcal{O}_\square$  mit Basis

$$\mathcal{B}_\square = \left\{ \prod_{i \in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Wenn die Indexmenge  $I$  unendlich ist und unendlich viele  $X_i$  nicht die Klumpentopologie tragen, ist  $\mathcal{O}_\square$  echt feiner als  $\mathcal{O}_\square$ . Diese Topologie hat leider nicht so schöne Eigenschaften wie  $\mathcal{O}_\square$ , obwohl sie auf den ersten Blick einfacher aussieht.

Wir sagen, dass eine topologische Eigenschaft  $E$  (wie etwa eine Trennungs- oder Abzählbarkeits-eigenschaft) unter einer Konstruktion (wie etwa dem Produkt, der disjunkten Vereinigung oder der Unterraumkonstruktion) *vererbt* wird, wenn immer dann, wenn alle zugrundeliegenden Topologien die Eigenschaft  $E$  haben, auch die neu konstruierte Topologie diese Eigenschaft hat.

- 1.51. SATZ. (1) *Die Trennungseigenschaften (T0) – (T4) und (T3a) und die Abzählbarkeitseigenschaft (A1) werden unter der disjunkten Vereinigung vererbt, die Eigenschaft (A2) wird vererbt, wenn die Indexmenge höchstens abzählbar ist.*  
(2) *Es werden (T0) – (T3), (T3a), (A1) und (A2) unter Unterraumbildung vererbt.*  
(3) *Es werden (T0) – (T3), (T3a) unter Produkten vererbt. Die Abzählbarkeitseigenschaften (A1) und (A2) werden vererbt, wenn die Indexmenge höchstens abzählbar ist.*

BEWEIS. Zu (1) kann man die in den Trennungsaxiomen (T0) – (T4) gesuchten offenen Mengen  $U$  und  $V \subset \prod_{i \in I} X_i$  konstruieren, in dem man für alle  $i \in I$  offene Teilmengen  $\iota_i^{-1}(U)$ ,  $\iota_i^{-1}(V) \subset X_i$  angibt. Analog konstruiert man die in (T3a) gesuchte Funktion, indem man stetige Funktionen auf jedem  $X_i$  definiert und diese mit der universellen Eigenschaft aus Satz 1.40 (3) auf  $\prod_{i \in I} X_i$  zusammensetzt.

Sei  $x = \iota_j(x_j) \in \iota_j(X_j) \subset \prod_{i \in I} X_i$ , und sei  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X_j)$  eine abzählbare Umgebungsbasis von  $x_j$  in  $X_j$ , dann ist  $\iota_j(\mathcal{U}) \subset \mathcal{P}(\prod_{i \in I} X_i)$  eine abzählbare Umgebungsbasis von  $x$  in der disjunkten Vereinigung, also wird (A1) vererbt. Wenn  $I$  abzählbar ist und  $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{O}_i$  eine abzählbare Basis von  $\mathcal{O}_i$  für alle  $i \in I$ , dann ist

$$\bigcup_{i \in I} \iota_i(\mathcal{B}_i) \subset \mathcal{O}_\square$$

eine abzählbare Basis der disjunkten Vereinigung.

Zu (2) betrachten wir nur (T3) und (T3a), die anderen Trennungsaxiome lassen sich analog beweisen. Sei also  $A \subset Y$  abgeschlossen in der Unterraumtopologie auf  $Y \subset X$ . Dann lässt sich  $Y \setminus A$  zu einer offenen Teilmenge von  $X$  fortsetzen, deren Komplement  $B$  in  $X$  abgeschlossen ist mit  $A = Y \cap B$ . Sei  $y \in Y \setminus A \subset X \setminus B$ . Wir nehmen an, dass (T3) in  $X$  gilt und finden disjunkte offene Mengen  $U, V \subset X$  mit  $y \in U$ ,  $B \subset V$ . Dann sind  $Y \cap U$  und  $Y \cap V$  in  $Y$  offen und disjunkt und trennen  $y$  und  $A$ . Zu (T3a) betrachte  $A, B$  und  $y$  wie oben. Wenn es eine Funktion  $f: X \rightarrow [0, 1]$  mit  $B \subset f^{-1}(0)$  und  $f(y) = 1$  gibt, dann ist  $f|_Y$  stetig nach Satz 1.44 (2) und trennt  $y$  und  $A$  in  $Y$ .

Sei  $\mathcal{U}_x$  abzählbare Umgebungsbasis von  $x \in Y \subset X$  in  $X$ , dann ist

$$\{Y \cap U \mid U \in \mathcal{U}_x\} \subset \mathcal{P}(Y)$$

eine abzählbare Umgebungsbasis von  $x$  in  $Y$ . Genauso überträgt sich (A2) von  $X$  auf den Unterraum  $Y$ .

Zu (3) betrachten wir wieder nur (T3) und (T3a), die anderen Trennungsaxiome funktionieren analog. Ein Raum  $(Y, \mathcal{O}_y)$  erfüllt (T3) genau dann, wenn es zu jeder Umgebung  $U$  von  $y \in Y$  eine

abgeschlossene Umgebung  $A$  mit  $y \in A \subset U$  gibt. Denn wenn (T3) gilt und  $U$  Umgebung von  $y$  ist, dann ist auch das Innere  $\mathring{U}$  Umgebung von  $y$ . Wir trennen  $B = Y \setminus \mathring{U}$  von  $y$  durch disjunkte offene Mengen  $V, W \subset X$ . Dann ist  $Y \setminus V$  abgeschlossene Umgebung, da  $y \in W \subset Y \setminus V$ , und es gilt  $Y \setminus V \subset \mathring{U} = Y \setminus B \subset U$ . Die Umkehrung gilt analog.

Sei also  $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$  und sei  $U$  Umgebung von  $x$ . Nach Definition 1.46 und der Konstruktion im Beweis von Satz 1.38 (2) existieren  $U_{i_1} \in \mathcal{O}_{i_1}, \dots, U_{i_k} \in \mathcal{O}_{i_k}$  mit

$$x \in \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \subset U \quad (*)$$

Nach unserer obigen Überlegung existieren abgeschlossene Umgebungen  $A_{i_j} \subset U_{i_j}$  von  $x_{i_j}$ , und

$$\pi_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(A_{i_k}) \subset U$$

ist eine abgeschlossene Umgebung von  $x$  in  $\prod_{i \in I} X_i$ . Also gilt (T3).

Zu (T3a) sei  $x \in \prod_{i \in I} X_i$  wie oben und  $B \subset \prod_{i \in I} X_i$  abgeschlossen. Setze  $U = \prod_{i \in I} X_i \setminus B$ . Dann existieren  $U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$  wie in (\*). Also gibt es Funktionen

$$f_{i_j}: X_{i_j} \rightarrow [0, 1] \quad \text{mit} \quad f_{i_j}|_{X_{i_j} \setminus U_{i_j}} = 0 \quad \text{und} \quad f_{i_j}(x_{i_j}) = 1.$$

Dann sind die  $f_{i_j} \circ \pi_{i_j}$  nach Satz 1.47 (2) stetig, und

$$f = \min(f_{i_1} \circ \pi_{i_1}, \dots, f_{i_k} \circ \pi_{i_k}): \prod_{i \in I} X_i \rightarrow [0, 1]$$

ist als Minimum endlich vieler stetiger Funktionen wieder stetig mit  $f(x) = 1$  und

$$B \subset X \setminus (\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k})) \subset f^{-1}(0).$$

Sei schließlich  $I$  höchstens abzählbar und  $\mathcal{B}_i$  eine abzählbare Basis von  $\mathcal{O}_i$ . Dann erhalten wir eine abzählbare Subbasis

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1} \mathcal{B}_i$$

von  $\mathcal{O}_\square$ , denn jedes Element  $\pi_i^{-1}(U)$  von  $\mathcal{S}_\square$  lässt sich als Vereinigung von Elementen aus  $\mathcal{S}$  schreiben. Dann ist aber auch die Basis

$$\mathcal{B} = \{U_1 \cap \dots \cap U_k \mid k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } U_1, \dots, U_k \in \mathcal{S}\}$$

von  $\mathcal{O}_\square$  abzählbar. Also wird (A2) und analog auch (A1) unter abzählbaren Produkten vererbt.  $\square$

Normalität wird unter Produkten und Unterräumen nicht vererbt, also auch nicht (T4). Die Gegenbeispiele können keine metrischen Räume sein, da sich Metriken auf Unterräume und endliche Produkte übertragen lassen (Übungen 1.117, 1.118), womit diese nach Satz 1.26 wieder normal sind. Dann dürfen unsere Räume auch (A2) nicht erfüllen, da sie sonst nach Bemerkung 1.37 metrisierbar wären. Wir besprechen diese Gegenbeispiele daher nicht hier, sondern verweisen auf [Q].

## 1.6. Kompaktheit

Wir erinnern uns, dass abgeschlossene Intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  viele schöne Eigenschaften haben: stetige Funktionen  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  besitzen auf  $I$  ein Maximum und ein Minimum, und jede Folge  $(x_i)_i$  in  $I$  hat mindestens einen Häufungspunkt. Der Grund dafür ist der Satz von Heine-Borel, nach dem abgeschlossene Intervalle kompakt sind.

Wir lernen drei mögliche Definitionen von Kompaktheit kennen. Eine *offene Überdeckung* eines topologischen Raumes  $(X, \mathcal{O})$  ist eine Teilmenge  $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$  mit  $\bigcup \mathcal{U} = X$ . Ein Punkt  $x \in X$  ist *Häufungspunkt* einer Folge  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  in jeder Umgebung von  $x$  ein  $x_i$  liegt mit  $i \geq n$ . Insbesondere sind Grenzwerte von Teilfolgen immer Häufungspunkte.

1.52. DEFINITION. Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum. Dann heißt  $X$

- (1) *quasikompakt*, wenn es zu jeder offenen Überdeckung  $\mathcal{U}$  eine endliche Teilüberdeckung gibt, das heißt, eine Menge  $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$  mit  $\bigcup \mathcal{U}_0 = X$ ,
- (2) *kompakt*, wenn er Hausdorffsch und quasikompakt ist,
- (3) *abzählbar kompakt*, wenn  $X$  Hausdorffsch ist und es zu jeder abzählbaren offenen Überdeckung  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine endliche Teilüberdeckung gibt, das heißt,  $X = \bigcup_{i=0}^N U_i$  für ein  $N \in \mathbb{N}$ , und
- (4) *folgenkompakt*, wenn  $X$  Hausdorffsch ist und jede Folge  $x_i \in X$  eine konvergente Teilfolge besitzt.

In der Literatur wird teilweise die Hausdorff-Eigenschaft in (2)–(4) nicht verlangt. Wir halten uns hier an **[Q]**.

1.53. BEMERKUNG. Es folgen einige wohlbekannte Eigenschaften kompakter Mengen.

- (1) Abgeschlossene Unterräume eines (abzählbar / folgen-) kompakten Raumes sind wieder (abzählbar / folgen-) kompakt. Denn sei etwa  $X$  kompakt,  $A \subset X$  abgeschlossen und  $\mathcal{V}$  eine offene Überdeckung von  $A$ , dann existiert  $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_X$  mit

$$\mathcal{V} = \{ U \cap A \mid U \in \mathcal{U} \}.$$

Dann ist aber  $\mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$  offene Überdeckung von  $X$ , und eine endliche Teilüberdeckung  $\mathcal{U}'$  liefert uns auch eine endliche Teilüberdeckung von  $A$ , nämlich

$$\{ U \cap A \mid U \in \mathcal{U}' \}.$$

- (2) Es sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  (abzählbar / folgen-) kompakt,  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  ein Hausdorff-Raum und  $F: X \rightarrow Y$  stetig, dann ist das Bild  $F \subset Y$ , versehen mit der Unterraumtopologie, wieder (abzählbar / folgen-) kompakt (Übung 1.122).
- (3) Sei  $(X, \mathcal{O})$  (abzählbar / folgen-) kompakt, und sei  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann ist  $f$  beschränkt und nimmt sein Maximum an. Dazu kombinieren wir (2) mit den Sätzen 1.55 und 1.56 unten.
- (4) Jeder kompakte Raum ist normal (Übung 1.123).
- (5) Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Hausdorff-Raum, und sei  $Y \subset (X, \mathcal{O}_X)$  kompakt in der Unterraumtopologie, dann ist  $Y \subset X$  abgeschlossen.

1.54. SATZ. Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein Hausdorff-Raum.

- (1) Wenn  $X$  kompakt oder folgenkompakt ist, ist  $X$  auch abzählbar kompakt.
- (2) Es ist  $X$  genau dann abzählbar kompakt, wenn jede Folge in  $X$  einen Häufungspunkt besitzt.
- (3) Wenn  $X$  abzählbar kompakt ist und (A1) erfüllt, ist  $X$  folgenkompakt.
- (4) Wenn  $X$  abzählbar kompakt ist und (A2) erfüllt, dann ist  $X$  kompakt.

Die Punkte (2) und (3) zeigen wieder einmal, dass man mit Folgen vorsichtig umgehen muss, wenn das erste Abzählbarkeitsaxiom verletzt ist. Wir fassen den obigen Satz in einem Diagramm zusammen.

$$\text{kompakt} \begin{array}{c} \xleftarrow{(A2)} \\ \xrightarrow{\hspace{1cm}} \end{array} \text{abzählbar kompakt} \begin{array}{c} \xrightarrow{(A1)} \\ \xleftarrow{\hspace{1cm}} \end{array} \text{folgenkompakt}$$

Wir betrachten im Folgenden vor allem kompakte Räume. In der Analysis ist hingegen der Begriff der Folgenkompaktheit wichtiger.

BEWEIS VON SATZ 1.54. In (1) ist nur zu zeigen, dass jeder folgenkompakte Raum auch abzählbar kompakt ist, die andere Aussage ist klar. Sei also  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare offene Überdeckung. Wir nehmen an, dass es keine endliche Teilüberdeckung gibt. Wir dürfen außerdem annehmen, dass

$$U_i \not\subset \bigcup_{j=0}^{i-1} U_j$$

für alle  $i \in \mathbb{N}$  gilt, andernfalls lassen wir  $U_i$  weg und gehen zu einer kleineren Teilüberdeckung über. Wir wählen also eine Folge  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit

$$x_i \in U_i \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} U_j.$$

Sei  $x \in X$  ein Häufungspunkt (z.B. der Grenzwert einer konvergenten Teilfolge), dann gilt  $x \in U_{i_0}$  für ein  $i_0 \in \mathbb{N}$ , also liegen unendlich viele Folgenglieder in  $U_{i_0}$ , im Widerspruch zur Konstruktion.

Zu (2) zeigen wir, dass jede Folge  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  in einem abzählbar kompakten Raum  $X$  einen Häufungspunkt besitzt, die Rückrichtung folgt wie in (1). Sei  $A_n = \overline{\{x_i \mid i \geq n\}} \neq \emptyset$ , dann ist  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  die Menge aller Häufungspunkte. Wenn wir annehmen, dass  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  keinen Häufungspunkt besitzt, sei  $U_n = X \setminus A_n$ , dann ist  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare offene Überdeckung von  $X$  mit  $U_m \subset U_n$  für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m < n$ . Es folgt, dass  $X = \bigcup_{i=1}^n U_i = U_n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ , im Widerspruch zu  $A_n \neq \emptyset$ .

Zu (3) wähle nach (2) einen Häufungspunkt  $x$  der Folge  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Wenn (A1) erfüllt ist, existiert eine abzählbare Umgebungsbasis  $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von  $x$ , und wie im Beweis von Satz 1.36 dürfen wir annehmen, dass  $V_j \subset V_i$  für alle  $i, j \in \mathbb{N}$  mit  $i < j$ . Um eine Teilfolge mit Grenzwert  $x$  zu konstruieren, setzen wir  $i_0 = 1$  und wählen induktiv  $i_j > i_{j-1}$  für  $j \geq 1$  so, dass  $x_{i_j} \in V_j$ . Aus  $V_j \subset V_i$  für alle  $i < j$  folgt  $x_{i_k} \in V_j$  für alle  $k \geq j$ , also konvergiert  $(x_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$  gegen  $x$ .

Für (4) nehmen wir an, dass  $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$  eine beliebige offene Überdeckung ist, und dass  $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare Basis von  $\mathcal{O}$  ist. Wenn wir eine abzählbare Teilüberdeckung von  $\mathcal{U}$  konstruieren können, folgt die Existenz einer endlichen Teilüberdeckung aus der Annahme, dass  $X$  abzählbar kompakt ist. Wir wählen jetzt zu jedem  $i \in \mathbb{N}$  eine Menge  $U_i \in \mathcal{U} \cup \{\emptyset\}$ , so dass  $V_i \subset U_i$ , falls eine Menge  $U \in \mathcal{U}$  mit  $V_i \subset U$  existiert, und  $U_i = \emptyset$  sonst. Da  $\mathcal{U}$  eine Überdeckung von  $X$  war, muss dann auch  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Überdeckung sein, denn jeder Punkt  $x \in X$  ist in einem  $U \in \mathcal{U}$  enthalten, und es existiert also ein  $i$  mit  $x \in V_i \subset U$ . Elimination aller Indizes  $i$  mit  $U_i = \emptyset$  liefert eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung von  $X$ , nach Voraussetzung existiert also auch eine endliche Teilüberdeckung.  $\square$

Es folgen einige weitere Sätze aus Analysis II, die wir nicht noch einmal beweisen wollen.

1.55. SATZ. *Für einen metrischen Raum sind die Begriffe kompakt, abzählbar kompakt und folgenkompakt äquivalent.*

1.56. SATZ (Heine-Borel). *Eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

1.57. SATZ (Lebesgue). *Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $K$ . Dann existiert  $\varepsilon > 0$ , so dass für alle  $x \in K$  ein  $U \in \mathcal{U}$  mit  $B_\varepsilon(x) \cap K \subset U$  existiert.*

Den folgenden Satz wollen wir ebenfalls nicht beweisen.

1.58. SATZ (Tychonoff). *Sei  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume, dann ist der Produktraum  $\prod_{i \in I} (X_i, \mathcal{O}_i)$  genau dann kompakt, wenn alle Räume  $(X_i, \mathcal{O}_i)$  kompakt sind.*

Man beachte, dass die Box-Topologie aus Bemerkung 1.50 diese Eigenschaft offensichtlich nicht besitzt.

Schließlich führen wir noch den Begriff der lokalen Kompaktheit ein.

1.59. DEFINITION. Ein topologischer Raum heißt *lokalkompakt*, wenn er Hausdorffsch ist und jeder Punkt in  $X$  eine kompakte Umgebung besitzt.

1.60. BEISPIEL. Die Räume  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R}^n$  sind lokalkompakt,  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{Q}^n$  jedoch nicht.

Wir benutzen Kompaktheit, um eine interessante und wichtige Topologie auf der Menge  $C(X, Y)$  aller stetigen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$  einzuführen.

1.61. DEFINITION. Seien  $(X, \mathcal{O}_X)$ ,  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  topologische Räume, dann ist die *kompakt-offene Topologie*  $\mathcal{O}_{\text{ko}}$  auf  $C(X, Y)$  definiert als die Topologie zur Subbasis

$$\mathcal{S}_{\text{ko}} = \{S_{K,U} \mid K \subset X \text{ kompakt und } U \subset Y \text{ offen}\}$$

mit  $S_{K,U} = \{F \in C(X, Y) \mid K \subset F^{-1}(U)\}$ .

Wenn der Definitionsbereich lokalkompakt ist, gibt es genug kompakte Mengen, um eine interessante Topologie zu erhalten. Seien  $X, Y, Z$  Mengen, dann gibt es eine Bijektion

$$\text{Abb}(X \times Y, Z) \cong \text{Abb}(X, \text{Abb}(Y, Z)), \quad F \mapsto f = (x \mapsto F(x, \cdot) \in \text{Abb}(Y, Z)).$$

Die Abbildungen  $f$  und  $F$  heißen zueinander *adjungiert*.

1.62. SATZ (Exponentialgesetz). *Es seien  $(X, \mathcal{O}_X)$ ,  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  und  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  topologische Räume,  $f: X \rightarrow C(Y, Z)$  eine beliebige Abbildung, und  $F: X \times Y \rightarrow Z$  dazu adjungiert.*

- (1) *Wenn  $F$  stetig ist, ist  $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (C(Y, Z), \mathcal{O}_{\text{ko}})$  ebenfalls stetig, wir erhalten also eine injektive Abbildung*

$$\alpha: C(X \times Y, Z) \rightarrow C(X, C(Y, Z)).$$

- (2) *Die Abbildung  $\alpha$  ist stetig.*  
(3) *Sei  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  lokalkompakt. Dann ist  $\alpha$  eine Bijektion.*  
(4) *Es sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  Hausdorff und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  lokalkompakt. Dann ist  $\alpha$  ein Homöomorphismus.*  
(5) *Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  lokalkompakt. Die kompakt-offene Topologie ist auf  $C(X, Y)$  die grösste Topologie, für die die Auswertungsabbildung*

$$\text{ev}: X \times C(X, Y) \rightarrow Y \quad \text{mit} \quad \text{ev}(x, g) = g(x)$$

*stetig ist.*

Wenn wir  $Y^X$  anstelle von  $(C(X, Y), \mathcal{O}_{\text{ko}})$  schreiben, ließt sich (4) als  $Z^{X \times Y} \cong (Z^Y)^X$ , daher der Name „Exponentialgesetz“. Die Eigenschaft (5) ist eine Möglichkeit, die kompakt-offene Topologie zu charakterisieren.

Die zahlreichen verschiedenen Bedingungen in (1)–(5) sind hässlich. Geht man aber zur Unterkategorie der kompakt erzeugten schwachen Hausdorff-Räume über, so existiert eine Topologie auf  $C(X, Y)$ , für die (1)–(5) ohne weitere Voraussetzungen gelten. Wir lernen später weitere Motivation für diese Unterkategorie kennen.

BEWEIS. Zu (1) sei  $F: X \times Y \rightarrow Z$  stetig. Zu zeigen ist, dass

$$f^{-1}(S_{K,U}) = \{x \in X \mid F(x, y) \in U \text{ für alle } y \in K\}$$

für alle kompakten  $K \subset Y$  und alle offenen  $U \subset Z$  in  $X$  offen ist. Sei dazu  $x \in f^{-1}(S_{K,U})$ . Da  $F^{-1}(U) \subset X \times Y$  in der Produkttopologie offen ist und  $(x, y) \in F^{-1}(U)$  für alle  $y \in K$ , existieren  $V_y \subset X$  und  $W_y \subset Y$  offen mit

$$(x, y) \in V_y \times W_y \subset F^{-1}(U).$$

Die offenen Mengen  $(W_y)_{y \in K}$  überdecken  $K$ , also gibt es endlich viele  $y_1, \dots, y_k \in K$ , so dass

$$K \subset W_{y_1} \cup \dots \cup W_{y_k}.$$

Dann ist

$$V = V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_k} \subset X$$

offen mit  $x \in V$ , und es gilt

$$V \times K \subset \bigcup_{i=1}^k V \times W_{y_i} \subset \bigcup_{i=1}^k V_{y_i} \times W_{y_i} \subset F^{-1}(U),$$

also  $V \subset f^{-1}(S_{K,U})$ . Somit ist  $f^{-1}(S_{K,U}) \subset X$  offen, und  $f$  ist stetig.

Zu (2) reicht es, für Subbasismengen  $S_{K,W}$  (also  $K \subset X$  kompakt,  $W \subset C(Y, Z)$  offen) zu zeigen, dass  $\alpha^{-1}(S_{K,W})$ , denn  $\alpha^{-1}$  ist mit endlichen Durchschnitten verträglich. Aus dem gleichen Grund reicht es, für  $W$  Subbasismengen einzusetzen, denn für  $L \subset Y$  kompakt und  $U, V \subset Z$  offen gilt

$$S_{L,U \cap V} = \{ f: Y \rightarrow Z \mid f(L) \subset U \text{ und } f(L) \subset V \} = S_{L,U} \cap S_{L,V}.$$

Die Stetigkeit von  $\alpha$  folgt, denn für alle  $K \subset X$  und  $L \subset Y$  kompakt und  $U \subset Z$  offen ist auch die folgende Menge offen:

$$\alpha^{-1}(S_{K,S_{L,U}}) = S_{K \times L, U} \subset C(X \times Y, Z).$$

Zu (3) sei jetzt  $f: X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$  stetig. Es sei  $U \subset Z$  offen und  $(x, y) \in F^{-1}(U)$ . Nach Voraussetzung ist  $f(x): Y \rightarrow Z$  stetig, also ist

$$(f(x))^{-1}(U) = \{ y \in Y \mid F(x, y) \in U \} \subset Y$$

offen. Da  $Y$  lokalkompakt ist, hat  $y$  eine kompakte Umgebung  $K$ , und  $K$  ist normal nach Bemerkung 1.53 (4), erfüllt also insbesondere (T3). Wie im Beweis von Satz 1.51 (3) besitzt  $y$  eine abgeschlossene Umgebung  $A \subset K \cap (f(x))^{-1}(U)$ . Nach Bemerkung 1.53 (1) ist  $A$  dann auch kompakt. Da  $f$  stetig ist, ist

$$V = f^{-1}(S_{A,U})$$

eine offene Umgebung von  $x$  in  $X$ . Daraus folgt aber, dass  $V \times A \subset F^{-1}(U)$  eine Umgebung von  $(x, y)$  in  $X \times Y$  ist. Also ist  $F^{-1}(U)$  offen und  $F$  daher stetig.

Zu (4) zeigen wir, dass Mengen der Form  $S_{K \times L, U}$  eine Subbasis von  $C(X \times Y, Z)$  bilden. Dann folgt die Offenheit von  $\alpha$  mit dem gleichen Argument wie in (2). Sei dazu  $M \subset X \times Y$  kompakt und  $U \subset Z$  offen, und sei  $F \in S_{M,U}$ . Es reicht, endlich viele Kompakta  $K_i \subset X$  und  $L_i \subset Y$ ,  $i = 1, \dots, n$  zu konstruieren, so dass

$$F \in \bigcap S_{K_i \times L_i, U} \subset S_{M,U}.$$

Da  $X$  und  $Y$  Hausdorff sind, sind die Bilder  $M_X \subset X$ ,  $M_Y \subset Y$  der Projektionen von  $M \subset X \times Y$  nach Bemerkung 1.53 (2) wieder kompakt. Daher finden wir zu jedem Punkt  $(x, y) \in M$  kompakte Umgebungen  $K_x, L_y$ , so dass  $K_x \times L_y \subset F^{-1}(U)$ , also  $F \in S_{K_x \times L_y, U}$  gilt. Wegen Kompaktheit von  $M$  reichen endlich viele der Produkte  $K_x \times L_y$  aus, um  $M$  zu überdecken. Daraus ergibt sich die obige Behauptung.

Zu (5) betrachte die Identität

$$\text{id}: (C(X, Y), \mathcal{O}) \longrightarrow (C(X, Y), \mathcal{O}_{\text{ko}}).$$

Sie induziert gerade die Abbildung

$$\text{ev}: (C(X, Y), \mathcal{O}) \times (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y).$$

Also ist  $\text{ev}$  nach (1), (3) und Bemerkung 1.24 genau dann stetig, wenn  $\mathcal{O}$  feiner als  $\mathcal{O}_{\text{ko}}$  ist.  $\square$

1.63. BEMERKUNG. Es sei jetzt  $(Y, d)$  ein metrischer Raum.

- (1) Eine Folge  $(f_i)_i$  in  $C(X, Y)$  konvergiert genau dann in der kompakt-offenen Topologie gegen  $f \in C(X, Y)$ , wenn  $(f_i)_i$  *gleichmäßig auf Kompakta* gegen  $f$  konvergiert (oder kurz: *kompakt konvergiert*), das heißt, wenn es zu jedem Kompaktum  $K \subset X$  und jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$d(f_i(x), f(x)) < \varepsilon$$

für alle  $x \in K$  und alle  $i \geq n$  (Übung 1.124).

- (2) Sei  $X$  lokalkompakt, dann ist Konvergenz in der kompakt-offenen Topologie wegen (1) äquivalent zur lokal gleichmäßigen Konvergenz, das heißt, jeder Punkt  $x \in X$  hat eine Umgebung, auf der die Folge gleichmäßig konvergiert.
- (3) Wenn  $X$  sogar kompakt ist, ist Konvergenz in der kompakt-offenen Topologie äquivalent zur gleichmäßigen Konvergenz.

Um gleichmäßige Konvergenz topologisch zu definieren, wenn  $X$  nicht kompakt ist, brauchen wir eine stärkere Struktur als nur eine Topologie auf dem Raum  $Y$ .

## 1.7. Zusammenhang

Wir definieren den Begriff des zusammenhängenden Raumes. Für viele Anwendungen benötigen wir den etwas stärkeren Begriff des Wegzusammenhangs.

1.64. DEFINITION. Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$  heißt

- (1) *zusammenhängend*, wenn es keine zwei nichtleeren offenen Mengen  $U, V \in \mathcal{O}$  gibt mit  $U \cup V = X$  und  $U \cap V = \emptyset$ , und
- (2) *wegzusammenhängend*, wenn zu je zwei  $x, y \in X$  ein Weg  $\gamma$  von  $x$  nach  $y$ , das heißt, eine stetige Abbildung  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y$ , existiert.

Bedingung (1) kann man äquivalent mit abgeschlossenen Mengen formulieren.

- 1.65. BEMERKUNG. (1) Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$  ist genau dann zusammenhängend, wenn  $\emptyset$  und  $X$  die einzigen Mengen sind, die zugleich offen und abgeschlossen sind.
- (2) Es trage  $Y = \{0, 1\}$  die diskrete Topologie. Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$  ist genau dann zusammenhängend, wenn es keine stetige surjektive Abbildung  $F: X \rightarrow Y$  gibt.

1.66. BEISPIEL. Jedes Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  ist zusammenhängend. Sei etwa  $I = U \dot{\cup} V$  mit  $U, V \subset (a, b)$  nichtleer, offen und abgeschlossen. Wir fixieren  $u \in U$  und  $v \in V$ , o.B.d.A. sei  $u < v$ . Setze  $x = \inf(V \cap [u, v])$ , dann enthält jede Umgebung von  $x$  sowohl Punkte von  $V$  als auch von  $U$ . Es folgt

$$x \in \overline{V} \cap \overline{U} = V \cap U,$$

da sowohl  $U$  als auch  $V$  abgeschlossen sind, im Widerspruch zu  $U \cap V = \emptyset$ .

- 1.67. SATZ. (1) *Das Bild eines (weg-) zusammenhängenden Raumes unter einer stetigen Abbildung ist wieder (weg-) zusammenhängend.*
- (2) *Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.*

BEWEIS. Sei  $F: X \rightarrow Y$  stetig. Wenn im  $F \subset Y$  nicht zusammenhängend ist, dann gibt es nichtleere, offene Teilmengen  $U, V \subset \text{im } F$  mit  $\text{im } F = U \dot{\cup} V$ . Dann sind auch  $F^{-1}(U)$  und  $F^{-1}(V)$  nicht leer, offen mit  $X = F^{-1}(U) \dot{\cup} F^{-1}(V)$ . Also ist auch  $X$  nicht zusammenhängend.

Sei  $X$  wegzusammenhängend und  $F(x), F(y)$  zwei beliebige Punkte in  $\text{im } F$ . Sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  ein Weg von  $x$  nach  $y$ , dann ist  $F \circ \gamma$  ein Weg von  $F(x)$  nach  $F(y)$  in  $\text{im } F$ . Also ist auch  $\text{im } F$  wegzusammenhängend, und es folgt (1).

Zu (2) nehmen wir an, dass es nichtleere, offene und abgeschlossene Teilmengen  $U, V \subset X$  mit  $X = U \dot{\cup} V$  gibt. Wähle  $x \in U$  und  $y \in V$ . Dann kann es keinen Weg  $\gamma$  von  $x$  nach  $y$  geben, denn ansonsten wäre

$$[0, 1] = \gamma^{-1}(U) \dot{\cup} \gamma^{-1}(V)$$

mit  $\gamma^{-1}(U), \gamma^{-1}(V)$  nichtleer, offen im Widerspruch zu Beispiel 1.66. □

1.68. DEFINITION. Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein topologischer Raum, und sei  $x \in X$ .

- (1) Die Vereinigung aller zusammenhängenden Unterräume von  $X$ , die  $x$  enthalten, heißt die *Zusammenhangskomponente*  $K(x)$  von  $x$ .
- (2) Die Menge aller Punkte  $y$ , die sich mit  $x$  durch einen stetigen Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  verbinden lassen, heißt die *Wegzusammenhangskomponente* von  $x$ .
- (3) Der Raum  $X$  heißt *total unzusammenhängend*, wenn  $\{x\}$  die Zusammenhangskomponente von  $x$  ist für alle  $x \in X$ .

- 1.69. BEMERKUNG. (1) Zusammenhangskomponenten sind immer abgeschlossen, Wegzusammenhangskomponenten jedoch nicht notwendigerweise, siehe Übung 1.125.
- (2) Seien  $x, y \in X$ , dann gilt entweder  $K(x) = K(y)$  oder  $K(x) \cap K(y) = \emptyset$ , analoges gilt für Wegzusammenhangskomponenten.
  - (3) Aus Beispiel 1.66 folgt, dass die Wegzusammenhangskomponente eines Punktes  $x$  in  $K(x)$  enthalten ist.
  - (4) Für alle  $x \in X$  gilt

$$K(x) \subset \bigcap \{ V \subset X \mid x \in V, V \text{ ist offen und abgeschlossen} \} .$$

Gleichheit muss nicht gelten.

1.70. DEFINITION. Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$  heißt *lokal (weg-) zusammenhängend*, wenn zu jedem Punkt  $x$  und jeder Umgebung  $U$  von  $x$  eine (weg-) zusammenhängende Umgebung  $V \subset U$  von  $x$  existiert.

1.71. BEMERKUNG. Es gibt lokal zusammenhängende, nicht zusammenhängende topologische Räume, und auch zusammenhängende, nicht lokal zusammenhängende topologische Räume. Wir werden später in der Regel mit lokal wegzusammenhängenden Räumen arbeiten.

## 1.8. Quotienten und Verklebung

In Absatz 1.5 hatten wir bereits einige Konstruktionen topologischer Räume vorgestellt. Jetzt wollen wir beliebige Vereinigungen und Quotienten topologischer Räume betrachten, und auch mehrere Räume zu einem neuen verkleben.

1.72. BEMERKUNG. Es sei  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume und  $X$  eine Menge.

- (1) Gegeben Abbildungen  $f_i: X \rightarrow X_i$  für alle  $i \in I$ , existiert stets eine eindeutige grösste Topologie  $\mathcal{O}$  auf  $X$ , für die alle  $f_i$  stetig sind. Diese Topologie  $\mathcal{O}$  heißt die von den  $f_i$  *induzierte Topologie* oder auch *Initialtopologie*. Beispiele sind die Unterraumtopologie (Satz 1.44 (1)), die Produkttopologie (Satz 1.47 (1)) sowie die Klumpentopologie, falls  $I = \emptyset$ .
- (2) Seien umgekehrt Abbildungen  $f_i: X_i \rightarrow X$  für alle  $i \in I$  gegeben, dann existiert stets eine eindeutige feinste Topologie  $\mathcal{O}$  auf  $X$ , für die alle  $f_i$  stetig sind. Diese Topologie heißt die von den  $f_i$  *koinduzierte Topologie* oder *Finaltopologie*. Beispiele sind die Summentopologie (Satz 1.40 (1)), sowie die diskrete Topologie, falls  $I = \emptyset$ .

Die Existenz und Eindeutigkeit ist in jedem Fall zu zeigen, die Argumente sind immer ähnlich denen in den Beweisen der Sätze 1.40, 1.44 und 1.47. Die Begriffe „Initialtopologie“ und „Finaltopologie“ stammen daher, dass man eine Topologie am „Beginn“ beziehungsweise „Ende“ der betrachteten „Pfeile“, also der Abbildungen  $f_i$ , definiert.

Im Folgenden betrachten wir einige Finaltopologien. Die Quotiententopologie ist dual zur Unterraumtopologie. Anstelle einer injektiven Abbildung  $\iota: Y \hookrightarrow X$  in einen gegebenen topologischen Raum betrachten wir also eine surjektive Abbildung  $\pi: X \twoheadrightarrow Y$  von einem gegebenen Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$  auf eine Menge  $Y$ . Dabei können wir  $Y$  als Quotienten  $Y = X / \sim$  nach einer Äquivalenzrelation  $\sim$  auffassen, wobei

$$x \sim y \quad \iff \quad \pi(x) = \pi(y) .$$

1.73. DEFINITION. Es sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein topologischer Raum und  $\pi: X \rightarrow Y$  eine surjektive Abbildung. Dann definieren wir die *Quotiententopologie* oder *Identifizierungstopologie* auf  $Y$  durch

$$\mathcal{O}_Y = \{U \subset Y \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X\}.$$

Ähnlich wie bei der Summentopologie überlegt man sich, dass  $\mathcal{O}_Y$  tatsächlich eine Topologie ist. Die Quotiententopologie wird durch die folgende Eigenschaft charakterisiert.

1.74. SATZ. *Es sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein topologischer Raum und  $\pi: X \rightarrow Y$  eine surjektive Abbildung.*

- (1) *Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie auf  $Y$ , für die  $\pi: X \rightarrow Y$  stetig ist.*
- (2) *Die Quotiententopologie ist die einzige Topologie auf  $Y$ , für die eine Abbildung  $f$  von  $Y$  in einen beliebigen topologischen Raum  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  genau dann stetig ist, wenn  $f \circ \pi: X \rightarrow Z$  stetig ist.*

1.75. BEMERKUNG. Um zu sehen, dass Unterraumtopologie und Quotiententopologie zueinander dual sind, vergleichen wir die zugehörigen Diagramme.

$$\begin{array}{ccc} & (X, \mathcal{O}_X) & \\ \iota \circ F \nearrow & \uparrow \iota & \\ (Z, \mathcal{O}_Z) & \xrightarrow{F} & (Y, \mathcal{O}_Y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (X, \mathcal{O}_X) & & \\ \pi \downarrow & \searrow f \circ \pi & \\ (Y, \mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{f} & (Z, \mathcal{O}_Z) \end{array}$$

Das linke Diagramm beschreibt die Situation aus Satz 1.44 (2), das rechte die aus Satz 1.74 (2).

BEWEIS von Satz 1.74. Damit  $\pi: X \rightarrow Y$  stetig ist, dürfen höchstens Teilmengen  $U \subset Y$  mit  $\pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$  offen sein, also gilt (1).

Zu (2) kopieren wir den Beweis von Satz 1.44 (2) und drehen alle Pfeile um. □

1.76. BEMERKUNG. Sei  $p: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow Y$  surjektiv, und  $\mathcal{O}_Y$  sei die Quotiententopologie. Wir untersuchen, welche topologischen Eigenschaften sich von  $X$  auf  $Y$  vererben.

- (1) Wenn  $X$  quasikompakt ist, dann ist auch  $Y$  quasikompakt, da  $Y = p(X)$ . Wenn  $X$  kompakt und  $Y$  Hausdorffsch ist, dann ist  $Y$  auch kompakt, vgl. Übung 1.122.
- (2) Wenn  $X$  (weg-) zusammenhängend ist, dann ist auch  $Y$  (weg-) zusammenhängend. Dies folgt wiederum aus der Stetigkeit von  $p$  und Satz 1.67 (1).
- (3) Trennungseigenschaften vererben sich im allgemeinen nicht von  $X$  auf  $Y$ , wie die Übungen 1.131 und 1.133 zeigen. Insbesondere vererbt sich auch Kompaktheit nicht automatisch.
- (4) Auch Abzählbarkeitseigenschaften vererben sich nicht immer, siehe Bemerkung 1.90 unten.

Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen an die Äquivalenzrelation  $\sim$  beziehungsweise die Abbildung  $\pi: X \rightarrow X/\sim$  lassen sich einzelne Trennungssaxiome von  $X$  auf den Quotienten übertragen. Diese Sätze helfen uns aber bei den Spezialfällen, die wir als nächstes betrachten wollen, nicht weiter, daher lassen wir sie hier weg.

Als nächstes wollen wir die Summen- und die Quotiententopologie benutzen, um zwei weitere universelle Konstruktionen zu erklären. Wir benötigen beide später bei der Konstruktion von CW-Komplexen.

Seien  $(X, \mathcal{O}_X)$  und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  topologische Räume, sei  $V \subset Y$  eine Teilmenge, und seien  $f: V \rightarrow X$  eine zunächst beliebige Abbildung. Wir betrachten die Menge

$$X \cup_f Y = (X \dot{\cup} Y) / \sim,$$

wobei  $\sim$  die von  $y \sim f(y)$  für alle  $y \in V$  erzeugte Äquivalenzrelation ist. Hierbei *erzeugt* jede Teilmenge  $S \subset M \times M$  eine Äquivalenzrelation  $R$  auf  $M$ , so dass  $aRb$  genau dann gilt, wenn es

eine Kette  $a = a_0, a_1, \dots, a_k = b$  von Elementen von  $M$  mit  $(a_{i-1}, a_i) \in S$  oder  $(a_i, a_{i-1}) \in S$  für alle  $i = 1, \dots, k$  gibt. Die Punkte in  $V$  werden in unserem Fall entlang der Abbildung  $f$  an  $X$  „angeklebt“. Die Quotiententopologie auf  $X \cup_f Y$  heißt hier auch „Verklebungstopologie“. Man beachte: die kanonische Abbildung  $i: X \hookrightarrow X \cup_f Y$  ist injektiv, die Abbildung  $j: Y \rightarrow X \cup_f Y$  im allgemeinen jedoch nicht.

Ein wichtiger Spezialfall besteht darin, dass  $f$  stetig ist. In diesem Fall erfüllt  $W = X \cup_f Y$  die universelle Eigenschaft eines *Pushouts*.

1.77. FOLGERUNG. Seien  $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$  topologische Räume,  $V \subset Y$  und  $f: V \rightarrow X$  stetig. Der Raum  $X \cup_f Y$  trage die Identifizierungstopologie zur Abbildung  $\pi: X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$ . Sei  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  ein weiterer topologischer Raum und  $g: X \rightarrow Z$  und  $h: Y \rightarrow Z$  stetig.

- (1) Es existiert genau dann eine Abbildung  $k: X \cup_f Y \rightarrow Z$  mit  $g = k \circ i$  und  $h = k \circ j$ , wenn  $g \circ f = h|_V: V \rightarrow Z$ , und  $k$  ist in diesem Fall eindeutig.
- (2) In diesem Fall ist  $k$  stetig.

$$\begin{array}{ccc}
 & & (Z, \mathcal{O}_Z) \\
 & \xrightarrow{h} & \\
 (Y, \mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{j} & (W, \mathcal{O}_W) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 (V, \mathcal{O}_V) & \xrightarrow{f} & (X, \mathcal{O}_X)
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{---} k \text{---} \\
 \text{---} g \text{---}
 \end{array}
 \quad (1.78)$$

BEWEIS. Zu (1) existiert stets genau eine Abbildung

$$\bar{k}: X \sqcup Y \rightarrow Z \quad \text{mit} \quad \bar{k}|_X = g \quad \text{und} \quad \bar{k}|_Y = h,$$

da die disjunkte Vereinigung ein Koproduct in der Kategorie der Mengen ist. Damit  $k$  existiert, muss  $\bar{k}$  mit der Äquivalenzrelation  $\sim$  verträglich sein. Das ist äquivalent zu

$$(g \circ f)(y) = \bar{k}(f(y)) = \bar{k}(y) = h(y) \quad \text{für alle } y \in V.$$

Sei nun  $k: X \cup_f Y \rightarrow Z$  eine Abbildung mit  $g = k \circ i$  und  $h = k \circ j$ , dann gilt  $(k \circ \pi)|_X = g$  und  $(k \circ \pi)|_Y = h$ , und es folgt  $\bar{k} = k \circ \pi$  wegen Satz 1.40 (3). Da  $\pi$  surjektiv ist, ergibt sich daraus die Eindeutigkeit von  $k$ .

Zu (2) folgern wir nach Satz 1.40 (2), dass  $\bar{k}$  stetig ist. Da  $\bar{k} = k \circ \pi$ , folgt aus Satz 1.74 (2) die Stetigkeit von  $k$ .  $\square$

Sei jetzt  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine gerichtete Familie topologischer Räume, das heißt, es existieren (beliebige) Abbildungen  $f_{ij}: X_i \rightarrow X_j$  für alle  $i < j$  mit

$$f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}: X_i \rightarrow X_k \quad \text{für alle } i < j < k.$$

Wir betrachten den *Kolimes*

$$\lim_{\rightarrow} X_i = \coprod_{i \in \mathbb{N}} X_i / \sim, \quad (1.79)$$

wobei

$$X_i \ni x_i \sim x_j \in X_j \iff f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j) \quad \text{für ein } k > i, j.$$

Die *schwache Topologie* auf  $\lim_{\rightarrow} X_i$  ist die von den natürlichen Abbildungen  $g_i: X_i \rightarrow \lim_{\rightarrow} X_i$  koinduzierte Topologie.

Ein wichtiger Spezialfall besteht darin, dass alle  $f_{ji}$  stetig sind.

1.80. FOLGERUNG. Seien  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  topologische Räume und  $f_{ij}: X_i \rightarrow X_j$  stetige Abbildungen mit  $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$  für alle  $i < j < k$ . Sei  $\varinjlim X_i$  mit der Identifizierungstopologie zur Abbildung  $\coprod_{i \in \mathbb{N}} X_i \rightarrow \varinjlim X_i$  versehen. Sei  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  ein weiterer topologischer Raum und  $(h_i: X_i \rightarrow Z)_{i \in \mathbb{N}}$  stetige Abbildungen.

- (1) Es existiert genau dann eine Abbildung  $\ell: \varinjlim X_i \rightarrow Z$  mit  $h_i = \ell \circ g_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ , wenn  $h_j \circ f_{ji} = h_i: X_i \rightarrow Z$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  gilt, und  $\ell$  ist in diesem Fall eindeutig.
- (2) In dieser Situation ist  $\ell$  stetig.

Also erfüllt  $W = \varinjlim X_i$  die universelle Eigenschaft eines Kolimes.

$$\begin{array}{ccc}
 & & (Z, \mathcal{O}_Z) \\
 & \nearrow^{h_0} & \uparrow \ell \\
 (X_0, \mathcal{O}_0) & \xrightarrow{f_{01}} & (X_1, \mathcal{O}_1) \longrightarrow \dots \\
 & \searrow_{g_0} & \downarrow_{g_1}
 \end{array}
 \tag{1.81}$$

BEWEIS. Dieser Beweis ist völlig analog zum Beweis von Folgerung 1.77. □

In Wirklichkeit ist die Kolimes-Konstruktion wesentlich allgemeiner und umfasst die universellen Eigenschaften in den Diagrammen (1.78) und (1.81) als Spezialfälle.

### 1.9. CW-Komplexe und topologische Mannigfaltigkeiten

Wir beschreiben jetzt zwei wichtige Klassen topologischer Räume. Die Grundidee bei beiden Konstruktionen besteht darin, Räume zu konstruieren, die sich in einem gewissen Sinne ähnlich verhalten wie  $\mathbb{R}^n$  mit der Standardbasis.

1.82. DEFINITION. Eine (topologische) Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \in \mathbb{N}$  ist ein Hausdorff-Raum  $M$  mit abzählbarer Basis, so daß jeder Punkt  $p \in M$  eine Umgebung  $U \subset M$  besitzt, die homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist.

1.83. BEISPIEL. Die folgenden Räume sind Mannigfaltigkeiten.

- (1) Der Raum  $\mathbb{R}^n$  ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ .
- (2) Die Sphäre  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ . Hierzu betrachtet man die stereographischen Projektion vom Nord- und Südpol  $(0, \dots, 0, \pm 1)$  aus auf den Unterraum  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ .
- (3) Jede offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit ist wieder eine Mannigfaltigkeit. Hierzu reicht es zu zeigen, dass offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  sind. Betrachte dazu die Abbildung

$$B_r(x) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad y \mapsto \frac{1}{r - |y - x|} (y - x).$$

- (4) Sei  $M \subset \mathbb{R}^m$  eine  $n$ -dimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit, dann ist  $M$ , versehen mit der Unterraumtopologie, eine  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

1.84. BEMERKUNG. (1) Wir verlangen die Hausdorff-Eigenschaft (T2), um den Raum aus Beispiel 1.29 und ähnliche Konstrukte auszuschließen. Wir verlangen abzählbare Basen (A2), damit unsere Mannigfaltigkeiten nicht zu groß werden, betrachte dazu etwa das Produkt aus dem Intervall  $(0, 1)$  mit einer überabzählbaren, diskreten Menge. Man

beachte, dass (A1) und (T1) automatisch erfüllt sind, da jeder Punkt eine Umgebung homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  besitzt.

- (2) Mannigfaltigkeiten erfüllen (T3), sind also regulär, daher nach dem ersten Metrisationssatz von Urysohn metrisierbar (siehe Bemerkung 1.37), also insbesondere sogar normal. Sei etwa  $A \subset M$  abgeschlossen und  $p \in M \setminus A$ , dann wählen wir eine zu  $\mathbb{R}^n$  homöomorphe Umgebung  $U \subset M$  von  $p$  und betrachten  $p \in \mathbb{R}^n$  und  $A \cap U \subset \mathbb{R}^n$ . Dann existiert  $r > 0$ , so dass  $D_r(p) \cap (A \cap U) = \emptyset$  in  $\mathbb{R}^n$ . Da  $M$  hausdorffsch und  $D_r(p)$  kompakt ist, ist das Bild  $K$  von  $D_r(p)$  unter der Inklusion  $U \hookrightarrow M$  kompakt und insbesondere abgeschlossen nach Bemerkung 1.53 (2) und (5). Daher trennen die offenen Mengen  $\overset{\circ}{K}$  und  $M \setminus K$  den Punkt  $p$  von der Menge  $A$ .
- (3) Wir werden später sehen, dass die Dimension eine lokale Invariante ist: eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist zu einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$  genau dann isomorph, wenn  $n = m$  gilt. Wir verlangen, dass eine Mannigfaltigkeit nur aus Komponenten einer festgelegten Dimension besteht.

Mit dieser Definition lässt sich zeigen, dass man jede Mannigfaltigkeit in den  $\mathbb{R}^N$  einbetten kann, wenn  $N$  hinreichend groß gewählt wurde.

Der Begriff der Mannigfaltigkeit ist jedoch für viele Zwecke zu speziell. Die folgende induktive Konstruktion liefert hingegen (überraschenderweise) eine Klasse von topologischen Räumen, die für viele Zwecke allgemein genug ist. Als Referenz verweisen wir auf den Anhang von [H].

Wir bezeichnen mit  $D^n = D_1(0) \subset \mathbb{R}^n$  den abgeschlossenen  $n$ -dimensionalen Einheitsball, und mit  $\partial D^n = S^{n-1}$  seinen Rand. Hier wie auch im folgenden bezieht sich ein hochgestellter Index immer auf eine Art Dimension und bezeichnet insbesondere nicht etwa einen Exponenten.

- (1) Wir beginnen mit einem diskreten topologischen Raum  $X^0$ , dem 0-Gerüst oder 0-Skelett, dessen Punkte wir auch 0-Zellen nennen.
- (2) Sei das  $n-1$ -Gerüst  $X^{n-1}$  bereits induktiv konstruiert, sei  $I^n$  eine beliebige Indexmenge, und sei

$$(\varphi_i^n: \partial D^n \rightarrow X^{n-1})_{i \in I^n}$$

eine Familie stetiger Abbildungen. Definiere die natürliche Abbildung

$$\varphi^n = \bigcup_i \varphi_i^n: \prod_i \partial D^n \rightarrow X^{n-1} \quad \text{mit} \quad \left( \bigcup_i \varphi_i^n \right)(i, x) = \varphi_i^n(x).$$

Dann konstruieren wir das  $n$ -Gerüst  $X_n$ , indem wir  $\#I^n$ -viele Kopien von  $D^n$  mit  $X^{n-1}$  entlang der Abbildung  $\phi^n$  verkleben wie in Folgerung 1.77:

$$X^n = \left( \prod_{i \in I^n} D^n \right) \cup_{\phi^n} X^{n-1}.$$

Somit erhalten wir auf die  $X^n$  die Quotiententopologie bezüglich einer Projektionsabbildung

$$\left( X^{n-1} \sqcup \prod_{i \in I^n} D^n, \mathcal{O}_{\sqcup} \right) \xrightarrow{\Pi^n} (X^n, \mathcal{O}_{X^n}). \quad (1.85)$$

- (3) Wir können entweder nach endlich vielen Schritten aufhören mit  $X = X^n$ , oder diesen Prozess für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  fortsetzen, in diesem Fall setzen wir

$$X = \varinjlim X^n$$

wie in Folgerung 1.80, und erhalten wiederum eine Quotiententopologie bezüglich

$$\prod_{n \in \mathbb{N}_0} (X^n, \mathcal{O}_{X^n}) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X).$$

Als Menge ist  $X$  die aufsteigende Vereinigung der Räume  $X^0 \subset X^1 \subset \dots$

In  $X$  gehört zu jedem  $i \in I^n$  eine *charakteristische Abbildung*

$$\Phi_i^n: D^n \rightarrow X^n \hookrightarrow X,$$

die die Verklebeabbildung  $\varphi_i^n: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$  fortsetzt, und  $\Phi_i^n|_{B^n}$  ist ein Homöomorphismus von  $B^n$  auf sein Bild  $e_i^n = \Phi_i^n(B^n)$ .

Aus den Definitionen der Verklebungstopologie folgt induktiv, dass eine Teilmenge  $U \cap X^n$  genau dann in  $X^n$  offen ist, wenn alle  $(\Phi_i^j)^{-1}(U) \subset D^j$  offen sind für alle  $j \leq n$  und  $i \in I^j$ . Für  $n = 0$  ist das klar, da  $X^0$  die diskrete Topologie trägt. Im Induktionsschritt ist  $U \cap X^n$  genau dann offen, wenn das für  $U \cap X^{n-1}$  und  $(\Phi_i^n)^{-1}(U)$  für alle  $i \in I^n$  gilt, also genau dann, wenn  $(\Phi_i^j)^{-1}(U) \subset D^j$  offen sind für alle  $j \leq n$  und  $i \in I^j$ .

Nach Definition der Kolimes-Topologie ist  $U \subset X$  offen, wenn  $U \cap X^n$  in  $X^n$  offen ist für alle  $n$ , wenn also alle  $(\Phi_i^n)^{-1}(U)$  offen sind. In der obigen Argumentation können wir „offen“ überall durch „abgeschlossen“ ersetzen. Insgesamt können wir also  $X$  als einen großen Quotienten schreiben bezüglich der Vereinigung aller charakteristischen Abbildungen

$$\coprod_{n \in \mathbb{N}_0} \coprod_{i \in I^n} (D^n, \mathcal{O}_{D^n}) \xrightarrow{\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{i \in I^n} \Phi_i^n} (X, \mathcal{O}_X). \quad (1.86)$$

Nach Definition 1.73 sind dann die folgenden drei Aussagen äquivalent:

- (1) Die Menge  $X$  trägt die CW-Topologie  $\mathcal{O}_{CW}$ .
- (2) Eine Teilmenge  $U \subset X$  ist genau dann offen, wenn  $(\Phi_i^n)^{-1}(U) \subset D^n$  in der üblichen Topologie offen ist für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und alle  $i \in I^n$ .
- (3) Eine Teilmenge  $A \subset X$  ist genau dann abgeschlossen, wenn  $(\Phi_i^n)^{-1}(A) \subset D^n$  in der üblichen Topologie abgeschlossen ist für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und alle  $i \in I^n$ .

Die übliche Topologie auf  $D^n$  ist hier einfach die Unterraum-Topologie zu  $D^n \subset \mathbb{R}^n$ .

1.87. DEFINITION. Ein so konstruierter topologischer Raum  $X$  heißt *Zellkomplex* oder *CW-Komplex*. Die Teilmenge  $X^n \subset X$  heißt *n-Gerüst* (*n-Skelett*) von  $X$ . Die Abbildungen

$$\varphi_i^n: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1} \hookrightarrow X$$

heißen *Verklebeabbildungen*, die

$$\Phi_i^n: D^n \rightarrow X^n \hookrightarrow X$$

*charakteristische Abbildungen*. Man nennt  $e_i^n = \Phi_i^n(B^n)$  eine (*offene*) *n-Zelle* und  $\bar{e}_i^n = \Phi_i^n(D^n)$  eine *abgeschlossene n-Zelle* von  $X$ .

Die Buchstaben „CW“ stehen für *closure finite, weak topology*, siehe unten.

1.88. BEISPIEL. Die folgenden Räume sind CW-Komplexe:

$$\begin{array}{llll} X = S^n & \text{mit} & X^0 = \dots = X^{n-1} = \text{pt}, & X^n = \dots = S^n; \\ & \text{oder mit} & X^j = S^j \quad \text{für } j \leq n, & X^n = \dots = S^n; \\ X = \mathbb{R} & \text{mit} & X^0 = \mathbb{Z}, & X^1 = \dots = \mathbb{R}; \\ X = \mathbb{R}^2 & \text{mit} & X^0 = \mathbb{Z}^2, \quad X^1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, & X^2 = \dots = \mathbb{R}^2; \\ X = \mathbb{R}^n & \text{mit} & X^0 = \mathbb{Z}^n, \quad \dots, & X^n = \dots = \mathbb{R}^n; \end{array}$$

Das erste Beispiel zeigt, dass ein gegebener topologischer Raum auf (viele) verschiedene Weisen als CW-Komplex geschrieben werden kann.

Wir geben exemplarisch charakteristische Funktionen für die ersten zwei CW-Strukturen auf  $S^n$  an. Für die erste wählen wir  $\Phi^0(\{0\}) = e_{n+1} \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  und

$$\Phi^n(v) = \begin{pmatrix} \sin(\pi |v|) \frac{v}{|v|} \\ -\cos(\pi |v|) \end{pmatrix} \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}.$$

Für die zweite CW-Struktur setzen wir beispielsweise

$$\Phi_{\pm}^j(v) = \begin{pmatrix} v \\ \pm \sqrt{1 - |v|^2} \\ 0 \end{pmatrix} \in S^j \times \{0\} = S^n \cap \mathbb{R}^{j+1} \subset \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^j \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{n-j}$$

für alle  $j \leq n$  und alle  $v \in D^j$ .

Wir wollen jetzt einige grundlegende Fakten über CW-Komplexe zusammenstellen.

1.89. BEMERKUNG. Sei  $X = \lim_{\rightarrow} X^n$  ein CW-Komplex, dann ist die Verklebungstopologie auf  $X^n$  gleich der von  $X$  induzierten Unterraumtopologie für alle  $n$ . Es reicht zu zeigen, dass Teilmengen  $A \subset X^n$  als Teilmengen von  $X^n$  genau dann abgeschlossen sind, wenn sie als Teilmengen von  $X$  abgeschlossen sind. Nach Definition 1.73 der Quotiententopologie heißt das

$$\begin{aligned} & (\Phi_i^m)^{-1}(A) \subset D^m \text{ abgeschlossen für alle } m \leq n \text{ und alle } i \in I^m \\ \iff & (\Phi_i^m)^{-1}(A) \subset D^m \text{ abgeschlossen für alle } m \in \mathbb{N}_0 \text{ und alle } i \in I^m. \end{aligned}$$

Die Richtung „ $\Leftarrow$ “ ist klar. Zu „ $\Rightarrow$ “ schließen wir durch Induktion über  $m$ : Wenn  $A \subset X^{m-1}$  abgeschlossen ist, dann ist

$$(\Phi_i^m)^{-1}(A) = (\varphi_i^m)^{-1}(A) \subset S^{m-1} \subset D^m$$

abgeschlossen in  $S^{m-1}$  wegen der Stetigkeit der Verklebeabbildungen  $\varphi_i^n$ , und in  $D^m$ , da  $S^{m-1} \subset D^m$  abgeschlossen ist. Also ist  $A$  in  $X^m$  ebenfalls abgeschlossen, und damit auch in  $X$ . Somit trägt  $X^n$  die von  $X = \lim_{\rightarrow} X^n$  induzierte Unterraumtopologie.

1.90. BEMERKUNG. CW-Komplexe erfüllen nicht automatisch das erste Abzählbarkeitsaxiom (A1) und sind daher auch nicht immer metrisierbar, siehe Beispiel 1.34 (2). Als Beispiel betrachten wir einen CW-Komplex mit 0-Skelett

$$X^0 = \mathbb{N} \dot{\cup} \{*\}.$$

Wir wählen  $I^1 = \mathbb{N}$  und definieren Verklebefunktionen

$$\varphi_n^1: \{-1, 1\} \rightarrow X^0 \quad \text{mit} \quad \varphi_n^1(-1) = * \quad \text{und} \quad \varphi_n^1(1) = n.$$

Unser CW-Komplex  $X = X^1$  sieht also aus wie ein Stern mit abzählbar vielen Zacken. Äquivalent schreiben wir

$$X = ([-1, 1] \times \mathbb{N}) / \sim,$$

wobei  $(-1, m) \sim (-1, n)$  für alle  $m, n \in \mathbb{N}$ , während alle anderen Punkte nur zu sich selbst äquivalent sind. Da der Raum  $[-1, 1] \times \mathbb{N}$  sogar das zweite Abzählbarkeitsaxiom (A2) erfüllt, erhalten wir auch ein Gegenbeispiel zu Bemerkung 1.76 (4). Im Beweis unten werden wir auch sehen, dass die CW-Topologie auf  $X$  echt feiner ist als die metrische Topologie, bei der wir  $X$  als Vereinigung radialer Strecken in einem Vektorraum mit der französischen Eisenbahnmetrik aus Übung 1.102 auffassen; dazu wählen wir etwa  $U_n = B_{1/n}(*).$

Es sei  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Umgebungen von  $*$  in  $X$ . Mit Hilfe eines Diagonalarguments konstruieren wir eine offene Umgebung  $V$  von  $*$  in  $X$ , so dass kein  $U_n$  ganz in  $V$  enthalten ist. Damit zeigen wir, dass  $*$  keine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, dass (A1) also verletzt ist.

Nach Definition der Quotiententopologie reicht es,

$$(\Phi_n^1)^{-1}(V) \subset [-1, 1]$$

für alle  $n$  als offene Umgebung von  $-1 = (\Phi_n^1)^{-1}(*)$  anzugeben. Da  $[-1, 1]$  insbesondere (T3) erfüllt, finden wir (wie im Beweis von Satz 1.51 (3)) eine offene Umgebung  $V_n$  von  $-1$  in  $[-1, 1]$  mit

$$\overline{V}_n \subset ((\Phi_n^1)^{-1}(U_n))^\circ.$$

Für die offene Menge

$$V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n^1(V_n) \subset X$$

gilt offensichtlich  $U_n \not\subset V$  für alle  $n$  wie gewünscht, denn

$$(\Phi_n^1)^{-1}(U_n) \not\subset (\Phi_n^1)^{-1}(V).$$

1.91. SATZ. *CW-Komplexe sind normal.*

BEWEIS. Sei  $X = \lim_{\rightarrow} X^n$  ein CW-Komplex. Zu zeigen ist, dass (T1) und (T4) gelten, und (T1) ist äquivalent dazu, dass Punkte in  $X$  abgeschlossen sind.

Sei also  $x \in X$ . Da  $X = \lim_{\rightarrow} X^n$ , existiert genau ein  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  mit  $x \in X^{n_0} \setminus X^{n_0-1}$ . Da

$$X^{n_0} \setminus X^{n_0-1} = \coprod_{i \in I^{n_0}} e_i^{n_0},$$

liegt  $x$  in genau einer Zelle  $e_{i_0}^{n_0}$ . Wir betrachten  $X^{n_0}$  als Quotienten wie in (1.85), dann ist das Urbild  $\{x\}$  gerade ein Punkt in einer Kopie von  $D^{n_0}$  und somit abgeschlossen in  $X^{n_0}$  nach Definition der Quotiententopologie.

Wie in Bemerkung 1.89 folgt aus der Stetigkeit der Verklebeabbildungen induktiv, dass  $\{x\}$  in  $X^n$  abgeschlossen ist für alle  $n > n_0$ . Jetzt können wir aus der Definition der Quotiententopologie in (1.86) darauf schließen, dass  $\{x\} \subset X$  abgeschlossen ist. Da  $x \in X$  beliebig war, gilt also (T1).

Wir zeigen jetzt, dass auch (T4) erfüllt ist. Dazu seien  $A, B \subset X$  abgeschlossen. Wir konstruieren induktiv offene Mengen  $U^n, V^n \subset X^n$  mit

$$A \cap X^n \subset U^n, \quad B \cap X^n \subset V^n \quad \text{und} \quad \overline{U}^n \cap \overline{V}^n = \emptyset. \quad (*)$$

Für  $n = 0$  können wir  $U^0 = A \cap X^0$  und  $V^0 = B \cap X^0$  wählen. Danach wählen wir in jedem weiteren Schritt für  $n > 0$  offene Mengen  $U^n$  und  $V^n \subset X^n$ , die (\*) erfüllen sowie

$$U^n \cap X^{n-1} = U^{n-1} \quad \text{und} \quad V^n \cap X^{n-1} = V^{n-1}. \quad (**)$$

Aus der Definition der schwachen Topologie und (\*), (\*\*) folgt, dass die Mengen

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} U^n \quad \text{und} \quad V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} V^n$$

in  $X$  offen sind mit  $A \subset U, B \subset V$  und  $U \cap V = \emptyset$ , womit (T4) vorbehaltlich der Konstruktion der  $U^n, V^n$  bewiesen ist.

Um  $U^n$  und  $V^n$  aus  $U^{n-1}$  und  $V^{n-1}$  zu konstruieren, können wir  $U^n \cap e_i^n$  für jede Zelle  $e_i^n \in X^n \setminus X^{n-1}$  einzeln konstruieren. Wir betrachten dazu die Mengen

$$\begin{aligned} A_i^n &= (\Phi_i^n)^{-1}(A), & B_i^n &= (\Phi_i^n)^{-1}(B) & \subset & D^n, \\ \text{und} \quad M_i^n &= (\varphi_i^n)^{-1}(U^{n-1}), & N_i^n &= (\varphi_i^n)^{-1}(V^{n-1}) & \subset & \partial D^n = S^{n-1}, \end{aligned}$$

dabei sind  $A_i^n$  und  $B_i^n$  abgeschlossen. Sei  $d$  die euklidische Metrik auf  $D^n \subset \mathbb{R}^n$ . Nach dem Satz 1.56 von Heine-Borel ist  $D^n$  kompakt, also auch alle abgeschlossenen Teilmengen. Da

$$\overline{M}_i^n \cap B_i^n = \overline{N}_i^n \cap A_i^n = \emptyset,$$

folgt aus der Kompaktheit von  $A_i^n$ ,  $B_i^n$ ,  $\overline{M_i^n}$  und  $\overline{N_i^n}$ , dass

$$\varepsilon_i^n = \frac{1}{2} \min \left\{ \inf_{x \in M_i^n} \inf_{y \in B_i^n} d(x, y), \inf_{x \in N_i^n} \inf_{y \in A_i^n} d(x, y), 1 \right\} = \frac{1}{2} \min \{ d(M_i^n, B_i^n), d(A_i^n, N_i^n), 1 \} > 0.$$

Wir erhalten also offene Teilmengen  $P_i^n, Q_i^n \subset D^n$  der Gestalt

$$P_i^n = \left\{ x \in D^n \mid \frac{x}{|x|} \in M_i^n \text{ und } |x| > 1 - \varepsilon_i^n \right\}$$

und

$$Q_i^n = \left\{ x \in D^n \mid \frac{x}{|x|} \in N_i^n \text{ und } |x| > 1 - \varepsilon_i^n \right\}$$

mit

$$P_i^n \cap S^{n-1} = M_i^n, \quad Q_i^n \cap S^{n-1} = N_i^n, \quad \text{und} \quad \overline{P_i^n} \cap B_i^n = \overline{Q_i^n} \cap A_i^n = P_i^n \cap Q_i^n = \emptyset.$$

Schliesslich benutzen wir die Normalität der offenen Kreisscheibe  $B^n$ , um offene Mengen  $R_i^n, T_i^n \subset B^n$  zu konstruieren, so dass

$$\begin{aligned} R_i^n \supset A_i^n \cap B^n, & \quad \emptyset = \overline{R_i^n} \cap \overline{Q_i^n} \cup \overline{B_i^n}, \\ T_i^n \supset B_i^n \cap B^n, & \quad \text{und} \quad \emptyset = \overline{T_i^n} \cap \overline{P_i^n} \cup \overline{R_i^n}. \end{aligned}$$

Da

$$(P_i^n \cup R_i^n) \cap \partial D^n = (\varphi_i^n)^{-1}(U^{n-1}) \quad \text{und} \quad (Q_i^n \cup T_i^n) \cap \partial D^n = (\varphi_i^n)^{-1}(V^{n-1}),$$

können wir jetzt  $U^n$  und  $V^n$  so definieren, dass

$$(\Phi_i^n)^{-1}(U^n) = P_i^n \cup R_i^n \quad \text{und} \quad (\Phi_i^n)^{-1}(V^n) = Q_i^n \cup T_i^n$$

für alle  $i$  offen ist und (\*) und (\*\*) erfüllt. □

1.92. DEFINITION. Ein *Unterkomplex*  $Y$  eines CW-Komplexes  $X$  ist ein abgeschlossener Unterraum, der aus einer Vereinigung von Zellen von  $X$  besteht. Ein CW-Komplex heisst *endlich*, wenn er aus endlich vielen Zellen besteht.

Da einzelne  $n$ -Zellen  $e_i^n$  für  $n > 0$  selbst nicht abgeschlossen sind, gehören auch alle Zellen, die vom Rand von  $\overline{e_i^n}$  getroffen werden, mit zum Unterkomplex. Insbesondere sind Unterkomplexe selbst wieder CW-Komplexe, und man kann sich wie in Bemerkung 1.89 überzeugen, dass die Unterraumtopologie eines Unterkomplexes  $Y \subset X$  mit seiner CW-Komplex-Topologie übereinstimmt, indem man induktiv die CW-Topologie auf  $Y^n$  mit der Unterraumtopologie von  $Y^n \subset X^n$  vergleicht.

Um einem möglichen Missverständnis vorzubeugen, weisen wir darauf hin, dass der Abschluss einer Zelle  $e_i^n$  nicht notwendigerweise ein Unterkomplex von  $X$  ist, genausowenig ihr Rand  $\partial e_i^n \subset X^{n-1}$  (obwohl das in vielen Beispielen durchaus so sein wird).

1.93. SATZ. *Ein Unterraum  $A$  eines CW-Komplexes  $X$  ist genau dann kompakt, wenn er abgeschlossen und in einem endlichen Unterkomplex von  $X$  enthalten ist.*

BEWEIS. „ $\Leftarrow$ “: Jede abgeschlossene Zelle  $\overline{e_i^n} = \Phi_i^n(D^n)$  ist als Bild einer kompakten Menge in einem Hausdorff-Raum kompakt, siehe Bemerkung 1.53 (2). Ein endlicher Unterkomplex ist eine endliche Vereinigung abgeschlossener Zellen, und daher immer noch kompakt. Eine abgeschlossene Teilmenge eines endlichen Unterkomplexes ist auch in  $X$  abgeschlossen und daher nach Bemerkung 1.53 (1) kompakt.

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $K \subset X$  kompakt, dann ist  $K$  abgeschlossen nach Bemerkung 1.53 (5). Für die andere Richtung zeigen wir als nächstes, dass eine kompakte Teilmenge  $K \subset X$  höchstens endlich viele offene Zellen treffen kann. Falls das nicht der Fall sein sollte, wählen wir abzählbar unendlich viele Punkte  $x_j \in K$  mit  $j \in \mathbb{N}_0$ , die in paarweise verschiedenen Zellen liegen. Durch Induktion über  $n$  wie im Beweis von Satz 1.91 konstruieren wir offene Mengen  $U_j^n \subset X^n$  mit  $x_j \in U_j^n$  falls  $x_j \in X^n$ ,

und  $U_j^n = \emptyset$  sonst. Hierbei ist  $U_j^n$  das Bild eines kleinen Balles in  $B^n$ , falls  $x_j \in e_i^n$  liegt, und ansonsten wählen wir  $U_j^n$  so, dass

$$(\Phi_i^n)^{-1}(U_j^n) = \left\{ x \in D^n \mid \frac{x}{|x|} \in (\varphi_i^n)^{-1}(U_j^{n-1}) \text{ und } |x| > 1 - \varepsilon_i^n \right\}$$

für ein hinreichend kleines  $\varepsilon_i^n > 0$ . Anschliessend setzen wir  $U_j = \bigcup_n U_j^n$ .

Die Menge  $U_0 = X \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$  ist ebenfalls offen, da man zu  $x_0 \in U_0$  analog zur Konstruktion der  $U_j$  eine offene Umgebung von  $x_0$  in  $U_0$  finden kann. Dann wird  $K$  überdeckt von den offenen Mengen  $(U_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ , es existiert jedoch keine endliche Teilüberdeckung, da  $x_j$  jeweils nur in  $U_j$  enthalten ist, Widerspruch. Also kann  $K$  nur endlich viele offene Zellen treffen.

Es bleibt zu zeigen, dass der Abschluss jeder einzelnen Zelle  $e_i^n$  in einem endlichen Unterkomplex enthalten ist. Wir beweisen das durch Induktion über  $n$ . Der Rand  $\partial e_i^n = \varphi_i^n(S^{n-1})$  einer Zelle  $e_i^n$  ist ein kompakter Unterraum von  $X^{n-1}$  und trifft daher nur endlich viele offene Zellen der Dimension  $< n$ , von denen jede nach Induktion in einem endlichen Unterkomplex enthalten ist. Durch Ankleben von  $e_i^n$  an die endliche Vereinigung dieser endlichen Unterkomplexe erhält man einen endlichen Komplex, der  $\bar{e}_i^n$  und damit auch  $e_i^n$  enthält.  $\square$

Aus der Kompaktheit von  $D^n$  folgt also insbesondere, dass das Bild  $\bar{e}_i^n$  von  $\Phi_i^n$  nur endlich viele Zellen trifft (daher „closure finite“). Mit „weak topology“ ist die im dritten Schritt auf  $X$  definierte Topologie gemeint, bzw. die durch (1.86) definierte Quotiententopologie. Dadurch lassen sich CW-Komplexe sogar charakterisieren.

1.94. SATZ (ohne Beweis, siehe [H]). Sei  $X$  ein Hausdorff-Raum und  $(\Phi_i^n: D^n \rightarrow X)_{n \in \mathbb{N}_0, i \in I^n}$  für jedes  $n$  eine Familie stetiger Abbildungen. Dann sind die Abbildungen  $\Phi_i^n$  genau dann die charakteristischen Abbildungen eines CW-Komplexes auf  $X$ , wenn

- (1) die Einschränkungen  $\Phi_i^n|_{B^n}$  allesamt Homöomorphismen auf ihre Bilder  $e_i^n$  sind, und  $X$  als Menge die disjunkte Vereinigung aller  $e_i^n$  ist,
- (2) die Bilder der  $\Phi_i^n|_{\partial D^n}$  jeweils nur endlich viele Zellen treffen,
- (3) und eine Menge  $A \subset X$  genau dann abgeschlossen ist, wenn  $(\Phi_i^n)^{-1}(A) \subset D^n$  für alle  $n$  und alle  $i \in I^n$  abgeschlossen ist.

Der Vollständigkeit halber definieren wir eine besondere Klasse von stetigen Abbildungen zwischen CW-Komplexen, die besonders schön mit der CW-Struktur verträglich ist.

1.95. DEFINITION. Seien  $X$  und  $Y$  zwei CW-Komplexe. Eine stetige Abbildung  $F: X \rightarrow Y$  heißt *zellulär*, wenn  $F(X^n) \subset Y^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt.

Das folgende technische Resultat wird später noch benötigt.

1.96. PROPOSITION. Es sei  $X$  ein CW-Komplex und  $Y$  lokalkompakt, dann ist die Produkttopologie auf  $X \times Y$  gerade die Quotiententopologie zur Abbildung

$$\coprod_{n \in \mathbb{N}_0} \coprod_{i \in I^n} D^n \times Y \xrightarrow{\bigcup_n \bigcup_i \Phi_i^n \times \text{id}_Y} X \times Y.$$

BEWEIS. Es bezeichne  $\mathcal{O}_\square$  die Produkt- und  $\mathcal{O}_\rightarrow$  die Quotiententopologie auf  $X \times Y$ . Aus der Stetigkeit von

$$\begin{aligned} \pi_X \circ (\Phi_i^n \times \text{id}_Y) &= \Phi_i^n \circ \pi_{D^n}: D^n \times Y \longrightarrow X \\ \text{und} \quad \pi_Y \circ (\Phi_i^n \times \text{id}_Y) &= \pi_Y: D^n \times Y \longrightarrow Y \end{aligned}$$

folgt mit den charakteristischen Eigenschaften aus Satz 1.47 (2) und Satz 1.74 (2) auch die Stetigkeit von

$$\begin{aligned} & \Phi_i^n \times \text{id}_Y: D^n \times Y \longrightarrow (X \times Y, \mathcal{O}_\square) \\ \text{und} \quad & \text{id}_{X \times Y}: (X \times Y, \mathcal{O}_\rightarrow) \longrightarrow (X \times Y, \mathcal{O}_\square). \end{aligned}$$

Für einen beliebigen topologischen Raum folgt aus Satz 1.62 (1) und (3), dass

$$F: (X \times Y, \mathcal{O}_\square) \longrightarrow Z$$

genau dann stetig ist, wenn die zugehörige Abbildung

$$f: X \longrightarrow (C(Y, Z), \mathcal{O}_{\text{ko}})$$

stetig ist. Aber das ist nach Satz 1.74 (2) äquivalent zur Stetigkeit von

$$f \circ \Phi_i^n: D^n \longrightarrow (C(Y, Z), \mathcal{O}_{\text{ko}})$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $i \in I^n$ , also wiederum mit Satz 1.62 zur Stetigkeit von

$$F \circ (\Phi_i^n \times \text{id}_Y): D^n \times Y \longrightarrow Z.$$

Nach Definition der Quotiententopologie sind für  $Z = (X \times Y, \mathcal{O}_\rightarrow)$  alle Abbildungen

$$\Phi_i^n \times \text{id}_Y: D^n \times Y \longrightarrow (X \times Y, \mathcal{O}_\rightarrow)$$

stetig, also nach dem obigen auch

$$\text{id}_{X \times Y}: (X \times Y, \mathcal{O}_\square) \longrightarrow (X \times Y, \mathcal{O}_\rightarrow). \quad \square$$

1.97. BEMERKUNG. Es ist wichtig, dass  $Y$  lokalkompakt ist in der obigen Proposition. Seien etwa  $X$  und  $Y$  zwei beliebige  $CW$ -Komplexe mit charakteristischen Abbildungen  $\Phi_i^n$  und  $\Psi_j^m$ . Dann erhalten wir eine  $CW$ -Struktur auf der Menge  $X \times Y$  mit charakteristischen Abbildungen

$$D^{n \times m} \xrightarrow{\sim} D^n \times D^m \xrightarrow{\Phi_i^n \times \Psi_j^m} X \times Y.$$

Dann ist die  $CW$ -Topologie auf  $X \times Y$  im allgemeinen feiner als die Produkt-Topologie.

Mit Hinblick auf eine Anwendung im nächsten Kapitel wollen wir uns überlegen, dass  $CW$ -Komplexe lokal zusammenziehbar sind.

1.98. DEFINITION. Ein topologischer Raum  $X$  heißt *zusammenziehbar*, wenn es eine stetige Abbildung  $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$  und einen Punkt  $x_0 \in X$  gibt, so dass

$$H(x, 0) = x \quad \text{und} \quad H(x, 1) = x_0$$

für alle  $x \in X$  gilt.

Ein topologischer Raum  $X$  heißt *lokal zusammenziehbar*, wenn jede Umgebung  $U$  eines Punktes  $x$  eine Umgebung  $V$  von  $x$  enthält, die sich auf  $x$  zusammenziehen lässt.

1.99. BEMERKUNG. (1) Zum Beispiel ist  $B^n$  zusammenziehbar mit

$$x_0 = 0 \quad \text{und} \quad H(x, t) = (1 - t)x \in B^n \quad \text{für alle } x \in B^n \text{ und alle } t \in [0, 1].$$

(2) Topologische Mannigfaltigkeiten sind lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$ , und daher ebenfalls lokal zusammenziehbar. Sei etwa  $U$  eine beliebige Umgebung von  $x \in M$ , und sei  $V$  eine zu  $\mathbb{R}^n$  homöomorphe Umgebung von  $x$ . Dann ist  $U \cap V$  zu einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  homöomorph, enthält also einen zusammenziehbaren Ball um  $x$ .

(3) Jeder zusammenziehbare Raum  $X$  ist wegzusammenhängend, denn für alle  $x \in X$  ist  $t \mapsto H(x, t)$  ein Weg von  $x$  zum festen Punkt  $x_0$ .

1.100. SATZ.  *$CW$ -Komplexe sind lokal zusammenziehbar.*

BEWEIS. Sei  $X$  ein CW-Komplex, sei  $x_0 \in e_{i_0}^{n_0} \subset X^{n_0} \setminus X^{n_0-1}$ , und sei  $U \subset X$  eine Umgebung von  $x_0$ . Sei  $V^{n_0} \subset U \cap X^{n_0}$  das Bild eines kleinen Balles in  $B^{n_0}$  unter der charakteristischen Abbildung  $\Phi_{i_0}^{n_0}$ , beziehungsweise  $V^0 = \{x_0\}$  für den Fall dass  $n_0 = 0$  und  $x \in X^0$ . Dann konstruieren wir induktiv offene Mengen  $V^n \subset U \cap X^n$  mit  $V^n \cap X^{n-1} = V^{n-1}$  für alle  $n > n_0$ , wobei wieder

$$(\Phi_i^n)^{-1}(V^n) = \left\{ x \in D^n \mid \frac{x}{|x|} \in (\varphi_i^n)^{-1}(V_j^{n-1}) \text{ und } |x| > 1 - \varepsilon_i^n \right\} \subset (\Phi_i^n)^{-1}(U)$$

für ein hinreichend kleines  $\varepsilon_i^n \in (0, 1)$ . Anschliessend setzen wir  $V = \bigcup V^n$ .

Wir können jetzt eine Abbildung  $H$  wie in Definition 1.98 definieren, indem wir — beginnend mit der „höchsten“ Dimension — Punkte innerhalb einer Zelle auf ihren Rand projizieren. Da Zellen beliebig hohe Dimension haben können, müssen wir vorsichtig sein. Wir definieren zunächst  $H^n: V^n \times [0, 1] \rightarrow V^n$  für  $n > n_0$  durch

$$H^n(\Phi_i^n(x), t) = \Phi_i^n\left(\frac{x}{|x|^t}\right)$$

für alle  $x \in V^n \cap e_i^n$ . Hier nutzen wir aus, dass  $\varepsilon_i^n < 1$ , also  $|x| > 0$  für alle  $x \in (\Phi_i^n)^{-1}(V^n)$ . Offensichtlich gilt also

$$H^n(V^n, 1) \subset V^{n-1} \quad \text{und} \quad H^n(x, t) = x \text{ für alle } x \in V^{n-1}.$$

Außerdem definieren wir  $H^{n_0}: V^{n_0} \times [0, 1] \rightarrow V^{n_0}$  durch

$$H^{n_0}(\Phi_{i_0}^{n_0}(x), t) = \Phi_{i_0}^{n_0}\left((1-t)x + t(\Phi_{i_0}^{n_0})^{-1}(x_0)\right).$$

Wir schreiben  $P^n = H(\cdot, 1): V^n \rightarrow V^{n-1}$  und definieren  $H: V \times [0, 1] \rightarrow V$  für  $x \in V^n$  durch

$$H(x, t) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq t \leq 2^{n_0-n-1}, \text{ und} \\ H^{n'}((P^{n'+1} \circ \dots \circ P^n)(x), 2^{n'+1-n_0}t - 1) & \text{für } 2^{n_0-n'-1} \leq t \leq 2^{n_0-n'} \end{cases}.$$

Dann ist  $H$  die gewünschte Abbildung. Für die Stetigkeit von  $H$  reicht nach Proposition 1.96 und Satz 1.74 (2), dass  $H(\Phi_i^n(\cdot), \cdot): D^n \times [0, 1] \rightarrow X$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und alle  $i \in I^n$  stetig ist. Wir schreiben  $[0, 1]$  als CW-Komplex mit den 1-Zellen

$$[0, 1] = [0, 2^{n_0-n-1}] \cup [2^{n_0-n-1}, 2^{n_0-n}] \cup \dots \cup [2^{-1}, 2^0]$$

und benötigen mit dem gleichen Argument nur die Stetigkeit von  $H(\Phi_i^n(\cdot), \cdot)$  auf dem Produkt von  $D^n$  mit den einzelnen Teilintervallen, aber die folgt direkt aus der Konstruktion der  $H^n$  und  $H$ . Man beachte, dass wir trotz beliebig hoher „Kontraktionsgeschwindigkeiten“ nahe  $t = 0$  aufgrund der Quotiententopologie auf  $X$  keine Probleme mit der Stetigkeit bei  $t = 0$  bekommen.  $\square$

1.101. FOLGERUNG (aus Satz 1.100). *Sei  $X$  ein CW-Komplex, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (1)  $X$  ist zusammenhängend.
- (2)  $X$  ist wegzusammenhängend.
- (3)  $X^1$  ist zusammenhängend.
- (4)  $X^1$  ist wegzusammenhängend.

BEWEIS. (1)  $\implies$  (2). Sei  $x \in X$ , und sei  $Z_x$  die Wegzusammenhangskomponente von  $x$ . Da  $X$  lokal zusammenziehbar ist, folgt:

- (1)  $Z_x$  ist offen, denn alle  $z \in Z_x$  haben eine zusammenziehbare Umgebung  $U$ . Sei  $H: U \times [0, 1] \rightarrow U$  die Kontraktion, dann ist  $t \mapsto H(z, t)$  ein Weg von  $y$  nach  $z \in U$ . Also kann jeder Punkt  $z \in U$  mit  $y$ , also auch mit  $x$  verbunden werden.

- (2)  $Z_x$  ist abgeschlossen, denn sei  $y \in \overline{Z_x}$ , und sei  $U$  eine zusammenziehbare Umgebung von  $y$ , dann gibt es einen Punkt in  $U \cap Z_x$ , der sowohl mit  $x$  als auch mit  $y$  durch einen Weg verbunden werden kann, also kann auch  $x$  mit  $y$  durch einen Weg verbunden werden.

Somit ist  $Z_x$  offen, abgeschlossen und nicht leer. Wenn  $X$  zusammenhängend ist, folgt  $X = Z_x$ , somit ist  $X$  auch wegzusammenhängend.

Da jeder wegzusammenhängende Raum nach 1.67 (2) zusammenhängend ist, folgt also (1)  $\iff$  (2). Da  $X^1$  selbst ein CW-Komplex ist, folgt auch (3)  $\iff$  (4).

(1)  $\implies$  (3). Wir nehmen an, dass  $X^1$  nicht zusammenhängend sei. Dann existiert eine offene und abgeschlossene Menge  $\emptyset \neq A^1 \neq X^1$  mit offenem und abgeschlossenen Komplement  $\emptyset \neq B^1 \neq X^1$ , und  $A^n$  und  $B^n$  sind sogar Unterkomplexe, da abgeschlossene Zellen zusammenhängend sind.

Wir zeigen induktiv, dass  $X^n$  nicht zusammenhängend ist, indem wir nichtleere abgeschlossene Mengen  $A^n$  und  $B^n$  mit

$$A^n \cap X^{n-1} = A^{n-1}, \quad B^n \cap X^{n-1} = B^{n-1}, \quad \text{und} \quad X^n = A^n \dot{\cup} B^n \quad (*)$$

angeben. Betrachte dazu  $\varphi_i^n: S^{n-1} = \partial D^n \rightarrow X^{n-1}$  für  $i \in I^n$ . Da  $S^{n-1}$  zusammenhängend ist für  $n \geq 2$ , ist auch  $\varphi_i^n(S^{n-1})$  zusammenhängend, und somit gilt entweder  $\partial e_i^n = \varphi_i^n(S^{n-1}) \subset A^{n-1}$  oder  $\partial e_i^n \subset B^{n-1}$ . Wir können jetzt Unterkomplexe  $\emptyset \neq A^n, B^n \subset X^n$  definieren durch

$$A^n = A^{n-1} \cup \bigcup_{\substack{i \in I^n \\ \partial e_i^n \subset A^{n-1}}} \bar{e}_i^n \quad \text{und} \quad B^n = B^{n-1} \cup \bigcup_{\substack{i \in I^n \\ \partial e_i^n \subset B^{n-1}}} \bar{e}_i^n,$$

und es gilt (\*). Ausserdem sind  $A^n, B^n$  als Unterkomplexe abgeschlossen. Schliesslich folgt

$$X = A \dot{\cup} B \quad \text{mit} \quad A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A^n \quad \text{und} \quad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} B^n,$$

und  $A$  und  $B$  sind beide abgeschlossen und nicht leer, also ist auch  $X$  nicht zusammenhängend.

(4)  $\implies$  (2). Sei jetzt  $X^1$  wegzusammenhängend, und sei  $x \in X^0$ . Wir zeigen induktiv, dass  $X^n$  auch wegzusammenhängend ist. Sei also  $y \in X^n$ , dann suchen wir einen Weg von  $y$  nach  $x$ . Falls  $y \in X^{n-1}$ , sind wir nach Induktionsvoraussetzung fertig.

Ansonsten ist  $y = \Phi_i^n(y_0)$  mit  $y_0 \in D^n$ . Wir wählen  $z_0 \in S^{n-1} = \partial D^n$  und erhalten einen Weg

$$s \mapsto \Phi_i^n((1-s)y_0 + sz_0)$$

von  $y$  nach  $z = \Phi_i^n(z_0) \in X^{n-1}$ , und somit auch einen Weg von  $y$  nach  $x$  nach Induktionsvoraussetzung. Damit ist  $X^n$  dann auch wegzusammenhängend.

Seien schliesslich  $x, y \in X$  beliebig, dann existiert ein  $N > 0$  mit  $x, y \in X^N$ , und somit lassen sich  $x, y$  durch einen Weg in  $X^N \subset X$  verbinden.  $\square$

## 1.10. Übungen zu Kapitel 1

### Übungen zu Abschnitt 1.1.

1.102. ÜBUNG. Die Metrik der französischen Eisenbahnen. Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum. Man setze

$$d_f(x, y) = \begin{cases} \|y - x\| & \text{falls } x \text{ und } y \text{ kollinear, und} \\ \|x\| + \|y\| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

- (1)  $(V, d_f)$  ist ein metrischer Raum.
- (2) Sei  $d_n(x, y) = \|y - x\|$  die übliche Metrik. Die Identität  $\text{id}_V: (V, d_f) \rightarrow (V, d_n)$  ist stetig, nicht jedoch  $\text{id}_V: (V, d_n) \rightarrow (V, d_f)$ .

1.103. ÜBUNG. Seien  $(X, d), (Y, d')$  metrische Räume und  $\alpha \in (0, 1]$ . Eine Abbildung  $F: X \rightarrow Y$  heißt  $\alpha$ -Höldersch, falls eine Konstante  $C > 0$  existiert, so dass für alle  $x, y \in X$  gilt:

$$d'(F(x), F(y)) \leq C d(x, y)^\alpha .$$

1-Höldersche Abbildungen heissen auch Lipschitzsch. Zeigen Sie, dass jede  $\alpha$ -Höldersche Abbildung stetig ist.

1.104. ÜBUNG. Sei  $p$  eine Primzahl. Jede rationale Zahl  $q \neq 0$  lässt sich eindeutig schreiben als

$$q = p^r \frac{a}{b} ,$$

mit  $r, a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$ , so dass  $p, a$  und  $b$  paarweise teilerfremd sind. In diesem Fall definieren wir die  $p$ -adische Bewertung von  $q$  durch  $\|q\|_p = p^{-r}$  und  $\|0\|_p = 0$ . Dadurch wird die  $p$ -adische Metrik

$$d_p(x, y) = \|y - x\|_p$$

auf  $\mathbb{Q}$  induziert.

- (1) Zeigen Sie, dass  $d_p$  wirklich eine Metrik ist, also die Axiome (1)–(3) aus Definition 1.1 erfüllt.
- (2) Zeigen Sie, dass eine verschärfte Dreiecksungleichung gilt:

$$d_p(x, z) \leq \max\{d_p(x, y), d_p(y, z)\} ,$$

und „ $\leq$ “ kann nur auftreten, wenn  $d_p(x, y) = d_p(y, z)$  gilt.

- (3) Folgern Sie daraus: Für alle  $x, y \in (\mathbb{Q}, d_p)$  und alle  $\varepsilon, \delta > 0$  seien  $B_\delta(x)$  und  $B_\varepsilon(y)$  metrische Bälle bezüglich  $d_p$ , dann sind  $B_\delta(x)$  und  $B_\varepsilon(y)$  entweder disjunkt, oder einer der beiden Bälle enthält den anderen.

1.105. ÜBUNG. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, und sei  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge in  $X$ . Zeigen Sie: die Folge  $x_i$  konvergiert genau dann gegen  $x \in X$ , wenn es zu jeder Umgebung  $U$  von  $x$  in  $X$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  gibt, so dass  $x_i \in U$  für alle  $i \geq n_0$ .

1.106. ÜBUNG. Seien  $(X, d)$  und  $(Y, d')$  metrische Räume, und sei  $x \in X$ . Zeigen Sie: eine Abbildung  $F: (X, d) \rightarrow (Y, d')$  ist genau dann stetig am Punkt  $x$ , wenn die Urbilder aller Umgebungen von  $F(x)$  in  $Y$  wiederum Umgebungen von  $x$  sind.

*Übungen zu Abschnitt 1.2.*

1.107. ÜBUNG. Sei  $X$  eine beliebige Menge, und sei

$$\mathcal{O} = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ ist eine endliche Menge}\} \cup \{\emptyset\} \subset \mathcal{P}X .$$

Zeigen Sie, dass  $\mathcal{O}$  eine Topologie auf  $X$  definiert. Diese Topologie heißt auch die *koendliche Topologie*.

1.108. ÜBUNG. Die folgende Konstruktion ist wichtig in der algebraischen Geometrie. Wir nennen eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{C}^n$  *Zariski-abgeschlossen*, wenn es eine Menge  $P \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$  von Polynomen gibt, so dass

$$A = \{z \in \mathbb{C}^n \mid p(z) = 0 \text{ für alle } p \in P\} . \quad (*)$$

Eine Menge  $U \subset \mathbb{C}^n$  heißt *Zariski-offen*, wenn  $\mathbb{C}^n \setminus U$  Zariski-abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass die Menge  $\mathcal{O}_Z$  aller Zariski-offenen Teilmengen eine Topologie bildet. Diese Topologie heißt auch die *Zariski-Topologie*.

*Hinweis:* Überlegen Sie sich, dass es äquivalent (und etwas einfacher) ist, zu zeigen: (1)  $\emptyset$  und  $\mathbb{C}^n$  sind Zariski-abgeschlossen; (2) wenn  $A_1, \dots, A_k$  Zariski-abgeschlossen sind, dann auch  $A_1 \cup \dots \cup A_k$

(betrachten Sie hierzu geeignete Produkte der definierenden Polynome); (3) wenn alle  $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{P}\mathbb{C}^n$  Zariski-abgeschlossen sind, dann auch

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A.$$

*Bemerkung:* Aus dem Hilbertschen Basissatz folgt, dass man für jedes  $A$  nur jeweils endlich viele Polynome braucht, um  $A$  wie in (\*) zu definieren.

1.109. ÜBUNG. Seien  $X$  und  $Y$  beliebige Mengen. Zeigen Sie:

- (1) Sei  $\mathcal{O}_\delta = \mathcal{P}X$  die diskrete Topologie, und sei  $\mathcal{O}_K = \{\emptyset, Y\}$  die Klumpentopologie. Dann sind für jeden beliebigen topologischen Raum  $(Z, \mathcal{O})$  alle Abbildungen  $F: (X, \mathcal{O}_\delta) \rightarrow (Z, \mathcal{O})$  und alle Abbildungen  $G: (Z, \mathcal{O}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_K)$  stetig.
- (2) Seien  $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$  beliebige Topologien auf  $X$  und  $Y$ . Falls für jeden beliebigen topologischen Raum  $(Z, \mathcal{O})$  alle Abbildungen  $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{O})$  und alle Abbildungen  $G: (Z, \mathcal{O}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  stetig sind, dann ist  $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_\delta$  die diskrete und  $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_K$  die Klumpentopologie.

*Übungen zu Abschnitt 1.3.*

1.110. ÜBUNG. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, und seien  $A, A_0$  und  $A_1$  abgeschlossene Teilmengen von  $X$ , und  $A_0$  und  $A_1$  seien disjunkt. Zeigen Sie:

- (1) die Funktion  $d_A: X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $d_A(x) = \inf_{a \in A} d(a, x)$  ist stetig;
- (2) es gilt  $d_A(x) = 0$  genau dann, wenn  $x \in A$ ;
- (3) die Funktion  $f = d_{A_0}/(d_{A_0} + d_{A_1})$  hat die in Satz 1.26 (3) geforderten Eigenschaften.

1.111. ÜBUNG. Sei  $X$  eine Menge mit mindestens zwei Elementen, und sei  $\mathcal{O}_K$  die Klumpentopologie auf  $X$ . Welche Trennungseigenschaften besitzt  $(X, \mathcal{O}_K)$ ?

1.112. ÜBUNG. Es sei  $X$  eine unendliche Menge mit der koendlichen Topologie  $\mathcal{O}$  aus Aufgabe 1.107. Welche Trennungseigenschaften besitzt  $(X, \mathcal{O})$ ?

1.113. ÜBUNG. Eine Teilmenge  $U \subset \mathbb{N}$  heiße offen bezüglich der Ordnungstopologie  $\mathcal{O}_<$ , wenn aus  $m \in U$  auch  $n \in U$  für alle  $n \geq m$  folgt.

- (1) Überprüfen Sie, dass  $\mathcal{O}_<$  die Axiome einer Topologie erfüllt.
- (2) Welche Trennungseigenschaften hat  $(\mathbb{N}, \mathcal{O}_<)$ ?

1.114. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) die Zariski-Topologie auf  $\mathbb{C}^n$  ist für kein  $n \geq 1$  hausdorffsch, erfüllt aber (T1).
- (2) Jedes Polynom  $p \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$  definiert eine stetige Abbildung  $p: (\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_Z) \rightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{O}_Z)$ .
- (3) Versuchen Sie zu erklären, warum (2) nicht Bemerkung 1.28 (2) widerspricht.

*Hinweis:* Um (1) zu beweisen, überlegen Sie sich, dass für alle Polynome  $p$  gilt:

- (1) wenn  $p(x) \neq 0$ , dann existiert ein kleiner metrischer Ball  $B_\varepsilon(x)$ , auf dem  $p$  nirgends verschwindet.
- (2) wenn  $p$  auf einem kleinen metrischen Ball verschwindet, dann verschwindet es auf ganz  $\mathbb{C}^n$ .

*Übungen zu Abschnitt 1.4.*

1.115. ÜBUNG. Betrachte den Raum  $X = [0, 1]^2$  mit

$$d((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_2 - y_1| & \text{falls } x_1 = x_2, \text{ und} \\ 1 & \text{falls } x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

- (1) Zeigen Sie, dass  $d$  eine Metrik auf  $X$  ist.
- (2) Welche Abzählbarkeitseigenschaften erfüllt  $(X, \mathcal{O}_d)$ ?

Übungen zu Abschnitt 1.5.

1.116. ÜBUNG. Betrachten Sie den obigen Raum  $X = [0, 1]^2$ .

(1) Geben Sie einen Homöomorphismus  $X \rightarrow \prod_{i \in [0,1]} [0, 1]$  an.

(2) Geben Sie einen Homöomorphismus zu einem nichttrivialen topologischen Produkt an.

1.117. ÜBUNG. Sei  $(X, d_X)$  ein metrischer Raum mit Topologie  $\mathcal{O}_{d_X}$ , und sei  $Y \subset X$  versehen mit der induzierten Metrik  $d_Y = d|_{Y \times Y}$ . Zeigen Sie, dass die von  $\mathcal{O}_{d_X}$  induzierte Unterraumtopologie  $\mathcal{O}_Y$  mit der metrischen Topologie  $\mathcal{O}_{d_Y}$  übereinstimmt.

1.118. ÜBUNG. Seien  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  metrische Räume, dann definieren wir eine Metrik  $d_{X \times Y}$  auf dem kartesischen Produkt  $X \times Y$  durch

$$d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}.$$

Zeigen Sie, dass die von  $\mathcal{O}_{d_X}$  und  $\mathcal{O}_{d_Y}$  induzierte Produkttopologie mit der metrischen Topologie  $\mathcal{O}_{d_{X \times Y}}$  übereinstimmt.

1.119. ÜBUNG. Sei  $\mathbb{k}$  ein beliebiger Körper. Es seien  $V_i$  Vektorräume über  $\mathbb{k}$  für  $i \in I$ . Wir betrachten die direkte Summe und das

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i \in I} V_i &:= \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in V_i \text{ für alle } i \in I, \text{ fast alle } x_i = 0\} \\ \subset \prod_{i \in I} V_i &:= \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in V_i \text{ für alle } i \in I\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(1) Die direkte Summe ist ein Koproduct in  $\mathcal{Vec}_{\mathbb{k}}$ .

(2) Das direkte Produkt ist ein Produkt in  $\mathcal{Vec}_{\mathbb{k}}$ .

(3) Für die Dualräume gilt

$$\left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* = \prod_{i \in I} V_i^*.$$

1.120. ÜBUNG. Wir versehen  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$  und alle Unterräume mit der Standardtopologie. Welche der folgenden Abbildungen sind Einbettungen:

$$F: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad F(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), \quad (\text{a})$$

$$G: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad G(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t). \quad (\text{b})$$

$$H: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \quad H(n) = \begin{cases} 0 & n = 0, \\ 1/n & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{c})$$

1.121. ÜBUNG. Sei  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$  eine überabzählbare Familie topologischer Räume mit  $\#X_i > 1$  für alle  $i \in I$ . Zeigen Sie: dann besitzt  $\prod_i (X_i, \mathcal{O}_i)$  nicht die erste Abzählbarkeitseigenschaft.

Übungen zu Abschnitt 1.6.

1.122. ÜBUNG. Seien  $(X, \mathcal{O}), (Y, \mathcal{O})$  Hausdorff-Räume,  $X$  sei kompakt, und sei  $F: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass dann auch  $F(X) \subset Y$ , versehen mit der Unterraumtopologie, kompakt ist.

1.123. ÜBUNG. Zeigen Sie: kompakte Räume sind normal, erfüllen also insbesondere (T4). Dazu zeigt am besten zuerst, dass kompakte Räume (T3) erfüllen.

*Hinweis:* Per Definitionem sind kompakte Räume Hausdorffsch.

1.124. ÜBUNG. Zeigen Sie: Wenn  $(Y, d)$  metrischer Raum und  $(f_i: X \rightarrow Y)_i$  eine Folge stetiger Funktionen ist, dann konvergiert  $(f_i)_i$  genau dann in der kompakt-offenen Topologie gegen  $f \in C(X, Y)$ , wenn  $(f_i)$  gleichmäßig auf Kompakta gegen  $f$  konvergiert.

*Übungen zu Abschnitt 1.7.*

1.125. ÜBUNG. Sei

$$X = \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid x \neq 0 \right\} \cup (\{0\} \times [-1, 1]) \subset \mathbb{R}^2$$

versehen mit der von  $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$  induzierten Unterraumtopologie.

- (1) Skizzieren Sie  $X$ .
- (2) Zeigen Sie, dass  $X$  zusammenhängend ist.
- (3) Bestimmen Sie die Wegzusammenhangskomponenten von  $X$ .

1.126. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Der Raum der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  ist total unzusammenhängend sowohl bezüglich der metrischen Topologie als auch bezüglich der  $p$ -adischen Topologien für alle Primzahlen  $p$ .
- (2) Der Raum  $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_Z)$  ist zusammenhängend.

1.127. ÜBUNG. Sei  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$  eine beliebige Familie topologischer Räume und  $X = \prod_i (X_i, \mathcal{O}_i)$  ihr Produkt. Zeigen Sie, dass die Wegzusammenhangskomponente eines Punktes  $(x_i)_{i \in I} \in X$  das Produkt der Wegzusammenhangskomponenten der Punkte  $x_i \in X_i$  ist. Insbesondere ist  $X$  genau dann wegzusammenhängend, wenn alle  $X_i$  wegzusammenhängend sind.

*Übungen zu Abschnitt 1.8.*

1.128. ÜBUNG. Führen Sie den Beweis von Satz 1.74 (2) aus.

1.129. ÜBUNG. Seien  $(X, \mathcal{O}_X)$  und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  topologische Räume, sei  $V \subset Y$ , und sei  $f: V \rightarrow X$  stetig bezüglich der Unterraumtopologie auf  $V$ . Zeigen Sie:

- (1) die Topologie  $\mathcal{O}_X$  ist genau die von der Verklebungstopologie auf  $X \subset X \cup_f Y$  induzierte Unterraumtopologie;
- (2) wenn  $V$  abgeschlossen ist und  $X$  und  $Y$  beide (T1) erfüllen, dann gilt (T1) auch für  $X \cup_f Y$ .

1.130. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A$  in  $X$  abgeschlossen. Dann ist eine Teilmenge  $B$  von  $A$  genau dann in  $X$  abgeschlossen, wenn sie in  $A$  abgeschlossen ist.
- (2) Sei  $X = A_1 \cup \dots \cup A_k$  Vereinigung abgeschlossener Teilmengen, dann ist  $B$  in  $X$  genau dann abgeschlossen, wenn alle  $B \cap A_i$  in  $A_i$  abgeschlossen sind.
- (3) Das Argument in (2) funktioniert für eine beliebige lokal endliche Vereinigung: sei  $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ , so dass alle  $A_i$  in  $X$  abgeschlossen sind, und so dass jeder Punkt eine Umgebung  $U$  besitzt mit  $U \cap A_i = \emptyset$  für fast alle  $i$ . Dann ist  $B$  in  $X$  genau dann abgeschlossen, wenn alle  $B \cap A_i$  abgeschlossen sind.
- (4) Sei  $X$  wie in Teil (2) beziehungsweise wie in Teil (3). Seien  $f_i: A_i \rightarrow Y$  stetige Abbildungen mit  $f_i|_{A_i \cap A_j} = f_j|_{A_i \cap A_j}$ , dann gibt es genau eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  mit  $f|_{A_i} = f_i$ , und  $f$  ist stetig.

1.131. ÜBUNG. Sei  $S^1 \subset \mathbb{C}$  der komplexe Einheitskreis, und sei  $z = e^{i\varphi} \in S^1 \subset \mathbb{C}$ . Wir betrachten auf  $S^1$  die von  $x \sim zx$  erzeugte Äquivalenzrelation, das heißt,  $x \sim y$  genau dann, wenn  $x/y = z^k$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ . Bestimmen Sie die Quotiententopologie auf  $S^1/\sim$ , unterscheiden Sie die Fälle  $\varphi \in 2\pi\mathbb{Q}$  und  $\varphi \notin 2\pi\mathbb{Q}$ .

1.132. ÜBUNG. Betrachten Sie auf  $\mathbb{R}^2$  die Äquivalenzrelation

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \iff (y_1, y_2) = \left( rx_1, \frac{x_2}{r} \right) \text{ für ein } r \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- (1) Skizzieren Sie die Äquivalenzklassen im  $\mathbb{R}^2$ .
- (2) Skizzieren Sie  $X = \mathbb{R}^2 / \sim$ .
- (3) Beschreiben Sie die Quotiententopologie auf  $X$ , z.B., indem Sie eine Basis angeben.

1.133. ÜBUNG. Betrachten Sie die in Aufgabe 1.132 definierte Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $\mathbb{R}^2$ . Sei wie vorhin  $X = \mathbb{R}^2 / \sim$ , und sei  $Y := (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) / \sim$ .

- (1) Welche der Trennungseigenschaften (T0), (T1), (T3), (T4) erfüllt  $X$ ?
- (2) Zeigen Sie, dass  $Y$  zum Raum aus Beispiel 1.29 homöomorph ist.
- (3) Welche Trennungseigenschaften erfüllt  $Y$ ?

1.134. ÜBUNG. Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein normaler topologischer Raum, sei  $f: X \rightarrow Y$  eine surjektive Abbildung, und sei  $\mathcal{O}_Y$  die Quotiententopologie auf  $Y$ . Zeigen Sie:

- (1) wenn Urbilder  $f^{-1}(\{y\})$  von Punkten in  $Y$  abgeschlossen sind in  $X$ , gilt (T1) für  $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ;
- (2) wenn  $f$  abgeschlossen ist, das heißt, wenn  $f(A) \subset Y$  abgeschlossen ist für alle abgeschlossenen  $A \subset X$ , dann gilt (T4) für  $(Y, \mathcal{O}_Y)$ .

Wir haben also ein einfaches Kriterium dafür, wann Quotienten normaler Räume wiederum normal sind.

*Übungen zu Abschnitt 1.9.*

1.135. ÜBUNG. Seien  $(X, \mathcal{O}_X)$ ,  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  und  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  topologische Räume mit stetigen Abbildungen

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{O}_Z).$$

- (1) Falls  $\mathcal{O}_Y$  die von  $g$  und  $\mathcal{O}_Z$  induzierte Topologie ist, und  $\mathcal{O}_X$  die von  $f$  und  $\mathcal{O}_Y$  induzierte Topologie ist, dann ist  $\mathcal{O}_X$  auch gleich der von  $g \circ f$  und  $\mathcal{O}_Z$  induzierten Topologie.
- (2) Falls  $\mathcal{O}_Y$  die von  $f$  und  $\mathcal{O}_X$  koinduzierte Topologie ist, und  $\mathcal{O}_Z$  die von  $g$  und  $\mathcal{O}_Y$  koinduzierte Topologie ist, dann ist  $\mathcal{O}_Z$  auch gleich der von  $g \circ f$  und  $\mathcal{O}_X$  koinduzierten Topologie.

1.136. ÜBUNG. Sei  $\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{H}$  ein (Schief-)Körper, und sei  $k = 1, 2$  oder  $4 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{k}$ , dann sei

$$(\mathbb{k}P^n, \mathcal{O}_{\mathbb{k}P^n}) = (\mathbb{k}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}) / \sim,$$

wobei  $(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n)$  genau dann, wenn es ein  $z \in \mathbb{k}^* = \mathbb{k} \setminus \{0\}$  gibt, so dass  $y_i = zx_i$  für alle  $i = 0, \dots, n$ . Die Äquivalenzklasse von  $(x_0, \dots, x_n)$  wird auch als  $[x_0 : \dots : x_n]$  geschrieben. Zeigen Sie, dass  $\mathbb{k}P^n$ , versehen mit der Quotiententopologie, eine  $kn$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie dazu, dass  $\mathbb{k}P^n$  die Eigenschaften (T2) und (A2) besitzt, und konstruieren Sie Homöomorphismen von  $U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\} \subset \mathbb{k}P^n$  nach  $\mathbb{k}^n \cong \mathbb{R}^{nk}$ .

1.137. ÜBUNG. Zeigen Sie, dass  $\mathbb{k}P^m$  homöomorph zum Unterraum

$$\{[x_0 : \dots : x_m : 0 : \dots : 0] \mid (x_0, \dots, x_m) \in \mathbb{k}^{m+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}\} \subset \mathbb{k}P^n$$

ist für alle  $0 \leq m \leq n$ , und dass diese Unterräume gerade die abgeschlossenen Zellen eines CW-Komplexes mit je einer Zelle der Dimension  $0, k, \dots, kn$  bilden. Versuchen Sie insbesondere, charakteristische Abbildungen  $\Phi^{kj}: D^{kj} \rightarrow \mathbb{k}P^n$  anzugeben, und überprüfen Sie, dass die oben definierte Topologie mit der Topologie des so definierten CW-Komplexes übereinstimmt.

1.138. ÜBUNG. Wir definieren

$$\mathbb{k}P^\infty = \varinjlim \mathbb{k}P^n .$$

Sei  $\mathbb{k}^\infty$  der Vektorraum der endlichen  $\mathbb{k}$ -wertigen Folgen, und sei

$$Q = (\mathbb{k}^\infty \setminus \{0\}) / \sim \quad \text{mit „}\sim\text{“ wie oben.}$$

Zeigen Sie:

- (1) die natürliche Abbildung  $F: \mathbb{k}P^\infty \rightarrow Q$  ist bijektiv;
- (2) sei  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $\mathbb{k}^\infty$  und sei  $\mathcal{O}_Q$  die dazugehörige Quotiententopologie auf  $Q$ , dann ist  $F$  stetig;
- (3) (*Zusatzaufgabe*) die Umkehrabbildung  $F^{-1}$  ist für keine Norm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{k}^\infty$  stetig.

1.139. ÜBUNG. Es seien  $X, Y$  zwei  $CW$ -Komplexe, dann bezeichne  $\mathcal{O}_\square$  die Produkttopologie auf  $X \times Y$  und  $\mathcal{O}_{CW}$  die Topologie zur  $CW$ -Struktur aus Bemerkung 1.97.

- (1) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{O}_{CW}$  stets feiner ist als  $\mathcal{O}_\square$ .
- (2) Folgern Sie aus Proposition 1.96, dass  $\mathcal{O}_{CW} = \mathcal{O}_\square$  falls  $X$  und  $Y$  lokal kompakt sind.
- (3) Funktioniert das Argument in (2) auch, wenn nur einer der Räume lokal kompakt ist?

## Fundamentalgruppe und Überlagerungen

Wir behandeln in diesem Kapitel die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes. Diese Gruppe lässt sich für geeignete topologische Räume  $X$  auf zweierlei Art definieren:

- (1) Als Gruppe  $\pi_1(X, x_0)$  der Homotopieklassen von Wegen  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  mit festem Anfangs- und Endpunkt  $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \in X$ , oder
- (2) Als Gruppe  $\Gamma$ , die auf einem einfach zusammenhängenden Raum  $\tilde{X}$  operiert, mit  $X \cong \tilde{X}/\Gamma$ .

2.1. BEISPIEL. Sei  $X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und sei  $p = 1$ .

- (1) Wir beschränken uns im folgenden auf stückweise glatte Wege. Sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  ein Weg mit  $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$ , dann erhalten wir die Umlaufzahl

$$\nu(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)} dt \in \mathbb{Z}.$$

In der Tat kann man zeigen, dass je zwei Wege in  $\mathbb{C}^*$  mit Anfangs- und Endpunkt  $p = 1$  und der gleichen Umlaufzahl um 0 in  $\mathbb{C}^*$  (mit festgehaltenen Anfangs- und Endpunkten) homotop sind. Also ist  $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \cong \mathbb{Z}$ .

- (2) Betrachte die (leicht modifizierte) Exponentialabbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  mit  $z \mapsto e^{2\pi i z}$ , dann gilt

$$e^{2\pi i z_0} = e^{2\pi i z_1} \iff z_1 - z_0 \in \mathbb{Z}.$$

Wir können also  $\mathbb{C}^*$  als Quotient des einfach zusammenhängenden Raumes  $\mathbb{C}$  nach der Gruppe  $\Gamma = \mathbb{Z}$  schreiben; dabei operiert  $\mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{C}$  durch Addition, geometrisch also durch Verschiebungen.

Wir wollen ab sofort unter einem Raum immer einen topologischen Raum verstehen, und unter einer Abbildung, einer Funktion oder einem Weg immer eine stetige Abbildung, eine stetige Funktion, oder einen stetigen Weg.

### 2.1. Homotopien und Homotopieäquivalenz

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff der Homotopie von Abbildungen ein. Homotopien sind Wege im Raum der Abbildungen. Indem wir statt stetiger Abbildungen Äquivalenzklassen homotoper stetiger Abbildungen betrachten, können wir den Begriff des Homöomorphismus durch den wesentlich größeren Begriff der Homotopieäquivalenz ersetzen. Im Rest dieser Vorlesung lernen wir Methoden kennen, um nicht homotope Abbildungen oder nicht homotopieäquivalente Räume voneinander zu unterscheiden.

Ab sofort geben wir die Topologien nicht mehr an, wenn es nicht unbedingt nötig ist. Falls nicht anders angegeben, seien Abbildungen zwischen topologischen Räumen immer stetig.

2.2. DEFINITION. Seien  $X, Y$  topologische Räume. Zwei Abbildungen  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$  heißen *homotop*, kurz  $f_0 \sim f_1$ , wenn es eine bezüglich der Produkttopologie stetige Abbildung  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  mit  $H(x, t) = f_t(x)$  für  $t \in \{0, 1\}$  gibt. Dann heißt  $H$  eine *Homotopie* zwischen  $f_0$

und  $f_1$ , und wir schreiben  $H_t = H(\circ, t): X \cong X \times \{t\} \rightarrow Y$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Die Menge aller zu  $f$  homotopen Abbildungen heißt die (*freie*) Homotopieklasse von  $f$  und wird mit  $[f]$  bezeichnet.

2.3. BEMERKUNG. (1) Homotopie ist eine Äquivalenzrelation (Übung 2.74), und ihre Äquivalenzklassen sind gerade Homotopieklassen.

(2) Homotopie ist verträglich mit Hintereinanderschalten von Abbildungen:

$$(f_0 \sim f_1: Y \rightarrow Z \quad \text{und} \quad g_0 \sim g_1: X \rightarrow Y) \quad \implies \quad (f_0 \circ g_0) \sim (f_1 \circ g_1): X \rightarrow Z .$$

2.4. DEFINITION. Seien  $X, Y$  topologische Räume. Eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt *Homotopieäquivalenz*, wenn es eine stetige Abbildung  $g: Y \rightarrow X$  gibt, so dass

$$g \circ f \sim \text{id}_X: X \rightarrow X \quad \text{und} \quad f \circ g \sim \text{id}_Y: Y \rightarrow Y .$$

In diesem Fall heißen  $X$  und  $Y$  *homotopieäquivalent*, und  $g$  heißt ein *Homotopieinverses* zu  $f$ .

2.5. BEISPIEL. Ein Raum  $X$  ist genau dann zum einpunktigen Raum  $Y = \{*\}$  homotopieäquivalent, wenn er zusammenziehbar ist. Sei dazu  $f: X \rightarrow Y$  die offensichtliche Abbildung, und sei  $g: Y \rightarrow X$  gegeben mit  $g(*) = x_0 \in X$ . Dann ist  $f \circ g = \text{id}_Y$ , und eine Homotopie zwischen  $\text{id}_X$  und  $g \circ f$  ist gerade eine Abbildung  $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$  wie in Definition 1.98.

2.6. BEMERKUNG. (1) Jeder Homöomorphismus  $f$  ist insbesondere eine Homotopieäquivalenz mit  $g = f^{-1}$ .

(2) Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation (Übung 2.75).

(3) Betrachte die *Homotopie-Kategorie*  $\mathcal{HTop}$  mit

$$\begin{aligned} \text{obj}(\mathcal{HTop}) &= \{ \text{topologische Räume} \} , \\ \text{hom}_{\mathcal{HTop}}(X, Y) &= \{ \text{stetige Abbildungen} \} / \sim . \end{aligned}$$

Die Identität auf  $X$  im Sinne von Definition 1.20 (3) ist die Homotopieklasse der Abbildung  $\text{id}_X$ . Die Verkettung von Homotopieklassen ist nach Bemerkung 2.3 (2) wohldefiniert.

Ein Morphismus  $f: X \rightarrow Y$  in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt invertierbar oder *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus  $g: Y \rightarrow X$  (ein *Inverses*) gibt, so dass

$$g \circ f = \text{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g = \text{id}_Y .$$

Beispiele sind Bijektionen in  $\mathcal{Set}$ , Gruppenisomorphismen in  $\mathcal{Grp}$ , lineare Isomorphismen in  $\mathcal{Vec}_{\mathbb{k}}$ , und natürlich Homöomorphismen in  $\mathcal{Top}$ . Nach obiger Definition sind Homotopieäquivalenzen gerade die Isomorphismen in  $\mathcal{HTop}$ .

Algebraische Topologie versucht als erstes Ziel, gewisse Klassen von Räumen bis auf Homotopieäquivalenz zu unterscheiden.

Oftmals ist freie Homotopie ein etwas zu grober Begriff. Beispielsweise ist ein Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  immer homotop zur konstanten Abbildung auf seinen Anfangspunkt.

2.7. DEFINITION. Ein *Paar topologischer Räume*, kurz *Paar*, besteht aus einem topologischen Raum  $X$  und einer beliebigen Teilmenge  $A \subset X$ . Eine *Abbildung*  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  von *Paaren* ist eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  mit  $f(A) \subset B$ . Ein *punktierter (topologischer) Raum*  $(X, x_0)$  ist ein Paar  $(X, \{x_0\})$  mit  $x_0 \in X$ . Der Punkt  $x_0$  heißt auch *Basispunkt*. Eine *punktierte Abbildung*  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  ist eine Abbildung der entsprechenden Paare, es gilt also  $f(x_0) = y_0$ .

2.8. DEFINITION. Es seien  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  Paare. Zwei Abbildungen  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  heißen *homotop relativ zu A*, wenn es eine Homotopie  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  zwischen  $f$  und  $g: X \rightarrow Y$  gibt mit

$$H(a, t) = f(a) = g(a) \quad \text{für alle } a \in A \text{ und alle } t \in [0, 1] .$$

Wir sprechen manchmal von Homotopien relativ zu  $A$ , ohne eine Teilmenge  $B \subset Y$  festzulegen. In diesem Fall können wir formal jede beliebige Teilmenge  $f(A) \subset B \subset Y$  zulassen. Diese spielt aber keine weitere Rolle.

Der Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$  mit  $\gamma(t) = e^{2\pi it}$  ist in  $\mathbb{C}^*$  frei homotop zu einem konstanten Weg vermöge

$$H(t, s) = e^{2\pi i(1-s)t}.$$

Wir werden aber bald sehen, dass  $\gamma$  nicht relativ zu  $\{0, 1\}$  (also relativ zu den Endpunkten) homotop zum konstanten Weg ist.

2.9. BEMERKUNG. Wir erinnern uns an die kompakt-offene Topologie aus Definition 1.61.

- (1) Wie in Satz 1.62 gehört zu jeder Homotopie  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  zwischen  $f, g: X \rightarrow Y$  ein stetiger Weg  $h: [0, 1] \rightarrow (C(X, Y), \mathcal{O}_{ko})$  von  $f$  nach  $g$  mit

$$(h(s))(x) = H_s(x) = H(x, s)$$

für alle  $x \in X, s \in [0, 1]$ . Wenn  $X$  lokal kompakt ist, liefert jeder solche Weg umgekehrt eine Homotopie. In diesem Fall sind Wegzusammenhangskomponenten in  $C(X, Y)$  also gerade Homotopieklassen von Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ .

- (2) Sei jetzt  $A \subset X$  eine beliebige Teilmenge und  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung, dann betrachte die Teilmenge

$$C_{f|A}(X, Y) = \{g \in C(X, Y) \mid g|_A = f|_A\} \subset C(X, Y),$$

dann liefert eine Homotopie relativ zu  $A$  einen Weg in  $C_{f|A}(X, Y)$  wie oben. Wenn  $X$  lokal kompakt ist, gehört wie oben zu jedem Weg in  $C_{f|A}(X, Y)$  eine relative Homotopie. Das folgt aus (1), indem man  $C_{f|A}(X, Y)$  mit der Unterraumtopologie versieht und deren charakterisierende Eigenschaft ausnutzt.

Zum Schluss geben wir ein Beispiel, dass Homotopieäquivalenzen mitunter nicht so offensichtlich sind, wie sie erscheinen.

2.10. DEFINITION. Eine Teilmenge  $A$  eines topologischen Raumes  $X$  heißt *Retrakt von  $X$* , wenn es eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow A$  mit  $f|_A = \text{id}_A$  gibt. Sie heißt *Deformationsretrakt*, wenn zusätzlich  $\iota \circ f: X \rightarrow X$  homotop zur Identität  $\text{id}_X$  ist, und *starker Deformationsretrakt*, wenn die Homotopie zwischen  $\iota \circ f$  und  $\text{id}_X$  sogar relativ zu  $A$  gewählt werden kann.

- 2.11. BEISPIEL. (1) Jede einpunktige Menge  $\{p\} \subset X$  ist Retrakt von  $X$ , aber nur dann Deformationsretrakt, wenn  $X$  zusammenziehbar ist. Beispielsweise ist  $\{1\} \subset \mathbb{C}^*$  kein Deformationsretrakt (Beweis später).

- (2) Der Einheitskreis  $S^1 \subset \mathbb{C}^*$  ist ein starker Deformationsretrakt von  $\mathbb{C}^*$  mit

$$f(z) = \frac{z}{|z|} \quad \text{und} \quad H(z, s) = \frac{z}{|z|^s}.$$

Er ist aber kein Retrakt von ganz  $\mathbb{C}$  (Beweis später).

Das folgende Beispiel soll zeigen, dass man sich nicht jede Deformationsretraktion vorstellen kann.

2.12. BEISPIEL. Bings „Haus mit zwei Zimmern“ kann man basteln, indem man zwei leere Dosen mit den Unterseiten aneinanderklebt. Dann bohrt man von jeder Seite durch einen Deckel und die gemeinsamen Unterseiten je ein Loch am Rand, und klebt je einen passenden Zylinder zwischen ein Deckel- und ein Unterseitenloch so ein, dass dieser auf seiner vollen Länge den jeweiligen Dosenrand berührt (Abbildung 1, linkes Bild). Man kann jetzt durch das Loch in der einen Dose in das „Zimmer“ in der anderen Dose gelangen und umgekehrt.

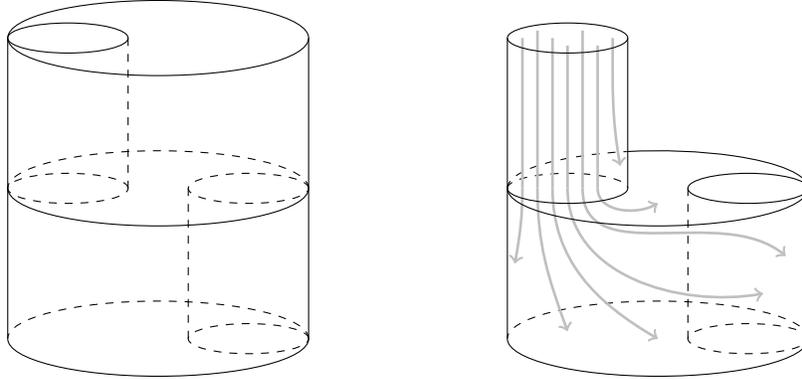


ABBILDUNG 1. Bings Haus mit zwei Räumen

Man überzeugt sich, dass Bings Haus ein starker Deformationsretrakt einer vollen Dose ist (Abbildung 1, rechtes Bild), genau wie ein Punkt in der Dose. Da Homotopieäquivalenz transitiv ist, ist Bings Haus zusammenziehbar. Die zugehörige Deformationsretraktion kann man sich aber kaum vorstellen.

## 2.2. Die Fundamentalgruppe

Die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes misst, wieviele Typen von nichtzusammenziehbaren Schleifen es in einem topologischen Raum gibt. Beispielsweise ist ein Fahrrad dann sicher an einem Gitter angeschlossen, wenn das Fahrradschloss sowohl im umgebenden Raum ohne Gitter, als auch im umgebenden Raum ohne Fahrrad nicht zusammenziehbar ist. Wir definieren hier die Fundamentalgruppe und geben erste Eigenschaften an. Für Anwendungen benötigen wir einige Techniken, die wir in den nächsten Abschnitten kennenlernen werden.

2.13. DEFINITION. Es sei  $(X, x)$  ein punktierter topologischer Raum. Eine *Schleife* in  $(X, x)$  ist ein Weg von  $x$  nach  $x$ , also eine Abbildung  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = \gamma(1) = x$ . Seien  $\gamma_1, \gamma_2$  zwei Schleifen in  $(X, x)$ , dann ist ihre *Verkettung* die Schleife  $\gamma_1\gamma_2: [0, 1] \rightarrow X$  mit

$$(\gamma_1\gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Die *Fundamentalgruppe*  $\pi_1(X, x)$  ist die Menge aller Schleifen in  $(X, x)$  modulo Homotopie relativ zu  $\{0, 1\}$ .

Bei der Verkettung werden also beide Schleifen nacheinander mit doppelter Geschwindigkeit durchlaufen. Wir benutzen Übung 1.130 um zu sehen, dass die Verkettung wieder stetig ist.

Homotopie relativ zu  $\{0, 1\}$  bedeutet für Schleifen soviel wie Homotopie bei festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt. Insbesondere gilt für eine solche Homotopie zwischen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$ , dass

$$\begin{aligned} H(0, s) = H(1, s) = x & \quad \text{für alle } s \in [0, 1], \text{ und} \\ H(t, s) = \gamma_s(t) & \quad \text{für alle } t \in [0, 1] \text{ und alle } s \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

2.14. SATZ.  $\pi_1(X, x)$  bildet mit der Verkettung eine Gruppe. Das neutrale Element und das Inverse zu  $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$  werden repräsentiert durch *e* beziehungsweise  $\bar{\gamma}: [0, 1] \rightarrow X$ , mit

$$e(t) = x \quad \text{und} \quad \bar{\gamma}(t) = \gamma(1 - t) \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

BEWEIS. Hier ist einiges zu zeigen: zunächst die Wohldefiniertheit der Verkettung relativer Homotopieklassen, dann die Gruppenaxiome.

Seien  $H_1$  und  $H_2: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  relative Homotopien zwischen den Schleifen  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  beziehungsweise zwischen  $\beta_0$  und  $\beta_1$ . Wir verketten die Homotopien und erhalten

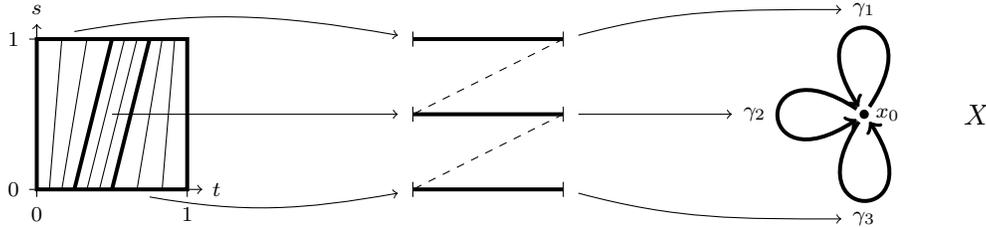
$$H = \begin{cases} H_1(2t, s) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ H_2(2t - 1, s) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Dann ist  $H$  eine Homotopie zwischen  $\alpha_0\beta_0$  und  $\alpha_1\beta_1$  relativ zu  $\{0, 1\}$ , also ist die Verkettung mit relativer Homotopie verträglich, und damit als Verknüpfung auf  $\pi_1(X, x)$  wohldefiniert.

Zur Assoziativität überlegen wir uns, dass

$$\begin{aligned} ((\gamma_1\gamma_2)\gamma_3)(t) &= \begin{cases} \gamma_1(4t) & 0 \leq t \leq 1/4, \\ \gamma_2(4t - 1) & 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ \gamma_3(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1; \end{cases} \\ (\gamma_1(\gamma_2\gamma_3))(t) &= \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \gamma_2(4t - 2) & 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ \gamma_3(4t - 3) & 3/4 \leq t \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Also konstruieren wir eine Homotopie zwischen  $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$  und  $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$  wie im folgenden Bild,



also in Formeln als

$$H(s, t) = \begin{cases} \gamma_1(4t/(1+s)) & 0 \leq t \leq (1+s)/4, \\ \gamma_2(4t - (1+s)) & (1+s)/4 \leq t \leq (2+s)/4, \\ \gamma_3(1 - 4(1-t)/(2-s)) & (2+s)/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Um zu zeigen, dass  $[e]$  ein linksneutrales Element ist, konstruieren wir ähnlich wie oben eine relative Homotopie zwischen  $e\gamma$  und  $\gamma$  für eine beliebige Schleife  $\gamma$ . Schließlich überprüfen wir, dass  $[\bar{\gamma}]$  nur von  $[\gamma]$  abhängt und zu  $[\gamma]$  linksinversiv ist. Dazu konstruieren wir eine Homotopie

$$H(t, s) = \begin{cases} \gamma(1 - 2st) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ \gamma(1 - 2s(1 - t)) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

zwischen  $e$  und  $\bar{\gamma}\gamma$ . Damit haben wir die Gruppenaxiome für  $\pi_1(X, x)$  nachgewiesen.

Insbesondere folgt, dass  $[e]$  das eindeutige, beidseitige neutrale Element und  $[\bar{\gamma}]$  das eindeutige, beidseitige Inverse zu  $[\gamma]$  ist.  $\square$

Wir werden später etwas nachlässig sein und manchmal  $\gamma$  statt  $[\gamma]$  schreiben.

**2.15. SATZ.** *Sei  $X$  ein Raum,  $x, y \in X$ . Jede Homotopieklasse von Wegen von  $x$  nach  $y$  induziert einen Isomorphismus von  $\pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$ . Insbesondere hängt der Isomorphietyp der Gruppe  $\pi_1(X, x)$  nicht vom Basispunkt  $x$  ab, wenn  $X$  wegzusammenhängend ist.*

**BEWEIS VON SATZ 2.15.** Sei  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  ein Weg von  $x$  nach  $y$ , dann betrachte die Abbildung

$$\pi_1(X, x) \ni \gamma \mapsto \bar{\alpha}\gamma\alpha \in \pi_1(X, y).$$

Wie im obigen Beweis sieht man, dass  $[\bar{\alpha}\gamma\alpha]$  weder von der Klammerung noch von den relativen Homotopieklassen von  $\alpha$  und  $\gamma$  abhängt. Es handelt sich um einen Homomorphismus, da

$$(\bar{\alpha}\gamma_1\alpha)(\bar{\alpha}\gamma_2\alpha) \sim (\bar{\alpha}\gamma_1)(\alpha\bar{\alpha})(\gamma_2\alpha) \sim (\bar{\alpha}\gamma_1)e(\gamma_2\alpha) \sim (\bar{\alpha}\gamma_1)(\gamma_2\alpha) \sim \bar{\alpha}(\gamma_1\gamma_2)\alpha .$$

Der inverse Gruppenhomomorphismus wird analog von  $\bar{\alpha}$  induziert, denn  $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$  und

$$\alpha(\bar{\alpha}\gamma\alpha)\bar{\alpha} \sim (\alpha\bar{\alpha})\gamma(\alpha\bar{\alpha}) \sim e\gamma e \sim \gamma . \quad \square$$

Man schreibt daher manchmal  $\pi_1(X)$ , wenn  $X$  wegzusammenhängend ist und es nur auf den Isomorphietyp der Gruppe  $\pi_1(X, x)$  ankommt, aber nicht auf die einzelnen Elemente.

2.16. BEMERKUNG. Für  $x = y$  gehört also zu jedem  $\alpha \in \pi_1(X, x)$  ein Automorphismus von  $\pi_1(X, x)$ . In diesem Fall handelt es sich um den inneren Automorphismus

$$\gamma \longmapsto \bar{\alpha}\gamma\alpha .$$

Dies zeigt: Wenn  $\pi_1(X, x)$  nicht kommutativ ist, kann man nicht von den Elementen von  $\pi_1(X)$  sprechen, ohne einen Fußpunkt zu fixieren.

2.17. BEMERKUNG. Es sei  $(X, x)$  ein punktierter topologischer Raum. Dann definieren wir den Pfadraum  $PX$ , den freien Schleifenraum  $LX$  und den (punktierten) Schleifenraum  $\Omega(X, x)$  durch

$$\begin{aligned} PX &= (C([0, 1], X), \mathcal{O}_{\text{ko}}) , \\ LX &= \{\gamma \in PX \mid \gamma(0) = \gamma(1)\} \subset PX , \\ \text{und } \Omega(X, x) &= \{\gamma \in LX \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x\} \subset LX , \end{aligned}$$

wobei  $LX$  und  $\Omega(X, x)$  die von  $PX$  induzierte Unterraumtopologie tragen.

- (1) Da  $[0, 1]$  kompakt ist, sind relative Homotopien von Schleifen in  $(X, x)$  nach Bemerkung 2.9 (2) gerade Wege in  $\Omega(X, x)$ . Also entspricht  $\pi_1(X, x)$  gerade der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von  $\Omega(X, x)$ , kurz

$$\pi_1(X, x) = \pi_0(\Omega(X, x)) .$$

- (2) Falls  $X$  wegzusammenhängend ist, hat  $LX$  gerade die Wegzusammenhangskomponenten

$$\pi_0(LX) = \pi_1(X, x)^{\text{ab}} ,$$

da wir nach Bemerkung 2.16 die Elemente  $\gamma$  und  $\alpha^{-1}\gamma\alpha$  identifizieren müssen. Hierbei bezeichnet  $G^{\text{ab}}$  die *Abelisierung*

$$G^{\text{ab}} = G/[G, G]$$

der Gruppe  $G$ , die dadurch entsteht, dass alle Kommutatoren  $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$  mit dem neutralen Element gleichgesetzt werden. Die Abelisierung ist der größte abelsche Quotient von  $G$ .

- (3) Analog zu (1) kann man höhere Homotopiegruppen induktiv für  $k \geq 2$  durch

$$\pi_k(X, x) = \pi_{k-1}(\Omega(X, x), e_x)$$

definieren. Dabei bezeichnet  $e_x$  wie in Satz 2.14 die konstante Schleife im Punkt  $x$ . Man sieht hier aber beispielsweise nicht, dass alle  $\pi_k(X, x)$  für  $k \geq 2$  abelsch sind.

So, wie man in einer Kategorie nicht nur Objekte betrachtet, sondern immer auch Morphismen, betrachtet man nicht nur Kategorien für sich, sondern auch „Abbildungen“ zwischen ihnen. Dabei muss man vorsichtig sein, da Abbildungen im strengen Sinne nur zwischen Mengen, aber nicht zwischen Klassen definiert sind.

2.18. DEFINITION. Es seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  zwei Kategorien. Ein (kovarianter) *Funktor*  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ordnet jedem Objekt  $A \in \text{obj}(\mathcal{A})$  ein Objekt  $\mathcal{F}A \in \text{obj}(\mathcal{B})$  und jedem Morphismus  $F \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$  einen Morphismus  $\mathcal{F}F \in \text{hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$  zu, so dass

$$\mathcal{F} \text{id}_A = \text{id}_{\mathcal{F}A}, \quad (1)$$

$$\mathcal{F}(F \circ G) = \mathcal{F}F \circ \mathcal{F}G \quad (2)$$

für alle  $A, B, C \in \text{obj}(\mathcal{A})$  und alle  $F \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(B, C)$ ,  $G \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ .

2.19. DEFINITION. Wir betrachten die Kategorien  $\mathcal{Top}_+$  (und  $\mathcal{HTop}_+$ ) der punktierten topologischen Räume und der (relativen Homotopieklassen von) stetigen Abbildungen mit

$$\text{obj}(\mathcal{Top}_+) = \text{obj}(\mathcal{HTop}_+) = \{ (X, x) \mid X \in \text{obj}(\mathcal{Top}) \text{ und } x \in X \},$$

$$\text{hom}_{\mathcal{Top}_+}((X, x), (Y, y)) = \{ F: X \rightarrow Y \mid F \in \text{hom}_{\mathcal{Top}}(X, Y) \text{ und } F(x) = y \}$$

$$\text{und } \text{hom}_{\mathcal{HTop}_+}((X, x), (Y, y)) = \text{hom}_{\mathcal{Top}_+}((X, x), (Y, y)) / \sim,$$

wobei  $\sim$  hier Homotopie relativ zum Basispunkt bezeichnet. Die Identität auf  $(X, x)$  ist die (relative Homotopieklasse der) Abbildung  $\text{id}_{(X, x)}$ , und die Verkettung ist die Hintereinanderausführung.

2.20. BEISPIEL. Durch Vergessen der Basispunkte und Übergang zu (relativen) Homotopieklassen von Abbildungen erhalten wir ein kommutatives Diagramm von Funktoren

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Top}_+ & \longrightarrow & \mathcal{HTop}_+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{Top} & \longrightarrow & \mathcal{HTop} \end{array}$$

2.21. SATZ. *Die Fundamentalgruppe ist ein Funktor*

$$\pi_1: \mathcal{Top}_+ \rightarrow \mathcal{Grp}$$

von der Kategorie der punktierten topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen. Dabei wird  $(X, x)$  auf  $\pi_1(X, x)$  und  $F: (X, x) \rightarrow (Y, y)$  auf  $F_* = \pi_1 F: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$  abgebildet mit

$$F_*[\gamma] = [F \circ \gamma] \in \pi_1(Y, y) \quad \text{für alle } [\gamma] \in \pi_1(X, x).$$

Dieser Funktor ist auch auf  $\mathcal{HTop}_+$  wohldefiniert.

BEWEIS. Sei  $F: (X, x) \rightarrow (Y, y)$  eine stetige punktierte Abbildung. Als erstes zeigen wir, dass  $\pi_1 F = F_*$  ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist. Sei  $H$  eine relative Homotopie zwischen  $\gamma_0, \gamma_1: ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (X, x)$ , dann ist die Abbildung  $F \circ H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine relative Homotopie zwischen  $F \circ \gamma_0$  und  $F \circ \gamma_1$ , also ist  $F_*$  wohldefiniert.

Seien  $\gamma_1, \gamma_2$  zwei Schleifen in  $(X, x)$ . Dann folgt

$$(F \circ \gamma_1)(F \circ \gamma_2) = F \circ (\gamma_1 \gamma_2)$$

direkt aus Definition 2.13, also ist  $F_*$  ein Gruppenhomomorphismus.

Als nächstes überprüfen wir, dass  $\pi_1$  die beiden Eigenschaften aus Definition 2.18 erfüllt. Da  $\text{id}_X \circ \gamma = \gamma$ , gilt offensichtlich (1), also

$$(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x)}.$$

Seien  $F: (Y, y) \rightarrow (Z, z)$  und  $G: (X, x) \rightarrow (Y, y)$  punktierte Abbildungen. Dann folgt (2), da

$$(F \circ G)_*[\gamma] = [(F \circ G) \circ \gamma] = [F \circ (G \circ \gamma)] = F_*(G_*[\gamma]).$$

Um zu zeigen, dass  $\pi_1$  auch auf  $\mathcal{HTop}_+$  wohldefiniert ist, müssen wir nur überprüfen, dass  $F_*$  nur von der relativen Homotopieklasse von  $F$  abhängt. Sei also  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine relative Homotopie zwischen  $F_0$  und  $F_1: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ , dann ist die Abbildung  $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$  mit

$$(t, s) \mapsto H(\gamma(t), s)$$

eine relative Homotopie zwischen  $F_{0*}\gamma$  und  $F_{1*}\gamma$ . □

Wir können den Funktor  $\pi_1: \mathcal{Top}_+ \rightarrow \mathcal{Grp}$  also in zwei Funktoren

$$\mathcal{Top}_+ \longrightarrow \mathcal{HTop}_+ \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{Grp},$$

zerlegen, dabei ist der erste Funktor der gleiche wie in Beispiel 2.20.

Wegen Bemerkung 2.16 dürfen wir jedoch auf keinen Fall den Basispunkt vergessen, wir erhalten also keinen Funktor  $\mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{Grp}$ . Später werden uns Homologie und Kohomologie solche Funktoren (mit Werten in abelschen Gruppen) liefern.

**2.22. FOLGERUNG.** *Seien  $(X, x), (Y, y)$  homotopieäquivalente Paare topologischer Räume, dann ist  $\pi_1(X, x)$  isomorph zu  $\pi_1(Y, y)$ .*

**BEWEIS.** Sei  $F: (X, x) \rightarrow (Y, y)$  homotopieinvers zu  $G: (Y, y) \rightarrow (X, x)$ , dann folgt aus Funktorialität, dass

$$G_* \circ F_* = \text{id}_{\pi_1(X, x)} \quad \text{und} \quad F_* \circ G_* = \text{id}_{\pi_1(Y, y)}.$$

Also sind  $F_*$  und  $G_*$  zueinander inverse Gruppenisomorphismen. □

Mit dem gleichen Argument sieht man, dass Funktoren stets Isomorphismen auf Isomorphismen abbilden.

**2.23. DEFINITION.** Ein topologischer Raum heißt *einfach zusammenhängend*, wenn er wegzusammenhängend ist mit  $\pi_1(X) = \{e\}$ .

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass der Isomphietyp von  $\pi_1(X, x)$  nach Satz 2.15 nicht vom Basispunkt  $x \in X$  abhängt. In Übung 2.77 lernen Sie andere Charakterisierungen einfach zusammenhängender Räume kennen.

- 2.24. BEISPIEL.**
- (1) Der einpunktige Raum  $\{*\}$  ist einfach zusammenhängend, da es nur die konstante Schleife  $t \mapsto *$  gibt.
  - (2) Sei  $X$  zusammenziehbar, dann ist  $X$  nach Beispiel 2.5 zu  $\{*\}$  homotopieäquivalent, also folgt  $\pi_1(X) = \{e\}$ . Nach Bemerkung 1.99 (3) sind zusammenziehbare Räume insbesondere wegzusammenhängend, also ist  $X$  auch einfach zusammenhängend.

### 2.3. Die Fundamentalgruppe der $S^1$

In diesem Abschnitt rechnen wir unsere erste Fundamentalgruppe aus, und zwar „von Hand“. Anschließend beweisen wir den Brouwerschen Fixpunktsatz und den Satz von Borsuk-Ulam als Anwendungen davon.

Wir fassen  $S^1$  als Teilmenge von  $\mathbb{C}$  (mit der Unterraumtopologie) auf. Um  $\pi_1(S^1, 1)$  zu berechnen, brauchen wir den Begriff der Überlagerung.

**2.25. DEFINITION.** Eine Abbildung  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  heißt *Überlagerung*, wenn es zu jedem  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  von  $x$  und eine Menge  $M$  mit diskreter Topologie gibt, so dass

$$\begin{array}{ccccc} U \times M & \cong & p^{-1}(U) & \hookrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & = & U & \hookrightarrow & X \end{array} .$$

Wir nennen dann  $U$  *gleichmäßig überlagert*. Eine Überlagerung  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  heißt *universell*, wenn  $\tilde{X}$  zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist.

2.26. BEISPIEL. Betrachte die modifizierte komplexe Exponentialabbildung  $p = e^{2\pi i \cdot} : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$ . Diese Abbildung ist eine Überlagerung, denn jeder Punkt  $z = e^{2\pi i \varphi} \in S^1$  hat eine gleichmäßig überlagerte Umgebung  $S^1 \setminus \{-z\}$ , da

$$p^{-1}(S^1 \setminus \{-z\}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left( \varphi + n - \frac{1}{2}, \varphi + n + \frac{1}{2} \right) \cong \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \times \mathbb{Z}.$$

Da  $\mathbb{R}$  zusammenziehbar ist, ist  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  nach Definition 2.25 eine universelle Überlagerung.

2.27. SATZ (Homotopie-Liftungssatz). Sei  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung, und seien  $\tilde{F}: Y \rightarrow \tilde{X}$  und  $H: Y \times [0, 1] \rightarrow X$  stetig mit

$$H(\cdot, 0) = p \circ \tilde{F}: Y \rightarrow X,$$

dann existiert genau eine stetige Abbildung  $\tilde{H}: Y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  mit

$$p \circ \tilde{H} = H \quad \text{und} \quad \tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{F}: Y \rightarrow \tilde{X}.$$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\tilde{F}} & \tilde{X} \\ \times\{0\} \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ Y \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

Wir nennen  $\tilde{H}$  einen Lift der Homotopie  $H$  mit Startwert  $\tilde{F}$ .

BEWEIS. Idee: Lokale Existenz und Eindeutigkeit liefern globale Existenz und Eindeutigkeit.

Zur lokalen Existenz von Lifts fixiere  $y \in Y$ . Zu jedem  $s \in [0, 1]$  existiert eine gleichmäßig überlagerte Umgebung  $U_s$  von  $H(y, s) \in X$ , ein offenes Teilintervall  $I_s \subset [0, 1]$  mit  $s \in I_s$  und eine offene Umgebung  $V_s \subset Y$  von  $y$  mit  $H(V_s \times I_s) \subset U_s$ . Endlich viele solche Intervalle  $I_s$  überdecken  $[0, 1]$ , da  $[0, 1]$  kompakt ist. Also existieren  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ , gleichmäßig überlagerte  $U_i$  und Umgebungen  $V_i$  von  $y$  mit

$$H(V_i \times [t_{i-1}, t_i]) \subset U_i.$$

Wir konstruieren induktiv Umgebungen  $W_i$  von  $y$  und Lifts  $\tilde{H}_i$  von  $H|_{W_i \times [0, t_i]}$ . Setze dazu zunächst  $W_0 = Y$  und  $\tilde{H}_0(\cdot, 0) = \tilde{F}$ . Sei jetzt eine offene Umgebung  $W_{i-1}$  von  $y$  und ein Lift  $\tilde{H}_{i-1}$  von  $H|_{W_{i-1} \times [0, t_{i-1}]}$  bereits konstruiert. Betrachte die stetige Abbildung

$$f_i: W_{i-1} \cap V_i \xrightarrow{\tilde{H}_{i-1}(\cdot, t_{i-1})} p^{-1}(U_i) = U_i \times M_i \longrightarrow M_i,$$

und sei  $m_i = f_i(y) \in M_i$ . Da  $M_i$  die diskrete Topologie trägt, ist  $\{m_i\} \subset M_i$  offen, also ist

$$W_i = f_i^{-1}(m_i) \subset W_{i-1} \cap V_i$$

eine offene Umgebung von  $y$ . Für  $w \in W_i$  setze

$$\tilde{H}_i(w, s) = \begin{cases} \tilde{H}_{i-1}(w, s) & 0 \leq s \leq t_{i-1}, \\ (H(w, s), m_i) \in U_i \times M_i \subset \tilde{X} & t_{i-1} \leq s \leq t_i. \end{cases}$$

Dann ist  $\tilde{H}_i$  auf beiden Teilbereichen stetig und stimmt auf dem Durchschnitt überein, ist also insgesamt stetig. Setze schließlich  $W_y = W_k$  und erhalte einen Lift

$$\tilde{H}_y: W_y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X} \quad \text{von} \quad H|_{W_y \times [0, 1]}.$$

Außerdem ist das die einzige mögliche Wahl von  $\tilde{H}_i: W_i \times [0, t_i] \rightarrow \tilde{X}$ . Wenn die Eindeutigkeit auf  $W_{i-1} \times [0, t_{i-1}]$  bereits induktiv gezeigt ist, erzwingen für alle  $y' \in W_i$  Liftungseigenschaft sowie die Stetigkeit der Abbildung

$$[t_{i-1}, t_i] \xrightarrow{\tilde{H}_i(y', \cdot)} p^{-1}(U_i) = U_i \times M_i \longrightarrow M_i$$

unsere Wahl von  $\tilde{H}(y', s)$  für  $s \in [t_{i-1}, t_i]$ , denn eine stetige Funktion in einen diskreten Raum ist lokal konstant.

Schließlich ist  $\tilde{H}_y = \tilde{H}_k: W_y \times [0, 1] = W_k \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  ein stetiger Lift von  $H|_{W_y \times [0, 1]}$  mit  $\tilde{H}(y', 0) = \tilde{F}(y')$  für alle  $y' \in W_y$ . Seien  $y, y'$  gegeben, dann folgt

$$\tilde{H}_y|_{(W_y \cap W_{y'}) \times [0, 1]} = \tilde{H}_{y'}|_{(W_y \cap W_{y'}) \times [0, 1]}$$

aus unser obigen lokalen Eindeutigkeitsüberlegung.

Somit können wir alle lokalen Lifts  $\tilde{H}_y: W_y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  zu einer globalen Abbildung  $\tilde{H}$  zusammensetzen. Die Stetigkeit von  $\tilde{H}$  folgt, da  $\tilde{H}$  nahe  $(y, s)$  mit  $\tilde{H}_y$  übereinstimmt und  $\tilde{H}_y$  nach Konstruktion bei  $(y, s)$  stetig ist.  $\square$

2.28. SATZ. *Es gilt  $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ , wobei  $[\text{id}_{S^1}]$  der  $1 \in \mathbb{Z}$  entspricht.*

BEWEIS. Wir betrachten die Überlagerung  $p = e^{2\pi i \cdot}: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  aus Beispiel 2.26. Wir fassen  $\gamma \in \pi_1(S^1, 1)$  als Homotopie  $H$  von Abbildungen von  $Y = \{*\}$  nach  $S^1$  mit  $H(*, s) = \gamma(s)$  auf. Es sei  $\tilde{F}(*) = 0 \in \mathbb{Z}$  ein Lift von  $H(*, 0) = 1$ , dann existiert nach Satz 2.27 ein Lift  $\tilde{\gamma}(s) = \tilde{H}(*, s)$ , und es folgt  $\tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$ .

Seien  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  relativ homotope Schleifen in  $(S^1, 1)$  mit Lifts  $\tilde{\gamma}_0$  und  $\tilde{\gamma}_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir fassen eine relative Homotopie  $H$  zwischen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  als Homotopie  $K(s, t) = H(t, s)$  von der konstanten Abbildung  $s \mapsto 1$  zu sich selbst auf. Dann lässt sich  $K$  nach Satz 2.27 zu einer Homotopie  $\tilde{K}$  liften, wobei  $\tilde{K}(s, t) = \tilde{\gamma}_s(t)$  für  $s \in \{0, 1\}$  aufgrund der Eindeutigkeit der Lifts  $\tilde{\gamma}_i$ . Wir erhalten also eine Homotopie  $\tilde{H}(t, s) = \tilde{K}(s, t)$  zwischen  $\tilde{\gamma}_0$  und  $\tilde{\gamma}_1$ . Da  $s \mapsto \tilde{H}(1, s)$  die konstante Abbildung  $H(1, s) = 1 \in S^1$  liftet, erhalten wir eine relative Homotopie zwischen Wegen, die bei  $0 \in \mathbb{R}$  beginnen. Insbesondere folgt  $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1) \in \mathbb{Z}$ . Also erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung

$$\Phi: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad \Phi([\gamma]) = \tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z} \quad \text{für } \tilde{\gamma} \text{ wie oben.}$$

Ein Lift von  $\gamma_1 \gamma_2$  ist

$$\widetilde{\gamma_1 \gamma_2} = \begin{cases} \tilde{\gamma}_1(2t) & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \tilde{\gamma}_1(1) + \tilde{\gamma}_2(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

dabei nutzen wir aus, dass für jede Zahl  $n \in \mathbb{Z}$  die Abbildung  $t \mapsto \tilde{\gamma}(t) + n$  ein Lift von  $\gamma$  ist, wenn  $\tilde{\gamma}$  ein Lift ist, da

$$e^{2\pi i(\tilde{\gamma}(t)+n)} = e^{2\pi i\tilde{\gamma}(t)} \cdot e^{2\pi in} = \gamma(t) \cdot 1.$$

Also ist  $\Phi$  ein Gruppenhomomorphismus. Man kann sich durch Nachrechnen überzeugen, dass  $\gamma$  dabei gerade auf die Umlaufzahl  $\nu_{(\gamma, 0)}$  aus Beispiel 2.1 (1) abgebildet wird.

Zur Injektivität seien  $\gamma_0, \gamma_1$  Schleifen in  $S^1$  mit Lifts  $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1$ , so dass  $\tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{\gamma}_1(0) = 0$  und  $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1) = n \in \mathbb{Z}$ . Da  $\mathbb{R}$  zusammenziehbar ist, ist  $\mathbb{R}$  einfach zusammenhängend. Insbesondere existiert eine relative Homotopie  $\tilde{H}$  zwischen  $\tilde{\gamma}_0$  und  $\tilde{\gamma}_1$  (Übung 2.77). Dann ist  $p \circ \tilde{H}$  eine relative Homotopie zwischen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$ , also folgt  $[\gamma_0] = [\gamma_1]$ .

Zur Surjektivität betrachte zu  $n \in \mathbb{Z}$  die Schleife  $\gamma_n$  mit Lift  $\tilde{\gamma}_n$ , wobei

$$\gamma_n(t) = e^{2\pi i n t} \quad \text{und} \quad \tilde{\gamma}_n(t) = n t. \quad \square$$

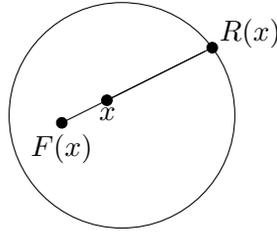


ABBILDUNG 2. Die Retraktion im Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes

Wir kommen jetzt zu zwei Anwendungen; weitere folgen in den Übungen 2.80 und 2.81. Zur Motivation zunächst der eindimensionale Fall des Brouwerschen Fixpunktsatzes.

2.29. BEMERKUNG. Jede stetige Funktion  $f: D^1 = [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  hat einen Fixpunkt. Betrachte dazu die Funktion

$$g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto x - f(x).$$

Es gilt  $f(x) = x$  genau dann, wenn  $g(x) = 0$ . Da  $g(-1) \leq 0$  und  $g(1) \geq 0$ , folgt die Behauptung aus dem Zwischenwertsatz.

2.30. BEMERKUNG. Sei  $Y \subset X$ , sei  $y \in Y$ , und sei  $R: X \rightarrow Y$  eine Retraktion, dann ist der Homomorphismus  $\pi_1 R: \pi_1(X, y) \rightarrow \pi_1(Y, y)$  surjektiv und  $\pi_1 \iota: \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X, x)$  injektiv. Zerlege dazu  $\text{id}_{\pi_1(Y, y)} = \pi_1 \text{id}_Y$  als

$$\pi_1(Y, y) \xrightarrow{\pi_1 \iota} \pi_1(X, y) \xrightarrow{\pi_1 R} \pi_1(Y, y).$$

Mit anderen Worten: eine Retraktion verhält sich ähnlich wie eine Projektion in einem (semi-)direkten Produkt von Gruppen, Ringen, Vektorräumen etc.

2.31. SATZ (Brouwerscher Fixpunktsatz,  $n = 2$ ). Jede stetige Abbildung  $F: D^2 \rightarrow D^2$  hat einen Fixpunkt.

BEWEIS. Falls es keinen Fixpunkt gibt, konstruieren wir eine Retraktion  $R: D^2 \rightarrow \partial D^2 = S^1$  wie in Abbildung 2. Da  $\pi_1(D^2, 1) = 0$  und  $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$ , widerspricht das der obigen Bemerkung.

Zur Konstruktion der Retraktion beachten wir, dass  $\min_{x \in D^2} d(F(x), x) > 0$  wegen Kompaktheit von  $D^2$ . Daher erhalten wir eine stetige Abbildung, indem wir die Strecke von  $F(x)$  nach  $x$  über  $x$  hinaus fortsetzen, bis sie  $S^1$  schneidet, und  $x$  den Schnittpunkt  $R(x)$  zuordnen. Falls  $x \in S^1$ , ist  $x = R(x)$  dieser Schnittpunkt, also erhalten wir die gesuchte Retraktion.  $\square$

Der folgende Satz gilt analog für Abbildungen  $S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wird hier aber nur für  $n = 2$  bewiesen.

2.32. SATZ (Borsuk-Ulam). Sei  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig, dann existiert  $x \in S^2$  mit  $f(x) = f(-x)$ .

BEWEIS. Falls nicht, existiert eine Abbildung  $G: S^2 \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  mit

$$G(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|},$$

und es folgt  $G(x) = -G(-x)$  auf ganz  $S^2$ . Betrachte den Äquator

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ohne Einschränkung gelte  $G(\gamma(0)) = 1 \in S^1 \subset \mathbb{C}$ , andernfalls drehen wir  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  entsprechend. Es sei  $g = G \circ \gamma$ . Wir wollen  $G_*[\gamma] = [g] \in \pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$  bestimmen. Sei dazu  $\tilde{g}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ein

Lift von  $g: [0, 1] \rightarrow S^1$  wie in Satz 2.28 unter der Überlagerung  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  mit  $p(t) = e^{2\pi t}$  aus Beispiel 2.26. Aus

$$g(t + 1/2) = G(-\gamma(t)) = -(G \circ \gamma)(t) = -g(t)$$

folgt

$$\tilde{g}(t + 1/2) - \tilde{g}(t) \in \mathbb{Z} + 1/2,$$

da  $p^{-1}(-1) = \mathbb{Z} + 1/2$ . Da der obige Ausdruck stetig von  $t$  abhängt und  $\mathbb{Z} + 1/2$  diskret ist, ist er konstant, und wir erhalten

$$\tilde{g}(1) - \tilde{g}(0) = (\tilde{g}(1) - \tilde{g}(1/2)) + (\tilde{g}(1/2) - \tilde{g}(0)) = 2(\tilde{g}(1/2) - \tilde{g}(0)) \in 2\mathbb{Z} + 1.$$

Insbesondere wird der Äquator auf ein ungerades Element von  $\pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$  abgebildet. Der Äquator  $\gamma$  ist aber null-homotop in  $S^2$ . Sei  $H$  eine Homotopie von  $\gamma$  zur konstanten Schleife, dann ist  $G \circ H$  eine Homotopie von  $g$  zur konstanten Schleife, was einen Widerspruch darstellt.  $\square$

Die Beweise der obigen Sätze sind nicht konstruktiv, das heißt, sie liefern kein Verfahren, das einen Punkt mit der gesuchten Eigenschaft findet. Das gleiche gilt für die beiden Anwendungen in den Übungen 2.80 und 2.81, auch dort sind die Beweise indirekt. Man beachte, dass es in allen vier Problemen beliebig „schlecht konditionierte“ Situationen gibt, in denen eine beliebige kleine Variation der Ausgangsdaten (zum Beispiel Variation von  $F$  um weniger als  $\varepsilon > 0$  in der Supremumsnorm) beliebig große Änderungen des gesuchten Punktes bewirken können.

## 2.4. Der Satz von Seifert-van Kampen

Wir wollen als nächstes den Satz von Seifert-van Kampen beweisen, der es in vielen Fällen ermöglicht, die Fundamentalgruppe eines zusammengesetzten Raumes aus den Fundamentalgruppen seiner Bausteine zu rekonstruieren. Dazu benötigen wir ein paar Begriffe aus der Gruppentheorie.

Sei  $(G_i)_{i \in I}$  eine beliebige Familie von Gruppen. Wir wollen zunächst eine Gruppe konstruieren, die alle Gruppen  $G_i$  enthält, und in der keine „unnötigen“ Relationen gelten. Diese Gruppe soll das „freie Produkt“ der Gruppen  $G_i$  heißen. Wir werden sehen, dass das freie Produkt das Koprodukt in der Kategorie  $\mathcal{G}rp$  der Gruppen ist.

2.33. BEMERKUNG (Zur Erinnerung). Produkt  $\prod$  und Summe  $\bigoplus$  von Gruppen; Abbildungen

$$G_j \xrightarrow{\iota_j} \bigoplus_i G_i \longrightarrow \prod_i G_i \xrightarrow{\pi_j} G_j.$$

In beiden Fällen kommutieren die Elemente verschiedener Gruppen, was eine zusätzliche Relation darstellt, die wir hier umgehen wollen.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Gruppen  $G_i$  paarweise disjunkt sind, ansonsten müssten wir die Elemente von  $G_i$  als  $(i, g)$  „markieren“.

2.34. DEFINITION. Sei  $(G_i)_{i \in I}$  eine Familie von Gruppen. Ein Wort  $w$  im Alphabet  $\dot{\cup}_i G_i$  ist ein Tupel  $g_1 \dots g_k$  der endlichen Länge  $\ell(w) = k \geq 0$  von Buchstaben  $g_j \in G_{i_j}$  mit  $i_j \in I$ . Schreibe  $\emptyset$  für das leere Wort. Ein Wort heißt *gekürzt* oder *reduziert*, wenn

- (1) kein Buchstabe ein neutrales Element  $e_i \in G_i$  ist, und
- (2) keine zwei aufeinanderfolgenden Buchstaben  $g_j, g_{j+1}$  zur gleichen Gruppe  $G_{i_j} = G_{i_{j+1}}$  gehören.

Ein Wort *kürzen* oder *reduzieren* heißt, so oft wie möglich einen der folgenden Schritte auszuführen:

- (1) Weglassen eines Einselementes  $e_i \in G_i$  an einer beliebigen Stelle des Wortes,

$$w' e_i w'' \mapsto w' w'',$$

- (2) Ersetzen zweier aufeinanderfolgender Buchstaben  $g_j, g_{j+1} \in G_{i_j}$  aus derselben Gruppe durch ihr Produkt,

$$w' g_j g_{j+1} w'' \mapsto w'(g_j g_{j+1}) w'' .$$

Zwei Wörter heißen *äquivalent*, wenn sie zum gleichen Wort reduziert werden können.

2.35. PROPOSITION. *Jedes Wort lässt sich auf genau eine Weise reduzieren.*

BEWEIS. Die einzige mögliche Wahl beim Reduzieren besteht in der Reihenfolge, in der mögliche Reduktionsschritte ausgeführt werden. Falls diese Schritte an räumlich getrennten Stellen im Wort stattfinden, ist ihre Reihenfolge egal, beispielsweise sei  $1 \leq i, i+1 < j, j+1 \leq k$ , dann ist

$$w' \underbrace{g_i g_{i+1}}_{\in G_i} w'' \underbrace{g_j g_{j+1}}_{\in G_j} w''' \sim w'(g_i g_{i+1}) w'' (g_j g_{j+1}) w'''$$

unabhängig von der Reihenfolge der Reduktionsschritte.

Nur wenn ein Element gleichzeitig auf zwei verschiedene Weisen reduziert werden kann, kann es auf die Reihenfolge ankommen. Die möglichen Buchstabenketten, bei denen das vorkommen kann, sind

$$\begin{aligned} w' g h k w'' &\sim w' (gh) k w'' \sim w' g (hk) w'' \sim w' (ghk) w'' , \\ w' g e w'' &\sim w' (ge) w'' \sim w' g w'' \quad \text{und} \quad w' e g w'' \sim w' (eg) w'' \sim w' g w'' \end{aligned}$$

mit  $g, h, k$  und  $e = e_i \in G_i$  für ein  $i \in I$ . Hier sorgen die Rechenregeln für Gruppen dafür, dass es nicht auf die Reihenfolge der Reduktion ankommt.  $\square$

2.36. DEFINITION. Sei  $(G_i)_{i \in I}$  eine Familie von Gruppen. Das *freie Produkt*  $*_i G_i = \coprod_i G_i$  der  $G_i$  ist die Menge aller reduzierten Wörter, die Multiplikation ist Hintereinanderschreiben und anschließende Reduktion. Definiere Abbildungen  $\iota_j: G_j \rightarrow \coprod_i G_i$  mit

$$\iota_j(g) = \begin{cases} \emptyset & g = e_j , \\ g & g \in G_j \setminus \{e_j\} . \end{cases}$$

2.37. PROPOSITION. *Das freie Produkt ist eine Gruppe, und die Abbildungen  $\iota_j$  sind Homomorphismen.*

BEWEIS. Da es laut Beweis des Satzes 2.35 nicht auf die Reihenfolge der Reduktionsschritte ankommt, erhalten wir das Produkt dreier Wörter durch Hintereinanderschreiben aller drei Wörter und anschließendes Kürzen; hieraus folgt Assoziativität der Multiplikation.

Das leere Wort ist offensichtlich neutrales Element, und für jedes Wort gilt

$$(g_1 \dots g_k)^{-1} = g_k^{-1} \dots g_1^{-1} .$$

Für alle  $i \in I$  und alle  $g \in G_i$  ist  $\iota_i(g)$  gekürzt, und offensichtlich ist  $\iota_i$  ein Homomorphismus.  $\square$

2.38. BEISPIEL. (1) Freie Gruppen in einem Buchstaben  $\mathbb{Z}$ .

(2) Freie Gruppen  $F_k = \coprod_{i=1}^k \mathbb{Z}$ .

(3) Unendliche Diedergruppe  $D_\infty \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$  (Isometriegruppe des metrischen Raumes  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ), die nichttrivialen Elemente der beiden Kopien von  $\mathbb{Z}_2$  sind zwei benachbarte Spiegelungen, etwa an den Punkten 0 und  $1/2$ .

2.39. SATZ. *Das Produkt von Gruppen ist ein Produkt auf der Kategorie der Gruppen. Das freie Produkt von Gruppen ist ein Koproduct auf der Kategorie der Gruppen.*

BEWEIS. Sei  $(G_i)_{i \in I}$  eine Familie von Gruppen. Wie in Übung 1.119 ist ihr Produkt

$$\prod_{i \in I} G_i = \{(g_i)_{i \in I} \mid g_i \in G_i \text{ für alle } i \in I\},$$

zusammen mit den Projektionen

$$p_j: \prod_{i \in I} G_i \rightarrow G_j, \quad p_j((g_i)_{i \in I}) = g_j.$$

Elemente des Produktes werden komponentenweise verknüpft, das neutrale Element ist  $(e_i)_{i \in I}$  mit  $e_i \in G_i$  neutral, das Inverse von  $(g_i)_{i \in I}$  ist  $(g_i^{-1})_{i \in I}$ . Die Projektionen  $p_j$  sind Gruppenhomomorphismen.

Sei  $H$  eine weitere Gruppe, und seien  $f_i: H \rightarrow G_i$  Gruppenhomomorphismen. Zu zeigen ist nach Bemerkung 1.48 die universelle Eigenschaft des Produktes, wonach es genau einen Homomorphismus  $f: H \rightarrow G$  mit  $f_i = p_i \circ f$  für alle  $i \in I$  gibt. Man sieht leicht, dass dann gerade

$$f(h) = (f_i(h))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i$$

folgt, und dass  $f$  tatsächlich ein Homomorphismus ist.

Nach Bemerkung 1.41 besagt die universelle Eigenschaft des Koproductes, dass es zu jeder Gruppe  $H$  und Homomorphismen  $f_i: G_i \rightarrow H$  genau einen Homomorphismus  $f: \ast_{i \in I} G_i \rightarrow H$  mit  $f_i = f \circ \iota_i$  für alle  $i \in I$  gibt. Da das freie Produkt von den einbuchstabigen Wörtern erzeugt wird, folgt

$$f(g_1 \cdots g_k) = f_{i_1}(g_1) \cdots f_{i_k}(g_k) \in H,$$

wobei  $g_j \in G_{i_j}$  wie oben. Offensichtlich ist Kürzen mit  $f$  verträglich, da alle  $f_i$  Homomorphismen sind. Also ist  $f$  ebenfalls Homomorphismus.  $\square$

Im Satz von Seifert-van Kampen benötigen wir einen Quotienten des freien Produkts. Da man Quotienten von Gruppen nur nach Normalteilern bilden kann, erinnern wir uns an die Definition von Normalteilern.

Ein *Normalteiler*  $N$  einer Gruppe  $G$  ist eine Untergruppe mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass  $gng^{-1} \in N$  für alle  $g \in G$  und alle  $n \in N$ . Kerne von Gruppenhomomorphismen  $F: G \rightarrow H$  haben diese Eigenschaft, denn sei  $g \in G$ ,  $k \in \ker F$ , dann folgt

$$F(gkg^{-1}) = F(g) \cdot \underbrace{F(k)}_{=e} \cdot F(g)^{-1} = e \in H,$$

also  $gkg^{-1} \in \ker F$ .

Sei umgekehrt  $N$  ein Normalteiler, dann definieren wir eine Gruppenstruktur auf dem Quotienten

$$G/N = \{gN \mid g \in G\} \quad \text{mit} \quad gN = \{gn \mid n \in N\}$$

durch

$$(gN) \cdot (hN) = g(hNh^{-1}) \cdot (hN) = gh \cdot N \cdot N = (gh)N.$$

Die Normalteiler-Eigenschaft garantiert uns, dass dieses Produkt wohldefiniert ist. Die natürliche Abbildung  $G \rightarrow G/N$  mit  $g \mapsto gN$  ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern  $N$ .

2.40. DEFINITION. Es sei  $G$  eine Gruppe und  $M \subset G$  eine Teilmenge. Dann ist der von  $M$  erzeugte Normalteiler ( $M$ ) von  $G$  der kleinste Normalteiler  $N \subset G$ , so dass  $M \subset N$ .

Man kann sich überzeugen, dass Durchschnitte von Normalteilern wieder Normalteiler sind, so dass der Begriff des kleinsten Normalteilers in der obigen Definition sinnvoll ist. Alternativ dazu geben wir  $(M)$  explizit an.

2.41. BEMERKUNG. Es gilt

$$(M) = \{ g_1 m_1^{\pm 1} g_1^{-1} \cdots g_k m_k^{\pm 1} g_k^{-1} \mid k \geq 0, g_1, \dots, g_k \in G \text{ und } m_1, \dots, m_k \in M \}. \quad (*)$$

Man überzeugt sich leicht, dass die rechte Seite eine Untergruppe von  $M$  beschreibt, und sogar einen Normalteiler, da

$$g(g_1 m_1^{\pm 1} g_1^{-1} \cdots g_k m_k^{\pm 1} g_k^{-1})g^{-1} = (gg_1)m_1^{\pm 1}(gg_1^{-1}) \cdots (gg_k)m_k^{\pm 1}(gg_k)^{-1}.$$

Umgekehrt enthält jeder Normalteiler, der  $M$  enthält, auch alle Produkte von Elementen der Form  $gm^{\pm 1}g^{-1}$ , also ist die rechte Seite von (\*) tatsächlich der kleinste Normalteiler, der  $M$  enthält.

Wir formulieren und beweisen jetzt den weiter oben angekündigten Satz.

2.42. SATZ (Seifert-van Kampen). Sei  $(X, x)$  ein punktierter Raum, und sei  $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$  eine offene Überdeckung von  $X$ , so dass

- (1) jede Menge  $U \in \mathcal{U}$  den Basispunkt  $x$  enthält, und
- (2) jeder Durchschnitt  $U \cap V$  für  $U, V \in \mathcal{U}$  wegzusammenhängend ist.

Dann ist die von den Homomorphismen  $\iota_{U*}: \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  induzierte natürliche Abbildung

$$\varphi: \coprod_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$$

surjektiv. Falls darüberhinaus

- (3) jeder Durchschnitt  $U \cap V \cap W$  für  $U, V, W \in \mathcal{U}$  wegzusammenhängend ist,

dann wird der Kern der Abbildung  $\varphi$  gegeben durch

$$\ker \varphi = \left( \{ (\iota_{U \cap V \rightarrow U})_*[\gamma] \cdot (\iota_{U \cap V \rightarrow V})_*[\gamma]^{-1} \mid U, V \in \mathcal{U} \text{ und } [\gamma] \in \pi_1(U \cap V, x) \} \right). \quad (*)$$

Hier bezeichnen  $\iota_U: U \rightarrow X$  und  $\iota_{U \cap V \rightarrow U}: U \cap V \rightarrow U$  die Inklusionsabbildungen.

BEWEIS. Wir schreiben wieder  $\alpha\beta$  für die Verkettung beliebiger Wege mit passenden Anfangs- und Endpunkten wie im Beweis von Satz 2.15.

Um zu zeigen, dass die Abbildung  $\varphi$  surjektiv ist, betrachten wir eine Schleife  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = \gamma(1) = x$ . Da  $(\gamma^{-1}(U))_{U \in \mathcal{U}}$  eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls  $[0, 1]$  ist, existiert nach dem Satz 1.57 von Lebesgue ein  $n > 0$ , so dass jeder Weg

$$\gamma_i(t) = \left( \gamma|_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]} \right) \left( \frac{t+i-1}{n} \right)$$

für  $1 \leq i \leq n$  ganz in einer der Mengen  $U_i \in \mathcal{U}$  verläuft. Nach (1) und (2) gibt es Wege  $\alpha_i$  von  $x$  nach  $\gamma(\frac{i}{n}) = \gamma_i(1) = \gamma_{i+1}(0)$  in  $U_i \cap U_{i+1}$ . Also schreiben wir  $\gamma$  als Verkettung

$$\gamma \sim \underbrace{\gamma_1 \alpha_1^{-1}}_{\in \text{im } \iota_{U_1*}} \underbrace{\alpha_1 \gamma_2 \alpha_2^{-1}}_{\in \text{im } \iota_{U_2*}} \cdots \underbrace{\alpha_{n-1} \gamma_n}_{\in \text{im } \iota_{U_n*}} \in \text{im } \varphi,$$

und es folgt Surjektivität.

Wir bezeichnen die rechte Seite von (\*) mit  $N \subset \coprod_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U, x)$ . Sei  $[\gamma] \in \pi_1(U \cap V, x)$ , dann ist offensichtlich

$$[e] = [\gamma][\bar{\gamma}] = \underbrace{(\iota_{U \cap V \rightarrow U})_*[\gamma]}_{\in \text{im } \iota_{U*}} \cdot \underbrace{(\iota_{U \cap V \rightarrow V})_*[\bar{\gamma}]^{-1}}_{\in \text{im } \iota_{V*}} \in \pi_1(X, x),$$

woraus sich  $N \subset \ker \varphi$  ergibt.

Sei umgekehrt  $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$  für Schleifen  $\gamma_i$  in  $U_i \in \mathcal{U}$ , dargestellt durch das entsprechende Wort  $w \in \ker \varphi$ . Dann existiert eine Homotopie  $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  von der trivialen Schleife zu  $\gamma$ . Nach dem Satz von Lebesgue können wir das kompakte Einheitsquadrat  $[0, 1] \times [0, 1]$  so in Waben zerlegen, dass jede Wabe  $W_i \subset [0, 1] \times [0, 1]$  von  $H$  ganz in eine der Mengen  $U_i \in \mathcal{U}$

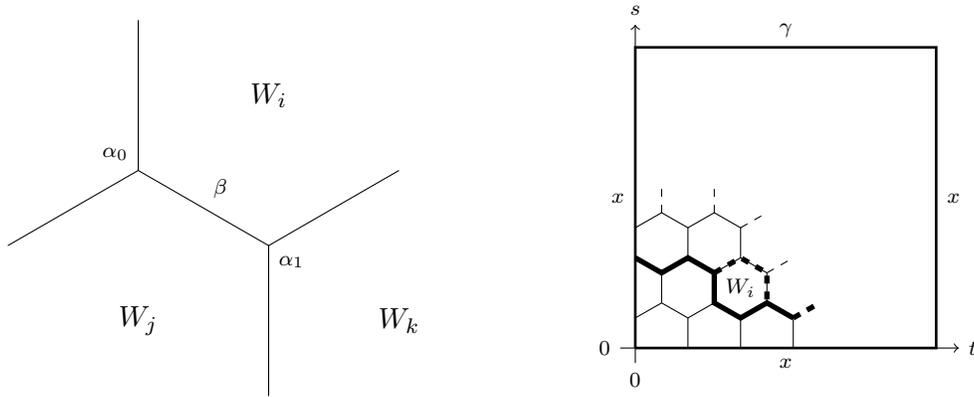


ABBILDUNG 3. Zerlegung des Einheitsquadrats in Waben

abgebildet wird. Nach (3) finden wir zu jedem Eckpunkt  $(t, s)$  einen Weg  $\alpha$  von  $x$  nach  $H(t, s)$ , der ganz im Durchschnitt der (maximal drei) offenen Mengen  $U_i, U_j, U_k \in \mathcal{U}$  zu den angrenzenden Waben  $W_i, W_j, W_k$  verläuft. Wir können jetzt jede Kante zwischen zwei Waben wie oben durch eine Schleife  $\alpha_0\beta\alpha_1^{-1}$  beschreiben, die ganz im Durchschnitt der  $U_i, U_j \in \mathcal{U}$  zu den angrenzenden Waben  $W_i, W_j$  verläuft.

Wir zerlegen die Homotopie  $H$  in eine Folge einzelner Homotopien  $H_i$  relativ zu  $x$ , die jeweils eine Wabe  $W_i$  überstreichen, siehe Abbildung 3. Zu Beginn der Homotopie wird der betrachtete Pfad beschrieben durch ein Wort aus Buchstaben der Form

$$\cdots \iota_{(U_i \cap U_j \rightarrow U_j)*} \underbrace{[\alpha_0\beta\alpha_1]}_{\sigma \text{ in } U_i \cap U_j} \cdots \in \prod_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U, x),$$

dabei gehört  $U_j$  hier stets zu einer Wabe  $W_j$  „unterhalb“ des Pfades zu Beginn der Homotopie  $H_i$ . Fall die Kante  $\beta$  an die Wabe  $W_i$  angrenzt, müssen wir als erstes diesen Buchstaben durch einen Buchstaben in  $\pi_1(U_i, x)$  ersetzen. Dazu beachten wir, dass

$$w' \iota_{(U_i \cap U_j \rightarrow U_i)*} [\sigma] w'' = \left( w' \iota_{(U_i \cap U_j \rightarrow U_i)*} [\sigma] \iota_{(U_i \cap U_j \rightarrow U_j)*} [\sigma]^{-1} w'^{-1} \right) \left( w' \iota_{(U_i \cap U_j \rightarrow U_j)*} [\sigma] w'' \right).$$

Dieses Ersetzen entspricht also gerade der Multiplikation von links mit einem Element von  $N$ , vergleiche Bemerkung 2.41.

Wenn wir alle Buchstaben, die zu Kanten der Wabe  $W_i$  gehören, durch Buchstaben in  $\pi_1(U_i, x)$  ersetzt haben, können wir die Homotopie  $H_i$  durchführen. Dabei wird ein Produkt von Schleifen in  $U_i$  durch ein in  $U_i$  homotopes Produkt ersetzt. Nach Kürzen verändert sich das zugehörige Wort im freien Produkt der  $\pi_1(U, x)$  also gar nicht.

Nach endlich vielen Schritten erreichen wir den ursprünglichen Weg  $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$ , wobei  $\gamma$  aber möglicherweise durch ein anderes Wort repräsentiert wird, falls ein oder mehrere  $\gamma_i$  als Schleifen in anderen Umgebungen geschrieben wurden. Nochmaliges Multiplizieren mit Elementen von  $N$  behebt dieses Problem.

Da wir mit der trivialen Schleife, dargestellt durch das leere Wort, begonnen haben, haben wir also  $w \in \ker \varphi$  insgesamt als Produkt von Elementen von  $N$  geschrieben, also folgt  $\ker \varphi \subset N$  und daher  $\ker \varphi = N$ .  $\square$

2.43. BEISPIEL. Die Ziffer „8“ lässt sich als Vereinigung zweier Kreise schreiben. Sei „8“ =  $UV$ , wobei  $U$  und  $V$  kleine offene Umgebungen der beiden Kreise seien, so dass die Kreise Deformations-Retrakte von  $U$  und  $V$  sind. Wähle  $x_0$  als Schnittpunkt der beiden Kreise, dann liefert Seifert-van Kampen, dass  $\pi_1(\text{„8“}, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ .

2.44. BEISPIEL. Ohne die erste Voraussetzung (1) läßt sich der Satz von Seifert-van Kampen nicht formulieren. Es folgen zwei Beispiele, die zeigen, dass die anderen beiden Voraussetzungen ebenfalls nötig sind.

- (1) Betrachte  $X = S^1 \subset \mathbb{C}$  als Vereinigung zweier zusammenziehbarer Mengen  $U_{\pm} = S^1 \setminus \{\pm i\}$ . Beide Mengen haben triviale Fundamentalgruppe, also ist auch  $\pi_1(U_+, 1) * \pi_1(U_-, 1)$  trivial. Auf der anderen Seite ist  $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$  nichttrivial, insbesondere ist die natürliche Abbildung  $\pi_1(U_+, 1) * \pi_1(U_-, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$  nicht surjektiv. Das liegt daran, dass  $U^+ \cap U^- = S^1 \setminus \{i, -i\}$  nicht zusammenhängend ist, also Voraussetzung (2) verletzt ist.
- (2) Betrachte  $Y = S^1 \cup [-1, 1] \subset \mathbb{C}$ , und setze  $U_x = Y \setminus \{x\}$  für  $x \in \{-i, 0, i\}$ . Dann sind die drei Mengen  $U_x$  jeweils homotopieäquivalent zu einem Kreis, haben also Fundamentalgruppe  $\mathbb{Z}$ . Der Durchschnitt je zweier dieser drei Mengen ist zusammenziehbar, also gilt  $N = \{e\}$  und

$$\pi_1(Y, 1) = (\pi_1(U_i, 1) * \pi_1(U_{-i}, 1)) / N = \mathbb{Z} * \mathbb{Z},$$

denn Voraussetzung (3) folgt aus Voraussetzung (2), solange wir nur zwei offene Mengen betrachten.

Andererseits gilt

$$(\pi_1(U_i, 1) * \pi_1(U_0, 1) * \pi_1(U_{-i}, 1)) / N = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z},$$

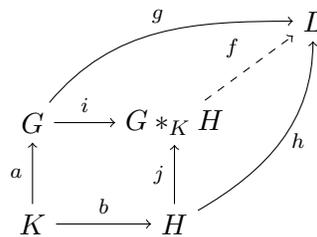
und  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ , etwa haben beide Gruppen unterschiedliche Abelisierungen. Da  $U_i \cap U_0 \cap U_{-i}$  nicht wegzusammenhängend ist, ist Voraussetzung (3) für die Überdeckung  $\{U_i, U_0, U_{-i}\}$  verletzt.

2.45. BEMERKUNG. Der Spezialfall  $X = U \cup V$  im Satz 2.42 von Seifert-van Kampen ist besonders wichtig und etwas einfacher zu formulieren als der allgemeine Fall. Da der Beweis aber nicht einfacher wird, haben wir gleich den allgemeinen Fall betrachtet.

- (1) Seien  $G, H, K$  Gruppen und  $a: K \rightarrow G, b: K \rightarrow H$  Gruppenhomomorphismen, so definiert man das *amalgamierte Produkt* von  $G$  und  $H$  über  $K$  durch

$$G *_K H = G * H / (\{ a(k)b(k)^{-1} \mid k \in K \}).$$

Das amalgamierte Produkt erfüllt die universelle Eigenschaft eines Pushouts in der Kategorie  $\mathcal{G}rp$ , vergleiche Folgerung 1.77.



Seien dazu  $i: G \rightarrow G *_K H$  und  $j: H \rightarrow G *_K H$  die natürlichen Homomorphismen, sei  $L$  eine Gruppe und seien  $g: G \rightarrow L, h: H \rightarrow L$  Homomorphismen mit  $g \circ a = h \circ b: K \rightarrow L$ , dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus

$$f: G *_K H \rightarrow L \text{ mit } g = f \circ i \text{ und } h = f \circ j.$$

- (2) Sei  $X = U \cup V$  topologischer Raum mit  $U, V$  offen. Dann trägt  $X$  die Quotiententopologie zur natürlichen Abbildung  $U \sqcup V \rightarrow X$ . Also ist  $X$  ebenfalls ein Pushout nach Folgerung 1.77. Dazu fasst man  $U \cap V$  als Teilmenge von  $V$  auf und betrachtet die Inklusion  $f: U \cap V \hookrightarrow U$  (oder umgekehrt). Wenn wir einen Basispunkt  $x \in U \cap V$  festlegen, erhalten wir analog einen Pushout  $X = U \cup_{U \cap V} V$  in der Kategorie  $\mathcal{T}op_+$ .

- (3) Der Satz von Seifert-van Kampen besagt, dass der Funktor  $\pi_1$  den Pushout in  $\mathcal{Top}_+$  auf den Pushout in  $\mathcal{Grp}$  abbildet, falls  $U \cap V$  wegzusammenhängend ist. Denn, wie schon gesagt, reichen Voraussetzung (1) und (2) aus, solange man Überdeckungen aus zwei Mengen betrachtet.
- (4) Man beachte: Ein beliebiger Funktor  $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  muss den Pushout in  $\mathcal{C}$  nicht auf den in  $\mathcal{D}$  abbilden, falls beide Pushouts existieren. Das zeigt bereits Beispiel 2.44 (1). Im allgemeinen erhält man nur einen Morphismus vom Pushout der Bilder unter  $\mathcal{F}$  in das Bild des Pushouts unter  $\mathcal{F}$ , siehe Übung 2.87.

2.46. BEISPIEL. Die Sphäre  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  ist offensichtlich wegzusammenhängend für  $n \geq 2$ . Wir betrachten  $S^n = U_+ \cup U_- \subset \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $U_{\pm} = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, \mp 1)\}$  wie in Beispiel 1.83 (2). Die stereographische Projektion liefert Homöomorphismen  $U_+ \cong \mathbb{R}^n \cong U_-$ , also sind  $U_{\pm}$  zusammenziehbar. Schließlich ist  $S^{n-1}$  ein Deformationsretrakt von  $U_+ \cap U_-$ . Mit  $x = (1, 0, \dots, 0)$  erhalten wir für  $n \geq 2$ , dass

$$\pi_1(S^n, x) = \pi_1(U_+, x) *_{\pi_1(U_+ \cap U_-, x)} \pi_1(U_-, x) = \{e\} *_{\pi_1(S^{n-1}, x)} \{e\} = \{e\},$$

also sind Sphären einfach zusammenhängend ab Dimension 2.

Man ist versucht, das obige Beispiel so zu begründen, dass man jede Schleife in  $S^n$  für  $n \geq 2$  von einem Punkt  $y \in S^n$ , der nicht getroffen wird, zum Basispunkt  $x$  „wegdrückt“. Beispiel 1.22 zeigt aber, dass man Schleifen konstruieren kann, die jeden Punkt in  $S^n$  treffen. Also braucht man ein komplizierteres Argument.

2.47. BEISPIEL. Zur Vorbereitung auf die Übungsaufgabe 2.83 zu den Borromäischen Ringen geben wir drei weitere Beispiele. Dabei betrachten wir die Fundamentalgruppen von Komplementen eines oder mehrerer Kreise im  $\mathbb{R}^3$ .

- (1) Betrachte  $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ . Wir addieren einen Punkt im Unendlichen, indem wir  $U = \mathbb{R}^3 \setminus S^1$  via stereographischer Projektion in  $S^3 \setminus S^1$  einbetten, hierbei wird  $S^1$  zu einem Großkreis, und der fehlende Punkt in  $S^3$  sei  $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ . Es sei  $V$  die obere Halbkugel, dann ist  $S^2$  ein Deformationsretrakt von  $U \cap V$ . Also gilt nach Satz 2.42 mit  $x = U \cap V$ , dass

$$\pi_1(S^3 \setminus S^1, x) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1, x) *_{\pi_1(S^2, x)} \pi_1(V, x) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1, x).$$

Jetzt bilden wir  $S^3 \setminus S^1$  durch stereographische Projektion an einem Punkt der  $S^1$  nach  $\mathbb{R}^3$  ab und erhalten einen Homöomorphismus  $S^3 \setminus S^1 \cong \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0, 0)\} \times \mathbb{R})$ . Aber  $S^1$  ist ein Deformationsretrakt davon, so dass schließlich

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1) \cong \pi_1(S^3 \setminus S^1) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

- (2) Wir betrachten jetzt das Komplement zweier „unverlinkter“ Kreise im Raum, genauer  $Y = \mathbb{R}^3 \setminus (S^1 \times \{-1, 1\})$ . Mit Beispiel (1) und Seifert-van Kampen folgt

$$\begin{aligned} \pi_1(Y) &\cong \pi_1((\mathbb{R}^2 \times (-\infty, 1)) \setminus (S^1 \times \{-1\})) *_{\pi_1(\mathbb{R}^2 \times (-1, 1))} \pi_1((\mathbb{R}^2 \times (-1, \infty)) \setminus (S^1 \times \{1\})) \\ &\cong \mathbb{Z} *_{\{e\}} \mathbb{Z} \cong F_2. \end{aligned}$$

- (3) Wir betrachten im Gegensatz dazu das Komplement zweier „einfach verlinkter“ Kreise im  $\mathbb{R}^3$ , nämlich

$$Z = \mathbb{R}^3 \setminus (\{(\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \mid \varphi \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, \cos \psi + 1, \sin \psi) \mid \psi \in \mathbb{R}\}).$$

Wie in (1) fügen wir einen Punkt im Unendlichen hinzu, dann hat  $Z$  die gleiche Fundamentalgruppe wie

$$S^3 \setminus (\{(\cos \varphi, \sin \varphi, 0, 0) \mid \varphi \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 0, \cos \psi, \sin \psi) \mid \psi \in \mathbb{R}\}).$$

Ein Deformationsretrakt hiervon ist der Clifford-Torus

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \varphi, \sin \varphi, \cos \psi, \sin \psi) \mid \varphi, \psi \in \mathbb{R} \right\} \cong S^1 \times S^1,$$

so dass

$$\pi_1(Z) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \not\cong \pi_1(Y).$$

Also kann die Fundamentalgruppe des Komplementes erkennen, ob man einen oder zwei Kreise entfernt hat, und ob diese „verlinkt“ waren oder nicht. Auch für Knoten im  $\mathbb{R}^3$  ist die Fundamentalgruppe des Komplementes eine sehr mächtige Invariante. Allerdings kann man zwei auf verschiedene Weisen definierten Gruppen nicht immer ohne weiteres ansehen, ob sie isomorph sind oder nicht. Daher ist die Fundamentalgruppe des Komplements keine gute Invariante, um verschiedene Knoten voneinander zu unterscheiden.

Wir haben schon in der Übung 2.76 gesehen, dass die Fundamentalgruppe eines endlichen Produktes punktierter Räume gleich dem Produkt ihrer Fundamentalgruppen ist. Etwas ähnliches wird für Koprodukte punktierter topologischer Räume gelten.

2.48. DEFINITION. Das *Bouquet* oder *Wedge-Produkt* einer Familie  $(X_i, x_i)_{i \in I}$  punktierter topologischer Räume ist der punktierte Raum

$$\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i) = \left( \prod_{i \in I} X_i / \sim, x_0 \right)$$

mit der Quotiententopologie, wobei die Äquivalenzrelation „ $\sim$ “ erzeugt wird durch  $x_i \sim x_j$  für alle Paare  $i, j \in I$ , und  $x_0 = [x_i]$  für alle  $i \in I$ . Sei  $\iota_i: (X_i, x_i) \rightarrow (\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i), x_0)$  die natürliche Inklusion.

2.49. BEMERKUNG. Das Wedge-Produkt erfüllt die universelle Eigenschaft eines Koproduktes in der Kategorie  $\mathcal{Top}_+$ . Dazu sei  $(Y, y)$  ein weiterer punktierter Raum und seien  $f_i: (X_i, x_i) \rightarrow (Y, y)$  punktierte Abbildungen, dann existiert zunächst einmal genau eine stetige Abbildung  $\bar{f}: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow Y$  mit  $f_i = \bar{f} \circ \bar{\iota}_i$ , wobei  $\bar{\iota}_i$  hier die Inklusion von  $X_i$  in die disjunkte Vereinigung bezeichne.

Sei  $q: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i)$  die Abbildung auf den Quotienten. Die Abbildung  $\bar{f}$  bildet alle Basispunkte  $x_i$  auf  $y$  ab, also ist die induzierte Abbildung  $f: \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i) \rightarrow (Y, y)$  wohldefiniert, nach Satz 1.74 stetig, und wegen der Eindeutigkeit von  $\bar{f} = f \circ q$  auch eindeutig.

2.50. FOLGERUNG. Sei  $(X_i, x_i)_{i \in I}$  eine Familie gut punktierter topologischer Räume, das heißt, dass jeder Punkt  $x_i$  eine zusammenziehbare offene Umgebung  $U_i \subset X_i$  besitzt. Dann gilt

$$\pi_1 \left( \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i), x_0 \right) = \prod_{i \in I} \pi_1(X_i, x_i).$$

Also bildet der Funktor  $\pi_1$  unter entsprechenden Voraussetzungen auch Koprodukte in  $\mathcal{Top}_+$  auf Koprodukte in  $\mathcal{Grp}$  ab.

BEWEIS. Wir schreiben  $\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i) = \bigcup_{i \in I} V_i$  mit

$$V_j = (X_j, x_j) \vee \bigvee_{i \in I \setminus \{j\}} (U_i, x_i).$$

Da die  $U_i$  zusammenziehbar sind, ist  $X_j$  Deformationsretrakt von  $V_j$ . Außerdem ist

$$V_j \cap V_k = \bigvee_{i \in I} (U_i, x_i) = V_j \cap V_k \cap V_\ell$$

zusammenziehbar, falls mindestens zwei der Indizes  $j, k, \ell \in I$  verschieden sind. Aus dem Satz 2.42 von Seifert-van Kampen folgt die Behauptung.  $\square$

## 2.5. Die Fundamentalgruppe eines CW-Komplexes

Wir berechnen die Fundamentalgruppen von CW-Komplexen mit Hilfe des Satzes von Seifert-van Kampen. Es wird sich zeigen, dass jede Schleife zu einer Schleife im 1-Gerüst homotop ist, und dass man bereits am 2-Gerüst alle möglichen Homotopien erkennen kann. Insgesamt gilt also  $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X^2, x_0)$  für wegzusammenhängende CW-Komplexe mit  $x_0 \in X$ , wobei  $X^1$  die Erzeuger und  $X^2$  die Relationen in einer Präsentation von  $\pi_1(X, x_0)$  liefert. Umgekehrt taucht jede Gruppe als Fundamentalgruppe eines CW-Komplexes auf.

2.51. BEMERKUNG. Sei  $M$  eine Familie von Erzeugern von  $G$ , und sei  $R \subset *_{m \in M} \mathbb{Z}$  eine Menge von Relationen in der von den Elementen von  $M$  erzeugten freien Gruppe  $F$ . Dann sei  $N = (R)$  der von den Relationen erzeugte Normalteiler von  $F$ . Wir schreiben

$$G = F/N = \langle M \mid R \rangle,$$

diese Darstellung heißt auch eine *Präsentation* der Gruppe  $G$ . Jede Gruppe besitzt eine Präsentation. Zum Beispiel könnten wir  $M = G$  setzen, dann ist  $F$  die Menge aller Wörter in  $M$  (wobei wir die Gruppenstruktur von  $G$  vergessen haben). Dann wählen wir  $R = \ker(F \rightarrow G)$ , wobei wir jedes Wort in  $F$  auf das entsprechende Produkt in  $G$  abbilden.

Zur Erinnerung: Ein CW-Komplex  $X$  ist die Vereinigung seiner  $n$ -Gerüste  $X^n$ , versehen mit der schwachen Topologie. Dabei ist  $X^0$  diskret, und man konstruiert induktiv

$$X^n = X^{n-1} \cup \bigcup_{i \in I^n} e_i^n = X^{n-1} \cup_{\phi^n} \prod_{i \in I^n} D^n.$$

Unter einem *maximalen Baum* in einem wegzusammenhängenden CW-Komplex verstehen wir einen zusammenziehbaren Unterkomplex  $Y \subset X^1$  mit  $X^0 \subset Y$ . Wir werden im Laufe des Beweises des folgenden Satzes verstehen, dass ein maximaler Baum gleichzeitig ein maximaler zusammenziehbarer Unterkomplex von  $X^1$  ist.

2.52. SATZ. Sei  $X$  ein wegzusammenhängender CW-Komplex und  $x_0 \in X^0$ .

(1) Dann existiert  $J \subset I^1$ , so dass

$$Y = X^0 \cup \bigcup_{j \in J} e_j^1$$

ein maximaler Baum in  $X$  ist.

(2) Für  $J$  wie in (1) gilt

$$\pi_1(X^1, x_0) \cong \prod_{i \in I \setminus J} \mathbb{Z}.$$

(3) Es sei  $[\sigma] \in \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$  ein Erzeuger, dann gilt

$$\pi_1(X^2, x_0) \cong \pi_1(X^1, x_0) / (\{\varphi_{i*}^2[\sigma] \mid i \in I^2\}).$$

(4) Es gilt

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X^2, x_0) \cong \langle \{[\sigma_i] \mid i \in I^1 \setminus J\} \mid \{\varphi_{i*}^2[\sigma] \mid i \in I^2\} \rangle.$$

Dieser Satz ist zwar nicht einfach zu formulieren, und auch der Beweis ist kompliziert, da der Satz von Seifert-van Kampen mit offenen Teilmengen arbeitet, während die natürlicherweise auftretenden Unterkomplexe im Beweis abgeschlossen sind — ein Großteil des Beweises besteht darin, dieses Problem zu umgehen. Dafür läßt sich die Berechnung der Fundamentalgruppe eines gegebenen CW-Komplexes mit Hilfe dieses Satzes auf rein algebraische Rechnungen mit Erzeugern und Relationen zurückführen. Das werden wir in Folgerung 2.53 und Beispiel 2.54 ausnutzen.

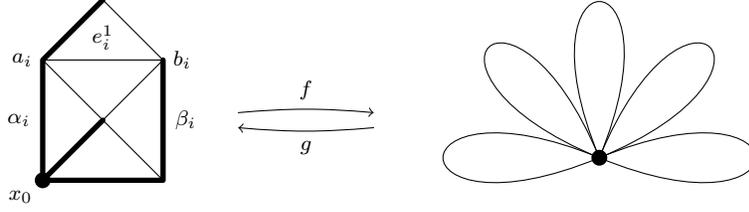


ABBILDUNG 4. Ziehe einen maximalen Baum zusammen

BEWEIS. Zu (1) definieren wir eine Metrik  $d$  auf  $X^0$  so, dass  $d(x, y)$  die Anzahl der Kanten  $e_i^1 \subset X^1$  angibt, die ein Weg von  $x$  nach  $y$  in  $X^1$  mindestens durchlaufen muss. Die Axiome einer Metrik lassen sich leicht überprüfen. Da  $X$  wegzusammenhängend ist, ist nach Folgerung 1.101 auch  $X^1$  wegzusammenhängend, so dass es stets Wege  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X^1$  von  $x$  nach  $y$  gibt. Aus der Kompaktheit von  $[0, 1]$  folgt mit Bemerkung 1.53 (2) und Satz 1.93, dass  $d(x, y) < \infty$  für alle  $x, y \in X^1$ .

Wir konstruieren  $Y = \bigcup_{k=0}^{\infty} Y_k$  induktiv. Dazu sei  $Y_0 = \{x_0\}$ . Gegeben  $Y_{k-1}$  für  $k \geq 1$ , so dass

$$Y_{k-1}^0 = Y_{k-1} \cap X^0 = \{x \in X^0 \mid d(x, x_0) \leq k-1\}$$

und  $J_{k-1}$  mit

$$Y_{k-1} = Y_{k-1}^0 \cup \bigcup_{j \in J_{k-1}} e_j^1,$$

finden wir von jedem  $x \in X^0$  mit  $d(x, x_0) = k$  mindestens eine Kante  $e_{i_x}^1$ , die  $x$  mit einem Punkt  $x' \in Y_{k-1}^0$  mit  $d(x', x_0) = k-1$  verbindet. Wir nehmen für jeden solchen Punkt genau eine entsprechende Kante zu  $Y_{k-1}$  hinzu und erhalten  $Y_k$ . Man beachte, dass es von jedem Punkt  $x \in Y_k^0$  dann induktiv genau einen kürzesten Weg von  $x$  nach  $x_0$  gibt, der über  $k$  Kanten führt.

Um zu zeigen, dass  $\{x_0\}$  Deformationsretrakt von  $Y$  und  $Y$  somit zusammenziehbar ist, konstruieren wir zunächst Abbildungen  $H_k: Y_k \times [0, 1] \rightarrow Y_k$  relativ zu  $Y_{k-1} \times [0, 1]$ , so dass  $H_k(y, 0) = y$  und  $H_k(y, 1) \in Y_{k-1}$  für alle  $y \in Y_k$ . Dazu ziehen wir gleichzeitig alle Kanten  $\bar{e}_{i_x}^1$  von  $x \in Y_k^0/Y_{k-1}^0$  nach  $x' \in Y_{k-1}^0$  auf ihren Endpunkt  $x'$  zusammen. Anschließend setzen wir alle  $H_k$  wie im Beweis von Satz 1.100 zu einer Abbildung  $H: Y \times [0, 1] \rightarrow Y$  zusammen mit

$$H(y, s) = \begin{cases} y & \text{für } 0 \leq s \leq 2^{-k}, \text{ und} \\ H_{k'}((r_{k'+1} \circ \dots \circ r_k)(y), 2^{-k'}s - 1) & \text{für } 2^{-k'} \leq s \leq 2^{1-k'} \end{cases}$$

für alle  $y \in Y_k \setminus Y_{k-1}$ ,  $k \geq 0$ , wobei  $r_k = H(\cdot, 1): Y_k \rightarrow Y_{k-1}$  die oben konstruierten Retraktionen seien. Damit haben wir gezeigt, dass  $Y$  zusammenziehbar ist mit  $X^0 \subset Y$ , also in unserem Sinne ein maximaler Baum. Außerdem würde das Hinzunehmen jeder weiteren Kante zu  $Y$  einen Unterkomplex von  $X^1$  mit nichttrivialer Fundamentalgruppe liefern, so dass  $Y$  tatsächlich ein maximaler zusammenziehbarer Unterkomplex ist.

Zu (2) reicht es nach Folgerung 2.50 zu zeigen, dass  $X^1$  zu einem Bouquet von Kreisen homotopieäquivalent ist. Dazu definieren wir eine Abbildung

$$f: (X^1, x_0) \longrightarrow \bigvee_{i \in I^1 \setminus J} (S^1, 1),$$

die ganz  $Y$  auf den Basispunkt und jede Kante  $e_i^1$  mit  $i \notin J$  homöomorph auf den entsprechenden Kreis  $S^1 \setminus \{1\}$  rechts abbildet. Umgekehrt definieren wir

$$g: \bigvee_{i \in I^1 \setminus J} (S^1, 1) \longrightarrow (X^1, x_0)$$

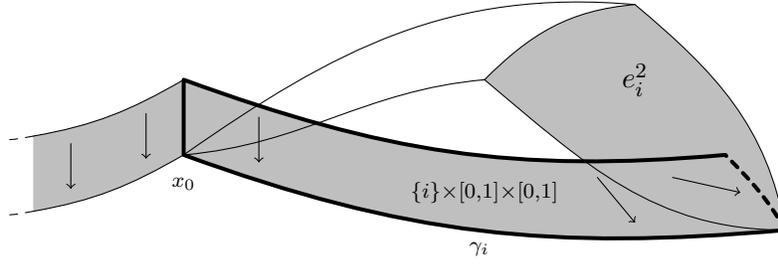


ABBILDUNG 5. Der Raum  $\overline{X}^n$

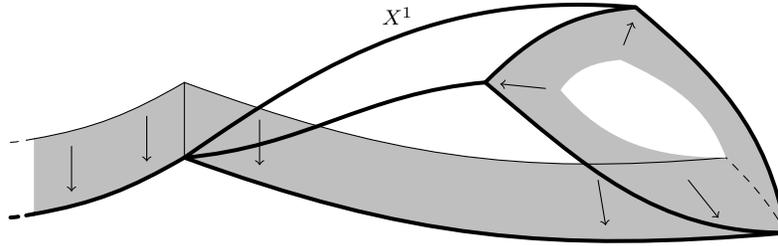


ABBILDUNG 6. Die Umgebung  $U_0$  von  $X^{n-1}$

so, dass jeder Kreis auf eine Schleife  $\alpha_i e_i^1 \overline{\beta}_i$  abgebildet wird; dabei seien  $\alpha_i, \beta_i$  die kürzesten Wege von  $x_0$  zu den Endpunkten  $a_i, b_i$  von  $e_i^1$ , siehe Abbildung 4.

Die Abbildung  $g \circ f: (X^1, x_0) \rightarrow (X^1, x_0)$  bildet ganz  $Y$  auf  $x_0$  und jede Kante  $\overline{e}_i^1$  auf die Schleife  $\alpha_i e_i^1 \overline{\beta}_i$  ab. Wir können die obige Homotopie  $H$  zu einer Homotopie zwischen  $\text{id}_{X^1}$  und  $g \circ f$  ausdehnen, indem wir  $e_i^1 \times \{s\}$  auf einen Weg von  $H(a_i, s)$  über  $e_i^1$  nach  $H(b_i, s)$  abbilden.

Umgekehrt zieht  $f \circ g: \bigvee_{i \in I^1 \setminus J} (S^1, 1) \rightarrow \bigvee_{i \in I^1 \setminus J} (S^1, 1)$  jeweils das erste und das letzte Drittel jedes Kreises auf den Basispunkt zusammen. Auch hier lässt sich eine Homotopie zur Identität angeben. Also sind  $(X^1, x_0)$  und  $\bigvee_{i \in I^1 \setminus J} (S^1, 1)$  homotopieäquivalent. Jetzt folgt (2) aus Folgerung 2.50, da  $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ .

Auch die Schritte (3) und (4) basieren auf dem Satz von Seifert-van Kampen. Um induktiv von  $\pi_1(X^{n-1}, x_0)$  zu  $\pi_1(X^n, x_0)$  für  $n \geq 2$  zu gelangen, vergrößern wir  $X^n$  zu  $\overline{X}^n$ , siehe Abbildung 5. Dazu wählen wir für jedes  $i \in I^n$  einen Weg  $\gamma_i$  von  $x_0$  zum Bild  $x_i$  des Basispunktes von  $S^{n-1}$  unter der Verklebeabbildung  $\varphi_i$ . Wir verkleben  $I^n \times [0, 1] \times [0, 1]$  wie folgt mit  $X^n$ .

- (1) Wir identifizieren alle Strecken  $\{(i, 0)\} \times [0, 1]$  miteinander und kleben  $[(i, 0, 0)]$  an den Punkt  $x_0$ .
- (2) Wir verkleben  $\{i\} \times [0, 1] \times \{0\}$  entlang von  $\gamma_i: [0, 1] \times \{0\}$  mit  $X^{n-1}$ .
- (3) Wir kleben  $\{1\} \times [0, 1]$  auf eine Strecke in  $e_i^n$  vom Punkt  $x_i$  ins Innere der Zelle bis zum Radius  $1/2$ .

Dann ist  $X^n$  ein Deformationsretrakt von  $\overline{X}^n$ , indem wir jedes Quadrat  $\{i\} \times [0, 1] \times [0, 1]$  auf das Bild von  $\{i\} \times ([0, 1] \times \{0\}) \cup \{1\} \times [0, 1]$  zusammenziehen.

Wir betrachten die folgenden offenen Teilmengen. Es sei

$$U_0 = \overline{X}^n \setminus \bigcup_{i \in I^n} \Phi_i^n \left( D_{1/2}^n \right),$$

wobei  $D_{1/2}^n \subset D^n$  den abgeschlossenen Ball vom Radius  $\frac{1}{2}$  bezeichne, siehe Abbildung 6. Dann ist  $X^{n-1}$  ein Deformationsretrakt von  $U_0$ .

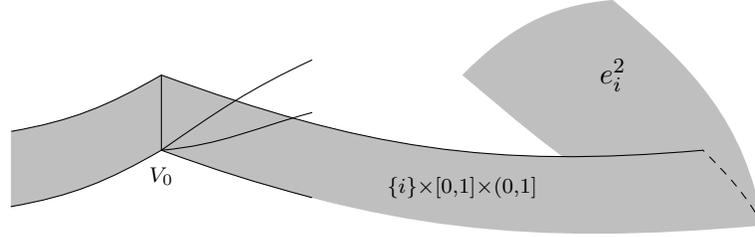


ABBILDUNG 7. Der Raum  $U_i$

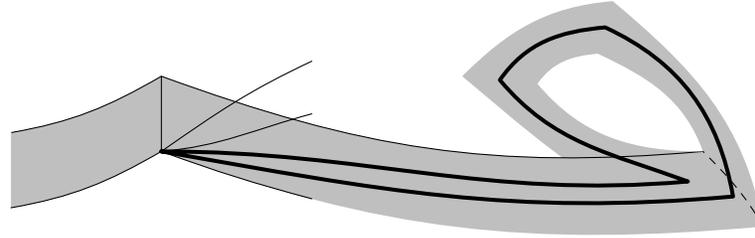


ABBILDUNG 8. Die Fundamentalgruppe von  $U_0 \cap U_i$

Nach Satz 1.100 existiert eine zusammenziehbare Umgebung von  $x_0$  in  $X^n \cap U_0$ . Es sei  $V_0 \subset \bar{X}^n$  ihr Urbild unter der Retraktion  $r_n: \bar{X}^n \rightarrow X^n$ , dann ist  $V_0$  ebenfalls zusammenziehbar. Für  $i \in I^n$  setze

$$U_i = V_0 \cup (\{i\} \times [0, 1] \times (0, 1)) \cup e_i^n .$$

Man überzeugt sich, dass  $U_i$  ebenfalls zusammenziehbar ist, siehe Abbildung 7.

Für  $i \neq j \in I^n$  ist  $U_i \cap U_j = V_0$  zusammenziehbar, also insbesondere wegzusammenhängend. Außerdem ist

$$U_0 \cap U_i = V_0 \cup (\{i\} \times [0, 1] \times (0, 1)) \cup \Phi_i^n(B^n \setminus D_{1/2}^n)$$

wegzusammenhängend mit Deformationsretrakt  $\Phi_i^n(S_{3/4}^{n-1})$ . Analog sieht man, dass auch dreifache Durchschnitte von  $\mathcal{U} = \{U_0\} \cup \{U_i \mid i \in I^n\}$  wegzusammenhängend sind.

Im Fall  $n = 2$  folgt

$$\pi_1(U_0 \cap U_i, x_0) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} ,$$

wobei ein Erzeuger  $[\sigma] \in \pi_1(S^1)$  auf eine Schleife abgebildet wird, die in  $U_0$  zu  $\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\bar{\gamma}_i$  homotop ist, siehe Abbildung 8. Behauptung (3) folgt jetzt aus Satz 2.42, da

$$\begin{aligned} \pi_1(X^2, x_0) &= \pi_1(\bar{X}^2, x_0) = \left( \pi_1(U_0, x_0) * \prod_{i \in I^2} \pi_1(U_i, x_0) \right) / (\{[\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\bar{\gamma}_i] \mid i \in I^2\}) \\ &= \pi_1(X_1, x_0) / (\{[\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\bar{\gamma}_i] \mid i \in I^2\}) . \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Erzeuger  $[\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\bar{\gamma}_i]$  nach Satz 2.15 vom Weg  $\gamma_i$  abhängen. Da aber verschiedene Wege zueinander konjugierte Erzeuger liefern, hängt der erzeugte Normalteiler nach Bemerkung 2.41 nicht von der Wahl von  $\gamma_i$  ab.

Der Beweis von Behauptung (4) beginnt damit, dass  $U_0 \cap U_i \sim S^{n-1}$  für  $n \geq 3$  nach Beispiel 2.46 einfach zusammenhängend ist und somit  $\pi_1(X^n, x_0) \cong \pi_1(X^{n-1}, x_0)$  analog zur obigen Überlegung. Jetzt liefert die Inklusion  $\iota: X^n \hookrightarrow X$  Isomorphismen der Fundamentalgruppen. Denn sei  $\gamma$  eine Schleife in  $X$ , dann verläuft  $\gamma$  in einem Gerüst  $X^n$  nach Satz 1.93, also ist die Abbildung

$$\iota_*: \pi_1(X^2, x_0) \cong \pi_1(X^n, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

surjektiv. Falls  $\gamma$  nullhomotop ist, verläuft aus dem gleichen Grund eine Homotopie  $H$  zur trivialen Schleife ganz in einem  $X^n$  (wobei  $n$  jetzt größer sein kann), also ist  $\iota_*$  auch injektiv. Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

2.53. FOLGERUNG. Sei  $G$  eine Gruppe, dann existiert ein CW-Komplex  $X$  mit  $\pi_1(X) \cong G$ .

BEWEIS. Sei  $G$  durch Erzeuger  $M \subset G$  und Relationen  $R$  gegeben. Wir konstruieren einen CW-Komplex  $X$ . Sei  $X^0 = \{x_0\}$  das 0-Skelett, bestehend aus einer 0-Zelle  $x_0$ .

Wir wählen  $I^1 = M$ , das heißt, für jeden Erzeuger  $m \in M$  sei  $e_m^1$  eine 1-Zelle, deren zwei Endpunkte notwendigerweise an  $x_0$  angeklebt sind. Dann ist  $\{x_0\} \subset X^1$  ein maximaler Baum, also ist  $F = \pi_1(X^1, x_0)$  die von den Schleifen  $\{e_m^1 \mid m \in M\}$  erzeugte freie Gruppe. Wir identifizieren den zu  $e_m^1$  gehörigen Erzeuger mit  $m \in M$ .

Wir wählen  $I^2 = R$ , und für jede Relation  $r = m_1 \cdots m_k \in R$  wählen wir eine 2-Zelle  $e_r^2$ , so dass die Verklebeabbildung  $\varphi_r^2: S^1 \rightarrow X^1$  gerade das Element  $m_1 \cdots m_k \in \pi_1(X^1, x_0)$  repräsentiert.

Aus Satz 2.52 folgt jetzt

$$\pi_1(X^2, x_0) = \langle M \mid R \rangle = G. \quad \square$$

2.54. BEISPIEL. Wir betrachten Flächen, genauer, kompakte, zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension 2.

- (1) Eine orientierbare Fläche  $X_g$  vom Geschlecht  $g \geq 0$  lässt sich als CW-Komplex mit einer Ecke  $\{x_0\}$ ,  $2g$  Kanten  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  und einer 2-Zelle schreiben. Die zugehörige Verklebeabbildung  $\varphi^2$  entspreche der Schleife  $a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1 \cdots a_g b_g \bar{a}_g \bar{b}_g$ , und wir erhalten die Präsentation

$$\pi_1(X_g, x_0) \cong \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle.$$

Für  $g = 0$  erhalten wir die Kugel  $S^2$ , für  $g = 1$  den Torus  $T^2$ . Da die Relation ein Produkt von Kommutatoren ist, erhalten wir die Abelisierung

$$\pi_1(X_g, x_0)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}.$$

- (2) Eine nicht orientierbare Fläche  $Y_g$  vom Geschlecht  $g \geq 0$  lässt sich analog schreiben als CW-Komplex mit einer Ecke  $\{x_0\}$ ,  $g + 1$  Kanten  $a_0, \dots, a_g$  und einer 2-Zelle. Die Verklebeabbildung sei gegeben durch die Schleife  $a_0^2 \cdots a_g^2$ , also gilt

$$\pi_1(Y_g, x_0) \cong \langle a_0, \dots, a_g \mid a_0^2 \cdots a_g^2 \rangle.$$

Für  $g = 0$  erhalten wir  $\mathbb{R}P^2$ , für  $g = 1$  die Kleinsche Flasche. In diesem Fall erhalten wir die Abelisierung

$$\pi_1(Y_g, x_0)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{g+1} / \langle (2, \dots, 2) \rangle \cong \mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

wobei die rechte Darstellung zu den Erzeugern  $a_1, \dots, a_g$  und  $a_0 + \cdots + a_g$  gehört.

Wir sehen also, dass man die unterschiedlichen Flächen anhand ihrer Fundamentalgruppen unterscheiden kann.

## 2.6. Überlagerungen

Wir betrachten Überlagerungen  $\tilde{X} \rightarrow X$  eines gegebenen topologischen Raumes  $X$ , und vergleichen die Fundamentalgruppen von  $\tilde{X}$  und  $X$  miteinander.

Wir erinnern uns an die Definition 2.25 von Überlagerungen. Eine Überlagerung heißt universell, wenn sie zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist.

2.55. BEISPIEL. In Beispiel 2.26 hatten wir bereits eine universelle Überlagerung  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  kennengelernt. Andere zusammenhängende Überlagerungen von  $S^1 \subset \mathbb{C}$  sind von der Form

$$p_k: S^1 \longrightarrow S^1 \quad \text{mit} \quad z \longmapsto z^k$$

für  $0 < k \in \mathbb{Z}$ . Es gilt

$$\text{im } p_{k*} = k\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1, 1).$$

Wir werden später sehen, dass das bis auf Isomorphie alle zusammenhängenden Überlagerungen der  $S^1$  sind.

Unter einem *Lift* einer Abbildung  $F: Y \rightarrow X$  in eine Überlagerung  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  verstehen wir eine Abbildung  $\tilde{F}: Y \rightarrow \tilde{X}$  mit  $F = p \circ \tilde{F}$ . Wenn wir von punktierten Räumen und Abbildungen  $(Y, y_0) \rightarrow (X, x_0) \leftarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  sprechen, erwarten wir von einem Lift ebenfalls, dass er  $y_0$  auf  $\tilde{x}_0$  abbildet.

Wir erinnern uns an den Homotopie-Liftungssatz 2.27 und insbesondere an den Beweis des Satzes 2.28. Dort hatten wir für  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  gesehen, dass wir jede Schleife in  $(X, x_0)$  zu einem Weg in  $\tilde{X}$  mit vorgegebenem Anfangspunkt eindeutig liften können, und dass relativ homotope Schleifen zu relativ homotopen Wegen liften. Das dortige Argument überträgt sich auf alle Überlagerungen.

2.56. SATZ. Sei  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  eine Überlagerung, dann ist die Abbildung

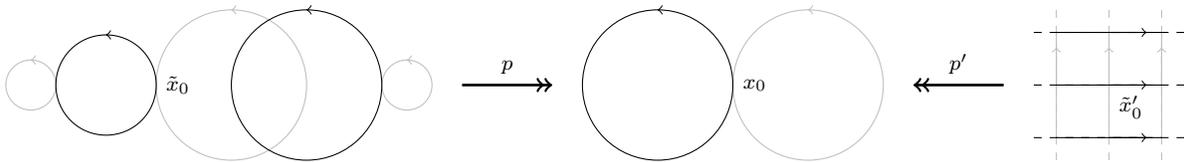
$$p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

injektiv, und für  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$  liegt  $[\gamma]$  genau dann im Bild von  $p_*$ , wenn  $\gamma$  einen Lift  $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}_0$  besitzt.

BEWEIS. Sei  $\tilde{\gamma}: S^1 \rightarrow \tilde{X}$  eine Schleife, so dass  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$  relativ zu Anfangs- und Endpunkt nullhomotop ist. Dann lässt sich die Nullhomotopie mit Satz 2.27 zu einer relativen Nullhomotopie von  $\tilde{\gamma}$  liften. Also ist  $p_*$  injektiv.

Eine Schleife  $\gamma$ , deren Lift  $\tilde{\gamma}$  mit Anfangspunkt  $\tilde{x}_0$  wiederum eine Schleife ist, liegt im Bild von  $p_*$ , da  $p_*[\tilde{\gamma}] = [p \circ \tilde{\gamma}] = [\gamma]$ . Sei umgekehrt  $\gamma$  eine Schleife mit  $[\gamma] \in \text{im}(p_*)$ . Dann ist  $\gamma$  homotop zu einer Schleife der Form  $\gamma' = p \circ \tilde{\gamma}'$ . Liften der Homotopie liefert eine Homotopie zwischen dem Lift  $\tilde{\gamma}$  von  $\gamma$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$  und  $\tilde{\gamma}'$ , also folgt  $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1) = \tilde{x}_0$ .  $\square$

2.57. BEISPIEL. Die „Acht“  $X = S^1 \vee S^1$  hat sehr viele paarweise nicht isomorphe Überlagerungen, siehe [H]. Wir werden sehen, dass das Bild im  $p_*$  der Fundamentalgruppe  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  in  $\pi_1(X, x_0)$  die Überlagerung  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  bereits bis auf Isomorphie festlegt.



Wir wollen allgemeiner fragen, wann sich eine Abbildung  $F: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  zu einer Abbildung  $\tilde{F}: (Y, t_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  mit  $F = p \circ \tilde{F}$  liften lässt.

Wir erinnern uns an den Begriff „lokal wegzusammenhängend“ aus Definition 1.70. Falls  $Y$  lokal wegzusammenhängend ist, sind alle Wegzusammenhangskomponenten sowohl offen als auch abgeschlossen. Also ist  $Y$  in diesem Fall genau dann wegzusammenhängend, wenn  $Y$  zusammenhängend ist.

2.58. SATZ (Liftungssatz). Sei  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  eine Überlagerung, und sei  $Y$  zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann lässt sich eine Abbildung  $F: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$

genau dann zu einer Abbildung  $\tilde{F}: (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  mit  $F = p \circ \tilde{F}$  liften, wenn

$$\text{im } F_* \subset \text{im } p_* \subset \pi_1(X, p). \quad (*)$$

In diesem Fall ist der Lift  $\tilde{F}$  durch  $\tilde{F}(y_0) = \tilde{x}_0$  eindeutig bestimmt.

Falls  $Y$  nicht zusammenhängend ist, müssen wir den Lift auf jeder Wegzusammenhangskomponente von  $Y$  einzeln konstruieren; eventuell benötigen wir dazu jeweils andere Basispunkte.

BEWEIS. Die Aussage „ $\implies$ “ ist klar, da aus der Existenz von  $\tilde{F}$  bereits

$$\text{im } F_* = \text{im}(p_* \circ \tilde{F}_*) \subset \text{im } p_*$$

folgt.

Sei umgekehrt (\*) erfüllt. Wir definieren einen Lift  $\tilde{F}$  wie folgt. Da  $Y$  wegzusammenhängend ist, können wir zu jedem  $y \in Y$  einen Pfad  $\sigma$  von  $y_0$  nach  $y$  angeben, und dazu wie im Beweis von Satz 2.28 einen Lift  $\tilde{\tau}$  von  $\tau = F \circ \sigma$  mit Anfangspunkt  $\tilde{\tau}(0) = x_0$ . Wir setzen  $\tilde{F}(y) = \tilde{\tau}(1)$ . Hieraus folgt auch bereits die Eindeutigkeit von  $\tilde{F}$ .

Um zu zeigen, dass  $\tilde{F}$  wohldefiniert ist, wählen wir einen weiteren Weg  $\sigma'$  von  $y_0$  nach  $y$  und konstruieren einen Lift  $\tilde{\tau}'$  von  $\tau' = F \circ \sigma'$  wie oben. Dann ist  $\tau'\tilde{\tau} \in \text{im } F_* \subset \text{im } p_*$  nach (\*), also existiert ein geschlossener Lift  $\tilde{\tau}'\tilde{\tau}$  nach Satz 2.56. Das heisst, ein Lift  $\tilde{\tau}$  von  $\tilde{\tau}$  startet bei  $\tilde{\tau}'(1)$  und führt zu  $\tilde{x}_0$ . Wegen der Eindeutigkeit des Lifts ist  $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}'$ , und es folgt  $\tilde{\tau}(1) = \tilde{\tau}'(1)$ , was zu zeigen war.

Zur Stetigkeit von  $\tilde{F}$  sei  $y \in Y$ , und sei  $U$  eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von  $x = F(y)$  in  $X$ . Dann existiert eine Umgebung  $\tilde{U} \subset \tilde{X}$  von  $\tilde{x} = \tilde{F}(y)$ , so dass  $p: \tilde{U} \rightarrow U$  ein Homöomorphismus ist. Hierbei können wir offensichtlich  $U$  so wählen, dass  $\tilde{U}$  als Umgebung von  $\tilde{y}$  beliebig klein wird. Wegen Stetigkeit von  $F$  ist  $F^{-1}(U)$  offen, und es existiert eine wegzusammenhängende Umgebung  $V \subset F^{-1}(U)$  von  $y$ .

Sei  $\sigma$  ein Weg von  $y_0$  nach  $y$ . Sei  $\tilde{\tau}$  der Lift von  $\tau = F \circ \sigma$  wie oben, so dass also  $\tilde{\tau}(1) = \tilde{F}(y)$ . Sei  $y' \in V$ , und sei  $\alpha$  ein Weg von  $y$  nach  $y'$  in  $V$ . Da  $\beta = F \circ \alpha$  in  $U$  verläuft, hat  $\beta$  einen Lift  $\tilde{\beta} = (p|_{\tilde{U}})^{-1} \circ \beta$  in  $\tilde{U}$ . Dann ist  $\tilde{\tau}\tilde{\beta}$  ein Lift von  $\tau\beta = F \circ (\sigma\alpha)$ , und es folgt

$$\tilde{F}(y') = (\tilde{\tau}\tilde{\beta})(1) = \tilde{\beta}(1) \in \tilde{U}.$$

Also gilt  $\tilde{F}(V) \subset \tilde{U}$ , und da  $\tilde{U}$  beliebig klein gewählt werden kann folgt die Stetigkeit von  $\tilde{F}$  bei  $y$ . Da  $y$  beliebig war, ist  $\tilde{F}$  stetig.  $\square$

2.59. BEMERKUNG. Der lokale Wegzusammenhang wurde nur eingesetzt, um die Stetigkeit von  $\tilde{F}$  nachzuweisen, er ist aber nötig für die Existenz des Liftes, siehe Übung 2.93. Zur Eindeutigkeit von  $\tilde{F}$  reicht Zusammenhang jedoch aus: Sei etwa  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  eine Überlagerung, und sei  $Y$  zusammenhängend. Seien  $\tilde{F}, \tilde{F}': (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  Lifts von  $F$ . Dann ist die Menge

$$\{y \in Y \mid \tilde{F}(y) = \tilde{F}'(y)\} \subset Y$$

offen, abgeschlossen und nicht leer, also stimmen die Lifts auf ganz  $Y$  überein.

Eine Gruppenwirkung einer Gruppe  $G$  auf einem topologischen Raum  $X$  ist ein Homomorphismus von  $G$  in die Gruppe der Homöomorphismen von  $X$ . Unter Umständen trägt der Quotient  $X/G$ , dessen Punkte die Bahnen der  $G$ -Wirkung sind, wieder die Struktur eines topologischen Raumes, so dass die kanonische Abbildung  $X \rightarrow X/G$  eine Überlagerung ist. Wir beschreiben zunächst diese Konstruktion. Später überlegen wir uns, welche Überlagerungen von Gruppenwirkungen kommen.

2.60. DEFINITION. Eine (*Gruppen-*) *Wirkung* oder *Operation* einer Gruppe  $\Gamma$  auf einem topologischen Raum  $X$  ist ein Gruppenhomomorphismus  $\rho$  von  $\Gamma$  in die Gruppe  $\text{Aut } X$  der Homöomorphismen von  $X$ , schreibe  $\rho_\gamma$  oder kurz  $\gamma: X \rightarrow X$  für das Bild von  $\gamma \in \Gamma$ .

Eine *Bahn* von  $\rho$  (oder auch kurz von  $\Gamma$ ) ist eine Teilmenge der Form

$$\rho_\Gamma(x) = \Gamma x = \{\rho_\gamma(x) \mid \gamma \in \Gamma\} \subset X$$

mit  $x \in X$ . Der *Quotient*

$$X/\Gamma = \{\Gamma x \mid x \in X\} \subset \mathcal{P}X$$

ist die Menge aller Bahnen. Es bezeichne

$$p: X \longrightarrow X/\Gamma \quad \text{mit} \quad p(x) = \Gamma x$$

die Projektionsabbildung. Der Raum  $X/\Gamma$  trage die Quotiententopologie unter  $p$ .

Es folgen zwei Bedingungen an Gruppenwirkungen, die sicherstellen, dass die Projektionsabbildung eine Überlagerung ist.

2.61. DEFINITION. Eine Gruppenwirkung von  $\Gamma$  auf  $X$  heißt *frei*, wenn für alle  $x \in X$  und alle  $\gamma \in \Gamma$  aus  $\gamma(x) = x$  bereits  $\gamma = e$  folgt. Sie heißt *eigentlich diskontinuierlich*, wenn jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  in  $X$  besitzt, so dass  $\gamma(U) \cap U = \emptyset$  falls  $\gamma(x) \neq x$ .

Wenn  $\Gamma$  frei operiert, kann  $\gamma(x) = x$  nur für das neutrale Element gelten.

2.62. BEISPIEL. Wir geben verschiedene Beispiele von Gruppenwirkungen.

- (1) Es sei  $X = \mathbb{R}$ ,  $\Gamma = \mathbb{Z}$  und  $\gamma(x) = x + \gamma$ . Dann ist der Quotient  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  homöomorph zu  $S^1 \subset \mathbb{C}$  wie in Beispiel 2.26 via

$$\mathbb{Z}x \longmapsto e^{2\pi i x}.$$

Diese Wirkung ist frei und eigentlich diskontinuierlich. Wähle dazu als Umgebung von  $x \in \mathbb{R}$  das Intervall  $U = (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$ , dann gilt  $(x + n - \frac{1}{2}, x + n + \frac{1}{2}) \cap (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}) = \emptyset$  für alle  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

- (2) Es sei  $X = S^1 \subset \mathbb{C}$ ,  $\Gamma = \mathbb{Z}$ ,  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  eingekürzter Bruch und  $\gamma(z) = e^{2\pi i r \gamma} \cdot z$ . Elemente  $\gamma \in q\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$  wirken trivial, das heißt, es gilt  $\gamma(z) = z$  für alle  $z \in S^1$ . Daher ist diese Wirkung nicht frei. Sie ist aber eigentlich diskontinuierlich: zu  $z \in S^1$  wähle

$$U = \left\{ e^{2\pi i \varphi} \cdot z \mid \varphi \in \left( -\frac{1}{2q}, \frac{1}{2q} \right) \right\},$$

dann gilt  $U \cap \rho_n(U) = \emptyset$  für alle  $n \in \mathbb{Z} \setminus q\mathbb{Z}$ .

Die Faktorgruppe  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  wirkt ebenfalls auf  $S^1$ . Der Quotient ist homöomorph zu  $S^1$  via

$$(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})z \longmapsto z^q \in S^1,$$

und die Abbildung  $S^1 \rightarrow S^1$  ist dieselbe wie in Beispiel 2.55. Diese Wirkung ist sowohl frei als auch eigentlich diskontinuierlich.

- (3) Es seien  $X, \Gamma$  wie in (2), aber  $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Dann liegen alle Bahnen dicht in  $X$ . Da jede offene Menge alle Bahnen schneidet, ist  $X/\Gamma$  jetzt eine überabzählbare Menge mit der Klumpentopologie. Die Wirkung ist zwar frei, aber nicht eigentlich diskontinuierlich. Denn die Bahn von  $z \in S^1$  trifft jede noch so kleine Umgebung  $U$ : Zu jeder Umgebung  $U$  von  $z \in S^1$  existiert also  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  mit  $\rho_n(z) \in U$ , insbesondere  $U \cap \rho_n(U) \neq \emptyset$ .

2.63. PROPOSITION. *Es sei  $\rho$  eine freie und eigentlich diskontinuierliche Wirkung einer Gruppe  $\Gamma$  auf  $X$ . Dann ist die Projektionsabbildung  $p: X \rightarrow X/\Gamma$  eine Überlagerung.*

BEWEIS. Es sei  $y = \Gamma x \in X/\Gamma$ , und es sei  $U$  eine Umgebung von  $x$  wie in Definition 2.61. Es sei  $V = p(U) \in X/\Gamma$ , dann folgt aus Definition 2.61, dass

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(U) \subset X .$$

Wir dürfen  $U$  als offen annehmen. Dann sind alle  $\gamma(U)$  offen, und  $A \subset p^{-1}(V)$  ist genau dann offen, wenn alle  $A \cap \gamma(U)$  offen sind. Also erhalten wir den gesuchten Homöomorphismus

$$p^{-1}(V) \cong \coprod_{\gamma \in \Gamma} \gamma(U) \cong \Gamma \times U ,$$

das heißt,  $V \subset X/\Gamma$  ist gleichmäßig überlagert. Da das für alle  $y \in X/\Gamma$  funktioniert, folgt unsere Behauptung.  $\square$

2.64. BEMERKUNG. Der Raum  $X/\Gamma$  trägt die Quotiententopologie. Nach Bemerkung 1.76 ist nicht klar, dass sich „schöne“ Eigenschaften von  $X$  auf den Quotienten vererben. Als Beispiel betrachte den normalen Raum  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Hierauf operiert  $\mathbb{Z}$  durch  $n(x, y) = (2^n x, 2^{-n} y)$ . Da  $(0,0) \notin X$ , ist diese Operation frei und eigentlich diskontinuierlich. Sei etwa  $(x, y) \in X$ , dann können wir als Umgebung  $U$  wie in Definition 2.61 von  $x$  die Menge  $(2^{-1/2}x, 2^{1/2}x) \times \mathbb{R}$  wählen, falls  $x \neq 0$ , oder die Menge  $\mathbb{R} \times (2^{-1/2}y, 2^{1/2}y)$ , falls  $y \neq 0$ .

Allerdings ist der Quotient nicht einmal Hausdorffsch. Die Punkte  $a = p(x, 0)$  und  $b = p(0, y) \in X/\Gamma$  lassen sich nicht trennen, denn für noch so kleine Umgebungen  $U$  von  $a$  und  $V$  von  $b$  gibt es ein hinreichend großes  $n \in \mathbb{Z}$  so dass

$$U \ni p(x, 2^{-n}y) = p(2^{-n}x, y) \in V .$$

2.65. DEFINITION. Eine *Decktransformation* einer Überlagerung  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  ist ein Homöomorphismus  $F: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ , so dass  $p \circ F = p$ . Eine zusammenhängende Überlagerung heißt *normal*, wenn es zu je zwei  $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$  mit  $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$  eine Decktransformation  $F$  mit  $F(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$  gibt.

Warnung: „normal“ hat hier nichts mit (T1) und (T4) zu tun, sondern mit dem Begriff des Normalteilers, siehe Folgerung 2.68.

2.66. BEMERKUNG. Die Decktransformationen einer gegebenen Überlagerung  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  bilden stets eine Gruppe  $\Gamma$ , die *Decktransformationsgruppe*. Sei  $\tilde{X}$  zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Da jede Decktransformation ein Lift  $\tilde{p}$  von  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  mit  $\tilde{p}(\tilde{x}_0) = F(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$  ist, operiert  $\Gamma$  wegen der Eindeutigkeit der Lifte frei. Indem wir Urbilder gleichmäßig überlagerter Umgebungen von Punkten in  $X$  betrachten, sehen wir, dass  $\Gamma$  auch eigentlich diskontinuierlich wirkt. Falls  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  normal ist, folgt  $X \cong \tilde{X}/\Gamma$ .

Seien umgekehrt  $X, \Gamma$  wie in Proposition 2.63 und  $X$  zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann ist  $p: X \rightarrow X/\Gamma$  eine normale Überlagerung, und  $\Gamma$  ist die Gruppe der Decktransformationen. Hier benutzen wir wieder die Eindeutigkeit im Liftungssatz 2.58, um zu zeigen, dass es keine weiteren Decktransformationen gibt.

2.67. BEISPIEL. Wir haben in Beispiel 2.62 schon gesehen, dass die zusammenhängenden Überlagerungen der  $S^1$  in Beispiel 2.55 normal sind. Das linke Bild in Beispiel 2.57 besitzt keine Decktransformationen außer der Identität, ist also nicht normal. Für das rechte Bild erhalten wir eine Decktransformationsgruppe  $\Gamma \cong \mathbb{Z}^2$ , also ist dieses Beispiel normal. Dreht man aber nur je einen horizontalen und einen vertikalen Pfeil in dem Bild um, so erhält man eine neue Überlagerung ohne nichttriviale Decktransformationen.

2.68. FOLGERUNG (aus dem Liftungssatz 2.58). *Es sei  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine zusammenhängende, lokal wegzusammenhängende Überlagerung, seien  $x_0 \in X$  und  $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ , und sei  $\tilde{\gamma}$  ein Weg in  $\tilde{X}$  von  $\tilde{x}_0$  nach  $\tilde{x}_1$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (1) *Es existiert eine Decktransformation  $F: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  mit  $F(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ .*
- (2) *Es gilt  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) \subset \pi_1(X, x_0)$ .*
- (3) *Für  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$  gilt  $[\gamma]^{-1}p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))[\gamma] = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ .*

*Insbesondere ist  $p$  genau dann eine normale Überlagerung, wenn  $\text{im } p_*$  Normalteiler von  $\pi_1(X, x_0)$  ist. In diesem Fall ist  $\Gamma = \pi_1(X, x_0)/\text{im}(p_*)$  die Gruppe der Decktransformationen.*

BEWEIS. Da Decktransformationen invertierbar sind und die Abbildung  $p$  liften, folgt die Äquivalenz von (1) und (2) unmittelbar aus Satz 2.58.

Wie im Satz 2.15 liefert  $\sigma \mapsto \bar{\gamma}\sigma\gamma$  einen Isomorphismus von  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  mit  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ . Es folgt

$$p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = [\gamma]^{-1}p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))[\gamma],$$

und daraus die Äquivalenz von (2) und (3). Da sich je zwei Wege  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$  von  $\tilde{x}_0$  nach  $\tilde{x}_1$  bis auf Homotopie nur bis auf Verkettung mit der Schleife  $\tilde{\gamma}_2\bar{\tilde{\gamma}}_1$  am Punkt  $\tilde{x}_0$  unterscheiden, kommt es nicht auf die Wahl von  $\tilde{\gamma}$  an.

Wenn  $\text{im } p_*$  ein Normalteiler ist, gilt (3), wegen (1) existieren alle Decktransformationen, und  $p$  ist normal. Sei umgekehrt  $p$  normal, also gilt (1). Da es zwischen je zwei Punkten in  $p^{-1}(x_0)$  einen Weg  $\tilde{\gamma}$  gibt, folgt aus (3), dass  $\text{im } p_*$  ein Normalteiler ist.

Um eine Wirkung von  $\pi_1(X, x_0)$  auf  $\tilde{X}$  zu konstruieren, betrachten wir zu  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$  die nach dem Liftungssatz 2.58 eindeutige Decktransformation  $\rho_{[\gamma]}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ , die den Basispunkt  $\tilde{x}_0$  auf den Endpunkt  $\tilde{\gamma}(1)$  des Lifts  $\tilde{\gamma}$  von  $\gamma$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$  abbildet.

Wir müssen zeigen, dass  $\rho$  einen Gruppenhomomorphismus liefert. Sei dazu  $[\gamma_1] \in \pi_1(X, x_0)$ , und sei  $\tilde{\gamma}_1$  der Lift von  $\gamma_1$  mit  $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{x}_0$ . Dann folgt  $\rho_{[\gamma_1]}(\tilde{x}_0) = \tilde{\gamma}_1(1)$ . Außerdem ist  $\tilde{\gamma}' = \rho_{[\gamma]} \circ \tilde{\gamma}$  ein Lift von  $\gamma$  mit  $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{\gamma}_1(1)$ , also ist die Verkettung  $\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}'$  ein Lift von  $\gamma_1\gamma$  mit  $\widetilde{\gamma_1\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ . Es folgt

$$\rho_{[\gamma_1]}(\rho_{[\gamma]}(\tilde{x}_0)) = \rho_{[\gamma_1]}(\tilde{\gamma}(1)) = \tilde{\gamma}'(1) = \widetilde{\gamma_1\gamma}(1) = \rho_{[\gamma_1\gamma]}(\tilde{x}_0).$$

Wegen der Eindeutigkeitsaussage im Liftungssatz 2.58 folgt  $\rho_{[\gamma_1]} \circ \rho_{[\gamma]} = \rho_{[\gamma_1\gamma]}$ , und wir erhalten eine Gruppenwirkung.

Da nach Satz 2.56 gerade die Elemente von  $\text{im } p_*$  zu Schleifen in  $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  liften, folgt  $\ker \rho = \text{im } p_*$ , so dass die Gruppe  $\Gamma = \pi_1(X, x_0)/\text{im } p_*$  frei und wegen Bemerkung 2.66 auch eigentlich diskontinuierlich auf  $\tilde{X}$  operiert, mit  $X \cong \tilde{X}/\Gamma$ .  $\square$

## 2.7. Die universelle Überlagerung

Nach Satz 2.56 bestimmt jede Überlagerung  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  eine Untergruppe im  $p_*$  der Fundamentalgruppe von  $(X, x_0)$ . Wir wollen zeigen, dass es für geeignete Räume  $X$  umgekehrt zu jeder Untergruppe  $G \subset \pi_1(X, x_0)$  bis auf Isomorphie genau eine zusammenhängende Überlagerung  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  mit  $\text{im } p_* = G$  gibt. Dazu erinnern wir uns, dass eine Überlagerung nach Definition 2.25 universell heißt, wenn sie zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist. Eine universelle Überlagerung  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  haben wir in Beispiel 2.26 bereits kennengelernt.

Wir werden später sehen, dass die universelle Überlagerung von  $X$  jede zusammenhängende Überlagerung von  $X$  überlagert, daher der Name. Außerdem kann man jede beliebige (auch nicht zusammenhängende) Überlagerung mit Hilfe der universellen Überlagerung konstruieren.

2.69. DEFINITION. Ein topologischer Raum  $X$  heißt *semilokal einfach zusammenhängend*, wenn jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  besitzt, so dass  $\text{im}(\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)) = 0$ .

2.70. SATZ. Jeder zusammenhängende, lokal wegzusammenhängende und semilokal einfach zusammenhängende topologische Raum  $X$  mit  $x_0 \in X$  hat eine universelle Überlagerung.

2.71. BEMERKUNG. Die Voraussetzung „semilokal einfach zusammenhängend“ wirkt technisch. Tatsächlich ist sie notwendig, siehe Übung 2.94. Sei nämlich  $\tilde{X} \rightarrow X$  eine universelle Überlagerung, sei  $U \subset X$  eine wegzusammenhängende, gleichmäßig überlagerte Umgebung von  $x \in X$ , sei  $\tilde{U}$  eine Zusammenhangskomponente von  $p^{-1}(U)$ , sei  $\tilde{x} \in \tilde{U}$  und  $x = p(\tilde{x})$ . Dann folgt  $\text{im}(\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)) = \{e\}$  aus den folgenden kommutativen Diagrammen.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \longrightarrow & \tilde{X} & & \pi_1(\tilde{U}, \tilde{x}) & \longrightarrow & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = \{e\} \\ p|_{\tilde{U}} \downarrow \cong & & \downarrow p & \implies & (p|_{\tilde{U}})_* \downarrow \cong & & p_* \downarrow \\ U & \longrightarrow & X & & \pi_1(U, x) & \longrightarrow & \pi_1(X, x) \end{array}$$

BEWEIS von Satz 2.70. Angenommen, es gebe eine universelle Überlagerung. Dann wissen wir nach Satz 2.56, dass eine Schleife  $\gamma$  in  $X$  mit  $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$  genau dann zu einer Schleife in der universellen Überlagerung liftet, wenn sie in  $X$  nullhomotop ist. Wie immer folgt, dass zwei Wege  $\sigma, \sigma'$  von  $x_0$  nach  $x \in X$  genau dann Lifts  $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'$  mit  $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{\sigma}'(0) = \tilde{x}_0$  und gleichem Endpunkt  $\tilde{x} = \tilde{\sigma}(1) = \tilde{\sigma}'(1)$  haben werden, wenn  $\sigma$  und  $\sigma'$  homotop sind. Also definieren wir

$$\tilde{X} = \{ \sigma : [0, 1] \rightarrow X \mid \sigma(0) = x_0 \} / \sim \quad \text{und} \quad p([\sigma]) = \sigma(1),$$

wobei „ $\sim$ “ hier Homotopie relativ zu  $\{0, 1\}$  bezeichne.

Zur Topologie von  $\tilde{X}$  sei zunächst  $U \subset X$  offen und  $x \in U$ , dann hat  $x$  nach Voraussetzung eine wegzusammenhängende offene Umgebung  $V \subset U$  mit  $\text{im}(\pi_1(V, x) \rightarrow \pi_1(X, x)) = 0$ . Also bildet

$$\mathcal{B} = \{ V \in \mathcal{O}_X \mid V \text{ wegzusammenhängend und } \text{im}(\pi_1(V, x) \rightarrow \pi_1(X, x)) = 0 \}$$

eine Basis von  $\mathcal{O}_X$ .

Für  $V \in \mathcal{B}$  und einen Weg  $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\sigma(0) = x_0$  und  $\sigma(1) \in V$  setze

$$U(V, \sigma) = \{ [\sigma\beta] \mid \beta \text{ Weg in } V \text{ mit } \beta(0) = \sigma(1) \} \subset \tilde{X}.$$

Dann ist die Abbildung

$$U(V, \sigma) \longrightarrow V \quad \text{mit} \quad [\sigma\beta] \longmapsto \beta(1) \quad (*)$$

eine Bijektion, denn Surjektivität folgt, da  $V$  wegzusammenhängend ist, und Injektivität, da für zwei Wege  $\beta, \beta'$  mit gleichem Anfangspunkt  $x$  und gleichem Endpunkt die Schleife  $\beta'\beta^{-1}$  in  $V$  ja in  $X$  zusammenziehbar ist, somit also auch  $[\sigma\beta] = [\sigma\beta'] \in \tilde{X}$ .

Wir definieren also eine Topologie auf  $\tilde{X}$  durch Angabe einer Basis

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{ U(V, \sigma) \mid V \in \mathcal{B} \text{ und } \sigma \text{ Weg in } X \text{ mit } \sigma(0) = x_0 \text{ und } \sigma(1) \in V \}.$$

Aus (\*) folgt jetzt sofort die Stetigkeit von  $p$  und die Überlagerungseigenschaft, da alle  $V \in \mathcal{B}$  gleichmäßig überlagert sind.

Es gilt  $\text{im } p_* = 0$ , denn sei  $\tilde{\gamma}$  eine Schleife in  $\tilde{X}$ , dann zerlegen wir  $[0, 1]$  in Teilintervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ , so dass jedes Teilintervall in eine der Mengen  $U(V_i, \sigma_i) \in \tilde{\mathcal{B}}$  abgebildet wird. Wir erhalten eine Nullhomotopie von  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ , indem wir ausnutzen, dass  $\sigma_i \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \sim \sigma_{i+1}$  gilt (Bild). Aus Satz 2.56 folgt  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = 0$  da offensichtlich  $\text{im } p_* = 0$ .  $\square$

2.72. BEMERKUNG. Auf der soeben konstruierten universellen Überlagerung  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  operiert die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, x_0)$  durch  $[\gamma] \cdot [\sigma] = [\gamma\sigma]$ . Außerdem folgt aus obigem Beweis, dass  $\tilde{X}/\pi_1(X, x_0) \cong X$ . Beides erhalten wir aber auch direkt aus Folgerung 2.68, da die Gruppe  $\text{im } p_* = \{e\}$  trivial und insbesondere ein Normalteiler von  $\pi_1(X, x_0)$  ist.

Die universelle Überlagerung erfüllt eine universelle Eigenschaft und ist daher bis auf eindeutige Isomorphie von punktierten Überlagerungen eindeutig bestimmt.

2.73. FOLGERUNG. *Es sei  $(X, x_0)$  zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, und es sei  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  eine universelle Überlagerung.*

- (1) *Es sei  $q: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  eine weitere Überlagerung. Dann existiert genau eine Abbildung  $r: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (Y, y_0)$  mit  $p = q \circ r$ , und  $r$  ist ebenfalls eine universelle Überlagerung von  $Y$ .*
- (2) *Sei insbesondere  $p': (\tilde{X}', \tilde{x}'_0) \rightarrow (X, x_0)$  eine weitere universelle Überlagerung, dann existiert ein eindeutiger Homöomorphismus  $F: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{x}'_0)$ , so dass  $p = p' \circ F$ .*

BEWEIS. Da  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend ist, folgt die Existenz und Eindeutigkeit eines Liftes  $r$  von  $p$  aus Satz 2.58, da  $\{e\} = \text{im } p_* \subset \text{im } q_*$ . Um zu sehen, dass  $r$  eine Überlagerung ist, wählen wir zu  $y \in Y$  eine wegzusammenhängende Umgebung  $U$  von  $x = q(y)$ , die sowohl von  $p$  als auch von  $q$  gleichmäßig überlagert wird. Dann sind die Wegzusammenhangskomponenten von  $p^{-1}(U)$  und  $q^{-1}(U)$  jeweils homöomorph zu  $U$  via  $p$  beziehungsweise  $q$ . Sei  $V \subset Y$  die Wegzusammenhangskomponente von  $q^{-1}(U)$ , die  $y$  enthält. Da  $p = q \circ r$ , und da stetige Abbildungen zusammenhängende Mengen auf zusammenhängende Mengen abbilden, ist  $r^{-1}(V) \subset p^{-1}(U)$  eine disjunkte Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten von  $p^{-1}(U)$ . Also ist  $r$  eine Überlagerung von  $Y$ , und da  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend ist, sogar eine universelle.

Die zweite Aussage zeigt man mit dem üblichen universellen Trick.  $\square$

Es seien  $X, \tilde{X}$  und  $Y$  wie oben. Aus Satz 2.56 und Folgerung 2.68 ergibt sich sofort, dass

$$Y \cong \tilde{X}/\pi_1(Y, y_0) \cong \tilde{X}/\text{im } q_* .$$

Auf diese Weise kann man eine Kategorie aller punktierten zusammenhängenden Überlagerungen von  $(X, x_0)$  konstruieren und zeigen, dass sie zur Kategorie aller Untergruppen von  $\pi_1(X, x_0)$  äquivalent ist. Dabei ist ein Äquivalenz von Kategorien  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Funktor, so dass

- (1) zu jedem  $B \in \text{obj}(\mathcal{B})$  ein  $A \in \text{obj}(\mathcal{A})$  mit  $\mathcal{F}A = B$  existiert, das heißt, so dass  $\mathcal{F}$  auf Objekten bis auf Isomorphie surjektiv ist, und
- (2) für alle  $A, C \in \text{obj}(\mathcal{A})$  die Abbildung  $\mathcal{F}: \text{hom}_{\mathcal{A}}(A, C) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}C)$  eine Bijektion ist, das heißt, so dass  $\mathcal{F}$  auf Morphismen bijektiv ist.

In unserem Fall betrachten wir eine Kategorie, deren Objekte gerade Untergruppen  $G, H, \dots$  von  $\pi_1(X, x_0)$  und deren Morphismen gerade die Inklusionsabbildungen sind, also

$$\text{hom}(H, G) = \begin{cases} \{H \hookrightarrow G\} & \text{falls } H \subset G, \text{ und} \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem betrachten wir eine Kategorie, deren Objekte gerade punktierte, zusammenhängende Überlagerungen  $p: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ ,  $q: (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$  von  $(X, x_0)$ ,  $\dots$ , und deren Morphismen  $F: p \rightarrow q$  gerade punktierte Überlagerungen  $r: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$  mit  $p = q \circ r$  sind. Als Funktoren erhalten wir zum einen die Zuordnung

$$\pi_1(X, x_0) \supset G \longmapsto \tilde{X}/G \quad \text{und} \quad (H \hookrightarrow G) \longmapsto (\tilde{X}/H \twoheadrightarrow \tilde{X}/G \text{ mit } Hx \mapsto Gx) ,$$

zum anderen die Zuordnung

$$p \longmapsto \text{im } p_* \subset \pi_1(X, x_0) \quad \text{und} \quad (p \twoheadrightarrow q) \longmapsto (\text{im } p_* \hookrightarrow \text{im } q_*) ;$$

für eine Äquivalenz von Kategorien hätte es gereicht, nur einen dieser zwei Funktoren anzugeben.

Einen ähnlichen Sachverhalt lernt man in der Algebra kennen. Dort klassifizieren die Untergruppen der Galois-Gruppe genau die Zwischenkörper in einer Galois-Körpererweiterung. Die Rolle der universellen Überlagerung spielt der algebraische Abschluss eines perfekten Körpers, siehe unten.

Allgemeiner kann man auch beweisen, dass die Kategorie aller Überlagerungen äquivalent ist zur Kategorie aller Gruppenwirkungen von  $\pi_1(X, x_0)$  auf (diskreten) Mengen. Diese Kategorie umfasst die Kategorie der Untergruppen von  $\pi_1(X, x_0)$ , wobei man einer Untergruppe  $\Gamma \subset \pi_1(X, x_0)$  die Menge der Rechtsnebenklassen  $M = \pi_1(X, x_0)/\Gamma$  zuordnet. Um aus einer diskreten Menge  $M$  mit  $\pi_1(X, x_0)$ -Wirkung eine Überlagerung zu konstruieren, betrachtet man den Quotienten

$$\tilde{X} \times_{\Gamma} M = (\tilde{X} \times M)/\Gamma,$$

wobei  $\gamma$  auf  $\tilde{X} \times M$  durch  $\gamma(\tilde{x}, m) = (\gamma\tilde{x}, \gamma m)$  wirkt. Die Bahnen der  $\Gamma$ -Wirkung auf  $M$  entsprechen genau den Zusammenhangskomponenten der Überlagerung  $\tilde{X} \times_{\Gamma} M$ . Die obige Zuordnung lässt sich zu einem Funktor ausbauen, von dem man wieder zeigen kann, dass er eine Äquivalenz von Kategorien liefert.

Zum Schluss dieses Kapitels geben wir ein „Wörterbuch“ zur Übersetzung zwischen Sachverhalten aus der Galois-Theorie und der Überlagerungstheorie an.

<i>Galois-Theorie</i>	<i>Überlagerungstheorie</i>
Perfekter Körper $K$	Zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender, semilokal einfach zusammenhängender, punktierter topologischer Raum $(X, x_0)$
Algebraische Erweiterung $L \supset K$	Zusammenhängende, punktierte Überlagerung $q: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$
Algebraischer Abschluss $\bar{K}$	Universelle Überlagerung $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$
Absolute Galoisgruppe $G = G(\bar{K}/K)$	Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$
abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$	Untergruppe $\Gamma \subset \pi_1(X, x_0)$
Fixkörper von $H$	Quotient $(\tilde{X}/\Gamma, \Gamma\tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$
Normale Erweiterung $L \supset K$	Normale Überlagerung $q: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$
Relative Galoisgruppe $G(L/K)$	Decktransformationsgruppe $\pi_1(X, x_0)/(\text{im } q_*)$

Die Parallelen sind klar erkennbar. Entscheidender Unterschied: alle „Pfeile“ in der Kategorie der algebraischen Erweiterungen verlaufen genau andersherum als in der Kategorie der punktierten Überlagerungen. Das liegt daran, dass die entsprechenden Äquivalenzen von Kategorien in der Galois-Theorie kontravariante Funktoren sind. Wenn wir anstelle der topologischen Räume  $X$  die Algebra der stetigen Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{C}$  betrachten, sind wir in einer ähnlichen Situation wie bei den Körpern. Wie Sie umgekehrt im Falle von Zahlkörpern zu einer „geometrischen“ Beschreibung kommen, lernen Sie in der arithmetischen Geometrie.

## 2.8. Übungen zu Kapitel 2

### *Übungen zu Abschnitt 2.1.*

2.74. ÜBUNG. Sei  $(X, A)$  ein Paar und  $Y$  ein Raum. Zeigen Sie: Homotopie relativ zu  $A$  ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ .

2.75. ÜBUNG. Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume, und seien  $F: X \rightarrow Y$  und  $G: Y \rightarrow Z$  Homotopieäquivalenzen, dh., es existieren Abbildungen  $P, Q$  mit  $P \circ F \sim \text{id}_X$ ,  $F \circ P \sim \text{id}_Y \sim Q \circ G$  und  $G \circ Q \sim \text{id}_Z$ . Konstruieren Sie Homotopien

$$(P \circ Q) \circ (G \circ F) \sim \text{id}_X \quad \text{und} \quad (G \circ F) \circ (P \circ Q) \sim \text{id}_Z.$$

Insbesondere ist Homotopieäquivalenz eine Äquivalenzrelation.

Übungen zu Abschnitt 2.2.

2.76. ÜBUNG. Seien  $X, Y$  topologische Räume, seien  $x \in X$  und  $y \in Y$  Punkte. Finden Sie einen natürlichen Gruppenisomorphismus

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \cong \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y).$$

2.77. ÜBUNG. Sei  $X$  ein topologischer Raum. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen, in dem Sie jeweils geeignete Homotopien angeben.

- (1) Jede Abbildung  $S^1 \rightarrow X$  ist homotop zu einer konstanten Abbildung.
- (2) Jede Abbildung  $F: S^1 \rightarrow X$  lässt sich zu einer Abbildung  $\bar{F}: D^2 \rightarrow X$  mit  $\bar{F}|_{\partial D^2} = F$  ausdehnen.
- (3) Die Fundamentalgruppen  $\pi_1(X, x)$  sind für alle  $x \in X$  trivial.
- (4) Je zwei Wege zwischen zwei Punkten  $x, y \in X$  sind homotop.

2.78. ÜBUNG. Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe eines wegzusammenhängenden Raumes  $X$  genau dann abelsch ist, wenn für alle  $x, y \in X$  der Isomorphismus

$$\pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y), \quad [\gamma] \mapsto [\gamma_0^{-1} \gamma \gamma_0]$$

nicht vom Weg  $\gamma_0$  von  $x$  nach  $y$  abhängt.

2.79. ÜBUNG. (1) Sei  $\circ$  eine Verknüpfung auf einer Menge  $G$  und  $e \in G$ . Dann sind äquivalent:

- (a)  $(G, \circ, e)$  ist eine Gruppe.
  - (b) Es gibt eine Kategorie  $\mathcal{G}$  in der jeder Morphismus invertierbar ist (siehe Bemerkung 2.6) mit  $\text{obj}(\mathcal{G}) = \{*\}$ ,  $\text{hom}_{\mathcal{G}}(*, *) = G$  mit Verknüpfung  $\circ$  und  $\text{id}_* = e$ .
- (2) Seien  $G, H$  Gruppen,  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$  Kategorien wie in (1) und sei  $F: G \rightarrow H$  eine Abbildung. Dann sind äquivalent:
- (a)  $F$  ist ein Gruppenhomomorphismus.
  - (b) Es gibt einen Funktor  $\mathcal{F}: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  mit  $\mathcal{F}* = *$  und  $\mathcal{F} = F: \text{hom}_{\mathcal{G}}(*, *) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{H}}(*, *)$ .

Übungen zu Abschnitt 2.3.

2.80. ÜBUNG. Seien  $T$  (Toast),  $S$  (Schinken) und  $A$  (Ananas) drei kompakte, paarweise disjunkte Teilmengen des  $\mathbb{R}^3$ . Zeigen Sie, dass es eine Schnittebene  $E \subset \mathbb{R}^3$  gibt, die jede der drei Teilmengen  $T, S$  und  $A$  in zwei Teile von gleichem Volumen zerlegt.

*Hinweis:* Zu jedem  $v \in S^2$  existiert (mindestens) ein  $d = d_v$ , so dass die Hyperebene

$$\{x \mid \langle x, v \rangle = d\}$$

das gesamte Sandwich  $T \cup S \cup A$  in zwei gleichgroße Teile teilt. Überlegen Sie sich, dass die Funktionen  $t, s$  und  $a: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$t(v) = \text{vol}\{x \in T \mid \langle x, v \rangle \leq d_v\}$$

und  $s, a$  analog nicht von der Wahl von  $d_v$  wie oben, sondern nur von  $v$  abhängen, und in  $v$  stetig sind. Folgern Sie dann die Behauptung mit dem Satz von Borsuk-Ulam.

2.81. ÜBUNG. Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra wie folgt. Sei  $P = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n z^0: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ein Polynom. Zeigen Sie: Für  $R > \max\{1, \sum_{i=1}^n |a_i|\}$  ist der Pfad

$$\gamma: S^1 \rightarrow S^1, \quad z \mapsto \gamma(z) := \frac{P(Rz)}{|P(Rz)|}$$

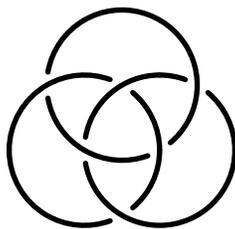
in  $S^1$  homotop zu  $\gamma_0: S^1 \rightarrow S^1, \gamma_0(z) = z^n$ . Folgern Sie:  $P$  hat mindestens eine Nullstelle  $z_0$  mit  $|z_0| \leq R$ .

Übungen zu Abschnitt 2.4.

2.82. ÜBUNG. Seien  $G, H$  Gruppen. Zeigen Sie:

- (1) Das Zentrum  $Z(G * H) = \{z \in G * H \mid zw = wz \text{ für alle } w \in G * H\}$  von  $G * H$  ist die triviale Gruppe  $\{e\} = \{\emptyset\} \subset G * H$ ;
- (2) alle Torsionselemente (Elemente  $w \in G * H$  mit  $w^N = e$  für ein  $N > 0$ ) sind von der Form  $w = vgv^{-1}$  oder  $w = vhv^{-1}$  mit  $v \in G * H$  und  $g \in G$  bzw.  $h \in H$  mit  $g^N = e$  bzw.  $h^N = e$ .

2.83. ÜBUNG. Zeigen Sie mit Hilfe von Beispiel 2.47 (2), dass die Borromäischen Ringe  $R_1, R_2, R_3 \subset \mathbb{R}^3$  sich im umgebenden  $\mathbb{R}^3$  nicht trennen lassen. Bestimmen Sie dazu die Äquivalenzklasse  $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (R_1 \cup R_2), \gamma(0)) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  eines Weges  $\gamma$ , der  $R_3$  parametrisiert.



2.84. ÜBUNG. Es sei

$$X = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ \frac{1}{n}(\cos \varphi + 1, \sin \varphi) \mid \varphi \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

versehen mit der Unterraumtopologie. Zeigen Sie, dass  $X$  überabzählbare Fundamentalgruppe hat, indem Sie für jede  $\mathbb{Z}$ -wertige Folge  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Schleife angeben, die den Kreis mit Radius  $\frac{1}{n}$  genau  $a_n$ -mal umläuft.

2.85. ÜBUNG. Es sei  $G$  eine Gruppe. Für  $g, h \in G$  schreibe  $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1} \in G$ . Dann definiert man die Abelsierung von  $G$  als

$$G^{\text{ab}} = G / (\{[g, h] \mid g, h \in G\}).$$

Es sei  $p: G \rightarrow G^{\text{ab}}$  die Projektion auf den Quotienten. Zeigen Sie:

- (1) Die Gruppe  $G^{\text{ab}}$  ist abelsch (kommutativ).
- (2) Sei  $H$  eine abelsche Gruppe und  $f: G \rightarrow H$  ein Homomorphismus, dann gibt es genau einen Homomorphismus  $\bar{f}: G^{\text{ab}} \rightarrow H$ , so dass  $f = \bar{f} \circ p$ .

2.86. ÜBUNG. Seien  $G, H$  Gruppen,  $p: G \rightarrow G^{\text{ab}}, q: H \rightarrow H^{\text{ab}}$  wie in Aufgabe 2.85, und  $f: G \rightarrow H$  ein Homomorphismus. Zeigen Sie:

- (1) Es gibt genau einen Homomorphismus  $f^{\text{ab}}: G^{\text{ab}} \rightarrow H^{\text{ab}}$ , so dass  $q \circ f = f^{\text{ab}} \circ p$ .
- (2) Dadurch wird Abelsierung zu einem Funktor von der Kategorie aller Gruppen in die der abelschen Gruppen.
- (3) Folgern Sie, dass die freien Gruppen  $F_k$  und  $F_l$  für  $k \neq l$  nicht isomorph sind.

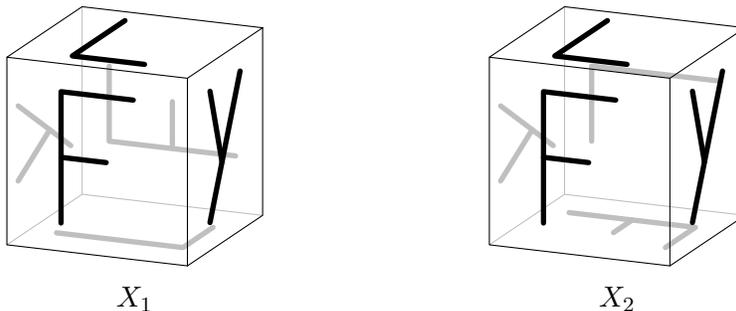
2.87. ÜBUNG. Es seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  zwei Kategorien, in denen es alle Produkte „ $\times$ “, Koproducte „ $\sqcup$ “ und Pushouts „ $\cup$ “ gibt, und sei  $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor. Konstruieren Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaften Morphismen in  $\mathcal{D}$ , und zwar

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(A \times B) &\longrightarrow \mathcal{F}(A) \times \mathcal{F}(B), \\ \mathcal{F}(A) \sqcup \mathcal{F}(B) &\longrightarrow \mathcal{F}(A \sqcup B), \\ \mathcal{F}(A) \cup_{\mathcal{F}(C)} \mathcal{F}(B) &\longrightarrow \mathcal{F}(A \cup_C B), \end{aligned}$$

für alle Objekte  $A, B, C$  von  $\mathcal{C}$  und Morphismen  $f: C \rightarrow A, g: C \rightarrow B$ .

*Übungen zu Abschnitt 2.5.*

2.88. ÜBUNG. Man betrachte den Würfel  $[0, 1]^3$  und erzeuge  $X_1, X_2$ , indem man je zwei Seiten gemäß der beiden Skizzen identifiziert. Finden Sie eine CW-Struktur für *einen* der Räume  $X_i$  mit je zwei 0-Zellen, vier 1-Zellen, drei 2-Zellen und einer 3-Zelle, und beweisen Sie *entweder*, dass  $\pi_1(X_1, x) = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  zur Gruppe der ganzen Einheits-Quaternionen isomorph ist, *oder* dass  $\pi_1(X_2, x) = \mathbb{Z}_8$  zyklisch von der Ordnung 8 ist.



*Anleitung:* Färben Sie in der Skizze jeweils die Ecken und die Kanten, die miteinander identifiziert werden, gleich ein, und geben Sie den Kanten eine Richtung. Orientieren Sie sich dazu an den Buchstaben auf den Seiten. Ein maximaler Baum besteht aus einer Kante zwischen den Ecken. Die verbleibenden gerichteten Kanten liefern drei Erzeuger, die drei Flächen je eine Relation. Versuchen Sie, die so erhaltene Präsentation soweit wie möglich zu vereinfachen.

- 2.89. ÜBUNG. (1) Geben Sie eine CW-Zerlegung von  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  an, so dass  $S^n \cap \mathbb{R}^{k+1} \times \{0\}$  aus zwei  $k$ -Zellen besteht für alle  $0 \leq k \leq n$ .  
 (2) Die Gruppe  $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$  operiert auf  $S^n$  durch Multiplikation. Zeigen Sie, dass der Quotient  $S^n/\mathbb{Z}_2$  genau der reell projektive Raum  $\mathbb{R}P^n$  aus Aufgabe 1.137 ist.  
 (3) Berechnen Sie  $\pi_1(\mathbb{R}P^n, [1 : 0 : \dots : 0])$  für  $n \geq 2$ .

2.90. ÜBUNG. Seien  $X_1, X_2 \cong S^1 \times S^1$  zwei Tori. Erzeugen Sie  $X$ , indem Sie  $X_1$  und  $X_2$  entlang eines Kreises  $S^1 \times \{1\}$  miteinander verkleben.

- (1) Finden Sie eine CW-Struktur auf  $X$  und berechnen Sie so  $\pi_1(X)$ .  
 (2) Stellen Sie  $X$  als topologisches Produkt aus zwei bekannten Räumen dar, und berechnen Sie so  $\pi_1(X)$ .

*Übungen zu Abschnitt 2.6.*

2.91. ÜBUNG. Seien  $p: \tilde{X} \rightarrow X, p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X_1$  und  $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X_2$  Überlagerungen. Zeigen Sie:

- (1) sei  $A \subset X$  eine Unterraum und  $\tilde{A} = p^{-1}A \subset \tilde{X}$ , dann ist  $p|_{\tilde{A}}: \tilde{A} \rightarrow A$  eine Überlagerung;  
 (2) die natürliche Abbildung  $p_1 \times p_2: \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \rightarrow X_1 \times X_2$  ist eine Überlagerung.

2.92. ÜBUNG. Sei  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung, wobei  $X$  zusammenhängend sei. Zeigen Sie:

- (1) die Mengen  $p^{-1}(\{x\}) \subset \tilde{X}$  sind für alle  $x \in X$  gleichmächtig;  
 (2) der Raum  $\tilde{X}$  ist genau dann kompakt, wenn  $X$  kompakt ist und  $p^{-1}(\{x_0\})$  endlich ist für ein  $x_0 \in X$ .

2.93. ÜBUNG. Wir betrachten den topologischen Raum

$$Y := \left\{ \left( 2 + \sin \frac{\pi}{t} \right) e^{2\pi i t} \mid \varphi \in (0, 1] \right\} \cup [1, 3] \subset \mathbb{C} .$$

- (1) Skizzieren Sie  $Y$ , und zeigen Sie, dass  $\pi_1(Y) = 0$ .

- (2) Beweisen Sie, dass die Radialprojektion  $F: Y \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$  dennoch keinen Lift  $\tilde{F}: Y \rightarrow \mathbb{R}$  zulässt.

*Übungen zu Abschnitt 2.7.*

2.94. ÜBUNG. Sei  $X \subset \mathbb{R}^2$  die Vereinigung aller Kreise um  $(\frac{1}{n}, 0)$  mit Radius  $\frac{1}{n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  wie in Übung 2.84, und  $X$  trage die vom  $\mathbb{R}^2$  induzierte Unterraumtopologie. Skizzieren Sie  $X$  und zeigen Sie, dass  $X$  keine einfach zusammenhängende Überlagerung besitzt.

2.95. ÜBUNG. Überlagerungstheorie benötigt keine Trennungseigenschaften. Sei  $X = ((-1, 1) \times \{1, -1\}) / \sim$  der Ihnen wohlbekannte, nicht Hausdorffsche Raum aus Beispiel 1.29, wobei die Äquivalenzrelation „ $\sim$ “ erzeugt werde von  $(t, 1) \sim (t, -1)$  für alle  $t \neq 0$ .

- (1) Zeigen Sie, dass  $X$  zusammenhängend und lokal zusammenziehbar ist.
- (2) Bestimmen Sie die universelle Überlagerung von  $X$ .
- (3) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von  $X$ .

2.96. ÜBUNG. Bestimmen Sie wie in Folgerung 2.53 einen CW-Komplex mit Fundamentalgruppe isomorph zur unendlichen Diedergruppe, präsentiert durch

$$\langle a, b \mid a^2, b^2 \rangle \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

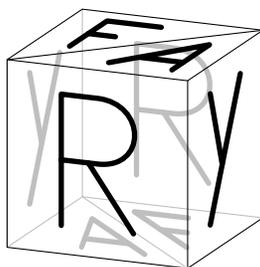
und seine universelle Überlagerung. Sie dürfen Beispiel 2.54 (2) zu Hilfe nehmen.

2.97. ÜBUNG. Bestimmen Sie alle zusammenhängenden punktierten Überlagerungen der beiden Räume  $X_1$  und  $X_2$  aus Übung 2.88 bis auf punktierte Überlagerungs-Homöomorphismen, und geben Sie gegebenenfalls die Gruppe der Decktransformationen an.

2.98. ÜBUNG. Verkleben Sie die acht Seiten des unten skizzierten Polytopes wie angegeben, und zeigen Sie, dass der entstehende topologische Raum  $X$  die Fundamentalgruppe

$$\pi_1(X, x_0) \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ & 1 & b \\ & & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

besitzt. Finden Sie eine universelle Überlagerung. Wie kann man eine Überlagerung von  $X$  konstruieren, die nicht normal ist?



## KAPITEL 3

# Homologie

Wir haben im letzten Kapitel gesehen, dass die Fundamentalgruppe eines Raumes es uns ermöglicht, einige interessante Sätze wie den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen. Andere Sätze wie den Brouwerschen Fixpunktsatz konnten wir nur für kleine Dimensionen beweisen. Für eine Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen könnten wir analog zur Fundamentalgruppe die höheren Homotopiegruppen aus Bemerkung 2.17 (3) betrachten. Da diese jedoch sehr schwer zu handhaben sind, führen wir statt dessen Homologiegruppen ein.

Dazu listen wir zunächst die Eilenberg-Steenrod-Axiome für die (reduzierte) Homologie auf. Wir werden sehen, dass diese Axiome die Homologiegruppen von CW-Komplexen bereits vollständig bestimmen. Unter der Annahme, dass Homologiegruppen mit den geforderten Eigenschaften existieren, können wir erste Anwendungen betrachten.

Anschließend konstruieren wir die (unreduzierte) singuläre Homologie, und zeigen, dass die zugehörigen reduzierten Homologiegruppen die Eilenberg-Steenrod-Axiome erfüllen. Gleichzeitig erhalten wir eine gewisse geometrische Anschauung für die Homologiegruppen.

### 3.1. Die Eilenberg-Steenrod-Axiome

Wir führen ein paar algebraische Grundbegriffe ein und geben anschließend die Axiome für reduzierte Homologie an.

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Einselement  $1 = 1_R \in R$ . Indem wir in der Definition eines Vektorraums den Grundkörper durch den Ring  $R$  ersetzen, erhalten wir den Begriff eines unitären  $R$ -Moduls.

3.1. DEFINITION. Es sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins, dann besteht ein *unitärer  $R$ -Modul*  $(M, +, \cdot)$  aus einer abelschen Gruppe  $(M, +)$  und einer Multiplikation  $\cdot : R \times M \rightarrow M$ , so dass für alle  $r, s \in R$  und alle  $m, n \in M$  gilt:

$$\begin{aligned}r \cdot (s \cdot m) &= (rs) \cdot m , \\(r + s) \cdot m &= r \cdot m + s \cdot m , \\r \cdot (m + n) &= r \cdot m + r \cdot n , \\1 \cdot m &= m .\end{aligned}$$

Eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  zwischen unitären  $R$ -Modulen heißt  *$R$ -linear*, wenn für alle  $r, s \in R$  und alle  $m, n \in M$  gilt:

$$f(r \cdot m + s \cdot n) = r \cdot f(m) + s \cdot f(n) .$$

Wir werden den Punkt für die Multiplikation später weglassen. Im folgenden seien Ringe stets kommutative Ringe mit Eins, und Moduln seien stets unitär.

3.2. BEMERKUNG. Die unitären  $R$ -Moduln und die  $R$ -linearen Abbildungen bilden eine Kategorie  $\text{Mod}_R$  mit der üblichen Verkettung von Abbildungen.

Der triviale Modul oder Nullmodul  $0 = \{0\}$  spielt eine gewisse Sonderrolle. Es gibt von jedem  $R$ -Modul  $M$  je genau eine  $R$ -lineare Abbildung  $0 \rightarrow M$  (mit  $0 \mapsto 0$ ) und  $M \rightarrow 0$ .

3.3. BEISPIEL. Wir schauen uns die Kategorie  $\text{Mod}_R$  in zwei wichtigen Spezialfällen an. Mehr werden wir in diesem Kapitel nicht brauchen.

- (1) Sei  $\mathbb{k}$  ein Körper, dann sind die unitären  $\mathbb{k}$ -Moduln genau die  $\mathbb{k}$ -Vektorräume, und die  $\mathbb{k}$ -linearen Abbildungen sind dieselben wie in der linearen Algebra. Daher identifizieren wir die Kategorien  $\text{Mod}_{\mathbb{k}}$  und  $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$  miteinander.
- (2) Jede abelsche Gruppe  $(G, +)$  mit neutralem Element  $0$  trägt eine eindeutige  $\mathbb{Z}$ -Modulstruktur, für  $n \in \mathbb{Z}$  und  $g \in G$  gegeben durch

$$n \cdot g = \begin{cases} \underbrace{g + \cdots + g}_{n\text{-mal}} & \text{falls } n > 0, \\ 0 & \text{falls } n = 0, \text{ und} \\ \underbrace{(-g) + \cdots + (-g)}_{(-n)\text{-mal}} & \text{falls } -n > 0. \end{cases}$$

Man zeigt induktiv, dass für jeden Homomorphismus  $f: G \rightarrow H$  abelscher Gruppen gilt, dass

$$f(n \cdot g) = n \cdot f(g),$$

somit sind die linearen Abbildungen genau die Gruppenhomomorphismen, und wir identifizieren  $\text{Mod}_{\mathbb{Z}}$  mit der Kategorie der abelschen Gruppen.

Wie bei Vektorräumen oder Gruppen betrachtet man auch Untermoduln und Quotienten. Spezielle Untermoduln sind der Kern und das Bild  $R$ -linearer Abbildungen. Sei  $f: M \rightarrow N$  eine  $R$ -lineare Abbildung, dann ist der *Kokern*  $\text{coker } f = N/\text{im } f$  ein Quotient von  $N$ .

Um später interessante Aussagen über  $R$ -Moduln machen zu können, benötigen wir noch den Begriff der exakten Sequenz.

3.4. DEFINITION. Eine *Sequenz* unitärer  $R$ -Moduln ist eine Familie  $(f_i: M_i \rightarrow M_{i-1})_{i \in \mathbb{Z}}$  von  $R$ -linearen Abbildungen zwischen unitären  $R$ -Moduln. Eine *Sequenzabbildung* von  $(f_i: M_i \rightarrow M_{i-1})$  nach  $(g_i: N_i \rightarrow N_{i-1})$  vom Grad  $d \in \mathbb{Z}$  ist eine Familie  $R$ -linearer Abbildungen  $(k_i: M_i \rightarrow N_{i+d})_{i \in \mathbb{Z}}$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longleftarrow & M_{i-1} & \xleftarrow{f_i} & M_i & \xleftarrow{f_{i+1}} & M_{i+1} & \longleftarrow & \dots \\ & & k_{i-1} \downarrow & & k_i \downarrow & & k_{i+1} \downarrow & & \\ \dots & \longleftarrow & N_{i+d-1} & \xleftarrow{g_{i+d}} & N_{i+d} & \xleftarrow{g_{i+d+1}} & N_{i+d+1} & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

kommutiert, das heißt, es gilt  $k_{i-1} \circ f_i = g_{i+d} \circ k_i$  für alle  $i \in \mathbb{Z}$ .

Eine Sequenz  $(f_i: M_i \rightarrow M_{i-1})$  heißt *exakt an der Stelle*  $M_i$ , wenn  $\ker f_i = \text{im } f_{i+1} \subset M_i$  gilt. Sie heißt (*lange*) *exakte Sequenz*, wenn sie an allen Stellen exakt ist. Eine *kurze exakte Sequenz* ist eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longleftarrow A' \longleftarrow A \longleftarrow A'' \longleftarrow 0.$$

Im folgenden seien Sequenzen stets Sequenzen unitärer  $R$ -Moduln, wobei  $R$  nach wie vor ein kommutativer Ring mit Eins sei. Kurze exakte Sequenzen denken wir uns nach links und rechts fortgesetzt durch Nullmoduln. Wir werden Diagramme zu Sequenzen teils wie oben mit Pfeilen von rechts nach links darstellen, teils aber auch die Richtung der Pfeile umdrehen:

$$\dots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \longrightarrow \dots$$

3.5. BEMERKUNG. Wenn in einer exakten Sequenz das Nullmodul auftaucht, dann erlaubt es Rückschlüsse über die benachbarten Moduln und Abbildungen, siehe Übung 3.128.

3.6. BEISPIEL. Es folgen Beispiele exakter Sequenzen.

(1) Es sei  $\mathbb{k}$  ein Körper und  $r, s \geq 0$ , dann ist die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{k}^r & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{k}^{r+s} & \xrightarrow{p} & \mathbb{k}^s \longrightarrow 0 \\ & & x & \longmapsto & (x, 0) & & \\ & & & & (x, y) & \longmapsto & y \end{array}$$

für  $x \in \mathbb{k}^r, y \in \mathbb{k}^s$  exakt. Allgemeiner können wir direkte Summen unitärer  $R$ -Moduln wie üblich definieren und erhalten kurze exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\iota_M} M \oplus N \xrightarrow{p_N} N \longrightarrow 0.$$

Wenn eine kurze exakte Sequenz zu einer von diesem Typ isomorph ist, sagen wir, dass sie *spaltet*.

(2) Für  $k > 0$  erhalten wir eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen, also von  $\mathbb{Z}$ -Moduln, nämlich

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{k \cdot} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Diese Sequenz spaltet nicht, da sich  $\mathbb{Z}$  nicht als direkte Summe schreiben lässt.

(3) Nach Übung 3.128 erhalten wir zu jeder  $R$ -linearen Abbildung  $f: M \rightarrow N$  eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \operatorname{coker} f \longrightarrow 0.$$

Nachdem wir Kategorien und Funktoren bereits kennengelernt haben, benötigen wir noch natürliche Transformationen.

3.7. DEFINITION. Es seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  zwei Kategorien und  $\mathcal{F}, \mathcal{G}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  zwei Funktoren. Eine *natürliche Transformation*  $\mathcal{T}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  ordnet jedem  $A \in \operatorname{obj} \mathcal{C}$  einen Morphismus  $\mathcal{T}A \in \operatorname{hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}A, \mathcal{G}A)$  zu, so dass für alle  $f \in \operatorname{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  das folgende Diagramm in der Kategorie  $\mathcal{D}$  kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}A & \xrightarrow{\mathcal{F}f} & \mathcal{F}B \\ \mathcal{T}A \downarrow & & \downarrow \mathcal{T}B \\ \mathcal{G}A & \xrightarrow{\mathcal{G}f} & \mathcal{G}B \end{array}$$

3.8. BEISPIEL. Wir betrachten die Kategorie der Gruppen  $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathcal{G}rp$ , den Identitätsfunktoren  $\mathcal{I}d$  und den Abelisierungsfunktoren  $\mathcal{A}b$  aus Übung 2.85. Dann ist die Projektionsabbildung  $p_G = p: G \rightarrow G^{ab} = G/[G, G]$  natürlich nach Übung 2.86 (1), denn wir erhalten das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ p_G \downarrow & & \downarrow p_H \\ G^{ab} & \xrightarrow{f^{ab}} & H^{ab} \end{array}$$

Wir erinnern uns an den Begriff eines Paares topologischer Räume aus Definition 2.7.

3.9. DEFINITION. Ein *gutes Paar* ist ein Paar  $(X, A)$  topologischer Räume, wobei  $\emptyset \neq A$  in  $X$  abgeschlossen und Deformationsretrakt einer offenen Umgebung ist. Wenn  $A = \{x_0\}$  ist, heißt  $(X, x_0)$  auch *gut punktierter Raum*.

Den Begriff des gut punktierten Raumes haben wir in Folgerung 2.50 bereits benutzt.

3.10. BEISPIEL. Es folgen Beispiele guter und nicht guter Paare.

- (1) Da Mannigfaltigkeiten und CW-Komplexe lokal zusammenziehbar sind, ist jeder ihrer Punkte ein guter Basispunkt.
- (2) Sei  $X$  ein CW-Komplex und  $A \subset X$  ein Unterkomplex, dann heißt  $(X, A)$  ein *CW-Paar*. CW-Paare sind gut. Zur Begründung konstruiert man wie im Beweis des Satzes 1.100 induktiv offene Umgebungen  $V^n \subset X^n$  von  $A^n = X^n \cap A$  und Homotopien  $H^n: V^n \times [0, 1] \rightarrow V^n$  zwischen der Identität  $\text{id}_{V^n}$  und einer Retraktion  $P^n: V^n \rightarrow V^{n-1} \cup A^n$ . Dann zeigt man, dass  $A$  ein Deformationsretrakt der offenen Umgebung  $V = \bigcup_n V^n$  ist, indem man für  $n \geq 1$  auf dem Teilintervall  $[2^{-n}, 2^{1-n}] \subset [0, 1]$  die Homotopie  $H^n \circ P^{n+1} \circ \dots$  durchführt.
- (3) Es sei  $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset [0, 1]$  versehen mit der Unterraumtopologie, dann ist  $(X, 0)$  nicht gut punktiert, denn  $0$  hat in  $X$  keine zusammenhängenden Umgebungen.
- (4) Sei  $X$  wie oben, dann ist  $([0, 1], X)$  kein gutes Paar, denn jede offene Umgebung  $U$  von  $X$  in  $[0, 1]$  enthält ein Intervall  $I = [0, \varepsilon)$  oder  $I = [0, 1]$  als Zusammenhangskomponente. Da  $X \cap I$  nicht zusammenhängend ist, ist  $X \cap I$  kein Deformationsretrakt von  $I$ .

3.11. DEFINITION. Es sei  $(X, A)$  ein Paar topologischer Räume, dann ist der *Quotient*  $X/A$  von  $X$  nach der Teilmenge  $A$  der Raum  $X/\sim$  mit der Quotiententopologie, wobei die Äquivalenzrelation  $\sim$  erzeugt wird von  $a \sim b$  für alle  $a, b \in A$ . Als Basispunkt wählen wir den Punkt  $A$  in  $X/A$ .

Zu jedem Paar  $(X, A)$  erhalten wir eine Inklusionsabbildung  $\iota: A \rightarrow X$  und eine Projektion  $p: X \rightarrow X/A$ . Abstrakt gesehen haben wir drei Funktoren von der Kategorie der Paare in die Kategorie  $\text{Top}$ , die ein Paar  $(X, A)$  auf  $A$ ,  $X$  beziehungsweise  $X/A$  abbilden, und  $\iota$  und  $p$  sind natürliche Transformation zwischen je zwei dieser Funktoren: Sei  $f: X \rightarrow Y$  stetig mit  $f(A) \subset B$ , und sei  $\bar{f}: X/A \rightarrow Y/B$  davon induziert, dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\iota} & X & \xrightarrow{p} & X/A \\ f|_A \downarrow & & f \downarrow & & \bar{f} \downarrow \\ B & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Y/B. \end{array}$$

3.12. DEFINITION. Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins. Eine *verallgemeinerte reduzierte Homologietheorie*  $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$  über  $R$  besteht aus einer Familie von Funktoren

$$\tilde{h}_\bullet = (\tilde{h}_n: \text{Top} \rightarrow \text{Mod}_R)_{n \in \mathbb{Z}},$$

und einer Familie natürlicher Transformationen  $\partial_\bullet = (\partial_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  mit  $\partial_n(X, A): \tilde{h}_n(X/A) \rightarrow \tilde{h}_{n-1}(A)$  für alle guten Paare  $(X, A)$ , die die folgenden *Eilenberg-Steenrod-Axiome* erfüllen.

- (1) *Homotopieinvarianz*. Wenn  $f, g: X \rightarrow Y$  homotope Abbildungen sind, gilt

$$\tilde{h}_n f = \tilde{h}_n g: \tilde{h}_n(X) \longrightarrow \tilde{h}_n(Y) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

- (2) *Homologiesequenz*. Für jedes gute Paar  $(X, A)$  ist die folgende Sequenz exakt:

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \tilde{h}_n(A) \xrightarrow{\tilde{h}_n \iota} \tilde{h}_n(X) \xrightarrow{\tilde{h}_n p} \tilde{h}_n(X/A) \xrightarrow{\partial_n} \tilde{h}_{n-1}(A) \xrightarrow{\tilde{h}_{n-1} \iota} \dots$$

- (3) *Summenaxiom*. Sei  $(X_i, x_i)_{i \in I}$  eine Familie gut punktierter Räume, dann induzieren für alle  $n \in \mathbb{Z}$  die Inklusionsabbildungen  $\iota_i: X_i \rightarrow \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i)$  einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} \tilde{h}_n \iota_i: \bigoplus_{i \in I} \tilde{h}_n(X_i) \xrightarrow{\sim} \tilde{h}_n \left( \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i) \right).$$

Man nennt  $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$  eine *reduzierte Homologietheorie* mit *Koeffizienten*  $M \in \text{Mod}_R$ , wenn zusätzlich das folgende Axiom gilt.

(4) *Dimensionsaxiom.*

$$\tilde{h}_n(S^0) = \begin{cases} M & \text{für } n = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Literatur gibt es viele Varianten dieser Axiome, die im wesentlichen äquivalent sind. Beispielsweise beschränkt sich Hatcher [H] auf CW-Komplexe.

Wir können  $\tilde{h}_n$  wegen Axiom (1) auch als Funktor auf der Homotopiekategorie  $\mathcal{HTop}$  aus Bemerkung 2.6 (3) auffassen. Analog zu Folgerung 2.22 haben homotopieäquivalente Räume also isomorphe Homologien.

Der *Verbindungshomomorphismus* oder die *Randabbildung*  $\partial_n$  im Axiom (2) ist eine natürliche Transformation zwischen den zwei Funktoren von der Kategorie der guten Paare nach  $\mathcal{Mod}_R$ , die  $(X, A)$  auf  $\tilde{h}_n(X/A)$  beziehungsweise auf  $\tilde{h}_{n-1}(A)$  abbilden. Sei  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine Abbildung zwischen guten Paaren, dann erhalten wir also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & \longrightarrow & \tilde{h}_n(A) & \xrightarrow{\tilde{h}_n\iota} & \tilde{h}_n(X) & \xrightarrow{\tilde{h}_n p} & \tilde{h}_n(X/A) & \xrightarrow{\partial_n} & \tilde{h}_{n-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ & & \tilde{h}_n(f|_A) \downarrow & & \tilde{h}_n f \downarrow & & \tilde{h}_n \bar{f} \downarrow & & \tilde{h}_{n-1}(f|_A) \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & \tilde{h}_n(B) & \xrightarrow{\tilde{h}_n\iota} & \tilde{h}_n(Y) & \xrightarrow{\tilde{h}_n p} & \tilde{h}_n(Y/B) & \xrightarrow{\partial_n} & \tilde{h}_{n-1}(B) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Dabei ergibt sich die Kommutativität der zwei linken Quadrate aus der Natürlichkeit von  $\iota$  und  $p$  (siehe oben) und der Funktorialität von  $\tilde{h}_n$ , während die Kommutativität des rechten Quadrats aus der Natürlichkeit von  $\partial_\bullet$  folgt. Später schreiben wir meistens nur  $\tilde{h}_\bullet$  anstelle von  $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$ .

3.13. BEISPIEL. Wir betrachten das Paar  $(X, A)$ , bestehend aus dem einpunktigen Raum  $X = A = \{*\} = X/A$ , mit den natürlichen Abbildungen  $\iota = p = \text{id}_X$ . Nach Axiom (2) ist die Sequenz

$$\tilde{h}_n(A) \xrightarrow{\tilde{h}_n\iota=\text{id}} \tilde{h}_n(X) \xrightarrow{\tilde{h}_n p=\text{id}} \tilde{h}_n(X/A)$$

bei  $\tilde{h}_n(X)$  exakt, also folgt

$$\tilde{h}_n(X) = \text{im}(\text{id}) = \ker(\text{id}) = 0 \subset \tilde{h}_n(X),$$

das heißt,  $\tilde{h}_n(\{*\}) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$  und für jede verallgemeinerte reduzierte Homologietheorie. Wegen der Homotopieinvarianz (1) folgt aus Beispiel 2.5, dass  $\tilde{h}_n(X) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ , wenn  $X$  zusammenziehbar ist.

Man beachte, dass die Eilenberg-Steenrod-Axiome keine Aussage über die reduzierte Homologie der leeren Menge machen. Außerdem spricht Axiom (2) nur über gute Paare. Für beliebige Paare  $(Y, X)$  und allgemeiner Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$  ersetzt man den Quotienten durch eine allgemeinere Konstruktion, siehe Übung 3.131.

### 3.2. Die Homologie der Sphären

Wir benutzen die Eilenberg-Steenrod-Axiome, um die Homologien  $\tilde{h}_k(S^n)$  aus den Koeffizienten zu berechnen. Anschließend geben wir einige erste Anwendungen — alles unter der Annahme, dass es Homologietheorien mit nicht-trivialen Koeffizienten gibt. Im folgenden sei  $R$  stets ein kommutativer Ring mit Eins.

3.14. SATZ. *Es sei  $\tilde{h}_\bullet$  eine verallgemeinerte reduzierte Homologietheorie und  $k, n \in \mathbb{Z}$  mit  $n \geq 1$ . Dann gilt*

$$\tilde{h}_k(S^n) \cong \tilde{h}_{k-n}(S^0).$$

Falls  $\tilde{h}_\bullet$  eine reduzierte Homologietheorie über  $R$  mit Koeffizienten in  $M \in \text{Mod}_R$  ist, gilt insbesondere

$$\tilde{h}_k(S^n) \cong \begin{cases} M & \text{falls } k = n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEWEIS. Wir beweisen den Satz durch Induktion über  $n$ . Für  $n = 0$  ist nichts zu zeigen.

Im Induktionsschnitt betrachten wir das Paar  $(\overline{D}^n, S^{n-1})$ . Wir erhalten einen Homöomorphismus  $\Phi^n: \overline{D}^n/S^{n-1} \rightarrow S^n$  wie in der ersten CW-Struktur auf  $S^n$  im Beispiel 1.88. Axiom (2) in Definition 3.12 liefert uns eine lange exakte Sequenz

$$\dots \longrightarrow \underbrace{\tilde{h}_k(\overline{D}^n)}_{\cong 0} \longrightarrow \underbrace{\tilde{h}_k(\overline{D}^n/S^{n-1})}_{\cong \tilde{h}_k(S^n)} \xrightarrow{\partial} \underbrace{\tilde{h}_{k-1}(S^{n-1})}_{\cong \tilde{h}_{k-n}(S^0)} \longrightarrow \underbrace{\tilde{h}_{k-1}(\overline{D}^{n-1})}_{\cong 0} \longrightarrow \dots$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass  $\overline{D}^n$  zusammenziehbar ist, und daher  $\tilde{h}_k(\overline{D}^n) \cong 0$  für alle  $k$  nach Beispiel 3.13. Wie in den Übungen folgt, dass  $\partial$  in der obigen Sequenz ein Isomorphismus ist, und unsere Behauptung folgt durch Induktion.

Wenn  $\tilde{h}_\bullet$  eine „echte“ reduzierte Homologietheorie mit Koeffizienten  $M$  ist, folgt die zweite Behauptung aus der ersten und dem Dimensionsaxiom 3.12 (4).  $\square$

Jetzt wird auch der Name „Dimensionsaxiom“ klar: eine reduzierte Homologietheorie mit Koeffizienten  $M \neq 0$  „sieht“ die Dimension der Sphären  $S^n$ . Insbesondere folgt aus der Homotopieinvarianz (1) von  $\tilde{h}_\bullet$ , dass  $S^n$  nicht homotopieäquivalent zu  $S^m$  ist für  $m \neq n$ . Außerdem ist  $S^n$  für kein  $n \geq 0$  zusammenziehbar. Wir können jetzt bereits eine erste Anwendung unserer Theorie geben.

3.15. SATZ (Brouwerscher Fixpunktsatz). Für  $n \geq 0$  hat jede stetige Abbildung  $F: \overline{D}^n \rightarrow \overline{D}^n$  einen Fixpunkt.

BEWEIS. Für  $n = 0$  gilt  $\overline{D}^0 \cong \{*\}$ , also ist  $*$  automatisch Fixpunkt. Es sei also  $n \geq 1$ . Wie im Beweis des Satzes 2.31 nehmen wir an, dass  $F$  keinen Fixpunkt habe, und konstruieren eine Retraktion  $r: \overline{D}^n \rightarrow \partial \overline{D}^n = S^{n-1}$ . Sei  $\iota: S^{n-1} \rightarrow \overline{D}^n$  die Inklusion, und sei  $\tilde{h}_\bullet$  eine reduzierte Homologietheorie über  $R$  mit Koeffizienten  $M \neq 0$ . Aus Funktorialität folgt

$$\text{id}_{\tilde{h}_{n-1}(S^{n-1})} = \tilde{h}_{n-1} \text{id}_{S^{n-1}} = \tilde{h}_{n-1} r \circ \tilde{h}_{n-1} \iota: \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow \tilde{h}_{n-1}(\overline{D}^n) \rightarrow \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1})$$

im Widerspruch zu  $\tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}) \cong M \neq 0$  und  $\tilde{h}_{n-1}(\overline{D}^n) \cong 0$ .  $\square$

Wir betrachten jetzt stetige Abbildungen  $f: S^n \rightarrow S^n$ . Sei zunächst  $\tilde{h}_\bullet$  eine reduzierte Homologietheorie über  $\mathbb{Z}$  mit Koeffizienten  $\mathbb{Z}$ , so dass  $\tilde{h}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ . Dem Einselement  $1 \in \mathbb{Z}$  entspricht ein Erzeuger  $a \in \tilde{h}_n(S^n)$ , das heißt, alle Elemente  $b \in \tilde{h}_n(S^n)$  sind von der Form  $b = k \cdot a$ , jeweils für ein eindeutiges  $k \in \mathbb{Z}$ . Insbesondere existiert ein eindeutiges  $d \in \mathbb{Z}$ , so dass

$$\tilde{h}_n f(a) = d \cdot a \in \tilde{h}_n(S^n).$$

Da  $\tilde{h}_n f$  eine  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung ist, folgt

$$\tilde{h}_n f(k \cdot a) = k \cdot \tilde{h}_n f(a) = d(ka)$$

für alle  $b = k \cdot a \in \tilde{h}_n(S^n)$ . Wir haben soeben auch gesehen, dass der Raum  $\text{End}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$  der  $\mathbb{Z}$ -Modul-Endomorphismen von  $\mathbb{Z}$  kanonisch isomorph zu  $\mathbb{Z}$  ist. Analog gilt  $\text{End}_{\mathbb{k}} \mathbb{k} \cong \mathbb{k}$ , wie wir aus der linearen Algebra wissen.

3.16. DEFINITION. Es sei  $\tilde{h}_\bullet$  eine reduzierte Homologietheorie mit Koeffizienten  $\mathbb{Z}$  und  $f: S^n \rightarrow S^n$  stetig, dann heißt die Zahl  $d = \deg f \in \mathbb{Z}$  mit  $\tilde{h}_n f(b) = \deg f \cdot b$  für alle  $b \in \tilde{h}_n(S^n)$  der *Abbildungsgrad* von  $f$ .

Wir sehen am Ende dieses Abschnitts, dass diese Definition nicht von der Wahl von  $\tilde{h}_\bullet$  abhängt.

3.17. BEMERKUNG. Wir sammeln einige elementare Eigenschaften des Abbildungsgrades.

- (1) Es gilt  $\deg \text{id}_{S^n} = 1$ .
- (2) Jede konstante Abbildung  $f_0$  lässt sich schreiben als Verkettung

$$S^n \rightarrow \{*\} \rightarrow S^n,$$

also folgt  $\deg f_0 = 0$  aus Beispiel 3.13. Falls  $f: S^n \rightarrow S^n$  nicht surjektiv ist, ersetzen wir  $\{*\}$  oben durch den zusammenziehbaren Raum  $S^n \setminus \{x_0\} \cong \mathbb{R}^n$  für ein  $x_0 \in S^n \setminus \text{im } f$ , und erhalten wieder  $\deg f = 0$ .

- (3) Seien  $f, g: S^n \rightarrow S^n$  zwei Abbildungen, dann folgt  $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g = \deg(g \circ f)$ , da

$$\tilde{h}_n(f \circ g)(b) = (\tilde{h}_n f) \circ (\tilde{h}_n g)(b) = \deg f \cdot \deg g \cdot b.$$

- (4) Aus der Homotopieinvarianz 3.12 (1) folgt, dass homotope Abbildungen den gleichen Abbildungsgrad haben. Wir zitieren ohne Beweis den folgenden Satz, wonach auch die Umkehrung gilt.

3.18. SATZ (Hopf). *Zwei Abbildungen  $f, g: S^n \rightarrow S^n$  sind genau dann homotop, wenn  $\deg f = \deg g \in \mathbb{Z}$ .*

Nach obiger Bemerkung 3.17 (3) kann man Abbildungen von  $S^n$  in sich durch Hintereinanderschaltung „multiplizieren“. Wir wollen jetzt sehen, wie man Abbildungen „addiert“.

Wir zerlegen  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  in eine rechte und eine linke Halbkugel

$$S^n_\pm = \{x \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid \pm x_{n+1} \geq 0\},$$

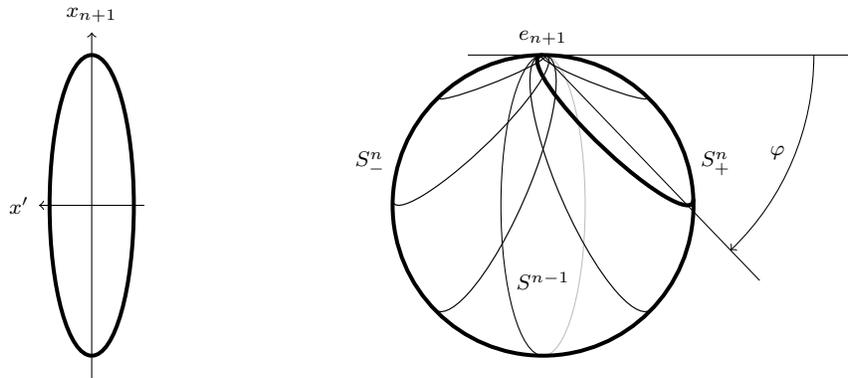
so dass sich beide im Äquator  $S^{n-1} = S^n_+ \cap S^n_-$  schneiden. Die Paare  $(S^n_+, S^{n-1})$  und  $(S^n_-, S^{n-1})$  sind homöomorph zum Paar  $(\overline{D}^n, S^{n-1})$  aus dem Beweis von Satz 3.14. Wir erhalten also Homöomorphismen

$$p_\pm: S^n_\pm / S^{n-1} \rightarrow S^n \quad \text{und} \quad p: S^n / S^{n-1} \rightarrow S^n \vee S^n.$$

Der Vollständigkeit halber stellen wir die Abbildung  $p$  mit Hilfe der Formel

$$\begin{pmatrix} \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot (1 - x_{n+1}) \\ \sin \varphi \cdot x' \\ 1 - \sin^2 \varphi \cdot (1 - x_{n+1}) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(2\varphi) \cdot \cos(2\varphi) \cdot (1 - x_{n+1}) \\ \sin(2\varphi) \cdot x' \\ 1 - \sin^2(2\varphi) \cdot (1 - x_{n+1}) \end{pmatrix} \in S^n_{\text{sign}(\cos \varphi)} / S^{n-1} \subset S^n \vee S^n$$

für  $\varphi \in [0, \pi]$  und  $(x', x_{n+1}) \in S^{n-1} \subset \{0\} \times \mathbb{R}^n$  dar. Dabei parametrisiert für festes  $\varphi \in (0, \pi)$  der durch  $(x', x_{n+1})$  beschriebene Äquator eine „Kleinkugel“ durch den Basispunkt  $e_{n+1}$ .

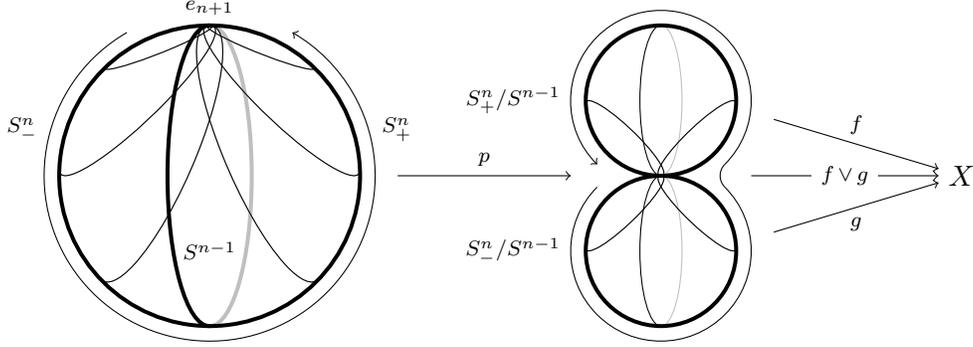


Für  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  erhält man den Äquator  $S^{n-1}$  selbst, der unter  $p$  auf den Basispunkt von  $S^n \vee S^n$  abgebildet wird, ansonsten landet man je nach Vorzeichen von  $\cos \varphi$  in einem der beiden Summanden.

Seien jetzt  $f, g: (S^n, e_{n+1}) \rightarrow (X, x_0)$  stetige, punktierte Abbildungen, dann erhalten wir nach Bemerkung 2.49 eine Abbildung  $f \vee g: S^n \vee S^n \rightarrow X$ . Wir definieren eine neue Abbildung

$$f + g = (f \vee g) \circ p: S^n \rightarrow X$$

wie im folgenden Bild.



3.19. LEMMA. Für jede verallgemeinerte reduzierte Homologietheorie  $\tilde{h}_\bullet$  gilt

$$\tilde{h}_k(f + g) = \tilde{h}_k f + \tilde{h}_k g: \tilde{h}_k(S^n) \rightarrow \tilde{h}_k(X).$$

Dabei addieren wir  $R$ -lineare Abbildungen punktweise, also

$$(\tilde{h}_k f + \tilde{h}_k g)(b) = \tilde{h}_k f(b) + \tilde{h}_k g(b) \in \tilde{h}_k(X).$$

BEWEIS. Nach dem Summenaxiom induzieren die Inklusionsabbildungen  $\iota_\pm$  eine Identifikation

$$\tilde{h}_k(S^n) \oplus \tilde{h}_k(S^n) \cong \tilde{h}_k(S^n \vee S^n) \quad \text{mit} \quad (b_+, b_-) \mapsto \tilde{h}_k \iota_+(b_+) + \tilde{h}_k \iota_-(b_-).$$

Die Abbildung  $f \vee g$  erfüllt  $(f \vee g) \circ \iota_+ = f$  und  $(f \vee g) \circ \iota_- = g: S^n \rightarrow X$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} \tilde{h}_k(f \vee g)(b_+, 0) &= \tilde{h}_k((f \vee g) \circ \iota_+)(b_+) = \tilde{h}_k f(b_+) \\ \text{und} \quad \tilde{h}_k(f \vee g)(0, b_-) &= \tilde{h}_k((f \vee g) \circ \iota_-)(b_-) = \tilde{h}_k g(b_-), \end{aligned}$$

also gilt insgesamt

$$\tilde{h}_k(f \vee g)(b_+, b_-) = \tilde{h}_k f(b_+) + \tilde{h}_k g(b_-) \in \tilde{h}_k(X).$$

Das Lemma ist bewiesen, wenn wir zeigen können, dass

$$\tilde{h}_k p(b) = (b, b) \in \tilde{h}_k(S^n) \oplus \tilde{h}_k(S^n).$$

Betrachte die Quotientenabbildungen

$$q_\pm: S^n \vee S^n \rightarrow S^n,$$

die den zweiten beziehungsweise ersten Summanden im Wedge-Produkt auf den Basispunkt und den anderen Summanden identisch auf  $S^n$  abbilden. Dann folgt  $q_+ \circ \iota_+ = q_- \circ \iota_- = \text{id}_{S^n}$ , und  $q_+ \circ \iota_- = q_- \circ \iota_+$  sind konstant. Daraus schließen wir, dass

$$\tilde{h}_k q_+(b_+, b_-) = b_+ \quad \text{und} \quad \tilde{h}_k q_-(b_+, b_-) = b_- \in \tilde{h}_k(S^n).$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es also zu zeigen, dass  $\text{id}_{S^n}$  homotop zu  $q_\pm \circ p: S^n \rightarrow S^n$  ist, denn dann folgt

$$\tilde{h}_k p(b) = (\tilde{h}_k(q_+ \circ p)(b), \tilde{h}_k(q_- \circ p)(b)) = (b, b).$$

Eine Homotopie  $\text{id}_{S^n} \sim q_+ \circ p$  wird in geeigneten Koordinaten etwa durch

$$\begin{pmatrix} \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot (1 - x_{n+1}) \\ \sin \varphi \cdot x' \\ 1 - \sin^2 \varphi \cdot (1 - x_{n+1}) \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} \sin((1+s)\varphi) \cdot \cos((1+s)\varphi) \cdot (1 - x_{n+1}) \\ \sin((1+s)\varphi) \cdot x' \\ 1 - \sin^2((1+s)\varphi) \cdot (1 - x_{n+1}) \end{pmatrix} & \text{für } \varphi \leq \frac{\pi}{1+s}, \text{ und} \\ e_{n+1} & \text{für } \varphi \geq \frac{\pi}{1+s}, \end{cases}$$

für  $\varphi \in [0, \pi]$ ,  $(x_{n+1}, x') \in S^{n-1} \subset \{0\} \times \mathbb{R}^n$  und  $s \in [0, 1]$  gegeben.  $\square$

3.20. BEMERKUNG. Die Notation „ $f + g$ “ legt nahe, dass man mit punktierten Abbildungen von  $(S^n, e_{n+1})$  in einen festen punktierten Raum  $(X, x_0)$  rechnen kann. Bis auf Homotopie ist das tatsächlich möglich. Für  $n = 1$  erhalten wir die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, x_0)$ , für  $n \geq 2$  die höheren Homotopiegruppen aus Bemerkung 2.17 (3). Diese sind für  $n \geq 2$  sogar abelsch, was die Notation „ $+$ “ rechtfertigt.

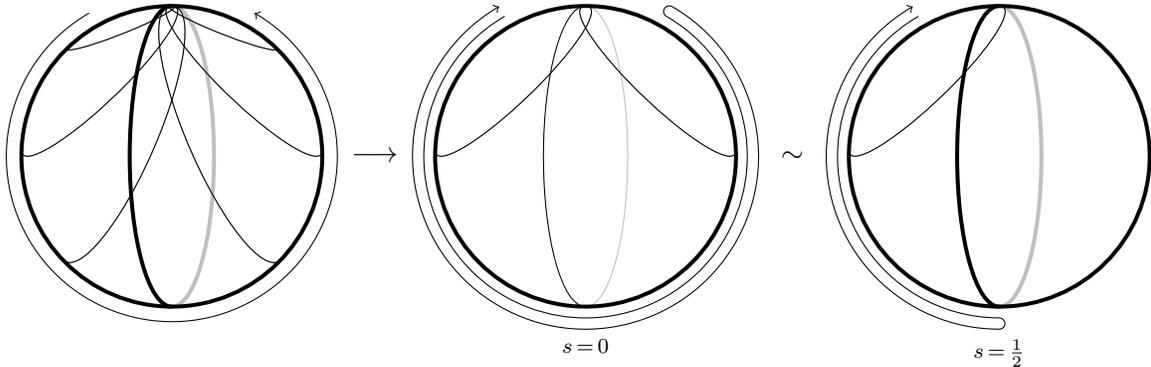
Wenn man auf den Basispunkt verzichtet, erhält man für  $n = 1$  die abelisierte Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}$ , und für  $n \geq 2$  einen Quotienten von  $\pi_n(X, x_0)$ .

3.21. BEMERKUNG. Wir erhalten weitere Eigenschaften des Abbildungsgrades.

- (5) Seien  $f, g: S^n \rightarrow S^n$  stetig, dann folgt  $\deg(f + g) = \deg f + \deg g$ .
- (6) Es sei  $f = \text{id}$  und  $g$  die Spiegelung  $x_1 \mapsto -x_1$ . Dann ist  $f + g$  nullhomotop via

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \varphi (1 - x_{n+1}) \\ \cos \varphi x' \\ 1 - \cos^2 \varphi (1 - x_{n+1}) \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} \sin |2\varphi| \cos |2\varphi| (1 - x_{n+1}) \\ \sin |2\varphi| x' \\ 1 - \sin^2 |2\varphi| (1 - x_{n+1}) \end{pmatrix} & \text{für } \varphi \notin \left(-\frac{\pi s}{2}, \frac{\pi s}{2}\right) \\ \begin{pmatrix} \sin(\pi s) \cos(\pi s) (1 - x_{n+1}) \\ \sin(\pi s) x' \\ 1 - \sin^2(\pi s) (1 - x_{n+1}) \end{pmatrix} & \text{für } \varphi \in \left[-\frac{\pi s}{2}, \frac{\pi s}{2}\right] \end{cases}$$

für  $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $(x_{n+1}, x') \in S^{n-1} \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$  und  $s \in [0, 1]$ . Diese Homotopie ist ähnlich zur Homotopie  $\bar{\gamma} \gamma \sim e$  im Beweis von Satz 2.14.



- (7) Jede lineare Isometrie  $g \in O(n+1)$  lässt sich als Produkt von höchstens  $n+1$  Spiegelungen schreiben. Es folgt  $\deg g = \det g \in \{1, -1\}$ . Die Antipodenabbildung  $-\text{id}_x$  hat also den Abbildungsgrad  $(-1)^{n+1} = \deg(-\text{id})$ .
- (8) Falls  $f: S^n \rightarrow S^n$  keine Fixpunkte hat, ist  $f$  zur Antipodenabbildung homotop. Dazu konstruieren wir eine Homotopie  $H: S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n$ , so dass  $H(x, s)$  den Großkreisbogen von  $f(x)$  nach  $-x$  mit konstanter Geschwindigkeit durchläuft. Insbesondere folgt  $\deg f =$

$(-1)^{n+1}$ . Wenn  $n$  gerade ist, schließen wir, dass keine Gruppe mit mehr als zwei Elementen frei auf  $S^n$  wirken kann.

Wir wollen diese Bemerkung anwenden, um den Satz vom Igel zu beweisen. Unter einem *Vektorfeld* auf  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  verstehen wir eine Abbildung  $V: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $\langle x, V(x) \rangle = 0$  für alle  $x \in S^n$ . Ein Punkt  $x \in S^n$  heißt *Nullstelle* von  $V$ , wenn  $V(x) = 0$ .

3.22. SATZ (vom Igel). *Die Sphäre  $S^n$  trägt genau dann Vektorfelder ohne Nullstellen, wenn  $n$  ungerade ist.*

BEWEIS. Es sei  $V$  ein Vektorfeld ohne Nullstellen. Indem wir  $V(x)$  durch  $\frac{V(x)}{|V(x)|}$  ersetzen, dürfen wir  $|V| = 1$  auf ganz  $S^n$  annehmen. Dann liefert

$$(x, s) \mapsto \cos(\pi s) \cdot x + \sin(\pi s) \cdot V(x)$$

für  $s \in [0, 1]$  eine Homotopie von der Identität zur Antipodenabbildung. Es folgt

$$(-1)^{n+1} = \deg(-\text{id}) = \deg(\text{id}) = 1,$$

also ist  $n$  ungerade.

Sei umgekehrt  $n$  ungerade, dann liefert  $V(x) = ix$  ein Vektorfeld ohne Nullstellen auf  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{C}^{\frac{n+1}{2}}$ .  $\square$

Zum Schluss dieses Abschnitts geben wir noch ein Resultat an, dass wir im nächsten Abschnitt benutzen können.

3.23. FOLGERUNG (aus Satz 3.18). *Es sei  $\tilde{h}_\bullet$  eine verallgemeinerte reduzierte Homologietheorie und  $f: S^n \rightarrow S^n$  stetig, dann wirkt  $\tilde{h}_k f$  auf  $\tilde{h}_k(S^n)$  durch Multiplikation mit  $\deg f$ .*

Insbesondere liefert also jede reduzierte Homologietheorie  $\tilde{h}_\bullet$  mit Koeffizienten  $\mathbb{Z}$  den gleichen Abbildungsgrad in Definition 3.16.

BEWEIS. Wegen Funktorialität stimmt die Aussage für  $f_1 = \text{id}$ , und aus Lemma 3.19 folgt sie mit dem Trick aus Bemerkung 3.21 (6) auch für eine Abbildung  $f_{-1}$  mit  $\deg f_{-1} = -1$ . Wir setzen induktiv  $f_{d+1} = f_d + f_1$  für  $d \geq 1$  und  $f_{d-1} = f_d + f_{-1}$  für  $d \leq -1$ , und erhalten nach Lemma 3.19 für alle  $d \in \mathbb{Z}$  eine Abbildung  $f_d$  mit  $\deg f_d = d$ . Induktiv folgt

$$\tilde{h}_k f_d(b) = d \cdot b = \deg f_d \cdot b$$

für alle  $b \in \tilde{h}_k(S^n)$ . Nach dem Satz 3.18 ist jede stetige Abbildung  $f: S^n \rightarrow S^n$  zu  $f_d$  mit  $d = \deg f$  homotop, also folgt die Behauptung.  $\square$

### 3.3. Zelluläre Homologie

In diesem Abschnitt sehen wir, wie sich die reduzierte Homologie eines punktierten CW-Komplexes auf algebraische Weise als Homologie eines Kettenkomplexes berechnen lässt. Dazu benutzen wir den Abbildungsgrad aus dem vorangegangenen Abschnitt, insbesondere benötigen wir Satz 3.18 und Folgerung 3.23. Als Konsequenz berechnen wir die Homologien der projektiven Räume über  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{H}$ . Am Ende des Abschnitts sehen wir, wie man die reduzierte Homologie eines CW-Komplexes auch ohne Wahl eines Basispunktes bestimmen kann.

Wir beginnen mit einigen Vorüberlegungen. Im folgenden sei  $\tilde{h}_\bullet$  stets eine reduzierte Homologietheorie über  $R$  mit Koeffizienten  $M = \tilde{h}_0(S^0) \in \text{Mod}_R$ . Wir fixieren Homöomorphismen  $\bar{D}^n/S^{n-1} \cong S^n$  und benutzen die Isomorphismen

$$\partial_n: \tilde{h}_n(S^n) \rightarrow \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1})$$

aus dem Beweis von Satz 3.14, um induktiv  $\tilde{h}_n(S^n)$  mit  $\tilde{h}_0(S^0) = M$  zu identifizieren.

Sei  $X = \lim_{\rightarrow} X^n$  ein CW-Komplex, mit den Indexmengen  $I^n$  für die  $n$ -Zellen. Wir fixieren einen Basispunkt  $x_0 = e_{i_0}^0 \in X^0$  mit  $i_0 \in I^0$ , setzen

$$J^n = \begin{cases} I^n & \text{für } n > 0, \\ I^0 \setminus \{i_0\} & \text{für } n = 0, \text{ und} \\ \emptyset & \text{für } n < 0, \end{cases}$$

und schreiben

$$M^{\oplus J^n} = \bigoplus_{i \in J^n} M \quad \text{und} \quad \sum_{i \in J^n} a_i e_i^n = (a_i)_{i \in J^n} \in M^{\oplus J^n}.$$

Es seien  $\Phi_i^n$  die charakteristischen Abbildungen von  $X$  für  $i \in I^n$ . Für  $n > 0$  fassen wir  $\Phi_i^n$  als Abbildung von Paaren  $(\bar{D}^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$  auf und bezeichnen die induzierte punktierte Abbildung auf den Quotienten mit  $\bar{\Phi}_i^n: S^n \rightarrow X^n/X^{n-1}$ . Für  $n = 0$  fixieren wir einen Punkt von  $S^0$  als Basispunkt. Für  $i \in I^0$  bezeichne  $\bar{\Phi}_i^0: S^0 \rightarrow X^0$  die punktierte Abbildung, die den anderen Punkt von  $S^0$  auf  $e_i^0 \in X^0 \setminus \{x_0\}$  abbildet. Der Einfachheit halber sei im Folgenden stets  $X^n = \{x_0\}$  für alle  $n < 0$ , so dass  $X^0/X^{-1} = X^0$  und  $X^n/X^{n-1} = \{x_0\}$  für  $n < 0$ .

3.24. LEMMA. *Wir erhalten Isomorphismen*

$$M^{\oplus J^n} \cong \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1}) \quad \text{mit} \quad a_i e_i^n \mapsto \tilde{h}_n \bar{\Phi}_i^n(a_i) \quad \text{für alle } n, \quad (1)$$

$$0 \cong \tilde{h}_k(X^n/X^{n-1}) \quad \text{für } k \neq n, \quad (2)$$

$$0 \cong \tilde{h}_k(X^n) \quad \text{für } k > n, \quad (3)$$

$$\text{und} \quad \tilde{h}_k(X) \cong \tilde{h}_k(X^n) \quad \text{für } n > k. \quad (4)$$

BEWEIS. Die Behauptungen (1) und (2) sind klar für  $n < 0$ , da  $X^n/X^{n-1}$  dann zusammenziehbar ist. Für  $n = 0$  schreiben wir

$$X^0 = \bigvee_{i \in J^0} S^0$$

mit gemeinsamem Basispunkt  $x_0$ , und erhalten

$$\tilde{h}_k(X^0/X^{-1}) = \tilde{h}_k(X^0) = \bigoplus_{i \in J^0} \tilde{h}_k(S^0) = \begin{cases} M^{\oplus J^0} & \text{für } k = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{für } k \neq 0. \end{cases}$$

aus dem Summenaxiom (3) und dem Dimensionsaxiom (4) aus Definition 3.12.

Für  $n > 0$  erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in J^n} (\bar{D}^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\cup_{i \in J^n} \Phi_i^n} & X^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigvee_{i \in J^n} S^n & \xrightarrow{\bigvee_{i \in J^n} \bar{\Phi}_i^n} & X^n/X^{n-1}, \end{array}$$

und die Abbildung  $\bigvee_i \bar{\Phi}_i^n$  ist ein Homöomorphismus. Die Behauptungen (1) und (2) folgen jetzt wieder aus dem Summenaxiom und aus Satz 3.14.

Punkt (3) ist klar für  $n \leq 0$  und ergibt sich für  $n > 0$  induktiv aus der langen exakten Sequenz des Paares  $(X^n, X^{n-1})$  aus Axiom (2) für  $k > n$ , da

$$\dots \longrightarrow \underbrace{\tilde{h}_k(X^{n-1})}_{\cong 0} \longrightarrow \tilde{h}_k(X^n) \longrightarrow \underbrace{\tilde{h}_k(X^n/X^{n-1})}_{\cong \tilde{h}_k(S^n) \oplus J^n \cong 0} \longrightarrow \dots$$

Behauptung (4) folgt aus der langen exakten Sequenz des Paares  $(X, X^n)$ , wenn wir zeigen können, dass  $\tilde{h}_k(X/X_n) \cong 0$  für alle  $k \leq n$ , denn für  $k < n$  erhalten wir dann

$$\dots \longrightarrow \underbrace{\tilde{h}_{k+1}(X/X_n)}_{\cong 0} \xrightarrow{\partial_{k+1}} \tilde{h}_k(X_n) \longrightarrow \tilde{h}_k(X) \longrightarrow \underbrace{\tilde{h}_k(X/X_n)}_{\cong 0} \longrightarrow \dots$$

Der Raum  $Y = X/X^n$  ist wieder ein CW-Komplex mit  $Y^0 = \dots = Y^n = \{*\}$  und mit charakteristischen Abbildungen  $p \circ \Phi_i^m$  für  $m > n$  und  $i \in I^m$ , wobei  $p: X \rightarrow Y$  die Projektion auf den Quotienten bezeichne. Für  $k \leq n$  gilt also  $\tilde{h}_k(Y^0) = \dots = \tilde{h}_k(Y^n) \cong 0$ . Für  $m > n$  folgt aus der langen exakten Sequenz

$$\dots \longrightarrow \underbrace{\tilde{h}_k(Y^{m-1})}_{\cong 0} \longrightarrow \tilde{h}_k(Y^m) \longrightarrow \underbrace{\tilde{h}_k(Y^m/Y^{m-1})}_{\cong 0} \longrightarrow \dots$$

des Paares  $(Y^m, Y^{m-1})$  mit (2) induktiv, dass  $\tilde{h}_k(Y^m) \cong 0$  für alle  $m \in \mathbb{Z}$ . Damit haben wir (4) bewiesen, falls  $X = X^m$  endlich dimensional ist.

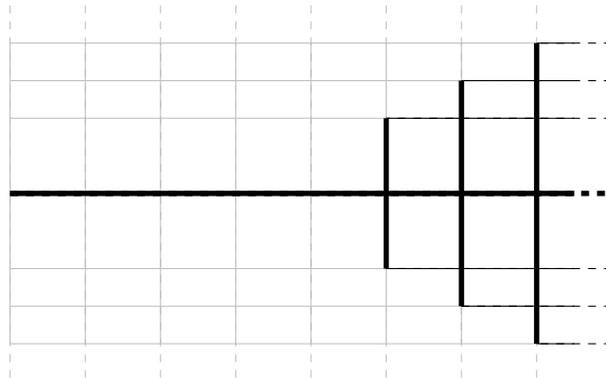
Im allgemeinen Fall betrachten wir den Raum

$$Z = \bigcup_{m=0}^{\infty} Y^m \times [m, \infty) \subset Y \times [0, \infty)$$

als CW-Komplex mit Zellen der Form  $e_i^m \times \{a\}$  und  $e_i^m \times (a, a+1)$ . Da  $[0, \infty)$  lokal kompakt ist, ist das nach Übung 1.139 möglich. Der Raum  $Y$  ist offensichtlich ein Deformationsretrakt von  $Y \times [0, \infty)$ . Zunächst ist  $S^{m-1} \times [0, \infty) \cup D^m \times [m, \infty)$  ein starker Deformationsretrakt von  $D^m \times [0, \infty)$ ; dazu betrachten wir etwa die Zentralprojektion vom Punkt  $(0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$  aus. Mit Hilfe der charakteristischen Abbildungen verkleben wir diese Projektionen zu einer Abbildung

$$P^m: Y^m \times [0, \infty) \cup Z \rightarrow Y^{m-1} \times [0, \infty) \cup Z.$$

Es sei  $H^m: (Y^m \times [0, \infty) \cup Z) \times [0, 1] \rightarrow Y^m \times [0, \infty) \cup Z$  eine Homotopie von  $\text{id}$  nach  $P^m$  relativ zu  $Y^{m-1} \times [0, \infty) \cup Z$ . Wie im Beweis von Satz 1.100 erhalten wir eine Retraktion  $P = P^{n+1} \circ P^{n+2} \circ \dots$  von  $Y \times [0, \infty)$  auf  $Z$  und eine Homotopie  $H$  von  $\text{id}$  nach  $P$ , indem wir auf dem Teilintervall  $[2^{-m}, 2^{1-m}] \subset [0, 1]$  die Homotopie  $H^m \circ P^{m+1} \circ \dots$  ausführen.



$$A \subset Z \subset Y \times [0, \infty)$$

Als nächstes betrachten wir den Unterkomplex

$$A = (Y^0 \times [0, \infty)) \cup \bigcup_{m=n+1}^{\infty} (Y^m \times \{m\}) \subset Z.$$



zusammen. Indem wir die Exaktheit der Diagonalen ausnutzen, erhalten wir eine Kette natürlicher Isomorphismen

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_n(X) &\cong \tilde{h}_n(X^n) / \text{im } \partial^{n+1} && \text{da } \tilde{h}_n \iota^{n+1} \text{ surjektiv ist,} \\
&\cong \text{im } \tilde{h}_n p^n / \text{im } (\tilde{h}_n p^n \circ \partial^{n+1}) && \text{da } \tilde{h}_n p^n \text{ injektiv ist,} \\
&= \ker \partial^n / \text{im } d_{n+1}^{\text{CW}} && \text{da } \text{im } \tilde{h}_n p^n = \ker \partial^n, \\
&= \ker d_n^{\text{CW}} / \text{im } d_{n+1}^{\text{CW}} && \text{da } \tilde{h}_{n-1} p^{n-1} \text{ injektiv ist.}
\end{aligned}$$

Der Quotient auf der rechten Seite ist wohldefiniert, da  $\text{im } d_{n+1}^{\text{CW}} \subset \ker d_n^{\text{CW}}$ , oder äquivalent

$$d_n^{\text{CW}} \circ d_{n+1}^{\text{CW}} = \tilde{h}_{n-1} p^{n-1} \circ (\partial^n \circ \tilde{h}_n p^n) \circ \partial^{n+1} = 0.$$

Mit unserer Definition  $X^n = \{x_0\}$  für  $n < 0$  funktioniert dieses Argument für alle  $n \in \mathbb{Z}$ . Das motiviert die folgende Definition.

3.25. DEFINITION. Ein (*Ketten-*)Komplex  $(C_\bullet, d_\bullet)$  über  $R$  ist eine Sequenz  $(d_n: C_n \rightarrow C_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$  unitärer  $R$ -Moduln, so dass

$$d_n \circ d_{n+1} = 0: C_{n+1} \longrightarrow C_{n-1}$$

für alle  $n \in \mathbb{Z}$ . Man definiert  $R$ -Moduln  $Z_n(C_\bullet, d_\bullet)$ ,  $B_n(C_\bullet, d_\bullet) \subset C_n$  und  $H_n(C_\bullet, d_\bullet)$  durch

$$Z_n(C_\bullet, d_\bullet) = \ker d_n, \quad B_n(C_\bullet, d_\bullet) = \text{im } d_{n+1} \quad \text{und} \quad H_n(C_\bullet, d_\bullet) = Z_n(C_\bullet, d_\bullet) / B_n(C_\bullet, d_\bullet).$$

Elemente von  $C_n$ ,  $Z_n(C_\bullet, d_\bullet)$  und  $B_n(C_\bullet, d_\bullet)$  heißen  $n$ -Ketten,  $n$ -Zykel beziehungsweise  $n$ -Ränder des Komplexes. Der Modul  $H_n(C_\bullet, d_\bullet)$  heißt die  $n$ -te Homologie des Komplexes, und seine Elemente  $n$ -te Homologieklassen.

Eine Kettenabbildung  $f_\bullet: (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet, d'_\bullet)$  vom Grad  $a$  ist eine Sequenzabbildung vom Grad  $a$ . Die induzierten Abbildungen zwischen den Homologien bezeichnet man mit

$$H_n f_\bullet = f_*: H_n(C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow H_{n+a}(C'_\bullet, d'_\bullet).$$

Man überlegt sich leicht, dass sich jede Kettenabbildung  $f_\bullet: (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet, d'_\bullet)$  zu Abbildungen

$$Z_n(C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow Z_{n+a}(C'_\bullet, d'_\bullet) \quad \text{und} \quad B_n(C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow B_{n+a}(C'_\bullet, d'_\bullet)$$

einschränken lässt, so dass die Abbildung  $f_*$  tatsächlich wohldefiniert ist. Die Kettenkomplexe über  $R$  bilden eine Kategorie  $\mathcal{Ch}_R$  mit den Kettenabbildungen als Morphismen, und die  $n$ -te Homologie ist ein Funktor  $H_n: \mathcal{Ch}_R \rightarrow \mathcal{Mod}_R$ .

Wir verwenden im Folgenden Kleinbuchstaben  $\tilde{h}$  für (reduzierte) Homologietheorien im Sinne der Eilenberg-Steenrod-Axiome und Großbuchstaben für die Homologie von Kettenkomplexen.

Nach unseren obigen Überlegungen ist  $\tilde{h}_k(X)$  zur Homologie eines Kettenkomplexes  $(\tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}, d_\bullet^{\text{CW}})$  isomorph. Wir identifizieren  $\tilde{C}_n^{\text{CW}}(X; M) = \tilde{h}_n(X^n / X^{n-1})$  mit  $M^{\oplus J^n}$  wie in Lemma 3.24 (1). Als nächstes suchen wir eine explizite Formel für den Randoperator  $d_n^{\text{CW}}: M^{\oplus J^n} \rightarrow M^{\oplus J^{n-1}}$ . Wir betrachten dazu für  $j \in J^n$  die Projektionsabbildung

$$q_j^n: X^n / X^{n-1} \longrightarrow X^n / \left( X^{n-1} \cup \bigcup_{i \in J^n \setminus \{j\}} e_i^n \right) \xrightarrow[\cong]{(\overline{\Phi}_j^n)^{-1}} S^n.$$

Ähnlich wie im Beweis von Lemma 3.19 gilt

$$q_j^n \circ \overline{\Phi}_i^n = \begin{cases} \text{id}_{S^n} & \text{falls } i = j \in J^n, \text{ und} \\ \text{konstant} & \text{falls } i \neq j, \end{cases}$$

und für  $\sum_{i \in J^n} a_i e_i^n \in M^{\oplus J^n} = \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1})$  folgt

$$(\tilde{h}_n q_j^n) \sum_{i \in J^n} a_i e_i^n = \sum_{i \in J^n} (\tilde{h}_n q_j^n \circ \bar{\Phi}_i^n)(a_i) = a_j \in M.$$

Wir betrachten die Verklebeabbildungen  $\varphi_i^n = \Phi_i^n|_{S^{n-1}}: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$  und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{h}_n(S^n) & \xrightarrow[\quad]{\partial_n} & \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\tilde{h}_{n-1} f_{ji}^n} & \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}) \\ \tilde{h}_n \bar{\Phi}_i^n \downarrow & & \tilde{h}_{n-1} \varphi_i^n \downarrow & & \tilde{h}_{n-1} q_j^{n-1} \uparrow \\ \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_n} & \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{\tilde{h}_{n-1} p^{n-1}} & \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \end{array}$$

für  $i \in J^n$ ,  $j \in J^{n-1}$  und  $f_{ji}^n = q_j^{n-1} \circ p^{n-1} \circ \varphi_i^n: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ . Dabei kommutiert das linke Quadrat wegen der Natürlichkeit von  $\partial_n$ , und das rechte nach Definition von  $f_{ji}^n$ . Nach Folgerung 3.23 operiert  $\tilde{h}_{n-1} f_{ji}^n$  auf  $M = \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1})$  durch Multiplikation mit dem Abbildungsgrad, also

$$\tilde{h}_{n-1} f_{ji}^n = d_{ji}^n = \deg f_{ji}^n \in \mathbb{Z} \subset \text{End}_R M.$$

Dabei identifizieren wir  $\deg f_{ji}^n \in \mathbb{Z}$  mit dem Bild in  $R$  unter dem natürlichen Homomorphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow R$  mit  $1 \mapsto 1$ .

Insgesamt wird der zelluläre Randoperator  $d_n^{\text{CW}}$  für  $n \geq 2$  also durch die Matrix

$$d_n^{\text{CW}} = (d_{ji}^n)_{j,i} \in M_{J^{n-1}, J^n}(\mathbb{Z}) \subset \text{hom}_R(M^{\oplus J^n}, M^{\oplus J^{n-1}})$$

beschrieben. Man beachte, dass  $S^{n-1}$  kompakt ist und  $\varphi_i^n$  nach Bemerkung 1.53 (2) und Satz 1.93 daher nur endlich viele Zellen  $e_j^{n-1}$  trifft, so dass  $a_i e_i^n \in M \cong \text{im}(\tilde{h}_n \bar{\Phi}_i^n)$  auf eine endliche Linearkombination, also ein Element der direkten Summe  $M^{\oplus J^{n-1}}$  abgebildet wird. Man beachte, dass die reduzierte Homologietheorie  $\tilde{H}_\bullet$  in dieser Beschreibung des reduzierten zellulären Kettenkomplexes überhaupt nicht mehr auftaucht. Hierzu benötigen wir wieder Folgerung 3.23, wonach der Abbildungsgrad nicht von der Wahl einer reduzierten Homologietheorie mit Koeffizienten  $\mathbb{Z}$  abhängt.

3.26. DEFINITION. Es sei  $X$  ein CW-Komplex und  $M \in \text{Mod}_R$ . Der *reduzierte zelluläre Kettenkomplex* von  $X$  mit Koeffizienten  $M$  ist definiert als  $(\tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(X; M), d_\bullet^{\text{CW}})$  mit  $\tilde{C}_n^{\text{CW}} = M^{\oplus J^n}$  und

$$d_n^{\text{CW}} \sum_{i \in J^n} a_i e_i^n = \sum_{j \in J^{n-1}} \sum_{i \in J^n} \deg(q_j^{n-1} \circ p^{n-1} \circ \varphi_i^n) a_i e_j^{n-1} = \sum_{j \in J^{n-1}} \sum_{i \in J^n} d_{ji}^n a_i \cdot e_j^{n-1}.$$

Die Homologie  $\tilde{H}_\bullet^{\text{CW}}(X; M) = H_\bullet(\tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(X; M), d_\bullet^{\text{CW}})$  dieses Komplexes heißt die *reduzierte zelluläre Homologie* von  $X$  mit Koeffizienten in  $M$ .

Wir erinnern uns an die Definition 1.95 zellulärer Abbildungen zwischen CW-Komplexen. Die CW-Komplexe mit den zellulären Abbildungen bilden eine Kategorie  $\mathcal{CW}$ .

Es sei  $Y$  ein CW-Komplex mit  $\tilde{h}_n(Y^n/Y^{n-1}) = M^{\oplus K^n}$ . Eine zelluläre Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  induziert Abbildungen  $\bar{f}^n: X^n/X^{n-1} \rightarrow Y^n/Y^{n-1}$ , also auch Abbildungen  $f_{\#n} = \tilde{h}_n \bar{f}^n: M^{\oplus J^n} \rightarrow M^{\oplus K^n}$  für alle  $n$ . Mit einem ähnlichen Argument wie oben sieht man, dass

$$f_{\#n}^{\text{CW}} \sum_{j \in J^n} a_j e_j^n = \sum_{j \in J^n} \sum_{k \in K^n} \deg(q_k \circ \bar{f}^n \circ \bar{\Phi}_j^n) a_j e_k^n,$$

wobei  $q_k: Y^n/Y^{n-1} \rightarrow S^n$  jetzt die Projektion auf Sphäre zur Zelle  $e_k^n$  von  $Y$  bezeichne.

Die Familie  $f_{\#}^{\text{CW}}$  ist eine Kettenabbildung vom Grad 0, da das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_n} & \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{p_n} & \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \\ \tilde{h}_n \bar{f}_n \downarrow & & \tilde{h}_{n-1} \bar{f}_{n-1} \downarrow & & \tilde{h}_{n-1} \bar{f}_{n-1} \downarrow \\ \tilde{h}_n(Y^n/Y^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_n} & \tilde{h}_{n-1}(Y^{n-1}) & \xrightarrow{p_n} & \tilde{h}_{n-1}(Y^{n-1}/Y^{n-2}) \end{array}$$

kommutiert. Wir bezeichnen die induzierten Abbildungen mit

$$f_*^{\text{CW}} = \tilde{H}_n^{\text{CW}} f_n: \tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; M) \rightarrow \tilde{H}_n^{\text{CW}}(Y; M).$$

3.27. SATZ. Sei  $M \in \text{Mod}_R$  und  $n \in \mathbb{Z}$ .

- (1) Die  $n$ -te reduzierte zelluläre Homologie mit Koeffizienten  $M$  ist ein Funktor  $\tilde{H}_n^{\text{CW}}(\cdot; M): \text{CW} \rightarrow \text{Mod}_R$ .
- (2) Für jede reduzierte Homologietheorie  $\tilde{h}_n$  mit Koeffizienten  $M$  existiert ein natürlicher Isomorphismus  $\tilde{h}_n|_{\text{CW}} \rightarrow \tilde{H}_n^{\text{CW}}(\cdot; M)$ .

Da wir zur Definition des reduzierten zellulären Kettenkomplexes einen Basispunkt  $x_0$  wählen mussten, sieht es zunächst so aus, als würde  $\tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; M)$  von dieser Wahl abhängen. In Bemerkung 3.34 (2) geben wir eine andere Konstruktion an, die natürlich isomorphe Homologien liefert und keinen Basispunkt benötigt.

BEWEIS. Wir haben zu jeder zellulären Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  eine induzierte Abbildung  $f_*^{\text{CW}}: \tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; M) \rightarrow \tilde{H}_n^{\text{CW}}(Y; M)$  konstruiert. Funktorialität (1) folgt, da  $h_n \bar{\text{id}}_n = h_n \text{id} = \text{id}$  und

$$(f \circ g)_*^{\text{CW}} = \tilde{h}_n(\overline{f \circ g})_n = \tilde{h}_n(\bar{f}_n \circ \bar{g}_n) = \tilde{h}_n \bar{f}_n \circ \tilde{h}_n \bar{g}_n = f_*^{\text{CW}} \circ g_*^{\text{CW}}.$$

Wir haben oben Isomorphismen

$$\tilde{h}_n(X) \leftarrow \tilde{h}_n(X^n) / \text{im } \partial_{n+1} \longrightarrow \text{im } \tilde{h}_n p^n / \text{im}(\tilde{h}_n p^n \circ \partial_{n+1}) = \ker d_n / \text{im } d_{n+1} = \tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; M)$$

konstruiert, die alle von natürlichen Abbildungen zwischen Homologiemoduln induziert werden. Also ist auch der zusammengesetzte Isomorphismus  $\tilde{h}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; M)$  natürlich, und es folgt (2).  $\square$

3.28. BEMERKUNG. Wir können uns zelluläre Homologie vereinfacht wie folgt vorstellen. Jede  $n$ -Zelle ist ein  $n$ -dimensionales Objekt in  $X$  mit einem  $(n-1)$ -dimensionalen Rand, und Ketten  $c \in \tilde{C}_n^{\text{CW}}(X; M)$  sind  $M$ -Linearkombinationen davon. Den Rand  $d_n^{\text{CW}} c$  einer solchen Kette  $c$  schreiben wir wieder als  $M$ -Linearkombination von  $(n-1)$ -Zellen, dabei hängen die Vorzeichen von einer Art „Orientierung“ auf dem Rand ab, siehe Bemerkung 3.21 zum Abbildungsgrad. Wenn also der Rand von  $c$  eine bestimmte Zelle  $a$ -mal „richtig herum“ und  $b$ -mal „falsch herum“ trifft, dann kommt diese Zelle  $(a-b)$ -mal in  $d_n^{\text{CW}} c$  vor.

Ketten  $c$  mit Rand  $d_n^{\text{CW}} c = 0$  heißen Zykel. Wir stellen sie uns als „geschlossene“  $n$ -dimensionale Objekte in  $X$  vor. Jeder Zykel repräsentiert ein „Loch“ in  $X^n$ . Wenn dieses Loch in  $X^{n+1}$  von einer Kette  $b \in C_{n+1}^{\text{CW}}(X; M)$  „gestopft“ wird, das heißt, wenn  $c = d_{n+1}^{\text{CW}} b$ , vergessen wir es. Alle anderen Löcher bleiben nach Lemma 3.24 (4) dann auch in  $X$  „ungestopft“. Somit dürfen wir uns  $\tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; M)$  als Menge der Linearkombinationen von Löchern in  $X$  vorstellen. Wir werden diese Vorstellung im nächsten Abschnitt als Motivation zur Konstruktion der simplizialen singulären Homologie für beliebige topologische Räume heranziehen.

Ein Beispiel ist das Loch in der Mitte der  $n$ -Sphäre  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , das sich nach den Sätzen 3.14 und 3.27 dadurch manifestiert, dass  $H_n^{\text{CW}}(S^n) \cong M$ . Allerdings sehen wir dieses Loch erst „mit bloßem Auge“, wenn wir  $S^n$  in den  $\mathbb{R}^{n+1}$  einbetten, während die Homologie es immer findet.

3.29. BEISPIEL. Die reduzierte zelluläre Homologie lässt sich besonders einfach berechnen, wenn der zelluläre Randoperator  $d_n^{CW}$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$  verschwindet. Das passiert etwa dann, wenn  $X$  keine Zellen in aufeinanderfolgenden Dimensionen hat. Ein Beispiel sind die komplex und quaternionisch projektiven Räume aus den Übungen 1.136 und 1.137, siehe Übung 3.138.

3.30. BEISPIEL. Wir betrachten jetzt den reell projektiven Raum  $X = \mathbb{R}P^n$  mit der CW-Struktur aus Übung 1.137. Dann existiert genau eine Zelle  $e^k$  in jeder Dimension  $0 \leq k \leq n$ , und die Verklebeabbildung ist gerade die Projektion

$$\varphi^k: S^{n-1} \rightarrow X^{k-1} = \mathbb{R}P^{k-1} = S^{n-1}/\{1, -1\}.$$

Dabei wird der Äquator  $S^{k-2}$  gerade auf den Unterkomplex  $X^{k-2} = \mathbb{R}P^{k-2}$  abgebildet. Ähnlich wie bei der Konstruktion der „Summe“ stetiger Abbildungen erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^{k-1} & \longrightarrow & S^{k-1}/S^{k-2} \cong S^{k-1} \vee S^{k-1} \\ \varphi^k \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}P^{k-1} & \xrightarrow{q^{k-1}} & \mathbb{R}P^{k-1}/\mathbb{R}P^{k-1} \cong S^{k-1} \end{array} \quad \downarrow \varphi_+^k \vee \varphi_-^k$$

Also gilt  $q^{k-1} \circ \varphi^k = \varphi_+^k + \varphi_-^k$ ; hierbei werden  $\varphi_{\pm}^k: S^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$  durch die Einschränkung von  $q^{k-1} \circ \varphi^k$  auf je eine der beiden Halbkugeln induziert. Da  $\varphi_-^k = \varphi_+^k \circ (-\text{id})$  nach Konstruktion, folgt

$$d_k^{CW} = \deg(q^{k-1} \circ \varphi^k) = \pm(1 + (-1)^k) = \begin{cases} 2 & \text{falls } k \text{ gerade ist, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir können die Verklebeabbildungen so wählen, dass das obige Vorzeichen stets „+“ ist.

Wir wählen  $\mathbb{Z} \in \text{Mod}_{\mathbb{Z}}$  als Koeffizienten. Für gerade  $n$  und erhalten wir in den Graden 0 bis  $n$  den reduzierten zellulären Kettenkomplex

$$0 \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \dots \xleftarrow{2} \mathbb{Z},$$

für ungerade  $n$  hingegen

$$0 \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \dots \xleftarrow{0} \mathbb{Z},$$

und daher

$$\tilde{H}_k^{CW}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } k \text{ ungerade und } 0 < k < n, \\ \mathbb{Z} & \text{falls } k = n \text{ ungerade, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier taucht gelegentlich der Modul  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  auf. Im Sinne von Bemerkung 3.28 beschreibt das Element  $0 \neq c \in \tilde{H}_k^{CW}(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ein „Loch“ in  $\mathbb{R}P^k$ , das in  $\mathbb{R}P^{k+1}$  nicht gestopft wird; erst das zweimal umlaufene Loch  $2c$  tritt als Rand einer  $(k+1)$ -Kette auf.

3.31. DEFINITION. Es sei  $\mathbb{k}$  ein Körper,  $\tilde{h}_{\bullet}$  eine reduzierte Homologietheorie mit Koeffizienten  $\mathbb{k}$  und  $X$  ein topologischer Raum, dann heißen die Dimensionen  $\tilde{b}_k(X; \mathbb{k}) = \dim_{\mathbb{k}} \tilde{h}_k(X) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  der Homologie-Vektorräume von  $X$  die (reduzierten) *Betti-Zahlen* von  $X$  über  $\mathbb{k}$ . Falls alle Betti-Zahlen endlich sind und fast alle verschwinden, ist die *Euler-Zahl* oder *Euler-Charakteristik* von  $X$  definiert als

$$\chi(X) = 1 + \sum_k (-1)^k \tilde{b}_k(X; \mathbb{k}).$$

Die Betti-Zahlen von  $X$  hängen im allgemeinen von der gewählten reduzierten Homologietheorie  $\tilde{h}_{\bullet}$  ab. Nach Satz 3.27 hängen sie nur von  $\mathbb{k}$  ab, genauer von seiner Charakteristik, wenn  $X$

ein CW-Komplex ist. Aber selbst für CW-Komplexe können verschiedene Körper unterschiedliche Betti-Zahlen liefern, siehe Übung 3.136. Die Euler-Zahl hängt zumindest für kompakte CW-Komplexe nicht von  $\mathbb{k}$  ab, wie der folgende Satz zeigt. Dazu beachten wir, dass CW-Komplexe nach Satz 1.93 genau dann kompakt sind, wenn sie insgesamt nur aus endlich vielen Zellen bestehen.

3.32. SATZ. Sei  $\mathbb{k}$  ein Körper und  $X = X^n$  ein CW-Komplex mit endlich vielen Zellen in jeder Dimension  $k$  und  $\tilde{c}_k(X) = \#J^k < \infty$ . Für alle  $m$  gilt

$$\sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \tilde{c}_k(X) \geq \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \tilde{b}_k(X, \mathbb{k}), \quad (1)$$

$$\tilde{c}_m(X) \geq \tilde{b}_m(X, \mathbb{k}), \quad (2)$$

$$\chi(X) = 1 + \sum_k (-1)^k \tilde{c}_k(X) \quad \text{falls } X \text{ kompakt ist.} \quad (3)$$

BEWEIS. Man leitet (1) aus den Dimensionsformeln für  $\mathbb{k}$ -Vektorräume ab. Sei etwa  $U \subset V$  ein Untervektorraum und  $f: V \rightarrow W$  linear, dann gilt

$$\dim_{\mathbb{k}} U + \dim_{\mathbb{k}}(V/U) = \dim_{\mathbb{k}} V \quad \text{und} \quad \dim_{\mathbb{k}} V = \dim_{\mathbb{k}} \ker f + \dim_{\mathbb{k}} \operatorname{im} f.$$

Die Ungleichungen (2) und die Gleichung (3) folgen aus (1), siehe Übung 3.137.  $\square$

3.33. BEISPIEL. Für die 2-Sphäre erhalten wir  $\chi(S^2) = 2$ , da die übliche CW-Struktur nur aus einer 0- und einer 2-Zelle besteht. Die Oberfläche eines konvexen Polyeders im  $\mathbb{R}^3$  liefert eine andere CW-Struktur  $X$  auf  $S^2$  mit  $e = 1 + \tilde{c}_0(X) = \#I^0$  „Ecken“,  $k = \tilde{c}_1(X)$  „Kanten“ und  $f = \tilde{c}_2(X)$  „Flächen“. Wir erhalten den Eulerschen Polyedersatz

$$2 = e + f - k.$$

3.34. BEMERKUNG. Um Verwirrung zu vermeiden, bezeichnen wir den Randoperator im reduzierten zellulären Kettenkomplex jetzt mit  $\tilde{d}_{\bullet}^{\text{CW}}$ . In der Konstruktion von  $(\tilde{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M), \tilde{d}_{\bullet}^{\text{CW}})$  spielt der Basispunkt  $x_0 = e_{i_0}^0$  eine Sonderrolle. Wir betrachten daher zwei weitere verwandte Kettenkomplexe.

- (1) Der (unreduzierte) zelluläre Kettenkomplex  $(C_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M), d_{\bullet}^{\text{CW}})$  ist definiert als  $C_n^{\text{CW}}(X; M) = M^{\oplus I^n}$  mit  $I^n = \emptyset$  für  $n < 0$  und

$$d_n^{\text{CW}} \sum_{i \in I^n} a_i e_i^n = \begin{cases} \sum_{i \in I^n} \sum_{j \in I^{n-1}} d_{ji}^n a_i e_j^{n-1} & \text{für } n \neq 1, \\ \sum_{i \in I^1} \sum_{j \in J^0} d_{ji}^1 a_i (e_j^0 - e_{i_0}^0) & \text{für } n = 1. \end{cases}$$

Er hängt nicht von der Wahl von  $i_0$  ab, siehe Übung 3.139, und unterscheidet sich nur in  $C_0^{\text{CW}}$  und  $d_1^{\text{CW}}$  vom reduzierten zellulären Kettenkomplex. Seine Homologie heißt (unreduzierte) zelluläre Homologie  $H_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M)$  mit Koeffizienten  $M$ .

- (2) Der augmentierte zelluläre Kettenkomplex  $(\bar{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M), \bar{d}_{\bullet}^{\text{CW}})$  unterscheidet sich vom unreduzierten zellulären Kettenkomplex nur durch

$$\bar{C}_{-1}^{\text{CW}}(X; M) = M \quad \text{und} \quad \bar{d}_0^{\text{CW}} \sum_{i \in I^0} a_i e_i^0 = \sum_{i \in I^0} a_i.$$

Die Abbildung  $\bar{d}_0^{\text{CW}}$  heißt Augmentierung und wird mit  $\varepsilon$  bezeichnet.

Für die zugehörigen Homologien erhält man natürliche Isomorphismen

$$H_n^{\text{CW}}(X; M) \cong \bar{H}_n^{\text{CW}}(X; M) \cong \tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; M) \quad \text{für alle } n \neq 0.$$

Für  $n = 0$  erhält man einen natürlichen Isomorphismus  $\bar{H}_0^{CW}(X; M) \cong \tilde{H}_0^{CW}(X; M)$  und eine natürliche kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \bar{H}_n^{CW}(X; M) \hookrightarrow H_0^{CW}(X; M) \twoheadrightarrow M \longrightarrow 0 .$$

Die Sequenz spaltet (siehe Beispiel 3.6 (1)) erst nach Wahl eines Basispunktes  $x_0 \in X^0$ , der Isomorphismus  $\bar{H}_0^{CW}(X; M) \cong M \oplus \tilde{H}_0^{CW}(X; M)$  ist daher nicht natürlich (er wird aber natürlich, wenn man beide Seiten als Funktoren auf der Kategorie  $\mathcal{CW}_+$  der punktierten  $CW$ -Komplexe betrachtet). Da der augmentierte Kettenkomplex die gleiche Homologie wie der reduzierte Kettenkomplex liefert, aber keine Basispunkte benötigt, definiert man die reduzierte zelluläre Homologie später lieber als die Homologie des augmentierten Kettenkomplexes.

### 3.4. Singuläre Homologie

In diesem Abschnitt definieren wir den singulären simplizialen Kettenkomplex eines topologischen Raumes und betrachten seine Homologiegruppen. Dabei konstruieren wir zunächst eine unreduzierte Homologietheorie wie in Bemerkung 3.34 (1). Später betrachten wir auch den augmentierten Kettenkomplex wie in 3.34 (2), um reduzierte singuläre Homologie zu definieren.

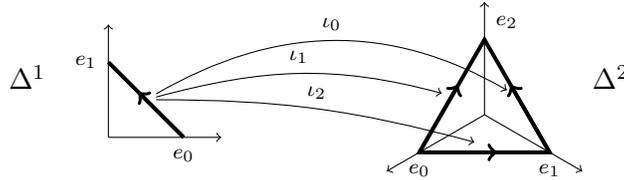
Ein  $k$ -Simplex ist das Analogon eines Dreiecks in Dimension  $k$ . Also ist ein 0-Simplex ein Punkt, ein 1-Simplex ein Intervall, ein 2-Simplex ein Dreieck, ein 3-Simplex ein Tetraeder, und so weiter. Dabei werden wir uns immer die Reihenfolge der Eckpunkte merken. Unter dem  $k$ -dimensionalen Standardsimplex verstehen wir die Teilmenge

$$\Delta^k = \left\{ t = (t_0, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid t_0, \dots, t_k \geq 0, \sum_{i=0}^k t_i = 1 \right\} ,$$

versehen mit der Unterraumtopologie. Die Ecken sind gerade die Vektoren  $e_0, \dots, e_k$  der Standardbasis. Jede Abbildung der Ecken von  $\Delta^k$  auf die Ecken von  $\Delta^\ell$  lässt sich eindeutig zu einer affinen Abbildung  $\Delta^k \rightarrow \Delta^\ell$  fortsetzen. Uns interessieren speziell die Abbildungen  $\iota_i: \Delta^{k-1} \rightarrow \Delta^k$  für  $0 \leq i \leq k$  mit

$$\iota_i(t_0, \dots, t_{k-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{k-1}) \in \Delta^k .$$

Bei diesen Abbildungen wird also gerade die  $i$ -te Ecke  $e_i$  ausgelassen. Das Bild im  $\iota_i \subset \Delta^k$  heißt auch die  $i$ -te Seite von  $\Delta^k$ . Unter dem Rand von  $\Delta^k$  verstehen wir die Menge  $\partial\Delta^k = \text{im } \iota_0 \cup \dots \cup \text{im } \iota_k$ .



**3.35. DEFINITION.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Ein *singulärer  $k$ -Simplex* in  $X$  ist eine stetige Abbildung  $\sigma: \Delta^k \rightarrow X$ . Wir schreiben  $S_k(X) = C(\Delta^k, X)$  und definieren die *Seitenabbildungen*  $\delta_i: S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X)$  für  $0 \leq i \leq k$  durch

$$\delta_i \sigma = \sigma \circ \iota_i: \Delta^{k-1} \rightarrow X .$$

Dann heißt  $\delta_i \sigma$  die  $i$ -te Seite von  $\sigma$ .

Wir nennen die Simplizes „singulär“, da wir nicht fordern, dass  $\sigma$  in irgendeinem Sinne „regulär“ (beispielsweise eine Einbettung) ist.

3.36. BEMERKUNG. Für  $0 \leq i \leq j < k$  gilt offenbar

$$\begin{aligned} (\iota_i \circ \iota_j)(t_0, \dots, t_{k-2}) &= \iota_i(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{k-2}) \\ &= (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{k-2}) \\ &= \iota_{j+1}(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{k-2}) = (\iota_{j+1} \circ \iota_i)(t_0, \dots, t_{k-2}), \end{aligned}$$

denn auf der rechten Seite fügen wir im zweiten Schritt eine 0 vor der Koordinate  $t_j$  ein, die mittlerweile aber an der  $(j+1)$ -ten Stelle steht. Nach Definition 3.35 folgt daraus

$$\delta_j \delta_i \sigma = \sigma \circ \iota_i \circ \iota_j = \sigma \circ \iota_{j+1} \circ \iota_i = \delta_i \delta_{j+1} \sigma$$

für alle  $\sigma \in S_k(X)$  und alle  $0 \leq i \leq j < k$ . Indem wir oben  $i$  durch  $j$  und  $j$  durch  $i-1$  ersetzen, folgt analog für  $0 \leq j < i \leq k$ , dass

$$\delta_j \delta_i \sigma = \delta_{i-1} \delta_j \sigma.$$

Eine Folge von Mengen  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  mit Abbildungen  $\delta_i: M_k \rightarrow M_{k-1}$  für alle  $0 \leq i \leq k$ , so dass

$$\delta_j \circ \delta_i = \begin{cases} \delta_i \circ \delta_{j+1} & \text{für } 0 \leq i \leq j < k, \text{ und} \\ \delta_{i-1} \circ \delta_j & \text{für } 0 \leq j < i \leq k, \end{cases}$$

heißt *semisimpliziale Menge*. Also bilden die  $S_k(X)$  und die  $\delta_i$  aus Definition 3.35 eine solche semisimpliziale Menge. Außerdem liefert jede stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  eine Folge von Abbildungen  $S_k f: S_k(X) \rightarrow S_k(Y)$  mit  $\sigma \mapsto f \circ \sigma$ , so dass

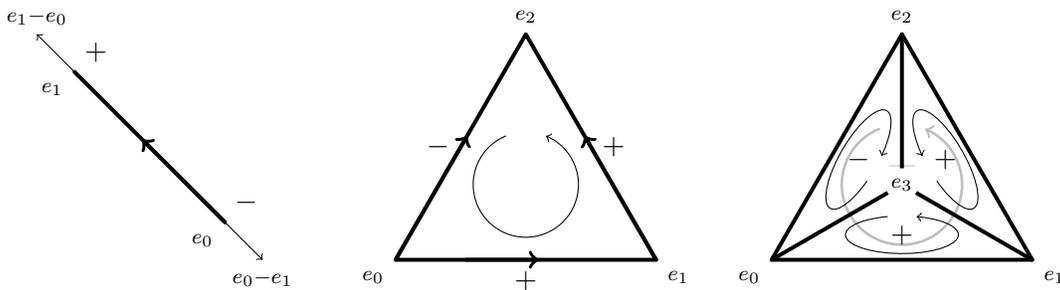
$$(\delta_i \circ S_k f)(\sigma) = f \circ \sigma \circ \iota_i = (S_{k-1} f \circ \delta_i)(\sigma).$$

Wir haben also einen Funktor  $S_\bullet$  von der Kategorie  $\mathcal{Top}$  in die Kategorie der semisimplizialen Mengen definiert.

Zur Motivation der folgenden Definition orientieren wir die affine Hyperebene

$$H^k = \left\{ t = (t_0, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \sum_{i=0}^k t_i = 1 \right\}$$

durch Angabe einer Basis  $(e_1 - e_0, \dots, e_k - e_0)$  der parallelen linearen Hyperebene  $L^k$ . Auf dem affinen Unterraum  $H_i^k \subset H^k$ , der die  $i$ -te Seite im  $\iota_i$  von  $\Delta^k$  enthält, liefert die Linearisierung (Ableitung)  $d\iota_i$  die Basis  $(e_1 - e_0, \dots, \widehat{e_i - e_0}, \dots, e_k - e_0)$  des zugehörigen linearen Unterraums  $L_i^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ , wobei das Dach hier „Weglassen“ bedeutet. Wenn das Voranstellen eines auswärts weisenden Vektors  $e_j - e_i$  mit  $j \neq i$  eine positiv orientierte Basis von  $L_i^k$  ergibt, nennen wir im  $\iota_i$  positiv orientiert, ansonsten negativ orientiert. Man überzeugt sich, dass im  $\iota_i$  genau dann positiv orientiert ist, wenn  $i$  gerade ist, wenn also  $(-1)^i = +1$  gilt.



Die folgende Konstruktion funktioniert analog für alle semisimplizialen Mengen, wir betrachten sie hier aber nur für  $S_\bullet(X)$ . Im Folgenden sei stets  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins und  $M \in \text{Mod}_R$  ein unitärer  $R$ -Modul.

3.37. DEFINITION. Der (*simpliziale*) *singuläre Kettenkomplex*  $(C_\bullet(X; M), \partial_\bullet)$  eines topologischen Raumes  $X$  über  $R$  mit Koeffizienten  $M$  ist definiert durch

$$C_k(X; M) = \bigoplus_{\sigma \in S_k(X)} M \cdot \sigma = \left\{ \sum_{\sigma \in S_k(X)} m_\sigma \cdot \sigma \mid m_\sigma \in M, \text{ fast alle } m_\sigma = 0 \right\}$$

für  $k \geq 0$  und  $C_k(X; M) = 0$  für  $k < 0$ , mit dem *simplizialen Randoperator*

$$\partial_k \sum_{\sigma \in S_k(X)} m_\sigma \cdot \sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sum_{\sigma \in S_k(X)} m_\sigma \cdot \delta_i \sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sum_{\sigma \in S_k(X)} m_\sigma \cdot (\sigma \circ \iota_i) \in C_{k-1}(X; M)$$

für  $k \geq 1$  und  $\partial_k = 0$  für  $k < 0$ . Sei  $f: X \rightarrow Y$ , dann definieren wir  $f_\#: C_\bullet(X; M) \rightarrow C_\bullet(Y; M)$  durch

$$f_{\#k} \sum_{\sigma \in S_k(X)} m_\sigma \cdot \sigma = \sum_{\sigma \in S_k(X)} m_\sigma \cdot S_k f(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_k(X)} m_\sigma \cdot (f \circ \sigma) \in C_k(Y; M).$$

Die Homologie des obigen Kettenkomplexes heißt (*simpliziale*) *singuläre Homologie*  $H_\bullet(X; M)$  von  $X$  mit Koeffizienten  $M$ , und die von  $f_\#$  induzierte Abbildung bezeichnen wir mit

$$f_* = H_\bullet f: H_\bullet(X; M) \rightarrow H_\bullet(Y; M).$$

Falls  $R = M = \mathbb{Z}$ , schreibt man auch kurz  $H_\bullet(X)$  für  $H_\bullet(X; \mathbb{Z})$  und spricht von den (*simplizialen, singulären*) *Homologiegruppen* von  $X$ , denn nach Beispiel 3.3 (2) sind  $\mathbb{Z}$ -Moduln ja nichts weiter als abelsche Gruppen.

3.38. PROPOSITION. *Die obige Konstruktion liefert Funktoren*

$$C_\bullet(\cdot; M): \text{Top} \rightarrow \text{Ch}_R \quad \text{und} \quad H_k(\cdot; M): \text{Top} \rightarrow \text{Mod}_R.$$

BEWEIS. Wir zeigen zuerst, dass  $C_\bullet(X; M)$  ein Kettenkomplex ist, das heißt, dass  $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Da  $\partial_0 = \partial_{-1} = \dots = 0$ , dürfen wir  $k \geq 1$  annehmen. Mit Bemerkung 3.36 berechnen wir

$$\begin{aligned} \partial_k \circ \partial_{k+1}(m \cdot \sigma) &= \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} m \cdot \delta_j \delta_i \sigma + \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{j=i}^k (-1)^{i+j} m \cdot \delta_j \delta_i \sigma \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j} m \cdot \delta_i \delta_j \sigma + \sum_{i=0}^k \sum_{j=i}^k (-1)^{i+j} m \cdot \delta_i \delta_{j+1} \sigma \\ &= \sum_{0 \leq i \leq j \leq k} (-1)^{i+j+1} m \cdot \delta_i \delta_{j+1} \sigma + \sum_{0 \leq i \leq j \leq k} (-1)^{i+j} m \cdot \delta_i \delta_{j+1} \sigma = 0. \end{aligned}$$

Die Abbildungen  $f_\#$  sind Kettenabbildungen, denn

$$(\partial_k \circ f_{\#k})(m \cdot \sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)^i m \cdot (f \circ \sigma \circ \iota_i) = (f_{\#k-1} \circ \partial_k)(m \cdot \sigma).$$

Außerdem ist  $\text{id}_\# = \text{id}$  und

$$(f \circ g)_{\#k}(m \cdot \sigma) = m \cdot (f \circ g \circ \sigma) = (f_{\#k} \circ g_{\#k})(m \cdot \sigma),$$

also ist  $C_\bullet(\cdot; M)$  ein Funktor.

Da das Bilden der Homologie eines Kettenkomplexes ein Funktor ist, ist  $H_k(\cdot; M) = H_k \circ C_\bullet(\cdot; M): \text{Top} \rightarrow \text{Mod}_R$  ebenfalls ein Funktor für alle  $k$ .  $\square$

3.39. BEISPIEL. Der einzige Raum, für den wir  $H_\bullet(X; M)$  direkt anhand der Definition ausrechnen werden, ist der einpunktige Raum  $X = \{*\}$ . Offenbar gilt  $S_k(X) = \{\sigma_k\}$  für alle  $k \geq 0$ , wobei  $\sigma_k: \Delta^k \rightarrow X$  den konstanten Simplex bezeichnen. Es folgt  $\delta_i \sigma_k = \sigma_{k-1}$  und

$$\partial_k(m\sigma_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i m\sigma_{k-1} = \begin{cases} m\sigma_{k-1} & \text{falls } k \text{ gerade ist, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also erhalten wir den unreduzierten Komplex

$$0 \longleftarrow M \xleftarrow{0} M \xleftarrow{\text{id}} M \xleftarrow{0} M \longleftarrow \dots$$

Für  $k > 0$  gerade ist  $\ker d_k = \text{im } d_k = \text{im } d_{k+1} = 0$ , für  $k > 0$  ungerade gilt  $\ker d_k = \text{im } d_{k+1} = M$ , also erhalten wir

$$H_k(\{*\}; M) = \begin{cases} M & \text{für } k = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Später werden wir sehen, dass dieses Ergebnis dem Dimensionsaxiom 3.12 (4) für die reduzierte Homologie entspricht.

### 3.5. Eigenschaften der singulären Homologie

In diesem Abschnitt beweisen wir Aussagen, die zu den Eilenberg-Steenrod-Axiomen 3.12 (1)–(3) analog sind. Mit ihrer Hilfe zeigen wir später, dass die reduzierte singuläre Homologie eine reduzierte Homologietheorie im Sinne dieser Axiome ist.

Das folgende Resultat wird das Summenaxiom (3) implizieren. Wir schreiben einen topologischen Raum  $X$  als disjunkte Vereinigung seiner Wegzusammenhangskomponenten. Man beachte, dass  $X$  im allgemeinen nicht die Summentopologie trägt.

3.40. SATZ. Sei  $X$  ein topologischer Raum, und sei  $(X_i)_{i \in I}$  die Familie seiner Wegzusammenhangskomponenten.

(1) Dann induzieren die Inklusionen  $\iota_i: X_i \rightarrow X$  natürliche Isomorphismen

$$H_\bullet(X; M) = \bigoplus_{i \in I} H_\bullet(X_i; M).$$

(2) Es gilt

$$H_0(X; M) \cong \bigoplus_{i \in I} M.$$

BEWEIS. Da  $\Delta^k$  zusammenhängend ist, verläuft jeder Simplex  $\sigma \in S_k(X)$  ganz in einer Wegzusammenhangskomponente  $X_i$  von  $X$  nach Satz 1.67 (1). Jede Seite von  $\Delta^k$  liegt dann ebenfalls in  $X_i$ . Es folgt

$$\mathcal{S}_\bullet(X) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{S}_\bullet(X_i), \quad (C_\bullet(X; M), \partial_\bullet) = \bigoplus_{i \in I} (C_\bullet(X_i; M), \partial_\bullet) \quad \text{und} \quad H_\bullet(X; M) = \bigoplus_{i \in I} H_\bullet(X_i; M),$$

da  $\partial$  auf jedem Summand separat operiert, also gilt (1).

Zu (2) reicht es nach (1), nur wegzusammenhängende topologische Räume zu betrachten. Sei also  $X$  wegzusammenhängend und nicht leer, dann ist  $S_0(X)$  genau die Menge der Punkte von  $X$ . Wir identifizieren 1-Simplizes  $\sigma: \Delta^1 \rightarrow X$  mit Wegen  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  via

$$\gamma(t) = \sigma(1-t, t) \quad \text{und} \quad \sigma(t_0, t_1) = \gamma(t_1),$$

so dass  $\delta_0 \gamma = \sigma(0, 1) = \gamma(1)$  und  $\delta_1 \gamma = \sigma(1, 0) = \gamma(0)$ .

Wie in Bemerkung 3.34 (2) gibt es eine Augmentierung

$$\varepsilon: C_0(X; M) \rightarrow M \quad \text{mit} \quad \sum_{x \in S_0(X)} m_x x \mapsto \sum_{x \in S_0(X)} m_x \in M .$$

Für jeden Weg  $\gamma$  folgt

$$\varepsilon(\partial(m\gamma)) = \varepsilon(m\gamma(1) - m\gamma(0)) = 0 ,$$

also induziert  $\varepsilon$  eine Abbildung  $\varepsilon_*: H_0(X; M) = C_0(X; M)/\text{im } \partial_1 \rightarrow M$ , denn da  $\partial_0 = 0$  gilt, erhalten wir  $Z_0(X; M) = \ker \partial_0 = C_0(X; M)$ . Sei jetzt  $c = \sum_{i=1}^N m_i x_i \in C_0(X; M)$ , sei  $x_0 \in X$  fest, und sei  $\gamma_i$  ein Weg von  $x_0$  nach  $x_i$ , dann folgt

$$c = \sum_{i=1}^N (m_i \partial \gamma_i + m_i x_0) = \varepsilon(c) x_0 + \partial \sum_{i=1}^N m_i \gamma_i ,$$

also ist  $\varepsilon_*$  der gesuchte Isomorphismus.  $\square$

Als nächstes definieren wir die singuläre Homologie eines Paares, um eine lange exakte Sequenz in Analogie zum Axiom 3.12 (2) zu erhalten. Sei also  $(X, A)$  ein beliebiges Paar topologischer Räume. Die Inklusionsabbildung  $\iota: A \hookrightarrow X$  induziert eine injektive Kettenabbildung

$$\iota_{\#}: (C_{\bullet}(A; M), \partial_{\bullet}) \hookrightarrow (C_{\bullet}(X; M), \partial_{\bullet}) .$$

Also erhalten wir auf den Quotienten  $C_k(X; M)/C_k(A; M)$  wohldefinierte Randoperatoren  $\bar{\partial}_k$ , da Ketten in  $C_k(A; M)$  auf Ketten in  $C_{k-1}(A; M)$  abgebildet werden. Außerdem induziert jede Abbildung  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine wohldefinierte Kettenabbildung  $\bar{f}_{\#}: C_k(X; M)/C_k(A; M) \rightarrow C_k(Y; M)/C_k(B; M)$ .

3.41. DEFINITION. Die *singuläre Homologie* des Paares  $(X, A)$  über  $R$  mit Koeffizienten  $M$ , auch *relative Homologie* genannt, ist definiert als

$$H_{\bullet}(X, A; M) = H_{\bullet}(C_{\bullet}(X; M)/C_{\bullet}(A; M), \bar{\partial}_{\bullet}) ,$$

und für jede Abbildung  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  von Paaren schreiben wir die induzierten Abbildungen als

$$f_{*k}: H_k(X, A; M) \rightarrow H_k(Y, B; M) .$$

3.42. BEMERKUNG. Wie im Beweis von Proposition 3.38 erhalten wir einen Funktor  $C_{\bullet}$  von der Kategorie der Paare in die Kategorie  $\mathcal{Ch}_R$ , und damit auch eine Folge von Funktoren  $H_k$  in die Kategorie  $\text{Mod}_R$ .

3.43. SATZ. *Zu jedem Paar  $(X, A)$  topologischer Räume existiert eine lange exakte Sequenz*

$$\dots \longleftarrow H_k(X, A; M) \longleftarrow H_k(X; M) \longleftarrow H_k(A; M) \xleftarrow{\partial_{k+1}} H_{k+1}(X, A; M) \longleftarrow \dots$$

*Die Randabbildung (der Verbindungshomomorphismus)  $\partial$  ist natürlich.*

Natürlichkeit bedeutet hier das gleiche wie bei den Eilenberg-Steenrod-Axiomen in Definition 3.12.

BEWEIS. Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem folgenden Lemma, angewandt auf die kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \longleftarrow C_{\bullet}(X; M)/C_{\bullet}(A; M) \longleftarrow C_{\bullet}(X; M) \longleftarrow C_{\bullet}(A; M) \longleftarrow 0 . \quad \square$$

3.44. LEMMA (Schlangenlemma). *Es seien  $(C_\bullet, d_\bullet)$ ,  $(C'_\bullet, d'_\bullet)$  und  $(C''_\bullet, d''_\bullet)$  Kettenkomplexe, und es seien  $f_\bullet: C''_\bullet \rightarrow C_\bullet$  und  $g_\bullet: C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$  Kettenabbildungen vom Grad 0, so dass die folgenden kurzen Sequenzen exakt sind:*

$$0 \longleftarrow C'_\bullet \xleftarrow{g_\bullet} C_\bullet \xleftarrow{f_\bullet} C''_\bullet \longleftarrow 0$$

*Dann existieren natürliche Verbindungshomomorphismen  $\partial_k: H_k(C'_\bullet, d'_\bullet) \rightarrow H_{k-1}(C''_\bullet, d''_\bullet)$ , so dass die folgende lange Sequenz exakt ist.*

$$\dots \longleftarrow H_k(C'_\bullet, d'_\bullet) \xleftarrow{g_{*k}} H_k(C_\bullet, d_\bullet) \xleftarrow{f_{*k}} H_k(C''_\bullet, d''_\bullet) \xleftarrow{\partial_{k+1}} H_{k+1}(C'_\bullet, d'_\bullet) \longleftarrow \dots$$

Natürlichkeit bedeutet hier, dass ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & C'_\bullet & \xleftarrow{g_\bullet} & C_\bullet & \xleftarrow{f_\bullet} & C''_\bullet & \longleftarrow & 0 \\ & & \ell'_\bullet \downarrow & & \ell_\bullet \downarrow & & \ell''_\bullet \downarrow & & \\ 0 & \longleftarrow & D'_\bullet & \xleftarrow{j_\bullet} & D_\bullet & \xleftarrow{i_\bullet} & D''_\bullet & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

aus kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen zu einem kommutativen Diagramm der Homologiemoduln führt.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longleftarrow & H_k(C'_\bullet, d'_\bullet) & \xleftarrow{g_{*k}} & H_k(C_\bullet, d_\bullet) & \xleftarrow{f_{*k}} & H_k(C''_\bullet, d''_\bullet) & \xleftarrow{\partial_{k+1}} & H_{k+1}(C'_\bullet, d'_\bullet) & \longleftarrow & \dots \\ & & \ell'_{*k} \downarrow & & \ell_{*k} \downarrow & & \ell''_{*k} \downarrow & & \ell'_{*(k+1)} \downarrow & & \\ \dots & \longleftarrow & H_k(D'_\bullet, d'_\bullet) & \xleftarrow{j_{*k}} & H_k(D_\bullet, d_\bullet) & \xleftarrow{i_{*k}} & H_k(D''_\bullet, d''_\bullet) & \xleftarrow{\partial_{k+1}} & H_{k+1}(D'_\bullet, d'_\bullet) & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

BEWEIS. Der Beweis wird mittels „Diagrammjagd“ geführt. Dazu zeichnen wir ein großes kommutatives Diagramm mit bestimmten Eigenschaften, starten an einer bestimmten Stelle mit einem bestimmten Element und konstruieren sukzessive Bilder und Urbilder, bis wir an einer anderen Stelle im Diagramm ein anderes Element mit bestimmten Eigenschaften finden. In unserem konkreten Fall hat das kommutative Diagramm exakte Zeilen, und die Spalten sind Kettenkomplexe.

$$\begin{array}{ccccccc} & & C'_{k+1} & \xleftarrow{g_{k+1}} & C_{k+1} & & \\ & & \downarrow d'_{k+1} & \cdots & \downarrow d_{k+1} & \cdots & \\ 0 & \longleftarrow & C'_k & \xleftarrow{g_k} & C_k & \xleftarrow{f_k} & C''_k & \longleftarrow & 0 \\ & & \downarrow d'_k & \cdots & \downarrow d_k & \cdots & \downarrow d''_k & & \\ 0 & \longleftarrow & C'_{k-1} & \xleftarrow{g_{k-1}} & C_{k-1} & \xleftarrow{f_{k-1}} & C''_{k-1} & \longleftarrow & 0 \\ & & \downarrow d'_{k-1} & \cdots & \downarrow d_{k-1} & \cdots & \downarrow d''_{k-1} & & \\ & & & & C_{k-2} & \xleftarrow{f_{k-2}} & C''_{k-2} & & \end{array}$$

Die gestrichelten Pfeile deuten die Verbindungshomomorphismen an, die wir jetzt konstruieren wollen. Die Form dieser Pfeile gibt dem Lemma seinen Namen.

Zur Konstruktion von  $\partial_k: H_k(C'_\bullet, d'_\bullet) \rightarrow H_{k-1}(C''_\bullet, d''_\bullet)$  repräsentieren wir  $[a] \in H_k(C'_\bullet, d'_\bullet) = \ker d'_k / \text{im } d'_{k+1}$  durch einen Zykel  $a \in \ker d'_k \subset C'_k$ . Wegen der Surjektivität von  $g_k$  existiert  $b \in C_k$  mit  $g_k(b) = a$ . Es folgt  $d_k(b) \in \ker g_{k-1}$ , da

$$g_{k-1}(d_k(b)) = d'_k(g_k(b)) = d'_k(a) = 0.$$

Wegen der Exaktheit bei  $C_{k-1}$  folgt  $d_k(b) \in \text{im } f_{k-1}$ . Wegen der Injektivität von  $f_{k-1}$  existiert genau ein  $c \in C''_{k-1}$  mit  $f_{k-1}(c) = d_k(b)$ . Wir definieren

$$\partial_k[a] = [c] \in H_{k-1}(C''_\bullet, d''_\bullet).$$

Zur Wohldefiniertheit von  $\partial_k$  sind drei Dinge zu prüfen: Das Element  $c$  muss ein Zykel sein, und seine Homologiekategorie  $[c]$  darf weder von der Wahl von  $a \in [a]$  noch von der Wahl von  $b \in g_k^{-1}(a)$  abhängen.

Wir überlegen uns zunächst, dass

$$f_{k-2}(d''_{k-1}(c)) = d_{k-1}(f_{k-1}(c)) = d_{k-1}(d_k(b)) = 0.$$

Da  $f_{k-2}$  injektiv ist, folgt daraus  $d''_{k-1}(c) = 0$ , also ist  $c \in Z_{k-1}(C''_\bullet, d''_\bullet) = \ker d''_{k-1}$ .

$$\begin{array}{ccccccc} & & g_{k+1} & & & & \\ & & \longleftarrow & & \longrightarrow & & \\ & & q & & r & & \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ & \downarrow & d'_{k+1} & & d_{k+1} & & \downarrow \\ & a & \xleftarrow{g_k} & b & \xleftarrow{f_k} & p & \\ & \downarrow & d'_k & & d_k & & \downarrow \\ & 0 & \xleftarrow{g_{k-1}} & * & \xleftarrow{f_{k-1}} & c & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & d_{k-1} & & d''_{k-1} & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & 0 & \xleftarrow{f_{k-2}} & 0 & \end{array}$$

Nun zur Wahl von  $b$ . Es sei  $b' \in C_k$  ein weiteres Urbild von  $a$ , so dass  $b' - b \in \ker g_k = \text{im } f_k$ . Also wählen wir  $p \in C''_k$ , so dass  $b' = b + f_k(p)$ . Es folgt

$$d_k(b') = d_k(b) + d_k(f_k(p)) = f_{k-1}(c) + f_{k-1}(d''_k(p)) = f_{k-1}(c')$$

für  $c' = c + d''_k(p)$ . Insbesondere liegen  $c$  und  $c'$  in der gleichen Homologiekategorie. Also ist  $\partial_k[a]$  unabhängig von der Wahl von  $b$ .

Schließlich ersetzen wir  $a \in [a]$  durch  $a' = a + d_{k+1}(q)$  für ein  $q \in C'_{k+1}$ . Wegen der Surjektivität von  $g_{k+1}$  finden wir  $r \in C_{k+1}$  mit  $g_{k+1}(r) = q$ . Also gilt

$$a' = a + d_{k+1}(g_{k+1}(r)) = g_k(b) + g_k(d_{k+1}(r)) = g_k(b + d_{k+1}(r)) = g_k(b')$$

mit  $b' = b + d_{k+1}(r)$ . Aber dann gilt

$$d_k(b') = d_k(b + d_{k+1}(r)) = d_k(b) = f_{k-1}(c),$$

das heißt, der Zykel  $c$  und damit auch die Homologiekategorie  $\partial_k[a] = [c]$  hängen nicht von der Wahl des Repräsentanten  $a$  von  $[a]$  ab.

Nun zur Natürlichkeit von  $\partial_k$ . Seien  $\ell'_\bullet: C'_\bullet \rightarrow D'_\bullet$ ,  $\ell_\bullet: C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  und  $\ell''_\bullet: C''_\bullet \rightarrow D''_\bullet$  Kettenabbildungen wie im Diagramm im Anschluss an das Lemma, und  $a \in \ker d'_k$  wie oben. Wir wählen  $b \in C_k$  und  $c \in C''_{k-1}$  wie oben, so dass  $\partial_k[a] = [c]$ . Um  $\partial_k(\ell'_{*k}[a])$  zu konstruieren, wählen wir  $\ell'_k(a) \in \ell'_{*k}[a]$ , dann gilt

$$j_k(\ell'_k(a)) = \ell'_k(g_k(b)) = \ell'_k(a)$$

und entsprechend

$$i_{k-1}(\ell''_{k-1}(c)) = \ell_{k-1}(f_{k-1}(c)) = \ell_{k-1}(d_k(b)) = d_k(\ell_k(b)),$$

so dass unsere obige Definition also

$$\partial_k(\ell'_{*k}[a]) = [\ell''_{k-1}(c)] = \ell''_{*(k-1)}[c] = \ell''_{*(k-1)}(\partial_k[a])$$

liefert. Somit ist  $\partial_k$  eine natürliche Transformation.

Es bleibt die Exaktheit der langen Homologiesequenz zu zeigen. Wir führen hier exemplarisch Exaktheit an der Stelle  $H_k(C'_\bullet, d'_\bullet)$  vor, die anderen Stellen lassen wir als Übung 3.141.

Zu zeigen ist also  $\ker \partial_k = \text{im } g_{k*} \subset H_k(C'_\bullet, d'_\bullet)$ . Zunächst ist  $\ker \partial_k \supset \text{im } g_{k*}$  äquivalent zu  $\partial_k \circ g_{k*} = 0$ . Es sei  $[e] \in H_k(C'_\bullet, d'_\bullet)$  repräsentiert durch  $e \in \ker d_k$  und  $[a] = g_{k*}[e]$  repräsentiert durch  $a = g_k(e)$ . Wir können also  $b = e$  wählen und erhalten insbesondere

$$d_k(b) = 0 = f_{k-1}(0),$$

so dass  $\partial_k[a] = 0$ . Es folgt  $\ker \partial_k \supset \text{im } g_{k*}$ .

Sei umgekehrt  $[a] \in \ker \partial_k$ , dann wählen wir wieder  $b \in C_k$  und  $c \in C''_{k-1}$  wie oben. Da  $[c] = \partial_k[a] = 0$ , existiert  $p \in C''_k$  mit  $c = d''_k p$ . Dann gilt

$$g_k(b - f_k(p)) = g_k(b) = a \quad \text{und} \quad d_k(b - f_k(p)) = f_{k-1}(c) - f_{k-1}(d''_k p) = 0.$$

Also haben wir einen Zykel  $e = b - f_k(p) \in \ker d_k$  mit  $g_k(e) = a$ , also  $[a] = g_{*k}[e]$  gefunden, und es folgt  $\ker \partial_k \subset \text{im } g_{*k}$ .  $\square$

Als nächstes wollen wir die Homotopieinvarianz der Homologie beweisen. Dazu formulieren wir erst einen analogen algebraischen Begriff für Kettenkomplexe und -abbildungen. Danach überlegen wir uns, dass jede Homotopie  $H$  von Abbildungen  $f, g: X \rightarrow Y$  eine Kettenhomotopie  $h$  zwischen  $f_\#$  und  $g_\#: C_\bullet(X; M) \rightarrow C_\bullet(Y; M)$  induziert, so dass schließlich  $f_* = g_*: H_\bullet(X; M) \rightarrow H_\bullet(Y; M)$ .

3.45. DEFINITION. Es seien  $(C_\bullet, d_\bullet)$  und  $(D_\bullet, d_\bullet)$  Kettenkomplexe über  $R$  und  $f, g: (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (D_\bullet, d_\bullet)$  Kettenabbildungen vom Grad  $a$ . Eine *Kettenhomotopie* zwischen  $f$  und  $g$  ist eine  $R$ -lineare Abbildung  $h_\bullet: C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  vom Grad  $a + 1$ , so dass

$$g_k - f_k = h_{k-1} \circ d_k + d_{k+a+1} \circ h_k: C_k \rightarrow D_{k+a}$$

für alle  $k$ . Zwei Kettenabbildungen heißen *kettenhomotop*, wenn eine Kettenhomotopie zwischen ihnen existiert.

Man beachte, dass Kettenhomotopien normalerweise keine Kettenabbildungen sind.

3.46. PROPOSITION. *Kettenhomotope Abbildungen induzieren gleiche Abbildungen zwischen den Homologiemoduln.*

BEWEIS. Es sei  $f, g, h$  wie in Definition 3.45, und es sei  $a \in \ker d_k$ , dann folgt

$$g_k(a) - f_k(a) = h_{k-1} \underbrace{(d_k a)}_{=0} + d_{k+a+1}(h_k(a)) \in \text{im } d_{k+a+1},$$

und daher gilt

$$g_{k*}[a] - f_{k*}[a] = 0 \in H_{k+a}(D_\bullet, d_\bullet). \quad \square$$

3.47. BEMERKUNG. Wir können jetzt analog zu Abschnitt 2.1 zeigen, dass Kettenhomotopie eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Kettenabbildungen zwischen zwei Komplexen definiert. Diese Äquivalenzrelation ist mit der Verkettung von Kettenabbildungen verträglich, und wir können eine Kategorie  $\mathcal{HCh}_R$  der Kettenkomplexe über  $R$  mit Kettenabbildungen bis auf Kettenhomotopie definieren. Nach Proposition 3.46 faktorisieren die Homologie-Funktoren

$$H_k: \mathcal{Ch}_R \rightarrow \mathcal{HCh}_R \rightarrow \text{Mod}_R.$$

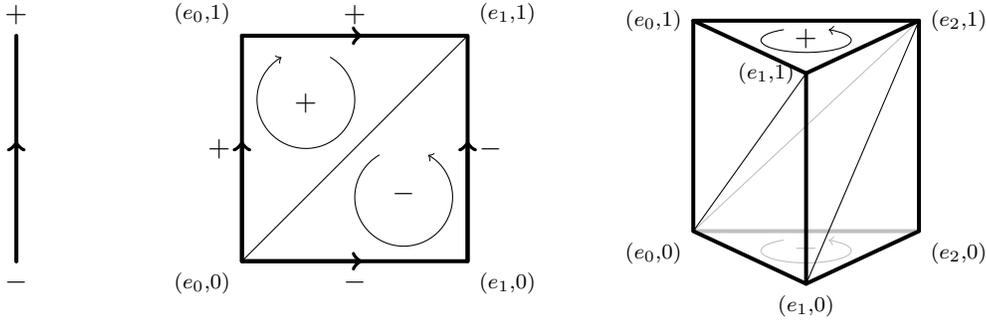
Isomorphismen in  $\mathcal{HCh}_R$  werden durch Kettenabbildungen  $f_\bullet: (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (D_\bullet, d_\bullet)$  repräsentiert, für die ein Kettenhomotopieinverses  $g_\bullet: (D_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C_\bullet, d_\bullet)$  existiert, das heißt  $g_\bullet \circ f_\bullet \sim \text{id}_{C_\bullet}$  und  $f_\bullet \circ g_\bullet \sim \text{id}_{D_\bullet}$ . Solche Abbildungen nennen wir *Kettenhomotopieäquivalenzen*.

Wir wollen jetzt aus einer Homotopie  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine Kettenhomotopie  $h: C_\bullet(X; M) \rightarrow C_\bullet(Y; M)$  konstruieren. Sei zunächst  $\sigma: \Delta^k \rightarrow X$  ein singuläres  $k$ -Simplex, dann ist aufgrund der universellen Eigenschaft 1.47 (2) des Produkts die Abbildung  $\sigma \times \text{id}: \Delta^k \times [0, 1] \rightarrow X \times [0, 1]$  stetig, und wir erhalten „singuläre Prismen“  $H \circ (\sigma \times \text{id}): \Delta^k \times [0, 1] \rightarrow Y$ . Indem wir  $\Delta^k \times [0, 1]$  geeignet in Simplizes zerlegen, können wir  $m\sigma \in C_k(X; M)$  eine  $(k+1)$ -Kette  $h(m\sigma)$  in  $C_{k+1}(Y; M)$  zuordnen. Betrachte dazu affine Abbildungen  $\pi_i^{k+1}: \Delta^{k+1} \rightarrow \Delta^k \times [0, 1]$  für  $0 \leq i \leq k$ , die die Ecken  $e_0, \dots, e_{k+1}$  von  $\Delta^{k+1} \subset \mathbb{R}^{k+2}$  auf  $(e_0, 0), \dots, (e_i, 0), (e_i, 1), \dots, (e_k, 1) \in \Delta^k \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^{k+2}$  abbilden.

3.48. BEMERKUNG. Zu  $(k+1)$  Punkten  $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  für  $k, n$  beliebig existiert genau eine affine Abbildung  $f: \Delta^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $f(e_i) = v_i$  für alle  $i = 0, \dots, k$ . Sie wird gegeben durch

$$f(t_0, \dots, t_k) = \sum_{i=0}^k t_i v_i.$$

Man nennt die Zahlen  $(t_0, \dots, t_k)$  auch die *baryzentrischen Koordinaten* des affinen Simplexes  $f$ . Aufgrund der Eindeutigkeit ist insbesondere  $f \circ \iota_j: \Delta^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Abbildung, die  $e_0, \dots, e_{k-1}$  auf  $v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k$  abbildet.



Aus dieser Bemerkung ergibt sich folgende Formel für die Seiten

$$(\pi_i^{k+1} \circ \iota_j)(t_0, \dots, t_k) = \pi_i^{k+1}(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_k)$$

des affinen  $(k+1)$ -Simplexes  $\pi_i^{k+1}: \Delta^{k+1} \rightarrow \Delta^k \times [0, 1]$ . Für  $j < i$  ist  $\pi_i^{k+1} \circ \iota_j$  der Simplex mit den Ecken  $(e_0, 0), \dots, (\widehat{e_j}, 0), \dots, (e_i, 0), (e_i, 1), \dots, (e_k, 1)$ , und das entspricht gerade  $(\iota_i \times \text{id}) \circ \pi_{i-1}^k: \Delta^k \rightarrow \Delta^k \times [0, 1]$ . Für  $j > i+1$  gilt entsprechend  $\pi_i^{k+1} \circ \iota_j = (\iota_{j-1} \times \text{id}) \circ \pi_i^k$ . Schließlich haben  $\pi_i^{k+1} \circ \iota_i$  und  $\pi_{i-1}^{k+1} \circ \iota_i$  die gleichen Ecken, nämlich  $(e_0, 0), \dots, (e_{i-1}, 0), (e_i, 1), \dots, (e_k, 1)$ . Indem wir in der letzten Überlegung  $i$  und  $j$  durch  $i+1$  ersetzen, erhalten wir umgekehrt eine Formel für  $\pi_i^{k+1} \circ \iota_{i+1}$ . Wir fassen zusammen:

$$\pi_i^{k+1} \circ \iota_j = \begin{cases} (\iota_j \times \text{id}) \circ \pi_{i-1}^k & \text{für } j < i, \\ \pi_{i-1}^{k+1} \circ \iota_i & \text{für } j = i, \\ \pi_{i+1}^{k+1} \circ \iota_{i+1} & \text{für } j = i+1, \text{ und} \\ (\iota_{j-1} \times \text{id}) \circ \pi_i^k & \text{für } j > i+1. \end{cases}$$

3.49. SATZ. Jede Homotopie  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  zwischen stetigen Abbildungen  $f, g: X \rightarrow Y$  induziert eine Kettenhomotopie  $h: C_\bullet(X; M) \rightarrow C_\bullet(Y; M)$  zwischen  $f_\#$  und  $g_\#: C_\bullet(X; M) \rightarrow$

$C_\bullet(Y; M)$  mit

$$h(m\sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)^i m \cdot (H \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \pi_i^{k+1}) \in C_{k+1}(Y; M) \quad (1)$$

für alle  $m \in M$  und  $\sigma \in S_k(X)$ . Für homotope Abbildungen  $f$  und  $g: X \rightarrow Y$  folgt insbesondere

$$f_{*k} = g_{*k}: H_k(X; M) \rightarrow H_k(Y, M) . \quad (2)$$

BEWEIS. Mit Hilfe unserer Vorüberlegungen berechnen wir

$$\begin{aligned} (\partial_{k+1} \circ h_k)(m\sigma) &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{i+j} m \cdot (H \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \pi_i^{k+1} \circ \iota_j) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} m \cdot (H \circ ((\sigma \circ \iota_j) \times \text{id}) \circ \pi_{i-1}^k) \\ &\quad + \sum_{i=0}^k \sum_{j=i+2}^{k+1} (-1)^{i+j} m \cdot (H \circ ((\sigma \circ \iota_{j-1}) \circ \text{id}) \circ \pi_i^k) \\ &\quad + \sum_{i=0}^k m \cdot (H \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \pi_i^{k+1} \circ \iota_i) - \sum_{i=0}^k m \cdot (H \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \pi_{i+1}^{k+1} \circ \iota_{i+1}) \\ &= - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} m \cdot (H \circ ((\sigma \circ \iota_j) \times \text{id}) \circ \pi_i^k) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k (-1)^{i+j} m \cdot (H \circ ((\sigma \circ \iota_j) \times \text{id}) \circ \pi_i^k) \\ &\quad + m \cdot (H \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \pi_0^{k+1} \circ \iota_0) - m \cdot (H \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \pi_{k+1}^{k+1} \circ \iota_{k+1}) \\ &= -(h_{k-1} \circ \partial_k)(m\sigma) + g_{\#k}(m\sigma) - f_{\#k}(m\sigma) , \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass  $\pi_0^{k+1} \circ \iota_0$  und  $\pi_{k+1}^{k+1} \circ \iota_{k+1}$  gerade die affinen Simplex mit den Ecken  $(e_0, 1), \dots, (e_k, 1)$  beziehungsweise  $(e_0, 0), \dots, (e_k, 0)$  in  $\Delta^k \times [0, 1]$  sind, und dass  $H(x, 1) = g(x)$  und  $H(x, 0) = f(x)$  für alle  $x \in X$ , so dass

$$H \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \pi_0^{k+1} \circ \iota_0 = g \circ \sigma \quad \text{und} \quad H \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \pi_{k+1}^{k+1} \circ \iota_{k+1} = f \circ \sigma .$$

Damit ist (1) bewiesen, und (2) folgt aus Proposition 3.46.  $\square$

Wir haben das Analogon zur Homotopieinvarianz 3.12 (1) bewiesen. Unter einer Homotopie zwischen Abbildungen  $f$  und  $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  von Paaren verstehen wir eine Homotopie  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  zwischen  $f$  und  $g$ , so dass

$$H(A \times [0, 1]) \subset B .$$

Im Gegensatz zur Definition 2.8 der relativen Homotopie fordern wir also nicht, dass  $H(a, t) = f(a) = g(a)$  unabhängig von  $t$  gilt.

3.50. FOLGERUNG. *Homotope Abbildungen  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  von Paaren induzieren*

$$f_* = g_*: H_\bullet(X, A; M) \rightarrow H_\bullet(Y, B; M) .$$

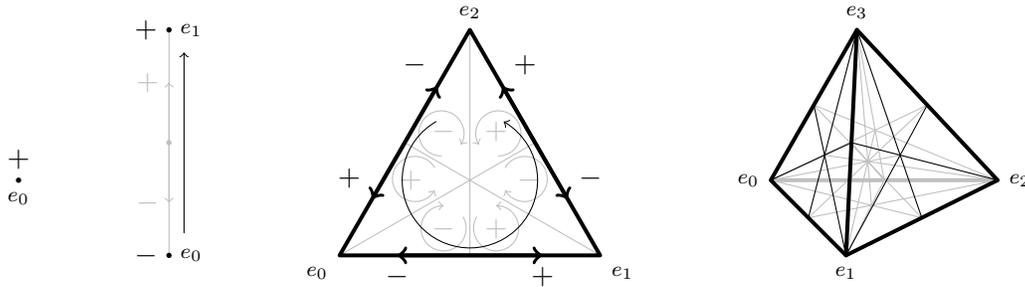
BEWEIS. Es sei  $m\sigma \in C_k(A; M)$  mit  $m \in M$  und  $\sigma \in S_k(A)$ . Nach Konstruktion von  $h_\bullet$  im obigen Beweis folgt  $h_k(m\sigma) \in C_{k+1}(B; M)$ . Also induziert  $h$  eine Abbildung

$$\begin{aligned} \bar{h}_k: C_k(X, A; M) &= C_k(X; M)/C_k(A, M) \\ &\rightarrow C_{k+1}(Y, B; M) = C_{k+1}(Y; M)/C_{k+1}(B; M). \end{aligned}$$

Da  $h_\bullet: C_\bullet(X; M) \rightarrow C_\bullet(Y; M)$  eine Kettenhomotopie ist, folgt

$$\bar{h}_{k-1} \circ \bar{\partial}_k + \bar{\partial}_{k+1} \circ \bar{h}_k = \bar{g}_{\#k} - \bar{f}_{\#k}. \quad \square$$

Zum Schluss dieses Abschnitts zeigen wir, dass die singuläre Homologie invariant unter Ausschneidung ist. Das bedeutet, dass  $H_\bullet(X, A; M) = H_\bullet(X \setminus B, A \setminus B; M)$  gilt, falls  $\bar{B} \subset \mathring{A}$ . Der entscheidende Schritt besteht darin, alle Homologieklassen in  $(X, A)$  durch Ketten zu repräsentieren, deren Simplizes entweder ganz in  $A$  liegen oder aber  $B$  nicht treffen. Zu diesem Zweck führen wir jetzt die baryzentrische Unterteilung ein, eine Technik, die es erlaubt, die Simplizes in einer Kette durch kleinere Simplizes zu ersetzen. Dabei verbindet man induktiv den Schwerpunkt (das *Baryzentrum*) eines affinen Simplexes mit der baryzentrischen Unterteilung seines Randes und achtet dabei auf die Orientierung der entstehenden neuen, kleineren Simplizes.



Wir konstruieren die baryzentrische Unterteilung in mehreren einzelnen Schritten.

- (1) Es sei  $p \in \mathbb{R}^n$  und  $\sigma: \Delta^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein affiner Simplex mit den Ecken  $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  wie in Bemerkung 3.48. Der *Kegel* von  $\sigma$  mit Spitze  $p$  ist der affine  $(k+1)$ -Simplex  $c_p\sigma: \Delta^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$  mit den Ecken  $p, v_0, \dots, v_k$ . Es folgt

$$\delta_0(c_p\sigma) = \sigma \quad \text{und} \quad \delta_{i+1}(c_p\sigma) = c_p(\delta_i\sigma).$$

- (2) Der *Kegel* einer Kette affiner Simplizes mit Spitze  $p$  ist gegeben durch

$$c_p \sum_{\sigma} \cdot \sigma = \sum_{\sigma} m_{\sigma} \cdot (c_p\sigma).$$

Aus (1) folgt

$$\partial_{k+1}(c_p \sum_{\sigma} m_{\sigma} \cdot \sigma) = \sum_{\sigma} m_{\sigma} \cdot \sigma + \sum_{i=0}^k \sum_{\sigma} (-1)^{i+1} m_{\sigma} \cdot (c_p(\delta_i\sigma)),$$

also kurz

$$\partial_{k+1} \circ c_p = \text{id} - c_p \circ \partial_k.$$

- (3) Wir definieren die baryzentrische Unterteilung eines affinen Simplexes  $\sigma: \Delta^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch Induktion über  $k$ . Für  $k=0$  und  $m \in M$  sei  $S_0(m\sigma) = m\sigma$ . Für  $k \geq 1$  sei  $p = \frac{1}{k+1}(v_0 + \dots + v_k)$  der Schwerpunkt von  $\sigma$ , wobei  $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  wieder die Ecken von  $\sigma$  seien. Wir definieren induktiv

$$S_k(m\sigma) = (c_p \circ S_{k-1} \circ \partial_k)(m\sigma).$$

Da  $\partial_0 = S_{-1} = 0$ , erhalten wir  $\partial_0 \circ S_0 = 0 = S_{-1} \circ \partial_0$ , und damit induktiv

$$\begin{aligned}\partial_k \circ S_k &= \partial_k \circ c_p \circ S_{k-1} \circ \partial_k = S_{k-1} \circ \partial_k - c_p \circ \partial_{k-1} \circ S_{k-1} \circ \partial_k \\ &= S_{k-1} \circ \partial_k - c_p \circ S_{k-2} \circ \partial_{k-1} \circ \partial_k = S_{k-1} \circ \partial_k ,\end{aligned}$$

also ist  $S_\bullet$  eine Kettenabbildung auf Ketten affiner Simplizes.

- (4) Wir konstruieren eine Kettenhomotopie  $T_\bullet$  zwischen der Identität und der baryzentrischen Unterteilung  $S_\bullet$  induktiv. Für  $k = 0$  setzen wir  $T_0 = 0$  und erhalten

$$\partial_1 \circ T_0 + T_{-1} \circ \partial_0 = 0 = S_0 - \text{id}$$

Für  $k \geq 1$  sei  $p$  wieder der Schwerpunkt von  $\sigma$  und  $T_k(m\sigma) = -c_p(m\sigma + (T_{k-1} \circ \partial_k)(m\sigma))$ . Dann folgt mit (2) und (3), dass

$$\begin{aligned}(\partial_{k+1} \circ T_k + T_{k-1} \circ \partial_k)(m\sigma) &= (T_{k-1} \circ \partial_k - (\partial_{k-1} \circ c_p)(\text{id} + T_{k-1} \circ \partial_k))(m\sigma) \\ &= (T_{k-1} \circ \partial_k + c_p \circ \partial_k - \text{id} + c_p \circ \partial_k \circ T_{k-1} \circ \partial_k - T_{k-1} \circ \partial_k)(m\sigma) \\ &= (c_p \circ \partial_k - \text{id} - c_p \circ T_{k-2} \circ \partial_{k-1} \circ \partial_k + \underbrace{c_p \circ S_{k-1} \circ \partial_k}_{=S_k} - c_p \circ \partial_k)(m\sigma) \\ &= (S_k - \text{id})(m\sigma) .\end{aligned}$$

Also ist  $T_\bullet$  die gesuchte Kettenhomotopie zwischen  $\text{id}$  und  $S$ .

- (5) Sei jetzt  $\sigma: \Delta^k \rightarrow X$  ein singulärer  $k$ -Simplex in  $X$ . Da ein singulärer Simplex in  $X$  keinen Schwerpunkt hat und wir in  $X$  auch keine Kegel bilden können, schreiben wir  $\sigma = \sigma \circ \text{id}_{\Delta^k}$  und dürfen  $m \cdot \sigma$  als  $\sigma_{\#}(m \cdot \text{id}_{\Delta^k})$  auffassen. Dabei ist  $\text{id}_{\Delta^k}: \Delta^k \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$  ein affiner Simplex wie oben. Wir definieren die baryzentrische Unterteilung  $S_\bullet$  und die Kettenhomotopien  $T_\bullet: C_\bullet(X; M) \rightarrow C_\bullet(X; M)$  durch

$$S_k(m\sigma) = \sigma_{\#k}(S_k(m \cdot \text{id}_{\Delta^k})) \quad \text{und} \quad T_k(m\sigma) = \sigma_{\#(k+1)}(T_k(m \cdot \text{id}_{\Delta^k})) .$$

Man überzeugt sich, dass diese Definitionen für affine Simplizes in  $\mathbb{R}^n$  mit den obigen übereinstimmen. Aus (3) und (4) folgt dann wieder

$$\partial_k \circ S_k = S_{k-1} \circ \partial_k \quad \text{und} \quad \partial_{k+1} \circ T_k + T_{k-1} \circ \partial_k = S_k - \text{id} .$$

- (6) Die baryzentrische Unterteilung  $S_\bullet$  und die obige Kettenhomotopie  $T_\bullet$  sind natürliche Transformationen  $C_\bullet(\cdot; M) \rightarrow C_\bullet(\cdot; M)$  vom Grad 0 beziehungsweise 1, das heißt, für jede stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  und alle  $k$  kommutieren die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_k(X; M) & \xrightarrow{f_{\#k}} & C_k(Y; M) & & C_k(X; M) & \xrightarrow{f_{\#k}} & C_k(Y; M) \\ s_\bullet \downarrow & & s_\bullet \downarrow & \text{und} & T_\bullet \downarrow & & T_\bullet \downarrow \\ C_k(X; M) & \xrightarrow{f_{\#k}} & C_k(Y; M) & & C_{k+1}(X; M) & \xrightarrow{f_{\#(k+1)}} & C_{k+1}(Y; M) .\end{array}$$

Die obigen Bilder zeigen, dass die Teilsimplizes der baryzentrischen Verfeinerung zwar kleiner als der ursprüngliche Simplex sind, aber eine andere Form bekommen. Das folgende Lemma zeigt, dass die Simplizes unabhängig von ihrer Form gleichmäßig kleiner werden. Mit dem Durchmesser eines affinen Simplexes  $\sigma$  meinen wir den maximalen euklidischen Abstand zweier Punkte im Kompaktum im  $\sigma$ .

3.51. LEMMA. *Sei  $\sigma: \Delta^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein affiner  $k$ -Simplex mit  $k \geq 1$ , dann ist der Durchmesser aller Simplizes in  $S_k\sigma$  höchstens der  $\frac{k}{k+1}$ -fache Durchmesser von  $\sigma$ .*

BEWEIS. In einem affinen Simplex ist der Durchmesser stets der Abstand zweier bestimmter Ecken. Sei  $\sigma'$  ein Simplex der baryzentrischen Unterteilung. Falls der Durchmesser von  $\sigma'$  durch zwei Punkte in  $\partial\sigma$  realisiert wird, folgt unsere Behauptung induktiv, da

$$\frac{k-1}{k} < \frac{k}{k+1}.$$

Ansonsten wird der Abstand realisiert durch eine Strecke vom Mittelpunkt von  $\sigma$  zu einem Punkt auf  $\partial\sigma$ . Seien  $(t_0, \dots, t_k)$  die baryzentrischen Koordinaten dieses Punktes. Wir beweisen das Lemma, indem wir zeigen, dass sich die Strecke über den Schwerpunkt hinaus um  $\frac{k+1}{k}$  innerhalb von  $\sigma$  verlängern lässt, denn dann ist das  $\frac{k+1}{k}$ -fache des Durchmessers von  $\sigma'$  nicht größer als der Durchmesser von  $\sigma$ . Der Endpunkt der Verlängerung in baryzentrischen Koordinaten ist

$$\frac{k+1}{k} \left( \frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{k} (t_0, \dots, t_k) = \left( \frac{1-t_0}{k}, \dots, \frac{1-t_k}{k} \right),$$

und da  $0 \leq 1 - t_i \leq k$ , liegt dieser Punkt in  $\sigma$ .  $\square$

3.52. SATZ (Ausschneidung). *Es seien  $A, B \subset X$  Teilmengen mit  $\bar{B} \subset \mathring{A}$ . Dann induziert die Inklusion  $\iota: X \setminus B \hookrightarrow X$  einen Isomorphismus*

$$\iota_*: H_\bullet(X \setminus B, A \setminus B; M) \rightarrow H_\bullet(X, A; M).$$

BEWEIS. Zur Surjektivität von  $\iota_*$  betrachten wir eine Klasse in  $H_k(X, A; M)$ , repräsentiert durch einen relativen  $k$ -Zykel

$$z = \sum_{\sigma \in S_k(X)} m_\sigma \cdot \sigma \quad \text{mod } C_k(A; M).$$

Für jeden Simplex  $\sigma: \Delta^k \rightarrow X$  mit  $m_\sigma \neq 0$  betrachte die offene Überdeckung

$$\Delta^k = \sigma^{-1}(\mathring{A}) \cup \sigma^{-1}(X \setminus \bar{B}).$$

Nach dem Satz 1.57 von Lebesgue existiert  $\varepsilon > 0$ , so dass jede Teilmenge von  $\Delta^k$  mit Durchmesser  $< \varepsilon$  in einer der beiden Teilmengen enthalten ist. Nach Lemma 3.51 gilt das insbesondere für alle Simplizes der  $N$ -ten baryzentrischen Unterteilung von  $\sigma$  für  $N$  hinreichend groß.

Da nur endlich viele  $m_\sigma \neq 0$  vorkommen, gibt es ein  $N$ , so dass alle Simplizes in  $S_k^N z$  je entweder ganz in  $X \setminus \bar{B}$  oder ganz in  $\mathring{A}$  liegen. Wir schreiben

$$S_k^N z = z' + z'' \in C_k(X \setminus \bar{B}; M) \cup C_k(\mathring{A}; M),$$

und aus den obigen Eigenschaften (3) und (5) folgt

$$dz' = d(S_k^N z) - dz'' = S_k^N(dz) - dz'' = -dz'' \in C_{k-1}(\mathring{A}; M) \subset C_{k-1}(A; M).$$

Also ist  $z'$  ein Zykel im relativen Komplex  $C_\bullet(X, A; M)$ , und die Surjektivität von  $\iota_*$  folgt aus

$$[z] = [S_k z] = \dots = [S_k^N z] = [z' + z''] = \iota_*[z'] \in H_\bullet(X, A; M).$$

Für die Injektivität sei  $z$  ein relativer Zykel in  $C_k(X \setminus B, A \setminus B; M)$  mit  $[z] \in \ker \iota_*$ . Also existiert  $w \in C_k(X; M)$  und  $z'' \in C_k(A; M)$  mit

$$z = d_{k+1}w + z'' \in C_k(X; M).$$

Wie oben existiert  $N$  hinreichend groß, so dass  $S_{k+1}^N w = w' + w''$  mit  $w' \in C_\bullet(X \setminus \bar{B}; M) \subset C_\bullet(X \setminus B; M)$  und  $w'' \in C_\bullet(\mathring{A}; M) \subset C_\bullet(A; M)$ . Somit gilt

$$S_k^N z - d_{k+1}w' = S_k^N z'' + d_{k+1}w'' \in C_k(\mathring{A} \setminus \bar{B}; M) \subset C_k(A \setminus B; M),$$

und wir schließen, dass

$$[z] = [S_k^N z] = [d_{k+1}w'] = [0] \in H_k(X \setminus B, A \setminus B; M). \quad \square$$

3.53. FOLGERUNG (Mayer-Vietoris-Sequenz). Es seien  $A, B \subset X$  Teilmengen mit  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$ , dann existiert eine natürliche exakte Sequenz

$$\dots \longleftarrow H_k(X; M) \longleftarrow H_k(A; M) \oplus H_k(B; M) \longleftarrow H_k(A \cap B; M) \xleftarrow{\partial_{k+1}} H_{k+1}(X; M) \longleftarrow \dots$$

BEWEIS. Wir wenden Übung 3.142 auf das folgende kommutative Diagramm an.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \longleftarrow & H_k(A, A \cap B; M) & \longleftarrow & H_k(A; M) & \longleftarrow & H_k(A \cap B; M) & \xleftarrow{\partial_{k+1}} & H_{k+1}(A, A \cap B; M) & \longleftarrow & \dots \\ & \downarrow \iota_* \cong & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \iota_* \cong & & \\ \dots \longleftarrow & H_k(X, B; M) & \longleftarrow & H_k(X; M) & \longleftarrow & H_k(B; M) & \xleftarrow{\partial_{k+1}} & H_{k+1}(X, B; M) & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

Die Zeilen in diesem Diagramm sind exakt nach Satz 3.43, und das Diagramm kommutiert wegen der dort behaupteten Natürlichkeit der Verbindungshomomorphismen. Die Isomorphie der relativen Homologiegruppen folgt aus dem Ausschneidungssatz 3.52.  $\square$

### 3.6. Reduzierte und Unreduzierte Homologietheorien

Im letzten Abschnitt haben wir Eigenschaften der singulären Homologie gezeigt, die wir zur axiomatischen Charakterisierung einer unreduzierten Homologietheorie analog zu Definition 3.12 heranziehen können. In diesem Abschnitt wollen wir die reduzierte Homologie so definieren, dass wir die Eilenberg-Steenrod-Axiome aus den besagten Eigenschaften der unreduzierten Homologietheorie ableiten können.

Es sei  $X$  ein topologischer Raum, dann existiert eine eindeutige Abbildung  $p_X: X \rightarrow \{*\}$ .

3.54. DEFINITION. Die *reduzierte singuläre Homologie* eines Raumes  $X \neq \emptyset$  mit Koeffizienten in  $M$  über  $R$  ist definiert als

$$\tilde{H}_\bullet(X; M) = \ker(p_{X*}: H_\bullet(X; M) \rightarrow H_\bullet(\{*\}; M)) \subset H_\bullet(X; M).$$

Für eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  definieren wir

$$\tilde{f}_* = f_*|_{\ker p_{X*}}: \tilde{H}_\bullet(X; M) \rightarrow \tilde{H}_\bullet(Y; M).$$

Zur Definition von  $\tilde{f}_*$  überlegen wir uns, dass  $p_Y \circ f = p_X: X \rightarrow \{*\}$ . Sei nun  $c \in \ker p_{X*} = \ker(p_{Y*} \circ f_*)$ , dann folgt  $f_*(c) \in \ker(p_{Y*})$ , also ist  $\tilde{f}_*$  wohldefiniert.

3.55. BEMERKUNG. Wir betrachten die obige Konstruktion etwas genauer, geben alternative Konstruktionen an, und zeigen, wie man aus der reduzierten Homologie die unreduzierte Homologie zurückgewinnen kann.

(1) Nach Beispiel 3.39 gilt  $H_k(\{*\}; M) = 0$  für  $k \neq 0$  und  $H_0(\{*\}; M) \cong M$ . Es folgt

$$\tilde{H}_k(X; M) = H_k(X; M) \quad \text{für } k \neq 0.$$

Wir wählen  $x_0 \in X \neq \emptyset$  und betrachten die Abbildung  $\iota: \{*\} \rightarrow X$  mit  $* \mapsto x_0$ . Aus  $p_X \circ \iota = \text{id}_{\{*\}}$  folgt

$$p_{X*0} \circ \iota_{*0} = \text{id}_M,$$

also ist  $p_{X*0}$  surjektiv und wir erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_0(X; M) \longrightarrow H_0(X; M) \xrightarrow{p_{X*0}} M \longrightarrow 0.$$

Die Abbildung  $\iota_{*0}$  ist injektiv und spaltet diese Sequenz. Insbesondere erhalten wir einen Isomorphismus

$$H_0(X; M) \longrightarrow \tilde{H}_0(X; M) \oplus M \quad \text{mit} \quad c \longmapsto (c - (\iota_{*0} \circ p_{X*0})(c), p_{X*0}(c));$$

Während die obige kurze exakte Sequenz natürlich ist, hängt die Spaltung von der Wahl eines Punktes  $x_0 \in X$  ab (genauer: von seiner Wegzusammenhangskomponente) und ist daher nicht natürlich.

- (2) Es sei wieder  $x_0 \in X \neq \emptyset$ , dann folgt aus der langen exakten Homologiesequenz aus Satz 3.43, dass  $H_k(X, x_0; M) \cong H_k(X; M)$  für  $k \neq 0$ , und wir erhalten die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H_0(\{x_0\}; M) \xrightarrow{\iota_{*0}} H_0(X; M) \longrightarrow H_0(X, x_0; M) \longrightarrow 0 .$$

Aus dieser Sequenz und Punkt (1) folgt

$$H_0(X, x_0; M) \cong H_0(X; M) / \text{im } \iota_{*0} \cong \tilde{H}_0(X; M) .$$

Dieser Isomorphismus hängt nur von der Wahl von  $x_0$  (genauer: von der zugehörigen Wegzusammenhangskomponente) ab.

- (3) Sei jetzt  $* \notin X$ , dann bezeichnet  $X_+$  das Paar  $(X \sqcup \{*\}, *)$ . Mit dem Ausschneidungssatz 3.52, angewandt auf  $A = B = \{*\} \subset X \sqcup \{*\}$ , und Punkt (2) erhält man

$$H_\bullet(X; M) \cong H_\bullet(X \sqcup \{*\}, *; M) \cong \tilde{H}_\bullet(X_+; M) .$$

Später werden wir noch sehen, dass

$$H_\bullet(X, A; M) \cong \tilde{H}_\bullet(X/A; M)$$

für gute Paare gilt. Für beliebige Paare behilft man sich wie in Übung 3.131.

- (4) Wir können die reduzierte singuläre Homologie auch direkt aus dem singulären Kettenkomplex gewinnen. Wie im Beweis von Satz 3.40 (2) benutzen wir  $S_0(X) = X$  und definieren eine Augmentierung  $\varepsilon: C_0(X; M) \rightarrow M$  durch

$$\varepsilon \sum_{x \in X} m_x \cdot x = \sum_{x \in X} m_x \in M .$$

Dann betrachten wir den *augmentierten singulären Kettenkomplex*  $(\bar{C}_\bullet(X; M), \bar{\partial}_\bullet)$  von  $X$  analog zu Bemerkung 3.34 (2) mit

$$\bar{C}_k(X; M) = \begin{cases} C_k(X; M) & \text{für } k \neq -1, \text{ und} \\ M & \text{für } k = -1, \end{cases}$$

und  $\bar{\partial}_k = \begin{cases} \partial_k & \text{für } k \neq 0, -1, \\ \varepsilon & \text{für } k = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{für } k = -1. \end{cases}$

Die Augmentierung  $\varepsilon$  hängt eng mit der Abbildung  $p_X$  zusammen, denn es gilt

$$p_{X*} \sum_{x \in X} m_x \cdot x = \sum_{x \in X} m_x \cdot * = \varepsilon \left( \sum_{x \in X} m_x \cdot x \right) \cdot * ,$$

und es folgt

$$\tilde{H}_\bullet(X; M) \cong H_\bullet(\bar{C}_\bullet(X; M), \bar{\partial}_\bullet) .$$

Um die letzte Aussage in Punkt (3) oben zu zeigen, benötigen wir ein weiteres Lemma aus der homologischen Algebra.

3.56. LEMMA (Fünfer-Lemma). *Es sei*

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow d & & \downarrow e & & \\ \dots & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen.

- (1) Wenn  $b, d$  surjektiv sind und  $e$  injektiv ist, dann ist  $c$  surjektiv.
- (2) Wenn  $b, d$  injektiv sind und  $a$  surjektiv ist, dann ist  $c$  injektiv.
- (3) Wenn  $b, d$  Isomorphismen sind,  $a$  surjektiv und  $e$  injektiv ist, dann ist  $c$  ein Isomorphismus.

BEWEIS. Man beweist (1) und (2) mit Diagrammjagd. Es folgt (3).  $\square$

3.57. SATZ. *Für jedes gute Paar  $(X, A)$  induziert die Projektion  $X \rightarrow X/A$  einen natürlichen Isomorphismus*

$$q: H_\bullet(X, A; M) \rightarrow \tilde{H}_\bullet(X/A; M) .$$

BEWEIS. Es sei  $U$  Umgebung von  $A$ , so dass  $A$  Deformationsretrakt von  $U$  ist. Dann induziert die Inklusion aufgrund der Homotopieinvarianz aus Satz 3.49 einen Isomorphismus

$$H_\bullet(A; M) \xrightarrow{\cong} H_\bullet(U; M) .$$

Wir wenden das Fünferlemma 3.56 auf die Homologiesequenzen aus Satz 3.43 an und erhalten

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \dots & \longleftarrow & H_{k-1}(X; M) & \longleftarrow & H_{k-1}(A; M) & \longleftarrow & H_k(X, A; M) & \longleftarrow & H_k(X; M) & \longleftarrow & H_k(A; M) & \longleftarrow & \dots \\ & & \parallel & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \cong & & \\ \dots & \longleftarrow & H_{k-1}(X; M) & \longleftarrow & H_{k-1}(U; M) & \longleftarrow & H_k(X, U; M) & \longleftarrow & H_k(X; M) & \longleftarrow & H_k(U; M) & \longleftarrow & \dots \end{array} ,$$

so dass die Inklusion  $(X, A) \rightarrow (X, U)$  von Paaren einen Isomorphismus

$$H_\bullet(X, A; M) \xrightarrow{\cong} H_\bullet(X, U; M)$$

induziert. Analog ist  $U/A$  zusammenziehbar auf den Punkt  $a = A/A$ , und mit dem gleichen Argument wie oben erhalten wir einen Isomorphismus

$$H_\bullet(X/A, a; M) \xrightarrow{\cong} H_\bullet(X/A, U/A; M) .$$

Da  $A$  abgeschlossen und  $U$  Umgebung von  $A$  ist, gilt  $\bar{A} \subset \overset{\circ}{U}$ , und der Ausschneidungssatz 3.52 liefert schließlich das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_\bullet(X, A; M) & \xrightarrow{\cong} & H_\bullet(X, U; M) & \xleftarrow{\cong} & H_\bullet(X \setminus A, U \setminus A; M) \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \tilde{H}_\bullet(X/A; M) \cong H_\bullet(X/A, a; M) & \xrightarrow{\cong} & H_\bullet(X/A, U/A; M) & \xleftarrow{\cong} & H_\bullet((X/A) \setminus \{a\}, (U/A) \setminus \{a\}; M) . \end{array}$$

Somit ist die natürliche Abbildung  $H_\bullet(X, A; M) \rightarrow \tilde{H}_\bullet(X/A; M)$  ein Isomorphismus.  $\square$

Wir können jetzt zeigen, dass die reduzierte singuläre Homologie die Eilenberg-Steenrod-Axiome erfüllt. Dabei werden wir die Isomorphismen aus Bemerkung 3.55 und Satz 3.57 benutzen.

3.58. SATZ. *Reduzierte singuläre Homologie über  $R$  mit Koeffizienten  $M$  ist eine reduzierte Homologietheorie über  $R$  mit Koeffizienten  $M$ .*

BEWEIS. Wir haben bereits gesehen, dass  $\tilde{f}_* = f_*|_{\ker p_{X*}}$  gilt. Daraus folgt die Funktorialität der reduzierten Homologie. Seien  $f, g: X \rightarrow Y$  homotop. Aus der Homotopieinvarianz der unreduzierten Homologie aus Satz 3.49 folgt die Homotopieinvarianz 3.12 (1) der reduzierten Homologie:

$$\tilde{f}_* = f_*|_{\ker p_{X*}} = g_*|_{\ker p_{X*}} = \tilde{g}_* .$$

Zur Konstruktion der langen exakten Homologiesequenz betrachten wir die langen exakten Sequenzen der Paare  $(X, A)$  und  $(\{*\}, *)$  als Kettenkomplexe mit trivialer Homologie. Aus dem Ausschneidungssatz 3.52 mit  $A = B = \{*\}$  folgt

$$H_\bullet(\{*\}, *, M) \cong H_\bullet(\emptyset, \emptyset; M) = 0 .$$

Da die Homologiesequenzen natürlich sind, liefert die Abbildung  $(X, A) \rightarrow (\{*\}, *)$  von Paaren eine Kettenabbildung, und diese ist nach Bemerkung 3.55 (1) surjektiv. Also erhalten wir eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{H}_k(A; M) & \longrightarrow & H_k(A; M) & \xrightarrow{p_{A*}} & H_k(\{*\}; M) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{id} & & \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{H}_k(X; M) & \longrightarrow & H_k(X; M) & \xrightarrow{p_{X*}} & H_k(\{*\}; M) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H_k(X, A; M) & \xrightarrow{\text{id}_*} & H_k(X, A; M) & \longrightarrow & 0 & & \\ & & \downarrow \partial_k & & \downarrow \partial_k & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{H}_{k-1}(A; M) & \longrightarrow & H_{k-1}(A; M) & \xrightarrow{p_{A*}} & H_{k-1}(\{*\}; M) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \end{array}$$

Nach dem Schlangenlemma 3.44 erhalten wir eine lange exakte Homologiesequenz, in der die Homologiemoduln der zweiten und der dritten Spalte verschwinden, da diese Spalten nach Satz 3.43 exakt sind. Nach Übung 3.128 verschwinden dann auch die Homologiemoduln der ersten Spalte, also ist die erste Spalte ebenfalls eine exakte Sequenz.

Für gute Paare ersetzen wir in dieser langen exakten Homologiesequenz den Modul  $H_\bullet(X, A; M)$  durch  $\tilde{H}_\bullet(X/A; M)$ , und erhalten

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & \tilde{H}_{k-1}(X; M) & \xleftarrow{\iota_{*(k-1)}} & \tilde{H}_{k-1}(A; M) & \xleftarrow{\partial_k} & H_k(X, A; M) & \longleftarrow & \tilde{H}_k(X; M) & \longleftarrow & \cdots \\ & & & & & & \downarrow q \cong & & & & \\ & & & & & \swarrow \tilde{\partial}_k & \tilde{H}_k(X/A; M) & \nwarrow q_{*k} & & & \end{array}$$

Nach Konstruktion von  $q$  in Satz 3.57 erhalten wir zwischen  $\tilde{H}_k(X; M)$  und  $\tilde{H}_k(X/A; M)$  in der Tat die Abbildung  $p_{*k}$  zur natürlichen Projektion  $p: X \rightarrow X/A$ , und da  $q$  natürlich ist, gilt das dann auch für  $\tilde{\partial}_k = \partial_k \circ q^{-1}$ . Damit haben wir das Axiom 3.12 (2) von der Homologiesequenz bewiesen.

Indem wir jeden Raum  $X_i$  einer Familie  $(X_i)_{i \in I}$  in Wegzusammenhangskomponenten zerlegen, erhalten wir mit Satz 3.40 einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} H_\bullet(X_i; M) \xrightarrow{\cong} H_\bullet\left(\bigsqcup_{i \in I} X_i; M\right) .$$

Mit dem Fünferlemma erhalten wir einen entsprechenden Isomorphismus für Paare:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longleftarrow & \bigoplus_{i \in I} H_{k-1}(A_i; M) & \longleftarrow & \bigoplus_{i \in I} H_k(X_i, A_i; M) & \longleftarrow & \bigoplus_{i \in I} H_k(X_i; M) & \longleftarrow & \dots \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \\ \dots & \longleftarrow & H_{k-1}\left(\bigsqcup_i A_i; M\right) & \longleftarrow & H_k\left(\bigsqcup_i X_i, \bigsqcup_i A_i; M\right) & \longleftarrow & H_k\left(\bigsqcup_i X_i; M\right) & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

Seien jetzt  $(X_i, x_i)$  gut punktierte Räume, dann liefert Satz 3.57, dass

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i \in I} \tilde{H}_k(X_i; M) &\cong \bigoplus_{i \in I} H_k(X_i, x_i; M) \xrightarrow{\cong} H_k\left(\bigsqcup_{i \in I} X_i, \bigsqcup_{i \in I} \{x_i\}; M\right) \\ &\cong \tilde{H}_k\left(\bigsqcup_{i \in I} X_i / \bigsqcup_{i \in I} \{x_i\}; M\right) = \tilde{H}_k\left(\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i); M\right). \end{aligned}$$

Jetzt ist auch das Summenaxiom (3) überprüft.

Schließlich betrachten wir den Raum  $S^0 = \{p_+, p_-\}$ . Der Ausschneidungssatz 3.52 liefert

$$\tilde{H}_k(S^0; M) \cong H_k(\{p_+, p_-\}, p_-; M) \cong H_k(\{p_+\}; M) \cong \begin{cases} M & \text{für } k = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{für } k \neq 0 \end{cases}$$

nach Beispiel 3.39. Es folgt das Dimensionsaxiom (4), und somit ist  $\tilde{H}_\bullet$  eine reduzierte Homologietheorie.  $\square$

Mit anderen Worten gehört zu jeder unreduzierten Homologietheorie mit den Eigenschaften aus Abschnitt 3.5 stets genau eine reduzierte Homologietheorie, zwischen denen man wie in Bemerkung 3.55 hin- und herwechseln kann. Außerdem erinnern wir uns an Abschnitt 3.3, wonach Homologietheorien für CW-Komplexe durch die Koeffizienten  $M \in \text{Mod}_R$  bereits eindeutig festgelegt sind.

Wir fassen die im Beweis von Satz 3.58 benutzten Eigenschaften der unreduzierten singulären Homologie noch einmal in einer Definition zusammen. Analog zu Satz 3.58 lässt sich zu jeder unreduzierten Homologietheorie  $h_\bullet$  eine reduzierte Homologietheorie  $\tilde{h}_\bullet$  konstruieren, so dass für alle guten Paare

$$h_\bullet(X, A) \cong \tilde{h}_\bullet(X/A)$$

gilt. Die unreduzierte CW-Homologie haben wir bereits in Bemerkung 3.34 betrachtet.

Es bezeichne  $\text{Pair}$  die Kategorie der Paare topologischer Räume, mit Morphismen wie in Definition 2.7. Für das Paar  $(X, \emptyset)$  schreiben wir kurz  $X$ .

3.59. DEFINITION. Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins. Eine *verallgemeinerte (unreduzierte) Homologietheorie*  $(h_\bullet, \partial_\bullet)$  über  $R$  besteht aus einer Familie von Funktoren

$$h_\bullet = (h_n: \text{Pair} \rightarrow \text{Mod}_R)_{n \in \mathbb{Z}},$$

und einer Familie natürlicher Transformationen  $\partial_\bullet = (\partial_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  mit  $\partial_n(X, A): h_n(X, A) \rightarrow h_{n-1}(A)$  für alle Paare  $(X, A)$ , die die folgenden *Eilenberg-Steenrod-Axiome* erfüllen.

(1) *Homotopieinvarianz.* Wenn  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  homotope Abbildungen sind, gilt

$$h_n f = h_n g: h_n(X, A) \rightarrow h_n(Y, B) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

(2) *Homologiesequenz.* Für jedes Paar  $(X, A)$  ist die folgende Sequenz exakt:

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} h_n(A) \xrightarrow{h_n \iota} h_n(X) \xrightarrow{h_n p} h_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} h_{n-1}(A) \xrightarrow{h_{n-1} \iota} \dots$$

- (3) *Ausschneidung.* Für jedes Paar  $(X, A)$  und jede Teilmenge  $B \subset X$  mit  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$  induziert für alle  $n \in \mathbb{Z}$  die Inklusionsabbildung  $\iota: (B, A \cap B) \rightarrow (X, A)$  einen Isomorphismus

$$h_n \iota: h_n(B, A \cap B) \xrightarrow{\sim} h_n(X, A) .$$

- (4) *Summenaxiom.* Sei  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie von Räumen, dann induzieren für alle  $n \in \mathbb{Z}$  die Inklusionsabbildungen  $\iota_i: X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i$  einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} h_n \iota_i: \bigoplus_{i \in I} h_n(X_i) \xrightarrow{\sim} h_n\left(\coprod_{i \in I} X_i\right) .$$

Man nennt  $(h_\bullet, \partial_\bullet)$  eine (*unreduzierte*) *Homologietheorie* mit *Koeffizienten*  $M \in \text{Mod}_R$ , wenn zusätzlich das folgende Axiom gilt.

- (5) *Dimensionsaxiom.*

$$h_n(\{*\}) = \begin{cases} M & \text{für } n = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3.60. BEISPIEL. Sei  $R$  wie immer und  $M$  ein  $R$ -Modul. Die singuläre Homologie mit Koeffizienten in  $M$  aus Definition 3.41 bildet eine unreduzierte Homologietheorie. Die obigen Axiome haben wir in Folgerung 3.50, den Sätzen 3.40, 3.43 und 3.52 und Beispiel 3.39 nachgewiesen.

### 3.7. Homologie und Fundamentalgruppe

In diesem kurzen Abschnitt zeigen wir, wie sich die erste Homologie  $H^1(X; \mathbb{Z})$  eines topologischen Raumes aus der Fundamentalgruppe errechnen lässt. Wir schreiben im folgenden stets kurz  $H_k(X)$  für die  $k$ -te (*unreduzierte*) singuläre Homologie  $H_k(X; \mathbb{Z})$  von  $X$  über  $\mathbb{Z}$  mit Koeffizienten  $\mathbb{Z}$ , und  $H_k(X, A)$  für  $H_k(X, A; \mathbb{Z})$ . Genauso schreiben wir kurz  $C_k(X)$ ,  $Z_k(X)$ ,  $B_k(X)$ , wenn wir mit Koeffizienten  $\mathbb{Z}$  rechnen.

Wie im Beweis von Satz 3.40 identifizieren wir das Einheitsintervall  $I = [0, 1]$  mit dem Standardsimplex  $\Delta^1$ , und somit Wege  $\gamma: I \rightarrow X$  mit singulären 1-Simplizes  $\sigma: \Delta^1 \rightarrow X$ . Aus Satz 3.57 folgt

$$H_1(I, \partial I) \cong \tilde{H}_1(I/\partial I) = \tilde{H}_1(S^1) \cong \mathbb{Z} ,$$

und  $H_1(I, \partial I)$  wird erzeugt von der Klasse  $[\text{id}_I]$  des Simplex  $\text{id}_I: I \rightarrow I$  mit Rand in  $\partial I$ . Aus Bemerkung 3.55 (1) und Satz 3.57 erhalten wir außerdem

$$H_1(X, \{x_0\}) \cong \tilde{H}_1(X/\{x_0\}) = \tilde{H}_1(X) \cong H_1(X) .$$

3.61. DEFINITION. Es sei  $(X, x_0)$  ein punktierter topologischer Raum. Dann ist der *Hurewicz-Homomorphismus* die Abbildung

$$\varphi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X) \quad \text{mit} \quad \varphi([\gamma]) = \gamma_*[\text{id}_I] \in H_1(X, \{x_0\}) \cong H_1(X) .$$

Nach der Konstruktion von  $\gamma_*$  in Definition 3.37 gilt

$$\gamma_*[\text{id}_I] = [\gamma \circ \text{id}_I] = [\gamma] \in H_1(X) ,$$

wenn wir  $\gamma: I \rightarrow X$  als 1-Simplex auffassen.

Außerdem erinnern wir uns an die Abelisierung aus Bemerkung 2.17 (2). Nach Übung 2.86 (2) ist die Abelisierung ein Funktor von der Kategorie  $\mathcal{G}rp$  der Gruppen in die Kategorie  $\text{Mod}_{\mathbb{Z}}$  der abelschen Gruppen (siehe Beispiel 3.3 (2)), und nach Beispiel 3.8 ist die Projektion  $G \rightarrow G^{\text{ab}}$  eine natürliche Transformation.

3.62. PROPOSITION. *Es sei  $(X, x_0)$  ein topologischer Raum. Dann induziert der Hurewicz-Homomorphismus einen natürlichen Homomorphismus*

$$\varphi: \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}} \rightarrow H_1(X) .$$

BEWEIS. Zunächst hängt  $\gamma_*[\text{id}_I] \in H_1(X, x_0) \cong H_1(X)$  wegen der Homotopieinvarianz aus Folgerung 3.50 nur von der Homotopieklasse des Weges  $\gamma$  ab. Somit ist  $\varphi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$  wohldefiniert.

Schließlich ist  $\varphi$  ein Gruppenhomomorphismus. Denn seien  $\gamma, \delta: I \rightarrow X$  Schleifen, dann definiere  $\sigma: \Delta^2 \rightarrow X$  durch

$$\sigma(t_0, t_1, t_2) = \begin{cases} \gamma(1 - t_0 + t_2) & \text{für } t_0 \geq t_2, \text{ und} \\ \delta(t_2 - t_0) & \text{für } t_2 \geq t_0. \end{cases}$$

Indem wir Wege und 1-Simplizes in  $X$  identifizieren, folgt

$$\partial_2\sigma = \gamma, \quad \partial_0\sigma = \delta \quad \text{und} \quad \partial_1\sigma = \gamma\delta.$$

In  $H_1(X)$  gilt somit

$$\varphi([\gamma\delta]) = [\partial_1\sigma] = [\partial_0\sigma] + [\partial_2\sigma] - \partial[\sigma] = \varphi([\gamma]) + \varphi([\delta]).$$

Also ist  $\varphi$  ein Homomorphismus. Es bezeichne  $e$  die konstante Schleife im Punkt  $x_0$ , und es sei  $\bar{\gamma}$  der rückwärts durchlaufene Weg  $\gamma$ . Dann folgt insbesondere

$$\varphi([e]) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi([\bar{\gamma}]) = \varphi([\gamma]^{-1}) = -\varphi([\gamma]).$$

Da  $H_1(X)$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul nach Beispiel 3.3 (2) eine abelsche Gruppe ist, lässt sich  $\varphi$  nach Übung 2.85 (2) als Verkettung

$$\varphi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}} \rightarrow H_1(X)$$

schreiben. Man sieht leicht, dass die induzierte Abbildung  $\varphi: \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}} \rightarrow H_1(X)$  dann ebenfalls natürlich ist.

Zur Natürlichkeit sei  $F: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  eine punktierte Abbildung. Dann folgt

$$\varphi(F_*[\gamma]) = \varphi([F \circ \gamma]) = F_*(\gamma_*[\text{id}_I]) = F_*\varphi([\gamma]),$$

also kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}} & \xrightarrow{F_*} & \pi_1(Y, y_0)^{\text{ab}} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ H_1(X) & \xrightarrow{F_*} & H_1(Y) \quad . \quad \square \end{array}$$

Man beachte, dass der Funktor  $\pi_1^{\text{ab}}$  auf wegzusammenhängenden Räumen unabhängig vom Basispunkt definiert ist, siehe Bemerkung 2.16.

3.63. SATZ (Hurewicz). *Es sei  $X$  wegzusammenhängend. Dann ist  $\varphi: \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}} \rightarrow H_1(X)$  für  $x_0 \in X$  beliebig ein natürlicher Isomorphismus.*

BEWEIS. Wir schreiben nach wie vor  $[\gamma]$  für die Klasse einer Schleife in  $\pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}$ . Die Verknüpfung schreiben wir additiv, also  $[\gamma\delta] = [\gamma] + [\delta]$ .

Zur Surjektivität von  $\varphi$  sei

$$a = \sum_{i=1}^N n_i \sigma_i \in Z_1(X)$$

eine geschlossene Kette mit  $n_i \in \mathbb{Z}$ . Zu jedem Endpunkt  $p$  eines der Simplizes  $\sigma_i$  wählen wir einen Pfad  $\gamma_p$  von  $x_0$  nach  $p$ . Da  $a$  geschlossen ist, gilt

$$\sum_{i=1}^N n_i (\partial_0 \sigma_i - \sigma_i(e_0)) = 0,$$

und es folgt

$$a = \sum_{i=1}^N n_i (\gamma_{\sigma_i(e_0)} + \sigma_i - \gamma_{\sigma_i(e_1)}) \equiv \sum_{i=1}^N n_i (\gamma_{\sigma_i(e_0)} \sigma_i \bar{\gamma}_{\sigma_i(e_1)}) \pmod{B_1(X)} .$$

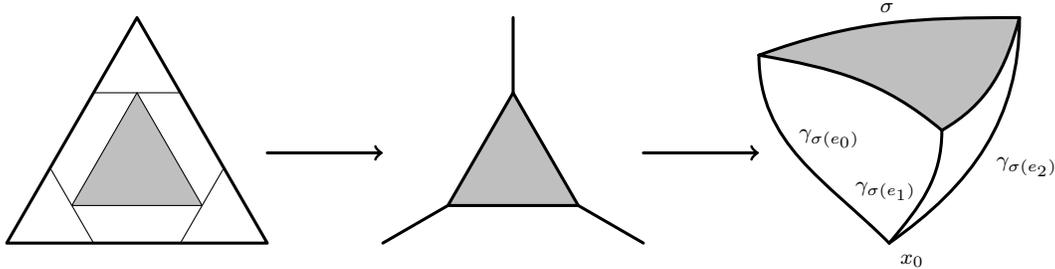
Jeder Weg  $\gamma_{\sigma_i(e_0)} \sigma_i \bar{\gamma}_{\sigma_i(e_1)}$  ist eine Schleife in  $(X, x_0)$ , und da  $\varphi$  ein Homomorphismus ist, folgt

$$[a] = \varphi \left( \sum_{i=1}^N n_i [\gamma_{\sigma_i(e_0)} \sigma_i \bar{\gamma}_{\sigma_i(e_1)}] \right) \in \text{im } \varphi .$$

Zur Injektivität sei  $\gamma$  eine Schleife in  $(X, x_0)$  mit  $[\gamma] = \gamma_*[\text{id}_I] \in \ker \varphi$ . Also existiert eine Kette

$$b = \sum_{i=1}^N n_i \sigma_i \in C_2(X)$$

mit  $n_i \in \mathbb{Z}$  und  $\sigma_i: \Delta^2 \rightarrow X$ , so dass  $\partial b = \gamma$ . Wie im ersten Teil des Beweises verbinden wir  $x_0$  mit jedem Eckpunkt  $p$  eines der Simplizes  $\sigma_i$  mit einem Weg  $\gamma_p: I \rightarrow X$ . Anschließend konstruieren wir neue Simplizes  $\sigma'_i: \Delta^2 \rightarrow X$ , die alle Ecken auf  $x_0$  abbilden, wie im folgenden Bild.



Dabei passiert mit den Rand-1-Simplizes der  $\sigma_i$  das gleiche wie im ersten Teil des Beweises, sie werden zu Schleifen am Punkt  $x_0$  verlängert. Betrachte die Kette

$$b' = \sum_{i=1}^N n_i \sigma'_i .$$

Aus  $\partial b = \gamma$  folgt  $\partial b' = \gamma'$  mit  $\gamma' = e\gamma e$ , wobei  $e$  die konstante Schleife im Punkt 0 bezeichne.

Wie im Beweis der Homomorphieeigenschaft in Proposition 3.62 liefert ein 2-Simplex  $\sigma'$  mit Ecken in  $x_0$  eine Relation

$$[\partial_0 \sigma'] + [\partial_2 \sigma'] = [\partial_1 \sigma'] \in \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}} .$$

Aus  $\partial b' = \gamma' \in C_1(X)$  und  $[\gamma'] = [\gamma]$  in  $\pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}$  folgt also

$$[\gamma] = [\gamma'] = \sum_{i=1}^N n_i ([\partial_0 \sigma'_i] - [\partial_1 \sigma'_i] + [\partial_2 \sigma'_i]) = 0 \in \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}} .$$

Also ist  $\varphi$  auch injektiv, und somit ein Isomorphismus. □

3.64. BEISPIEL. Wir haben in Beispiel 2.54 die abelisierten Fundamentalgruppen der kompakten Flächen bestimmt. Es folgt

(1) Sei  $X_g$  eine zusammenhängende orientierbare Fläche vom Geschlecht  $g$ , dann gilt

$$H_1(X_g) \cong \mathbb{Z}^{2g} .$$

(2) Sei  $Y_g$  eine zusammenhängende, nicht orientierbare Fläche vom Geschlecht  $g$ , dann gilt

$$H_1(Y_g) \cong \mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Also kann man kompakte, zusammenhängende Flächen mit Hilfe ihrer Homologien unterscheiden.

Aus den Sätzen 3.40 und 3.63 ergibt sich die folgende Beschreibung von  $H_1(X)$ .

3.65. FOLGERUNG. Sei  $X$  ein topologischer Raum, sei  $(X_i)_{i \in I}$  die Familie seiner Wegzusammenhangskomponenten, und sei  $x_i \in X_i$  für alle  $i \in I$ . Dann induzieren die Inklusionsabbildungen  $\iota_i: X_i \rightarrow X$  einen natürlichen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} \pi_1(X_i, x_i)^{\text{ab}} \cong H_1(X).$$

### 3.8. Ein universelles Koeffizienten-Theorem

In diesem Abschnitt sehen wir, wie man singuläre Homologie  $H_\bullet(X; M)$  mit Koeffizienten  $M \in \text{Mod}_R$  auf  $H_\bullet(X; R)$  zurückführt. Besonders wichtig ist der Fall  $R = \mathbb{Z}$ , den wir uns entsprechend genauer anschauen. Anschließend benutzen wir ähnliche Methoden, um  $H_\bullet(X \times Y; R)$  aus  $H_\bullet(X; R)$  und  $H_\bullet(Y; R)$  zu rekonstruieren. Wir beginnen mit einigen Konstruktionen aus der Algebra.

3.66. DEFINITION. Es sei  $E$  eine Menge. Der freie Modul mit Erzeugermenge  $E$  ist definiert als

$$\langle E \rangle_R = \bigoplus_{e \in E} R \cdot e = \left\{ \sum_{e \in E} r_e \cdot e \mid r_e \in R, \text{ fast alle } r_e = 0 \right\}.$$

Sei  $F \subset \langle E \rangle_R$  eine Teilmenge, dann bezeichne  $\langle E \mid F \rangle$  den Quotienten von  $\langle E \rangle$  nach dem kleinsten Untermodul, der  $F$  enthält. Falls  $M = \langle E \mid F \rangle$ , nennen wir  $\langle E \mid F \rangle_R$  eine Präsentation von  $M$  mit Erzeugern  $E$  und Relationen  $F$ .

Eine analoge Konstruktion für Gruppen haben wir in Beispiel 2.38 und Bemerkung 2.51 kennengelernt. Nach Definition 3.37 gilt

$$C_k(X; R) = \langle S_k(X) \rangle.$$

Da  $1 \in R$ , existiert eine Inklusion  $i: E \rightarrow \langle E \rangle_R$  von Mengen mit  $e \mapsto 1 \cdot e$  und eine  $R$ -lineare Projektion  $p: \langle E \rangle_R \rightarrow \langle E \mid F \rangle_R$ . Wir können jetzt die universellen Eigenschaften von freien Moduln und von Präsentationen formulieren.

3.67. PROPOSITION. Es sei  $E$  eine Menge und  $F \subset \langle E \rangle_R$  eine Teilmenge.

- (1) Zu jedem Modul  $M \in \text{Mod}_R$  und jeder Abbildung  $f: E \rightarrow M$  von Mengen existiert genau eine  $R$ -lineare Abbildung  $\bar{f}: \langle E \rangle_R \rightarrow M$ , so dass  $f = \bar{f} \circ i$  als Abbildung von Mengen. Durch diese Eigenschaft ist  $\langle E \rangle_R$  bis auf eindeutige Isomorphismen eindeutig bestimmt.
- (2) Zu jedem Modul  $M \in \text{Mod}_R$  und jeder  $R$ -linearen Abbildung  $g: \langle E \mid F \rangle_R \rightarrow M$  mit  $F \subset \ker g$  existiert genau eine Abbildung  $\bar{g}: \langle E \rangle_R \rightarrow M$  mit  $g = \bar{g} \circ p$ . Durch diese Eigenschaft ist  $\langle E \mid F \rangle_R$  bis auf eindeutige Isomorphismen eindeutig bestimmt.

BEWEIS. In (1) ist  $\bar{f}$  wegen  $f = \bar{f} \circ i$  durch

$$\bar{f} \left( \sum_{e \in E} r_e \cdot e \right) = \sum_{e \in E} r_e \cdot f(e)$$

festgelegt, und die Existenz folgt, da die direkte Summe ein Koproduct ist, siehe Übung 1.119. Die Abbildung  $\bar{g}$  in (2) ist ebenfalls klar. Die Eindeutigkeit von  $\langle E \rangle_R$  und  $\langle E \mid F \rangle_R$  bis auf eindeutige Isomorphie folgt wie immer aus der universellen Eigenschaft.  $\square$

Im Beweis des universellen Koeffiziententheorems benötigen wir Moduln über Hauptidealringen. Zur Erinnerung: ein *Hauptidealring* ist ein nullteilerfreier kommutativer Ring mit Eins, bei dem jedes Ideal von einem einzigen Ringelement erzeugt wird. Die wichtigsten Beispiele sind die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$ , beliebige Körper  $\mathbb{k}$ , sowie Polynomringe  $\mathbb{k}[X]$  über Körpern.

3.68. DEFINITION. Es sei  $M$  ein Modul über einem Hauptidealring  $R$ . Wir definieren den *Rang*  $\text{rg}_R M \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  als die maximale Zahl  $k$ , so dass  $M$  einen zu  $R^k$  isomorphen Untermodul enthält. Außerdem ist der *Torsions-Untermodul*  $\text{Tor}_R M$  definiert durch

$$\text{Tor}_R M = \{a \in M \mid \text{es gibt } r \in R \setminus \{0\} \text{ mit } ra = 0\} .$$

Man nennt  $M$  *torsionsfrei*, wenn  $\text{Tor}_R M = 0$ .

3.69. BEISPIEL. Es sei  $R = \mathbb{Z}$ .

- (1) Für  $M = \mathbb{Z}^k$  gilt  $\text{rg}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^k = k$  und  $\text{Tor}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^k = 0$ .
- (2) Sei  $k \geq 1$  und  $M = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ , dann gilt  $\text{rg}_{\mathbb{Z}} M = 0$  und  $\text{Tor}_{\mathbb{Z}} M = M$ . Sowohl Rang als auch Torsions-Untermodul hängen vom zugrundeliegenden Ring ab: für  $k = p$  prim ist  $M$  ein  $\mathbb{k} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -Vektorraum mit  $\text{rg}_{\mathbb{k}} = \dim_{\mathbb{k}} M = 1$  und  $\text{Tor}_{\mathbb{k}} M = 0$ .
- (3) Es sei jetzt  $M = \mathbb{Q}$ , dann ist  $M$  unendlich erzeugt, aber je zwei Elemente sind linear abhängig. Es folgt  $\text{rg}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 1$  und  $\text{Tor}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ .
- (4) Der Modul  $M = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  ist unendlich erzeugt mit  $\text{rg}_{\mathbb{Z}} M = 0$  und  $\text{Tor}_{\mathbb{Z}} M = M$ .

Wir listen einige wichtige Eigenschaften von Moduln über Hauptidealringen auf, die wir später benutzen können.

3.70. BEMERKUNG. Es sei  $R$  ein Hauptidealring.

- (1) Es sei  $N \subset M$  Untermodul eines freien Moduls  $M$ , dann ist  $N$  ebenfalls frei, das heißt, es gibt eine Teilmenge  $E \subset N$  mit  $N = \langle E \rangle_R$ . Dieses Faktum gilt insbesondere auch, wenn  $M$  nicht endlich erzeugt ist.
- (2) Für jeden endlich erzeugten  $R$ -Modul  $M$  existieren  $j \in \mathbb{N}$  und  $a_1, \dots, a_j \in R$ , so dass

$$M \cong R^{\text{rg}_R M} \oplus \text{Tor}_R M \quad \text{mit} \quad \text{Tor}_R M = (R/a_1R) \oplus \dots \oplus (R/a_jR) .$$

Man kann erreichen, dass jedes  $a_i$  das nächste Element  $a_{i+1}$  teilt, also  $a_i | a_{i+1}$  für alle  $1 \leq i < j$ . Dann sind  $j$  und  $a_1, \dots, a_j$  bis auf Multiplikation mit einer Einheit in  $R$  eindeutig durch  $M$  bestimmt. Die  $a_i$  heißen *invariante Faktoren*.

- (3) Insbesondere sind endlich erzeugte  $R$ -Moduln genau dann frei, wenn sie torsionsfrei sind. Für unendlich erzeugte Moduln ist das falsch, siehe Beispiel 3.69 (3).
- (4) Es sei  $F: R^n \rightarrow R^m$  eine  $R$ -lineare Abbildung, dann existieren Basen von  $R^n$  und  $R^m$ , bezüglich derer  $F$  durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & a_{jj} & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_{m,n}(R)$$

beschrieben wird. Man kann die Basen so wählen, dass  $a_{ii} | a_{i+1,i+1}$  für  $1 \leq i < j$ . In diesem Fall sind die  $a_{ii} \in R/\{0\}$  wieder jeweils bis auf Multiplikation mit einer Einheit in  $R$  eindeutig bestimmt.

Als nächstes führen wir das Tensor- und das Torsionsprodukt von  $R$ -Moduln ein. Sei  $R$  zunächst wieder ein kommutativer Ring mit Eins.

3.71. DEFINITION. Es seien  $M, N \in \text{Mod}_R$ . Das *Tensorprodukt*  $M \otimes_R N$  ist der von allen Paaren  $(m, n) \in M \times N$  erzeugte  $R$ -Modul mit den Relationen

$$\begin{aligned}(m_1, n) + (m_2, n) &= (m_1 + m_2, n), \\ (m, n_1) + (m, n_2) &= (m, n_1 + n_2), \\ r(m, n) &= (rm, n) = (m, rn)\end{aligned}$$

für alle  $m, m_1, m_2 \in M$ ,  $n, n_1, n_2 \in N$  und  $r \in R$ . Wir schreiben  $m \otimes n \in M \otimes_R N$  für die Äquivalenzklasse von  $(m, n) \in M \times N$ .

Die Relationen in der obigen Definition stellen sicher, dass die natürliche Abbildung  $\otimes: M \times N \rightarrow M \otimes_R N$  mit  $(m, n) \mapsto m \otimes n$  bilinear über  $R$  ist.

3.72. PROPOSITION (Universelle Eigenschaft des Tensorproduktes). *Es seien  $M, N, A$  und  $B \in \text{Mod}_R$ .*

- (1) *Dann existiert zu jeder  $R$ -bilinearen Abbildung  $b: M \times N \rightarrow A$  genau eine  $R$ -lineare Abbildung  $\bar{b}: M \otimes_R N \rightarrow A$ , so dass das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{b} & A \\ \otimes \downarrow & \nearrow \bar{b} & \\ M \otimes_R N & & \end{array}$$

*kommutiert. Durch diese Eigenschaft ist das Tensorprodukt bis auf eindeutige Isomorphismen eindeutig bestimmt.*

- (2) *Zu zwei linearen Abbildungen  $f: M \rightarrow A$  und  $g: N \rightarrow B$  existiert insbesondere eine lineare Abbildung  $f \otimes g: M \otimes_R N \rightarrow A \otimes_R B$  mit  $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$ . Sind  $h: A \rightarrow C$  und  $k: B \rightarrow B$  ebenfalls linear, dann folgt  $(h \otimes k) \circ (f \otimes g) = (h \circ f) \otimes (k \circ g): M \otimes_R N \rightarrow C \otimes_R D$ .*

BEWEIS. Da  $M \otimes_R N$  von den Produkten  $m \otimes n$  mit  $m \in M$ ,  $n \in N$  erzeugt wird, ist  $\bar{b}$  eindeutig festgelegt durch

$$\bar{b}\left(\sum_{i=1}^k r_i \cdot m_i \otimes n_i\right) = \sum_{i=1}^k r_i \cdot b(m_i, n_i) \in A.$$

Da  $b$  bilinear ist, ist diese Konstruktion von  $\bar{b}$  mit den Relationen aus Definition 3.71 verträglich. Außerdem ist  $\bar{b}$  offensichtlich  $R$ -linear.

Sei  $P \in \text{Mod}_R$  und  $p: M \times N \rightarrow P$  bilinear, so dass zu jedem  $A \in \text{Mod}_R$  und jeder bilinearen Abbildung  $b: M \times N \rightarrow A$  eine eindeutige  $R$ -lineare Abbildung  $b': P \rightarrow A$  mit  $b = b' \circ p$  existiert. Wie in Bemerkung 1.41 findet man einen eindeutigen Isomorphismus  $f: P \rightarrow M \otimes_R N$ , so dass  $\otimes = f \circ p$ .

Zu (2) seien  $f$  und  $g$  linear sind. Da die natürliche Abbildung  $A \times B \rightarrow A \otimes_R B$  mit  $(a, b) \mapsto a \otimes b$  bilinear ist, ist auch die Abbildung  $M \times N \rightarrow A \otimes_R B$  mit  $(m, n) \mapsto f(m) \otimes g(n)$  bilinear. Also existiert eine eindeutige Abbildung  $f \otimes g: M \otimes_R N \rightarrow A \otimes_R B$  mit  $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$ .

Die letzte Behauptung überprüft man, indem man beide Abbildungen auf Elementen der Form  $m \otimes n$  vergleicht.  $\square$

3.73. BEMERKUNG. Für das Tensorprodukt gelten folgende Rechenregeln, die wir hier aber nicht beweisen wollen. Seien  $M, N, P$  und  $N_i \in \text{Mod}_R$  für alle  $i \in I$ , dann gilt

$$M \otimes_R 0 \cong 0 \quad \text{und} \quad M \otimes_R R \cong M, \quad (1)$$

$$M \otimes_R (N \otimes_R P) \cong (M \otimes_R N) \otimes_R P, \quad (2)$$

$$M \otimes_R N \cong N \otimes_R M, \quad (3)$$

$$M \otimes_R \bigoplus_{i \in I} N_i \cong \bigoplus_{i \in I} M \otimes_R N_i. \quad (4)$$

Wegen (3) gelten (1) und (4) analog mit vertauschten Argumenten.

3.74. BEISPIEL. Wir geben einige Beispiele von Tensorprodukten.

(1) Für freie Moduln gilt

$$\langle E \rangle_R \otimes_R \langle F \rangle_R = \bigoplus_{\substack{e \in E \\ f \in F}} (R \cdot e) \otimes_R (R \cdot f) = \langle E \times F \rangle_R$$

nach obiger Bemerkung. Da alle Vektorräume über einem Körper  $\mathbb{k}$  eine Basis haben, also frei sind, reicht das, um das Tensorprodukt auf  $\text{Vec}_{\mathbb{k}} = \text{Mod}_{\mathbb{k}}$  zu verstehen.

(2) Sei  $M \in \text{Mod}_R$  und  $E$  eine Menge, dann folgt

$$M \otimes_R \langle E \rangle_R = \bigoplus_{e \in E} M \otimes_R (R \cdot e) = \bigoplus_{e \in E} M \cdot e.$$

Insbesondere ist der singuläre Kettenkomplex in Definition 3.37 gegeben durch

$$C_k(X; M) = \langle S_k(X) \rangle_R \otimes_R M = C_k(X; R) \otimes_R M.$$

(3) Wir betrachten den Spezialfall  $R = \mathbb{Z}$ . Aus Bemerkung 3.73 folgt bereits

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Seien jetzt  $m, n \geq 1$ , und sei  $\bar{1}$  Erzeuger von  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , dann ist  $\bar{1} \otimes \bar{1}$  Erzeuger von  $M = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ . Es existieren  $a, b \in \mathbb{Z}$ , so dass  $\text{ggt}(m, n) = am + bn$ , also gilt

$$\text{ggt}(m, n) \cdot \bar{1} \otimes \bar{1} = a \cdot (m\bar{1}) \otimes \bar{1} + b \cdot \bar{1} \otimes (n\bar{1}) = 0.$$

Auf der anderen Seite existiert eine bilineare Abbildung

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/\text{ggt}(m, n)\mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad (c \cdot \bar{1}, d \cdot \bar{1}) = cd \cdot \bar{1}.$$

Also folgt aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts und obiger Rechnung, dass

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\text{ggt}(m, n)\mathbb{Z}.$$

Analog gilt für Hauptidealringe  $R$  und  $a, b \in R \setminus \{0\}$ , dass

$$(R/aR) \otimes_R (R/bR) \cong R/\text{ggt}(a, b)R.$$

(4) Das Tensorprodukt hängt vom zugrundeliegenden Ring  $R$  ab. Aus  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  über  $\mathbb{R}$  folgt beispielsweise

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \cong_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 \quad \not\cong \quad \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Um das Torsionsprodukt einzuführen, brauchen wir den Begriff der Auflösung eines Moduls. Dabei beschränken wir uns der Einfachheit halber auf freie Auflösungen.

3.75. DEFINITION. Es sei  $M$  ein Modul über einem Ring  $R$ . Eine *freie Auflösung* von  $M$  ist eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longleftarrow M \xleftarrow{\varepsilon} M_0 \xleftarrow{\partial_1} M_1 \longleftarrow \dots,$$

so dass die  $R$ -Moduln  $M_0, M_1, \dots$  frei sind.

Äquivalent dazu ist  $(M_\bullet, \partial_\bullet)$  ein freier Kettenkomplex über  $R$  mit

$$H_i(M_\bullet, \partial_\bullet) = \begin{cases} M & \text{für } i = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3.76. BEMERKUNG. Freie Auflösungen existieren immer. Dazu setzt man etwa  $M_0 = \langle M \rangle_R$  und erhält nach Proposition 3.67 eine eindeutige Abbildung  $\varepsilon: M_0 \rightarrow M$  mit  $f_0(m) = m$ . Anschließend definiert man analog induktiv  $M_{i+1} = \langle \ker \partial_i \rangle_R$  und  $\partial_{i+1}: M_{i+1} \rightarrow \ker \partial_i \subset M_i$  wie oben.

3.77. BEISPIEL. Von  $R$  hängt ab, wie kompliziert freie Auflösungen werden können und müssen.

- (1) Sei  $R = \mathbb{k}$  ein Körper, dann ist  $M$  ein Vektorraum und daher frei. Als freie Auflösung wählen wir

$$0 \longleftarrow M \xleftarrow{\text{id}} M \longleftarrow 0.$$

- (2) Sei  $R$  ein Hauptidealring. Wir finden  $M_0$  und  $\varepsilon: M_0 \rightarrow M$  surjektiv, etwa wie in Bemerkung 3.76. Nach Bemerkung 3.70 (1) ist  $M_1 = \ker \varepsilon$  frei, und wir erhalten

$$0 \longleftarrow M \xleftarrow{\varepsilon} M_0 \xleftarrow{\partial_1} M_1 \longleftarrow 0.$$

- (3) Sei  $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  und  $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , dann erhalten wir eine unendlich lange freie Auflösung der Form

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow R \xleftarrow{2} R \xleftarrow{2} \dots$$

In diesem Fall existiert keine freie Auflösung endlicher Länge.

3.78. LEMMA. *Es sei  $R$  ein Ring, es sei  $f: M \rightarrow M'$  linear, und  $(M_\bullet, \partial_\bullet)$ ,  $(M'_\bullet, \partial'_\bullet)$  freie Auflösungen. Dann existieren  $R$ -lineare Abbildungen  $f_i$ , so dass das Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & M & \xleftarrow{\varepsilon} & M_0 & \xleftarrow{\partial_0} & M_1 & \longleftarrow & \dots \\ & & \downarrow f & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \\ 0 & \longleftarrow & M' & \xleftarrow{\varepsilon'} & M'_0 & \xleftarrow{\partial'_0} & M'_1 & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

*kommutiert, und jede andere Wahl  $f'_i$  solcher Abbildungen ist kettenhomotop zu  $f_\bullet$ .*

Mit anderen Worten gibt es zu jeder Abbildung  $f: M = H_0(M_\bullet, \partial_\bullet) \rightarrow M' = H_0(M'_\bullet, \partial'_\bullet)$  eine Kettenabbildung  $f_\bullet$  mit  $f_{*0} = f$ , und diese ist bis auf Kettenhomotopie eindeutig. Insbesondere sind je zwei freie Auflösungen eines gegebenen Moduls  $M$  kettenhomotopieäquivalent.

BEWEIS. Wir setzen  $f_{-1} = f$ ,  $\partial_{-1}, \partial'_{-1} = 0$ ,  $\partial_0 = \varepsilon$ ,  $\partial'_0 = \varepsilon'$ , und gehen induktiv vor. Da  $M_i$  frei ist, finden wir eine Teilmenge  $E_i \subset M_i$  mit  $M_i = \langle E_i \rangle_R$ . Wir definieren  $f_i$ , indem wir für alle  $e \in E_i$  ein  $f_i(e) \in M'_i$  auswählen, so dass

$$\partial'_i(f_i(e)) = (f_{i-1} \circ \partial_i)(e),$$

und dann gemäß Proposition 3.67 (1) auf  $M_i = \langle E_i \rangle_R$  fortsetzen. Da im  $\partial'_i = \ker \partial'_{i-1}$ , finden wir  $f_i(e)$  genau dann, wenn die rechte Seite geschlossen ist. Aber das ist nach Induktionsvoraussetzung der Fall, denn

$$\partial'_{i-1}(f_{i-1} \circ \partial_i)(e) = (f_{i-2} \circ \partial_{i-1} \circ \partial_i)(e) = 0.$$

Damit ist die Existenz der  $f_i$  gezeigt.

Seien jetzt  $f_i, f'_i$  wie oben gegeben mit  $f_{-1} = f'_{-1} = f$ . Wir wollen induktiv eine Kettenhomotopie  $h_i: M_i \rightarrow M'_{i+1}$  zwischen  $f_\bullet$  und  $f'_\bullet$  konstruieren, und starten mit  $h_{-1} = 0: M \rightarrow M'_0$ . Dann gilt bereits

$$f'_{-1} - f_{-1} = 0 = \partial'_0 \circ h_{-1}.$$

Sei  $h_{i-1}$  bereits konstruiert und  $e \in E_i \subset M_i$  wie oben. Gesucht ist also  $h_i(e) \in M'_{i+1}$  mit

$$\partial'_{i+1}(h_i(e)) = f'_i(e) - f_i(e) - h_{i-1}(\partial_i(e)) .$$

Wegen der Exaktheit von  $(M'_\bullet, \partial'_\bullet)$  finden wir  $h_i(e)$  genau dann, wenn die obige rechte Seite geschlossen ist. Das ist der Fall, denn

$$\partial'_i(f'_i(e) - f_i(e) - h_{i-1}(\partial_i(e))) = (f'_{i-1} - f_{i-1} - \partial'_i \circ h_{i-1})(\partial_i(e)) = (h_{i-2} \circ \partial_{i-1})(\partial_i(e)) = 0 .$$

Also existiert die gesuchte Kettenhomotopie  $h$ .  $\square$

3.79. DEFINITION. Es seien  $M, N \in \mathcal{M}od_R$ , und es sei  $(M_\bullet, \partial_\bullet)$  eine freie Auflösung von  $R$ . Dann sind die *Torsionsprodukte*  $\text{Tor}_i^R(M, N)$  von  $M$  und  $N$  über  $R$  definiert durch

$$\text{Tor}_i^R(M, N) = H_i(M_\bullet \otimes_R N, \partial_\bullet \otimes \text{id}_N) \in \mathcal{M}od_R .$$

Hierbei sind  $\partial_i \otimes \text{id}_N: M_i \otimes_R N \rightarrow M_{i-1} \otimes_R N$  für  $i \geq 1$  die Abbildungen aus Proposition 3.72. Insbesondere gilt  $(\partial_i \otimes \text{id}_N) \circ (\partial_{i+1} \otimes \text{id}_N) = (\partial_i \circ \partial_{i+1}) \otimes \text{id}_N = 0$ , also erhält man tatsächlich einen Kettenkomplex

$$0 \longleftarrow M_0 \otimes_R N \xleftarrow{\partial_1 \otimes \text{id}_N} M_1 \otimes_R N \longleftarrow \dots$$

Man beachte, dass  $M \otimes_R N$  hier nicht mehr auftritt.

3.80. BEMERKUNG. Wir sammeln elementare Eigenschaften der Torsionsprodukte.

- (1) Es seien  $M, M', N \in \mathcal{M}od_R$ , und  $(M_\bullet, \partial_\bullet), (M'_\bullet, \partial'_\bullet)$  freie Auflösungen. Sei  $f: M \rightarrow M'$  linear, dann wähle  $f_\bullet: M_\bullet \rightarrow M'_\bullet$  wie in Lemma 3.78. Tensorieren mit  $N$  liefert

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & M \otimes_R N & \xleftarrow{\varepsilon \otimes \text{id}_N} & M_0 \otimes_R N & \xleftarrow{\partial_1 \otimes \text{id}_N} & M_1 \otimes_R N \longleftarrow \dots \\ & & \downarrow f \otimes \text{id}_N & & \downarrow f_0 \otimes \text{id}_N & & \downarrow f_1 \otimes \text{id}_N \\ 0 & \longleftarrow & M' \otimes_R N & \xleftarrow{\varepsilon' \otimes \text{id}_N} & M'_0 \otimes_R N & \xleftarrow{\partial'_1 \otimes \text{id}_N} & M'_1 \otimes_R N \longleftarrow \dots \end{array}$$

Nach Proposition 3.72 (2) erhalten wir ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen, also Abbildungen

$$\text{Tor}_i^R(f, \text{id}_N) = (f_\bullet \otimes \text{id}_N)_*: \text{Tor}_i^R(M, N) \rightarrow \text{Tor}_i^R(M', N) .$$

Da alle Wahlen von  $f_\bullet$  zueinander kettenhomotop sind und daher kettenhomotope Kettenabbildungen  $f_\bullet \otimes \text{id}_N$  liefern, hängt  $\text{Tor}_i^R(f, \text{id}_N)$  nicht von der Wahl der  $f_\bullet$  ab.

- (2) Wir betrachten den Spezialfall  $M = M'$  und  $f = \text{id}_M: M \rightarrow M'$  und erhalten

$$\text{Tor}_i^R(f, \text{id}_N): H_i(M_\bullet \otimes_R N, \partial_\bullet \otimes \text{id}_N) \rightarrow H_i(M'_\bullet \otimes_R N, \partial'_\bullet \otimes \text{id}_N) .$$

Für  $g = \text{id}_M: M' \rightarrow M$  erhalten wir umgekehrt

$$\text{Tor}_i^R(g, \text{id}_N): H_i(M'_\bullet \otimes_R N, \partial'_\bullet \otimes \text{id}_N) \rightarrow H_i(M_\bullet \otimes_R N, \partial_\bullet \otimes \text{id}_N) .$$

Nach Lemma 3.78 sind  $g_\bullet \circ f_\bullet$  und  $f_\bullet \circ g_\bullet$  jeweils kettenhomotop zu  $\text{id}_{M_\bullet}$  beziehungsweise  $\text{id}_{M'_\bullet}$ . Tensorieren mit  $\text{id}_N$  ändert daran nichts, also sind  $\text{Tor}_i^R(f, \text{id}_N)$  und  $\text{Tor}_i^R(g, \text{id}_N)$  zueinander inverse Isomorphismen. Es folgt mit (1), dass  $\text{Tor}_i^R(\cdot, N)$  ein bis auf eindeutige Isomorphismen eindeutig bestimmter Funktor von  $\mathcal{M}od_R$  in sich ist.

- (3) Nach Übung 3.150 ist die Sequenz

$$0 \longleftarrow M \otimes_R N \xleftarrow{\varepsilon \otimes \text{id}_N} M_0 \otimes_R N \xleftarrow{\partial_1 \otimes \text{id}_N} M_1 \otimes_R N$$

exakt, und daher gilt

$$\text{Tor}_0^R(M, N) = (M_0 \otimes N) / \text{im}(\partial_1 \otimes \text{id}_N) = (M_0 \otimes N) / \ker(\varepsilon \otimes \text{id}_N) \cong M \otimes_R N .$$

- (4) Wir gehen wie in Übung 3.146 vor und tensorieren eine freie Auflösung  $(M_\bullet, \partial_\bullet)$  von  $M$  mit einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \longleftarrow N'' \longleftarrow N \longleftarrow N' \longleftarrow 0.$$

Dies liefert eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen, und daher eine lange exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow M \otimes_R N'' \longleftarrow M \otimes_R N \longleftarrow M \otimes_R N' \longleftarrow \text{Tor}_1^R(M, N'') \longleftarrow \text{Tor}_1^R(M, N) \longleftarrow \dots$$

Man sieht hieran, dass Tensorieren mit einem festen Modul  $M$  die Exaktheit kurzer Sequenzen nicht erhält, sobald  $\text{Tor}_1^R(M, N'') \neq 0$ . Man sagt dazu, dass das Tensorprodukt *rechtsexakt* ist (wobei man Sequenzen anders als hier von links nach rechts schreibt), und nennt  $\text{Tor}_i^R(M, \cdot) = L_i(M \otimes_R \cdot)$  den zugehörigen *linksderivierten Funktor*.

- (5) Die Torsionsprodukte  $\text{Tor}_\bullet^R$  sind mit direkten Summen verträglich. Sei etwa  $(M_\bullet^i, \partial_\bullet^i)$  eine freie Auflösung von  $M^i$ , dann ist  $(\bigoplus M_\bullet^i, \bigoplus \partial_\bullet^i)$  eine freie Auflösung von  $M = \bigoplus M^i$ . Aus Bemerkung 3.73 (4) folgt, dass der Komplex in Definition 3.79 in eine direkte Summe  $(\bigoplus M_\bullet^i \otimes N, \bigoplus \partial_\bullet^i \otimes \text{id}_N)$  zerfällt, also

$$\text{Tor}_\bullet^R\left(\bigoplus_{i \in I} M^i, N\right) = \bigoplus_{i \in I} \text{Tor}_\bullet^R(M^i, N).$$

Analog behandelt man den Fall  $N = \bigoplus N^i$ .

- (6) Die Torsionsprodukte  $\text{Tor}_i^R(M, N)$  sind kommutativ, was aber aufgrund der asymmetrischen Definition nicht ganz so leicht zu zeigen ist.

3.81. BEISPIEL. Die Komplexität der Torsionsprodukte hängt vom Ring  $R$  und den Moduln  $M$  und  $N$  ab.

- (1) Sei  $M$  frei, dann ist  $0 \longleftarrow M \longleftarrow 0$  bereits eine freie Auflösung, und außer  $\text{Tor}_0^R(M, N) = M \otimes_R N$  verschwinden alle Torsionsprodukte. Das passiert insbesondere, wenn  $R = \mathbb{k}$  ein Körper ist.
- (2) Sei  $N = \langle E \rangle_R$  frei, dann zerlegt sich der Komplex  $(M_\bullet \otimes N, \partial_\bullet \otimes \text{id}_N)$  in eine direkte Summe von Komplexen der Form  $(M_\bullet \cdot e, \partial_\bullet)$ , und wir erhalten wieder  $\text{Tor}_i^R(M, N) = 0$  für  $i > 0$ .
- (3) Sei  $R$  ein Hauptidealring,  $M \in \text{Mod}_R$ , und

$$0 \longleftarrow M_0 \xleftarrow{\partial_1} M_1 \longleftarrow 0$$

eine freie Auflösung wie in Beispiel 3.77 (2). Dann folgt  $\text{Tor}_i^R(M, N) = 0$  für alle  $i \geq 2$ . Um  $\text{Tor}_1^R(M, N)$  für endlich erzeugte Moduln zu berechnen, reicht es wegen Bemerkung 3.70 (2) und den Punkten (1) und (2) oben, den Fall  $M = R/aR$  und  $N = R/bR$  zu betrachten.

Wir wählen die Auflösung

$$0 \longleftarrow M \xleftarrow{\varepsilon} R \xleftarrow{a} R \longleftarrow 0$$

und erhalten den Komplex

$$0 \longleftarrow R/bR \xleftarrow{a} R/bR \longleftarrow 0.$$

Wie in Aufgabe 3.145 gilt  $x \cdot \bar{1} \in \ker(\cdot a) \subset R/bR$  genau dann, wenn es  $y \in R$  gibt mit  $ax = by$ . Äquivalent dazu gilt

$$\frac{b}{\text{ggt}(a, b)} \mid x,$$

und es folgt

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/aR, R/bR) = \ker(\cdot a) = \frac{b}{\mathrm{ggT}(a,b)} R/bR \cong R/\mathrm{ggT}(a,b)R \cong (R/aR) \otimes_R (R/bR) .$$

Insgesamt folgt für endlich erzeugte  $R$ -Moduln, dass

$$\mathrm{Tor}_1^R(M, N) \cong \mathrm{Tor}_R M \otimes_R \mathrm{Tor}_R N ,$$

daher der Name „Torsionsprodukt“. Wenn einer der Faktoren nicht endlich erzeugt ist, muss das nicht mehr stimmen, siehe Übung 3.152 (3) und (4).

Wenn  $R$  ein Hauptidealring ist, schreiben wir später nur  $\mathrm{Tor}_R$  für  $\mathrm{Tor}_1^R$ . Da das Torsionsprodukt stets zwei Argumente braucht, können wir es vom Torsionsuntermodul aus Definition 3.68 unterscheiden.

Nach dieser langen Vorbereitung können wir jetzt den universellen Koeffizientensatz beweisen. Wir erinnern uns an den Begriff der spaltenden Sequenz aus Beispiel 3.6 (1). Um eine Sequenz der Form

$$0 \longleftarrow M'' \xleftarrow{q} M \xleftarrow{i} M' \longleftarrow 0$$

zu spalten, reicht es, ein Rechtsinverses  $j$  zu  $q$  oder ein Linksinverses  $p$  zu  $i$  anzugeben, danach erhält man  $M = \mathrm{im} i \oplus \mathrm{im} j$  beziehungsweise  $M = \ker p \oplus \ker q$ . Wir nennen eine Spaltung *natürlich*, wenn man  $j$  oder  $p$  natürlich wählen kann.

3.82. SATZ (Universelle Koeffizienten, Homologie). *Sei  $R$  ein Hauptidealring und  $M \in \mathrm{Mod}_R$ . Dann existiert eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow H_k(X; R) \otimes_R M \longrightarrow H_k(X; M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_R(H_{k-1}(X; R), M) \longrightarrow 0$$

für alle  $X \in \mathrm{Top}$  und alle  $k \in \mathbb{N}$ . Diese Sequenz spaltet, aber nicht auf natürliche Weise.

BEWEIS. Wir betrachten den singulären Kettenkomplex  $C_\bullet = C_\bullet(X; R)$  von  $X$  und erhalten für jedes  $k$  eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow B_{k-1} \xleftarrow{\partial_k} C_k \xleftarrow{i_k} Z_k \longleftarrow 0 . \quad (1)$$

Als Untermodul von  $C_\bullet = \langle S_\bullet(X) \rangle_R$  sind  $B_\bullet$  und  $Z_\bullet$  nach Bemerkung 3.70 (1) ebenfalls frei. Indem wir für freie Erzeuger von  $B_{k-1}$  Urbilder unter  $\partial_k$  in  $C_k$  wählen, können wir eine Abbildung  $s: B_{k-1} \rightarrow C_k$  mit  $\partial_k \circ s = \mathrm{id}_{B_{k-1}}$  konstruieren, und die Sequenz (1) spaltet. Tensorieren mit  $M$  liefert also eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow B_{k-1} \otimes_R M \longleftarrow \underbrace{B_{k-1} \otimes_R M \oplus Z_k \otimes_R M}_{=C_k \otimes_R M} \longleftarrow Z_k \otimes_R M \longleftarrow 0$$

Wir fassen das als kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen mit Differential  $\partial_\bullet \otimes \mathrm{id}_M$  auf, wobei  $\partial_\bullet|_{B_0} = \partial_\bullet|_{Z_0} = 0$ . Das Schlangenlemma 3.44 liefert eine lange exakte Sequenz

$$\dots \longleftarrow B_{k-1} \otimes_R M \xleftarrow{(\partial_k \otimes \mathrm{id}_M)^*} H_k(X; M) \longleftarrow Z_k \otimes_R M \longleftarrow B_k \otimes_R M \longleftarrow \dots \quad (2)$$

Eine kurze Diagrammjagd im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & B_k \otimes_R M & \xleftarrow{\partial_{k+1} \otimes \mathrm{id}_M} & C_{k+1} \otimes_R M & \longleftarrow & Z_{k+1} \otimes_R M \longleftarrow 0 \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow \partial_{k+1} \otimes \mathrm{id}_M & & \downarrow 0 \\ 0 & \longleftarrow & B_{k-1} \otimes_R M & \longleftarrow & C_k \otimes_R M & \xleftarrow{i_k \otimes \mathrm{id}_M} & Z_k \otimes_R M \longleftarrow 0 \end{array}$$

zeigt, dass der Verbindungshomomorphismus von der Inklusion  $j_k: B_k \rightarrow Z_k$  induziert wird:

$$j_k \otimes \mathrm{id}_M: B_k \otimes_R M \rightarrow Z_k \otimes_R M .$$

Jetzt können wir die Exaktheit von (2) bei  $H_k(X; M)$  umschreiben als kurze exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow \ker(j_{k-1} \otimes \text{id}_M) \longleftarrow H_k(X; M) \longleftarrow \text{coker}(j_k \otimes \text{id}_M) \longleftarrow 0 .$$

Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow H_k(X; R) \longleftarrow Z_k \xleftarrow{j_k} B_k \longleftarrow 0 \quad (3)$$

als freie Auflösung des Moduls  $H_k(X; R)$ . Aus Definition 3.79 und Bemerkung 3.80 (3) folgt

$$\begin{aligned} \text{Tor}_R(H_k(X; R), M) &= \text{Tor}_1^R(H_k(X; R), M) = \ker(j_k \otimes \text{id}_M) , \\ H_k(X; R) \otimes_R M &= \text{Tor}_0^R(H_k(X; R), M) = \text{coker}(j_k \otimes \text{id}_M) . \end{aligned}$$

Damit ist die Sequenz im universellen Koeffiziententheorem exakt.

Da die Sequenz (2) nur natürliche Transformationen enthält, überzeugt man sich leicht, dass die Sequenz im Satz auch natürlich ist.

Wir konstruieren eine Spaltung mit Hilfe der (nicht natürlichen) Abbildung  $s: B_{k-1} \rightarrow C_k$  mit  $\partial_k \circ s = \text{id}_{B_{k-1}}$ . Wie in der Konstruktion des Verbindungshomomorphismus in (2) folgt

$$(\partial_k \otimes \text{id}_M) \circ (s \otimes \text{id}_M) = (i_{k-1} \otimes \text{id}_M) \circ (j_{k-1} \otimes \text{id}_M) ,$$

insbesondere  $(s \otimes \text{id}_M)(\ker(j_{k-1} \otimes \text{id}_M)) \subset \ker(\partial_k \otimes \text{id}_M)$ . Also induziert  $s \otimes \text{id}_M$  eine Abbildung

$$(s \otimes \text{id}_M): \ker(j_{k-1} \otimes \text{id}_M) \rightarrow H_k(X; M) ,$$

die die Sequenz im Satz spaltet. □

Im Beweis haben wir ausgenutzt, dass  $B_\bullet$  frei ist, da  $R$  ein Hauptidealring ist. In der Tat ist die universelle Koeffizientensequenz über beliebigen Ringen nicht immer exakt, siehe Übung 3.151.

**3.83. BEISPIEL.** Wir betrachten den reell projektiven Raum  $\mathbb{R}P^n$  aus Beispiel 3.30. Für die unreduzierte Homologie folgt

$$H_k(\mathbb{R}P^n) \cong H_k^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0 , \\ \mathbb{Z} & \text{falls } k = n \text{ ungerade} , \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } k \text{ ungerade und } 0 < k < n , \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

Wir betrachten  $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \in \text{Mod}_{\mathbb{Z}}$ . Für  $k = 0$  erhalten wir immer

$$0 \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M}_{\cong M} \longrightarrow H_0(\mathbb{R}P^n; M) \longrightarrow \text{Tor}_R(0, M) \longrightarrow 0 ,$$

also folgt  $H^0(\mathbb{R}P^n; M) = M$ . Für alle ungeraden  $k \in (0, n)$  ist  $H_{k+1}(\mathbb{R}P^n) = 0$  und  $H_{k-1}(\mathbb{R}P^n)$  ist zumindest torsionsfrei. Also betrachten wir

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M & \longrightarrow & H_k(\mathbb{R}P^n; M) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \\ & & 0 & \longrightarrow & H_{k+1}(\mathbb{R}P^n; M) & \longrightarrow & \text{Tor}_R(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, M) \longrightarrow 0 \end{array}$$

und erhalten in beiden Fällen den Modul  $M$ . Für ungerade  $n$  ist außerdem  $H_n(\mathbb{R}P^n; M) \cong M$  wie im Fall  $k = 0$ . Insgesamt gilt also

$$H_k(\mathbb{R}P^n; M) \cong \begin{cases} M & \text{für } 0 \leq k \leq n , \text{ und} \\ 0 & \text{sonst} , \end{cases}$$

genau wie Übung 3.136 (2).

3.84. BEMERKUNG. Im Beweis von Satz 3.82 haben wir nur ausgenutzt, dass es einen freien Kettenkomplex  $(C_\bullet, \partial_\bullet)$  gibt, dessen Homologie gerade  $H_\bullet(X)$  liefert, und dass sein Tensorprodukt mit  $M$  einen Komplex  $(C_\bullet \otimes_R M, \partial_\bullet \otimes \text{id}_M)$  mit Homologie  $H_\bullet(X; M)$  ergibt. Mit dem gleichen Beweis erhalten wir daher analoge kurze exakte Sequenzen für die Homologie von Paaren und für die singuläre reduzierte Homologie.

$$0 \rightarrow H_k(X, A; R) \otimes_R M \rightarrow H_k(X, A; M) \rightarrow \text{Tor}_R(H_{k-1}(X, A; R), M) \rightarrow 0, \quad (1)$$

$$0 \rightarrow \tilde{H}_k(X; R) \otimes_R M \rightarrow \tilde{H}_k(X; M) \rightarrow \text{Tor}_R(\tilde{H}_{k-1}(X; R), M) \rightarrow 0. \quad (2)$$

Auch der zelluläre Kettenkomplex  $(\tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(X; R), d_\bullet^{\text{CW}})$  besteht aus freien  $R$ -Moduln, und wir erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \tilde{H}_k^{\text{CW}}(X; R) \otimes_R M \rightarrow \tilde{H}_k^{\text{CW}}(X; M) \rightarrow \text{Tor}_R(\tilde{H}_{k-1}^{\text{CW}}(X; R), M) \rightarrow 0, \quad (3)$$

und analog für die Komplexe aus Bemerkung 3.34.

Im nächsten Beispiel nutzen wir aus, dass die universelle Koeffizientensequenz auch für die zelluläre Hohomologie gilt, die wir leichter ausrechnen können.

3.85. BEISPIEL. In diesem Beispiel beschäftigen wir uns auch mit der Natürlichkeit der universellen Koeffizientensequenz. Es sei  $M_k^n$  der Moore-Raum aus Übung 3.145, mit

$$\tilde{H}_i^{\text{CW}}(M_k^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} & \text{für } i = n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das  $n$ -Skelett von  $M_k^n$  ist homöomorph zu  $S^n$ , mit Quotient  $M_k^n/S^n \cong S^{n+1}$ . Es sei  $F: M_k^n \rightarrow S^{n+1}$  die Quotientenabbildung. Wir erhalten die reduzierten zellulären Kettenkomplexe

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & M & \xleftarrow[\cdot k]{\partial_{n+1}} & M & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \dots \\ & & & & & \downarrow & F_{\#(n+1)} \downarrow = \text{id}_M & & \downarrow & & \\ \dots & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & M & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \dots & & \end{array}$$

mit Koeffizienten  $M$  für  $M_k^n$  in der oberen und für  $S^{n+1}$  in der unteren Zeile.

Der Einfachheit halber sei  $k = p$  prim und  $M = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Die universelle Koeffizientensequenz ist natürlich, also erhalten wir in Grad  $n + 1$  ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \overbrace{\tilde{H}_{n+1}^{\text{CW}}(M_p^n) \otimes_{\mathbb{Z}} M}^{=0} & \xrightarrow{0} & \overbrace{\tilde{H}_{n+1}^{\text{CW}}(M_p^n; M)}^{\cong M} & \xrightarrow{\cong} & \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(\overbrace{\tilde{H}_n^{\text{CW}}(M_p^n), M}^{\cong M}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow F_{*(n+1)} \downarrow = \text{id}_M & & \downarrow 0 & & \\ 0 & \longrightarrow & \underbrace{\tilde{H}_{n+1}^{\text{CW}}(S^{n+1}) \otimes_{\mathbb{Z}} M}_{\cong M} & \xrightarrow{\cong} & \underbrace{\tilde{H}_{n+1}^{\text{CW}}(S^{n+1}; M)}_{\cong M} & \xrightarrow[0]{} & \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(\underbrace{\tilde{H}_n^{\text{CW}}(S^{n+1}), M}_{\cong 0}) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

da  $F_{\#(n+1)} = \text{id}_M$ . Beide Sequenzen spalten auf eindeutige Weise wie im folgenden Diagramm.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longleftarrow & M & \xleftarrow{\text{id}_M} & M \\ \downarrow & & \downarrow \text{id}_M & & \downarrow \\ M & \xleftarrow{\text{id}_M} & M & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

Keines der beiden Quadrate kommutiert, das heißt, die Spaltung in Satz 3.82 ist nicht natürlich.

3.86. BEMERKUNG. Also liefert Satz 3.82 zwar eine Zerlegung von  $H_\bullet(X; M)$  als direkte Summe, sagt aber nicht genug über Abbildungen  $F_*: H_\bullet(X; M) \rightarrow H_\bullet(Y; M)$  aus. Als Blockmatrix geschrieben erhalten wir nur

$$\begin{pmatrix} F_{*n} \otimes_R \text{id}_M & * \\ 0 & \text{Tor}_R(F_{*(n-1)}, \text{id}_M) \end{pmatrix} : \begin{array}{c} H_n(X; R) \otimes_R M \\ \oplus \\ \text{Tor}_R(H_{n-1}(X; R), M) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} H_n(Y; R) \otimes_R M \\ \oplus \\ \text{Tor}_R(H_{n-1}(Y; R), M) \end{array}$$

Die linke Spalte wird durch das linke Quadrat im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_k(X; R) \otimes_R M & \longrightarrow & H_k(X; M) & \longrightarrow & \text{Tor}_R(H_{k-1}(X; R), M) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow F_{*k} \otimes \text{id}_M & & \downarrow & & \downarrow \text{Tor}_R(F_{*(k-1)}, \text{id}_M) \\ 0 & \longrightarrow & H_k(Y; R) \otimes_R M & \longrightarrow & H_k(Y; M) & \longrightarrow & \text{Tor}_R(H_{k-1}(Y; R), M) \longrightarrow 0 \end{array}$$

festgelegt, wonach  $H_k(X; R) \otimes_R M \subset H_k(X; M)$  von  $F_{*k} \otimes \text{id}_M$  auf  $H_k(Y; R) \otimes_R M \subset H_k(Y; M)$  abgebildet wird. Die untere Zeile der obigen Matrix kommt vom rechten Quadrat im Diagramm, wonach das Bild in  $\text{Tor}_R(H_{k-1}(Y; R), M)$  nur von  $\text{Tor}_R(H_{k-1}(X; R), M)$  bestimmt wird. Über die rechte obere Ecke erhalten wir keine Aussage. Also legt der Funktor  $H_\bullet(\cdot; R)$  den Funktor  $H_\bullet(\cdot; M)$  nur auf Objekten bis auf Isomorphie eindeutig fest, auf Morphismen jedoch nicht.

### 3.9. Homologie von Produkträumen

In diesem Kapitel beweisen wir die Künneth-Formel, die die Homologie eines topologischen Produktes mit dem Tensor- und dem Torsionsprodukt der Homologien der Faktoren in Beziehung setzt. Die Künneth-Formel hat die gleiche Struktur wie die universelle Koeffizientensequenz aus Satz 3.82. Eine gute Referenz für diesen Abschnitt ist das Buch von Spanier [S].

3.87. DEFINITION. Es seien  $(C_\bullet, \partial_\bullet)$  und  $(C'_\bullet, \partial'_\bullet)$  zwei Kettenkomplexe über  $R$ , dann definieren wir ihr *Tensor-* und ihr *Torsionsprodukt* durch

$$(C \otimes_R C')_k = \bigoplus_{a+b=k} C_a \otimes_R C_b \quad \text{und} \quad \text{Tor}_R(C, C')_k = \bigoplus_{a+b=k} \text{Tor}_R(C_a, C'_b)$$

mit den Randabbildungen

$$\begin{aligned} (\partial \otimes \partial') &= \bigoplus_{a+b=k} (\partial_a \otimes \text{id}_{C'_b} + (-1)^a \text{id}_{C_a} \otimes \partial'_b) \\ \text{Tor}_R(\partial, \partial')_k &= \bigoplus_{a+b=k} (\text{Tor}_R(\partial_a, \text{id}_{C'_b}) + (-1)^a \text{Tor}_R(\text{id}_{C_a}, \partial'_b)) . \end{aligned}$$

Die Vorzeichen sind so gewählt, dass

$$\begin{aligned} &(\partial \otimes \partial')_k \circ (\partial \otimes \partial')_{k+1} \\ &= \bigoplus_{a+b=k+1} \left( (-1)^{a-1} (\text{id}_{C_{a-1}} \otimes \partial'_b) \circ (\partial_a \otimes \text{id}_{C'_b}) + (\partial_a \otimes \text{id}_{C'_{b-1}}) \circ ((-1)^a (\text{id}_{C_a} \otimes \partial'_b)) \right) = 0 . \end{aligned}$$

Das Ziel dieses Abschnitts ist der folgende Satz. Dabei fassen wir  $H_\bullet(X; R)$  und  $H_\bullet(Y; R)$  als Kettenkomplexe mit trivialem Randoperator  $\partial_\bullet = 0$  auf.

3.88. SATZ (topologische Künneth-Formel). *Es seien  $X, Y$  topologische Räume und  $R$  ein Hauptidealring. Dann existiert eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \rightarrow (H(X; R) \otimes_R H(Y; R))_k \rightarrow H_k(X \times Y; R) \rightarrow (\text{Tor}_R(H(X; R), H(Y; R)))_{k-1} \rightarrow 0$$

für alle  $k$ . Diese Sequenz spaltet, aber nicht auf natürliche Weise.

Wir verallgemeinern diesen Satz später auch für Paare topologischer Räume, außerdem können wir gewisse Koeffizienten zulassen. Der Beweis besteht aus zwei Schritten. Zunächst zeigen wir analog zu Satz 3.82, dass die Homologie eines Tensorproduktes von Komplexen in einer kurzen exakten Sequenz mit Tensor- und Torsionsprodukt der Homologien der Faktoren steht. Anschließend beweisen wir den Satz von Eilenberg-Zilber, wonach der singuläre Kettenkomplex eines Produktes kettenhomotopieäquivalent zum Tensorprodukt der singulären Kettenkomplexe der Faktoren ist.

3.89. SATZ (algebraische Künneth-Formel). *Es seien  $(C_\bullet, \partial_\bullet)$  und  $(C'_\bullet, \partial'_\bullet)$  zwei Kettenkomplexe über einem Hauptidealring  $R$ , und  $C'_b$  sei frei für alle  $b \in \mathbb{Z}$ . Dann existiert eine natürliche kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow (H(C_\bullet, \partial_\bullet) \otimes_R H(C'_\bullet, \partial'_\bullet))_k \xrightarrow{\mu} H_k((C_\bullet, \partial_\bullet) \otimes_R (C'_\bullet, \partial'_\bullet)) \longrightarrow \text{Tor}_R(H(C_\bullet, \partial_\bullet), H(C'_\bullet, \partial'_\bullet))_{k-1} \longrightarrow 0$$

für alle  $k$ , mit  $\mu([c] \otimes [c']) = [c \otimes c']$ . Wenn auch  $C_a$  für alle  $a \in \mathbb{Z}$  frei ist, spaltet die obige Sequenz, aber nicht auf natürliche Weise.

BEWEIS. Wir kopieren den Beweis von Satz 3.82. Es bezeichnen  $Z'_\bullet$  und  $B'_\bullet$  die Unterkomplexe der Zyklen und Ränder von  $(C'_\bullet, \partial'_\bullet)$ , jeweils mit trivialem Randoperator. Nach Voraussetzung und Bemerkung 3.70 (1) sind alle  $Z'_k$  und  $B'_k \subset C'_k$  frei. Wir erhalten spaltende kurze exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow Z'_k \longrightarrow C'_k \xrightarrow{\partial'_k} B'_{k-1} \longrightarrow 0 \quad (1)$$

$$\text{und } 0 \longrightarrow (C \otimes Z')_k \longrightarrow (C \otimes C')_k \xrightarrow{\pm(\text{id}_C \otimes \partial')_k} (C \otimes B')_{k-1} \longrightarrow 0,$$

etwa, indem wir ein Rechtsinverses  $s_k: B'_{k-1} \rightarrow C'_k$  zu  $\partial'_k$  konstruieren. Das Vorzeichen von  $(\text{id}_C \otimes \partial')_k$  hängt wie in Definition 3.87 vom Grad in  $C_\bullet$  ab. Das Schlangenlemma 3.44 liefert die lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_k((C_\bullet, \partial_\bullet) \otimes_R (Z'_\bullet, 0)) \longrightarrow H_k((C_\bullet, \partial_\bullet) \otimes_R (C'_\bullet, \partial'_\bullet)) \\ \longrightarrow H_{k-1}((C_\bullet, \partial_\bullet) \otimes_R (B'_\bullet, 0)) \xrightarrow{(\text{id}_C \otimes j)_{k-1}} H_{k-1}((C_\bullet, \partial_\bullet) \otimes_R (Z'_\bullet, 0)) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Wie im Beweis von Satz 3.82 überprüft man, dass die Inklusion  $j_\bullet: B'_\bullet \rightarrow Z'_\bullet$  den Verbindungshomorphismus induziert.

Da die Komplexe  $Z'_\bullet$  und  $B'_\bullet$  keinen Randoperator haben und frei sind, folgt mit Satz 3.82 oder direkt wie in Bemerkung 3.80 (5), dass

$$\begin{aligned} H_k((C_\bullet, \partial_\bullet) \otimes_R (Z'_\bullet, 0)) &\cong (H(C_\bullet, \partial_\bullet) \otimes_R Z'_\bullet)_k \\ \text{und } H_k((C_\bullet, \partial_\bullet) \otimes_R (B'_\bullet, 0)) &\cong (H(C_\bullet, \partial_\bullet) \otimes_R B'_\bullet)_k. \end{aligned}$$

Wir erhalten also eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{coker}(\text{id}_{H(C_\bullet, \partial_\bullet)} \otimes j)_k \longrightarrow H_k((C_\bullet, \partial_\bullet) \otimes_R (C'_\bullet, \partial'_\bullet)) \longrightarrow \ker(\text{id}_{H(C_\bullet, \partial_\bullet)} \otimes j)_{k-1} \longrightarrow 0.$$

Indem wir die freie Auflösung

$$0 \longleftarrow H_q(C'_\bullet, \partial'_\bullet) \longleftarrow Z'_q \xleftarrow{j_q} B'_q \longleftarrow 0$$

betrachten, schließen wir, dass

$$\begin{aligned} \text{coker}(\text{id}_{H(C_\bullet, \partial_\bullet)} \otimes j)_k &\cong (H(C_\bullet, \partial_\bullet) \otimes_R H(C'_\bullet, \partial'_\bullet))_k \\ \text{und } \ker(\text{id}_{H(C_\bullet, \partial_\bullet)} \otimes j)_{k-1} &\cong \text{Tor}_R(H(C_\bullet, \partial_\bullet), H(C'_\bullet, \partial'_\bullet))_{k-1}. \end{aligned}$$

Damit ist die Exaktheit der Sequenz in der Proposition bewiesen. Man überzeugt sich, dass die Abbildung  $\mu$  die obige Gestalt hat.

Wenn  $C_\bullet$  und  $C'_\bullet$  frei sind, spaltet (1) und die analoge Sequenz für  $C_\bullet$ . Also finden wir Linksinverse  $p_\bullet: C_\bullet \rightarrow Z_\bullet$  und  $p'_\bullet: C'_\bullet \rightarrow Z'_\bullet$  zu den Inklusionen  $Z_\bullet \rightarrow C_\bullet$  beziehungsweise  $Z'_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ . Dann ist  $(p \otimes p')_\bullet$  ein Linksinverse zu  $\mu$ , falls wir zeigen können, dass  $\mu$  auf  $H_\bullet((C_\bullet, \partial_\bullet) \otimes_R (C'_\bullet, \partial'_\bullet))$  wohldefiniert ist. Aber das ist der Fall, denn

$$(p \otimes p')(\partial_C \otimes C' \pm C \otimes \partial' C') \in B_\bullet \otimes Z'_\bullet + Z_\bullet \otimes B'_\bullet \in \ker(Z_\bullet \otimes Z'_\bullet \rightarrow H_\bullet \otimes H'_\bullet).$$

Also spaltet in die Sequenz in diesem Fall, und die Proposition ist bewiesen.  $\square$

Um zu verstehen, warum die Spaltung nicht immer natürlich ist, ersetzen wir Beispiel 3.85 den Modul  $M = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  durch den freien Komplex

$$(C'_\bullet, \partial'_\bullet) = (0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\cdot p} \mathbb{Z} \longleftarrow 0)$$

mit  $H_k(C'_\bullet, \partial'_\bullet) = M$  für  $k = 0$  und  $0$  sonst. Damit erhalten wir das gleiche Diagramm für die Homologie-Moduln wie im Beispiel.

Als nächstes müssen wir zeigen, dass die Komplexe  $C_\bullet(X \times Y; R)$  und  $C_\bullet(X; R) \otimes_R C_\bullet(Y; R)$  kettenhomotopieäquivalent sind. Die entsprechenden Kettenabbildungen lassen sich mit etwas Mühe von Hand konstruieren. Einfacher geht es mit der Methode der azyklischen Modelle.

3.90. DEFINITION. Es sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $\mathcal{M} \subset \text{obj } \mathcal{C}$  eine Menge von Objekten.

- (1) Ein Funktor  $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \text{Mod}_R$  heißt *frei* mit *Modellen*  $\mathcal{M}$ , wenn Familien  $(M_i)_{i \in I}$  und  $(m_i)_{i \in I}$  mit  $M_i \in \mathcal{M}$  und  $m_i \in \mathcal{F}(M_i)$  für alle  $i \in I$  existieren, so dass

$$\mathcal{F}(X) = \langle \{ \mathcal{F}f(m_i) \mid i \in I, f \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(M_i, X) \} \rangle_R$$

für alle Objekte  $X$  von  $\mathcal{C}$  gilt. In diesem Fall heißt  $(m_i \in \mathcal{F}(M_i))_{i \in I}$  eine *Basis* von  $\mathcal{F}$ .

- (2) Ein Funktor  $\mathcal{F}_\bullet: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ch}_R$  heißt *frei* mit *Modellen*  $\mathcal{M}$ , wenn alle  $\mathcal{F}_k: \mathcal{C} \rightarrow \text{Mod}_R$  frei mit Modellen  $\mathcal{M}$  sind. Wir nennen  $\mathcal{F}_\bullet$  frei mit *azyklischen Modellen*  $\mathcal{M}$ , wenn  $\mathcal{F}_k(X) = 0$  für alle Objekte  $X$  und alle  $k < 0$ , und wenn  $H_k(\mathcal{F}_\bullet(M)) = 0$  für alle  $M \in \mathcal{M}$  und alle  $k \neq 0$ .

3.91. BEISPIEL. Wir betrachten zwei Beispiele dieser recht allgemeinen Konstruktion.

- (1) Es sei  $\mathcal{C} = \text{Top}$  und  $\mathcal{M} = \{ \Delta^k \mid k \geq 0 \} \subset \text{obj } \text{Top}$ . Der singuläre Kettenfunktor  $C_\bullet$  ist frei, dazu wählen wir als Basis von  $C_k$  das Element  $\text{id}_{\Delta^k} \in C_k(\Delta^k; R)$ , denn

$$C_k(X; R) = \langle S_k(X) \rangle_R = \langle \{ \sigma_{\#k} \text{id}_{\Delta^k} \mid \sigma \in C^0(\Delta^k, X) \} \rangle_R.$$

Außerdem gilt  $C_k(X; R)$  für alle  $k < 0$  und

$$H_j(C_\bullet(\Delta^k; R), \partial_\bullet) \cong H_j(*; R) = 0$$

für alle  $j \neq 0$ , also ist  $C_\bullet(\cdot; R)$  ein freier Funktor mit azyklischen Modellen  $\{ \Delta^k \mid k \geq 0 \}$ .

- (2) Es sei  $\mathcal{C}$  die Kategorie mit nur einem Objekt  $*$  und einem Morphismus  $\text{id}_*$ . Ein Funktor  $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ch}_R$  ist also nur ein Kettenkomplex  $(M_\bullet, \partial_\bullet) = \mathcal{F}_\bullet*$ . Er ist frei mit Modellen  $\{*\}$ , wenn alle  $M_k$  frei sind, als Basis wähle je eine Basis  $(m_{k,i})_{i \in I_k}$  von  $M_k = \mathcal{F}_k*$ . Er ist frei mit azyklischen Modellen  $\{*\}$  genau dann, wenn  $(M_\bullet, \partial_\bullet)$  eine freie Auflösung von  $H_0(M_\bullet, \partial_\bullet) \in \text{Mod}_R$  ist.

3.92. BEMERKUNG. Es sei  $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \text{Mod}_R$  ein freier Funktor mit Modellen  $\mathcal{M}$  und Basis  $(m_i \in \mathcal{F}M_i)_{i \in I}$ . Sei jetzt  $g \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  ein Morphismus, dann erhalten wir die Wirkung von  $\mathcal{F}g$  auf Basiselemente  $\mathcal{F}f(m_i) \in \mathcal{F}(X)$  für  $f \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(M_i, X)$  und  $i \in I$  durch

$$\mathcal{F}g(\mathcal{F}f(m_i)) = \mathcal{F}(g \circ f)(m_i) \in \mathcal{F}(Y),$$

also bildet  $\mathcal{F}g$  Basiselemente auf Basiselemente ab. Im obigen Beispiel 3.91 (1) erhalten wir gerade

$$g_{\#k}(\sigma) = g_{\#k}(\sigma_{\#k} \text{id}_{\Delta^k}) = (g \circ \sigma)_{\#k} \text{id}_{\Delta^k} = g \circ \sigma$$

wie in Definition 3.37.

3.93. SATZ (Azyklische Modelle). *Es seien  $\mathcal{F}_\bullet, \mathcal{F}'_\bullet: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ch}_R$  zwei freie Funktoren mit azyklischen Modellen  $\mathcal{M} \subset \text{obj } \mathcal{C}$ . Es sei  $f: H_0 \circ \mathcal{F}_\bullet \rightarrow H_0 \circ \mathcal{F}'_\bullet$  eine natürliche Transformation. Dann existiert eine natürliche Kettenabbildung  $f_\bullet: \mathcal{F}_\bullet \rightarrow \mathcal{F}'_\bullet$  mit  $f_{*0} = H_0 f_\bullet = f$ , und je zwei solche natürlichen Kettenabbildungen sind auf natürliche Weise kettenhomotop.*

Insbesondere legt  $f = H_0 f_\bullet$  damit eindeutige natürliche Transformationen  $H_k f_\bullet$  für alle  $k \geq 1$  fest, die nicht von der Wahl der Kettenabbildung  $f_\bullet$  abhängen.

Im Beispiel 3.91 (1) reduziert sich dieser Satz auf das Lemma 3.78 über Abbildungen zwischen freien Auflösungen. In der Tat ist der Beweis dieses Satzes eine Verallgemeinerung des obigen Beweises.

BEWEIS. Wir definieren zwei neue Funktoren  $\overline{\mathcal{F}}_\bullet, \overline{\mathcal{F}}'_\bullet: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ch}_R$ , indem wir für alle  $X \in \text{obj } \mathcal{C}$  den Komplex  $\mathcal{F}_\bullet(X)$  durch  $H_0 \mathcal{F}_\bullet(X)$  augmentieren:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xleftarrow{\partial_{-1}} & H_0 \mathcal{F}_\bullet(X) & \xleftarrow{\partial_0} & \mathcal{F}_0(X) & \xleftarrow{\partial_1} & \mathcal{F}_1(X) & \xleftarrow{\quad} & \dots \\ & & \downarrow f_{-1,X} = f_X & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \\ 0 & \xleftarrow{\partial'_{-1}} & H_0 \mathcal{F}'_\bullet(X) & \xleftarrow{\partial'_0} & \mathcal{F}'_0(X) & \xleftarrow{\partial'_1} & \mathcal{F}'_1(X) & \xleftarrow{\quad} & \dots \end{array}$$

Dann sind  $\overline{\mathcal{F}}_\bullet(M), \overline{\mathcal{F}}'_\bullet(M)$  für alle Modelle  $M \in \mathcal{M}$  azyklisch, sogar in Grad 0.

Wir konstruieren induktiv natürliche Transformationen  $f_k: \overline{\mathcal{F}}_k \rightarrow \overline{\mathcal{F}}'_k$ , so dass insgesamt eine natürliche Kettenabbildung  $\overline{f}_\bullet: \overline{\mathcal{F}}_\bullet \rightarrow \overline{\mathcal{F}}'_\bullet$  entsteht. Dabei ist  $f_{-1} = f$  bereits vorgegeben. Für  $k \geq 0$  ist  $\overline{\mathcal{F}}_k = \mathcal{F}_k$  frei, also gilt

$$\overline{F}_k(X) = \langle \{ \mathcal{F}_k a(m_{k,i}) \mid i \in I_k \text{ und } a \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(M_{k,i}, X) \} \rangle_R,$$

wobei  $(m_{k,i} \in \mathcal{F}_k(M_{k,i}))_{i \in I_k}$  eine Basis von  $\mathcal{F}_k$  ist. Es reicht also,  $f_{k,X}: \mathcal{F}_k(X) \rightarrow \mathcal{F}'_k(X)$  auf den genannten Basiselementen festzulegen. Nun soll  $f_k$  aber natürlich sein, das heißt, für jedes  $i \in I_k$  und jedes  $a \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(M_{k,i}, X)$  soll das linke Quadrat im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}_k M_{k,i} & \xrightarrow{\mathcal{F}_k a} & \mathcal{F}_k X & \xrightarrow{\mathcal{F}_k g} & \mathcal{F}_k Y \\ f_{k,M_{k,i}} \downarrow & & \downarrow f_{k,X} & & \downarrow f_{k,Y} \\ \mathcal{F}'_k M_{k,i} & \xrightarrow{\mathcal{F}'_k a} & \mathcal{F}'_k X & \xrightarrow{\mathcal{F}'_k g} & \mathcal{F}'_k Y \end{array}$$

kommutieren, also reicht es,  $m'_{k,i} = f_{k,M_{k,i}}(m_{k,i}) \in \mathcal{F}'_k M_{k,i}$  festzulegen. Wir erhalten dann wohldefinierte  $R$ -lineare Abbildungen  $f_{k,X}$  mit

$$f_{k,X}(\mathcal{F}_k a(m_{k,i})) = \mathcal{F}'_k a(m'_{k,i}).$$

Insgesamt erhalten wir eine natürliche Transformation  $f_k$ , denn für  $g \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  folgt

$$(\mathcal{F}'_k g \circ f_{k,X})(\mathcal{F}_k a(m_{k,i})) = \mathcal{F}'_k(g \circ a)(f_{k,M_{k,i}}(m_{k,i})) = (f_{k,Y} \circ \mathcal{F}_k g)(\mathcal{F}_k a(m_{k,i}))$$

für alle Basiselemente wie im obigen Diagramm, also  $\mathcal{F}'_k g \circ f_{k,X} = f_{k,Y} \circ \mathcal{F}_k g$ .

Wir nehmen an, dass  $f_{k-1}$  bereits konstruiert ist, und zwar natürlich, und so, dass

$$\partial'_{k-1} \circ f_{k-1} = f_{k-2} \circ \partial_{k-1}: \mathcal{F}_{k-1} \rightarrow \mathcal{F}'_{k-2}.$$

Für  $k - 1 = -1$  gilt das bereits, hier beginnt also unsere Induktion.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{F}_{k-2}M_{k,i} & \xleftarrow{\partial_{k-1}} & \mathcal{F}_{k-1}M_{k,i} & \xleftarrow{\partial_k} & \mathcal{F}_kM_{k,i} \\
\downarrow f_{k-2,M_{k,i}} & & \downarrow f_{k-1,M_{k,i}} & & \downarrow f_{k,M_{k,i}} \\
\mathcal{F}'_{k-2}M_{k,i} & \xleftarrow{\partial'_{k-1}} & \mathcal{F}'_{k-1}M_{k,i} & \xleftarrow{\partial'_k} & \mathcal{F}'_kM_{k,i}
\end{array}$$

Für  $m_{k,i} \in \mathcal{F}_kM_{k,i}$  suchen wir ein Bild  $m'_{k,i} \in \mathcal{F}_kM_{k,i}$ , so dass

$$\partial'_k m'_{k,i} = f_{k-1,M_{k,i}}(\partial_k m_{k,i}).$$

Nach Voraussetzung ist  $\overline{\mathcal{F}}'_{\bullet}M_{k,i}$  azyklisch, also finden wir  $m'_{k,i}$ , da

$$\partial'_{k-1} \circ f_{k-1} \circ \partial_k = f_{k-2} \circ \partial_{k-1} \circ \partial_k = 0: \mathcal{F}_k \rightarrow \mathcal{F}'_{k-2}.$$

Also erhalten wir eine natürliche Transformation  $f_k$  mit  $f_{k,M_{k,i}}(m_{k,i}) = m'_{k,i}$  wie oben.

Im folgenden Diagramm kommutieren die Quadrate rechts und links wegen der Natürlichkeit von  $f_k$  und  $f_{k-1}$ . Die Quadrate oben und unten kommutieren, da  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{F}'$  Funktoren sind. Das vordere Quadrat kommutiert nach Wahl von  $m'_{k,i} = f_{k,M_{k,i}}(m_{k,i})$  dann, wenn wir oben rechts  $m_{k,i}$  einsetzen.

$$\begin{array}{ccccc}
& & \mathcal{F}_{k-1}X & \xleftarrow{\partial_k} & \mathcal{F}_kX \\
& \nearrow \mathcal{F}_{k-1}a & \downarrow \partial_k & \nearrow \mathcal{F}_ka & \downarrow f_{k,X} \\
\mathcal{F}_{k-1}M_{k,i} & \xleftarrow{\partial_k} & \mathcal{F}_kM_{k,i} & & \\
\downarrow f_{k-1,M_{k,i}} & \searrow f_{k-1,X} & \downarrow f_{k,M_{k,i}} & & \\
& \mathcal{F}'_{k-1}X & \xleftarrow{\partial'_k} & \mathcal{F}'_kX & \\
& \nearrow \mathcal{F}'_{k-1}a & \downarrow \partial'_k & \nearrow \mathcal{F}'_ka & \\
\mathcal{F}'_{k-1}M_{k,i} & \xleftarrow{\partial'_k} & \mathcal{F}'_kM_{k,i} & & 
\end{array}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
(\partial'_k \circ f_{k,X})(\mathcal{F}_ka(m_{k,i})) &= (\partial'_k \circ \mathcal{F}'_ka)(m'_{k,i}) = (\mathcal{F}'_{k-1}a \circ \partial'_k)(m'_{k,i}) \\
&= \mathcal{F}'_{k-1}a(f_{k-1,M_{k,i}}(\partial_k m_{k,i})) = f_{k-1,X}((\mathcal{F}_{k-1}a \circ \partial_k)(m_{k,i})) = (f_{k-1,X} \circ \partial_k)(\mathcal{F}_ka(m_{k,i})),
\end{aligned}$$

somit gilt

$$\partial'_k \circ f_{k,X} = f_{k-1,X} \circ \partial_k: \mathcal{F}_k \rightarrow \mathcal{F}'_{k-1}.$$

Also erhalten wir am Ende eine natürliche Kettenabbildung  $\overline{f}_{\bullet}$  wie behauptet. Weglassen von  $f_{-1}$  liefert die gesuchte natürliche Kettenabbildung  $f_{\bullet}$  mit  $H_0f_{\bullet} = f$ .

Zur Eindeutigkeit sei  $f': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}h_R$  eine weitere natürliche Kettenabbildung mit  $H_0f'_{\bullet} = f$ . Gesucht ist also eine natürliche Kettenhomotopie  $h_{\bullet}$  mit  $h_k: \mathcal{F}_k \rightarrow \mathcal{F}'_{k+1}$ . Wir gehen wie oben zu  $\overline{\mathcal{F}}_{\bullet}, \overline{\mathcal{F}}'_{\bullet}$  über und starten mit  $h_{-1} = 0: H_0\mathcal{F}_{\bullet} \rightarrow \mathcal{F}'_0$ .

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longleftarrow & 0 & \xleftarrow{\partial_{-1}} & H_0\mathcal{F}_{\bullet}(X) & \xleftarrow{\partial_0} & \mathcal{F}_0(X) & \xleftarrow{\partial_1} & \mathcal{F}_1(X) & \xleftarrow{\partial_2} & \mathcal{F}_2(X) & \longleftarrow \cdots \\
& & & & \downarrow 0 & \searrow 0 & \downarrow f'_0 & \swarrow -f_0 & \downarrow f'_1 & \swarrow -f_1 & \downarrow f'_2 & \swarrow -f_2 \\
\cdots & \longleftarrow & 0 & \xleftarrow{\partial'_{-1}} & H_0\mathcal{F}'_{\bullet}(X) & \xleftarrow{\partial'_0} & \mathcal{F}'_0(X) & \xleftarrow{\partial'_1} & \mathcal{F}'_1(X) & \xleftarrow{\partial'_2} & \mathcal{F}'_2(X) & \longleftarrow \cdots
\end{array}$$

Sei induktiv  $h_{k-1}$  bereits konstruiert, so dass

$$f'_{k-1} - f_{k-1} = \partial'_k \circ h_{k-1} + h_{k-2} \circ \partial_{k-1} .$$

Für  $m_{k,i} \in \mathcal{F}_k M_{k,i}$  suchen wir  $n'_{k,i} \in \mathcal{F}'_{k+1} M_{k,i}$  mit

$$\partial'_{k+1} n'_{k,i} = (f'_k - f_k - h_{k-1} \circ \partial_k)(m_{k,i}) \in \mathcal{F}'_k M_{k,i} .$$

Da  $\overline{\mathcal{F}'_\bullet} M_{k,i}$  azyklisch ist, finden wir solch ein  $n'_{k,i}$ , denn es gilt

$$\partial'_k \circ (f'_k - f_k - h_{k-1} \circ \partial_k) = (f'_{k-1} - f_{k-1} - \partial'_k \circ h_{k-1}) \circ \partial_k = h_{k-2} \circ \partial_{k-1} \circ \partial_k = 0 .$$

Mit den gleichen Argumenten wie oben konstruieren wir ein natürliches  $h_k: \mathcal{F}_k \rightarrow \mathcal{F}'_{k+1}$  und überprüfen, dass es für alle Objekte  $X$  die Kettenhomotopiebedingung in Grad  $k$  erfüllt. Insgesamt erhalten wir  $\overline{h_\bullet}$ , und Weglassen von  $h_{-1} = 0$  liefert die gesuchte natürliche Kettenhomotopie  $h_\bullet$ .  $\square$

3.94. BEMERKUNG. Im obigen Beweis haben wir nicht alle Voraussetzungen ausgenutzt. In Wirklichkeit reicht es, wenn

- (1) der Funktor  $\mathcal{F}_\bullet$  frei ist mit Modellen  $\mathcal{M}$ ,
- (2) für alle  $k < 0$  der Funktor  $\mathcal{F}_k = 0$  verschwindet, und
- (3) die Modelle  $M \in \mathcal{M}$  nur  $H_k \mathcal{F}_\bullet M = 0$  für  $k \neq 0$  erfüllen.

Da wir in den Anwendungen üblicherweise natürliche Transformation sowohl von  $\mathcal{F}_\bullet$  nach  $\mathcal{F}'_\bullet$  als auch umgekehrt von  $\mathcal{F}'_\bullet$  nach  $\mathcal{F}_\bullet$  suchen, gewinnen wir nichts, wenn wir die überflüssigen Voraussetzungen weglassen.

Der folgende Satz ist eine schöne Anwendung der Methode der azyklischen Modelle:

3.95. SATZ (Eilenberg-Zilber). *Es seien  $X, Y$  topologische Räume, dann sind  $C_\bullet(X \times Y; R)$  und  $C_\bullet(X; R) \otimes_R C_\bullet(Y; R)$  natürlich kettenhomotopieäquivalent.*

BEWEIS. Wir betrachten die Kategorie  $\mathcal{C} = \mathcal{Top} \times \mathcal{Top}$  mit

$$\text{obj } \mathcal{C} = \text{obj } \mathcal{Top} \times \text{obj } \mathcal{Top} \quad \text{und} \quad \text{hom}_{\mathcal{C}}((U, X), (V, Y)) = \text{hom}_{\mathcal{Top}}(U, V) \times \text{hom}_{\mathcal{Top}}(X, Y)$$

für alle  $U, V, X$  und  $Y \in \text{obj } \mathcal{Top}$ . Als Modelle wählen wir

$$\mathcal{M} = \{(\Delta^k, \Delta^\ell) \mid k, \ell \geq 0\} \subset \text{obj } \mathcal{C} .$$

Wir betrachten zuerst den Funktor  $\mathcal{F}_\bullet = C_\bullet(\cdot \times \cdot; R): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Ch}_R$ . Ein singuläres Simplex  $\sigma \in S_k(X \times Y)$  hat die Form

$$\sigma(t) = (\sigma_X(t), \sigma_Y(t)) = (\sigma_X, \sigma_Y) \circ \delta_{\Delta^k}: \Delta^k \rightarrow X \times Y ,$$

hierbei ist  $\delta_{\Delta^k}$  die *Diagonalabbildung*

$$\delta_{\Delta^k}: \Delta^k \rightarrow \Delta^k \times \Delta^k \quad \text{mit} \quad \delta_{\Delta^k}(t) = (t, t) .$$

Also ist  $\mathcal{F}_k$  frei mit Basis  $\delta_{\Delta^k} \in C_k(\Delta^k \times \Delta^k; R) = \mathcal{F}_k(\Delta^k, \Delta^k)$ , und  $(\Delta^k, \Delta^k) \in \mathcal{M}$ . Offensichtlich gilt  $\mathcal{F}_k(X, Y) = C_k(X \times Y; R) = 0$  für  $k < 0$ , und

$$H_j(\mathcal{F}_\bullet(\Delta^k, \Delta^\ell)) = H_j(\Delta^k \times \Delta^\ell; R) = H_j(*; R) = 0$$

für alle  $j \neq 0$ . Also ist  $\mathcal{F}$  sogar frei mit azyklischen Modellen.

Unser zweiter Funktor ist  $\mathcal{F}'_\bullet = C_\bullet(\cdot; R) \otimes_R C_\bullet(\cdot; R)$ . Da  $C_a(X; R)$  und  $C_b(Y; R)$  frei sind nach Beispiel 3.91 (1), ist  $C_a(X; R) \otimes_R C_b(Y; R)$  frei mit Basis  $(\sigma_X \# \text{id}_{\Delta^a} \otimes \sigma_Y \# \text{id}_{\Delta^b})_{\sigma_X \in S_a(X), \sigma_Y \in S_b(Y)}$ . Als Basis für  $\mathcal{F}'_k$  erhalten wir dementsprechend

$$(\text{id}_{\Delta^a} \otimes \text{id}_{\Delta^b})_{a+b=k} \quad \text{mit} \quad \text{id}_{\Delta^a} \otimes \text{id}_{\Delta^b} \in C_a(\Delta^a; R) \otimes_R C_b(\Delta^b; R) = \mathcal{F}'_k(\Delta^a, \Delta^b) .$$

Also ist auch  $\mathcal{F}'_\bullet$  frei mit Modellen  $\mathcal{M}$ . Für  $k < 0$  ist

$$\mathcal{F}'_k(X, Y) = \bigoplus_{a+b=k} C_a(X; R) \otimes_R C_b(Y; R) = 0.$$

Für unsere Modelle  $(\Delta^k, \Delta^\ell)$  gilt

$$\mathcal{F}'_j(\Delta^k, \Delta^\ell) = (C(\Delta^k; R) \otimes_R C(\Delta^\ell; R))_j,$$

und die algebraische Künneth-Formel 3.89 liefert die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow (H(\Delta^k; R) \otimes_R H(\Delta^\ell; R))_j \rightarrow H_j(\mathcal{F}'_\bullet(\Delta^k, \Delta^\ell)) \rightarrow \text{Tor}_R(H(\Delta^k; R), H(\Delta^\ell; R))_{j-1} \rightarrow 0.$$

Das Torsionsprodukt verschwindet immer, da die Homologiemoduln von  $\Delta^k \sim * \sim \Delta^\ell$  stets frei sind, und das Tensorprodukt  $H_a(\Delta^k; R) \otimes_R H_b(\Delta^\ell; R)$  verschwindet außer für  $a = b = j = 0$ , also ist auch  $\mathcal{F}'_\bullet$  frei mit azyklischen Modellen.

Sowohl  $H_0(X \times Y; R)$  als auch  $H_0(X; R) \otimes_R H_0(Y; R)$  sind frei erzeugt von dem Produkt der Mengen der Wegzusammenhangskomponenten von  $X$  und  $Y$ , siehe Satz 3.40. Also finden wir einen natürlichen Isomorphismus  $f: H_0 \circ \mathcal{F}_\bullet \rightarrow H_0 \circ \mathcal{F}'_\bullet$  mit Inversem  $g$ . Wir können  $f$  und  $g$  auch explizit angeben; wie im Beweis des Satzes 3.93 über azyklische Modelle müssen wir dazu nur  $f_0$  und  $g_0$  auf einer Basis von  $\mathcal{F}_0$  beziehungsweise  $\mathcal{F}'_0$  angeben. Wir setzen

$$f_0(\delta_{\Delta^0}) = \text{id}_{\Delta^0} \otimes \text{id}_{\Delta^0} \in \mathcal{F}'_0(\Delta^0, \Delta^0) \quad \text{und} \quad g_0(\text{id}_{\Delta^0} \otimes \text{id}_{\Delta^0}) = \delta_{\Delta^0} \in \mathcal{F}_0(\Delta^0, \Delta^0).$$

Um zu prüfen, dass  $f_0$  und  $g_0$  Ränder auf Ränder abbilden, reicht wegen Natürlichkeit wieder aus, zu prüfen, dass

$$\begin{aligned} f_0(\partial_1 \delta_{\Delta^1}) &= \partial'_1(\iota_0 \otimes \text{id}_{\Delta^1} + \text{id}_{\Delta^1} \otimes \iota_1) \in C_\bullet(\Delta^1; R) \otimes_R C_\bullet(\Delta^1; R), \\ g_0(\partial'_1(\text{id}_{\Delta^1} \otimes \text{id}_{\Delta^0})) &= \partial_1(\text{id}_{\Delta^1} \times \text{id}_{\Delta^0}) \in C_1(\Delta^1 \times \Delta^0; R), \\ g_0(\partial'_1(\text{id}_{\Delta^0} \otimes \text{id}_{\Delta^1})) &= \partial_1(\text{id}_{\Delta^0} \times \text{id}_{\Delta^1}) \in C_1(\Delta^0 \times \Delta^1; R), \end{aligned}$$

wie in den folgenden Bildern.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}_{\Delta^1} \times \iota_1} \\ \begin{array}{c} \square \\ \text{id}_{\Delta^1} \times \text{id}_{\Delta^1} \uparrow \quad \downarrow \text{id}_{\Delta^1} \times \text{id}_{\Delta^1} \\ \Delta^1 \end{array} \\ \xrightarrow{\delta_{\Delta^1}} \\ \Delta^1 \end{array} & \xrightarrow{\text{id}_{\Delta^1} \times \text{id}_{\Delta^0}} & \begin{array}{c} \text{id}_{\Delta^0} \times \text{id}_{\Delta^1} \\ \downarrow \\ \text{id}_{\Delta^0} \times \text{id}_{\Delta^1} \end{array} \end{array}$$

Wir wenden Satz 3.93 auf  $f$  und  $g$  an und erhalten natürliche Kettenabbildungen  $f_\bullet: \mathcal{F}_\bullet \rightarrow \mathcal{F}'_\bullet$  und  $g_\bullet: \mathcal{F}'_\bullet \rightarrow \mathcal{F}_\bullet$ . Da

$$H_0(g_\bullet \circ f_\bullet) = g \circ f = \text{id}_{H_0 \mathcal{F}_\bullet} = H_0 \text{id}_{\mathcal{F}_\bullet} \quad \text{und} \quad H_0(f_\bullet \circ g_\bullet) = f \circ g = \text{id}_{H_0 \mathcal{F}'_\bullet} = H_0 \text{id}_{\mathcal{F}'_\bullet},$$

ist  $g_\bullet \circ f_\bullet$  zu  $\text{id}_{\mathcal{F}_\bullet}$  und  $f_\bullet \circ g_\bullet$  zu  $\text{id}_{\mathcal{F}'_\bullet}$  natürlich kettenhomotop. Also sind  $f_\bullet$  und  $g_\bullet$  natürliche Kettenhomotopieäquivalenzen.  $\square$

**BEWEIS DER TOPOLOGISCHEN KÜNNETH-FORMEL 3.88.** Der Komplex  $C_\bullet(X \times Y; R)$  ist nach Satz 3.95 natürlich kettenhomotopieäquivalent zu  $C_\bullet(X; R) \otimes_R C_\bullet(Y; R)$ . Also folgt die topologische Künneth-Formel aus der algebraischen in Satz 3.89. Da die Komplexe  $C_\bullet(X; R)$  und  $C_\bullet(Y; R)$  beide frei sind, spaltet die Sequenz, wenn auch nicht auf natürliche Weise.  $\square$

3.96. BEISPIEL. Die natürlichen Transformationen  $f_\bullet$  und  $g_\bullet$  im Beweis des Satzes 3.95 von Eilenberg-Zilber lassen sich auf verschiedene Weisen explizit auf Basiselementen angeben. Wir betrachten hier eine spezielle Möglichkeit,  $f_\bullet: C_\bullet(\cdot \times \cdot; R) \rightarrow C_\bullet(\cdot; R) \otimes_R C_\bullet(\cdot; R)$  zu konstruieren. Für alle  $0 \leq i \leq k$  konstruieren wir zwei affine Abbildungen  $\sigma'_{k,i}: \Delta^i \rightarrow \Delta^k$  und  $\sigma''_{k,i}: \Delta^{k-i} \rightarrow \Delta^k$  mit

$$\sigma'_{k,i}(t_0, \dots, t_i) = (t_0, \dots, t_i, 0, \dots, 0) \quad \text{und} \quad \sigma''_{k,i}(t_0, \dots, t_{k-i}) = (0, \dots, 0, t_0, \dots, t_{k-i}).$$

Dann existiert eine natürliche Transformation  $f$  wie im Beweis von Satz 3.95 mit

$$f_{k,\Delta^k}(\delta_{\Delta^k}) = \sum_{i=0}^k \sigma'_{k,i} \otimes \sigma''_{k,i} \in \bigoplus_{i=0}^k C_\bullet(\Delta^k; R) \otimes_R C_\bullet(\Delta^k; R).$$

Wir überlassen es als Übung, zu prüfen, dass dadurch ein geeignetes  $f_\bullet$  festgelegt wird.

3.97. BEMERKUNG. Das topologische Produkt ist bis auf natürliche Homöomorphismen kommutativ und assoziativ. Das gleiche gilt für das Tensorprodukt von Komplexen bis auf natürliche Isomorphismen. Man kann zeigen, dass die beiden folgenden Diagramme bis auf natürliche Kettenhomotopien kommutieren.

$$\begin{array}{ccc} C_\bullet((X \times Y) \times Z; R) & \xrightarrow{\cong} & C_\bullet(X \times (Y \times Z); R) \\ \begin{array}{c} \swarrow f_\bullet \\ \downarrow \\ \searrow f_\bullet \otimes \text{id} \end{array} & & \begin{array}{c} \swarrow f_\bullet \\ \downarrow \\ \searrow \text{id} \otimes f_\bullet \end{array} \\ C_\bullet(X \times Y; R) \otimes_R C_\bullet(Z; R) & & C_\bullet(X; R) \otimes_R C_\bullet(Y \times Z; R) \\ (C_\bullet(X; R) \otimes_R C_\bullet(Y; R)) \otimes_R C_\bullet(Z; R) & \xrightarrow{\varphi_\bullet} & C_\bullet(X; R) \otimes_R (C_\bullet(Y; R) \otimes_R C_\bullet(Z; R)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} C_\bullet(X \times Y; R) & \xrightarrow{\cong} & C_\bullet(Y \times X; R) \\ \begin{array}{c} \downarrow f_\bullet \\ \downarrow \\ \downarrow f_\bullet \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow f_\bullet \\ \downarrow \\ \downarrow f_\bullet \end{array} \\ C_\bullet(X; R) \otimes_R C_\bullet(Y; R) & \xrightarrow{\psi_\bullet} & C_\bullet(Y; R) \otimes_R C_\bullet(X; R) \end{array}$$

Dabei werden  $\varphi_\bullet$  und  $\psi_\bullet$  gegeben durch

$$\varphi_{i+j+k}((a \otimes b) \otimes c) = a \otimes (b \otimes c) \quad \text{und} \quad \psi_{i+j}(a \otimes b) = (-1)^{ij} b \otimes a$$

für alle  $i, j, k \in \mathbb{N}_0$  und  $a \in C_i(X; R)$ ,  $b \in C_j(Y; R)$  und  $c \in C_k(Z; R)$ .

Bevor wir den Satz von Eilenberg-Zilber und die Künneth-Formel auf Paare und auf reduzierte Homologie verallgemeinern, führen wir den folgenden praktischen Begriff ein.

3.98. DEFINITION. Eine Kettenabbildung  $f_\bullet: (C_\bullet, \partial_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet, \partial'_\bullet)$  heißt *Quasiisomorphismus*, wenn die induzierte Abbildung

$$f_{*k}: H_k(C_\bullet, \partial_\bullet) \rightarrow H_k(C'_\bullet, \partial'_\bullet)$$

für alle  $k \in \mathbb{Z}$  ein Isomorphismus ist.

- 3.99. BEMERKUNG. (1) Jede Kettenhomotopieäquivalenz ist ein Quasiisomorphismus.  
(2) Jede Kettenabbildung zwischen azyklischen Komplexen ist ein Quasiisomorphismus.  
(3) Seien  $\mathcal{F}_\bullet, \mathcal{F}'_\bullet: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ch}_R$  freie Funktoren mit azyklischen Modellen, und sei  $f_\bullet: \mathcal{F}_\bullet \rightarrow \mathcal{F}'_\bullet$  ein natürlicher Quasiisomorphismus. Dann hat  $H_0 f_\bullet$  ein natürliches Inverses  $g: H_0 \mathcal{F}'_\bullet \rightarrow H_0 \mathcal{F}_\bullet$ , und Satz 3.93 liefert eine natürliche Fortsetzung  $g_\bullet: \mathcal{F}_\bullet \rightarrow \mathcal{F}'_\bullet$  von  $g$  zu einem Kettenhomotopieinversen  $g_\bullet$  von  $f_\bullet$ , also ist  $f_\bullet$  in diesem Fall eine Kettenhomotopieäquivalenz.

- (4) Es seien  $(A_\bullet, \partial_\bullet) \subset (C_\bullet, \partial_\bullet)$  und  $(A'_\bullet, \partial'_\bullet) \subset (C'_\bullet, \partial'_\bullet)$  Unterkomplexe und  $f_\bullet: C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$  eine Kettenabbildung mit  $f_\bullet(A_\bullet) \subset A'_\bullet$ . Es sei  $\bar{f}_\bullet: C_\bullet/A_\bullet \rightarrow C'_\bullet/A'_\bullet$  die auf den Quotienten induzierte Abbildung. Das Schlangenlemma 3.44 liefert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_k(A_\bullet, \partial_\bullet) & \longrightarrow & H_k(C_\bullet, \partial_\bullet) & \longrightarrow & H_k(C_\bullet/A_\bullet, \partial_\bullet) & \xrightarrow{\partial_k} & H_{k-1}(A_\bullet, \partial_\bullet) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow (f|_{A_\bullet})^* & & \downarrow f_* & & \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow (f|_{A_\bullet})^* & & \\ \dots & \longrightarrow & H_k(A'_\bullet, \partial'_\bullet) & \longrightarrow & H_k(C'_\bullet, \partial'_\bullet) & \longrightarrow & H_k(C'_\bullet/A'_\bullet, \partial'_\bullet) & \xrightarrow{\partial'_k} & H_{k-1}(A'_\bullet, \partial'_\bullet) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Aus dem Fünferlemma 3.56 folgt:

Wenn zwei der drei Kettenabbildungen  $f_\bullet$ ,  $f_\bullet|_{A_\bullet}$  und  $\bar{f}_\bullet$  Quasiisomorphismen sind, dann auch die dritte.

Als nächstes wollen wir zwei Varianten vom Satz von Eilenberg-Zilber angeben: eine für Paare, und eine für die reduzierte Homologie. Den Begriff des guten Paares hatten wir in Definition 3.9 kennengelernt.

3.100. FOLGERUNG (Eilenberg-Zilber für Paare). *Es seien  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  Paare, so dass jeweils entweder  $(X, A)$  gut oder  $A \subset X$  offen ist und  $(Y, B)$  gut oder  $B \subset Y$  offen ist. Dann gibt es einen natürlichen Quasiisomorphismus*

$$C_\bullet(X, A; R) \otimes_R C_\bullet(Y, B; R) \rightarrow C_\bullet(X \times Y, A \times Y \cup X \times B; R).$$

Wie in Satz 3.88 ergibt sich mit Satz 3.89 daraus eine natürliche, kurze exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow (H(X, A; R) \otimes_R H(Y, B; R))_k &\longrightarrow H_k(X \times Y, A \times Y \cup X \times B; R) \\ &\longrightarrow \text{Tor}_R(H(X, A; R), H(Y, B; R))_{k-1} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Wie immer spaltet diese Sequenz, aber nicht auf natürliche Weise.

BEWEIS. Der Einfachheit halber schreiben wir den Koeffizientenring  $R$  nicht mehr mit. Wir beginnen mit dem Fall, dass  $A \subset X$  und  $B \subset Y$  beide offen sind. Betrachte die Unterkomplexe

$$C_\bullet(A \times B) \subset C_\bullet(A \times Y) + C_\bullet(X \times B) \subset C_\bullet(A \times Y \cup X \times B) \subset C_\bullet(X \times Y).$$

Wir beweisen zunächst eine Mayer-Vietoris-Sequenz für den Raum  $A \times Y \cup X \times B$ . Wenn  $A \subset X$  offen ist, ist auch

$$A \times Y = (A \times Y \cup X \times B) \cap A \times Y \subset A \times Y \cup X \times B$$

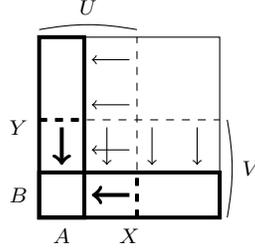
offen nach den Definitionen 1.39 und 1.43 der Produkt- und der Unterraumtopologie. Wenn  $B \subset Y$  ebenfalls offen ist, erhalten wir nach Folgerung 3.53 die Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\dots \longrightarrow H_k(A \times B) \longrightarrow H_k(A \times Y) \oplus H_k(X \times B) \xrightarrow{\quad} H_k(A \times Y \cup X \times B) \longrightarrow \dots \quad (1)$$

Falls  $(X, A)$  gut ist, sei  $U \subset X$  eine offene Umgebung von  $A$  in  $X$  und  $h: U \times [0, 1] \rightarrow U$  eine Deformationsretraktion, also  $h_0 = h(\cdot, 0) = \text{id}_U$ , im  $h_1 = A$  und  $h_t|_A = \text{id}_A$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Dann ist analog wie oben  $A \times Y$  abgeschlossen in  $A \times Y \cup X \times B$ , und  $A \times Y \cup U \times B$  ist eine offene Umgebung von  $A \times Y$ . Die Abbildung

$$h \times \text{id}_Y|_{(A \times Y \cup U \times B) \times [0, 1]}$$

ist eine Deformationsretraktion von  $A \times Y \cup U \times B$  auf  $A \times Y$ .



Analog verfahren wir, wenn  $(Y, B)$  ein gutes Paar ist; dazu sei  $V \subset Y$  die entsprechende Umgebung von  $B$ . Schließlich ist dann auch  $A \times B$  Deformationsretrakt von

$$(A \times V \cup U \times B) = (A \times Y \cup U \times B) \cap (A \times V \cup X \times B).$$

Somit erhalten wir die Sequenz (1) aus der Mayer-Vietoris-Sequenz für die Vereinigung

$$(A \times Y \cup X \times B) = (A \times Y \cup U \times B) \cup (A \times V \cup X \times B),$$

indem wir die obigen offenen Mengen durch ihre jeweiligen Deformationsretrakte ersetzen.

Die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow C_\bullet(A \times B) \longrightarrow C_\bullet(A \times Y) \oplus C_\bullet(X \times B) \longrightarrow C_\bullet(A \times Y) + C_\bullet(X \times B) \longrightarrow 0$$

liefert mit dem Schlangenlemma 3.44 eine lange exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_\bullet(A \times B) & \longrightarrow & H_\bullet(A \times Y) \oplus H_\bullet(X \times B) & \longrightarrow & H_\bullet(C_\bullet(A \times Y) + C_\bullet(X \times B)) \longrightarrow \dots \\ & & \parallel & & \parallel & & \downarrow i_* \\ \dots & \longrightarrow & H_\bullet(A \times B) & \longrightarrow & H_\bullet(A \times Y) \oplus H_\bullet(X \times B) & \longrightarrow & H_\bullet(A \times Y \cup X \times B) \longrightarrow \dots \end{array}$$

In der unteren Zeile steht die Mayer-Vietoris-Sequenz (1), und mit der Abbildung  $i_*$  erhalten wir ein kommutatives Diagramm. Aus dem Fünferlemma 3.56 folgt, dass

$$i_\bullet: C_\bullet(A \times Y) + C_\bullet(X \times B) \longrightarrow C_\bullet(A \times Y \cup X \times B)$$

ein Quasiisomorphismus ist. Wir fassen beide Seiten als Unterkomplexe von  $C_\bullet(X \times Y)$  auf und erhalten mit Bemerkung 3.99 (4), dass die natürliche Abbildung

$$p_\bullet: \frac{C_\bullet(X \times Y; R)}{C_\bullet(A \times Y; R) + C_\bullet(X \times B; R)} \longrightarrow \frac{C_\bullet(X \times Y; R)}{C_\bullet(A \times Y \cup X \times B)} \cong C_\bullet(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$$

ein Quasiisomorphismus ist.

Aus dem Satz 3.95 von Eilenberg-Zilber erhalten wir eine natürliche Kettenhomotopieäquivalenz

$$g_\bullet: C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y) \longrightarrow C_\bullet(X \times Y).$$

Aufgrund der Natürlichkeit von  $g_\bullet$  erhalten wir durch Einschränkung

$$g_\bullet: C_\bullet(A) \otimes C_\bullet(Y) \longrightarrow C_\bullet(A \times Y)$$

und  $g_\bullet: C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(B) \longrightarrow C_\bullet(X \times B).$

Da beide wieder wegen Natürlichkeit auf dem Durchschnitt  $C_\bullet(A) \otimes C_\bullet(B)$  übereinstimmen, erhalten wir auch

$$g_\bullet: C_\bullet(A) \otimes C_\bullet(Y) + C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(B) \longrightarrow C_\bullet(A \times Y) + C_\bullet(X \times B).$$

Analog erhalten wir  $f_\bullet$  jeweils in der umgekehrten Richtung. Da auch die Kettenhomotopien zwischen  $f_\bullet \circ g_\bullet$  beziehungsweise  $g_\bullet \circ f_\bullet$  und der jeweiligen Identität natürlich sind, sind  $g_\bullet$  und  $f_\bullet$  zwischen je zwei „passenden“ Komplexen zueinander kettenhomotopieinvers. Mit Bemerkung 3.99 (4) erhalten wir einen wohldefinierten Quasiisomorphismus

$$g_\bullet: \frac{C_\bullet(X)}{C_\bullet(A)} \otimes \frac{C_\bullet(Y)}{C_\bullet(B)} \cong \frac{C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y)}{C_\bullet(A) \otimes C_\bullet(Y) + C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(B)} \longrightarrow \frac{C_\bullet(X \times Y)}{C_\bullet(A \times Y) + C_\bullet(X \times B)}.$$

Wir verketten  $g_\bullet$  und  $p_\bullet$  und erhalten den gesuchten Quasiisomorphismus

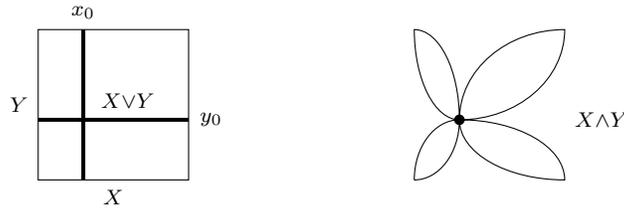
$$p_\bullet \circ g_\bullet: C_\bullet(X, A) \otimes C_\bullet(Y, B) \longrightarrow C_\bullet(X \times Y, A \times Y \cup X \times B). \quad \square$$

Wir betrachten das Bouquet oder Wedge-Produkt aus Definition 2.48 als Teilmenge

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) \cong \{x_0\} \times Y \cup X \times \{y_0\} \subset X \times Y.$$

3.101. DEFINITION. Das *Smash-Produkt* zweier punktierter Räume ist definiert als Quotient

$$(X, x_0) \wedge (Y, y_0) = (X \times Y) / ((X, x_0) \vee (Y, y_0)).$$



3.102. BEMERKUNG. Wie in Definition 3.11 wählen wir den Punkt  $A/A$  als Basispunkt des Quotienten  $X/A$  und schreiben ihn nicht mit. Insbesondere hat ein Smash-Produkt  $X \wedge Y$  die Klasse des Wedge-Produktes  $X \vee Y \subset X \times Y$  als Basispunkt. Man überprüft leicht, dass unter der Abbildung  $X \times Y \longrightarrow (X/A) \wedge (Y/B)$  genau die Teilmenge  $A \times Y \cup X \times B$  auf den Basispunkt abgebildet wird. Mit Hilfe der charakteristischen Eigenschaft der Quotiententopologie aus Satz 1.74 lässt sich zeigen, dass die Räume

$$(X/A) \wedge (Y/B) \quad \text{und} \quad (X \times Y) / (A \times Y \cup X \times B)$$

natürlich homöomorph sind.

3.103. BEISPIEL. Es gilt  $S^m \wedge S^n \cong S^{m+n}$ . Dazu schreiben wir  $S^k = [0, 1]^k / \partial([0, 1]^k)$  für alle  $k$  mit

$$\partial([0, 1]^k) = \{ (x_1, \dots, x_k) \in [0, 1]^k \mid x_i \in \{0, 1\} \text{ für mindestens ein } i \}.$$

Dann gilt

$$(\partial[0, 1]^m \times [0, 1]^n) \cup ([0, 1]^m \times \partial([0, 1]^n)) = \partial([0, 1]^{m+n}).$$

Jetzt folgt unsere Behauptung aus der obigen Bemerkung.

Nach Definition 3.9 ist ein Raum  $(X, x_0)$  gut punktiert, wenn das Paar  $(X, \{x_0\})$  gut ist.

3.104. FOLGERUNG (Künneth-Formel für reduzierte Homologie). *Es seien  $(X, x_0), (Y, y_0)$  gut punktierte topologische Räume und  $R$  ein Hauptidealring. Dann existiert eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow (\tilde{H}(X; R) \otimes_R \tilde{H}(Y; R))_k \longrightarrow \tilde{H}_k(X \wedge Y; R) \longrightarrow \text{Tor}_R(\tilde{H}(X; R), \tilde{H}(Y; R))_{k-1} \longrightarrow 0$$

für alle  $k$ . Diese Sequenz spaltet, aber nicht auf natürliche Weise.

BEWEIS. Wir müssen nur zeigen, dass

$$\tilde{H}_\bullet(X \wedge Y; R) \cong H_\bullet(X \times Y, X \vee Y; R), \quad (1)$$

dann folgt unsere Behauptung aus Bemerkung 3.55 (2), wonach

$$\tilde{H}_\bullet(X; R) \cong H_\bullet(X, \{x_0\}; R),$$

der algebraischen Künneth-Formel 3.89 und der relativen Fassung 3.100 des Satzes von Eilenberg-Zilber für die Paare  $(X, x_0)$  und  $(Y, y_0)$ . Leider können wir (1) nicht unmittelbar aus Satz 3.57 folgern, wonach

$$\tilde{H}_\bullet(X/A; R) \cong H_\bullet(X, A; R)$$

für gute Paare  $(X, a)$ , da das Paar  $(X \times Y, X \vee Y)$  möglicherweise nicht gut ist.

Wir gehen analog zum Beweis von Satz 3.57 vor. Außerdem lassen wir die Koeffizienten  $R$  für die Dauer des Beweises wieder weg. Da  $(X, x_0)$  und  $(Y, y_0)$  gut punktiert sind, finden wir offene Umgebungen  $U$  von  $x_0$  und  $V$  von  $y_0$  mit Deformationsretraktionen  $h: U \times [0, 1] \rightarrow U$  auf  $x_0$  und  $k: V \times [0, 1] \rightarrow V$  auf  $y_0$ . Wir erhalten Deformationsretraktionen  $h \times \text{id}_Y$  von  $U \times Y$  auf  $\{x_0\} \times Y$  und  $\text{id}_X \times k$  von  $X \times V$  auf  $X \times \{y_0\}$ . Den Raum  $U \times V$  ziehen wir mit  $h \times \text{id}_V$  zunächst auf  $\{x_0\} \times V$  und dann mit  $\text{id}_{\{x_0\}} \times k$  weiter auf den Punkt  $(x_0, y_0)$  zusammen. Wir vergleichen die Mayer-Vietoris-Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_k(*) & \longrightarrow & H_k(Y) \oplus H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X \vee Y) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H_k(U \times V) & \longrightarrow & H_k(U \times Y) \oplus H_k(X \times V) & \longrightarrow & H_k(U \times Y \cup X \times V) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

und schließen mit dem Fünferlemma, dass

$$H_\bullet(U \times Y \cup X \times V) \cong H_\bullet(X \vee Y).$$

Wenn wir das Fünferlemma nochmals wie in Bemerkung 3.99 (4) auf die Homologiesequenzen der Paare  $(X \times Y, X \vee Y) \rightarrow (X \times Y, U \times Y \cup X \times V)$  anwenden, erhalten wir einen natürlichen Isomorphismus

$$H_\bullet(X \times Y, X \vee Y) \cong H_\bullet(X \times Y, U \times Y \cup X \times V).$$

Wir können das obige Argument auch im Smash-Produkt  $X \wedge Y$  durchführen, indem wir den Teilraum  $X \vee Y$  zu einem Punkt  $z_0$  identifizieren. Dazu betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U \times Y \times [0, 1] & \xrightarrow{h \times \text{id}_Y} & U \times Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ (U \wedge Y) \times [0, 1] & \xrightarrow{\overline{h \times \text{id}_Y}} & U \wedge Y \end{array}$$

Nach der charakteristischen Eigenschaft der Quotiententopologie aus Satz 1.74 ist  $\overline{h \times \text{id}_Y}$  stetig. Da  $\overline{h \times \text{id}_Y}$  auf den Punkt  $z_0 = \{x_0\} \wedge Y$  zusammenzieht, ist  $U \wedge Y$  zusammenziehbar. Genauso sind auch  $X \wedge V$  und  $U \wedge V$  zusammenziehbar. Aus der Mayer-Vietoris-Sequenz folgt, dass

$$H_\bullet(U \wedge Y \cup X \wedge V) \cong H_\bullet(*).$$

Mit dem gleichen Argument wie oben und Bemerkung 3.55 (2) erhalten wir einen natürlichen Isomorphismus

$$\tilde{H}_\bullet(X \wedge Y) \cong H_\bullet(X \wedge Y, \{z_0\}) \cong H_\bullet(X \wedge Y, U \wedge Y \cup X \wedge V).$$

Wie im Beweis von Satz 3.57 benutzen wir im letzten Schritt zweimal Ausschneidung (Satz 3.52, siehe auch Axiom 3.59 (3)), und erhalten zusammen mit dem obigen

$$\begin{array}{ccc}
H_{\bullet}(X \times Y, X \vee Y) & & \tilde{H}_{\bullet}(X \wedge Y) \\
\downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
H_{\bullet}(X \times Y, U \times Y \cup X \times V) & & H_{\bullet}(X \wedge Y, U \wedge Y \cup X \wedge V) \\
\uparrow \cong & & \uparrow \cong \\
H_{\bullet}(X \times Y \setminus X \vee Y, (U \times Y \cup X \times V) \setminus X \vee Y) & = & H_{\bullet}(X \wedge Y \setminus \{z_0\}, (U \wedge Y \cup X \wedge V) \setminus \{z_0\})
\end{array}$$

Daraus folgt die Behauptung (1).  $\square$

Zum Schluss dieses Abschnittes zeigen wir, wie sich aus einer gegebenen reduzierten Homologietheorie andere, auch verallgemeinerte reduzierte Homologietheorien konstruieren lassen.

3.105. LEMMA. Sei  $\tilde{h}_{\bullet}$  eine verallgemeinerte reduzierte Homologietheorie über  $R$ , sei  $(K, k_0)$  ein gut punktierter topologischer Raum und  $n \in \mathbb{Z}$ . Dann definiert

$$(X, x_0) \mapsto \tilde{h}_{\bullet+n}((X, x_0) \wedge (K, k_0))$$

eine verallgemeinerte reduzierte Homologietheorie über  $R$  auf der Kategorie der gut punktierten topologischen Räume.

BEWEIS. Wir beweisen das Lemma hier nur für den Fall, dass  $\tilde{h}_{\bullet} = \tilde{H}_{\bullet}(\cdot; M)$  die reduzierte singuläre Homologie mit Koeffizienten  $M \in \mathcal{M}od_R$  ist, da wir einzelne Ergebnisse benutzen wollen, die wir nur in diesem Kontext bewiesen haben. Der Beweis lässt sich aber auf beliebige verallgemeinerte reduzierte Homologietheorien übertragen.

Man sieht leicht, dass die Axiome (1) — (3) in Definition 3.12 erhalten bleiben, wenn man die Grade aller Homologiemoduln um ein festes  $n \in \mathbb{Z}$  verschiebt. Wir dürfen daher  $n = 0$  setzen. Außerdem wollen wir die Koeffizienten und die Basispunkte auch diesmal nicht mitschreiben.

Um zu sehen, dass man einen Funktor erhält, betrachten wir für eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  gut punktierter Räume die  $R$ -lineare Abbildung

$$\tilde{H}_{\bullet}(f \wedge \text{id}_K): \tilde{H}_{\bullet}(X \wedge K) \longrightarrow \tilde{H}_{\bullet}(Y \wedge K).$$

Seien  $f, g: X \rightarrow Y$  homotop relativ zum Basispunkt, dann gilt das auch für die Abbildungen  $f \wedge \text{id}_K, g \wedge \text{id}_K: X \wedge K \rightarrow Y \wedge K$  (Übung). Aufgrund der Homotopieinvarianz von  $\tilde{H}_{\bullet}$  ist unser neuer Funktor also auch homotopieinvariant.

Es sei  $(X, A)$  ein gutes Paar und  $a \in A$  ein guter Basispunkt. Wir betrachten jetzt die lange exakte Sequenz aus Aufgabe 3.148 für das Tripel

$$X \vee K \subset B = A \times K \cup X \vee K \subset X \times K.$$

Es gilt

$$(X \times K)/B = (X \times K)/(A \times K \cup X \vee K) \cong (X \wedge K)/(A \wedge K) \cong (X/A) \wedge K$$

und

$$B/(X \vee K) = (A \times K \cup X \vee K)/(X \vee K) \cong (A \times K)/(A \vee K) \cong A \wedge K.$$

Zusammen mit (1) aus dem vorigen Beweis erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots \longrightarrow & \tilde{H}_k(A \wedge K) & \longrightarrow & \tilde{H}_k(X \wedge K) & \longrightarrow & \tilde{H}_k((X/A) \wedge K) & \xrightarrow{\partial_k} \tilde{H}_{k-1}(A \wedge K) \longrightarrow \dots \\
& \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & \downarrow \cong \\
\dots \longrightarrow & H_k(B, X \vee K) & \longrightarrow & H_k(X \times K, X \vee K) & \longrightarrow & H_k(X \times K, B) & \xrightarrow{\partial_k} H_k(B, X \vee K) \longrightarrow \dots
\end{array}$$

Da die untere Sequenz exakt ist, ist es auch die obere. Außerdem sind alle Abbildungen natürlich, also auch der Verbindungshomomorphismus  $\partial_k$  in der oberen Sequenz.

Schließlich folgt das Summenaxiom aus dem entsprechenden Resultat für  $\tilde{H}_\bullet$ , denn

$$\bigvee_{i \in I} (X_i \wedge K) \cong \left( \bigvee_{i \in I} X_i \right) \wedge K,$$

siehe Übung. Also erfüllt  $\tilde{H}_\bullet(\cdot \wedge K)$  die Eilenberg-Steenrod-Axiome (1) — (3) aus Definition 3.12 und ist daher eine verallgemeinerte reduzierte Homologietheorie.  $\square$

3.106. BEISPIEL. Wir betrachten zwei Spezialfälle.

(1) Für  $n \geq 0$  und  $K = S^n$  gilt nach Folgerung 3.104, dass

$$\tilde{H}_k(X; M) \cong \tilde{H}_{k+n}(X \wedge S^n; M),$$

wir erhalten also wieder die gewöhnliche singuläre Homologie.

(2) Für  $n, k \geq 0$  sei  $K = M_k^n$  der Moore-Raum aus Aufgabe 3.145. Für  $X = S^0$  folgt

$$\tilde{H}_{j+n}(S^0 \wedge M_k^n; \mathbb{Z}) = \tilde{H}_{j+n}(M_k^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} & \text{für } j = 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

also ist  $\tilde{H}_{\bullet+n}(\cdot \wedge M_k^n)$  eine reduzierte Homologietheorie mit Koeffizienten  $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ . Aus Satz 3.27 (2) folgt

$$\tilde{H}_{j+n}(X \wedge M_k^n; \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_j(X; \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \quad (*)$$

zumindest für alle CW-Komplexe  $X$ . Wir können also das universelle Koeffiziententheorem 3.82 für  $M = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$  aus der reduzierten Künneth-Formel 3.104 folgern — zumindest für CW-Komplexe.

Alternativ kann man  $M_k^n$  als Abbildungskegel  $Cf$  einer Abbildung  $f: S^n \rightarrow S^n$  vom Grad  $\deg f = k$  schreiben, siehe Übung 3.131. Mit einem ähnlichen Argument wie im Beweis von Lemma 3.105 erhält man eine lange exakte Sequenz

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_{j+n}(X \wedge S^n) \xrightarrow{k \cdot} \tilde{H}_{j+n}(X \wedge S^n) \longrightarrow \tilde{H}_{j+n}(X \wedge M_k^n) \xrightarrow{\partial_j} \dots$$

Ein Vergleich mit der Bockstein-Sequenz aus Aufgabe 3.146 beweist (\*) für alle gut punktierten Räume  $X$ .

3.107. BEMERKUNG. Nach Lemma 3.105 darf man fragen, ob es eine (verallgemeinerte) reduzierte „Ur“-Homologietheorie  $\tilde{h}_\bullet$  gibt, so dass alle anderen verallgemeinerten reduzierten Homologietheorien von der Gestalt  $\tilde{h}_{\bullet+n}(\cdot \wedge K)$  sind für geeignete  $n \in \mathbb{Z}$  und gut punktierte Räume  $K$ . Nach dem Brownschen Darstellungssatz geht das tatsächlich, zumindest auf der Kategorie der CW-Komplexe. Dabei sind  $\tilde{h}_k = \pi_k^s$  die sogenannten *stabilen Homotopiegruppen*

$$\pi_k^s(X) = \varinjlim \pi_{k+n}(S^n \wedge X) \cong \pi_{2k+2}(S^{k+2} \wedge X),$$

wobei  $\pi_n(X)$  die  $n$ -te höhere Homotopiegruppe ist, siehe Bemerkungen 2.17 (3) und 3.20. Dass man für festes  $k > 0$  nur  $n \geq k + 2$  betrachten muss, ist eine Konsequenz aus dem Freudenthalschen Einhängungssatz.

Allerdings reicht ein fester „Koeffizientenraum“  $K_n$  nicht aus, denn verallgemeinerte Homologietheorien können in beliebig negativen Graden nichttriviale Homologie-Moduln produzieren, und diese sieht man erst für entsprechend große Zahlen  $n$ . Man betrachtet daher Folgen von Räumen  $(K_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  und spricht vom „Koeffizientenspektrum“. Man erhält verallgemeinerte Kohomologietheorien der Form

$$\varinjlim \pi_{k+n}(X \wedge K_n),$$

und jede verallgemeinerte Homologietheorie auf CW-Komplexen lässt sich so darstellen. Um für alle topologischen Räume eine solche Darstellung zu erhalten, muss man das Summenaxiom durch Invarianz unter direkten Limiten ersetzen.

Für „echte“ Homologietheorien betrachten man Eilenberg-McLane-Räume  $K(M, n)$  mit

$$\pi_k(K(M, n)) \cong \begin{cases} M & \text{falls } k = n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

anstelle der Sphären und Moore-Räume aus dem obigen Beispiel. Beispiele sind  $K(\mathbb{Z}, 1) = S^1$  und  $K(\mathbb{Z}, 2) = \mathbb{C}P^\infty$ . Der Brownsche Darstellungssatz besagt nun, dass

$$H_k(X; M) \cong \varinjlim \pi_{k+n}(X \wedge K(M, n)),$$

zumindest für alle CW-Komplexe  $X$ .

### 3.10. Simpliziale Approximation und Anwendungen

In diesem Abschnitt lernen wir, wie man Abbildungen zwischen simplizialen Komplexen durch homotope simpliziale Abbildungen approximiert und wie man beliebige CW-Komplexe durch homotopieäquivalente simpliziale Komplexe ersetzt. Als Anwendungen beweisen wir den Satz 3.18 von Hopf über Homotopieklassen von Selbstabbildungen von Sphären, sowie den Lefschetzschen Fixpunktsatz über Selbstabbildungen von CW-Komplexen.

Wir beginnen mit dem Begriff des Simplizialkomplexes. Ein Simplizialkomplex ist ein sehr spezieller CW-Komplex. Wir beschreiben seine Struktur hier auf kombinatorische Weise. Dabei besteht eine gewisse Analogie zu den semisimplizialen Mengen aus Abschnitt 3.4.

Wir beginnen mit einer Trägermenge  $M$  von Punkten. Ein *kombinatorischer Simplizialkomplex* ist eine Teilmenge  $S \subset \mathcal{P}M$ , so dass

- (1) alle einpunktigen Mengen zu  $S$  gehören,
- (2) alle  $\sigma \in S$  endlich sind, und
- (3) mit  $\sigma \in S$  auch alle Teilmengen von  $\sigma$  in  $S$  liegen.

Für  $k \geq 0$  setzen wir

$$S^k = \{ \sigma \in S \mid \#\sigma = k + 1 \},$$

dann erhalten wir  $M$  als bijektive Kopie von  $S^0$  zurück.

Aus dem kombinatorischen Simplizialkomplex basteln wir einen CW-Komplex  $X$ , siehe die Schritte (1) – (3) in Abschnitt 1.9.

- (1) Als 0-Skelett wählen wir  $M \cong S^0$  mit der diskreten Topologie.
- (2) Sei das  $(k - 1)$ -Gerüst  $X^{k-1}$  bereits konstruiert, dann kleben wir zu jedem  $\sigma \in S^k$  eine Zelle von der Form des Standardsimplexes  $\Delta^k$  so ein, dass die  $k + 1$  Seiten affin auf die  $(k - 1)$ -Simplizes zu den  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\sigma$  abgebildet werden.
- (3) Zum Schluss versehen wir  $X = \bigcup_{k \geq 0} X^k$  mit der Quotiententopologie, siehe Folgerung 1.80.

3.108. DEFINITION. Auf diese Weise konstruierte CW-Komplexe heißen *Simplizialkomplexe*.

3.109. BEMERKUNG. Wir geben eine äquivalente Beschreibung an, siehe Satz 1.94 und [H, Section 2.1]. Ein Simplizialkomplex ist ein Raum  $X$  mit einer Familie  $S$  von Abbildungen  $\sigma: \Delta^k \rightarrow X$ , wobei  $k$  von  $\sigma$  abhängt, so dass

- (1) alle  $\sigma$  Einbettungen sind, siehe Definition 1.45, und  $X = \bigcup_{\sigma \in S} (\text{im } \sigma)^\circ$ ,
- (2) jede Einschränkung von  $\sigma$  auf eine Seite von  $\Delta^k$  wieder eine der Abbildungen aus  $S$  ist,
- (3) jedes  $\sigma \in S$  durch Angabe seiner Eckpunkte in  $X$  eindeutig bestimmt ist, und
- (4)  $U \subset X$  genau dann offen ist, wenn  $\sigma^{-1}(U) \subset \Delta^k$  für alle  $\sigma \in S$  offen ist.

Wegen (3) kommen wir von der obigen Beschreibung zurück zur kombinatorischen Beschreibung.

3.110. BEMERKUNG. Wir können einen kombinatorischen Simplizialkomplex  $S$  zu einer semi-simplizialen Menge machen, indem wir die Ecken aller Simplizes in  $S$  in kompatibler Weise anordnen. Am einfachsten geht das, indem wir eine totale Ordnung auf  $M$  einführen, die wir dann auf alle Teilmengen  $\sigma \subset M$ ,  $\sigma \in S^k$ , vererben. Dann erhalten wir Randoperatoren  $\sigma_i: S^k \rightarrow S^{k-1}$  für  $0 \leq i \leq k$ , wobei  $\sigma_i\sigma$  die  $k$ -elementige Teilmenge von  $\sigma$  ist, in der genau das  $i$ -te Element fehlt. Dann gelten die gleichen Relationen wie in Bemerkung 3.36, also ist  $S$  jetzt eine semisimpliziale Menge.

Wir können den zellulären Kettenkomplex für den CW-Komplex  $|S|$  mit Koeffizienten  $M \in \text{Mod}_R$  aufstellen und erhalten analog zu Definition 3.37 den Komplex  $(\langle S^\bullet \rangle_R \otimes_R M, \partial_\bullet)$  mit

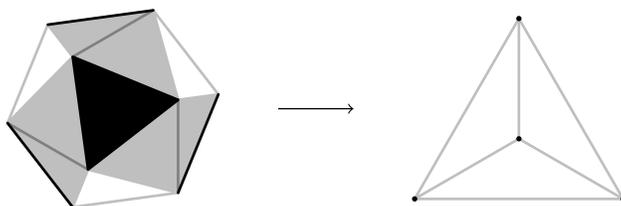
$$\partial_k(m\sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)^i m(\delta_i\sigma).$$

Wir haben bereits bei der Konstruktion des CW-Komplexes  $X = |S|$  von affinen Abbildungen gesprochen. Damit ist folgendes gemeint. Es sei  $A \subset V$  eine Teilmenge eines affinen Unterraums  $V \subset \mathbb{R}^n$  für ein  $n \geq 0$ , zum Beispiel  $A = \Delta^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ . Eine Abbildung  $f: A \rightarrow X$  heißt affin, wenn ihr Bild ganz in einer Zelle  $\sigma(\Delta^k)$  enthalten ist und die Abbildung  $\sigma^{-1} \circ f: A \rightarrow \Delta^k$  affin ist. Hierbei haben wir  $\sigma$  mit der charakteristischen Abbildung der entsprechenden Zelle identifiziert und ausgenutzt, dass  $\sigma: \Delta^k \rightarrow X$  eine Einbettung ist, siehe Bemerkung 3.109 (1).

3.111. DEFINITION. Es seien  $X = |S|$ ,  $Y = |T|$  zwei Simplizialkomplexe und  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann heißt  $f$  *simplizial*, wenn zu jedem Simplex  $\sigma \in S^k$  ein Simplex  $\tau \in T^\ell$  existiert, so dass  $f$  die Zelle  $\sigma(\Delta^k)$  affin und surjektiv auf  $\tau(\Delta^\ell)$  abbildet.

Es folgt unmittelbar, dass  $\tau$  eindeutig durch  $\sigma$  und  $f$  bestimmt ist und  $\ell \leq k$  gilt. Seien  $M$  und  $N$  die Trägermengen von  $S$  und  $T$ , dann erhält man folgende kombinatorische Beschreibung. Eine *kombinatorische simpliziale Abbildung* ist eine Abbildung  $f: M \rightarrow N$ , so dass  $f(\sigma) \in T$  für alle  $\sigma \in S$ . Nach Bemerkung 3.109 (3) ergibt sich dadurch für jedes  $\sigma$  eine eindeutige affine Abbildung von  $\text{im } \sigma$  nach  $\text{im } \tau$  für  $\tau = f(\sigma) \in T$ .

3.112. BEISPIEL. Das folgende Bild zeigt eine simpliziale Abbildung von einem Ikosaeder auf ein Tetraeder



Dabei werden die schwarzen Simplizes auf einzelne Eckpunkte zusammengezogen, graue Simplizes affin auf Kanten abgebildet, und weiße Simplizes bijektiv auf Flächen des Tetraeders abgebildet.

3.113. BEMERKUNG. Simplizialkomplexe tragen natürliche Metriken. Beispielsweise kann man auf jedes einzelne Simplex die Abstandsfunktion des Standardsimplexes übertragen. Anschließend setzt man diese Metrik als Wegemetrik auf ganz  $X$  fort. Dabei ist die Wegemetrik die maximale Abstandsfunktion, die sich auf jedem einzelnen Simplex zur vorher gewählten Metrik einschränkt. Sie heißt Wegemetrik, da man zunächst die Länge eines Weges als Summe der Längen der Teilstücke in einzelnen Simplizes definiert, und dann den Abstand zweier Punkte  $x, y$  als Infimum über die Länge aller Wege von  $x$  nach  $y$  definiert.

Ähnlich wie in Abschnitt 3.5 können wir auch Simplizialkomplexe baryzentrisch unterteilen.

3.114. DEFINITION. Es sei  $S$  ein Simplicialkomplex. Die baryzentrische Unterteilung von  $S$  ist der Simplicialkomplex  $T$  mit Trägermenge  $S$  und

$$T^k = \{ \{ \sigma_0, \dots, \sigma_k \} \subset S \mid \sigma_0 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_k \} .$$

Am einfachsten sieht man das durch Induktion über die Dimension des Trägersimplexes  $\sigma$  in  $S$ . Wir wählen ein beliebiges  $k - 1$  Simplex  $\tau'$  in der baryzentrischen Unterteilung einer Seite von  $\sigma$  (auch  $\tau' = \emptyset$  ist erlaubt), bilden den Kegel, in dem wir den Mittelpunkt von  $\sigma$  (mit  $\sigma$  bezeichnet) als ersten Eckpunkt zu  $\tau'$  hinzunehmen, und erhalten  $\tau = (\sigma, \tau'_0, \dots, \tau'_{k-1})$  mit  $\sigma \subsetneq \tau'_0$ .

Für den CW-Komplex zu  $S$  bedeutet das, dass wir jede Zelle  $\sigma(\Delta^k) \subset X$  baryzentrisch unterteilen. Lemma 3.51 garantiert, dass wir alle Zellen nach hinreichend häufiger Unterteilung beliebig klein machen können, beispielsweise bezüglich der Wegemetrik auf dem ursprünglichen Komplex.

3.115. DEFINITION. Es sei  $S$  ein Simplicialkomplex und  $\sigma \in S$ . Wir definieren den *offenen Stern*  $\text{st } \sigma$  und den *abgeschlossenen Stern*  $\text{St } \sigma$  von  $\sigma$  durch

$$\text{st } \sigma = \bigcup_{\substack{\tau \in S \\ \sigma \subset \tau}} (\text{im } \sigma)^\circ \quad \text{und} \quad \text{St } \sigma = \bigcup_{\substack{\tau \in S \\ \sigma \subset \tau}} \overline{\text{im } \sigma} .$$

3.116. BEMERKUNG. Es seien  $p_0, \dots, p_k \in S_0$  Ecken, also 0-Simplizes von  $S$ . Dann gilt

$$\text{st } p_0 \cap \dots \cap \text{st } p_k = \begin{cases} \text{st } \{p_0, \dots, p_k\} & \text{falls } \{p_0, \dots, p_k\} \in S, \text{ und} \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Unter einem endlichen Simplicialkomplex verstehen wir einen Simplicialkomplex  $S$  mit endlichem 0-Gerüst  $S^0$ , äquivalent dazu ist der gesamte kombinatorische Komplex endlich. Wegen Satz 1.93 ist das genau dann der Fall, wenn der zugehörige CW-Komplex  $X = |S|$  kompakt ist.

3.117. SATZ (Simpliziale Approximation von Abbildungen). *Es sei  $T$  ein simplicialer Komplex, versehen mit der Wegemetrik  $d$ , es sei  $S$  ein endlicher simplicialer Komplex, und  $f: |S| \rightarrow |T|$  stetig. Sei  $\varepsilon > 0$ , dann existiert eine zu  $f$  homotope simpliciale Abbildung  $g$  von einer iterierten baryzentrischen Unterteilung von  $S$  in eine baryzentrische Unterteilung von  $T$ , so dass*

$$d(f(x), g(x)) < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in |S|$$

bezüglich der Wegemetrik zu  $T$ .

BEWEIS. Da  $|S|$  nach Voraussetzung kompakt ist, ist  $f(|S|)$  nach Bemerkung 1.53 (2) ebenfalls kompakt und trifft daher nach Satz 1.93 nur endlich viele offene Simplizes von  $T$ . Die maximale Dimension  $N$  eines solchen Simplexes ist endlich. Also können wir nach Lemma 3.51 durch iterierte baryzentrische Unterteilung erreichen, dass alle Simplizes des neuen Komplexes  $T'$  im Bild von  $f$  Durchmesser kleiner als  $\varepsilon$  haben.

Wir betrachten jetzt die offene Überdeckung

$$U = \{ f^{-1}(\text{st } q) \mid q \in T'^0 \}$$

von  $|S|$ . Bezüglich der Wegemetrik auf  $|S|$  sei  $\rho$  die Lebesgue-Zahl von  $U$  gemäß des Satzes 1.57. Durch iterierte baryzentrische Unterteilung von  $S$  erhalten wir einen Komplex  $S'$ , dessen Simplizes in der Wegemetrik auf  $|S|$  allesamt Durchmesser kleiner als  $\frac{\rho}{2}$  haben.

Insbesondere haben alle abgeschlossenen Sterne von  $S'$  Durchmesser kleiner als  $\rho$ . Daher existiert zu jedem  $p \in S'^0$  mindestens eine  $q \in T'^0$ , so dass

$$\text{St } p \subset f^{-1}(\text{st } q) .$$

Wir setzen  $g(p) = q$ .

Sei jetzt  $\sigma = \{p_0, \dots, p_k\}$  ein  $k$ -Simplex von  $S'$ . Es folgt

$$\overline{\text{im } \sigma} \subset \text{St } p_i \subset f^{-1}(\text{st}(p_i))$$

für  $i = 0, \dots, k$ , insbesondere ist

$$\emptyset = \bigcap_{i=0}^k f^{-1}(\text{st}(g(p_i))) = f^{-1}\left(\bigcap_{i=0}^k \text{st}(g(p_i))\right).$$

Nach Bemerkung 3.116 existiert das Simplex

$$\tau = \{g(p_0), \dots, g(p_k)\} \in T^\ell$$

mit  $\ell \leq k$ , und wir setzen  $g$  auf  $\text{im } \sigma$  zu einer affinen Abbildung nach  $\text{im } \tau$  fort.

Es sei jetzt  $x \in |K|$  ein beliebiger Punkt, dann liegt  $x$  im Inneren eines  $k$ -Simplexes  $\sigma = \{p_0, \dots, p_k\} \in S'^k$ . Da  $\overline{\text{im } \sigma}$  nach  $\text{st } \tau = \text{st}(g(p_0)) \cap \dots \cap \text{st}(g(p_k))$  abgebildet wird, liegt  $f(x)$  in einem Simplex  $(\text{im } \tau')^\circ$  mit  $\tau \subset \tau'$ . Nach Konstruktion ist  $\text{diam}(\text{im } \tau') < \varepsilon$ , also folgt

$$d(f(x), g(x)) \leq \text{diam}(\text{im } \tau') < \varepsilon,$$

wie verlangt. Außerdem können wir  $f(x)$  innerhalb von  $\tau'$  geradlinig auf  $g(x)$  deformieren. Auf diese Weise erhalten wir eine Homotopie zwischen  $f$  und  $g$ .  $\square$

3.118. BEMERKUNG. Wenn wir den Abstand zwischen  $f$  und  $g$  nicht beschränken, brauchen wir  $L$  nicht zu unterteilen. Auf eine Unterteilung von  $K$  können wir hingegen im Allgemeinen nicht verzichten: es gibt unendlich viele paarweise nicht homotope Abbildungen  $f: S^n \rightarrow S^n$ , siehe Lemma 3.19 und den Beweis von Folgerung 3.23. Auf der anderen Seite gibt es nur endlich viele simpliziale Abbildungen zwischen zwei festen endlichen Simplizialkomplexen.

BEWEIS DES SATZES 3.18 VON HOPF. Wir wissen bereits aus Bemerkung 3.17 (4), dass homotope Abbildungen von  $S^n$  auf sich selbst den gleichen Abbildungsgrad haben. Außerdem wissen wir aus Lemma 3.19, dass der Abbildungsgrad additiv ist unter der Summe  $f + g = (f \vee g) \circ p$  von Abbildungen  $f, g: S^n \rightarrow S^n$  aus Abschnitt 3.2. Schließlich haben wir in Bemerkung 3.21 (7) gesehen, dass lineare Isometrien  $f, g \in O(n+1)$  der  $S^n$  den Abbildungsgrad  $\text{deg } f = \det f \in \{1, -1\}$  haben. Da  $O(n+1)$  genau zwei Zusammenhangskomponenten hat, sind alle linearen Isometrien mit der gleichen Determinante zueinander homotop, und  $f + g$  ist nullhomotop nach Bemerkung 3.21 (6), wenn  $\det f + \det g = 0$ . Nach all diesen Vorüberlegungen müssen wir nur noch zeigen, dass jede stetige Abbildung  $f: S^n \rightarrow S^n$  zu einer iterierten Summe linearer Abbildungen homotop ist.

Dazu identifizieren wir  $S^n$  mit einem homöomorphen Simplizialkomplex  $T$ , beispielsweise mit dem Rand  $\partial\Delta^{n+1}$  des Standardsimplexes  $\Delta^n$ , bestehend aus  $(n+2)$  Seitensimplizes  $\Delta^n$ . Mit dem simplizialen Approximationssatz 3.117 erhalten wir eine iterierte baryzentrische Unterteilung  $S$  von  $T$  und eine zu  $f$  homotope simpliziale Abbildung, die wir nach wie vor mit  $f: |S| \cong S^n \rightarrow |T| \cong S^n$  bezeichnen wollen.

Wir wählen einen Punkt  $y_0 \in S^n$  im Inneren eines  $n$ -Simplexes  $\tau$  von  $T$ . Es sei  $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ . Da  $f$  simplizial ist, liegt  $x_0$  im Inneren eines Simplexes  $\sigma \in S$ , das surjektiv auf  $\tau$  abgebildet wird. Dann ist  $\sigma$  ein  $n$ -Simplex, und  $f|_{\text{im } \sigma}$  ist ein affiner Homöomorphismus von  $\text{im } \sigma$  nach  $\text{im } \tau$ .

Es sei  $D \subset S^n$  eine offene Kreisscheibe um  $x_0$ , so dass  $\overline{D} \subset (\text{im } \tau)^0$ . Nach dem Obigen besteht  $f^{-1}(D)$  aus einer disjunkten Vereinigung von affin verzerrten Kreisscheiben, also Ellipsoiden, im Inneren einzelner  $n$ -Simplizes von  $S$ . Da  $S$  immer noch ein endlicher Simplizialkomplex ist, gibt es davon nur endlich viele.

Als nächstes sei  $g: S^n \rightarrow S^n$  eine Abbildung, die  $x_0$  auf den Nordpol und ganz  $S^n \setminus D$  auf den Südpol abbildet, etwa

$$g(\cos \varphi \cdot e_0 + \sin \varphi \cdot y') = \begin{cases} \cos \frac{\pi\varphi}{r} \cdot e_0 + \sin \frac{\pi\varphi}{r} \cdot y' & \text{für } 0 \leq \varphi \leq r, \text{ und} \\ -e_0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

falls  $x_0 = e_0$  bereits der Nordpol ist und  $r \in (0, \pi)$  der Durchmesser der Kreisscheibe. Dann ist  $q$  homotop zu  $\text{id}_{S^n}$ , etwa indem man  $r$  stetig zu  $\pi$  vergrößert. Insbesondere ist  $q \circ f: S^n \rightarrow S^n$  homotop zu  $f$ .

Das Urbild  $(q \circ f)^{-1}(S^n \setminus \{-e_0\}) = f^{-1}(D)$  besteht aus endlich vielen Zusammenhangskomponenten  $D_1, \dots, D_N \subset S^n$ , auf den  $f$  in geeigneten Koordinaten wie eine affine Bijektion aussieht. Der Rest  $S^n \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_N)$  wird konstant auf den Südpol  $-e_0$  abgebildet. Wir können  $q \circ f$  durch eine homotope Abbildung ersetzen, die sich als „Summe“ von Abbildungen  $g_i: S^n \rightarrow S^n$  für  $i = 1, \dots, N$  schreiben lassen. Das heißt, wir haben eine Abbildung  $p: S^n \rightarrow \bigvee_{i=1}^N S^n$  wie in Abschnitt 3.2, so dass

$$f \sim q \circ f \sim (g_1 \vee \dots \vee g_N) \circ p: S^n \rightarrow S^n.$$

Indem wir  $p$  und alle  $g_i$  entsprechend deformieren, können wir erreichen, dass  $p$  die  $i$ -te Scheibe  $D_i$  bijektiv auf  $D \subset S^n$  im  $i$ -ten Summanden des Bouquets abbildet, und dass  $g_i|_D: D \rightarrow D$  wie die Einschränkung einer linearen Isometrie aussieht, die wir wieder mit  $g_i$  bezeichnen wollen. Nach wie vor gilt also

$$f \sim (g_1 \vee \dots \vee g_N) \circ p \sim (\dots (g_1 + g_2) + \dots) + g_N.$$

Somit ist  $f$  zu einer iterierten Summe linearer Isometrien homotop. Diese Summe können wir vereinfachen, indem wir zeigen, dass die Summe bis auf Homotopie assoziativ ist, und anschließend benachbarte  $g_i, g_{i+1}$  mit  $\det g_i + \det g_{i+1} = 0$  weghomotopieren. Dann bleibt am Ende eine  $|\deg f|$ -fache Summe entweder der Identität  $\text{id}_{S^n}$  oder einer festen Spiegelung der  $S^n$  übrig. Insbesondere sind zwei Abbildungen mit dem gleichen Abbildungsgrad zur gleichen Referenzabbildung, und damit auch untereinander homotop.  $\square$

Für den obigen Beweis haben wir nur ausgenutzt, dass der simpliziale Approximationssatz die Ausgangsabbildung  $f$  zu einer geometrisch einfacheren Abbildung homotopiert. In der nächsten Anwendung benutzen wir simpliziale Approximation, um etwas über die Wirkung einer Abbildung auf die Homologie auszusagen.

Dazu brauchen wir den Begriff der Spur. Es sei  $R$  ein Hauptidealring und  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul. Es bezeichne  $\text{Tor}_R M$  den Torsionsuntermodul, siehe Definition 3.68, dann ist der *freie Anteil*  $\overline{M} = M / \text{Tor}_R M \cong R^{\text{rg } M}$  ein endlich erzeugter freier Modul. Es sei  $f \in \text{End}_R M$  ein Modulendomorphismus. Zu jedem  $m \in \text{Tor}_R M$  gibt es  $r \in R \setminus \{0\}$  mit  $rm = 0$ , und es folgt  $0 = f(rm) = rf(m)$ , so dass  $f(m) \in \text{Tor}_R M$ . Also induziert  $f$  eine wohldefinierte Abbildung  $\overline{f} \in \text{End}_R \overline{M}$ . Indem wir eine Basis von  $\overline{M}$  wählen, erhalten wir eine Matrix  $(\overline{f}_{ij})_{ij} \in M_{\text{rg } M}(R)$ , die  $\overline{f}$  darstellt.

3.119. DEFINITION. Es sei  $M \in \text{Mod}_R$  ein endlich erzeugter Modul über einem Hauptidealring  $R$ , und es sei  $(\overline{f}_{ij})_{ij}$  eine Matrixdarstellung des von  $f \in \text{End}_R M$  induzierten Endomorphismus  $\overline{f}$  von  $M / \text{Tor}_R M$ . Dann definieren wir die *Spur* von  $f$  durch

$$\text{tr}_R(f) = \sum_{i=1}^{\text{rg } M} f_{ii} \in R.$$

3.120. BEMERKUNG. Wir sammeln einige elementare Eigenschaften der Spur

- (1) Es sei  $\mathbb{k}$  der Quotientenkörper von  $R$ , beispielsweise sei  $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$  für  $R = \mathbb{Z}$ . Dann haben wir einen natürlichen Isomorphismus

$$M \otimes_R \mathbb{k} \cong \overline{M} \otimes_R \mathbb{k},$$

denn sei  $rm = 0$  für ein  $r \neq 0$ , dann folgt

$$m \otimes 1 = (rm) \otimes \frac{1}{r} = 0$$

wie in Aufgabe 3.152 (1). Die gewählte Basis  $(m_1, \dots, m_n)$  mit  $n = \text{rg } M$  liefert eine Basis  $(m_1 \otimes 1, \dots, m_n \otimes 1)$  von  $M \otimes_R \mathbb{k}$ , und die induzierte Abbildung  $f \otimes \text{id}_{\mathbb{k}}$  wird durch die gleiche Matrix  $(\bar{f}_{ij})_{ij}$  wie  $\bar{f}$  dargestellt. Es folgt

$$\text{tr}_R(f) = \text{tr}_{\mathbb{k}}(f \otimes \text{id}_{\mathbb{k}}) \in R \subset \mathbb{k}.$$

- (2) Seien  $f: M \rightarrow N, g: N \rightarrow M$  lineare Abbildungen zwischen endlich erzeugten  $R$ -Moduln. Aus (1) und Überlegungen aus der linearen Algebra folgt

$$\text{tr}_R(f \circ g) = \text{tr}_{\mathbb{k}}((f \otimes \text{id}_{\mathbb{k}}) \circ (g \otimes \text{id}_{\mathbb{k}})) = \text{tr}_{\mathbb{k}}((g \otimes \text{id}_{\mathbb{k}}) \circ (f \otimes \text{id}_{\mathbb{k}})) = \text{tr}_R(g \circ f).$$

Hieraus folgt insbesondere die Invarianz unter Basiswechseln, das heißt, die Spur hängt nicht von der Wahl der Basis in Definition 3.119 ab.

- (3) Es sei jetzt

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen aus endlich erzeugten  $R$ -Moduln. Wie in Aufgabe 3.152 (2) folgt  $\text{Tor}_R(M', \mathbb{k}) = 0$ , und mit Bemerkung 3.80 (4) folgt, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' \otimes_R \mathbb{k} & \longrightarrow & M \otimes_R \mathbb{k} & \longrightarrow & M'' \otimes_R \mathbb{k} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f' \otimes \text{id}_{\mathbb{k}} & & \downarrow f \otimes \text{id}_{\mathbb{k}} & & \downarrow f'' \otimes \text{id}_{\mathbb{k}} & & \\ 0 & \longrightarrow & M' \otimes_R \mathbb{k} & \longrightarrow & M \otimes_R \mathbb{k} & \longrightarrow & M'' \otimes_R \mathbb{k} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

nach wie vor exakte Zeilen hat. Wenn wir die Sequenz spalten, können wir  $f \otimes \text{id}_{\mathbb{k}}$  als Blockmatrix

$$f \otimes \text{id}_{\mathbb{k}} = \begin{pmatrix} f' \otimes \text{id}_{\mathbb{k}} & * \\ 0 & f'' \otimes \text{id}_{\mathbb{k}} \end{pmatrix}$$

darstellen, und erhalten daher

$$\text{tr}_R(f) = \text{tr}_{\mathbb{k}}(f \otimes \text{id}_{\mathbb{k}}) = \text{tr}_{\mathbb{k}}(f' \otimes \text{id}_{\mathbb{k}}) + \text{tr}_{\mathbb{k}}(f'' \otimes \text{id}_{\mathbb{k}}) = \text{tr}_R(f') + \text{tr}_R(f'').$$

Der Übergang zum Körper  $\mathbb{k}$  vereinfacht (2) und (3) sehr. Allerdings ist trotzdem wichtig zu wissen, dass  $\text{tr}_R(f)$  Werte in  $R$  annimmt.

In der folgenden Definition fassen wir die Homologie eines Raumes wieder als Kettenkomplex mit trivialem Differential auf. Ein Kettenkomplex  $(C_{\bullet}, \partial_{\bullet})$  heiße *endlich erzeugt*, wenn  $\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C_k$  endlich erzeugt ist.

3.121. DEFINITION. Es sei  $(C_{\bullet}, \partial_{\bullet})$  ein endlich erzeugter Kettenkomplex über einem Hauptidealring  $R$  und  $f_{\bullet}: (C_{\bullet}, \partial_{\bullet}) \rightarrow (C_{\bullet}, \partial_{\bullet})$  ein Ketten-Endomorphismus. Dann definieren wir

$$\text{tr}_R(f_{\bullet}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \text{tr}_R(f_k).$$

Insbesondere definieren wir für einen topologischen Raum  $X$ , für den  $H_{\bullet}(X; R)$  endlich erzeugt ist, die *Lefschetz-Zahl* einer stetigen Abbildung  $F: X \rightarrow X$  durch

$$\tau_R(F) = \text{tr}_R(F_*: H_{\bullet}(X; R) \rightarrow H_{\bullet}(X; R)).$$

Wir schreiben kurz  $\tau(F) = \tau_{\mathbb{Z}}(F) \in \mathbb{Z}$ .

3.122. LEMMA. *Es sei  $(C_\bullet, \partial_\bullet)$  ein endlich erzeugter Kettenkomplex über einem Hauptidealring  $R$  und  $f_\bullet: (C_\bullet, \partial_\bullet) \rightarrow (C_\bullet, \partial_\bullet)$  ein Ketten-Endomorphismus. Dann gilt*

$$\mathrm{tr}_R(f_\bullet) = \mathrm{tr}_R(f_*: H_\bullet(C_\bullet, \partial_\bullet) \rightarrow H_\bullet(C_\bullet, \partial_\bullet)) .$$

BEWEIS. Da  $f_\bullet$  eine Ketten-Abbildung ist, wirkt  $f_\bullet$  auch auf den Unterkomplexen  $Z_\bullet$  der Zyklen und  $B_\bullet$  der Ränder. Da die Sequenz

$$0 \longrightarrow Z_k \longrightarrow C_k \xrightarrow{\partial_k} B_{k-1} \longrightarrow 0$$

exakt ist, folgt mit Bemerkung 3.120 (3), dass

$$\mathrm{tr}_R(f_k) = \mathrm{tr}_R(f_k|_{Z_k}) + \mathrm{tr}_R(f_{k-1}|_{B_{k-1}}) .$$

Aufgrund der alternierenden Summe in Definition 3.121 erhalten wir

$$\mathrm{tr}_R(f_\bullet) = \mathrm{tr}_R(f_\bullet|_{Z_\bullet}) - \mathrm{tr}_R(f_\bullet|_{B_\bullet}) .$$

Ein analoges Argument für die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow B_k \longrightarrow Z_k \longrightarrow H_k(C_\bullet, \partial_\bullet) \longrightarrow 0$$

liefert

$$\mathrm{tr}_R(f_\bullet) = \mathrm{tr}_R(f_\bullet|_{Z_\bullet}) - \mathrm{tr}_R(f_\bullet|_{B_\bullet}) = \mathrm{tr}_R(f_\bullet) . \quad \square$$

3.123. BEMERKUNG. Somit verhält sich die Spur ähnlich wie die alternierende Summe der Dimensionen in Satz 3.32. In der Tat erhalten für  $f_\bullet = \mathrm{id}_{C_\bullet}$  auch gerade

$$\mathrm{tr}_R(\mathrm{id}_{C_\bullet}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \mathrm{rg}(C_k) \in R ,$$

also das Bild dieser Summe unter der Abbildung  $\mathbb{Z} \rightarrow R$ . Sei also  $f: X \rightarrow X$  homotop zur Identität, dann ist  $\tau_R(f)$  gerade das Bild der Eulerzahl  $\chi(X)$  unter der Abbildung  $\mathbb{Z} \rightarrow R$ .

Für eine allgemeine zelluläre oder simpliziale Abbildung  $f: S \rightarrow S$  sei  $f_\#$  die induzierte Abbildung auf  $C_\bullet(S; \mathbb{Z})$ . Dann wirkt  $f_\#$  bezüglich beliebiger Koeffizienten  $R$  durch  $f_\# \otimes \mathrm{id}_R$  auf  $C_\bullet(S; R) = C_\bullet(S; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R$ . Also ist  $\tau_R(f)$  gerade das Bild der ganzzahligen Lefschetz-Zahl  $\tau(f)$  in  $R$ . Trotzdem kann es unter Umständen sinnvoll sein, mit beliebigen Koeffizienten zu arbeiten, beispielsweise, weil sich die Lefschetz-Zahl mit Koeffizienten  $R$  leichter bestimmen lässt.

3.124. SATZ (Lefschetz'scher Fixpunktsatz). *Es sei  $X$  Retrakt eines endlichen Simplizialkomplexes und  $f: X \rightarrow X$  stetig, so dass  $\tau(f) \neq 0$ . Dann hat  $f$  einen Fixpunkt.*

BEWEIS. Es sei  $S$  ein endlicher Simplizialkomplex und  $r: S \rightarrow X$  die Retraktionsabbildung, also gilt  $r|_X = \mathrm{id}_X$ , siehe Definition 2.10. Jeder Fixpunkt  $x \in X$  von  $f$  ist auch Fixpunkt der Abbildung  $i \circ f \circ r$ , wobei  $i: X \rightarrow S$  die Inklusion sei, denn alle drei Abbildungen halten  $x$  fest. Sei umgekehrt  $p \in S$  ein Fixpunkt von  $i \circ f \circ r$ , dann liegt  $p$  im Bild  $X$  von  $i$ , also folgt  $r(p) = p$ , daher ist  $p$  auch ein Fixpunkt. Die Abbildungen  $i \circ f \circ r$  und  $f$  haben also dieselbe Fixpunktmenge.

Aus  $\mathrm{id}_X = r \circ i$  folgt  $r_* \circ i_* = \mathrm{id}_{H_\bullet(X)}$ , also ist  $H_\bullet(X)$  ein direkter Summand von  $H_\bullet(S) \cong \mathrm{im}(i_*) \oplus \ker(r_*)$ , wobei  $H_\bullet(X) \cong \mathrm{im}(i_*)$ . Bezüglich dieser Zerlegung wirkt  $(i \circ f \circ r)_*$  durch

$$(i \circ f \circ r)_* = \begin{pmatrix} f_* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

also haben  $i \circ f \circ r$  und  $f$  auch die gleiche Lefschetz-Zahl. Daher reicht es, stetige Abbildungen  $f: S \rightarrow S$  zu betrachten.

Da  $S$  endlich ist, ist  $|S|$  kompakt. Wir versehen  $|S|$  mit der Wegemetrik, dann nimmt die stetige Funktion

$$p \mapsto d(p, f(p))$$

ihr Minimum an. Wenn wir annehmen, dass  $f$  keine Fixpunkte hat, folgt  $d(p, f(p)) \geq \varepsilon$  für ein  $\varepsilon > 0$ . Wir wollen zeigen, dass dann  $\tau_R(f) = 0$  folgt.

Dazu finden wir mit Satz 3.117 eine simpliziale Approximation  $g$  von der  $n$ -fachen baryzentrischen Unterteilung  $T$  von  $S$  in die  $m$ -fache baryzentrische Unterteilung  $T'$  von  $S$  mit  $d(f(p), g(p)) < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $p \in |S|$ , es folgt insbesondere

$$d(p, g(p)) > \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } p \in |S| .$$

Wir dürfen annehmen, dass  $n \geq m$ , und dass die Simplizes in  $T'$  Durchmesser kleiner als  $\frac{\varepsilon}{2}$  haben.

Wir betrachten  $T$  und  $T'$  als CW-Strukturen auf  $|S|$  und bezeichnen die zugehörigen Kettenkomplexe mit  $C_{\bullet}^{\text{CW}}(T_{\bullet})$  und  $C_{\bullet}^{\text{CW}}(T'_{\bullet})$ . Die Homologie dieser Komplexe ist natürlich zu  $H_{\bullet}(|S|)$  isomorph.

Die Identität  $\text{id}_{|S|}: T' \rightarrow T$  ist zellulär und induziert eine Abbildung  $\rho: C_{\bullet}^{\text{CW}}(T'_{\bullet}) \rightarrow C_{\bullet}^{\text{CW}}(T_{\bullet})$ , die in etwa der Iteration der Verfeinerungsabbildung aus Punkt (3) der Konstruktion der baryzentrischen Unterteilung in Abschnitt 3.5 entspricht. Insbesondere enthält für jedes Simplex  $\sigma \in T'$  die Kette  $\rho(\sigma)$  nur Simplizes  $\tau$  mit  $\text{im } \tau \subset \text{im } \sigma$ . Wir erhalten eine Abbildung  $\rho \circ g_{\#}: C_{\bullet}^{\text{CW}}(T_{\bullet}) \rightarrow C_{\bullet}^{\text{CW}}(T_{\bullet})$ , und da  $g$  zu  $f$  homotop ist, folgt mit Lemma 3.122, dass

$$\tau_R(f) = \tau_R(g) = \text{tr}_R(\rho \circ g_{\#}) .$$

Es sei  $\tau \in T_{\bullet}$  mit  $\text{im } \tau \subset \text{im } \sigma \subset |S|$  für ein Simplex  $\sigma \in T'_{\bullet}$ , und es sei  $p \in \text{im } \tau$  eine Ecke von  $\tau$ . Aus

$$d(p, g(p)) > \frac{\varepsilon}{2} > \text{diam}(\text{im } \sigma)$$

folgt, dass das Bildsimplex  $g(\tau) \in T'_{\bullet}$  zu  $\text{im } \sigma$  disjunkt ist. Also enthält die Kette  $\rho \circ g(\tau)$  kein Simplex der Verfeinerung von  $\sigma$ , insbesondere auch nicht das Simplex  $\tau$ . Daher stehen in der Matrixdarstellung von  $\rho \circ g_{\#}$  nur Nullen in der Diagonale, und der Satz folgt, da dann

$$\tau_R(f) = \text{tr}_R(\rho \circ g_{\#}) = 0 . \quad \square$$

Genau wie der Fixpunktsatz 2.31, 3.15 von Brouwer ist auch der Lefschetzsche Fixpunktsatz nicht konstruktiv, das heißt, man kann nicht vorhersagen, wo der Fixpunkt liegt, den es unter Umständen geben muss. Da die Lefschetz-Zahl eine Homotopieinvariante ist, erkennt der Fixpunktsatz nur Abbildungen, die nicht zu fixpunktfreien Abbildungen homotop sind.

3.125. BEISPIEL. Für einfache topologische Räume ist der Fixpunktsatz erstaunlich genau. Wenn es eine Bedingung gibt, unter der  $\tau(f) = 0$  gilt, dann finden wir eine fixpunktfreie Abbildung, die diese Bedingung erfüllt.

- (1) Es sei  $X = D^n$  der abgeschlossene Einheitsball. Wir können  $D^n$  als simplizialen Komplex oder als Retrakt eines einzigen hinreichend großen Simplexes betrachten. Da  $D^n$  zusammenziehbar ist, ist jede Abbildung  $f$  homotop zur Identität  $\text{id}$ , und es folgt

$$\tau(f) = \tau(\text{id}) = \text{tr}(\text{id}_{*}|_{H_0(D^n)}) = 1 .$$

Also hat  $f$  einen Fixpunkt, und wir haben einen neuen Beweis für den Brouwerschen Fixpunktsatz gefunden.

Außerdem sehen wir, dass Kompaktheit von  $X$  nötig ist. Denn es gibt Abbildungen  $f: D^n \rightarrow D^n$  mit  $f(\hat{D}^n) \subset \hat{D}^n$ , deren Fixpunkt in  $\partial D^n$  liegt, beispielsweise eine zentrische Streckung mit Streckfaktor  $\lambda \in (0, 1)$  und Zentrum auf dem Rand.

- (2) Es sei  $X = S^n$ . Für eine stetige Abbildung  $f: S^n \rightarrow S^n$  gilt

$$\tau(f) = \text{tr}(f_{*}|_{H_0(S^n)}) + (-1)^n \text{tr}(f_{*}|_{H_n(S^n)}) = 1 + (-1)^n \deg f .$$

Nach Bemerkung 3.21 (8) ist jede fixpunktfreie Abbildung homotop zur Antipodenabbildung  $g = -\text{id}$  mit  $\deg g = (-1)^{n+1}$ , also  $\tau(g) = 0$ . Nach dem Satz 3.18 von Hopf bestimmt

der Abbildungsgrad die Homotopieklasse, also folgt  $\tau(f) \neq 0$  für alle Abbildungen, die nicht zur Antipodenabbildung homotop sind.

- (3) Es sei  $X = \mathbb{R}P^n$ ,  $n$  ungerade, und es sei  $p: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  die natürliche Projektion. Zu jeder stetigen Abbildung  $f: \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  existiert nach dem Liftungssatz 2.58 eine Abbildung  $\tilde{f}: S^n \rightarrow S^n$  wie im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & S^n \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}P^n . \end{array}$$

Man überlegt sich, etwa mit zellulären Methoden, dass  $0 \neq p_*: \mathbb{Z} \cong H_n(S^n) \rightarrow \mathbb{Z} \cong H_n(\mathbb{R}P^n)$ . Daraus folgt, dass  $f_*$  auf  $H_n(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}$  durch  $\deg f$  wirkt, und daher  $\tau(f) = \tau(\tilde{f})$ . Es gibt fixpunktfreie Abbildungen  $f: \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ , etwa

$$(x_0 : \cdots : x_n) \mapsto (-x_1 : x_0 : \cdots : -x_n : x_{n-1}) ,$$

denn aus  $-x_{2i+1} = \lambda x_{2i}$  und  $x_{2i} = \lambda x_{2i+1}$  für alle  $i = 0, \dots, \frac{n-1}{2}$  folgt  $\lambda^2 = -1$ , was in  $\mathbb{R}$  keine Lösung hat.

- (4) Sei jetzt  $X = \mathbb{R}P^n$  mit  $n$  gerade, dann ist  $H_k(\mathbb{R}P^n)$  endlich für  $k > 0$ , trägt also nicht zur Lefschetz Zahl bei. Es folgt

$$\tau(f) = \text{tr}(f_*|_{H_0(\mathbb{R}P^n)}) = 1 ,$$

also gibt es keine fixpunktfreien Abbildungen  $f: \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  für gerade  $n$ .

Für die folgenden Beispiele benutzen wir die Kohomologiealgebra von  $X$ , siehe Abschnitt 4.4.

3.126. BEMERKUNG. Es sei nach wie vor  $H_\bullet(X)$  endlich erzeugt. Aus dem universellen Koeffiziententheorem 4.20 und Beispiel 4.17 folgt, dass der freie Anteil von  $H^k(X)$  dann dual zum freien Anteil von  $H_k(X)$  ist. Da das Transponierte einer Matrix die gleiche Spur wie die Matrix selbst hat, erhalten wir

$$\tau(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{tr}(f_*|_{H_k(X)}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{tr}((f_*|_{H_k(X)})^*) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{tr}(f^*|_{H^k(X)}) .$$

3.127. BEISPIEL. In den folgenden Beispielen benutzen wir die Kohomologiealgebra, um die Lefschetz Zahl zu bestimmen.

- (1) Es sei  $X = \mathbb{C}P^n$ , dann gilt  $H^\bullet(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$  nach Satz 4.45 für einen Erzeuger  $\alpha \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ . Sei  $f: \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$  stetig, dann existiert  $d \in \mathbb{Z}$ , so dass  $f_*\alpha = d\alpha$ . Für  $k = 0, \dots, n$  folgt

$$f_*(\alpha^k) = (f_*\alpha)^k = (d \cdot \alpha)^k = d^k \cdot \alpha^k .$$

Also ergibt sich die Lefschetz Zahl von  $f$  als

$$\tau(f) = \sum_{k=0}^n d^k = \frac{1 - d^{n+1}}{1 - d} ,$$

und die Nullstellen sind genau die  $(n+1)$ -ten Einheitswurzeln außer 1.

Für  $n$  gerade gibt es keine Lösung  $d \in \mathbb{Z}$ , also hat jede Abbildung  $f: \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$  für gerade  $n$  einen Fixpunkt.

Für ungerade  $n$  ist  $d = -1$  die einzige ganzzahlige Lösung. In der Tat gibt es eine fixpunktfreie Abbildung

$$f(z_0 : \cdots : z_n) = (-\bar{z}_1 : \bar{z}_0 : \cdots : -\bar{z}_n : \bar{z}_{n-1}) ,$$

denn aus  $-\bar{z}_{2i+1} = 2z_{2i}$  und  $\bar{z}_{2i} = 2z_{2i+1}$  für alle  $i = 0, \dots, \frac{n-1}{2}$  folgt  $\lambda\bar{\lambda} = |\lambda|^2 = -1$ , was nicht möglich ist. Für holomorphe Abbildungen  $f: \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$  gilt allerdings stets  $d \geq 0$ , also gibt es keine holomorphe, fixpunktfreie Abbildung  $f: \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$ .

- (2) Genauso kann man den Fall  $X = \mathbb{H}P^n$  (und auch  $X = \mathbb{R}P^n$ , allerdings mit Koeffizienten  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ) behandeln. Allerdings gibt es keine Abbildungen  $f: \mathbb{H}P^n \rightarrow \mathbb{H}P^n$  für  $n \geq 2$ , für die  $f_*$  auf  $H^4(\mathbb{H}P^n)$  durch  $-1$  wirkt (was wir hier aber noch nicht beweisen können), also hat jede Abbildung  $f: \mathbb{H}P^n \rightarrow \mathbb{H}P^n$  für  $n \geq 2$  einen Fixpunkt. Die obige Konstruktion funktioniert nicht über  $\mathbb{H}$ , denn  $-\overline{w} = \lambda \cdot w$  und  $\bar{w} = \lambda q$  gilt beispielsweise für  $q = i$ ,  $w = k$  und  $\lambda = j \in \mathbb{H}$ . Mit  $\mathbb{H}P^1 \cong S^4$  haben wir uns ja bereits in Beispiel 3.125 (2) beschäftigt.

- (3) Als letztes betrachten wir  $X = T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  mit

$$H^\bullet(T^n) \cong \Lambda^\bullet H^1(T^n) \cong \Lambda^\bullet \mathbb{Z}^n$$

nach Aufgabe 3 von Blatt 9. Es sei  $f: T^n \rightarrow T^n$  stetig, dann wirkt  $f_*$  auf  $H^1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n$  durch eine Matrix  $A \in M_n(\mathbb{Z})$ . Dann erhalten wir

$$f^*|_{H^k(T^n)} = \Lambda^k A^t \quad \text{mit} \quad \text{tr}(f^*|_{H^k(T^n)}) = \sigma_k(A^t) = \sigma_k(A),$$

wobei  $\sigma_k$  die  $k$ -te elementarsymmetrische Funktion in den Eigenwerten von  $A$  ist. Also gilt

$$\tau(f) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma_k(A) = \chi_A(1) = \det(A - E_n),$$

wobei  $\chi_A$  das charakteristische Polynom von  $A$  ist und  $E_n \in M_n(\mathbb{Z})$  die Einheitsmatrix. Also verschwindet  $\tau(f)$  genau dann, wenn  $A$  den Eigenwert 1 hat.

Wir wollen zu einer Matrix  $A \in M_n(\mathbb{Z})$  mit Eigenwert 1 eine fixpunktfreie Abbildung  $f: T^n \rightarrow T^n$  konstruieren. Dazu betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R}^n \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ T^n & \xrightarrow{f} & T^n \end{array}$$

und setzen

$$\tilde{f}(x) = Ax + b$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $b \in \mathbb{R}^n$  fest. Die zugehörigen Abbildungen  $f$  für verschiedene  $b$  sind offensichtlich homotop. Um  $f_*$  auf  $H_1(T^n) \cong \pi_1(T^n)$  zu bestimmen, setzen wir  $b = 0$  und betrachten die Schleifen  $\gamma_i: [0, 1] \rightarrow T^n$  mit Lifts

$$\tilde{\gamma}_i: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \tilde{\gamma}_i(t) = t \cdot e_i$$

für  $i = 1, \dots, n$ . Deren Homotopieklassen bilden eine Basis von  $\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n$ . Es folgt

$$\widetilde{f_*\gamma_i}(t) = A \cdot \gamma_i(t) = t \cdot Ae_i,$$

also gibt  $A$  gerade die Wirkung von  $f_*$  auf  $\pi_1(T^n)$ , und wegen der Natürlichkeitsaussage im Satz 3.63 von Hurewicz auch auf  $H_1(T^n)$  an.

Ein Punkt  $p(x) \in T^n$  mit  $x \in \mathbb{R}^n$  ist genau dann ein Fixpunkt von  $f$  mit beliebigem  $b \in \mathbb{R}^n$ , wenn es einen Vektor  $v \in \mathbb{Z}^n$  mit

$$Ax + b = x + v \iff (A - E_n)x = v - b$$

gibt. Wenn  $\det(A - E_n) = 0$  gilt, ist  $\text{im}(A - E_n)$  ein echter Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ , also finden wir  $b \in \mathbb{R}^n$ , so dass

$$\text{im}(A - E_n) \cap (\mathbb{Z}^n - b) = \emptyset.$$

In diesem Fall operiert  $f$  fixpunktfrei.

Übrigens bestimmt die Wirkung auf  $H_1(T^n)$  die Homotopieklasse, denn sei  $g: T^n \rightarrow T^n$  eine Abbildung mit  $g_* = A$  auf  $H_1(T^n) \cong \pi_1(T^n)$ , dann konstruieren wir einen Lift  $\tilde{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit dem Liftungssatz 2.58. Wie oben folgt

$$\tilde{g}(x + v) = \tilde{g}(x) + A \cdot v$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und alle  $v \in \mathbb{Z}^n$ , indem wir die Schleife  $t \mapsto p(x + tv)$  in  $T^n$  betrachten. Wir erhalten eine  $\mathbb{Z}^n$ -periodische Homotopie  $\tilde{h}: \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\tilde{h}(x, t) = (1 - t) \cdot \tilde{f}(x) + t \cdot \tilde{g}(x),$$

die eine Homotopie  $h$  zwischen  $f$  und  $g$  induziert.

### 3.11. Übungen zu Kapitel 3

Übungen zu Abschnitt 3.1.

3.128. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Die Sequenz  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  ist genau dann bei  $A$  und  $B$  exakt, wenn  $f$  einen Isomorphismus  $A \cong \ker g$  induziert.
- (2) Die Sequenz  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  ist genau dann bei  $B$  und  $C$  exakt, wenn  $g$  einen Isomorphismus  $\operatorname{coker} f \cong C$  induziert.

Was folgt für  $A$  und  $f$  in den exakten Sequenzen  $0 \rightarrow A \rightarrow 0$  beziehungsweise  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ ?

3.129. ÜBUNG. Sei  $(X, A)$  ein Paar,  $A \subset X$  abgeschlossen.

- (1) Zeigen Sie, dass  $X/A$  normal ist, wenn  $X$  normal ist.
- (2) Finden Sie Bedingungen an das Paar  $(X, A)$ , so dass  $X$  das Trennungsaxiom (T2) beziehungsweise (T3) erfüllt,  $X/A$  jedoch nicht.

3.130. ÜBUNG. Es seien  $A, B \subset X$  mit  $C = A \cap B \neq \emptyset$  und  $X = A \cup B$ , und die Paare  $(A, C)$ ,  $(B, C)$ ,  $(X, A)$ ,  $(X, B)$  und  $(X, C)$  seien gut. Zeigen Sie, dass die kanonischen Abbildungen

$$A/C \rightarrow X/B, \quad B/C \rightarrow X/A \quad \text{und} \quad (A/C) \vee (B/C) \rightarrow X/C$$

Homöomorphismen sind.

3.131. ÜBUNG. Es sei  $f: X \rightarrow Y$  stetig  $Z = Y \sqcup (X \times [0, 1]) / \sim$ , wobei  $\sim$  erzeugt wird durch  $(x, 1) \sim f(x) \in Y$ , und  $Cf = Z / (X \times \{0\})$ . Zeigen Sie:

- (1) Das Paar  $(Z, X \times \{0\})$  ist gut.
- (2) Der Raum  $Y$  ist ein Deformationsretrakt von  $Z$ .
- (3) Für jede verallgemeinerte reduzierte Homologietheorie  $\tilde{h}_\bullet$  existiert eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \tilde{h}_k(X) \xrightarrow{\tilde{h}_k f} \tilde{h}_k(Y) \longrightarrow \tilde{h}_k(Cf) \longrightarrow \tilde{h}_{k-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

*Hinweis:* Ersetzen Sie  $f$  durch die Inklusion  $X \times \{0\} \hookrightarrow Z$ .

Übungen zu Abschnitt 3.2.

3.132. ÜBUNG. Es sei  $n \geq 0$  und  $f : S^n \rightarrow S^n$  stetig. Zeigen Sie:

(1) Dann ist auch die Abbildung

$$\overline{D}^{n+1} \longrightarrow \overline{D}^{n+1}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ |x| \cdot f\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{für } x \neq 0, \end{cases}$$

stetig und induziert eine stetige Abbildung  $\overline{f} : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1} = \overline{D}^{n+1}/S^n$ .

(2) Es gilt  $\deg \overline{f} = \deg f$ .

3.133. ÜBUNG. Bestimmen Sie alle Abbildungen  $f : S^0 \rightarrow S^0$ , und geben Sie zu jeder den Abbildungsgrad an.

3.134. ÜBUNG. Zeigen Sie, dass die "Addition" von punktierten Abbildungen  $f, g : (S^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$  in Lemma 3.19 der Verkettung von Schleifen in Definition 2.13 entspricht. Folgern Sie, dass  $\deg : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$  gerade der Isomorphismus aus Satz 2.28 ist.

3.135. ÜBUNG. Es sei  $n \geq 1$ .

(1) Zeigen Sie mit Bemerkung 3.21, dass zu jeder stetigen Abbildung  $f : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$  ein  $x \in S^{2n}$  mit  $f(x) = x$  oder  $f(x) = -x$  existiert.

(2) Überlegen Sie sich, dass  $\mathbb{R}P^{2n} = S^{2n}/\Gamma$ , wobei die Gruppe  $\Gamma = \{-1, 1\}$  durch  $(-1)(x) = -x$  operiert.

(3) Folgern Sie aus (1) und (2), dass jede stetige Abbildung  $g : \mathbb{R}P^{2n} \rightarrow \mathbb{R}P^{2n}$  einen Fixpunkt hat.

Übungen zu Abschnitt 3.3.

3.136. ÜBUNG. Berechnen Sie mit Hilfe der Überlegungen aus dem Beispiel 3.30 der Vorlesung für alle  $k$  und alle  $n$  jeweils  $\widetilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{k})$

(1) für einen Körper  $\mathbb{k}$  der Charakteristik  $\chi(\mathbb{k}) \neq 2$ , zum Beispiel  $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ ,

(2) für einen Körper  $\mathbb{k}$  der Charakteristik  $\chi(\mathbb{k}) = 2$ , zum Beispiel  $\mathbb{k} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

3.137. ÜBUNG. Es sei  $\mathbb{k}$  ein Körper und  $X$  ein CW-Komplex mit höchstens endlich vielen Zellen in jeder Dimension, also  $\#J^n < \infty$  für alle  $n$ . Beweisen Sie Satz 3.32. Benutzen Sie dazu die Dimensionsformeln aus der linearen Algebra.

3.138. ÜBUNG. (1) Zeigen Sie, dass  $\widetilde{H}_k^{\text{CW}}(X; M) \cong M^{\#J^k}$  gilt, wenn der CW-Komplex  $X$  keine Zellen der Dimension  $k-1$  und  $k+1$  besitzt.

(2) Berechnen Sie dann  $\widetilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{C}P^n; M)$  und  $\widetilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{H}P^n; M)$  mit Hilfe von Teil (1) und Aufgabe 1.137.

3.139. ÜBUNG. Es sei  $(X, x_0)$  ein punktierter CW-Komplex. Konstruieren Sie Isomorphismen

$$\overline{H}_n^{\text{CW}}(X; M) \cong \widetilde{H}_n^{\text{CW}}(X; M) \text{ für alle } n,$$

$$H_n^{\text{CW}}(X; M) \cong \widetilde{H}_n^{\text{CW}}(X; M) \text{ für } n \neq 0, \text{ und}$$

$$H_0^{\text{CW}}(X; M) \cong \widetilde{H}_0^{\text{CW}}(X; M) \oplus M.$$

Berechnen Sie außerdem  $H_n^{\text{CW}}(\emptyset; M)$  und  $\overline{H}_n^{\text{CW}}(\emptyset; M)$  für alle  $n$ .

*Hinweis:* Betrachten Sie die natürlichen Projektionen  $\overline{C}_\bullet^{\text{CW}} \longrightarrow C_\bullet^{\text{CW}} \longrightarrow \widetilde{C}_\bullet^{\text{CW}}$ .

3.140. ÜBUNG. Es sei  $\text{Ch}_R$  die Kategorie der Kettenkomplexe und -abbildungen über  $R$ , siehe Definition 3.25. Zeigen Sie:

(1) Jede Kettenabbildung  $f : (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet, d'_\bullet)$  vom Grad  $a$  induziert Abbildungen

$$\begin{aligned} Zf_k &: Z_k(C_\bullet, d_\bullet) \longrightarrow Z_{k+a}(C'_\bullet, d'_\bullet), \\ Bf_k &: B_k(C_\bullet, d_\bullet) \longrightarrow B_{k+a}(C'_\bullet, d'_\bullet), \\ f_{*k} = Hf_k &: H_k(C_\bullet, d_\bullet) \longrightarrow H_{k+a}(C'_\bullet, d'_\bullet). \end{aligned}$$

(2) Es sei  $a = 0$ . Dann sind  $Z_k, B_k$  und  $H_k : Ch_R \rightarrow Mod_R$  für alle  $k$  Funktoren.

Übungen zu Abschnitt 3.5.

3.141. ÜBUNG. Beweisen Sie mittels Diagrammjagd die Exaktheit der Sequenz

$$\dots \longrightarrow H_k(X, A) \longrightarrow H_k(X) \longrightarrow H_k(A) \longrightarrow H_{k+1}(X, A) \longrightarrow \dots$$

aus dem Schlangenlemma 3.44 an einer der fehlenden Stellen.

3.142. ÜBUNG. Gegeben sei ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longleftarrow & A_k & \longleftarrow & B_k & \xleftarrow{g_k} & C_k & \xleftarrow{f_k} & A_{k+1} & \longleftarrow & \dots \\ & & \parallel & & i_k \downarrow & & \downarrow h_k & & \parallel & & \\ \dots & \longleftarrow & A_k & \xleftarrow{l_k} & D_k & \xleftarrow{j_k} & E_k & \xleftarrow{f_k} & A_{k+1} & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

so dass die Zeilen exakte Sequenzen sind. Zeigen Sie mittels Diagrammjagd, dass dann die Sequenz

$$\dots \longleftarrow D_k \xleftarrow{i_k - j_k} B_k \oplus E_k \xleftarrow{(g_k, h_k)} C_k \xleftarrow{f_k \circ l_{k+1}} D_{k+1} \longleftarrow \dots$$

an einer Stelle Ihrer Wahl exakt ist.

3.143. ÜBUNG. Es sei  $X = A \cup B$  ein topologischer Raum, so dass die Paare  $(A, A \cap B)$  und  $(X, B)$  gut sind. Nach Übung 3.130 gilt  $X/B \cong A/A \cap B$ . Sei  $\tilde{h}_\bullet$  eine verallgemeinerte reduzierte Homologietheorie.

(1) Konstruieren Sie aus den langen exakten Sequenzen der Paare  $(A, A \cap B)$  und  $(X, B)$  mit Übung 3.142 eine exakte Sequenz der Form

$$\dots \leftarrow \tilde{h}_k(X) \leftarrow \tilde{h}_k(A) \oplus \tilde{h}_k(B) \leftarrow \tilde{h}_k(A \cap B) \leftarrow \tilde{h}_{k+1}(X) \leftarrow \dots$$

(2) Folgern Sie, dass das Summenaxiom für das Wedge-Produkt zweier (und damit endlich vieler) gut punktierter Räume bereits aus den ersten zwei Eilenberg-Steenrod-Axiomen folgt.

Übungen zu Abschnitt 3.7.

3.144. ÜBUNG. Wir wollen den Satz von Hurewicz für CW-Komplexe beweisen. Zeigen Sie dazu:

(1) Sei  $X$  ein zusammenhängender CW-Komplex, siehe Folgerung 1.101. Sei  $Y = X^0 \cup \bigcup_{j \in J} e_j^1 \subset$

$X^1$  ein maximaler Baum wie in Satz 2.52 (1). Folgern Sie dann aus der Sequenz des Paares  $(X^1, Y)$ , dass

$$H_1(X^1) \simeq H_1(X^1/Y) \simeq \bigoplus_{i \in I_1 \setminus J} \mathbb{Z}.$$

(2) Für  $i \in I_2$  sei  $\tilde{\varphi}_i^2 : S^1 \rightarrow X^1/Y$  von der Verklebeabbildung induziert. Sei  $[e] \in H^2(D^2, S^1)$  ein Erzeuger. Folgern Sie aus den Sequenzen der Paare  $(X^2, Y)$  und  $(X^2/Y, X^1/Y)$ , dass

$$H_1(X^2) \simeq H_1(X^2/Y) = H_1(X^1/Y) / (\{\tilde{\varphi}_{i*}^2[e] \mid i \in I^2\}).$$

(3) Schließen Sie mit Satz 2.52 und Lemma 3.24, dass

$$H_1(X) = \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}.$$

Übungen zu Abschnitt 3.8.

3.145. ÜBUNG. Sei  $X = D^{n+1} \cup_{\varphi} S^n$  der topologische Raum, den man durch Verkleben der Zelle  $D^{n+1}$  an die  $n$ -Sphäre mit einer Abbildung  $\varphi : S^n \rightarrow S^n$  vom Grad  $\deg(\varphi) = k \neq 0$  erhält. Berechnen Sie:

- (1)  $\tilde{H}_{\bullet}(X) := \tilde{H}_{\bullet}(X; \mathbb{Z})$ ,
- (2)  $\tilde{H}_{\bullet}(X; \mathbb{Z}/a\mathbb{Z})$ , für alle  $a \in \mathbb{N}$ ,  $a > 1$ .

3.146. ÜBUNG. Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von  $R$ -Moduln. Zeigen Sie mit Hilfe des Schlangenlemmas die Existenz einer langen exakten Homologie-Sequenz

$$\dots \rightarrow H_i(X; M') \rightarrow H_i(X; M) \rightarrow H_i(X; M'') \rightarrow H_{i-1}(X; M') \rightarrow \dots$$

3.147. ÜBUNG. Zeigen Sie, dass  $H_1(D^1, S^0) \simeq \mathbb{Z}$ , und dass ein Erzeuger von  $H_1(D^1, S^0)$  durch  $\text{id}_{D^1}$  gegeben ist, wobei wir  $D^1$  mit  $\Delta^1$  affin identifizieren.

3.148. ÜBUNG. Sei  $B \subset A \subset X$ .

(1) Zeigen Sie, dass die kurze Sequenz von Komplexen

$$0 \rightarrow C_{\bullet}(A)/C_{\bullet}(B) \rightarrow C_{\bullet}(X)/C_{\bullet}(B) \rightarrow C_{\bullet}(X)/C_{\bullet}(A) \rightarrow 0$$

exakt ist.

(2) Zeigen Sie mit Hilfe des Schlangenlemmas die Existenz einer langen exakten Homologie-Sequenz

$$\dots \xrightarrow{\Delta_{i+1}} H_i(A, B) \rightarrow H_i(X, B) \rightarrow H_i(X, A) \xrightarrow{\Delta_i} H_{i-1}(A, B) \rightarrow \dots$$

(Hierbei sind die Pfeile  $H_i(A, B) \rightarrow H_i(X, B)$  und  $H_i(X, B) \rightarrow H_i(X, A)$  jeweils durch die Inklusion induziert.)

(3) Überlegen Sie sich, dass  $\Delta_{\bullet} := j_{\bullet-1} \circ \partial_{\bullet}$ , wobei

$$j_{\bullet-1} : H_{\bullet-1}(A) \rightarrow H_{\bullet-1}(A, B)$$

und

$$\partial_{\bullet} : H_{\bullet}(X, A) \rightarrow H_{\bullet-1}(A)$$

der Verbindungshomomorphismus für das Paar  $(X, A)$  ist.

3.149. ÜBUNG. Beweisen Sie mindestens eine der vier Aussagen in Bemerkung 3.73.

3.150. ÜBUNG. Es seien  $f : A_0 \rightarrow A_1$  und  $g : B_0 \rightarrow B_1$  surjektive Morphismen von unitären  $R$ -Moduln.

(1) Zeigen Sie, dass  $f \otimes g : A_0 \otimes_R B_0 \rightarrow A_1 \otimes_R B_1$  surjektiv ist.

(2) Sei  $D \subset A_0 \otimes_R B_0$  der Untermodul erzeugt von allen  $a \otimes b$ , wobei  $a \in \ker f$  oder  $b \in \ker g$ . Dann existiert eine wohldefinierte bilineare Abbildung  $A_1 \times B_1 \rightarrow (A_0 \otimes_R B_0)/D$ , die  $(a', b')$  auf  $[a \otimes b]$  mit  $f(a) = a'$  und  $g(b) = b'$  abbildet.

(3) Sei  $A \rightarrow A' \rightarrow A'' \rightarrow 0$  eine exakte Sequenz von  $R$ -Moduln und sei  $B \in \text{Mod}_R$ . Dann ist auch die folgende Sequenz exakt

$$A \otimes_R B \rightarrow A' \otimes_R B \rightarrow A'' \otimes_R B \rightarrow 0.$$

3.151. ÜBUNG. Sei  $X$  der Moore-Raum aus Aufgabe 3.145 mit  $k = 2$ , sei  $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  und  $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Berechnen Sie  $H_\bullet(X; R)$ ,  $H_\bullet(X; M)$  und zeigen Sie, dass

$$0 \rightarrow H_{n+1}(X; R) \otimes_R M \rightarrow H_{n+1}(X; M) \rightarrow \text{Tor}_R(H_n(X; R), M) \rightarrow 0$$

nicht exakt ist.

3.152. ÜBUNG. Sei  $M = \mathbb{Z}^{\text{rg } M} \oplus \bigoplus_{i=1}^k (\mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z})$ , mit  $a_i \in \mathbb{N}$ ,  $a_i > 1$ , ein endlich erzeugter  $\mathbb{Z}$ -Modul. Zeigen Sie

$$M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{\text{rg } M}, \quad (1)$$

$$\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}) = 0, \quad (2)$$

$$M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\text{rg } M}, \quad (3)$$

$$\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Tor}_{\mathbb{Z}} M. \quad (4)$$

3.153. ÜBUNG. Sei  $R$  ein Hauptidealring und  $M, N \in \text{Mod}_R$ . Nach Beispiel 3.77 (2) hat jeder Modul  $M$  über einem Hauptidealring  $R$  eine freie Auflösung

$$0 \leftarrow M \leftarrow M_0 \leftarrow M_1 \leftarrow 0.$$

Benutzen Sie Bemerkung 3.80 (4) und die obige freie Auflösung, um zu zeigen, dass  $\text{Tor}_R(M, N) \simeq \text{Tor}_R(N, M)$ .

3.154. ÜBUNG. Sei  $X$  ein topologischer Raum, so dass  $H_n(X; \mathbb{Z})$  für alle  $n$  endlich erzeugt ist und für fast alle  $n$  verschwindet. Die Eulercharakteristik von  $X$  ist wie folgt definiert

$$\chi(X) = \sum_n (-1)^n \text{rg } H_n(X; \mathbb{Z}).$$

Zeigen Sie mit Hilfe des universellen Koeffiziententheorems, dass

$$\chi(X) = \sum_n (-1)^n \dim H_n(X; F),$$

für  $F = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ,  $p$  prim, bzw.  $F = \mathbb{Q}$ , siehe Definition 3.31.

3.155. ÜBUNG. Sei  $X$  ein topologischer Raum mit  $H_\bullet(X; \mathbb{Z})$  endlich erzeugt. Es sei  $\tilde{H}_n(X; \mathbb{Q}) = 0$  und  $\tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$  für alle  $p$  prim und alle  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie

$$\tilde{H}_n(X; M) = 0$$

für jeden  $\mathbb{Z}$ -Modul  $M$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ . (Tipp: Benutzen Sie das universelle Koeffiziententheorem und zeigen Sie die Aussage zuerst für  $M = \mathbb{Z}$ .)

*Übungen zu Abschnitt 3.9.*

3.156. ÜBUNG. Es sei  $T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n\text{-mal}}$  der  $n$ -dimensionale Torus. Beweisen Sie durch Induktion über  $n$ , dass

$$H_k(T^n; R) \cong R^{\binom{n}{k}}.$$

3.157. ÜBUNG. Es seien  $M_k^m, M_l^n$  zwei Moore-Räume wie in Aufgabe 3.145. Berechnen Sie  $H_\bullet(M_k^m \times M_l^n; \mathbb{Z})$  mit Hilfe der Künneth-Formel.

3.158. ÜBUNG. Zeigen Sie, dass die Ketten  $f_{k,\Delta^k}(\delta_{\Delta^k}) \in C_\bullet(\Delta^k; R) \otimes_R C_\bullet(\Delta^k; R)$  in Beispiel 3.96 eine natürliche Kettenabbildung

$$f_\bullet : C_\bullet(\cdot \times \cdot; R) \longrightarrow C_\bullet(\cdot; R) \otimes_R C_\bullet(\cdot; R)$$

definieren.

3.159. ÜBUNG. Lösen Sie eine der folgenden Teilaufgaben:

(1) Zeigen Sie, dass

$$\varphi_\bullet : (C_\bullet(X; R) \otimes_R C_\bullet(Y; R)) \otimes_R C_\bullet(Z; R) \longrightarrow C_\bullet(X; R) \otimes_R (C_\bullet(Y; R) \otimes_R C_\bullet(Z; R))$$

einen natürlichen Kettenhomomorphismus definiert und dass das erste Diagramm in Bemerkung 3.97 bis auf natürliche Kettenhomotopie kommutiert.

(2) Zeigen Sie, dass

$$\psi : C_\bullet(X; R) \otimes_R C_\bullet(Y; R) \longrightarrow C_\bullet(Y; R) \otimes_R C_\bullet(X; R)$$

einen natürlichen Kettenhomomorphismus definiert und dass das zweite Diagramm in Bemerkung 3.97 bis auf natürliche Kettenhomotopie kommutiert.

Dabei werden  $\varphi_\bullet$  und  $\psi_\bullet$  gegeben durch

$$\varphi_{i+j+k}((a \otimes b) \otimes c) = a \otimes (b \otimes c) \quad \text{und} \quad \psi_{i+j}(a \otimes b) = (-1)^{ij} b \otimes a$$

für alle  $i, j, k \in \mathbb{N}_0$  und  $a \in C_i(X; R)$ ,  $b \in C_j(Y; R)$  und  $c \in C_k(Z; R)$ .

3.160. ÜBUNG. Es seien  $f : X \rightarrow Z$ ,  $g : Y \rightarrow W$  stetige punktierte Abbildungen zwischen punktierten Räumen. Dann existiert eine stetige punktierte Abbildung  $f \wedge g : X \wedge Y \rightarrow Z \wedge W$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & Z \times W \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \wedge Y & \longrightarrow & Z \wedge W \end{array}$$

kommutiert. Sind  $f_0, f_1$  und  $g_0, g_1$  als punktierte Abbildungen homotop, dann sind das auch  $f_0 \wedge g_0$  und  $f_1 \wedge g_1$ .

3.161. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Das Wedge-Produkt  $(X_0, x_0) \vee (Y_0, y_0)$  ist homöomorph zum Unterraum  $X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y \subset X \times Y$
- (2) Für beliebige Indexmengen  $I$  gilt

$$\left( \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i) \right) \wedge (Y, y_0) \cong \bigvee_{i \in I} ((X_i, x_i) \wedge (Y, y_0)).$$

3.162. ÜBUNG. Es sei  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine zweiblättrige Überlagerung. Aus dem Liftungssatz 2.58 folgt, dass jedes singuläre Simplex  $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$  genau zwei Urbilder unter  $p_\# : S_k(\tilde{X}) \rightarrow S_k(X)$  hat. Wir definieren  $p^\dagger : C_k(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow C_k(\tilde{X}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  durch

$$p^\dagger \sigma = \sum_{\tilde{\sigma} \in p_\#^{-1}(\sigma)} \tilde{\sigma}.$$

(1) Zeigen Sie, dass die Transfersequenz

$$0 \rightarrow C_k(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{p^\dagger} C_k(\tilde{X}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{p_\#} C_k(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

exakt ist, und geben Sie die zugehörige lange exakte Homologiesequenz an.

- (2) Betrachten Sie  $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  wie in Aufgabe 2.89 (2) und berechnen Sie  $H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  aus  $H_\bullet(S^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  durch Induktion über  $k$ . Benutzen Sie, dass  $H_0(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  nach Satz 3.40.

3.163. ÜBUNG. Es sei  $f : S^n \rightarrow S^n$  ungerade, das heißt,  $f(-x) = f(x)$  für alle  $x \in S^n$ . Insbesondere induziert  $f$  eine Abbildung  $\bar{f} : \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ . Zeigen Sie:

- (1) Die Abbildungen  $f$  und  $\bar{f}$  induzieren eine Kettenabbildung von der langen exakten Sequenz aus Aufgabe 3.162 in sich.
- (2) Beweisen Sie durch Induktion über  $k$ , dass alle Abbildungen  $f_{k*}, \bar{f}_{k*}$  Isomorphismen sind.
- (3) Der Abbildungsgrad  $\deg f$  aus Definition 3.16 ist ungerade ist.
- (4) Folgern Sie daraus den Satz von Borsuk-Ulam: für jede Abbildung  $g : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  existiert ein  $x \in S^n$  mit  $g(x) = g(-x)$ .

## Kohomologie

Kohomologie ist ein dualer Begriff zur Homologie. Wir stellen zunächst die Axiome vor und konstruieren dann singuläre Kohomologie. Am Anfang verläuft die Theorie im wesentlichen parallel zu den Abschnitten 3.1 — 3.6 des letzten Kapitels.

Anschließend beweisen wir ein universelles Koeffiziententheorem für die Kohomologie, wonach sich Kohomologie fast, aber nicht vollständig, aus der entsprechenden Homologietheorie rekonstruieren lässt. Dazu gehen wir ähnlich wie in Abschnitt 3.8 vor.

Im Gegensatz zur Homologie trägt die Kohomologie eines Raumes in natürlicher Weise die Struktur eines graduierten Ringes. Zur Definition der Multiplikation, des sogenannten Cup-Produktes, ziehen wir Methoden aus Abschnitt 3.9 mit heran.

Die Homologie eines Raumes mit umgekehrter Graduierung lässt sich mit Hilfe des Cap-Produktes als Modul über dem Homologiering darstellen. Für orientierbare topologische Mannigfaltigkeiten besagt Poincaré-Dualität, dass Homologie und Kohomologie mit entgegengesetzter Graduierung isomorph sind.

### 4.1. Singuläre Kohomologie

In diesem Abschnitt stellen wir Axiome für verallgemeinerte Kohomologietheorien auf, konstruieren die singuläre Kohomologie, und zeigen, dass sie die Axiome erfüllt.

Der Hauptunterschied zwischen Homologie und Kohomologie besteht darin, dass Kohomologie „Pfeile umdreht“. Wir führen dazu einen neuen Begriff ein.

4.1. DEFINITION. Es seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  zwei Kategorien. Ein *kontravarianter Funktor*  $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ordnet jedem Objekt  $A \in \text{obj}(\mathcal{C})$  ein Objekt  $\mathcal{F}A \in \text{obj}(\mathcal{D})$  und jedem Morphismus  $f \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  einen Morphismus  $\mathcal{F}f \in \text{hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}B, \mathcal{F}A)$  zu, so dass

$$\mathcal{F} \text{id}_A = \text{id}_{\mathcal{F}A} , \tag{1}$$

$$\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}g \circ \mathcal{F}f \tag{2}$$

für alle  $A, B, C \in \text{obj}(\mathcal{C})$  und alle  $f \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ ,  $g \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ .

Im Gegensatz dazu heißen Funktoren wie in Definition 2.18 kovariant. Gegenüber Definition 2.18 hat sich also nur die Richtung des Morphismus  $\mathcal{F}f$  geändert. Entsprechend wurde Bedingung (2) so abgeändert, dass die Verknüpfung wohldefiniert bleibt.

4.2. BEISPIEL. Es sei  $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \text{Vec}_{\mathbb{k}}$  die Kategorie der Vektorräume über einem Körper  $\mathbb{k}$ . Dualisieren ist ein typischer kontravarianter Funktor, der jedem Vektorraum  $V$  den Dualraum  $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k})$  zuordnet. Zu jeder linearen Abbildung  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$  erhalten wir die duale Abbildung  $f^*: \text{Hom}_{\mathbb{k}}(W^*, V^*)$  durch Zurückholen, das heißt:

$$f^* \beta = \beta \circ f: V \longrightarrow \mathbb{k} \quad \text{für alle} \quad \beta: W \longrightarrow \mathbb{k} .$$

Wir wollen auch natürliche Transformationen zwischen kontravarianten Funktoren betrachten.

4.3. DEFINITION. Es seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  zwei Kategorien und  $\mathcal{F}, \mathcal{G}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  zwei kontravariante Funktoren. Eine *natürliche Transformation*  $\mathcal{T}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  ordnet jedem  $A \in \text{obj} \mathcal{C}$  einen Morphismus  $\mathcal{T}A \in$

$\text{hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}A, \mathcal{G}A)$  zu, so dass für alle  $f \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  das folgende Diagramm in der Kategorie  $\mathcal{D}$  kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}A & \xleftarrow{\mathcal{F}f} & \mathcal{F}B \\ \tau_A \downarrow & & \downarrow \tau_B \\ \mathcal{G}A & \xleftarrow{\mathcal{G}f} & \mathcal{G}B \end{array}$$

Schließlich erinnern wir uns an das direkte Produkt von Vektorräumen aus Übung 1.119. Analog definieren wir das direkte Produkt von Moduln  $(M_i)_{i \in I}$  über  $R$  durch

$$\prod_{i \in I} M_i = \{(m_i)_{i \in I} \mid m_i \in M_i \text{ für alle } i \in I\}$$

mit der naheliegenden  $R$ -Modulstruktur. Wir schreiben nach wie vor

$$(m_i)_{i \in I} = \sum_{i \in I} m_i \in \prod_{i \in I} M_i$$

und weisen darauf hin, dass im Gegensatz zur direkten Summe hier beliebig viele Summanden ungleich 0 sein dürfen. Wie in Übung 1.119 zeigt man, dass das direkte Produkt ein Produkt auf der Kategorie  $\text{Mod}_R$  im Sinne von Bemerkung 1.48 definiert.

Wir können jetzt die Axiome einer reduzierten (verallgemeinerten) Kohomologietheorie angeben, indem wir in Definition 3.12 alle Pfeile umdrehen und die direkte Summe durch ein direktes Produkt ersetzen.

4.4. DEFINITION. Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins. Eine *verallgemeinerte reduzierte Kohomologietheorie*  $(\tilde{h}^\bullet, \delta^\bullet)$  über  $R$  besteht aus einer Familie von kontravarianten Funktoren

$$\tilde{h}^\bullet = (\tilde{h}^n : \text{Top} \rightarrow \text{Mod}_R)_{n \in \mathbb{Z}},$$

und einer Familie natürlicher Transformationen  $\delta^\bullet = (\delta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  mit  $\delta^n(X, A) : \tilde{h}^n(A) \rightarrow \tilde{h}^{n+1}(X/A)$  für alle guten Paare  $(X, A)$ , die die folgenden *Eilenberg-Steenrod-Axiome* erfüllen.

(1) *Homotopieinvarianz.* Wenn  $f, g : X \rightarrow Y$  homotope Abbildungen sind, gilt

$$\tilde{h}^n f = \tilde{h}^n g : \tilde{h}^n(Y) \rightarrow \tilde{h}^n(X) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

(2) *Kohomologiesequenz.* Für jedes gute Paar  $(X, A)$  ist die folgende Sequenz exakt:

$$\dots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \tilde{h}^n(X/A) \xrightarrow{\tilde{h}^n p} \tilde{h}^n(X) \xrightarrow{\tilde{h}^n \iota} \tilde{h}^n(A) \xrightarrow{\delta^n} \tilde{h}^{n+1}(X/A) \xrightarrow{\tilde{h}^{n+1} p} \dots$$

(3) *Summenaxiom.* Sei  $(X_i, x_i)_{i \in I}$  eine Familie gut punktierter Räume, dann induzieren für alle  $n \in \mathbb{Z}$  die Inklusionsabbildungen  $\iota_i : X_i \rightarrow \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i)$  einen Isomorphismus

$$\prod_{i \in I} \tilde{h}^n \iota_i : \tilde{h}^n \left( \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i) \right) \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \tilde{h}^n(X_i).$$

Man nennt  $(\tilde{h}^\bullet, \delta^\bullet)$  eine *reduzierte Kohomologietheorie* mit *Koeffizienten*  $M \in \text{Mod}_R$ , wenn zusätzlich das folgende Axiom gilt.

(4) *Dimensionsaxiom.*

$$\tilde{h}^n(S^0) = \begin{cases} M & \text{für } n = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

4.5. BEISPIEL. Aus den Axiomen können wir für manche Räume bereits die Kohomologiemoduln bezüglich einer beliebigen verallgemeinerten Kohomologietheorie  $\tilde{h}^\bullet$  bestimmen.

(1) Für das Paar  $(*, *)$  liefert Axiom (2) die Kohomologiesequenz

$$\dots \longrightarrow \tilde{h}^k(*) \xrightarrow[\text{=id}_{\tilde{h}^k(*)}]{\tilde{h}^k \text{id}_*} \tilde{h}^k(*) \xrightarrow[\text{=id}_{\tilde{h}^k(*)}]{\tilde{h}^k \text{id}_*} \tilde{h}^k(*) \longrightarrow \dots$$

und daher  $\tilde{h}^k(*) = 0$  für alle  $k$  wie in Beispiel 3.13. Wegen der Homotopieinvarianz verschwindet  $\tilde{h}^k(X)$  für alle zusammenziehbaren Räume  $X$ .

(2) Wie in Satz 3.14 betrachte das gute Paar  $(D^n, S^{n-1})$  mit  $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ . Aus der Homologiesequenz und (1) folgt

$$\dots \longrightarrow \underbrace{\tilde{h}^k(D^n)}_{=0} \longrightarrow \tilde{h}^k(S^{n-1}) \xrightarrow[\cong]{\delta^k} \tilde{h}^{k+1}(S^n) \longrightarrow \underbrace{\tilde{h}^{k+1}(D^n)}_{=0} \longrightarrow \dots$$

Durch Induktion über  $n$  erhalten wir

$$\tilde{h}^k(S^n) = \tilde{h}^{k-n}(S^0) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

(3) Wir können die Argumente aus Abschnitt 3.2 übertragen und erhalten für jede stetige Abbildung  $f: S^n \rightarrow S^n$ , dass  $\tilde{h}^k f: \tilde{h}^k(S^n) \rightarrow \tilde{h}^k(S^n)$  durch Multiplikation mit  $\text{deg } f$  wirkt.

Diesem Gedankengang weiter folgend erhalten wir schließlich ein Analogon von Satz 3.27 und können „echte“ Kohomologietheorien, die dem Dimensionsaxiom 4.4 (4) genügen, auf der Kategorie der CW-Komplexe analog zur zellulären Homologie beschreiben. Das wollen wir hier aber nicht weiter ausführen.

Wir wollen jetzt analog zu Beispiel 4.2 Kettenkomplexe dualisieren, um damit später singuläre Kohomologie beschreiben zu können. Zunächst einmal betrachten wir Kokettenkomplexe in völliger Analogie zu Definition 3.25 und definieren auch gleich Kokettenhomotopien und Quasiisomorphismen.

4.6. DEFINITION. Ein *Kokettenkomplex*  $(C^\bullet, d^\bullet)$  über  $R$  ist eine Sequenz  $(d^n: C^n \rightarrow C^{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$  unitärer  $R$ -Moduln, so dass

$$d^n \circ d^{n-1} = 0: C^{n-1} \longrightarrow C^{n+1}$$

für alle  $n \in \mathbb{Z}$ . Man definiert  $R$ -Moduln  $Z^n(C^\bullet, d^\bullet)$ ,  $B^n(C^\bullet, d^\bullet) \subset C^n$  und  $H^n(C^\bullet, d^\bullet)$  durch

$$Z^n(C^\bullet, d^\bullet) = \ker d^n, \quad B^n(C^\bullet, d^\bullet) = \text{im } d^{n-1} \quad \text{und} \quad H^n(C^\bullet, d^\bullet) = Z^n(C^\bullet, d^\bullet)/B^n(C^\bullet, d^\bullet).$$

Elemente von  $C^n$ ,  $Z^n(C^\bullet, d^\bullet)$  und  $B^n(C^\bullet, d^\bullet)$  heißen *n-Koketten*, *n-Kozykel* beziehungsweise *n-Koränder* des Komplexes. Der Modul  $H^n(C^\bullet, d^\bullet)$  heißt die *n-te Kohomologie* des Komplexes, und seine Elemente *n-te Kohomologieklassen*.

Eine *Kokettenabbildung*  $f^\bullet: (C^\bullet, d^\bullet) \rightarrow (C'^\bullet, d'^\bullet)$  vom Grad  $a$  ist eine Sequenzabbildung vom Grad  $a$ . Die induzierten Abbildungen zwischen den Kohomologien bezeichnet man mit

$$H^n f^\bullet = f^*: H^n(C^\bullet, d^\bullet) \longrightarrow H^{n+a}(C'^\bullet, d'^\bullet).$$

Eine Kokettenabbildung  $f^\bullet$  heißt *Quasiisomorphismus*, wenn die induzierte Abbildung  $H^n f^\bullet = f^*$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$  ein Isomorphismus ist.

Es seien  $f, g: (C^\bullet, d^\bullet) \rightarrow (C'^\bullet, d'^\bullet)$  Kokettenabbildungen vom Grad  $a$ . Eine *Kokettenhomotopie* zwischen  $f$  und  $g$  ist eine  $R$ -lineare Abbildung  $h^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$  vom Grad  $a - 1$ , so dass

$$g^k - f^k = h^{k+1} \circ d^k + d^{k+a-1} \circ h^k: C^k \longrightarrow D^{k+a}$$

für alle  $k$ . Zwei Kokettenabbildungen heißen *kokettenhomotop*, wenn eine Kokettenhomotopie zwischen ihnen existiert.

Wie in Abschnitt 3.3 überlegt man sich, dass  $H^k(C^\bullet, d^\bullet)$  und  $H^k f^\bullet = f^*: H^k(C^\bullet, d^\bullet) \rightarrow H^{k+a}(C^\bullet, d^\bullet)$  tatsächlich wohldefiniert sind. Außerdem gilt analog zu Proposition 3.46, dass homotope Kokettenabbildungen die gleichen Abbildungen auf der Kohomologie induzieren.

Wir können jetzt duale Kokettenkomplexe definieren. Im Gegensatz zu Beispiel 4.2 bilden wir dabei nicht unbedingt in den Ring  $R$ , sondern in einen beliebigen Koeffizientenmodul  $M \in \text{Mod}_R$  ab.

4.7. DEFINITION. Es sei  $(C_\bullet, d_\bullet)$  ein Kettenkomplex über  $R$  und  $M \in \text{Mod}_R$ . Dann definieren wir den zu  $(C_\bullet, d_\bullet)$  dualen Kokettenkomplex mit Koeffizienten  $M$  durch

$$(\text{Hom}_R(C_\bullet, M), d^\bullet) \quad \text{mit} \quad d^k = d_{k+1}^*: \text{Hom}_R(C_k, M) \longrightarrow \text{Hom}_R(C_{k+1}, M).$$

Sei  $f_\bullet: (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet, d'_\bullet)$  eine Kettenabbildung vom Grad  $a$ , dann definieren wir die *duale Kokettenabbildung* vom Grad  $-a$

$$f^\bullet: (\text{Hom}_R(C'_\bullet, M), d'^\bullet) \longrightarrow (\text{Hom}_R(C_\bullet, M), d^\bullet)$$

durch

$$f^k = f_{k-a}^*: \text{Hom}_R(C'_k, M) \longrightarrow \text{Hom}_R(C_{k-a}, M).$$

Sei schließlich  $h_\bullet: (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet, d'_\bullet)$  eine Kettenhomotopie zwischen Kettenabbildungen  $f_\bullet$  und  $g_\bullet$  vom Grad  $a$ , dann ist  $h^\bullet$  mit

$$h^k = h_{k-a-1}^*: \text{Hom}_R(C'_k, M) \longrightarrow \text{Hom}_R(C_{k-a-1}, M)$$

die *duale Kokettenhomotopie* zwischen  $f^\bullet$  und  $g^\bullet$ .

4.8. BEMERKUNG. Es sei

$$\langle E \rangle_R = \bigoplus_{e \in E} R \cdot e = \left\{ \sum_{e \in E} r_e \cdot e \mid r_e \in R, \text{ fast alle } r_e = 0 \right\}$$

ein freier Modul mit Erzeugermenge  $E$ .

(1) Dann überlegt man sich leicht, dass

$$\text{Hom}_R(\langle E \rangle_R, M) = M^E = \prod_{e \in E} M \cdot e^* = \left\{ \sum_{e \in E} m_e \cdot e^* \mid m_e \in M \right\}$$

mit  $e^*(f) = 1$  falls  $e = f$  und 0 für alle anderen  $f \in E$ . Dann ist die Paarung oder Auswertung

$$\left( \sum_{e \in E} m_e \cdot e^* \right) \left( \sum_{e \in E} r_e e \right) = \sum_{e \in E} m_e \cdot r_e \in M$$

eine endliche Summe und daher wohldefiniert.

(2) Sei  $f: \langle E \rangle_R \rightarrow \langle B \rangle_R$  eine  $R$ -lineare Abbildung, dann wird  $f$  eindeutig beschrieben durch die „Matrizeinträge“  $a_{be} \in R$  mit

$$f(e) = \sum_{b \in B} a_{be} \cdot b,$$

wobei für festes  $e$  fast alle  $a_{be}$  verschwinden. Die duale Abbildung  $f^*: M^B \rightarrow M^E$  erfüllt

$$(f^*(m \cdot b^*))(e) = m \cdot (b^* \circ f)(e) = a_{be} \cdot m = (a_{be} m \cdot e^*)(e),$$

so dass also

$$f^* \left( \sum_{b \in B} m_b \cdot b^* \right) = \sum_{e \in E} \left( \sum_{b \in B} a_{be} m_b \right) \cdot e^*.$$

Man sieht zum einen, dass man für festes  $e$  eine endliche Summe über  $b$  erhält, da fast alle  $a_{be}$  verschwinden, und somit einen wohldefinierten Koeffizienten von  $e^*$ . Zum anderen

können für festes  $b$  beliebig viele  $a_{be}$  ungleich 0 sein, so dass die rechte Summe über  $e$  unendlich werden kann, selbst wenn nur endlich viele der  $m_b$  nicht verschwinden.

(3) Mit ähnlichen Überlegungen sieht man auch, dass

$$\mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, N\right) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N)$$

für beliebige  $R$ -Moduln  $M_i$  und  $N$ .

Nach diesen Überlegungen können wir die (unreduzierte) singuläre Kohomologie mit Koeffizienten  $M \in \mathrm{Mod}_R$  einführen. Wir erinnern uns an die Definition 3.37 des singulären Kettenkomplexes.

4.9. DEFINITION. Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $M \in \mathrm{Mod}_R$ , dann definieren wir den *singulären Kokettenkomplex*  $(C^\bullet(X; M), \delta^\bullet)$  als den zu  $(C_\bullet(X; R), \partial_\bullet)$  dualen Kokettenkomplex mit Koeffizienten  $M$ . Für eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  definieren wir  $f^\#: (C^\bullet(Y; M), \delta^\bullet) \rightarrow (C^\bullet(X; M), \delta^\bullet)$  als die zu  $f_\#$  duale Kokettenabbildung.

Die Kohomologie  $H^\bullet(X; M)$  von  $(C^\bullet(X; M), \delta^\bullet)$  heißt *singuläre Kohomologie* von  $X$  mit Koeffizienten  $M$ , und die von  $f: X \rightarrow Y$  induzierte Abbildung bezeichnen wir mit

$$f^* = H^\bullet f^\#: H^\bullet(Y; M) \longrightarrow H^\bullet(X; M).$$

4.10. BEMERKUNG. Wir geben eine etwas konkretere Beschreibung.

(1) Für alle  $k$  gilt

$$C^k(X; M) = \mathrm{Hom}_R(C_k(X; R), M) = \mathrm{Hom}_R(\langle S_k(X) \rangle_R, M) = M^{S_k(X)}.$$

(2) Der simpliziale Korand-Operator ist gegeben durch

$$\delta^k \left( \sum_{\sigma \in S_k(X)} m_\sigma \cdot \sigma^* \right) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \sum_{\sigma \in S_k(X)} m_\sigma \cdot \delta_i^* \sigma^* \in M^{S_{k+1}(X)},$$

dabei ist  $\delta_i^* \sigma^*$  die Summe über alle  $\tau^*$ , so dass  $\sigma$  die  $i$ -te Seite von  $\tau \in S_{k+1}(X)$  ist, siehe Definition 3.35. Im allgemeinen ist  $\delta_i^* \sigma^*$  also eine unendliche Summe.

(3) Sei  $f: X \rightarrow Y$  stetig, dann ist

$$f^\# \left( \sum_{\sigma \in S_k(Y)} m_\sigma \cdot \sigma^* \right) = \sum_{\sigma \in S_k(Y)} m_\sigma \cdot f^* \sigma^*,$$

wobei  $f^* \sigma^*$  eine Summe über alle  $\tau^*$ , so dass  $\tau \in S_k(X)$  auf  $\sigma$  abgebildet wird.

(4) Wir betrachten jetzt ein Paar  $(X, A)$  und setzen

$$\begin{aligned} C^k(X, A; M) &= \mathrm{Hom}_R(C_k(X; R)/C_k(A; R), M) \\ &= \{ f \in \mathrm{Hom}_R(C_k(X; R), M) \mid f|_{C_k(A; R)} = 0 \} = M^{S_k(X) \setminus S_k(A)}. \end{aligned}$$

Wir wollen überprüfen, dass singuläre Kohomologie eine unreduzierte Kohomologietheorie ist. In Analogie zu Definition 4.4 drehen wir in der Definition 3.59 einer reduzierten Homologietheorie alle Pfeile um und erhalten folgendes Axiomensystem.

4.11. DEFINITION. Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins. Eine *verallgemeinerte (unreduzierte) Kohomologietheorie*  $(h^\bullet, \delta^\bullet)$  über  $R$  besteht aus einer Familie von Funktoren

$$h^\bullet = (h^n: \mathrm{Pair} \rightarrow \mathrm{Mod}_R)_{n \in \mathbb{Z}},$$

und einer Familie natürlicher Transformationen  $\delta^\bullet = (\delta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  mit  $\delta^n(X, A): h^n(A) \rightarrow h^{n+1}(X, A)$  für alle Paare  $(X, A)$ , die die folgenden *Eilenberg-Steenrod-Axiome* erfüllen.

(1) *Homotopieinvarianz.* Wenn  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  homotope Abbildungen sind, gilt

$$h^n f = h^n g: h^n(Y, B) \rightarrow h^n(X, A) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

(2) *Kohomologiesequenz.* Für jedes Paar  $(X, A)$  ist die folgende Sequenz exakt:

$$\dots \xrightarrow{\delta^{n-1}} h^n(X, A) \xrightarrow{h^n p} h^n(X) \xrightarrow{h^n \iota} h^n(A) \xrightarrow{\delta^n} h^{n+1}(X, A) \xrightarrow{h^{n+1} p} \dots$$

(3) *Ausschneidung.* Für jedes Paar  $(X, A)$  und jede Teilmenge  $B \subset X$  mit  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$  induziert für alle  $n \in \mathbb{Z}$  die Inklusionsabbildung  $\iota: (B, A \cap B) \rightarrow (X, A)$  einen Isomorphismus

$$h^n \iota: h^n(X, A) \xrightarrow{\sim} h^n(B, A \cap B).$$

(4) *Summenaxiom.* Sei  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie von Räumen, dann induzieren für alle  $n \in \mathbb{Z}$  die Inklusionsabbildungen  $\iota_i: X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i$  einen Isomorphismus

$$\prod_{i \in I} h^n \iota_i: h^n\left(\coprod_{i \in I} X_i\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} h^n(X_i).$$

Man nennt  $(h^\bullet, \delta^\bullet)$  eine (*unreduzierte*) *Kohomologietheorie* mit *Koeffizienten*  $M \in \text{Mod}_R$ , wenn zusätzlich das folgende Axiom gilt.

(5) *Dimensionsaxiom.*

$$h^n(\{*\}) = \begin{cases} M & \text{für } n = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

4.12. SATZ. *Die singuläre Kohomologie mit Koeffizienten  $M \in \text{Mod}_R$  ist eine unreduzierte Kohomologietheorie über  $R$  mit Koeffizienten  $M$ .*

BEWEIS. Zu zeigen sind die Eilenberg-Steenrod-Axiome aus der obigen Definition.

Nach Übung 2 von Blatt 6 ist das Dualisieren von Kettenkomplexen ein Funktor. Nach Proposition 3.38 ist  $C_\bullet(\cdot, \cdot; R)$  ein Funktor, also auch  $C^\bullet(\cdot, \cdot; M)$ . Das Bilden der Kohomologie ist ebenfalls ein Funktor, also ist insgesamt  $H^\bullet(\cdot, \cdot; M)$  ein kontravarianter Funktor auf der Kategorie der Paare.

Nach Satz 3.49 liefern homotope Abbildungen  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  kettenhomotope Abbildungen  $f_\#, g_\#: C_\bullet(X, A; R) \rightarrow C_\bullet(Y, B; R)$ . Ebenfalls nach Übung... sind dann  $f^\#, g^\#: C^\bullet(Y, B; M) \rightarrow C^\bullet(X, A; M)$  kokettenhomotop und induzieren daher wie in Proposition 3.46 die gleiche Abbildung  $f^* = g^*: H^\bullet(Y, B; M) \rightarrow H^\bullet(X, A; M)$ . Es folgt Homotopieinvarianz (1).

Es sei jetzt  $(X, A)$  ein Paar von Räumen. Nach Bemerkung 4.10 erhalten wir eine kurze exakte Sequenz von Kokettenkomplexen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^\bullet(X, A; M) & \xrightarrow{p^\#} & C^\bullet(X; M) & \xrightarrow{\iota^\#} & C^\bullet(A; M) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & M^{S_\bullet(X) \setminus S_\bullet(A)} & \longrightarrow & M^{S_\bullet(X)} & \longrightarrow & M^{S_\bullet(A)} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Das Schlangenlemma 3.44 liefert die gesuchte lange exakte Sequenz (2). Da die obige kurze exakte Sequenz natürlich ist im Paar  $(X, A)$ , ist auch die lange exakte Kohomologiesequenz natürlich, insbesondere auch die Verbindungshomomorphismen  $\delta^k: H^k(A; M) \rightarrow H^{k+1}(X, A; M)$ .

Wir erinnern uns jetzt an die baryzentrische Unterteilung, die wir in Abschnitt 3.5 in sechs Schritten (1) — (6) konstruiert hatten. Insbesondere hatten wir eine Kettenabbildung  $S_\bullet$  und eine Kettenhomotopie  $T_\bullet$  zwischen  $\text{id}$  und  $S_\bullet: C_\bullet(X; R) \rightarrow C_\bullet(X; R)$  angegeben. Anschließend hatten wir gesehen, dass für jede offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $M$  und jedes singuläre Simplex  $\sigma: \Delta^k \rightarrow X$  eine Zahl  $n$  existiert, so dass jedes Simplex der Kette  $S_k^n \sigma \in C_k(X; R)$  ganz in einer der offenen Mengen von  $\mathcal{U}$  enthalten ist.

Um den folgenden Beweis zu vereinfachen, geben wir jetzt eine Kettenabbildung  $\rho: C_\bullet(X; R) \rightarrow C_\bullet(X; R)$ , so dass für alle singulären Simplizes  $\sigma$  jedes Simplex der Kette  $\rho(\sigma)$  ganz in einer offenen Menge von  $\mathcal{U}$  enthalten ist. Dazu müssen wir verschiedene Simplizes unterschiedlich oft unterteilen. Sei  $m(\sigma)$  so gewählt, dass die Kette  $S_k^{m(\sigma)}\sigma$  nur Simplizes enthält, die jeweils ganz in einer offenen Menge von  $\mathcal{U}$  liegen.

Definiere jetzt  $D_\bullet: C_k(X; R) \rightarrow C_{k+1}(X; R)$  durch

$$D_k\sigma = \sum_{0 \leq i < m(\sigma)} (T_k \circ S_k^i)(\sigma),$$

dann gilt zunächst

$$\begin{aligned} \partial_{k+1}D_k\sigma &= \sum_{0 \leq i < m(\sigma)} \left( (S_k - \text{id} - T_{k-1} \circ \partial_k) \circ S_k^i \right)(\sigma) \\ &= S_k^{m(\sigma)}(\sigma) - \sigma - \sum_{0 \leq i < m(\sigma)} (T_{k-1} \circ S_{k-1}^i)(\partial_k\sigma). \end{aligned}$$

Da  $S_k^i$  eine Kettenabbildung ist, liegen auch alle Seiten von Simplizes von  $S_k^{m(\sigma)}(\sigma)$  ganz in offenen Mengen von  $\mathcal{U}$ . Für Randsimplizes  $\delta_j\sigma$  von  $\sigma$  folgt daher  $m(\delta_j\sigma) \leq m(\sigma)$ . Mit Hilfe der obigen Gleichung erhalten wir also

$$(\partial_{k+1}D_k + D_{k-1}\partial_k)(\sigma) = \underbrace{S_k^{m(\sigma)}(\sigma) - \sum_{j=0}^k (-1)^j \sum_{m(\delta_j\sigma) \leq i < m(\sigma)} (T_{k-1} \circ S_{k-1}^i)(\delta_j\sigma) - \sigma}_{=\rho_k(\sigma)}.$$

Da die Kettenhomotopie  $T_{k-1}$  Simplizes nicht vergrößert, schließen wir, dass auch alle Simplizes der Kette  $\rho_k(\sigma)$  jeweils ganz in offenen Mengen von  $\mathcal{U}$  enthalten sind. Außerdem ist  $\rho_\bullet$  via  $D_\bullet$  zur Identität kettenhomotop.

Um das Ausschneidungsaxiom (3) zu beweisen, betrachten wir die Überdeckung  $\mathcal{U} = \{\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B}\}$  von  $X$  und konstruieren  $\rho_\bullet$  und  $D_\bullet$  wie oben. Wir haben eine natürliche Einschränkungabbildung

$$\iota^\# : C^k(X, A; M) \longrightarrow C^k(B, A \cap B; M).$$

In umgekehrter Richtung erhalten wir die Abbildung

$$C^\bullet(B, A \cap B; M) \longrightarrow C^\bullet(\overset{\circ}{B}, A \cap \overset{\circ}{B}; M) \xrightarrow{\rho^\#} C^\bullet(X, A; M).$$

Man überzeugt sich, dass beide Abbildungen zueinander kokettenhomotopieinvers sind und erhält den gesuchten Isomorphismus

$$\iota^* : H^\bullet(X, A; M) \longrightarrow H^\bullet(B, A \cap B; M).$$

Sei jetzt  $(X, A) = \coprod_{i \in I} (X_i, A_i)$  eine disjunkte Vereinigung von Paaren. Aus Bemerkung 4.8 (3) und Satz 3.40 folgt wie im Beweis von Satz 3.57, dass

$$\begin{aligned} C^\bullet(X, A; M) &= \text{Hom}_R \left( \bigoplus_{i \in I} C_\bullet(X_i, A_i; R), M \right) \\ &= \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(C_\bullet(X_i, A_i; R), M) = \prod_{i \in I} C^\bullet(X_i, A_i; M), \end{aligned}$$

und wir erhalten das Summenaxiom (4) aus

$$H^\bullet(X, A; M) = \prod_{i \in I} H^\bullet(X_i, A_i; M).$$

Zum Dimensionsaxiom (5) dualisieren wir den Komplex  $C_\bullet(*; R)$  aus Beispiel 3.39 und erhalten

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{\text{id}} M \xrightarrow{0} M \longrightarrow \dots$$

Dieser Komplex hat die Kohomologie

$$H^k(*; M) = \begin{cases} M & \text{für } k = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \square$$

4.13. BEMERKUNG. Wir können auch den Beweis von Satz 3.40 dualisieren. Sei dazu  $(X_i)_{i \in I}$  die Familie der Wegzusammenhangskomponenten eines topologischen Raumes  $X$ .

(1) Dann induzieren die Inklusionen  $\iota_i: X_i \rightarrow X$  natürliche Isomorphismen

$$H^\bullet(X; M) \cong \prod_{i \in I} H^\bullet(X_i; M).$$

(2) Insbesondere gilt

$$H^0(X; M) \cong \prod_{i \in I} M = M^I.$$

4.14. BEMERKUNG. Der Vollständigkeit halber konstruieren wir noch die reduzierte singuläre Kohomologie.

(1) Es sei  $X \neq \emptyset$  und  $p_X: X \rightarrow \{*\}$  die konstante Abbildung. Dual zu Definition 3.54 setzen wir  $\tilde{H}^k(X; M) = \text{coker}(p_X^{*k})$ . Für  $k \geq 1$  folgt  $\tilde{H}^k(X; M) = H^k(X; M)$ , da  $H^k(*; M) = 0$ . Für  $k = 0$  erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{p_X^*} H^0(X; M) \longrightarrow \tilde{H}^0(X; M) \longrightarrow 0.$$

(2) Es sei  $x_0 \in X$ , und  $\iota: \{*\} \rightarrow X$  bilde  $*$  auf  $x_0$  ab. Da  $p \circ \iota = \text{id}_*$ , spaltet  $\iota^*: H^0(X; M) \rightarrow M$  die obige Sequenz, und wir erhalten

$$0 \longleftarrow M \xleftarrow{\iota^*} H^0(X; M) \longleftarrow \tilde{H}^0(X; M) \longleftarrow 0,$$

und daher  $\tilde{H}^\bullet(X; M) \cong H^\bullet(X, x_0; M)$ . Dieser Isomorphismus hängt von der Wegzusammenhangskomponente von  $x_0$  in  $X$  ab.

(3) Umgekehrt sei  $X_+ = X \sqcup \{*\}$  wie in Bemerkung 3.55 (3). Mit Ausschneidung folgt

$$H^\bullet(X; M) \cong H^\bullet(X_+, \{*\}; M) \cong \tilde{H}^\bullet(X_+; M).$$

Jetzt können wir die unreduzierte Kohomologie aus der reduzierten rekonstruieren, und umgekehrt.

(4) Auf dem Niveau von Koketten bildet  $p_X^*$  die konstante Abbildung  $* \mapsto m \in M$  auf die konstante Abbildung  $X \rightarrow \{m\} \subset M$  ab. Somit ist  $\tilde{H}^\bullet(X; M)$  die Kohomologie des augmentierten Kokettenkomplexes

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} C^0(X; M) \xrightarrow{\delta^0} C^1(X; M) \longrightarrow \dots,$$

wobei  $\varepsilon(m)(p) = m$  für alle  $m \in M$  und  $p \in S_0(X) = X$ .

## 4.2. Universelle Koeffizienten-Theoreme

In diesem Abschnitt zeigen wir, wie sich die singuläre Kohomologie  $H^\bullet(X; M)$  aus der singulären Homologie  $H_\bullet(X; R)$  rekonstruieren lässt. Dazu gehen wir analog zu Abschnitt 3.8 vor. Anschließend geben wir ohne Beweis zwei weitere universelle Koeffizienten-Theoreme an.

Als erstes definieren wir das Erweiterungsprodukt  $\text{Ext}$ . Dazu erinnern wir uns an den Begriff der freien Auflösung aus Definition 3.75 und an das Lemma 3.78, wonach freie Auflösungen modulo Kettenhomotopie eindeutig und natürlich sind. Erweiterungsprodukte „ergänzen“ den Hom-Funktor in der gleichen Weise, wie Torsionsprodukte das Tensorprodukt ergänzen.

4.15. DEFINITION. Seien  $M, N \in \text{Mod}_R$  und

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow M_0 \xleftarrow{\partial_1} M_1 \longleftarrow \dots$$

eine freie Auflösung. Die *Erweiterungsprodukte* von  $M$  und  $N$  sind definiert als die Kohomologiemoduln des dualen Kokettenkomplexes,

$$\text{Ext}_R^k = H^k(\text{Hom}_R(M_\bullet, N), \partial_{\bullet+1}^*) \in \text{Mod}_R.$$

Man beachte, dass  $M$  selbst im dualen Kokettenkomplex nicht mehr auftaucht:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M_0, N) \xrightarrow{\partial_1^*} \text{Hom}_R(M_1, N) \longrightarrow \dots$$

4.16. BEMERKUNG. Wir zeigen zunächst, dass die Erweiterungsprodukte wohldefiniert sind und überlegen uns erste Eigenschaften, siehe Bemerkung 3.80

- (1) Es sei  $f: M \rightarrow M'$  ein Morphismus, dann liefert Lemma 3.78 Morphismen  $f_k: M_k \rightarrow M'_k$  für freie Auflösungen  $(M_\bullet, \partial_\bullet)$  von  $M$  und  $(M'_\bullet, \partial'_\bullet)$  von  $M'$ , und  $f_\bullet$  ist bis auf Kettenhomotopie eindeutig durch  $f$  bestimmt. Dualisieren liefert eine Kokettenabbildung

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(M_0, N) & \xrightarrow{\partial_1^*} & \text{Hom}_R(M_1, N) & \longrightarrow & \dots \\ & & \uparrow f_0^* & & \uparrow f_1^* & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(M'_0, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(M'_1, N) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

und  $f_\bullet^*$  ist wieder eindeutig bis auf Kokettenhomotopie. Also erhalten wir eindeutige Abbildungen

$$\text{Ext}_R^k(f, N): \text{Ext}_R^k(M', N) \longrightarrow \text{Ext}_R^k(M, N),$$

wobei aber  $\text{Ext}_R^k(M', N), \text{Ext}_R^k(M, N)$  noch von den freien Auflösungen abhängen könnten.

- (2) Seien jetzt  $(M_\bullet, \partial_\bullet)$  und  $(M'_\bullet, \partial'_\bullet)$  zwei freie Auflösungen von  $M \in \text{Mod}_R$ . Indem wir (1) auf  $f = \text{id}_M: M \rightarrow M$  in beiden Richtungen anwenden, sehen wir, dass  $\text{Ext}_R^k(M, N)$  bis auf eindeutige Isomorphismen nicht von der Wahl der freien Auflösung von  $M$  abhängt.

Also liefert jeder Modul  $N \in \text{Mod}_R$  eine Familie von kontravarianten Funktoren

$$\text{Ext}_R^k(\cdot, N): \text{Mod}_R \longrightarrow \text{Mod}_R.$$

- (3) Nach Übung 1 von Blatt 6 gilt

$$\ker(\partial_1^*) = \{ \alpha: M_0 \rightarrow N \mid \alpha|_{\text{im } \partial_1} = 0 \} \cong \text{Hom}_R(M, N),$$

also gilt  $\text{Ext}_R^0(M, N) \cong \text{Hom}_R(M, N)$ , und dieser Isomorphismus ist natürlich, siehe Bemerkung 3.80 (3).

- (4) Für festes  $M \in \mathcal{M}od_R$  ist  $\text{Ext}_R^k(M, \cdot)$  ein kovarianter Funktor. Denn sei  $g: N \rightarrow N'$  linear, dann erhalten wir eine Kokettenabbildung

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(M_0, N) & \xrightarrow{\partial_1^*} & \text{Hom}(M_1, N) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow g_* & & \downarrow g_* & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(M_0, N') & \xrightarrow{\partial_1^*} & \text{Hom}(M_1, N') & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

mit  $g_*\alpha = g \circ \alpha \in \text{Hom}(M_k, N')$  für  $\alpha \in \text{Hom}(M_k, N)$ . Also induziert  $g$  eine Familie von Abbildungen  $\text{Ext}_R^k(M, g): \text{Ext}_R^k(M, N) \rightarrow \text{Ext}_R^k(M, N')$ .

- (5) Der Funktor aus (4) erhält direkte Summen: sei  $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$ , dann folgt  $\text{Hom}(M_k, N) = \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(M_k, N_i)$ , und es gilt

$$\text{Ext}_R^k\left(M, \bigoplus_{i \in I} N_i\right) = \bigoplus_{i \in I} \text{Ext}_R^k(M, N_i).$$

- (6) Aus Bemerkung 4.8 (3) folgt

$$\text{Hom}\left(\bigoplus_{i \in I} M_k^{(i)}, N\right) = \prod_{i \in I} \text{Hom}(M_k^{(i)}, N) \text{ für } M = \bigoplus_{i \in I} M_i$$

und Auflösungen  $(M_\bullet^{(i)}, \partial_\bullet^{(i)})$  von  $M_i$ . Also erhalten wir

$$\text{Ext}_R^k\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, N\right) = \prod_{i \in I} \text{Ext}_R^k(M_i, N).$$

Also macht der Funktor  $\text{Ext}_R^k(\cdot, N)$  aus direkten Summen direkte Produkte.

- (7) Zu den Erweiterungsprodukten gibt es zwei typische lange exakte Sequenzen. Sei zunächst

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{i} N \xrightarrow{q} N'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz. Da alle  $M_k \cong \langle E_k \rangle_R$  frei sind, erhalten wir kurze exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow \underbrace{\text{Hom}_R(M_k, N')}_{\cong N'^E} \longrightarrow \underbrace{\text{Hom}_R(M_k, N)}_{\cong N^E} \longrightarrow \underbrace{\text{Hom}_R(M_k, N'')}_{\cong N''^E} \longrightarrow 0$$

von Kokettenkomplexen, und das Schlangenlemma 3.44 liefert die lange exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M, N') \longrightarrow \text{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_R(M, N'') \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_R^1(M, N') \longrightarrow \dots,$$

zum Vergleich siehe Übung 4 von Blatt 6.

- (8) Sei jetzt

$$0 \longleftarrow M'' \xleftarrow{q} M \xleftarrow{i} M' \longleftarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz, dann liefert Übung 3 von Blatt 7 eine kurze exakte Sequenz von freien Auflösungen. Nach Übung 1 von Blatt 6 erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{q^*} \text{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{i^*} \text{Hom}_R(M', N) \longrightarrow 0$$

Das Schlangenlemma liefert jetzt

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M'', N) \longrightarrow \text{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_R(M', N) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_R^1(M'', N) \longrightarrow \dots$$

Man nennt  $\text{Ext}_R^\bullet$  wegen (7) und (8) auch die *rechtsderivierten Funktoren* zum *linksexakten Funktor*  $\text{Hom}_R$ , kurz  $\text{Ext}_R^\bullet = R\text{Hom}_R^\bullet$ .

4.17. BEISPIEL. Wir haben einige wichtige Eigenschaften der Funktoren  $\text{Ext}_R^\bullet$  für beliebige Ringe gesammelt. Jetzt wollen wir uns auf Hauptidealringe spezialisieren und einige  $\text{Hom}_R$ - und  $\text{Ext}_R$ -Moduln explizit ausrechnen.

- (1) Es sei  $M = R$ , dann wählen wir als freie Auflösung  $M_0 = R$ ,  $M_k = 0$  für  $k \geq 1$ . Ein Morphismus  $\alpha: R \rightarrow N$  ist bestimmt durch  $\alpha(1) \in N$ , und jedes Element von  $N$  kann auftreten. Also erhalten wir

$$\text{Hom}_R(R, N) = N \quad \text{und} \quad \text{Ext}_R^k(R, N) = 0 \quad \text{für } k \geq 1.$$

- (2) Wegen Bemerkung 4.8 (1) und (4) oben erhalten wir für freie Moduln  $M = \langle E \rangle_R$ , dass

$$\text{Hom}_R(\langle E \rangle_R, N) = \prod_{e \in E} e \cdot N = N^E$$

sowie  $\text{Ext}_R^k(\langle E \rangle_R, N) = 0$  für  $k \geq 1$ . Falls  $R = \mathbb{k}$  ein Körper ist, sind alle Moduln frei, und es gilt  $\text{Ext}_{\mathbb{k}}^k = 0$  für alle  $k \geq 1$ .

- (3) Nach Bemerkung 3.77 (2) hat jeder Modul  $M$  über einem Hauptidealring  $R$  eine Auflösung der Form  $M_0 \leftarrow M_1$ , so dass  $\text{Ext}_R^k = 0$  für alle  $k \geq 2$ . Daher schreiben wir in Zukunft einfach  $\text{Ext}_R$  für  $\text{Ext}_R^1$ , wenn  $R$  ein Hauptidealring ist.
- (4) Nach Bemerkung 3.70 (2) ist jeder endlich erzeugte  $R$ -Modul  $M$  eine direkte Summe aus einem freien Modul  $R^{\text{fg } M}$  und endlich vielen Torsionsmoduln der Form  $R/a_i R$  mit  $a_i \in R/\{0\}$ . Für einen solchen Modul gilt nach Übung 1 von Blatt 7, dass

$$\text{Hom}_R(R/aR, N) \cong \text{Tor}_R(R/aR, N) \quad \text{und} \quad \text{Ext}_R(R/aR, N) \cong (R/aR) \otimes_R N.$$

- (5) Für  $N = R$  erhält man in (4) insbesondere

$$\text{Hom}_R(R/aR, R) = 0 \quad \text{und} \quad \text{Ext}_R(R/aR, R) \cong R/aR.$$

Der Name  $\text{Ext}_R$  kommt daher, dass der Funktor  $\text{Ext}_R$  über Hauptidealringen gerade die Erweiterungen (Extensionen) zweier Moduln beschreibt.

4.18. DEFINITION. Es seien  $M, N \in \text{Mod}_R$ , dann ist eine  $N$ -Erweiterung von  $M$  eine kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Zwei Erweiterungen heißen *isomorph*, wenn es ein kommutatives Diagramm der folgenden Form gibt:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & E_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Aufgrund des Fünferlemmas 3.56 ist die Abbildung  $E_0 \rightarrow E_1$  im obigen Diagramm ein Isomorphismus. In den Übungen sehen wir, dass  $\text{Ext}_R(M, N)$  genau die Isomorphieklassen von  $N$ -Erweiterungen von  $M$  beschreibt.

4.19. BEISPIEL. Es gibt zwei  $\mathbb{Z}$ -Erweiterungen von  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , nämlich

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Nach diesen Vorarbeiten können wir jetzt ein universelles Koeffiziententheorem für die singuläre Kohomologie beweisen. Strenggenommen beweisen wir einen Satz über die Kohomologie von dualen Kokettenkomplexen zu freien Kettenkomplexen. Daher gilt der folgende Satz beispielsweise auch für die zelluläre Kohomologie. Analog dazu spricht der universelle Koeffizientensatz 3.82 über das Tensorprodukt eines freien Kettenkomplexes mit einem  $R$ -Modul, und gilt daher analog für die zelluläre Homologie.

4.20. SATZ (Universelle Koeffizienten für Kohomologie). *Es sei  $R$  ein Hauptidealring und  $M \in \text{Mod}_R$ . Für alle  $k \in \mathbb{Z}$  ist die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_R(H_{k-1}(X; R), M) \longrightarrow H^k(X; M) \longrightarrow \text{Hom}_R(H_k(X; R), M) \longrightarrow 0$$

*exakt, natürlich in  $X$ . Die Sequenz spaltet, aber nicht auf natürliche Weise.*

Anstelle von  $X$  dürfen wir auch ein Raumpaar  $(X, A)$  einsetzen. Der augmentierte Kokettenkomplex aus Bemerkung 4.14 (4) ist der duale Kokettenkomplex zum augmentierten Kettenkomplex aus Bemerkung 3.55 (4). Also gilt der obige Satz auch für die reduzierte singuläre Kohomologie.

BEWEIS. Wir erinnern uns an die kurze exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow B_{k-1}(X) \xleftarrow{\partial_k} C_k(X) \xleftarrow{i_k} Z_k(X) \longrightarrow 0, \quad (1)$$

wobei wir die Koeffizienten  $R$  der Kürze halber weglassen. Wie im Beweis des Satzes 3.82 sind alle diese Moduln frei, und die Sequenz spaltet. Nach Übung 1 von Blatt 6 ist dann auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(B_{k-1}(X); M) \xrightarrow{\partial_k^*} C^k(X; M) \xrightarrow{i_k^*} \text{Hom}_R(Z_k(X); M) \longleftarrow 0 \quad (2)$$

exakt und spaltet. Wir fassen diese Sequenz als kurze exakte Sequenz von Kokettenkomplexen auf, wobei das Differential  $\partial_\bullet^*$  auf den beiden äußeren Komplexen verschwindet. Jetzt liefert das Schlangenlemma 3.44 eine lange exakte Sequenz

$$\dots \longrightarrow \text{Hom}_R(B_{k-1}(X); M) \longrightarrow H^k(X; M) \longrightarrow \text{Hom}_R(Z_k(X); M) \longrightarrow \dots \quad (3)$$

Anhand des Diagrammes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(B_{k-1}(X); M) & \xrightarrow{\partial_k^*} & C^k(X; M) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(Z_k(X); M) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow \partial_{k+1}^* & & \downarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(B_k(X); M) & \xrightarrow{\partial_{k+1}^*} & C^{k+1}(X; M) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(Z_{k+1}(X); M) \longrightarrow 0 \end{array}$$

überprüfen wir, dass der Verbindungshomomorphismus in der Sequenz (3) gerade durch die Inklusion  $j_\bullet: B_\bullet(X) \hookrightarrow Z_\bullet(X)$  induziert, also durch  $j_\bullet^*: \text{Hom}_R(Z_\bullet(X); M) \rightarrow \text{Hom}_R(B_\bullet(X); M)$  gegeben wird. Wie im Beweis von Satz 3.82 erhalten wir daher die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{coker}(j_{k-1}^*) \longrightarrow H^k(X; M) \longrightarrow \ker(j_k^*) \longrightarrow 0.$$

Wir betrachten jetzt die freie Auflösung

$$0 \longleftarrow H_k(X) \longleftarrow Z_k(X) \xleftarrow{j_k} B_k(X) \longleftarrow 0$$

und folgern aus Definition 4.15 und Bemerkung 4.16 (3), dass

$$\ker(j_k^*) = \text{Hom}_R(H_k(X); M) \quad \text{und} \quad \text{coker}(j_k^*) = \text{Ext}_R(H_k(X); M).$$

Damit haben wir die Exaktheit der Sequenz im Satz bewiesen. Da alle oben betrachteten Abbildungen in  $X$  natürlich sind, folgt auch die Natürlichkeit der Sequenz.

Um die Sequenz im Satz zu spalten, spalten wir (1) durch  $p_k: C_k(X) \rightarrow Z_k(X)$  mit  $p_k \circ \iota_k = \text{id}_{Z_k(X)}$ . Die duale Abbildung  $p_k^*: \text{Hom}_R(Z_k(X); M) \rightarrow C^k(X; M)$  spaltet (2), denn

$$\iota_k^* \circ p_k^* = \text{id}_{\text{Hom}_R(Z_k(X); M)} .$$

Sei jetzt  $\alpha \in \ker j_k^* \subset \text{Hom}_R(Z_k(X); M)$ . Aus  $B_k(X) \subset Z_k(X)$  folgt

$$(p^* \alpha)|_{B_k(X)} = \alpha|_{B_k(X)} = j_k^* \alpha = 0 ,$$

also auch  $\partial_{k+1}^*(p^* \alpha) = 0$ . Also induziert  $p_k^*$  eine Abbildung

$$\text{Hom}_R(H_k(X); M) = \ker(j_k^*) \xrightarrow{p_k^*} \ker(\partial_{k+1}^*) \longrightarrow H^k(X; M) ,$$

die die Sequenz im Satz spaltet. □

4.21. BEISPIEL. Wir betrachten einige einfache Beispiele.

- (1) Wir haben in  $\tilde{H}_\bullet(S^n; R)$  in Satz 3.14 und  $\tilde{H}^\bullet(S^n; M)$  in Beispiel 4.5 (2) mit Hilfe der Axiome bestimmt. Mit Beispiel 4.17 (1) finden wir die kurzen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow \underbrace{\text{Ext}_R(\tilde{H}_{n-1}(S^n; R), M)}_{=0} \longrightarrow \tilde{H}^n(S^n; M) \longrightarrow \underbrace{\text{Hom}_R(\tilde{H}_n(S^n; R), M)}_{\cong R} \longrightarrow 0$$

$\cong M$

und

$$0 \longrightarrow \underbrace{\text{Ext}_R(\tilde{H}_{k-1}(S^n; R), M)}_{=0} \longrightarrow \underbrace{\tilde{H}^k(S^n; M)}_{=0} \longrightarrow \underbrace{\text{Hom}_R(\tilde{H}_k(S^n; R), M)}_{=0} \longrightarrow 0$$

für  $k \neq n$ .

- (2) Wir betrachten den komplex projektiven Raum  $\mathbb{C}P^n$ . Da  $H_k(\mathbb{C}P^n; R)$  nach Übung 3.138 für alle  $k$  frei ist, schließen wir wie oben, dass

$$H^k(\mathbb{C}P^n; M) \cong \begin{cases} M & \text{für } k = 2i \text{ mit } 0 \leq i \leq n , \text{ und} \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

- (3) Als nächstes betrachten wir den reell projektiven Raum  $\mathbb{R}P^n$ , siehe Beispiel 3.30. Nach Beispiel 4.17 (5) gilt

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0 \quad \text{und} \quad \text{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} .$$

Also erhalten wir

$$H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } k \text{ gerade ist und } 0 < k < n , \\ \mathbb{Z} & \text{falls } k = n \text{ ungerade oder } k = 0 , \text{ und} \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

- (4) Wir bleiben bei  $\mathbb{R}P^n$  und betrachten Koeffizienten  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Wir können entweder  $R = \mathbb{Z}$  betrachten und Übung 1 von Blatt 7 benutzen, wonach

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

und

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} .$$

Dann erhalten wir

$$H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } 0 \leq k \leq n , \text{ und} \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Alternativ betrachten wir  $R = \mathbb{k} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und benutzen die Rechnung aus Beispiel 3.83. Da jetzt  $H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  für alle  $k$  frei ist, erhalten wir das obige Ergebnis diesmal mit dem Argument aus (2).

Man kann den universellen Koeffizienten-Satz 4.20 aber nicht nur benutzen, um einzelne Kohomologiemoduln auszurechnen. Beispielsweise hätten wir das Ausschneidungsaxiom für die singuläre Kohomologie auch mit Hilfe von Satz 4.20 und dem Fünferlemma 3.56 überprüfen können, siehe [H]. Wir können jetzt mit Hilfe des universellen Koeffiziententheorems eine duale Version zum Satz 3.63 von Hurewicz beweisen. Es sei  $G$  eine Gruppe und  $M \in \text{Mod}_R$ , dann bezeichne  $\text{hom}(G, M)$  die Menge der Gruppenhomomorphismen von  $G$  nach  $(M, +)$ . Dabei handelt es sich wieder um einen  $R$ -Modul, mit

$$(a + b)(g) = a(g) + b(g) \quad \text{und} \quad (ra)(g) = r \cdot a(g)$$

für alle  $a, b \in \text{hom}(G, M)$ ,  $g \in G$  und  $r \in R$ .

4.22. FOLGERUNG. *Es sei  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum,  $x_0 \in X$  und  $M \in \text{Mod}_{\mathbb{Z}}$ . Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$H^1(X; M) \cong \text{hom}(\pi_1(X, x_0), M) .$$

BEWEIS. Nach Satz 3.40 ist  $H_0(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  frei, so dass

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}}(H_0(X; \mathbb{Z}), M) = 0$$

nach Beispiel 4.17 (1). Aus Satz 4.20 folgt also

$$H^1(X; M) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(X; \mathbb{Z}), M) .$$

Aus dem Satz 3.63 und der universellen Eigenschaft der Abelisierung, siehe Übung 2.85 (2), folgt, dass

$$H^1(X; M) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_1(X, x_0)^{ab}, M) \cong \text{hom}(\pi_1(X, x_0), M) ,$$

wobei wir benutzt haben, dass  $\text{Mod}_{\mathbb{Z}}$  gerade die Kategorie der abelschen Gruppen beschreibt, siehe Beispiel 3.3 (2).  $\square$

4.23. BEMERKUNG. Mit etwas mehr Aufwand zeigt man für  $M \in \text{Mod}_R$ , dass

$$H_1(X; M) \cong \pi_1(X, x_0)^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} M \in \text{Mod}_R$$

und

$$H^1(X; M) \cong \text{hom}(\pi_1(X, x_0), M) \in \text{Mod}_R .$$

Es folgen ohne Beweis zwei weitere universelle Koeffiziententheoreme. Das erste beruht darauf, dass für freie Moduln  $M$  die natürliche Abbildung

$$\mu: \text{Hom}_R(M, R) \otimes_R N \longrightarrow \text{Hom}_R(M, N)$$

mit  $\mu(f \otimes n)(m) = f(m) \cdot n \in N$  ein Isomorphismus ist, wenn mindestens  $M$  oder  $N$  endlich erzeugt ist. Wenn  $M$  und  $N$  unendlich erzeugt sind, stimmt das nicht mehr, man erhält nur Morphismen von „endlichem Rang“ in  $\text{Hom}_R(M, N)$ . Beispielsweise ist  $\text{id}_M \notin \text{im } \mu$  falls  $N = M$  unendlich erzeugt ist.

4.24. SATZ (Universelle Koeffizienten). *Es sei  $R$  ein Hauptidealring,  $M \in \text{Mod}_R$  und  $X$  ein topologischer Raum. Wenn  $H_k(X; R)$  für alle  $k$  endlich erzeugt ist oder wenn  $M$  endlich erzeugt ist, ist für alle  $k \in \mathbb{Z}$  die Sequenz*

$$0 \longrightarrow H^k(X; R) \otimes_R M \longrightarrow H^k(X; M) \longrightarrow \text{Tor}_R(H^{k+1}(X; R), M) \longrightarrow 0$$

*exakt und natürlich. Sie spaltet, aber nicht auf natürliche Weise.*

BEWEISSKIZZE. Seien etwa alle  $H_k(X; R)$  endlich erzeugt. Dann ersetzen wir  $(C_\bullet(X; R), \partial_\bullet)$  durch einen kettenhomotopieäquivalenten Komplex  $(C'_\bullet, \partial'_\bullet)$ , so dass alle  $C'_k$  frei und endlich erzeugt sind, siehe Aufgabe 4 von Blatt 8. Nach Dualisieren sind dann auch die Kokettenkomplexe  $(C^\bullet(X; M), \delta^\bullet)$  und  $(\text{Hom}_R(C'_\bullet, M), \partial'^*_\bullet)$  kokettenhomotopieäquivalent.

Nach Übung 3 von Blatt 8 gilt

$$\text{Hom}_R(C'_\bullet, R) \otimes_R M \cong \text{Hom}_R(C'_\bullet, M),$$

also können wir  $C_k(X; R)$  im Beweis von Satz 3.82 durch  $\text{Hom}_R(C'_\bullet, R)$  ersetzen, um die Exaktheit im obigen Satz zu beweisen. Für die Natürlichkeit müssen wir uns noch überlegen, dass die Konstruktion in Aufgabe 4 von Blatt 8 bis auf Homotopie funktoriell ist.  $\square$

Der zweite Satz beruht darauf, dass die natürliche Abbildung

$$\varphi: M \otimes_R N \longrightarrow \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(M, R), N)$$

mit  $\varphi(m \otimes n)(\alpha) = \alpha(m) \cdot n$  für  $m \in M$ ,  $n \in N$  und  $\alpha: M \rightarrow R$  ein Isomorphismus ist, falls  $M$  frei und endlich erzeugt ist. Falls  $M$  frei, aber unendlich erzeugt ist, liegen wieder nur Morphismen von endlichem Rang im Bild von  $\varphi$ . In Analogie zu Satz 4.20 erhält man das folgende Resultat.

4.25. SATZ (Universelle Koeffizienten). *Es sei  $R$  ein Hauptidealring,  $M \in \text{Mod}_R$  und  $X$  ein topologischer Raum, so dass  $H_k(X; R)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  endlich erzeugt ist. Dann ist für alle  $k \in \mathbb{Z}$  die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_R(H^{k+1}(X; R), M) \longrightarrow H_k(X; M) \longrightarrow \text{Hom}(H^k(X; R), M) \longrightarrow 0$$

*exakt und natürlich. Sie spaltet, aber nicht auf natürliche Weise.*

BEWEISSKIZZE. Wir ersetzen wieder  $(C_\bullet(X; R), \partial_\bullet)$  durch einen kettenhomotopieäquivalenten Komplex  $(C'_\bullet, \partial'_\bullet)$ . Nach Übung 3 von Blatt 8 gilt

$$C'_k \otimes_R M \cong \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(C'_k, R), M).$$

Also können wir im Beweis von Satz 4.20 wieder  $C_k(X; R)$  durch  $\text{Hom}_R(C'_\bullet, R)$  ersetzen, und erhalten einen Beweis für die Exaktheit im obigen Satz.  $\square$

### 4.3. Zelluläre Kohomologie

Wir wollen im nächsten Abschnitt einige Aussagen über projektive Räume beweisen. Am einfachsten geht das mit Hilfe der zellulären Kohomologie, die wir jetzt in Anlehnung an Abschnitt 3.3 kurz einführen wollen. Wir werden hier allerdings mit einer unreduzierten Kohomologietheorie  $h^\bullet$  mit Koeffizienten  $M$  arbeiten.

Es sei also  $X = \varinjlim X^n$  ein CW-Komplex mit Indexmengen  $I^n$  für die  $n$ -Zellen. Für  $i \in I^n$  sei wieder  $\Phi_i^n: D^n \rightarrow X^n$  die charakteristische Abbildung und  $\varphi_i^n = \Phi_i^n|_{\partial D^n}: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$  die Einklebeabbildung. Wir schreiben  $X^n = \emptyset$  für  $n < 0$  und bezeichnen die Abbildung  $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$  wieder mit  $\Phi_i^n$ . Aus den langen exakten Kohomologiesequenzen für die Paare  $(D^n, S^{n-1})$  und  $(S^n, D^n)$  schließen wir Ausschneidung, dass

$$h^k(D^n, S^{n-1}) \cong h^k(S^n, D^n) \cong \tilde{h}^k(S^n) = \begin{cases} M & \text{für } k = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

4.26. LEMMA. *Es gibt natürliche Isomorphismen*

$$h^n(X^n, X^{n-1}) \cong M^{I^n} \quad \text{mit} \quad \alpha \mapsto \left( (h^n \Phi_i^n)(\alpha) \right)_{i \in I^n} \quad \text{für alle } n, \quad (1)$$

$$h^k(X^n, X^{n-1}) \cong 0 \quad \text{für } k \neq n, \quad (2)$$

$$h^k(X^n) \cong 0 \quad \text{für } k > n, \quad (3)$$

$$\text{und } h^k(X^n) \cong h^k(X) \quad \text{für } n > k. \quad (4)$$

BEWEIS. Falls  $h^\bullet = H^\bullet(\cdot; M)$  die singuläre Kohomologie ist, folgen (1)—(4) aus Lemma 3.24 mit dem universellen Koeffiziententheorem 4.20. Für andere  $h^\bullet$  kopieren wir den Beweis von Lemma 3.24 mit den entsprechenden Änderungen.  $\square$

Wie in Abschnitt 3.3 betrachten wir das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & \\
 & & & \searrow & & & \\
 & & & h^n(X) & & & \\
 & & & \swarrow & & & \\
 & & & h^n(X^n) & & 0 & \\
 & & & \swarrow & & \searrow & \\
 & & & h^n p_n & & \delta^n & \\
 \dots & \longrightarrow & h^{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \xrightarrow{d_{CW}^n} & h^n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{d_{CW}^{n+1}} & h^{n+1}(X^{n+1}, X^n) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \\
 & & h^{n-1} p_{n-1} & & \delta^{n-1} & & h^{n+1} p_{n+1} & & \\
 & & h^{n-1}(X^{n-1}) & & & & h^{n+1}(X^{n+1}) & & \\
 & & \swarrow & & \searrow & & \searrow & & \\
 \dots & & & & & & 0 & & 
 \end{array}$$

Wir erhalten eine Folge natürlicher Isomorphismen

$$h^n(X) \cong \ker \delta^n \cong \ker(\delta^n \circ h^n p_n) / \ker h^n p_n \cong \ker d_{CW}^{n+1} / \text{im } \delta^{n-1} \cong \ker d_{CW}^{n+1} / \text{im } d_{CW}^n.$$

Um den zellulären Korandoperator besser zu verstehen, betrachten wir für  $i \in I^{n+1}$  und  $j \in I^n$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 h^n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{h^n p_n} & h^n(X^n) & \xrightarrow{\delta} & h^{n+1}(X^{n+1}, X^n) \\
 q_j^n \uparrow & & \uparrow h^n \varphi_i^{n+1} & & \uparrow h^{n+1} \Phi_i^{n+1} \\
 h^n(D^n, S^{n-1}) & \longrightarrow & h^n(S^n) & \xrightarrow[\cong]{\delta} & h^{n+1}(D^{n+1}, S^n).
 \end{array}$$

Hierbei ist  $q_j^n$  die zusammengesetzte Abbildung

$$h^n(D^n, S^{n-1}) \xleftarrow[\cong]{h^n \Phi_j^n} h^n\left(X^n, X^{n-1} \cup \bigcup_{k \neq j} e_k^n\right) \longrightarrow h^n(X^n, X^{n-1}).$$

Um zu zeigen, dass die linke Abbildung invertierbar ist, „verdicken“ wir den Rand von  $D^n$  beziehungsweise  $e_j^n$  und benutzen dann das Ausschneidungsaxiom.

Schließlich zeigt man für  $n \geq 1$ , dass

$$h^n \varphi_i^{n+1} \circ h^n p_n \circ q_j^n = \text{deg } f_{ji}^{n+1} : h^n(D^n, S^{n-1}) \cong M \longrightarrow h^n(S^n) \cong M,$$

dabei ist  $f_{ji}^{n+1}: S^n \rightarrow S^n$  wie in Abschnitt 3.3 definiert, vergleiche dazu Definition 3.26. Dazu benötigt man das Pendant von Folgerung 3.23 für die Kohomologietheorie  $h^\bullet$ .

Da wir unreduziert arbeiten, finden wir, dass  $d_{CW}^0$  adjungiert ist zum Randoperator

$$e_i^1 \mapsto \varphi_i^1(1) - \varphi_i^1(-1) \quad \text{für} \quad \varphi_i^1: \{1, -1\} \longrightarrow X^0.$$

Insgesamt ist  $d_{CW}^\bullet$  dann dual zum unreduzierten zellulären Randoperator aus Bemerkung 3.34 (1).

Sei schließlich  $f: X \rightarrow Y$  eine zelluläre Abbildung zwischen CW-Komplexen, dann erhalten wir eine Kokettenabbildung  $f_{CW}^\#: C_{CW}^\bullet(Y; M) \rightarrow C_{CW}^\bullet(X; M)$  und eine induzierte Abbildung

$$f_{CW}^*: H_{CW}^\bullet(Y; M) \longrightarrow H_{CW}^\bullet(X; M).$$

Der folgende Satz wird analog zu Satz 3.27 bewiesen.

4.27. SATZ. *Es sei  $M \in \text{Mod}_R$ .*

- (1) *Der zelluläre Kokettenkomplex  $(C_{CW}^\bullet(X; M), d_{CW}^\bullet)$  ist dual zum zellulären Kokettenkomplex  $(C_{\bullet}^{CW}(X; R), d_{\bullet}^{CW})$ , insbesondere ist die  $n$ -te zelluläre Kohomologie mit Koeffizienten  $M$  ein kontravarianter Funktor  $H_{CW}^n: CW \rightarrow \text{Mod}_R$ .*
- (2) *Für jede unreduzierte Kohomologietheorie  $h^\bullet$  mit Koeffizienten  $M$  existiert ein natürlicher Isomorphismus  $h^\bullet|_{CW} \rightarrow H_{CW}^\bullet(\cdot; M)$ .*

4.28. BEMERKUNG. Zu jeder reduzierten Kohomologietheorie konstruieren wir analog einen reduzierten zellulären Kokettenkomplex, der dann dual ist zum reduzierten zellulären Kettenkomplex aus Definition 3.26.

Alternativ können wir den obigen unreduzierten Kokettenkomplex wie in Bemerkung 4.14 (4) augmentieren. Dieser Komplex ist dann dual zum augmentierten Komplex aus Bemerkung 3.34 (2).

4.29. BEMERKUNG. Wir haben gesehen, dass jede (Ko-) Homologietheorie auf der Kategorie der CW-Komplexe in natürlicher Weise durch (Ko-)Kettenkomplexe dargestellt wird. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} (C_{\bullet}^{CW}(X; R), d_{\bullet}^{CW}) \otimes_R M &\cong (C_{\bullet}^{CW}(X; M), d_{\bullet}^{CW}) \\ \text{Hom}_R((C_{\bullet}^{CW}(X; R), d_{\bullet}^{CW}), M) &\cong (C_{CW}^\bullet(X; M), d_{CW}^\bullet). \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die universellen Koeffiziententheoreme 3.82 und 4.20 auf der Kategorie der CW-Komplexe für alle (Ko-)Homologietheorien mit entsprechenden Koeffizienten gelten. Das folgt entweder, indem man die Beweise für die zellulären Komplexe wiederholt, oder indem man das Problem mit den Natürlichkeitsaussagen aus den Sätzen 3.27 (2) und 4.27 (2) auf die singuläre Theorie zurückführt. Genauso gelten auch die Sätze 4.24 und 4.25 für alle (Ko-)Homologietheorien mit passenden Koeffizienten auf der Kategorie der CW-Komplexe.

#### 4.4. Das Cup-Produkt

Im Gegensatz zur Homologie trägt die Kohomologie eine natürliche Ringstruktur. Dabei wird die Multiplikation durch das Cup-Produkt gegeben, das wir in diesem Abschnitt konstruieren. Dazu erinnern wir uns an die Alexander-Whitney-Abbildung aus dem Satz von Eilenberg-Zilber und definieren zunächst das dazu duale Kreuzprodukt. Anschließend können wir das Cup-Produkt definieren, die wichtigsten Eigenschaften beweisen und einige Beispiele betrachten.

Wir haben im Satz 3.95 von Eilenberg-Zilber gesehen, dass für zwei Räume  $X$  und  $Y$  die Komplexe  $C_\bullet(X \times Y; R)$  und  $C_\bullet(X; R) \otimes_R C_\bullet(Y; R)$  auf natürliche Weise kettenhomotopieäquivalent sind. Speziell heißt die Abbildung

$$\mu_\bullet = f_\bullet: C_\bullet(X \times Y; R) \longrightarrow C_\bullet(X; R) \otimes_R C_\bullet(Y; R)$$

auch *Alexander-Whitney-Abbildung*. In Beispiel 3.96 haben wir eine solche Alexander-Whitney-Abbildung kennengelernt. Jede andere Alexander-Whitney-Abbildung ist wegen des Satzes 3.93 über azyklische Modelle zu  $\mu_\bullet$  natürlich kettenhomotop.

4.30. DEFINITION. Es seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume und  $\mu_\bullet: C_\bullet(X \times Y; R) \rightarrow C_\bullet(X; R) \otimes_R C_\bullet(Y; R)$  eine natürliche Kettenhomotopieäquivalenz. Das *Kreuzprodukt* ist die von  $\mu_\bullet$  induzierte Abbildung

$$\times: H^\bullet(X; R) \otimes_R H^\bullet(Y; R) \longrightarrow H^\bullet(X \times Y; R).$$

4.31. BEMERKUNG. Es folgen elementare Überlegungen zum Kreuzprodukt.

- (1) Es seien  $\alpha \in C^k(X; R)$  und  $\beta \in C^\ell(Y; R)$  Koketten, dann erhalten wir eine Kokette  $\alpha \times \beta \in C^{k+\ell}(X \times Y; R)$  durch

$$\alpha \times \beta: C_{k+\ell}(X \times Y; R) \xrightarrow{\mu} \bigoplus_{i+j=k+\ell} C_i(X; R) \otimes C_j(Y; R) \xrightarrow{\alpha \otimes \beta} R \otimes_R R = R,$$

hierbei ist  $\alpha \otimes \beta$  die lineare Abbildung nach Proposition 3.72 (2). Da  $\mu$  eine Kettenabbildung ist, gilt die Leibniz- oder Produktregel

$$\begin{aligned} \delta^{k+\ell}(\alpha \times \beta) &= (\alpha \otimes \beta) \circ \mu_{k+\ell} \circ \partial_{k+\ell+1} \\ &= (\alpha \otimes \beta) \circ \bigoplus_{i+j=k+\ell+1} (\partial_{i+1} \otimes \text{id} + (-1)^i \text{id} \otimes \partial_{j+1}) \circ \mu \\ &= ((\alpha \circ \partial_{k+1}) \otimes \beta) \circ \mu + (-1)^k (\alpha \otimes (\beta \circ \partial_{\ell+1})) \circ \mu \\ &= (\delta^k \alpha) \times \beta + (-1)^k \alpha \times (\delta^\ell \beta). \end{aligned}$$

- (2) Seien  $\alpha, \beta$  Kozykel, dann folgt aus der obigen Produktregel, dass auch  $\alpha \times \beta$  ein Kozykel ist. Seien außerdem  $y \in C^{k-1}(X; R)$  und  $\varepsilon \in C^{\ell-1}(Y; R)$ , dann folgt

$$(\alpha + \delta^{k-1} y) \times (\beta + \delta^{\ell-1} \varepsilon) = \alpha \times \beta + \delta^{k+\ell-1} (\gamma \times (\beta + \delta \varepsilon)) + (-1)^k \delta^{k+\ell-1} (\alpha \times \varepsilon),$$

also ist die induzierte Abbildung auf der Kohomologie wohldefiniert.

- (3) Sei schließlich  $\nu: C_\bullet(X \times Y; R) \rightarrow C_\bullet(X; R) \otimes_R C_\bullet(Y; R)$  eine weitere Alexander-Whitney-Abbildung, dann sind  $\mu$  und  $\nu$  kettenhomotop. Also induzieren beide Abbildungen das gleiche Kreuzprodukt auf der Kohomologie.

- (4) Da die Alexander-Whitney-Abbildung natürlich ist, gilt das auch für das Kreuzprodukt. Seien also  $f: X \rightarrow V$  und  $g: Y \rightarrow W$  stetig,  $\alpha \in C^\bullet(V; R)$ ,  $\beta \in C^\bullet(W; R)$ , dann folgt

$$\begin{aligned} (f \times g)^\#(\alpha \times \beta) &= (\alpha \otimes \beta) \circ \mu \circ (f \times g)_\# = (\alpha \otimes \beta) \circ (f_\# \otimes g_\#) \circ \mu \\ &= ((f^\# \alpha) \otimes (g^\# \beta)) \circ \mu = (f^\# \alpha) \times (g^\# \beta): C_\bullet(X \times Y; R) \longrightarrow R. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zur Situation bei Kettenkomplexen induziert das Dual der Alexander-Whitney-Abbildung nicht automatisch eine Kokettenhomotopieäquivalenz zwischen  $C^\bullet(X; R) \otimes_R C^\bullet(Y; R)$  und  $C^\bullet(X \times Y; R)$ . Stattdessen gilt der Satz von Eilenberg-Zilber mit folgenden Einschränkungen.

4.32. SATZ (Eilenberg-Zilber für Kokettenkomplexe). *Es seien  $X, Y$  topologische Räume und sei  $R$  ein Hauptidealring, so dass  $H_k(X; R)$  für alle  $k$  endlich erzeugt ist. Dann sind die Kokettenkomplexe*

$$C^\bullet(X \times Y; R) \quad \text{und} \quad C^\bullet(X; R) \otimes_R C^\bullet(Y; R)$$

*natürlich kettenhomotopieäquivalent.*

BEWEIS. Wir ersetzen zunächst  $C_\bullet(X; R)$  durch einen kettenhomotopieäquivalenten freien Kettenkomplex  $C'_\bullet$ , so dass alle  $C'_k$  endlich erzeugt sind, siehe Aufgabe 4 von Blatt 8. Dann sind auch  $C^\bullet(X; R)$  und  $\text{Hom}_R(C'_\bullet; R)$  kettenhomotopieäquivalent, und alle  $\text{Hom}_R(C'_k; R)$  sind frei und endlich erzeugt. Mit Aufgabe 3 von Blatt 8 und Aufgabe 1 von Blatt 9 erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(C'_k; R) \otimes_R \text{Hom}_R(C_\ell(Y; R), R) &\cong \text{Hom}_R(C'_k, \text{Hom}_R(C_\ell(Y; R), R)) \\ &\cong \text{Hom}_R(C'_k \otimes_R C_\ell(Y; R), R) . \end{aligned}$$

Mit Satz 3.93 erhalten wir eine Folge von Kettenhomotopieäquivalenzen, wobei wir  $C'_\bullet$  wieder durch  $C_\bullet(X; R)$  ersetzen:

$$\begin{aligned} C^\bullet(X; R) \otimes C^\bullet(Y; R) &\cong \text{Hom}_R(C_\bullet(X; R) \otimes_R C_\bullet(Y; R), R) \\ &\cong \text{Hom}_R(C_\bullet(X \times Y; R), R) = C^\bullet(X \times Y; R) . \end{aligned}$$

Für die Natürlichkeit der ersten Abbildung brauchen wir wieder, dass die Konstruktion von  $C'_\bullet$  in Aufgabe 4 von Blatt 8 bis auf Kettenhomotopie eindeutig ist.  $\square$

Mit der algebraischen Künneth-Formel aus Satz 3.89 erhalten wir eine topologische Künneth-Formel für die Kohomologie.

4.33. SATZ (Künneth-Formel, Kohomologie). *Es seien  $X, Y$  topologische Räume und  $R$  ein Hauptidealring, so dass  $H_k(X; R)$  für alle  $k$  endlich erzeugt ist. Dann ist die Sequenz*

$$0 \longrightarrow (H(X; R) \otimes_R H(Y; R))^k \xrightarrow{\times} H^k(X \times Y; R) \longrightarrow (\text{Tor}_R(H(X; R), H(Y; R)))^{k+1} \longrightarrow 0$$

*natürlich, exakt und spaltet, aber nicht auf natürliche Weise.*  $\square$

Wir wollen als nächstes eine Ring- beziehungsweise Algebrenstruktur auf der Kohomologie einführen. Dazu brauchen einige Begriffe.

4.34. DEFINITION. Ein  $(\mathbb{Z}-)$ graduierter Ring besteht aus einer Familie  $A^\bullet = (A^k)_{k \in \mathbb{Z}}$  abelscher Gruppen und einer Multiplikation auf  $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} A^k$ , so dass  $(A, +, \cdot)$  ein Ring ist und

$$r \cdot s \in A^{k+\ell} \quad \text{für alle } k, \ell \in \mathbb{Z}, r \in A^k \text{ und } s \in A^\ell .$$

Ein graduierter Ring  $A^\bullet$  heißt *graduirt kommutativ*, wenn darüberhinaus

$$s \cdot r = (-1)^{k\ell} r \cdot s \quad \text{für alle } k, \ell \in \mathbb{Z}, r \in A^k \text{ und } s \in A^\ell .$$

Ein graduierter Ring  $A^\bullet$  ist ein *graduierter Ring mit Eins*, wenn es ein Element  $1 \in A^0$  mit  $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$  für alle  $a \in A^\bullet$  gibt.

Sei schließlich  $A$  ein graduierter Ring und  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins, so dass  $A^k \in \text{Mod}_R$  für alle  $k$  und so, dass die Multiplikation auf  $A^\bullet$  bezüglich  $R$  bilinear ist, dann heißt  $A^\bullet$  eine *graduierete/graduirt kommutative  $R$ -Algebra (mit Eins)*.

4.35. BEISPIEL. In der Differentialgeometrie bilden die Differentialformen auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$  eine graduirt kommutative  $C^\infty(M)$ -Algebra  $\Omega^\bullet(M)$ .

Es sei  $X$  wieder ein topologischer Raum. Dann betrachten wir die Diagonalabbildung

$$\Delta_X: X \longrightarrow X \times X \quad \text{mit} \quad \Delta_X(x) = (x, x)$$

für alle  $x \in X$ . Es seien  $\pi_1, \pi_2: X \times X \rightarrow X$  die kanonischen Projektionen. Die Diagonalabbildung ist stetig nach Satz 1.47 (2) wegen der Stetigkeit der zusammengesetzten Abbildungen

$$\text{id}_X: X \xrightarrow{\Delta_X} X \times X \xrightarrow{\pi_1, \pi_2} X .$$

4.36. DEFINITION. Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $R$  ein Ring. Dann ist das *Cup-Produkt* auf  $H^\bullet(X; R)$  definiert durch

$$\smile = \Delta_X^* \circ \times : H^\bullet(X; R) \otimes_R H^\bullet(X; R) \longrightarrow H^\bullet(X; R).$$

4.37. BEMERKUNG. Wir können die Alexander-Whitney-Abbildung aus Beispiel 3.96 zur Konstruktion des Kreuz-Produktes benutzen und erhalten für das Cup-Produkt auf Kokettenniveau die Formel

$$(\alpha \smile \beta)(\sigma) = (\alpha \times \beta)(\Delta_X \sigma) = \sum_{i=0}^{k+\ell} (\alpha \otimes \beta)(\sigma'_i \otimes \sigma''_{k+\ell-i}) = \alpha(\sigma'_k) \cdot \beta(\sigma''_\ell) \in R$$

für alle  $\alpha \in C^k(X; R)$ ,  $\beta \in C^\ell(X; R)$ ,  $\sigma \in S_{k+\ell}(X)$ , wobei  $\sigma'_k = \sigma \circ \sigma'_{k+\ell, k}$  die „Vorder- $k$ -Seite“ und  $\sigma''_\ell = \sigma \circ \sigma''_{k+\ell, \ell}$  die „Rück- $\ell$ -Seite“ des singulären Simplexes  $\sigma$  seien. Hatcher [H] benutzt diese Formel als Definition.

4.38. LEMMA. *Es sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins. Dann ist singuläre Kohomologie mit Koeffizienten  $R$  ein homotopieinvarianter Funktor von der Kategorie  $\mathbf{Top}$  in die Kategorie der graduiert kommutativen  $R$ -Algebren mit Eins.*

BEWEIS. Sei zunächst  $X$  ein topologischer Raum. Das Cup-Produkt ist nach Konstruktion eine  $R$ -bilineare Abbildung, die  $H^k(X; R) \otimes_R H^\ell(X; R)$  nach  $H^{k+\ell}(X; R)$  abbildet. Funktorialität und Homotopieinvarianz des graduierten  $R$ -Moduls  $H^\bullet(X; R)$  folgen aus Definition 4.11 (1). Um einen homotopieinvarianten Funktor in die Kategorie der  $R$ -Algebren zu erhalten, reicht es, zu zeigen, dass das Cup-Produkt natürlich ist. Dazu benutzen wir die Natürlichkeit der Alexander-Whitney-Abbildung, des Kreuzproduktes und der Diagonalabbildung. Sei etwa  $f: X \rightarrow Y$  stetig, dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \Delta_X \downarrow & & \Delta_Y \downarrow \\ X \times X & \xrightarrow{f \times f} & Y \times Y, \end{array}$$

also folgt

$$\begin{aligned} f^*(\alpha \smile \beta) &= f^* \circ \Delta_Y^*(\alpha \times \beta) = (\Delta_Y \circ f)^*(\alpha \times \beta) \\ &= ((f \times f) \circ \Delta_X)^*(\alpha \times \beta) = \Delta_X^*((f^*\alpha) \times (f^*\beta)) = (f^*\alpha) \smile (f^*\beta). \end{aligned}$$

Zur Assoziativität und Kommutativität benutzen wir Bemerkung 3.97, siehe auch Übung 3.159. Nach dem ersten Diagramm gibt es eine natürliche Kettenhomotopie zwischen den iterierten Alexander-Whitney-Abbildungen

$$(\mu_\bullet \otimes \text{id}) \circ \mu_\bullet, \quad (\text{id} \otimes \mu_\bullet) \circ \mu_\bullet : C_\bullet(X \times X \times X; R) \longrightarrow C_\bullet(X; R) \otimes_R C_\bullet(X; R) \otimes_R C_\bullet(X; R).$$

Also existiert eine Kokettenhomotopie  $h: C^\bullet(X; R) \otimes_R C^\bullet(X; R) \otimes_R C^\bullet(X; R) \rightarrow C^\bullet(X \times X \times X; R)$ , so dass

$$(\alpha \times \beta) \times \gamma - \alpha \times (\beta \times \gamma) = (\delta \circ h + h \circ \delta)(a \otimes b \otimes c) \in C^\bullet(X \times X \times X; R)$$

für alle  $\alpha, \beta, \gamma \in C^\bullet(X; R)$ . Da

$$(\Delta_X \times \text{id}_X) \circ \Delta_X = (\text{id}_X \times \Delta_X) \circ \Delta_X : X \longrightarrow X \times X \times X$$

die „Raumdiagonale“  $x \mapsto (x, x, x)$  beschreibt, folgt mit der Natürlichkeit des Kreuzproduktes aus Bemerkung 4.31 (4), dass

$$\begin{aligned} (\alpha \smile \beta) \smile \gamma &= \Delta_X^*((\Delta_X^*(\alpha \times \beta)) \times \gamma) = (\Delta_X^* \circ (\Delta_X \times \text{id}_X)^*)((\alpha \times \beta) \times \gamma) \\ &= ((\Delta_X \times \text{id}_X) \circ \Delta_X)^*((\alpha \times \beta) \times \gamma) = ((\text{id}_X \times \Delta_X) \circ \Delta_X)^*(\alpha \times (\beta \times \gamma)) \\ &= \alpha \smile (\beta \smile \gamma) \in H^\bullet(X; R) \end{aligned}$$

für alle  $\alpha, \beta, \gamma \in H^\bullet(X; R)$ .

Es bezeichne  $t(x, y) = (y, x)$  die Vertauschung der Faktoren in  $X \times X$  und  $\tau_{k+\ell}(a \otimes b) = (-1)^{k\ell} b \otimes a$  für alle  $a \in C_k(X; R)$ ,  $b \in C_\ell(X; R)$  die Vertauschung der Faktoren in  $C^\bullet(X; R) \otimes C^\bullet(X; R)$ . Nach dem zweiten Diagramm in Bemerkung 3.97 gibt es eine natürliche Kettenhomotopie zwischen

$$\mu_\bullet \circ t_\# , \quad \tau_\bullet \circ \mu_\bullet : C_\bullet(X \times X; R) \longrightarrow C_\bullet(X; R) \otimes_R C_\bullet(X; R) .$$

Also existiert eine Kokettenhomotopie  $h : C^\bullet(X; R) \otimes_R C^\bullet(X; R) \rightarrow C^\bullet(X \times X; R)$ , so dass

$$\alpha \times \beta - (-1)^{k\ell} \beta \times \alpha = (\delta h + h \delta)(\alpha \otimes \beta) \in C^{k+\ell}(X \times X; R)$$

für alle  $\alpha \in C^k(X; R)$ ,  $\beta \in C^\ell(X; R)$ . Es folgt

$$\alpha \smile \beta = \Delta_X^*(\alpha \times \beta) = (-1)^{k\ell} \Delta_X^*(\beta \times \alpha) = (-1)^{k\ell} \beta \smile \alpha$$

für alle  $\alpha \in H^k(X; R)$ ,  $\beta \in H^\ell(X; R)$ .

Wir betrachten das Element  $1 \in R \cong H^0(*; R)$  nach Dimensionsaxiom 4.11 (5). Es bezeichne  $p_X : X \rightarrow \{*\}$  die konstante Abbildung, dann wollen wir zeigen, dass  $p_X^* 1$  das Einselement in  $H^\bullet(X; R)$  ist. Der singuläre Kettenkomplex  $C^\bullet(*; R)$  aus Beispiel 3.39 ist kettenhomotopieäquivalent zum Komplex

$$\cdots \longleftarrow 0 \longleftarrow R \longleftarrow 0 \longleftarrow \cdots .$$

Außerdem ist  $\iota_X = (\text{id}_X \times p_X) \circ \Delta_X : X \rightarrow X \times \{*\}$  ein Homöomorphismus, also erhalten wir ein bis auf Kettenhomotopie kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_\bullet(X; R) & \xrightarrow[\cong]{\iota_{X*}} & C_\bullet(X \times \{*\}; R) \\ \cong \downarrow & & \mu \downarrow \sim \\ C_\bullet(X; R) \otimes_R R & \xrightarrow{\sim} & C_\bullet(X; R) \otimes_R C_\bullet(*; R) \end{array}$$

von Kettenhomotopieäquivalenzen. Daraus folgt

$$\alpha \smile (p_X^* 1) = \Delta_X^* \circ (\text{id}_X \times p_X)^*(\alpha \times 1) = \iota_X^*(\alpha \times 1) = \alpha . \quad \square$$

In Zukunft schreiben wir  $1$  für  $p_X^* 1$ . Tatsächlich bildet die Kokette  $p_X^* 1$  alle 0-Simplizes in  $X$  auf  $1 \in R$  ab. Alternativ zum obigen Beweis können wir mit der expliziten Formel aus Bemerkung 4.37 nachrechnen, dass  $\alpha \smile 1 = 1 \smile \alpha = \alpha$  für alle  $\alpha \in H^\bullet(X; R)$  gilt.

Nach Beispiel 3.3 (2) ist eine abelsche Gruppe bereits ein  $\mathbb{Z}$ -Modul. Genauso ist ein graduierter Ring bereits eine graduierte  $\mathbb{Z}$ -Algebra. Daher nennen wir  $H^\bullet(X) = H^\bullet(X; \mathbb{Z})$  einfach den Kohomologiering. Am Anfang von Abschnitt 3.1 haben wir verabredet, dass alle Ringe kommutativ seien und eine Eins haben. Von dieser Verabredung nehmen wir Kohomologieringe hiermit explizit aus.

4.39. BEISPIEL. Für einige einfache topologische Räume können wir den Kohomologiering bereits bestimmen.

- (1) Es gilt  $R \cong H^\bullet(*; R)$  mit  $r \mapsto r \cdot 1$ . Da das Cup-Produkt  $R$ -bilinear ist und die Einselemente aufeinander abgebildet werden, gilt

$$(r \cdot 1) \smile (s \cdot 1) = rs \cdot (1 \smile 1) = rs \cdot 1 ,$$

also handelt es sich um einen  $R$ -Algebren-Isomorphismus. Genauso ist  $p_X^*: R \rightarrow H^\bullet(X; R)$  ein Algebren-Isomorphismus, wenn  $X$  zusammenziehbar ist.

- (2) Für wegzusammenhängende Räume gilt  $H^0(X; R) = \text{im}(p_X^*)$  nach Bemerkung 4.13 (2), und  $\text{im}(p_X^*)$  ist ein Unterring von  $H^\bullet(X; R)$ . Wir identifizieren  $H^0(X; R)$  mit  $R$ . Diese Identifikation ist mit der Modulstruktur auf  $H^\bullet(X; R)$  verträglich, denn

$$(r \cdot 1) \smile \alpha = r \cdot (1 \smile \alpha) = r\alpha \quad \text{für alle } r \in R \text{ und } \alpha \in H^\bullet(X; R) .$$

- (3) Es sei  $\alpha \in H^n(S^n; R)$  ein Erzeuger des Moduls  $H^n(S^n; R) \cong R \in \text{Mod}_R$ . Es folgt

$$\alpha \smile \alpha \in H^{2n}(S^n; R) = 0 ,$$

also  $\alpha \smile \alpha = 0$ . Wir erhalten einen Ringisomorphismus

$$H^\bullet(S^n; R) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^2) \quad \text{mit} \quad \alpha \in H^n(S^n; R) .$$

- (4) Es seien  $n, k \geq 2$  und  $M_k^n$  der Moore-Raum aus Aufgabe 3.145. Dann gilt

$$H^n(M_k^n; R) \cong \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, R) \quad \text{und} \quad H^{n+1}(M_k^n; R) \cong R/kR .$$

Für  $\alpha \in H^n(M_k^n; R)$  liegt  $\alpha \smile \alpha \in H^{2n}(M_k^n; R)$ , es folgt  $\alpha \smile \alpha = 0 = \alpha \smile \beta = \beta \smile \beta$ . Für  $n = 1$  hingegen muss  $\alpha \smile \alpha \in H^2(M_k^1; R)$  nicht verschwinden, siehe dazu unten das Beispiel  $M_2^1 \cong \mathbb{R}P^2$ .

4.40. BEMERKUNG. Wir betrachten das Verhalten der Kohomologiealgebren unter disjunkten Vereinigungen und Produkten.

- (1) Es sei  $X = \dot{\bigcup}_{i \in I} X_i$  die Zerlegung eines Raumes  $X$  in seine Wegzusammenhangskomponenten, dann ist

$$X \times X = \dot{\bigcup}_{i, j \in I} X_i \times X_j$$

die entsprechende Zerlegung des Produktraumes  $X \times X$ . Die Diagonalabbildung trifft dabei nur Komponenten der Form  $X_i \times X_i$ . Hieraus folgt mit Bemerkung 4.13, dass

$$(H^\bullet(X; R), \smile) \cong \prod_{i \in I} (H^\bullet(X_i; R), \smile) ,$$

dabei werden zwei Familien von Kohomologieklassen komponentenweise multipliziert. Eine entsprechende Formel gilt nach dem Summenaxiom 4.11 (4) auch für die disjunkte Vereinigung einer Familie topologischer Räume.

- (2) Es sei  $X = X_1 \times X_2$  ein Produkt topologischer Räume und  $p_1: X \rightarrow X_1, p_2: X \rightarrow X_2$  die kanonischen Projektionsabbildungen. Nach Übung 2(a) von Blatt 9 können wir das Kreuzprodukt aus Definition 4.30 auch durch

$$\alpha \times \beta = (p_1^* \alpha) \smile (p_2^* \beta)$$

für alle  $\alpha \in C^\bullet(X_1; R)$  und  $\beta \in C^\bullet(X_2; R)$  beschreiben. Hatcher [H] benutzt das als Definition.

- (3) Es sei  $X = X_1 \times X_2$  ein Produkt topologischer Räume. Wir nehmen an, dass die Voraussetzungen der Künneth-Formel 4.33 erfüllt sind, das heißt, es sei  $H_k(X_i; R)$  endlich erzeugt für alle  $k \in \mathbb{Z}$  für mindestens einen der beiden Räume. Dann können wir das Cup-Produkt wie in Übung 2(b) von Blatt 9 zumindest auf der Unteralgebra

$$H^\bullet(X_1; R) \otimes_R H^\bullet(X_2; R) = \text{im}(\times) \subset H^\bullet(X_1 \times X_2; R)$$

beschreiben. Dazu führen wir unten das graduierte Tensorprodukt ein. Falls das Torsionsprodukt  $\text{Tor}_R(H^\bullet(X_1; R), H^\bullet(X_2; R))$  verschwindet, beispielsweise weil  $R$  ein Körper ist,

oder weil alle  $H^k(X_j; R)$  frei sind für mindestens einen der beiden Räume, haben wir die Kohomologiealgebra des Produktraumes bereits vollständig beschrieben.

4.41. DEFINITION. Es seien  $A^\bullet, B^\bullet$  zwei graduierte  $R$ -Algebren. Wir definieren das *graduierte Tensorprodukt*  $A^\bullet \hat{\otimes}_R B^\bullet$  durch  $(A \hat{\otimes}_R B)^k = (A \otimes_R B)^k$  wie in Definition 3.87 und

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = (-1)^{jk}(a \cdot c) \otimes (b \cdot d)$$

für  $a \in A^i, b \in B^k, c \in A^j, d \in B^\ell$ .

Die Faustregel für den Vorzeichenfaktor lautet: „Wenn man zwei Buchstaben  $x$  und  $y$  vom Grad  $i$  beziehungsweise  $j$  in einer Formel vertauscht, dann erhält man den Vorzeichenfaktor  $(-1)^{ij}$ .“ Genauso erklärt sich der Vorzeichenfaktor in Definition 3.87; dort wird das Differential  $\partial$  vom Grad 1 mit einem Element vom Grad  $a$  vertauscht.

4.42. BEMERKUNG. Wir brauchen auch relative Varianten des Kreuz- und Cup-Produktes.

(1) Es seien  $A \subset X$  und  $B \subset Y$  Teilmengen. Wie in Folgerung 3.100 gibt es eine relative Alexander-Whitney-Abbildung

$$\mu: C_\bullet(X \times Y, A \times Y \cup X \times B; R) \longrightarrow C_\bullet(X, A; R) \otimes_R C_\bullet(Y, B; R).$$

Beispielsweise dürfen wir die Formel aus Beispiel 3.96 verwenden. Damit erhalten wir ein relatives Kreuzprodukt

$$\times: C^\bullet(X, A; R) \otimes_R C^\bullet(Y, B; R) \longrightarrow C^\bullet(X \times Y, A \times Y \cup X \times B; R).$$

(2) Es seien jetzt  $A, B \subset X$  Teilmengen. Für die Diagonalabbildung  $\Delta_X: X \rightarrow X \times X$  folgt

$$\Delta_X^{-1}(A \times X \cup X \times B) = \Delta_X^{-1}(A \times X) \cup \Delta_X^{-1}(X \times B) = A \cup B.$$

Also erhalten wir ein relatives Cupprodukt

$$\smile: C^\bullet(X, A; R) \otimes_R C^\bullet(X, B; R) \longrightarrow C^\bullet(X, A \cup B; R).$$

4.43. FOLGERUNG (Eilenberg-Zilber für Kokettenkomplexe, relativ). *Es sei jeweils  $A \subset X$  offen oder  $(X, A)$  sei ein gutes Paar, und  $B \subset Y$  offen oder  $(Y, B)$  ein gutes Paar. Es sei  $R$  ein Hauptidealring, so dass  $H_k(X, A; R)$  endlich erzeugt ist für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Dann ist das Kreuzprodukt ein natürlicher Quasiisomorphismus*

$$\times: C^\bullet(X, A; R) \otimes_R C^\bullet(Y, B; R) \longrightarrow C^\bullet(X \times Y, A \times Y \cup X \times B; R).$$

BEWEIS. Wir lassen die Koeffizienten  $R$  im Beweis aus Platzgründen weg. Wie im Beweis von Satz 4.32 erhalten wir zunächst eine natürliche Kokettenhomotopieäquivalenz

$$C^\bullet(X, A) \otimes_R C^\bullet(Y, B) \longrightarrow \text{Hom}_R(C_\bullet(X, A) \otimes_R C_\bullet(Y, B), R),$$

dazu benutzen wir, dass  $H_k(X, A)$  für alle  $k$  endlich erzeugt ist.

Der relative Satz von Eilenberg-Zilber aus Folgerung 3.100 liefert einen Quasiisomorphismus

$$g_\bullet: C_\bullet(X, A) \otimes_R C_\bullet(Y, B) \longrightarrow C_\bullet(X \times Y, A \times Y \cup X \times B).$$

Wir betrachten die Alexander-Whitney-Abbildung

$$\mu_\bullet = f_\bullet: C_\bullet(X \times Y, A \times Y \cup X \times B) \longrightarrow C_\bullet(X, A) \otimes_R C_\bullet(Y, B).$$

Wie am Ende des Beweises der Folgerung 3.100 kann man mit Hilfe von Bemerkung 3.99 (4) überprüfen, dass  $g_\bullet$  und  $\mu_\bullet$  auf der Homologie zueinander invers sind.

Wir wenden jetzt die Konstruktion im Beweis des universellen Koeffizientensatzes 4.20 auf die obigen Kettenkomplexe an und erhalten das folgende kommutative Diagramm mit exakten Spalten.

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{Ext}_R(H_{k-1}(C_\bullet(X, A) \otimes_R C_\bullet(Y, B)), R) & \xrightarrow[\cong]{\text{Ext}_R(\mu_*, R)} & \text{Ext}_R(H_{k-1}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B), R) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^k(\text{Hom}_R(C_\bullet(X, A) \otimes_R C_\bullet(Y, B), R)) & \xrightarrow{\mu^*} & H^k(X \times Y, A \times Y \cup X \times B) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{Hom}_R(H_k(C_\bullet(X, A) \otimes_R C_\bullet(Y, B)), R) & \xrightarrow[\cong]{\text{Hom}_R(\mu_*, R)} & \text{Hom}_R(H_k(X \times Y, A \times Y \cup X \times B), R) \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

Aus dem Fünferlemma 3.56 folgt, dass die mittlere Abbildung  $\mu^*$  ein Isomorphismus ist. Insgesamt erhalten wir einen Quasiisomorphismus

$$\times: C^\bullet(X, A) \otimes_R C^\bullet(Y, B) \rightarrow \text{Hom}_R(C_\bullet(X, A) \otimes_R C_\bullet(Y, B), R) \rightarrow C^\bullet(X \times Y, A \times Y \cup X \times B). \quad \square$$

Aus diesem Resultat lassen sich eine relative Künneth-Formel und eine reduzierte Künneth-Formel für die Kohomologie ableiten, vergleiche Folgerung 3.104. Wir geben diese Formeln hier nicht an, statt dessen betrachten wir ein Beispiel.

4.44. BEISPIEL. Wir betrachten die Paare  $(I^k, \partial(I^k))$  und  $(I^\ell, \partial(I^\ell))$ . Wie in Beispiel 3.103 erhalten wir

$$(I^k \times I^\ell, \partial(I^k) \times I^\ell \cup I^k \times \partial(I^\ell)) \cong (I^{k+\ell}, \partial(I^{k+\ell})).$$

Nach dem relativen Satz von Eilenberg-Zilber aus Folgerung 4.43 und der algebraischen Künneth-Formel aus Satz 3.89 erhalten wir die exakte Sequenz

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow (H^\bullet(I^k, \partial(I^k)) \otimes H^\bullet(I^\ell, \partial(I^\ell)))^n &\xrightarrow{\times} H^n(I^{k+\ell}, \partial(I^{k+\ell})) \\
&\longrightarrow \text{Tor}(H(I^k, \partial(I^k)), H(I^\ell, \partial(I^\ell)))^{n+1} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Da alle  $H^i(I^k, \partial(I^k); R) \cong R$  für  $i = k$  und 0 sonst für jeden Koeffizientenring  $R$ , liefert das Kreuzprodukt einen Isomorphismus. Insbesondere erhalten wir einen Isomorphismus

$$x: \underbrace{H^k(I^k, \partial(I^k), R)}_{\cong R} \otimes_R \underbrace{H^\ell(I^\ell, \partial(I^\ell), R)}_{\cong R} \longrightarrow \underbrace{H^{k+\ell}(I^{k+\ell}, \partial(I^{k+\ell}), R)}_{\cong R}.$$

Wir können jetzt die Kohomologieringe und -algebren der diversen projektiven Räume angeben.

4.45. SATZ. *Es sei  $n \geq 0$ ,  $\mathbb{k} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und  $R$  ein beliebiger Ring. Dann erhalten wir Algebrenisomorphismen*

$$H^\bullet(\mathbb{R}P^n; \mathbb{k}) \cong \mathbb{k}[\alpha]/(\alpha^{n+1}) \quad \text{mit } \alpha \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{k}), \quad (1)$$

$$H^\bullet(\mathbb{C}P^n; R) \cong R[\alpha]/(\alpha^{n+1}) \quad \text{mit } \alpha \in H^2(\mathbb{C}P^n; R), \quad (2)$$

$$H^\bullet(\mathbb{H}P^n; R) \cong R[\alpha]/(\alpha^{n+1}) \quad \text{mit } \alpha \in H^4(\mathbb{H}P^n; R). \quad (3)$$

BEWEIS. Für  $n = 0$  ist nichts zu zeigen, also sei im Folgenden  $n \geq 1$ . Wir beweisen hier nur (1). Die Beweise für (2) und (3) funktionieren analog, allerdings ersetzen wir  $\mathbb{R}$  durch  $\mathbb{C}$  beziehungsweise  $\mathbb{H}$  und wählen einen Erzeuger  $\alpha$  in Grad 2 beziehungsweise 4. Dabei dürfen wir beliebige Ringe zulassen, da der zelluläre Kettenkomplex für  $\mathbb{C}P^n$  und  $\mathbb{H}P^n$  gemäß Übung 3.138 stets trivialen Randoperator hat.

Wir betrachten den zellulären Kettenkomplex von  $\mathbb{R}P^n$  mit je einer Zelle  $\mathbb{R}P^k \subset \mathbb{R}P^n$  in jeder Dimension  $k$ . Nach Beispiel 3.30 und Übung 3.136 hat  $C_\bullet^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{k})$  trivialen Randoperator für  $\mathbb{k} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Für  $i < k \leq n$  erhalten wir ein kommutatives Diagramm natürlicher Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} H^k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^i; \mathbb{k}) & \xrightarrow{\cong} & H^k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^i; \mathbb{k}) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{k}) & \xrightarrow{\cong} & H^k(\mathbb{R}P^k; \mathbb{k}) \end{array}$$

Wir wollen zeigen, dass  $\alpha^k \in H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{k}) \cong \mathbb{k}$  das einzige von 0 verschiedene Element ist, wenn  $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{k}) \cong \mathbb{k}$  der Erzeuger ist. Dazu nehmen wir induktiv an, dass das für  $k, \ell \geq 1$  bereits gezeigt ist, und beweisen dann, dass  $0 \neq \alpha^{k+\ell} \in H^{k+\ell}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{k})$  für  $n \geq k + \ell$ . Nach dem Obigen dürfen wir dazu annehmen, dass  $k + \ell = n$ .

Als nächstes betrachten wir in homogenen Koordinaten die Unterräume

$$\mathbb{R}P^{k-1} = \{ (x_0 : \dots : x_{k-1} : 0 : \dots : 0) \mid (x_0, \dots, x_{k-1}) \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \}$$

und

$$\mathbb{R}P^\ell = \{ (0 : \dots : 0 : x_k : \dots : x_n) \mid (x_k, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{\ell+1} \setminus \{0\} \} \subset \mathbb{R}P^n .$$

Wir konstruieren eine Deformationsretraktion von  $\mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^\ell$  auf  $\mathbb{R}P^{k-1}$  durch

$$((x_0 : \dots : x_n), t) \mapsto (x_0 : \dots : x_{k-1} : tx_k : \dots : tx_n) \in \mathbb{R}P^n$$

für  $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^\ell$  und  $t \in [0, 1]$ . Indem wir die langen exakten Kohomologiesequenzen der Paare  $(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^\ell)$  und  $(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{k-1})$  mit dem Fünferlemma 3.56 vergleichen, erhalten wir Isomorphismen

$$H^\bullet(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^\ell; \mathbb{k}) \xrightarrow{\cong} H^\bullet(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{k-1}; \mathbb{k}) .$$

Schließlich erhalten wir noch durch Ausschneidung einen Isomorphismus

$$H^\bullet(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \setminus \{*\}; \mathbb{k}) \xrightarrow{\cong} H^\bullet(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{*\}; \mathbb{k}) ,$$

und wegen Homotopieinvarianz gilt schließlich

$$H^\bullet(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{*\}; \mathbb{k}) \xrightarrow{\cong} H^\bullet(I^n, \partial(I^n); \mathbb{k}) .$$

Wir fassen die obigen Isomorphismen zu einem kommutativen Diagramm zusammen, wobei wir die Koeffizienten  $\mathbb{k} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  aus Platzgründen weglassen.

$$\begin{array}{ccccccc} H^k(\mathbb{R}P^n) & \xleftarrow{\cong} & H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{R}P^{k-1}) & \xleftarrow{\cong} & H^k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^\ell) & \longrightarrow & H^k(I^n, \partial(I^k) \times I^\ell) \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ H^k(\mathbb{R}P^k) & \xleftarrow{\cong} & H^k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1}) & \xleftarrow{\cong} & H^k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^k \setminus \{*\}) & \xrightarrow{\cong} & H^k(I^k, \partial(I^k)) \end{array}$$

Mithilfe der Natürlichkeit des relativen Cup-Produktes und Aufgabe 2(a) von Blatt 9 erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
H^k(\mathbb{R}P^n) \otimes_{\mathbb{k}} H^\ell(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{\smile} & H^n(\mathbb{R}P^n) \\
\cong \uparrow & & \uparrow \cong \\
H^k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^\ell) \otimes_{\mathbb{k}} H^\ell(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^k) & \xrightarrow{\smile} & H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \setminus \{*\}) \\
\cong \downarrow & & \downarrow \cong \\
H^k(I^n, \partial(I^k) \times I^\ell) \otimes_{\mathbb{k}} H^\ell(I^n, I^k \times \partial(I^\ell)) & \xrightarrow{\smile} & H^n(I^n, \partial(I^n)) \\
\cong \uparrow p_1^* \otimes p_2^* & & \parallel \\
H^k(I^k, \partial(I^k)) \otimes_{\mathbb{k}} H^\ell(I^\ell, \partial(I^\ell)) & \xrightarrow[\cong]{\times} & H^n(I^n, \partial(I^n))
\end{array}$$

Nach Beispiel 4.44 ist die untere waagerechte Abbildung ein Isomorphismus. Wenn wir also oben rechts die Elemente  $0 \neq \alpha^k \in H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{k})$  und  $0 \neq \alpha^\ell \in H^\ell(\mathbb{R}P^n; \mathbb{k})$  einsetzen, erhalten wir an jeder Stelle des Diagramms das eindeutige von Null verschiedene Element, so dass schlussendlich  $\alpha^k \smile \alpha^\ell = \alpha^n \neq 0$ .

Auf der anderen Seite folgt  $\alpha^k = 0$  für  $k > n$ , da  $H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{k}) = 0$  für  $k > n$ , also gilt

$$H^\bullet(\mathbb{R}P^n; \mathbb{k}) = \bigoplus_{k=0}^n H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{k}) \cong \bigoplus_{k=0}^n \langle \alpha^k \rangle_{\mathbb{k}} \cong \mathbb{k}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$$

mit der vom Polynomring induzierten Multiplikation. □

4.46. BEMERKUNG. Wir betrachten noch einmal den reell projektiven Raum.

- (1) Für den Beweis haben wir benutzt, dass der zelluläre Randoperator mit Koeffizienten  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  trivial ist. Das gilt für alle Koeffizientenringe  $R$ , auf denen Multiplikation mit 2 wie 0 operiert. In einem Ring  $R$  mit Eins ist das äquivalent dazu, dass  $1 + 1 = 0$  gilt. Beispiele sind alle Körper der Charakteristik 2, sowie Polynomringe über solchen Körpern. Für alle solche Ringe  $R$  gilt analog, dass

$$H^\bullet(\mathbb{R}P^n; R) \cong R[\alpha]/(\alpha^{n+1}) \quad \text{mit} \quad \alpha \in H^1(\mathbb{R}P^n; R) .$$

- (2) Es sei  $\alpha \in H^{2k+1}(X; R)$  ein ungerades Element der Kohomologiealgebra eines beliebigen Raumes  $X$  mit Koeffizientenring  $R$ , das heißt,  $\alpha$  ist von ungeradem Grad. Da  $H^\bullet(X; R)$  graduiert kommutativ ist, folgt

$$\alpha \smile \alpha = (-1)^{(2k+1)^2} \alpha \smile \alpha = -\alpha \smile \alpha ,$$

also  $2\alpha \smile \alpha = 0$ . Wenn 2 in  $R$  invertierbar ist, folgt daraus  $\alpha^2 = 0$ . Das gilt beispielsweise in Körpern der Charakteristik ungleich 2, und in Polynomringen über solchen Körpern. In  $\mathbb{Z}$  und in  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ist 2 nicht invertierbar, also muss  $\alpha \smile \alpha$  nicht verschwinden. Satz 4.45 (1) ist dafür ein Beispiel.

Wir wollen jetzt zur späteren Verwendung das Cup-Produkt mit Koeffizienten  $M \in \text{Mod}_R$  einführen. Seien dazu

$$\begin{aligned}
f_\bullet &: C_\bullet(\cdot \times \cdot; R) \longrightarrow C_\bullet(\cdot; R) \otimes_R C_\bullet(\cdot; R) \\
\text{und} \quad g_\bullet &: C_\bullet(\cdot; R) \otimes_R C_\bullet(\cdot; R) \longrightarrow C_\bullet(\cdot \times \cdot; R)
\end{aligned}$$

die zueinander (bis auf natürliche Kettenhomotopie) inversen Kettenhomotopieäquivalenzen aus dem Satz 3.95 von Eilenberg-Zilber. Offensichtlich liefert Tensorieren mit  $M$  neue Funktoren

$$C_{\bullet}(\cdot \times \cdot; R) \otimes_R M = C_{\bullet}(\cdot \times \cdot; M)$$

und  $C_{\bullet}(\cdot; R) \otimes_R C_{\bullet}(\cdot; R) \otimes_R M = C_{\bullet}(\cdot; R) \otimes_R C_{\bullet}(\cdot; M)$ .

Da Kettenhomotopie mit Tensorieren verträglich ist, erhalten wir natürliche Kettenhomotopieäquivalenzen

$$f_{\bullet} \otimes \text{id}_M: C_{\bullet}(\cdot \times \cdot; M) \longrightarrow C_{\bullet}(\cdot; R) \otimes_R C_{\bullet}(\cdot; M)$$

und  $g_{\bullet} \otimes \text{id}_M: C_{\bullet}(\cdot; R) \otimes_R C_{\bullet}(\cdot; M) \longrightarrow C_{\bullet}(\cdot \times \cdot; M)$ .

4.47. DEFINITION. Die natürliche Kettenhomotopieäquivalenz  $\mu_{\bullet} = g_{\bullet} \otimes \text{id}_M$  heißt *Alexander-Whitney-Abbildung mit Koeffizienten  $M$* . Die von  $\mu_{\bullet}$  induzierte Abbildung

$$\times: H^{\bullet}(X; R) \otimes_R H^{\bullet}(Y; M) \longrightarrow H^{\bullet}(X \times Y; M)$$

heißt *Kreuzprodukt mit Koeffizienten  $M$* , und wir definieren das *Cupprodukt mit Koeffizienten  $M$*  durch

$$\smile = \Delta_X^* \circ \times: H^{\bullet}(X; R) \otimes_R H^{\bullet}(X; M) \rightarrow H^{\bullet}(X; M).$$

Wir wollen jetzt einen Modulbegriff für die graduierten Ringe und Algebren aus Definition 4.34 einführen.

4.48. DEFINITION. Es sei  $A^{\bullet}$  eine graduiert kommutative Algebra über einem kommutativen Ring  $R$  mit Eins. Ein *graduierter  $A^{\bullet}$ -Modul* ist eine Familie  $B^{\bullet} = (B^k)_{k \in \mathbb{Z}}$  von  $R$ -Moduln, so dass  $B = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} B^k$  ein Modul über  $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} A^k$  mit  $R$ -bilinearer Multiplikation ist und

$$a \cdot b \in B^{k+\ell} \quad \text{für alle } k, \ell \in \mathbb{Z}, a \in A^k \text{ und } b \in B^{\ell}.$$

Ein *unitärer graduierter  $A^{\bullet}$ -Modul* über einer graduierten  $R$ -Algebra  $A^{\bullet}$  mit Einselement  $1 \in A^0$  erfüllt außerdem  $1 \cdot b = b$  für alle  $b \in B^{\bullet}$ .

Mit dem gleichen Beweis wie in Lemma 4.38 können wir auch Kohomologie mit Koeffizienten beschreiben. Die Moduleigenschaft entspricht dabei der Assoziativität im obigen Beweis.

4.49. FOLGERUNG. *Es sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins und  $M \in \text{Mod}_R$  ein unitärer  $R$ -Modul. Dann bildet die singuläre Kohomologie mit Koeffizienten  $M$  in natürlicher Weise einen unitären graduierten Modul über der singulären Kohomologie mit Koeffizienten  $R$ .*

4.50. BEMERKUNG. Wir können jetzt das Cup-Produkt mit Abbildungen und exakten Sequenzen in Verbindung bringen.

- (1) Die Alexander-Whitney-Abbildung  $\mu_{\bullet}$  lässt sich auf Koketten natürlich definieren, und somit auch das Kreuz- und das Cupprodukt. Es sei jetzt  $a \in Z^k(X; R)$  ein Kozykel, dann ist die Abbildung  $m_a: C^{\bullet}(X; M) \rightarrow C^{\bullet}(X; M)$  mit

$$m_a(b) = (-1)^{k\ell} a \cdot b \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in C^{\ell}(X; M)$$

eine Kokettenabbildung vom Grad  $k$ , denn aus der Leibniz-Regel in Bemerkung 4.31 (1) folgt

$$\delta^{k+\ell}(m_a(b)) = (-1)^{k\ell}(\delta^k a) \cdot b + (-1)^{k(\ell+1)} a \cdot (\delta^{\ell} b) = m_a(\delta^{\ell} b).$$

- (2) Es sei  $I \subset R$  ein Ideal, also insbesondere ein  $R$ -Untermodul von  $R$ , und  $R/I$  der Quotientenring. Sei  $a \in Z^k(X; R)$  ein Kozykel, dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm von Kokettenabbildungen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^\ell(X, I) & \longrightarrow & C^\ell(X; R) & \longrightarrow & C^\ell(X; R/I) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow m_a & & \downarrow m_a & & \downarrow m_a \\ 0 & \longrightarrow & C^{k+\ell}(X; I) & \longrightarrow & C^{k+\ell}(X; R) & \longrightarrow & C^{k+\ell}(X; R/I) \longrightarrow 0 \end{array}$$

mit exakten Zeilen. Es sei  $\alpha = [\alpha] \in H^k(X; R)$ . Mit der Natürlichkeitsaussage im Schlangenlemma 3.44 erhalten wir eine Sequenzabbildung vom Grad  $k$  der Form

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^\ell(X; I) & \longrightarrow & H^\ell(X; R) & \longrightarrow & H^\ell(X; R/I) \xrightarrow{\delta^\ell} H^{\ell+1}(X; I) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow m_\alpha & & \downarrow m_\alpha & & \downarrow m_\alpha \\ \dots & \longrightarrow & H^{k+\ell}(X; I) & \longrightarrow & H^{k+\ell}(X; R) & \longrightarrow & H^{k+\ell}(X; R/I) \xrightarrow{\delta^{k+\ell}} H^{k+\ell+1}(X; I) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Das rechte Quadrat kommutiert gerade wegen des Vorzeichenfaktors  $(-1)^{k\ell}$  in (1).

- (3) Es sei  $(X, A)$  ein Paar topologischer Räume, dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & (X, A) \\ \Delta_X \downarrow & & \downarrow \Delta_X \\ X \times X & \xrightarrow{\text{id} \times j} & (X \times X, X \times A) \end{array}$$

in der Kategorie der Paare. Für  $a \in C^k(X; R)$  und  $b \in C^\ell(X, A; R)$  erhalten wir

$$\begin{aligned} m_a(j^\# b) &= (-1)^{k\ell} (\Delta_X^\# \circ (\text{id} \times j)^\#)(a \times b) \\ &= (-1)^{k\ell} (j^\# \circ \Delta_X^\#)(a \times b) = j^\#(m_a b). \end{aligned}$$

Wie in (2) erhalten wir ein Diagramm von Kettenabbildungen mit kurzen exakten Zeilen,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^\ell(X, A; R) & \xrightarrow{j^\#} & C^\ell(X; R) & \xrightarrow{i^\#} & C^\ell(A; R) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow m_a & & \downarrow m_a & & \downarrow m_{i^\# a} \\ 0 & \longrightarrow & C^{k+\ell}(X, A; R) & \xrightarrow{j^\#} & C^{k+\ell}(X; R) & \xrightarrow{i^\#} & C^\ell(A; R) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Daraus ergibt sich das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^k(X, A; R) & \xrightarrow{j^*} & H^\ell(X; R) & \xrightarrow{i^*} & H^\ell(A; R) \xrightarrow{\delta} H^{\ell+1}(X, A; R) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow m_\alpha & & \downarrow m_\alpha & & \downarrow m_{i^* \alpha} \\ \dots & \longrightarrow & H^{k+\ell}(X, A; R) & \xrightarrow{j^*} & H^{k+\ell}(X; R) & \xrightarrow{i^*} & H^{k+\ell}(A; R) \xrightarrow{\delta} H^{k+\ell+1}(X, A; R) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Wir erhalten ein entsprechendes Diagramm, wenn wir die Koeffizienten durch  $M$  ersetzen, aber  $\alpha = [a] \in H^k(X; R)$  beibehalten.

In der Praxis wird man in der Regel den Vorzeichenfaktor  $(-1)^{k\ell}$  bei der Definition von  $m_a$  weglassen und stattdessen sagen, dass  $m_a$  mit Verbindungshomomorphismen graduiert kommutiert,

$$\delta \circ (\alpha \smile) = (-1)^{\deg \alpha} (\alpha \smile) \circ \delta.$$

Wir haben den Vorzeichenfaktor hier eingeführt, um das Schlangenlemma direkt anwenden zu können.

## 4.5. Poincaré-Dualität

In diesem Abschnitt stellen wir eine weitere Beziehung zwischen Homologie und Kohomologie her, allerdings nur für topologische Mannigfaltigkeiten. Zusammen mit den universellen Koeffizienten-Theoremen erhalten wir sehr viel Information über den Kohomologiering kompakter, orientierbarer Mannigfaltigkeiten. Zunächst führen wir noch das Cappedprodukt, Kohomologie mit kompaktem Träger und Orientierungen von Mannigfaltigkeiten ein.

Wir beginnen mit dem Cappedprodukt, wobei wir der Kürze halber sofort eine relative Version mit Koeffizienten angeben. Sei dazu wieder

$$\mu_\bullet: C_\bullet(X \times Y, A \times Y \cup X \times B; M) \rightarrow C_\bullet(X, A; R) \otimes_R C_\bullet(Y, B; M)$$

eine relative Alexander-Whitney-Abbildung mit Koeffizienten  $M \in \text{Mod}_R$ .

4.51. DEFINITION. Es seien  $A \subset X$  und  $B \subset Y$  Teilmengen und  $M \in \text{Mod}_R$ , dann definieren wir das *Schrägprodukt*  $/: H_\bullet(X \times Y, A \times Y \cup X \times B; M) \times H^\bullet(X, A; R) \rightarrow H_\bullet(Y, B; R)$  durch

$$c/a = (a \otimes \text{id})(\mu_*c) \in R \otimes_R H_\ell(Y, B; M)$$

für alle  $a \in H^k(X, A)$  und  $c \in H_{k+\ell}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B; M)$ . Es seien jetzt  $A, B \subset X$  Teilmengen und  $\Delta_X: (X, A \cup B) \rightarrow (X \times X, A \times X \cup X \times B)$  die Diagonalabbildung, dann definieren wir das *Cappedprodukt*  $\frown: H_\bullet(X, A \cup B; M) \times H^\bullet(X, A; R) \rightarrow H_\bullet(X, B; M)$  für  $c \in H_{k+\ell}(X, A \cup B; M)$  und  $a \in H^k(X, A; R)$  durch

$$c \frown a = (\Delta_{X*}c)/a.$$

4.52. BEMERKUNG. Es folgen elementare Überlegungen zum Cappedprodukt.

- (1) Da die Alexander-Whitney-Abbildung und die Diagonalabbildung bereits auf (Ko-) Ketten wirken, können wir Schräg- und Cappedprodukt auf (Ko-) Kettenniveau definieren und wie in Bemerkung 4.31 überprüfen, dass beide Produkte auf der (Ko-) Homologie wohldefiniert sind. Dabei gilt jetzt

$$\begin{aligned} (a \otimes \text{id})(\mu_\#(\partial_{k+\ell}c)) &= ((a \otimes \text{id}) \circ (\partial_{k+1} \otimes \text{id} + (-1)^k \text{id} \otimes \partial_\ell))(\mu_\#c) \\ &= ((\delta^k a) \otimes \text{id})(\mu_\#c) + (-1)^k \partial_\ell((a \otimes \text{id})(\mu_\#c)) \end{aligned}$$

für eine  $k$ -Kokette  $a$  und eine  $(k + \ell)$ -Kette  $c$ . Wir schließen daraus, dass

$$\partial_\ell(c/a) = (-1)^k((\partial_{k+\ell}c)/a - c/(\delta^k a))$$

und analog für das Cappedprodukt

$$\partial_\ell(c \frown a) = (-1)^k((\partial_{k+\ell}c) \frown a - c \frown (\delta^k a)).$$

Die Vorzeichen in diesen Formeln versteht man am besten, indem man sich vorstellt, dass  $\partial$  von rechts auf Ketten wirkt.

- (2) Es seien  $f: X \rightarrow V$  und  $g: Y \rightarrow W$  stetig. Aus der Natürlichkeit der Alexander-Whitney-Abbildung folgt, dass

$$\begin{aligned} ((f \times g)_*c)/a &= (a \otimes \text{id})((\mu \circ (f \times g))_*(c)) = ((a \otimes \text{id}) \circ (f_* \otimes g_*))(\mu_*c) \\ &= g_*(c/(f^*a)) \in H_\bullet(W; M) \end{aligned}$$

für  $c \in H_\bullet(X \times Y; M)$  und  $a \in H^\bullet(X; R)$ . Für das Cappedprodukt gilt entsprechend

$$(f_*c) \frown a = f_*(c \frown (f^*a)) \in H_\bullet(V; M)$$

für  $c \in H_\bullet(X; M)$  und  $a \in H^\bullet(V; R)$ . Analoge Formeln gelten im relativen Fall. Da wir beim Cappedprodukt simultan mit kovarianten und mit kontravarianten Funktoren arbeiten, können wir keine angenehmere Formel für die Natürlichkeit erwarten.

- (3) Wie in Beispiel 3.96 und Bemerkung 4.37 können wir ein Capprodukt für  $a \in C^k(X; R)$  und  $\sigma \in S_{k+\ell}(X)$  auch explizit als

$$\sigma/a = a(\sigma'_k) \cdot \sigma''_\ell \in C_\ell(X; R)$$

angeben. Analoge Formeln gelten im relativen Fall sowie mit Koeffizienten. Danach können wir das Schrägprodukt definieren als

$$c/a = p_{Y*}(c/p_X^*a)$$

für  $a \in H^\bullet(X; R)$ ,  $c \in H_\bullet(X \times Y; M)$ , wobei  $p_X: X \times Y \rightarrow X$  und  $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$  die Produktprojektionen seien.

Analog zur Definition 4.48 eines graduierten Linksmoduls definieren graduierte Rechtsmoduln  $(M^k)_{k \in \mathbb{Z}}$

$$m \cdot (a \cdot b) = (m \cdot a) \cdot b \quad \text{und} \quad m \cdot a \in M^{k+\ell}$$

für alle  $m \in M_\ell$ ,  $a \in A^k$  und  $b \in A$ .

4.53. LEMMA. *Das Capprodukt macht die singuläre Homologie mit Koeffizienten  $M \in \text{Mod}_R$  in natürlicher Weise zu einem unitären Rechtsmodul über der Kohomologiealgebra mit Koeffizienten  $R$ .*

BEWEIS. Wir betrachten hier nur absolute (Ko-)homologie. Analog kann man auch zeigen, dass  $H_\bullet(X, B; M)$  ein  $H^\bullet(X, A; R)$ -Modul ist, falls  $B = B \cup A$ , also  $A \subset B \subset X$ .

Wir betrachten also  $(M^k)_{k \in \mathbb{Z}} = (H_{-k}(X; M))_{k \in \mathbb{Z}}$  mit der umgekehrten Graduierung. Das Capprodukt respektiert diese Graduierung, denn

$$\frown: M^k \otimes_R H^k(X; R) = H_{-\ell}(X; M) \otimes_R H^k(X; R) \longrightarrow H_{-k-\ell}(X; M) = M^{k+\ell}.$$

Um die Moduleigenschaft nachzuweisen, erinnern wir uns zunächst an den Beweis der Assoziativität des Cupproduktes in Lemma 4.38. Aus der Natürlichkeit der Alexander-Whitney-Abbildung ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} ((\mu_\bullet \circ \Delta_{X^*}) \otimes \text{id}) \circ \mu_\bullet \circ \Delta_{X^*} &= ((\mu_\bullet \otimes \text{id}) \circ \mu_\bullet) \circ ((\Delta_X \times \text{id}_X)_* \circ \Delta_{X^*}) \\ &= ((\text{id} \otimes \mu_\bullet) \circ \mu_\bullet) \circ ((\text{id}_X \times \Delta_X)_* \circ \Delta_{X^*}) \\ &= (\text{id} \otimes (\mu_\bullet \circ \Delta_{X^*})) \circ \mu_\bullet \circ \Delta_{X^*} \\ &: C_\bullet(X; M) \longrightarrow C_\bullet(X; R) \otimes_R C_\bullet(X; R) \otimes_R C_\bullet(X; M). \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir für  $c \in H_\bullet(X; M)$  und  $a, b \in H^\bullet(X; R)$ , dass

$$\begin{aligned} c \frown (a \smile b) &= (((a \otimes b) \circ \mu_\bullet \circ \Delta_{X^*}) \otimes \text{id})((\mu_\bullet \circ \Delta_{X^*})(c)) \\ &= ((a \otimes b \otimes \text{id}) \circ ((\mu_\bullet \circ \Delta_{X^*}) \otimes \text{id}) \circ \mu_\bullet \circ \Delta_{X^*})(c) \\ &= ((a \otimes b \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes (\mu_\bullet \circ \Delta_{X^*})) \circ \mu_\bullet \circ \Delta_{X^*})(c) \\ &= ((b \otimes \text{id}) \circ (\mu_\bullet \circ \Delta_{X^*}) \circ (a \otimes \text{id}) \circ (\mu_\bullet \circ \Delta_{X^*}))(c) \\ &= (c \frown a) \smile b, \end{aligned}$$

also ist  $H_\bullet(X; M)$  ein  $H^\bullet(X; R)$ -Rechtsmodul.

Wir betrachten jetzt die Abbildungen  $p_X: X \rightarrow \{*\}$  und  $j_X = (p_X \times \text{id}_X) \circ \Delta_X: X \rightarrow \{*\} \times X$  mit  $j_X(x) = (*, x)$ . Ähnlich wie im Beweis von Lemma 4.38 erhalten wir mit Bemerkung 4.52 (1), dass

$$\begin{aligned} c \frown 1 &= \text{id}_{X^*}((\Delta_{X^*}c)/(p_X^*1)) = ((p_X \times \text{id}_X)_* \circ \Delta_{X^*})(c)/1 \\ &= ((1 \otimes \text{id}) \circ \mu_\bullet \circ j_{X^*})(c) = (1 \otimes \text{id})(\underline{1} \otimes c) = c, \end{aligned}$$

wobei  $\underline{1} \in C_0(*; R) \cong R$  das neutrale Element bezeichne. Also ist  $H_\bullet(X; M)$  ein unitärer Modul. Die Natürlichkeit ergibt sich ebenfalls aus Bemerkung 4.52 (1).  $\square$

4.54. BEMERKUNG. Hinter dem Cup- und dem Cappedprodukt steht ein und dieselbe Abbildung

$$\mu_\bullet \circ \Delta_{X^*}: C_\bullet(X; R) \longrightarrow C_\bullet(X; R) \otimes_R C_\bullet(X; R) .$$

Diese Abbildung ist ein koassoziatives, graduiert kokommutatives Koproduct auf  $C_\bullet(X; R)$ , und die Augmentierung  $\varepsilon: C_0(X; R) \rightarrow R$  aus Bemerkung 3.55 (4) ist eine Koeins. Aus diesen Eigenschaften ergeben sich alle Eigenschaften des Cup- und des Cappedproduktes in den Lemmata 4.38 und 4.53. Da die Homologie teilweise angenehmere Eigenschaften als die Kohomologie besitzt, könnte man anstelle der Kohomologiealgebra die Homologie-Koalgebra betrachten. Sie ist allerdings weniger anschaulich.

Es sei  $A \subset X$  eine Teilmenge. Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir  $(X|A)$  für das Paar  $(X, X \setminus A)$ . Wegen des Ausschneidungsaxioms 3.59 (3) beziehungsweise 3.11 (3) gilt

$$H_\bullet(X|A; M) \cong H_\bullet(U|A; M) \quad \text{und} \quad H^\bullet(X|A; M) \cong H^\bullet(U|A; M)$$

für jede Umgebung  $U \subset X$  von  $\bar{A}$ , daher sprechen wir auch von der *lokalen Homologie* beziehungsweise Kohomologie von  $X$  bei  $A$ . Wir schreiben  $(X|x_0)$  für  $(X|\{x_0\}) = (X, X \setminus \{x_0\})$ .

4.55. BEISPIEL. Es sei  $N$  eine topologische Mannigfaltigkeit, siehe Definition 1.82, und  $p \in N$ . Dann hat  $p$  eine Umgebung  $U \cong \mathbb{R}^n$  in  $N$ . Wie oben folgt mit Ausschneidung, dass

$$H_k(N|p; M) \cong H_k(\mathbb{R}^n|0; M) \cong H_k(I^n, \partial(I^n); M) \cong \begin{cases} M & \text{für } k = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also erkennt lokale Homologie die Dimension einer Mannigfaltigkeit.

4.56. BEMERKUNG. (1) Jeder lineare Automorphismus  $g \in GL(n, \mathbb{R})$  induziert eine Abbildung  $g: (\mathbb{R}^n|0)$ , und je nach dem Vorzeichen der Determinante ist  $g$  homotop zur Identität oder zur Spiegelung an einer Hyperebene. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_n(\mathbb{R}^n|0; R) & \xleftarrow{\cong} & H_n(D^n, S^{n-1}; R) & \xrightarrow[\cong]{\partial} & H_{n-1}(S^{n-1}; R) \\ g_* \downarrow & & g_* \downarrow & & g_* \downarrow \\ H_n(\mathbb{R}^n|0; R) & \xleftarrow{\cong} & H_n(D^n; S^{n-1}; R) & \xrightarrow[\cong]{\partial} & H_{n-1}(S^{n-1}; R) \end{array}$$

für den Fall, dass  $g \in O(n)$  eine Isometrie ist. Nach Bemerkung 3.21 (7) wirkt  $g_*$  wie der Abbildungsgrad  $\deg g = \det g \in \{1, -1\}$ .

- (2) Es sei jetzt  $R = \mathbb{Z}$  und  $o \in H_n(\mathbb{R}^n|0) \cong \mathbb{Z}$  ein Erzeuger. Dann ist  $g$  genau dann *orientierungserhaltend*, wenn  $g_*(o) = o$ , und *orientierungsumkehrend*, wenn  $g_*(o) = -o$  gilt. Wir können also einen Erzeuger  $o_0 = o$  von  $H_n(\mathbb{R}^n|0)$  als *lokale Orientierung* von  $\mathbb{R}^n$  bei 0 auffassen.
- (3) Es sei  $B_r$  ein offener Ball von endlichem Radius  $r > 0$  um 0. Indem man die langen exakten Sequenzen der Paare  $(\mathbb{R}^n|0)$ ,  $(\mathbb{R}^n|x)$  und  $(\mathbb{R}^n|B_r)$  vergleicht und Homotopieinvarianz ausnutzt, erhält man Isomorphismen

$$H_\bullet(\mathbb{R}^n|0) \xleftarrow{\cong} H_\bullet(\mathbb{R}^n|B_r) \xrightarrow{\cong} H_\bullet(\mathbb{R}^n|x)$$

für alle Punkte  $x \in B_r$ . Indem man  $r$  hinreichend groß wählt, kann man jeden Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  auf diese Weise erreichen. Eine lokale Orientierung  $o_0 \in H_n(\mathbb{R}^n|0)$  von  $\mathbb{R}^n$  bei 0 legt auf diese Weise lokale Orientierungen  $o_x \in H_n(\mathbb{R}^n|x)$  von  $\mathbb{R}^n$  an allen Punkten  $x \in \mathbb{R}^n$  fest.

- (4) Wir fixieren eine lokale Orientierung von  $\mathbb{R}$  bei 0. Mit der relativen Künneth-Formel erhalten wir induktiv lokale Orientierungen von  $\mathbb{R}^n$  bei 0, denn die Sequenz

$$0 \rightarrow H_1(\mathbb{R}|0) \otimes_{\mathbb{Z}} H_n(\mathbb{R}^n|0) \rightarrow H_{n+1}(\mathbb{R}^{n+1}|0) \rightarrow \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{\bullet}(\mathbb{R}|0), H_{\bullet}(\mathbb{R}^n|0))_n \rightarrow 0$$

ist exakt und der Torsionsterm verschwindet, da  $H_{\bullet}(\mathbb{R}|0)$  frei ist. Die so gewonnenen lokalen Orientierungen  $o_0, o_x$  fixieren wir für den Rest dieses Abschnitts.

4.57. DEFINITION. Eine *Orientierung*  $o$  einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $N$  ist die Auswahl einer lokalen Orientierung  $o_p \in H_n(N|p)$  für alle  $p \in N$ , so dass jeder Punkt  $p \in N$  eine Umgebung  $U \subset N$  mit einem Homöomorphismus  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  besitzt, mit  $\varphi_* o_p = o_{\varphi(p)} \in H_n(\mathbb{R}^n|\varphi(p))$  für alle  $q \in U$ .

Eine Mannigfaltigkeit heißt *orientierbar*, wenn sie eine Orientierung besitzt.

4.58. BEMERKUNG. Sei wieder  $N$  eine Mannigfaltigkeit und

$$\tilde{N} = \{ o_p \in H_n(N|p) \mid p \in N, o_p \text{ lokale Orientierung} \} .$$

Zu  $p \in N$  sei  $U \subset N$  eine offene Umgebung und  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Homöomorphismus. Wir betrachten die Teilmengen

$$U_{\pm} = \{ o_p \mid p \in U \text{ und } \varphi_* o_p = \pm o_{\varphi(p)} \} \subset \tilde{N} ,$$

wobei  $o = (o_x)_{x \in \mathbb{R}^n}$  die Standard-Orientierung des  $\mathbb{R}^n$  sei, und die Abbildungen  $\varphi_{\pm}: U_{\pm} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi_{\pm}(o_p) = \varphi(p)$ . Wir versehen  $\tilde{N}$  mit der Topologie, die genau diese Mengen als Basis hat. Dadurch wird  $\tilde{N}$  zu einer Mannigfaltigkeit und die Abbildung

$$\pi: \tilde{N} \rightarrow N \quad \text{mit} \quad \pi(o_p) = p$$

zu einer Überlagerung, denn zu einer Menge  $U$  wie oben erhält man eine lokale Trivialisierung

$$\pi^{-1}(U) = U_+ \sqcup U_- \cong U \times \{1, -1\} .$$

Man nennt  $\tilde{N}$  die *Orientierungsüberlagerung* von  $N$ .

4.59. BEMERKUNG. Es sei jetzt  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins. Das universelle Koeffiziententheorem 3.82 gilt auch für relative Homologie, und wir erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H_n(N|p) \otimes_{\mathbb{Z}} R \xrightarrow{\cong} H_n(N|p; R) \longrightarrow \underbrace{\text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(N|p), R)}_{=0} \longrightarrow 0 ,$$

da  $H_{n-1}(N|p) \cong H_{n-1}(\mathbb{R}^n|p)$  frei ist. Insbesondere gilt

$$H_n(N|p; R) \cong H_n(N|p) \otimes_{\mathbb{Z}} R \cong H_n(\mathbb{R}^n|p) \otimes_{\mathbb{Z}} R \cong R ,$$

und wir nennen einen Erzeuger  $o_p \in H_n(N|p; R)$  eine lokale  $R$ -Orientierung. Eine globale Orientierung ist eine Familie  $(o_p)_{p \in N}$  lokaler Orientierungen, so dass zu jedem  $p$  eine Umgebung  $U$  von  $p$  in  $N$ , ein Homöomorphismus  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  und ein Erzeuger von  $R$  als  $R$ -Modul, also ein invertierbares Element  $r \in R^{\times}$  existiert, so dass

$$\varphi_*(o_p) = o_{\varphi(p)} \otimes r \in \mathbb{Z} \otimes_R R \cong H_n(\mathbb{R}^n|\varphi(p); R)$$

für die Standard-Orientierung des  $\mathbb{R}^n$ . Wir unterscheiden zwei Fälle.

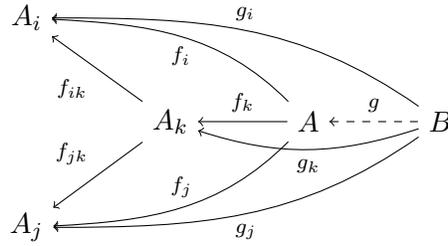
- (1) Es sei  $1 + 1 = 0$  in  $R$ , zum Beispiel sei  $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Dann gilt  $r = -r$  für alle  $r \in R^{\times}$  wie oben und daher  $o_x \otimes r = (-o_x) \otimes r$ . Wir definieren eine  $R$ -Orientierung durch

$$o_p = \varphi_*^{-1}(o_{\varphi(p)} \otimes r) \in H_n(N|p; R) .$$

In diesem Fall ist jede Mannigfaltigkeit  $R$ -orientierbar.



Man sagt,  $\mathcal{C}$  habe *Limiten*, wenn für jedes inverse System ein Limes in  $\mathcal{C}$  existiert.



4.62. BEMERKUNG. Wir sammeln elementare Eigenschaften dieser Konstruktion.

- (1) Es sei  $J \subset I$  eine Teilmenge, so dass für alle  $i \in I$  ein  $j \in J$  mit  $i \leq j$  existiert. Dann existiert insbesondere zu  $j, k \in J$  ein  $\ell \in J$  mit  $j \leq \ell, k \leq \ell$ . Insbesondere ist die Einschränkung  $(A_j)_{j \in J}$  wieder ein gerichtetes System. Sei  $A$  ein Kolimes mit Abbildungen  $f_j: A_j \rightarrow A$  für alle  $j \in J$ , dann ist  $A$  auch ein Kolimes des ursprünglichen Systems, wobei wir  $f_i = f_j \circ f_{ij}$  für ein  $j \in J$  mit  $i \leq j$  setzen. Die analoge Überlegung funktioniert auch für Limiten.

Im einfachsten Fall besteht  $J$  nur aus einem Element  $\{j_0\}$  mit  $i \leq j_0$  für alle  $i \in I$ , dann ist  $A_{j_0}$  ein Kolimes.

- (2) Wenn eine Kategorie  $\mathcal{C}$  direkte Summen hat und Objekte von  $\mathcal{C}$  als Mengen dargestellt werden können, von denen gewisse Quotienten gebildet werden können, dann können wir einen Kolimes eines gerichteten Systems  $(A_i)_{i \in I}$  angeben als

$$\lim_{\rightarrow} A_i = \bigoplus_{i \in I} A_i / \sim,$$

wobei  $a_i \sim a_j$  für  $a_i \in A_i, a_j \in A_j$ , wenn es ein  $k \in J$  mit  $i \leq k, j \leq k$  gibt, so dass  $f_{ik}(a_i) = f_{jk}(a_j) \in A_k$ . Wir erhalten Abbildungen  $A_i \rightarrow \lim_{\rightarrow} A_i$ , indem wir ein Element auf die Äquivalenzklasse von  $\iota_i a_i \in \bigoplus_{i \in J} A_i$  abbilden.

Sei  $B$  ein weiteres Objekt mit Morphismen  $g_i: A_i \rightarrow B$  wie in Definition 4.60 (2), dann erhalten wir eine eindeutige Abbildung  $g: \bigoplus_{i \in I} A_i \rightarrow B$  nach der universellen Eigenschaft des Koproductes. Diese Abbildung ist konstant auf Äquivalenzklassen, wenn  $g_j \circ f_{ij} = g_i$  für alle  $i \leq j$ , induziert also wie gefordert eine eindeutige Abbildung

$$g: \lim_{\rightarrow} A_i = \bigoplus_{i \in I} A_i / \sim \longrightarrow B \text{ mit } g_i = g \circ f_i \text{ für alle } i \in I.$$

- (3) Wenn eine Kategorie  $\mathcal{C}$  direkte Produkte hat und Objekte als Mengen dargestellt werden können, von denen man gewisse Untermengen betrachten darf, dann können wir analog einen Limes eines inversen Systems  $(A_i)_{i \in I}$  angeben als

$$\lim_{\leftarrow} A_i = \left\{ (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i \mid f_{ij}(a_j) = a_i \text{ für alle } i \leq j \right\}.$$

Dann induzieren die Projektionen  $\pi_i: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_i$  Abbildungen  $f_i: \lim_{\leftarrow} A_i \rightarrow A_i$  mit  $(a_i)_{i \in I} \mapsto a_i$ .

Sei  $B$  ein weiteres Objekt mit Morphismen  $g_i: B \rightarrow A_i$  wie in Definition 4.61 (2), dann erhalten wir eine eindeutige Abbildung  $g: B \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$  mit  $g_i = \pi_i \circ g$  nach der universellen Eigenschaft des Produktes, und die Bilder von  $g$  liegen in  $\lim_{\leftarrow} A_i$ , wenn  $f_{ij} \circ g_i = g_j$  für alle  $i \leq j$ .

- (4) Wie immer folgt aus den universellen Eigenschaften in den Definitionen 4.60 und 4.61, dass Kolimiten und Limiten bis auf eindeutige Isomorphismen in  $\mathcal{C}$  eindeutig sind.

Als Beispiel einer Menge mit Halbordnung betrachten wir die Menge  $\mathcal{K}(X)$  aller kompakten Teilmengen  $K$  eines lokalkompakten Hausdorff-Raumes  $X$  mit der Halbordnung  $\subset$ . Zu je zwei kompakten Teilmengen  $K, L \subset X$  ist  $K \cup L$  wieder kompakt, und natürlich gilt  $K \subset K \cup L$ ,  $L \subset K \cup L$ . Als Beispiel eines durch  $\mathcal{K}(X)$  gerichteten Systems betrachten wir die lokale Kohomologie  $(H^\bullet(X|K; M))_{K \in \mathcal{K}(X)}$  mit Koeffizienten  $M \in \text{Mod}_R$ . Falls  $K \subset L$ , existiert eine Abbildung

$$f_{K,L}: H^\bullet(X|K; M) = H^\bullet(X, X \setminus K; M) \longrightarrow H^\bullet(X, X \setminus L; M) = H^\bullet(X|L; M) ,$$

und natürlich gilt  $f_{K,L} \circ f_{H,K} = f_{H,L}$  für kompakte Teilmengen  $H \subset K \subset L \subset X$ .

4.63. DEFINITION. Es sei  $X$  ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Die *Kohomologie mit kompaktem Träger* mit Koeffizienten  $M \in \text{Mod}_R$  ist der Kolimes

$$H_c^\bullet(X; M) = \varinjlim H^\bullet(X|K; M)$$

des gerichteten Systems  $(H^\bullet(X|K; M))_{K \in \mathcal{K}(X)}$ .

4.64. BEMERKUNG. Wir sammeln einige elementare Eigenschaften.

- (1) Wir betrachten analog den Komplex

$$C_c^\bullet(X; M) = \varinjlim C^\bullet(X|K; M) .$$

Nach Bemerkung 4.62 (2) wird jedes Element  $\alpha \in H_c^\bullet(X; M)$  induziert von einem Element  $\alpha_K \in H^\bullet(X|K; M)$  für ein Kompaktum  $K \in \mathcal{K}(X)$ , und dargestellt durch eine Kokette  $a_K \in C^\bullet(X|K; M)$ . Wenn  $\alpha = 0 \in H_c^\bullet(X; M)$ , dann existiert ein Kompaktum  $L \supset K$ , so dass  $\alpha_L = f_{K,L}(\alpha_K) = 0 \in H^\bullet(X|L; M)$ . Also existiert  $b_L \in C^\bullet(X|L; M)$  mit  $\delta b_L = f_{K,L}(a_K) = a_K$ . Es folgt

$$H_c^\bullet(X; M) = H^\bullet(C_c^\bullet(X; M), \delta) .$$

Insbesondere wird jede Klasse  $\alpha \in H_c^\bullet(X; M)$  durch eine Kokette  $a_K \in C^\bullet(X|K; M) = C^\bullet(X, X \setminus K; M)$  repräsentiert, und  $a_K$  verschwindet auf allen Simplizes, die  $K$  nicht treffen. Man sagt, dass  $a_K$  von der kompakten Menge  $K$  *getragen* wird. Daher der Name „Kohomologie mit kompaktem Träger“.

- (2) Wenn  $X$  kompakt ist, folgt aus Bemerkung 4.62 (1), dass

$$H_c^\bullet(X; M) = H^\bullet(X|X; M) = H^\bullet(X; M) ,$$

also stimmt die kompakt getragene Kohomologie hier mit der gewöhnlichen Kohomologie überein.

- (3) Kohomologie mit kompaktem Träger ist ein kovarianter Funktor auf der Kategorie der lokalkompakten Hausdorff-Räume mit den offenen Einbettungen als Morphismen. Eine Einbettung  $i: X \rightarrow Y$  heißt *offen*, wenn im  $i \subset Y$  offen ist und  $X$  die Unterraumtopologie trägt, siehe Definition 1.45. Insbesondere sind Bilder offener Mengen unter  $f$  offen, das heißt, das  $i$  eine sogenannte *offene Abbildung* ist.

Es sei also  $K \subset X$  kompakt und  $i: X \hookrightarrow Y$  eine offene Einbettung. Wir wenden das Ausschneidungsaxiom 4.11 (3) auf  $Y = X \cup (Y \setminus K)$  an und erhalten einen Isomorphismus

$$i^*: H^\bullet(Y|K; M) \xrightarrow{\cong} H^\bullet(X|K; M) .$$

Die Inversen dieser Morphismen liefern Abbildungen

$$g_K: H^\bullet(X|K; M) \xrightarrow{\cong} H^\bullet(Y|K; M) \longrightarrow H_c^\bullet(Y; M) ,$$

die mit den Abbildungen  $f_{K,L}: H^\bullet(X|K; M) \rightarrow H^\bullet(X|L; M)$  für  $K \subset L$  kompatibel sind. Also liefert die universelle Eigenschaft des Kolimes eine eindeutige Abbildung

$$i_!: H_c^\bullet(X; M) \longrightarrow H_c^\bullet(Y; M) .$$

Man überzeugt sich leicht, dass  $i_! \circ j_! = (i \circ j)_!$  für die Verkettung offener Einbettungen gilt.

- (4) Sei jetzt  $f: Y \rightarrow X$  *eigentlich*, das heißt,  $f^{-1}(K) \subset Y$  ist kompakt für alle  $K \in \mathcal{K}(X)$ . Dann erhalten wir mit den  $f_{K,L}$  kompatible Abbildungen

$$f^*: H^\bullet(X|K; M) \longrightarrow H^\bullet(Y|f^{-1}(K); M) ,$$

und daher auch eine Abbildung

$$f^*: H_c^\bullet(X; M) \longrightarrow H_c^\bullet(Y; M) .$$

Für eigentliche Abbildung verhält sich Kohomologie mit kompaktem Träger also wie ein kontravarianter Funktor.

- (5) Kohomologie mit kompaktem Träger ist nicht homotopieinvariant. Sei etwa  $X = \mathbb{R}^n$ . Zu jedem Kompaktum  $K \subset \mathbb{R}^n$  existiert ein Radius  $r > 0$ , so dass  $K \subset \overline{B_r(0)}$ , also folgt

$$H_c^\bullet(\mathbb{R}^n; M) = \varinjlim H^\bullet(\mathbb{R}^n|\overline{B_r(0)}; M)$$

nach Bemerkung 4.62 (1). Für  $r < s$  gilt

$$H^k(\mathbb{R}^n|\overline{B_r(0)}; M) \xrightarrow{\cong} H^k(\mathbb{R}^n|\overline{B_s(0)}; M) = \begin{cases} M & k = n , \\ 0 & \text{sonst} , \end{cases}$$

also folgt

$$H_c^k(\mathbb{R}^n; M) \cong \begin{cases} M & \text{falls } k = n , \\ 0 & \text{sonst} , \end{cases}$$

aber alle  $\mathbb{R}^n$  sind homotopieäquivalent.

- (6) Es sei  $\alpha_K \in H^\bullet(X|K; R)$ ,  $\beta \in H^\bullet(X; R)$ , dann erhalten wir  $\alpha_K \smile \beta \in H^\bullet(X|K; R)$ . Sei  $j: (X|L) \rightarrow (X|K)$  für  $K, L \in \mathcal{K}(X)$ ,  $K \subset L$ , dann folgt

$$j^*(\alpha_K \smile \beta) = (j^*\alpha_K) \smile (j^*\beta) = (j^*\alpha_K) \smile \beta ,$$

also erhalten wir ein Cupprodukt

$$\smile: H_c^\bullet(X; R) \otimes_R H^\bullet(X; R) \longrightarrow H_c^\bullet(X; R) ,$$

und wie in Lemma 4.38 wird  $H_c^\bullet(X; R)$  dadurch zu einem  $H^\bullet(X; R)$ -Rechtsmodul.

4.65. BEMERKUNG. Wir betrachten auch die *Homologie mit eigentlichem Träger*

$$H'_\bullet(X; R) = \varprojlim H_\bullet(X|K; R) .$$

- (1) Sei  $c \in H'_\bullet(X; R)$ , dann existiert zu jedem Kompaktum  $K$  ein Element  $c_K = c|_K \in H_\bullet(X|K; R)$ , und für  $K \subset L$  ist  $c_K = c_L|_K$  das Bild von  $c_L$  unter der natürlichen Abbildung

$$H_\bullet(X|L; R) = H_\bullet(X, X \setminus L; R) \longrightarrow H_\bullet(X, X \setminus K; R) = H_\bullet(X|K; R) .$$

Insbesondere erhalten wir Elemente  $c_\chi \in H_\bullet(X|_p; R)$  für alle  $\chi = X$ .

- (2) Wenn  $X$  bereits kompakt ist, folgt wieder

$$H'_\bullet(X; M) = H_\bullet(X; M) .$$

- (3) Es sei  $c \in H'(X; R)$  und  $\alpha \in H_c^\bullet(X; R)$  das Bild von  $\alpha_K \in H^\bullet(X|K; R)$ . Dann erhalten wir

$$c_K \frown \alpha_K \in H_\bullet(X; R).$$

Sei  $L \subset X$  kompakt mit  $K \subset L$ , dann bezeichne  $j: (X|L) \rightarrow (X|K)$  die natürliche Abbildung. Aus der Natürlichkeit des Cappedproduktes in Bemerkung 4.52 (2) folgt

$$c_K \frown \alpha_K = (j_* c_L) \frown \alpha_K = j_*(c_L \frown (j^* \alpha_K)) = c_L \frown (j^* \alpha_K)$$

Also erhalten wir ein wohldefiniertes Cappedprodukt

$$\frown: H'_\bullet(X; R) \otimes_R H_c^\bullet(X; R) \longrightarrow H_\bullet(X; R).$$

Dieses Cappedprodukt ist ein  $H^\bullet(X; R)$ -Modulhomomorphismus, denn wie in Lemma 4.53 gilt für  $c \in H'_\bullet(X; R)$ ,  $\alpha \in H_c^\bullet(X; R)$  und  $\beta \in H^\bullet(X; R)$ , dass

$$c \frown \underbrace{(\alpha \smile \beta)}_{\in H_c^\bullet(X; R)} = \underbrace{(c \smile \alpha)}_{H_\bullet(X; R)} \smile \beta.$$

- (4) Analog zu Bemerkung 4.64 (3) und (4) erhalten wir Abbildungen

$$j^!: H'_\bullet(V; R) \rightarrow H'_\bullet(U; R) \quad \text{und} \quad f_*: H'_\bullet(X; R) \rightarrow H'_\bullet(Y; R),$$

wobei  $j: U \rightarrow V$  eine offene Einbettung und  $f: X \rightarrow Y$  eine eigentliche Abbildung ist.

- (5) Wie in Bemerkung 4.64 (5) ist auch Homologie mit eigentlichem Träger nicht homotopieinvariant. Als Beispiel betrachten wir wieder

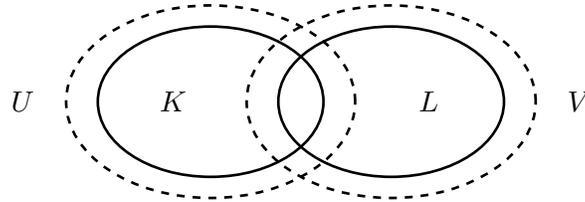
$$H'_k(\mathbb{R}^n; M) \cong H_k(\mathbb{R}^n | \overline{B_r(0)}) \cong \begin{cases} M & \text{falls } k = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die folgende Überlegung ist im Beweis der Poincaré-Dualität sehr hilfreich. Da der Koeffizientenring  $R$  keine Rolle spielt, lassen wir ihn weg.

4.66. PROPOSITION. *Es sei  $W = U \cup V$  ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, und  $U, V$  seien offen. Es sei  $c_W = H'_\bullet(W)$  und  $c_U \in H'_\bullet(U)$ ,  $c_V \in H'_\bullet(V)$  und  $c_{U \cap V} \in H'_\bullet(U \cap V)$  die Bilder von  $c_W$ , dann kommutiert das Diagramm*

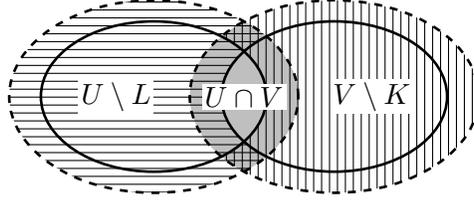
$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_c^k(U \cap V) & \longrightarrow & H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) & \longrightarrow & H_c^k(U \cup V) \xrightarrow{\delta} H_c^{k+1}(U \cap V) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow c_{U \cap V} \frown & & c_U \frown \downarrow \oplus c_V \frown & & \downarrow c_W \frown & & \downarrow c_{U \cap V} \frown \\ \dots & \longrightarrow & H_{n-k}(U \cap V) & \longrightarrow & H_{n-k}(U) \oplus H_{n-k}(V) & \longrightarrow & H_{n-k}(U \cup V) \xrightarrow{\partial} H_{n-k}(U \cap V) \longrightarrow \dots \end{array}$$

bis auf das Vorzeichen und hat exakte Zeilen.



BEWEIS. Die untere Zeile ist die Mayer-Vietoris-Sequenz aus Folgerung 3.53. Um die obere Zeile zu verstehen, seien zunächst  $K \subset U$  und  $L \subset V$  kompakt. Wir wählen eine offene Überdeckung  $\mathcal{U} =$

$\{U \setminus L, V \setminus K, U \cap V\}$  von  $W$ .



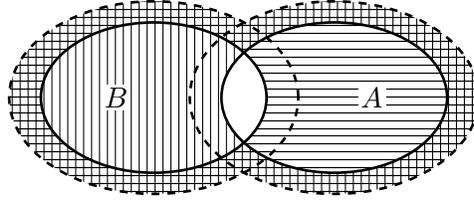
Wir benutzen die baryzentrische Unterteilung wie im Beweis von Satz 4.12 und betrachten ab sofort nur noch Ketten und Koketten zur Menge der feinen Simplexes

$$S_{\bullet}^{\mathcal{U}} = S_{\bullet}(U \setminus L) \cup S_{\bullet}(V \setminus K) \cup S_{\bullet}(U \cap V).$$

Es sei  $A = W \setminus K$  und  $B = W \setminus L$ , dann ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow C_{\mathcal{U}}^{\bullet}(W, A + B) \longrightarrow C_{\mathcal{U}}^{\bullet}(W, A) \oplus C_{\mathcal{U}}^{\bullet}(W, B) \xrightarrow{\bar{\quad}} C_{\mathcal{U}}^{\bullet}(W, A \cap B) \longrightarrow 0$$

exakt, dabei seien  $C_{\mathcal{U}}^{\bullet}(W, A + B)$  die Koketten, die auf  $S_{\bullet}^{\mathcal{U}}(A) \cup S_{\bullet}^{\mathcal{U}}(B) \subset S_{\bullet}^{\mathcal{U}}(W)$  verschwinden.



Denn sei etwa  $h \in C_{\mathcal{U}}^{\bullet}(W, A \cap B)$ , dann konstruieren wir  $f \in C_{\mathcal{U}}^{\bullet}(W, A)$  und  $g \in C_{\mathcal{U}}^{\bullet}(W, B)$  durch

$$f(\sigma) = \begin{cases} h(\sigma) & \sigma \notin S_{\bullet}^{\mathcal{U}}(A), \\ 0 & \sigma \in S_{\bullet}^{\mathcal{U}}(A) \end{cases} \quad \text{und} \quad g(\sigma) = \begin{cases} 0 & \sigma \notin S_{\bullet}^{\mathcal{U}}(A), \\ -h(\sigma) & \sigma \in S_{\bullet}^{\mathcal{U}}(A). \end{cases}$$

Für  $\sigma \in S_{\bullet}^{\mathcal{U}}(A) \cap S_{\bullet}^{\mathcal{U}}(B) = S_{\bullet}^{\mathcal{U}}(A \cap B)$  ist  $g(\sigma) = -h(\sigma) = 0$ , so dass  $g \in C_{\mathcal{U}}^{\bullet}(W, B)$  und  $f - g = h$ . Falls  $f - g = 0$ , verschwindet  $f = g$  auf  $S_{\bullet}^{\mathcal{U}}(A) \cup S_{\bullet}^{\mathcal{U}}(B)$ , also gilt  $f = g \in C_{\mathcal{U}}^{\bullet}(W, A + B)$ . Die Homologie des linken Komplexes passt nach dem Schlangenlemma 3.44 in das Diagramm

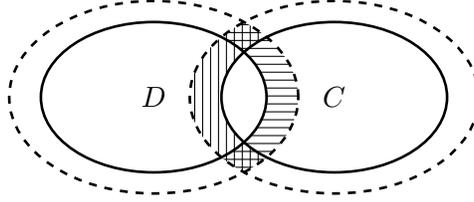
$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^{k-1}(C_{\mathcal{U}}^{\bullet}(A) + C_{\mathcal{U}}^{\bullet}(B)) & \xrightarrow{\delta} & H^k(C_{\mathcal{U}}^{\bullet}(W; A + B)) & \longrightarrow & H^k(W) \longrightarrow \dots \\ & & \cong \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ \dots & \longrightarrow & H^{k-1}(A \cup B) & \xrightarrow{\delta} & H^k(W, A \cup B) & \longrightarrow & H^k(W) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Der linke Pfeil ist ein Isomorphismus wie im Beweis des Ausschneidungsaxioms in Satz 4.12. Also ist nach dem Fünferlemma 3.56 auch der mittlere Pfeil ein Isomorphismus. Aus der obigen Sequenz folgt also die Exaktheit der relativen Mayer-Vietoris-Sequenz in der oberen Zeile des Diagramms in der Proposition.

Als nächstes sei  $c_{K \cup L} = \sum_{\sigma} r_{\sigma} \cdot \sigma \in C_n^{\mathcal{U}}(W | K \cup L)$  ein  $\mathcal{U}$ -feiner relativer Zykel. Wir definieren

$$c_{K \cap L} = \sum_{\sigma \in S_{\bullet}(U \cap V)} r_{\sigma} \cdot \sigma, \quad c_K = \sum_{\sigma \in S_{\bullet}(U)} r_{\sigma} \cdot \sigma \quad \text{und} \quad c_L = \sum_{\sigma \in S_{\bullet}(V)} r_{\sigma} \cdot \sigma.$$

Weil wir eine  $\mathcal{U}$ -feine Kette gewählt haben, repräsentieren  $c_{K \cap L}$ ,  $c_K$  und  $c_L$  die Bilder von  $C_{K \cup L}$  in  $C_n^{\mathcal{U}}(W|K \cap L)$ ,  $C_n^{\mathcal{U}}(W|K)$  und  $C_n^{\mathcal{U}}(W|L)$ . Wir schreiben kurz  $C = U \cap V \setminus K$  und  $D = U \cap V \setminus L$ .



Mit einem ähnlichen Argument wie oben können wir außerdem erreichen, dass

$$\partial c_{K \cap L} \in C_{n-1}(C) + C_{n-1}(D) \subset C_{n-1}^{\mathcal{U}}(A) + C_{n-1}^{\mathcal{U}}(B),$$

so dass  $c_{K \cap L} \in Z_{\bullet}(U \cap V, C + D)$  ein relativer Zykel ist.

Wir benutzen die  $\mathcal{U}$ -Feinheit noch einmal, um uns zu überlegen, dass

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{U}}^{\bullet}(W, A) &= C_{\mathcal{U}}^{\bullet}(U|K), & C_{\mathcal{U}}^{\bullet}(W, B) &= C_{\mathcal{U}}^{\bullet}(V|L), \\ \text{und} & & C_{\mathcal{U}}^{\bullet}(W, A + B) &= C_{\mathcal{U}}^{\bullet}(U \cap V, C + D), \end{aligned}$$

da beispielsweise ein Simplex, das  $K$  trifft, die Menge  $U = (U \setminus L) \cup (U \cap V)$  nicht verlässt. Jetzt erhalten wir ein Diagramm von (Ko-)Kettenkomplexen.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_{\mathcal{U}}^k(W, A + B) & \longrightarrow & C_{\mathcal{U}}^k(W, A) \oplus C_{\mathcal{U}}^k(W, B) & \xrightarrow{\quad} & C_{\mathcal{U}}^k(W, A \cap B) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & C_{\mathcal{U}}^k(U \cap V, C + D) & \longrightarrow & C_{\mathcal{U}}^k(U|K) \oplus C_{\mathcal{U}}^k(V|L) & \xrightarrow{\quad} & C_{\mathcal{U}}^k(W|K \cup L) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} c_{K \cap L} \frown & & \downarrow (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} c_K \frown \oplus c_L \frown & & \downarrow (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} c_{K \cup L} \frown \\ 0 & \longrightarrow & C_{n-k}^{\mathcal{U}}(U \cap V) & \longrightarrow & C_{n-k}^{\mathcal{U}}(U) \oplus C_{n-k}^{\mathcal{U}}(V) & \xrightarrow{\quad} & C_{n-k}^{\mathcal{U}}(U \cup V) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Hierbei dürfen wir, wieder wegen  $\mathcal{U}$ -Feinheit, den Komplex  $C_{\bullet}^{\mathcal{U}}(U) + C_{\bullet}^{\mathcal{U}}(V)$  durch  $C_{\bullet}^{\mathcal{U}}(U \cup V)$  ersetzen.

Um zu sehen, dass die Quadrate in der unteren Zeile kommutieren, betrachten wir exemplarisch das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} C_{\mathcal{U}}^{\bullet}(U|K) & \xleftarrow{\quad i^* \quad} & C_{\mathcal{U}}^{\bullet}(W, A) & \xrightarrow{\quad j^* \quad} & C_{\mathcal{U}}^{\bullet}(W|K \cup L) \\ \downarrow c_K \frown & & \downarrow c_K \frown & & \downarrow c_{K \cup L} \frown \\ C_{\bullet}^{\mathcal{U}}(U) & \xrightarrow{\quad i_* \quad} & C_{\bullet}^{\mathcal{U}}(W) & \xleftarrow{\quad j_* \quad} & C_{\bullet}^{\mathcal{U}}(W) \end{array}$$

Nach der Natürlichkeitsaussage in Bemerkung 4.52 (2) folgt für  $\alpha \in C_{\mathcal{U}}^{\bullet}(U|K)$ , dass

$$\begin{aligned} c_{K \cup L} \frown (j^*(i^*)^{-1}\alpha) &= j_*(c_{K \cup L} \frown (j^*\alpha)) = (j_*c_{K \cup L}) \frown \alpha = c_K \frown \alpha \\ &= (i_*c_K) \frown \alpha = i_*(c_K \frown i^*\alpha) = j_*^{-1}i_*(c_K \frown \alpha). \end{aligned}$$

Damit kommutiert ein Summand im rechten unteren Quadrat. Analog wird Kommutativität im Rest der unteren Reihe bewiesen.

Wenn wir jetzt noch zeigen, dass die betrachteten Capprodukte (Ko-)Kettenabbildungen sind, folgt der Satz schließlich aus der Natürlichkeitsaussage im Schlangenlemma 3.44. Dabei dürfen wir uns nicht daran stören, dass wir Ketten- und Kokettenkomplexe zueinander in Beziehung setzen.

Wir könnten beispielsweise wie in Lemma 4.53 die Graduierung auf der Homologie umkehren. Da  $c_K$  ein relativer Zykel ist, folgt beispielsweise für  $\alpha \in C_U^\bullet(U|K)$  mit Bemerkung 4.52 (1), dass

$$(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \partial(c \frown \alpha) = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2} + k} \left( \underbrace{(\partial c)}_{\in C_U^k(U \setminus K)} \frown \alpha - c \frown (\delta \alpha) \right) = (-1)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}} c \frown (\delta \alpha).$$

Also ist das obige Diagramm Teil eines kommutativen Diagramms von Kettenabbildungen, und das Schlangenlemma liefert ein Diagramm mit exakten Mayer-Vietoris-Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^k(U \cap V|K \cap L) & \longrightarrow & H^k(U|K) \oplus H^k(U|L) & \longrightarrow & H^k(U \cup V|K \cup L) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow c_{K \cap L} \frown & & c_K \frown \downarrow \oplus c_L \frown & & \downarrow c_{K \cup L} \frown \\ \dots & \longrightarrow & H_{n-k}(U \cap V) & \longrightarrow & H_{n-k}(U) \oplus H_{n-k}(V) & \longrightarrow & H_{n-k}(U \cup V) \longrightarrow \dots \end{array}$$

das bis auf das Vorzeichen kommutiert.

Wir haben bereits in Bemerkung 4.65 (3) gesehen, dass Capprodukte mit (Ko-)Limiten verträglich sind, so dass das Diagramm in der Proposition existiert und nach wie vor bis auf das Vorzeichen kommutiert. Es bleibt zu zeigen, dass Exaktheit im Limes erhalten bleibt. Für die Indexmenge schreiben wir kurz  $I = \mathcal{K}(U) \times \mathcal{K}(V)$  mit

$$i = (K, L) \leq j = (K', L') \iff K \subset K' \text{ und } L \subset L'.$$

Für alle  $i \in I$  sei die Sequenz

$$\dots \rightarrow H_i'^k \xrightarrow{p_i^k} H_i^k \xrightarrow{q_i^k} H_i''^k \xrightarrow{\delta^k} H_i'^{k+1} \rightarrow \dots$$

exakt. Im Kolimes erhalten wir sicherlich einen Komplex. Also brauchen wir nur Exaktheit zu prüfen. Sei etwa  $\alpha \in \ker q^k$ . Dann existiert ein  $i \in I$ , so dass  $\alpha$  durch  $\alpha_i \in H_i^k$  repräsentiert wird, und ein  $j \in I$  mit  $i \leq j$ , so dass  $q_j^k(\alpha_j) = 0$ , wobei  $\alpha_j = f_{ij}(\alpha_i)$ . Also existiert  $\beta_j \in H_j^k$  mit  $p_j^k \beta_j = \alpha_j$ . Dann folgt  $p^k \beta = \alpha$  im Kolimes, und die Exaktheit bei  $H^k$  ist gezeigt. Ein analoges Argument funktioniert an allen Stellen, und so erhalten wir schließlich die Exaktheit der Mayer-Vietoris-Sequenz mit kompakten Trägern.  $\square$

4.67. DEFINITION. Es sei  $N$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $(o_p)_{p \in N}$  eine  $R$ -Orientierung. Eine Fundamentalklasse von  $(N, o)$  ist eine Klasse  $[N] \in H_n'(M; R)$  mit eigentlichem Träger mit  $[N] \mapsto o_p$  unter der natürlichen Abbildung  $H_n'(M; R) \rightarrow H_n(M|p; R)$  für alle  $p \in N$ .

4.68. SATZ (Poincaré-Dualität). *Es sei  $N$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer  $R$ -Orientierung  $(o_p)_{p \in N}$ .*

- (1) *Dann existiert eine eindeutige Fundamentalklasse  $[N] \in H_n'(N; R)$ , und  $H_k'(N; R) = 0$  für alle  $k > n$ .*
- (2) *Die Familie von Abbildungen*

$$[N] \frown : H_c^k(N; R) \longrightarrow H_{n-k}(N; R)$$

*für  $k \in \mathbb{Z}$  ist ein Isomorphismus von  $H^\bullet(N; R)$ -Moduln.*

BEWEIS. Wir beginnen mit  $N = \mathbb{R}^n$  und einer  $R$ -Orientierung  $(o_x)_{x \in \mathbb{R}^n}$ . Abgesehen von der Existenz einer  $R$ -Orientierung kommt es im folgenden Beweis nicht auf den Koeffizientenring  $R$  an, so dass wir Koeffizienten in der Notation weglassen. Mit Hilfe von Bemerkung 4.56 (3) und Bemerkung 4.65 (5) erhalten wir eine eindeutige Fundamentalklasse  $[\mathbb{R}^n]$ , denn

$$H_n'(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbb{R}^n | \overline{B_r(0)}) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbb{R}^n | x) \cong R$$

für alle  $r \geq 0$  und alle  $x \in \overline{B_r(0)}$ . Es folgt (1) für  $N = \mathbb{R}^n$ .

Zu (2) benutzen wir Bemerkung 4.64 (5) und das universelle Koeffiziententheorem (4.20), wonach

$$H_c^n(\mathbb{R}^n) \xleftarrow{\cong} H^n(\mathbb{R}^n|_x) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_R(H_n(\mathbb{R}^n|_x), R) \cong R,$$

da  $H_{n-1}(\mathbb{R}^n|_x) = 0$ . Es sei  $\alpha_x \in H^n(\mathbb{R}^n|_x)$  und  $\alpha = f_x(\alpha_x) \in H_c^n(\mathbb{R}^n)$ . Es gilt

$$\mu_\bullet \circ \Delta_{\mathbb{R}^n} o_x = o_x \otimes 1 \in H_n(\mathbb{R}^n|_x) \otimes H_0(\mathbb{R}^n),$$

also erhalten wir mit Bemerkung 4.65 (3), dass

$$[N] \frown \alpha = o_x \frown \alpha_x = \alpha_x(o_x) \cdot 1 \in H_0(\mathbb{R}^n) \cong R.$$

Weil wir für  $o_x$  einen Erzeuger von  $H_n(\mathbb{R}^n|_x) \cong R$  gewählt hatten, ist  $[N] \frown$  ein Isomorphismus.

Nach den Bemerkungen 4.64 (6) und 4.65 (3) brauchen wir uns um die  $H^\bullet(N)$ -Modulstruktur keine Sorgen zu machen; es reicht zu zeigen, dass  $[N] \frown$  ein  $R$ -Modul-Isomorphismus ist.

Im nächsten Schritt betrachten wir offene Teilmengen

$$V_\ell = U_1 \cup \dots \cup U_\ell \subset \mathbb{R}^n$$

wobei alle  $U_i$  offen und konvex und somit zu  $\mathbb{R}^n$  homöomorph seien. Für  $\ell = 1$  ist Poincaré-Dualität bereits gezeigt. Es sei also Poincaré-Dualität nach Induktion über  $\ell$  für  $V_{\ell-1}$  und

$$U_\ell \cap V_{\ell-1} = (U_\ell \cap U_1) \cup \dots \cup (U_\ell \cap U_{\ell-1})$$

bereits bewiesen, denn die Mengen  $U_\ell \cap U_i$  sind ebenfalls offen und konvex. Wie in Proposition 4.66 erhalten wir eine Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\dots \longleftarrow H'_n(U_\ell \cap V_{\ell-1}) \xleftarrow{-} H'_n(U_\ell) \oplus H'_n(V_{\ell-1}) \longleftarrow H'_n(V_\ell) \longleftarrow \underbrace{H'_{n+1}(U_\ell \cap V_{\ell-1})}_{=0} \longleftarrow \dots$$

für die Homologie mit eigentlichem Träger. Die Bilder der eindeutigen Fundamentalklassen  $[U_\ell]$  und  $[V_{\ell-1}]$  stimmen auf  $(U_\ell \cap V_{\ell-1})$  nach der Eindeutigkeitsaussage in der Induktionsvoraussetzung überein, also existiert eine eindeutige Fundamentalklasse  $[V_\ell] \in H'_n(V_\ell)$ . Außerdem stehen die höheren  $H'_k(V_\ell)$  zwischen Moduln, die nach Induktion verschwinden, so dass  $H'_k(V_\ell) = 0$  für alle  $k > n$ . Jetzt können wir die Induktion fortsetzen und erhalten (1).

Mit der gleichen Induktion folgt auch (2): Nach Proposition 4.66 gilt

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_c^k(U_\ell) \oplus H_c^k(V_{\ell-1}) & \longrightarrow & H_c^k(V_\ell) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}(U_\ell \cap V_{\ell-1}) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow [U_\ell] \frown \oplus [V_{\ell-1}] \frown & & \downarrow [V_\ell] \frown & & \downarrow [U_\ell \cap V_{\ell-1}] \frown & & \\ \dots & \longrightarrow & H_{n-k}(U_\ell) \oplus H_{n-k}(V_{\ell-1}) & \longrightarrow & H_{n-k}(V_\ell) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-k-1}(U_\ell \cap V_{\ell-1}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Mit dem Fünferlemma 3.56 folgt, dass mit  $[U_\ell] \frown$ ,  $[V_{\ell-1}] \frown$  und  $[U_\ell \cap V_{\ell-1}] \frown$  auch  $[V_\ell] \frown$  ein Isomorphismus ist.

Als nächstes betrachten wir beliebige offene Teilmengen  $V \subset \mathbb{R}^n$ . Da  $\mathbb{R}^n$  eine abzählbare Basis aus konvexen offenen Bällen besitzt, können wir  $V$  als aufsteigende Vereinigung von Mengen  $V_\ell = U_1 \cup \dots \cup U_\ell$  wie im vorigen Schritt schreiben. Jedes Kompaktum  $K \subset U$  ist wegen der Überdeckungseigenschaft bereits in einer der Mengen  $V_\ell$  enthalten. Also gelten (1) und (2) mit dem üblichen Limes-Argument auch für  $V$ .

Im allerletzten Schritt wiederholen wir die vorigen Argumente für offene Teilmengen  $V \subset N$ , wobei wir „konvex“ durch „homöomorph zu einer Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ “ ersetzen. Dabei nutzen wir im letzten Schritt aus, dass  $N$  eine abzählbare Basis besitzt. Also gelten (1) und (2) für alle Mannigfaltigkeiten.  $\square$

4.69. BEMERKUNG. Wir ziehen einige einfache Schlussfolgerungen für zusammenhängende, kompakte  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten  $N$ . Dazu sei  $R$  ein Hauptidealring. Wir benutzen ohne Beweis die Tatsache, dass  $H_\bullet(N; R)$  und  $H^\bullet(N; R)$  endlich erzeugt sind.

- (1) Wenn  $N$  orientierbar ist, erhalten wir aus dem universellen Koeffiziententheorem 4.20 und Poincaré-Dualität, dass

$$\operatorname{rg} H_k(N; R) = \operatorname{rg} H^k(N; R) = \operatorname{rg} H_{n-k}(N; R) = \operatorname{rg} H^{n-k}(N; R)$$

$$\text{und } \operatorname{Tor}_R H_k(N; R) \cong \operatorname{Tor}_R H^{k+1}(N; R) \cong \operatorname{Tor}_R H_{n-k-1}(N; R) \cong \operatorname{Tor}_R H^{n-k}(W; R) ,$$

diese Isomorphismen sind allerdings nicht natürlich. Insbesondere gilt

$$H_0(N; R) \cong H^0(N; R) \cong H_n(N; R) \cong H^n(N; R) \cong R$$

$$\text{und } \operatorname{Tor}_R H^1(N; R) = \operatorname{Tor}_R H_{n-1}(N; R) = 0 .$$

- (2) Wenn  $N$  nicht orientierbar ist, betrachten wir Familien  $(\alpha_p)_{p \in N}$  mit  $\alpha_p \in H_n(N|_p; R)$ , so dass für Karten  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  jeweils  $\varphi_* \alpha_p$  für alle  $p \in U$  von dem gleichen Element in  $H'_n(\mathbb{R}^n; R)$  herkommt. Mit dem gleichen Argument wie in Bemerkung 4.59 finden wir, dass es genau für alle  $r \in R$  mit  $r + r = 0$  eine solche Familie  $(\alpha_p)$  mit  $\alpha_p = r \in R \cong H_n(N|_p; R)$  gibt. Der Beweis von Satz 4.68 (1) liefert dann

$$H_n(N; R) = H'_n(N; R) \cong \{r \in R \mid r + r = 0\} .$$

Für  $R = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  erhalten wir

$$H_n(N, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{für gerade } m, \text{ und} \\ 0 & \text{für ungerade } m . \end{cases}$$

Nach dem universellen Koeffiziententheorem 3.82 für die Homologie gilt

$$0 \longrightarrow \underbrace{H_n(N, \mathbb{Z})}_{=0} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow H_n(N, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \longrightarrow \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(N, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 .$$

Daraus können wir mit dem universellen Koeffiziententheorem 4.20 für die Kohomologie schließen, dass

$$\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(N, \mathbb{Z})) \cong \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}}(H^n(N, \mathbb{Z})) \cong H^n(N, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} .$$

In beiden Fällen gilt außerdem  $H_k(N, R) = H^k(N, R) = 0$  für alle  $k > n$  und alle  $k < 0$ .

Für orientierbare Mannigfaltigkeiten lohnt es sich, die Kohomologiealgebra  $H^\bullet(N; R)$  genauer zu studieren. Wir betrachten zunächst das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} C_\bullet(N) & \xrightarrow{\Delta_{N^*}} & C_\bullet(N \times N) & \xrightarrow{\mu} & C_\bullet(N) \otimes C_0(N) \\ & & \downarrow (\operatorname{id}_N \times p_N)_* & & \downarrow \operatorname{id}_{N^*} \otimes p_{N^*} \\ & & C_\bullet(N \times *) & \xrightarrow{\mu} & C_\bullet(N) \otimes C_0(*) & \xrightarrow{\sim} & C_\bullet(N) \end{array}$$

mit Koeffizienten  $R$ , wobei  $p_N: N \rightarrow \{*\}$  wieder die konstante Abbildung bezeichnet. Analog zum Beweis von Lemma 4.38 ist die Verkettung gerade die Identität auf dem Komplex  $C_\bullet(N)$ . Für alle  $\alpha \in H^\bullet(N; R)$  und  $b \in H_\bullet(N; R)$  folgt

$$p_{N^*}(b \frown \alpha) = (\alpha \otimes 1)(\iota_{N^*} b) = \alpha(b) \in H_0(*; R) \cong R ,$$

dabei bezeichnet  $\alpha(\cdot) \in \operatorname{Hom}_R(H_\bullet(N; R), R)$  gerade das Bild von  $\alpha$  unter der Abbildung im universellen Koeffiziententheorem 4.20.

Wir betrachten das *Schnittprodukt* oder die *Schnittform*

$$H^k(N; R) \otimes_R H^{n-k}(N; R) \xrightarrow{\smile} H^n(N; R) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_R(H_n(N; R), R) \xrightarrow{[N]} R .$$

Die Abbildung lässt sich auch schreiben als

$$\alpha \otimes \beta \longmapsto p_{N^*}([N] \frown (\alpha \smile \beta)) \in H_0(*; R) \cong R .$$

Der Name Schnittprodukt kommt von der dualen Paarung  $H_k(N; R) \otimes H_{n-k}(N; R) \rightarrow R$ , siehe Bemerkung 4.75.

4.70. FOLGERUNG. *Es sei  $N$  eine  $n$ -dimensionale kompakte, zusammenhängende, orientierte Mannigfaltigkeit mit Fundamentalklasse  $[N]$  und  $R$  ein Hauptidealring. Dann ist das Schnittprodukt auf*

$$(H^k(N, R)/\text{Tor}_R H^k(N; R)) \times (H^{n-k}(N, R)/\text{Tor}_R H^{n-k}(N; R))$$

wohldefiniert und nicht ausgeartet. Es gilt

$$(\alpha \smile \beta)[N] = (-1)^{k(n-k)}(\beta \smile \alpha)$$

für alle  $\alpha \in H^k(N; R)$  und alle  $\beta \in H^{n-k}(N; R)$ . Das Schnittprodukt induziert kurze exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_R H^k(N; R) \longrightarrow H^k(N; R) \longrightarrow \text{Hom}_R(H^{n-k}(N; R), R) \longrightarrow 0 .$$

Man überzeugt sich leicht, dass das Torsionsuntermodul im Kern einer jeden linearen Abbildung von einem  $R$ -Modul in den Ring  $R$  liegt. Das Besondere hier ist also zum einen, dass der Kern keine weiteren Elemente enthält, und zum anderen, dass sich jedes Element im dualen Modul als Schnittprodukt mit einer Klasse darstellen lässt.

BEWEIS. Nach dem universellen Koeffiziententheorem 4.20 erhalten wir eine natürliche kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_R(H_{k-1}(N; R), R) \longrightarrow H^k(N; R) \xrightarrow{\varphi} \text{Hom}_R(H_k(N; R), R) \longrightarrow 0 ,$$

wobei  $\varphi$  auf (Ko-)Kettenniveau gegeben wird durch

$$\varphi([\alpha])[b] = \alpha(b) \in R$$

für  $\alpha \in Z^k(N; R) \subset \text{Hom}_R(C_k(N; R), R)$  und  $b \in Z_k(N; R) \subset C_k(N; R)$ .

Mit Hilfe der Poincaré-Dualität erhalten wir eine surjektive Abbildung

$$H^k(N; R) \xrightarrow{\psi} \text{Hom}_R(H^{n-k}(N; R), R) \quad \text{mit} \quad \psi(\alpha)(\beta) = \alpha([N] \smile \beta) = (\beta \smile \alpha)[N] .$$

Für alle  $\beta \notin \text{Tor}_R(H^{n-k}(N; R))$  finden wir ein Element  $\lambda \in \text{Hom}_R(H^{n-k}(N; R), R)$  mit  $\lambda(\beta) \neq 0$ , also auch ein  $\alpha \in H^k(N; R)$  mit  $(\alpha \smile \beta)[M] = 0$ . Indem wir die Rollen von  $\alpha$  und  $\beta$  vertauschen, sehen wir, dass  $\ker \psi \subset \text{Tor}_R(H^k(N; R))$ . Die entgegengesetzte Inklusion ist klar, also folgt

$$\text{Ext}_R(H_{k-1}(N; R), R) \cong \ker \psi = \text{Tor}_R(H^k(N; R)) . \quad \square$$

4.71. BEISPIEL. Wir betrachten den Raum  $Y = S^2 \vee S^4$ . Er hat die gleichen Kohomologiemoduln wie  $X = \mathbb{C}P^2$ , ist aber nicht zu  $X$  homotopieäquivalent, da die Ringstruktur anders ist. In der Tat ist  $Y$  zu keiner kompakten Mannigfaltigkeit  $N$  homotopieäquivalent.

Wäre etwa  $N$  eine zu  $X$  homotopieäquivalente orientierbare  $n$ -dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit, dann wäre  $n = 4$ , da  $H^4(X) \cong \mathbb{Z}$  und  $H^k(X) = 0$  für  $k > 4$ . Aber für einen Erzeuger  $\alpha$  von  $H^2(X)$  wäre  $\alpha \smile \alpha = 0$  im Widerspruch zu Folgerung 4.70.

Wäre  $N$  nicht orientierbar, so wäre  $H^n(N) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  nach Bemerkung 4.69 (2), aber kein Kohomologiemodul von  $Y$  hat 2-Torsion.

Auch über die Torsionsanteile orientierbarer Mannigfaltigkeiten können wir Aussagen machen. Seien etwa  $\alpha \in \text{Tor}_R(H^k(N; R))$ ,  $\beta \in \text{Tor}_R(H^\ell(N; R))$  mit  $k + \ell = n + 1$ . Repräsentiere  $\alpha$  durch eine Kokette  $\alpha$ , dann folgt  $r \cdot \alpha = \delta\gamma$  für ein  $r \in R$ . Wir bilden  $\alpha$  und  $\beta$  ab auf

$$\frac{1}{r}(\beta \smile \gamma)[N] = Q/R ,$$

dabei sei  $Q$  der Quotientenkörper von  $R$ , also beispielsweise  $Q = \mathbb{Q}$  falls  $R = \mathbb{Z}$ . Die so erhaltene bilineare Abbildung heißt auch *Verschlingungsform* (linking form) oder *Verschlingungsprodukt*

$$\text{lk} : \text{Tor}_R H^k(N; R) \otimes \text{Tor}_R H^{n-k+1}(N; R) \longrightarrow R$$

4.72. LEMMA. *Die Verschlingungsform ist eine wohldefinierte bilineare Abbildung, es gilt*

$$\text{lk}(\beta, \alpha) = -(-1)^{(n-k)(k+1)} \text{lk}(\alpha, \beta)$$

für alle  $\alpha \in \text{Tor}_R H^k(N; R)$  und alle  $\beta \in \text{Tor}_R H^{n-k+1}(N; R)$ , und die induzierten Abbildungen

$$\text{Tor}_R H^k(N; R) \longrightarrow \text{Hom}_R(\text{Tor}_R H^{n-k+1}(N; R), Q/R)$$

sind bijektiv.

BEWEIS. Zur Wohldefiniertheit ersetzen wir zunächst  $\alpha$  durch  $\alpha' = \alpha + \delta\gamma'$ , dann ist

$$r \cdot \alpha' = \delta(\gamma + r \cdot \gamma'),$$

und

$$\frac{1}{r}(\beta \smile (\gamma + r\gamma')) = \frac{1}{r}(\beta \smile \gamma) \in Q/R.$$

Sei jetzt  $\gamma' \in \ker \delta$ , dann ist  $r \cdot \alpha = \delta(\gamma + \gamma')$ . Da  $\beta \in \text{Tor}_R H^{n-k+1}(N; R) = \ker \psi$  in Folgerung 4.70, folgt  $\beta \smile \gamma'[N] = \psi([\beta])([\gamma']) = 0$ . Also ist die Verschlingungsform wohldefiniert.

Zur Symmetrie sei  $r \cdot \alpha = \delta\gamma$ ,  $s \cdot \beta = \delta\varepsilon$ , so dass

$$\begin{aligned} \text{lk}(\beta, \alpha) &= \frac{1}{rs}(\delta\gamma \smile \varepsilon)[N] = \frac{1}{rs}(\delta(\gamma \smile \varepsilon) - (-1)^{k-1}\gamma \smile \delta\varepsilon)[N] \\ &= -(-1)^{(k-1)+(k-1)(n-k+1)} \frac{1}{rs}(\delta\varepsilon \smile \gamma)[N] = -(-1)^{(k-1)(n-k)} \text{lk}(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Verschlingungsform nicht ausgeartet ist. Dazu betrachten wir die lange exakte Sequenz aus dem Beweis von Satz 4.20, nämlich

$$\dots \longrightarrow \text{Hom}_R(Z_{k-1}, R)^{j*} \longrightarrow \text{Hom}_R(B_{k-1}, R) \xrightarrow{\delta_k^*} H^k(N; R) \xrightarrow{\varphi} \text{Hom}_R(Z_k, R) \longrightarrow \dots,$$

wobei  $C_\bullet$ ,  $Z_\bullet$  und  $B_\bullet$  die Ketten, Zykel und Ränder des Komplexes  $(C_\bullet(N; R), \partial_\bullet)$  bezeichnen. Es sei  $\alpha \in Z^k(N; R)$  ein Kozykel, der ein Torsionselement in  $\text{Tor}_R H^k(N; R) = \ker \varphi$  repräsentiert. Dann folgt  $\alpha|_{Z_k} = 0$ , also hängt  $\alpha(c)$  nur von  $\partial c \in B_{k-1}$  ab, und wir erhalten eine wohldefinierte Abbildung  $\bar{\alpha} \in \text{Hom}_R(B_{k-1}, R)$  mit

$$\bar{\alpha}(\partial c) = \alpha(c).$$

Wenn man  $\bar{\alpha}$  auf ganz  $Z_{k-1}$  fortsetzen könnte, dann auch auf  $C_{k-1}$ , da die Sequenz

$$0 \longrightarrow Z_{k-1} \longrightarrow C_{k-1} \xrightarrow{\partial} B_{k-2} \longrightarrow 0$$

als Sequenz freier Moduln spaltet. In diesem Fall wäre  $\alpha = \delta\bar{\alpha}$ , also  $[\alpha] = 0 \in \text{Tor}_R H^k(N; R)$ . Also erhalten wir

$$\bar{\alpha} \in \frac{\text{Hom}_R(B_{k-1}; R)}{\text{Hom}_R(Z_{k-1}; R)} = \text{Ext}_R(H_{k-1}(N; R), R).$$

Die oben konstruierte Kokette  $\gamma$  setzt  $r \cdot \bar{\alpha}$  auf  $C_{k-1}$  fort, das heißt, wir erhalten eine Fortsetzung

$$\frac{1}{r} \gamma \in \frac{\text{Hom}_R(Z_{k-1}; Q)}{\text{Hom}_R(Z_{k-1}; R)}.$$

Da  $\bar{\alpha}$  auf  $B_{k-1}$  Werte in  $R$  annimmt, liefert das auch eine Abbildung

$$\frac{1}{r} \gamma \in \text{Hom}_R(H_{k-1}(N; R), Q/R),$$

die auf  $\text{Tor}_R H_{k-1}(N; R)$  von allen Wahlen unabhängig ist. Wäre diese Abbildung  $\frac{1}{r}\gamma = 0$ , dann wäre  $\frac{1}{r}\gamma$  eine Fortsetzung von  $\bar{\alpha}$  mit Werten in  $R$ , also  $\alpha = \delta(\frac{1}{r}\gamma)$  und  $[\alpha] = 0 \in H^k(N; R)$ . Daher ist die Abbildung

$$\text{Tor}_R H^k(N; R) \longrightarrow \text{Hom}_R(\text{Tor}_R H_{k-1}(N; R), Q/R)$$

injektiv. Zur Surjektivität setzen wir eine Abbildung  $\text{Tor}_R H_{k-1}(N; R) \rightarrow Q/R$  auf ganz  $H_{k-1}(N; R)$  fort. Da  $Z_{k-1}$  frei ist, können wir zu einer Abbildung  $\bar{\alpha}: Z_{k-1} \rightarrow Q$  liften mit  $\bar{\alpha}(B_{k-1}) \subset R$ . Also erhalten wir als Urbild  $\alpha = \partial_k^* \bar{\alpha} \in \ker \varphi = \text{Tor}_R H^k(N; R)$ .  $\square$

4.73. BEISPIEL. Besonders interessant sind Schnitt- und Verschlingungsform im mittleren Grad. Sei also  $N$  wieder eine kompakte, zusammenhängende, orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ . Wir wählen Koeffizienten  $\mathbb{Z}$ , die wir nicht mitschreiben.

- (1) Es sei  $n = 4k$ , dann ist das Schnittprodukt eine symmetrische, nicht ausgeartete Bilinearform auf  $H^{2k}(N)/\text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{2k}(N) \cong \mathbb{Z}^{b_{2k}(M)}$ . Der Isomorphietyp der Schnittform ist eine wichtige Invariante von  $M$ .
- (2) Es sei  $n = 4k + 2$ , dann ist das Schnittprodukt antisymmetrisch, und daher isomorph zu einer symplektischen Form, das heißt, einer direkten Summe von Blöcken der Form  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
- (3) Es sei  $n = 4k - 1$ , dann ist das Verschlingungsprodukt eine symmetrische  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ -wertige Bilinearform auf  $\text{Tor} H^{2k}(N)$ . Es spielt ebenfalls eine wichtige Rolle beim Studium von Mannigfaltigkeiten.

4.74. BEISPIEL. Wir betrachten die projektiven Räume aus Satz 4.45 als Beispiele.

- (1) Der komplex projektive Raum  $\mathbb{C}P^n$  lässt sich so orientieren, dass  $\alpha^n[\mathbb{C}P^n] = 1$  für einen Erzeuger  $\alpha \in H^2(\mathbb{C}P^n)$  des Kohomologieringes. Wenn  $n = 2k$  gerade ist, erhalten wir das Schnittprodukt

$$(\alpha^k \smile \alpha^k)[\mathbb{C}P^n] = 1.$$

- (2) Analog verfahren wir mit dem quaternionisch-projektiven Raum  $\mathbb{H}P^n$ . Wenn  $n$  ungerade ist, ist  $H^{2n}(\mathbb{H}P^n) = 0$ , und die Schnittform ist trivial. Für gerade  $n$  sieht sie aus wie in (1).
- (3) Der reell projektive Raum  $\mathbb{R}P^n$  ist nur orientierbar für  $n = 2k - 1$  ungerade. In diesem Fall erhalten wir die einzige mögliche, nicht ausgeartete Verschlingungsform

$$\text{lk}(\beta^\ell, \beta^{k-\ell}) = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

für  $1 \leq \ell \leq k - 1$ , wobei  $\beta \in H^2(\mathbb{R}P^n)$  das nichttriviale Element sei, siehe Übung 1 von Blatt 10. Für  $k = 2\ell$  erhalten wir insbesondere  $\text{lk}(\beta^\ell, \beta^\ell) = \frac{1}{2}$ .

4.75. BEMERKUNG. Wir geben noch eine geometrische Interpretation der dualen Bilinearformen auf der Homologie. Sei  $N$  wie oben eine kompakte, zusammenhängende, orientierte,  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

- (1) Es sei  $n = k + \ell$ . Wir können  $a \in H_k(N)$  und  $b \in H_\ell(N)$  durch Ketten aus glatten Simplex darstellen, die sich höchstens in ihrem Inneren transversal schneiden. Da jeder Simplex orientiert ist, können wir jedem solchen Schnittpunkt ein Vorzeichen geben, je nachdem, ob die Orientierungen zusammengenommen zur Orientierung von  $N$  passen oder nicht. Das Schnittprodukt  $a \cdot b \in \mathbb{Z}$  ist die mit Vorzeichen gewichtete Anzahl der Schnittpunkte.
- (2) Es sei  $n = k + \ell + 1$ . Wir stellen  $a \in H_k(N)$  und  $b \in H_\ell(N)$  durch disjunkte Ketten aus glatten Simplex dar. Es existiert  $r \in \mathbb{Z}$ , so dass  $a \in \partial c$  für eine glatte Kette  $c$ , die  $b$  transversal schneidet. Wir definieren  $b \cdot c$  wie oben und erhalten

$$\text{lk}(a, b) = \frac{1}{r} b \cdot c \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

Damit sich  $b$  und  $c$  überhaupt schneiden können, müssen die Zykel  $a$  und  $b$  „ineinander verschlungen“ sein, daher der Name „Verschlingungsform“.



## Literatur

- [GH] M. J. Greenberg, J. R. Harper, Algebraic Topology: a First Course, Mathematics Lecture Note Series 58, Benjamin/Cummings, Reading MA (1981)
- [H] A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press, Cambridge (2002)
- [J] K. Jänich, Topologie, Springer, Berlin - Heidelberg - New York (1980)
- [Q] B. v. Querenburg: Mengentheoretische Topologie, Springer, Berlin - Heidelberg - New York (1973)
- [S] E. H. Spanier, Algebraic Topology, Springer, Berlin (1981)
- [SS] L. A. Steen, J. A. Seebach Jr, Counterexamples in Topology, Springer, New York - Heidelberg (1978)
- [SZ] R. Stöcker, H. Zieschang, Algebraische Topologie: Eine Einführung, Teubner, Stuttgart (1988)



## Stichwortverzeichnis

- Abbildung  
abgeschlossene, 41  
adjungierte, 21  
affine, 143  
Alexander-Whitney-, 176  
  mit Koeffizienten, 185  
  relative, 181  
Antipoden-, 87, 88  
Auswertungs-, 21  
charakteristische, 29, 33, 34, 89–90  
Diagonal-, 133, 177  
eigentliche, 194  
Exponential-, 43, 51, 52, 54  
Höldersche, 7, 37  
homotope, 43, 85  
induzierte  
  Homologie, 92, 94, 101, 104  
  Kohomologie, 161  
  Unterraum, 15  
injektive, 15, 24  
Ketten-, 92, 94, 99, 101–104  
Koketten-, 161  
  duale, 162  
konstante, 6, 85  
lineare, 79  
Lipschitz-, 1, 37  
offene, 193  
Projektions-, 28, 69  
punktierter, 44, 86, 87  
Rand-, *siehe* Homomorphismus, Verbindungs-  
Seiten-, 97  
Sequenz-, 80, 92, 161  
simpliciale, 143  
  kombinatorische, 143  
stetige, 6, 7, 19, 21, 23, 37–39  
surjektive, 24, 41  
Verklebe-, 29, 31, 93–95  
von Paaren, 44  
zelluläre, 33, 93, 94  
Abbildungsgrad, 84, 85, 87, 88, 93, 153  
Abelisierung, 48, 59, 66, 76, 115  
abgeschlossen, 4, 6, 8, 9, 11, 19, 20, 23, 40  
  folgen-, 11  
Abschluss, 6, 32
- Addition  
  Abbildungen, 85  
Äquivalenz  
  von Kategorien, 73, 74  
Äquivalenzrelation, 24, 41, 74  
  erzeugte, 25, 40, 61, 82  
Algebra  
  graduierte, 177  
  mit Eins, 177  
  kommutative  
  graduiert, 177  
Analysis, 3, 19  
Assoziativität, 7  
Auflösung  
  freie, 121, 122  
Augmentierung, 96, 101, 111  
Ausschneidung, 107, 115, 164, 165  
Axiom  
  Abzählbarkeits-, 11, 17, 19, 25, 30, 38, 39  
  Dimensions-, 83, 84, 89, 100, 114, 115, 160, 164  
  Eilenberg-Steenrod, 82, 83, 101, 110, 112, 114, 154,  
  160, 163  
  Funktorkategorie, 49  
  Kategorie, 7  
  Summen-, 82, 86, 89, 91, 100, 114, 115, 154, 160,  
  164, 165  
  Trennungs-, 8, 17, 25, 38, 41, 152
- Bahn, 69, 74  
Ball, 5, 11, 34  
  Einheits-, 28  
   $\varepsilon$ -, 3  
Basis, 11, 17, 41, 72  
  abzählbare, 11, 17, 27  
  Funktorkategorie, 130  
  Umgebungs-, 11  
Basispunkt, 44, 47, 50, 57, 68, 94, 97  
Baum  
  maximaler, 62, 63  
beschränkt, 19, 20  
Bild, 80  
Bings Haus, 45  
Borromäische Ringe, 76  
Bouquet, 61

Charakteristik  
   Euler-, 95, 156  
   Körper, 95, 153

Decktransformation, 70, 71–74

Diagramm  
   kommutatives, 13, 49

Diagrammjagd, 102, 112, 154

Dimension, 27, 28, 41

Divisionsalgebra, 2

Dreiecksungleichung, 3

dual, 16, 25

Ecke, 97, 105, 107

Eigenschaft  
   Abzählbarkeits-, 11, 17, 19, 25, 30, 38, 39  
   charakteristische  
     kompakt-offene Topologie, 21, 34  
     Produkt, 16  
     Quotient, 25, 34  
     Summe, 13  
     Unterraum, 15, 45  
   Trennungs-, 8, 17, 25, 38, 41  
   universelle, 16  
     freie Präsentation, 118  
     freier Modul, 118  
     Kolimes, 27, 191  
     Koproduct, 14, 56, 61, 76, 192  
     Limes, 191  
     Produkt, 16, 56, 76, 192  
     Pushout, 26, 59, 76  
     Tensorprodukt, 120  
     universelle Überlagerung, 73

Einbettung, 15, 39  
   offene, 193

Erweiterung, 169

Erzeuger, 118

Exponentialgesetz, 21

Faktor  
   invarianter, 119

fein, 8, 13, 24, 25

Fixpunkt, 1, 53, 84, 87, 148, 153

Fläche, 66  
   nicht orientierbare, 66  
   orientierbare, 66

Flasche  
   Kleinsche, 66

Folge, 9, 18, 19, 37, 40, 42

Form  
   Schnitt-, 200  
   Verschlingungs-, 202

Fundamentalgruppe, 46, 57–67, 71–75, 87, 115–118  
   des Komplements, 60, 61

Funktion  
   stetige, 8, 9

Funktor, 49, 73, 75, 76, 82, 92, 94, 98, 99, 101, 114, 154, 163

derivierter  
   links-, 124  
   rechts-, 168

exakter  
   links-, 168  
   rechts-, 124

freier, 130

kontravarianter, 74, 159, 160

kovarianter, 49

Galois-Theorie, 73, 74

Gerüst, 28, 29, 62

Geschlecht, 66

Grenzwert, 9, 11, 18, 20, 37

grob, 8, 12, 15, 16, 21, 24

Gruppe, 7, 46, 55, 69, 75, 76  
   abelsche, 75, 76, 79, 80  
   Decktransformationen-, 70–74  
   freie, 55, 76  
   Galois-, 73, 74  
   unendliche Dieder-, 55, 78  
   Unter-, 56, 57, 71, 73, 74

Häufungspunkt, 18

Homöomorphismus, 6, 39, 44, 60, 69, 73

Homologie  
   Kettenkomplex, 92, 99  
   lokale, 189  
   mit eigentlichem Träger, 194  
   relative, 101  
   singuläre, 99  
     Paar, 101  
     reduzierte, 110, 111, 112  
   zelluläre, 96  
     reduzierte, 93, 94–97

Homologiekategorie, 92

Homologietheorie  
   reduzierte, 82, 84, 93, 112, 114  
   verallgemeinerte, 82, 83, 86, 88  
   unreduzierte, 110, 114, 115  
   verallgemeinerte, 114

Homomorphismus  
   Gruppen-, 56, 69, 75, 80  
   Hurewicz-, 115, 116  
   Verbindungs-, 83, 101, 102, 110

homotop  
   ketten-, 122

Homotopie, 43, 44, 45, 51, 105  
   Ketten-, 104, 105, 108, 122  
   Koketten-, 161  
     duale, 162  
   relative, 44, 45, 46, 48, 67, 74  
   von Paaren, 106

Homotopieäquivalenz, 44, 45, 50, 74  
   Ketten-, 104

Homotopiegruppe  
   höhere, 48, 87  
   stabile, 141

Homotopieinvarianz, 82, 83, 104, 106, 113, 114, 160, 164  
 Homotopieklasse, 44, 45  
   freie, 44  
 Identität, 6, 36  
   in Kategorie, 7, 44  
 Inklusion, 13, 15, 82  
 Inneres, 6  
 Intervall, 23  
 Inverses, 44  
   Homotopie-, 44, 50  
 Isomorphismus, 44, 47, 50  
   Quasi-, 135, 161  
 Kategorie, 7, 16, 26, 44, 49, 55, 59, 61, 73, 75, 76, 79, 92, 93, 98, 101, 153, 159  
   Homotopie-, 44, 83  
 Kegel, 107, 108  
 Kern, 80  
 Kette, 92  
 Klasse, 7  
 Knoten, 61  
 Koeffizienten, 82–84, 88, 94, 95, 110, 114, 115, 160, 164  
 Körper, 7  
   Schief-, 41  
 Kohomologie  
   Kokettenkomplex, 161  
   lokale, 189  
   mit kompaktem Träger, 193  
   singuläre, 163  
   reduzierte, 166  
 Kohomologiekategorie, 161  
 Kohomologietheorie  
   reduzierte, 160  
   verallgemeinerte, 160  
   unreduzierte, 164  
   verallgemeinerte, 163  
 Kokern, 80  
 Kokette, 161  
 Kolimes, 26, 191  
 Kommutator, 48, 66  
 kompakt, 19, 20, 25, 32, 39, 48, 51, 57, 77, 93  
   abzählbar, 19, 20  
   folgen-, 19, 20  
   lokal, 20, 21, 33, 42, 45  
   quasi-, 19, 25  
 Komplex  
   CW-, 29, 30–35, 41, 62–66, 78, 82, 88–97, 114, 153  
   endlicher, 32, 96  
   Ketten-, 92, 102, 113  
   augmentierter, 97, 111  
   singulärer, 99, 111  
   zellulärer, 93, 94–97  
   Koketten-, 161  
   dualer, 162  
   singulärer, 163  
   Simplizial-, 142  
   kombinatorischer, 142  
   Unter-, 32, 36  
   Zell-, 29  
 Konvergenz, 23, 37  
   gleichmäßige, 22, 40  
   lokal, 23  
   kompakte, 22, 40  
 Koordinate  
   baryzentrische, 105, 109  
 Koproduct, 13, 26, 39, 55, 61, 76  
 Korand, 161  
 Korandoperator  
   simplizialer, 163  
   zellulärer, 174  
 Kozykel, 161  
 Kreis, 58–61, 63, 77  
 kürzen, 54  
 Lemma  
   Fünfer-, 112, 114  
   Schlangen-, 102, 113, 154  
   Urysohn, 9  
 Lift, 51, 52, 54, 67–73  
 Limes, 191  
   direkter, 191  
   inverser, 191  
 Loch, 94  
 Mannigfaltigkeit, 27, 34, 41, 66, 82  
   orientierbare, 190  
 Maximum, 19  
 Menge, 7, 26  
   Erzeuger-, 118  
   Potenz-, 3, 5  
   semisimpliziale, 98, 143  
 Metrik  
   französische Eisenbahn-, 36  
   p-adische, 37  
   Wege-, 143  
 metrisierbar, 5, 10, 18, 28, 30  
 Modell, 130  
   azyklisches, 130  
 Modul  
   freier, 118  
   torsions-, 119  
   graduierter, 185  
   unitärer, 185  
   Null-, 79  
   Quotienten-, 80  
   trivialer, 79  
   unitärer, 79, 92, 98  
   Unter-, 80  
   Torsions-, 119  
 Morphismus, 7, 44, 49, 76, 159  
   invertierbarer, *siehe* Isomorphismus  
 natürlich, 81, 92–94, 97, 101–103, 110, 125

Norm, 42  
   äquivalente, 4  
 normal, 9, 18, 19, 22, 28, 31, 39, 41, 152  
 Normalteiler, 56, 71–72  
   erzeugter, 56, 62, 65  
 Nullmodul, 80  
 Nullstelle, 88  
  
 Objekt, 7, 49, 159  
 offen, 4, 5, 23  
 Operation  
   Gruppen-, 69, 70–74  
     eigentlich diskontinuierliche, 69, 70–71  
     freie, 69, 70–71, 88  
 Orientierung, 94, 98, 190  
   lokale, 189  
  
 Paar, 44, 81, 89, 90, 101, 152  
   CW-, 82  
   gutes, 81, 136  
 Pfadraum, 48  
 Polynom, 37, 75  
 Präsentation, 62, 66, 118  
 Produkt, 20, 39, 40, 54–56, 76  
   amalgamiertes, 59  
   Cap-, 187  
   Cup-, 178  
     mit Koeffizienten, 185  
     relatives, 181  
   direktes, 39, 75, 160  
   Erweiterungs-, 167  
   freies, 55, 56  
   Ko-, 189  
   Kreuz-, 176  
     mit Koeffizienten, 185  
     relatives, 181  
   Schnitt-, 200  
   Schräg-, 187  
   Smash-, 138  
   Tensor-, 120  
     graduieretes, 181  
     von Komplexen, 128  
   topologisches, 15, 75  
   Torsions-, 123  
     von Komplexen, 128  
   Verschlingungs-, 202  
   Wedge-, 61, 86, 91, 138, 154  
 Projektion, 82  
   stereographische, 27, 60  
 Pushout, 26, 59, 60, 76  
  
 Quotient  
   nach Äquivalenzrelation, 24, 25  
   nach Gruppenwirkung, 43, 69, 70–74  
   nach Teilmenge, 82  
  
 Rand, 6  
   Kettenkomplex, 92  
  
   Simplex, 97  
 Randoperator  
   simplizialer, 99  
   zellulärer, 92–96, 175  
 Rang, 119  
 Raum  
   einpunktiger, 44, 100  
   Hausdorff-, 8, 9, 19, 20, 27, 32, 33, 38, 39, 70, 78  
   kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-, 21  
   McLane  
     Eilenberg, 142  
   metrischer, 3, 8, 11, 20, 22, 36, 38, 40  
   projektiver, 41  
     komplex-, 95, 153, 171, 182  
     quaternionisch-, 95, 153, 182  
     reell, 77  
     reell-, 95, 153, 158, 171, 182  
   punktierter, 44, 61, 87  
     gut, 61, 81, 138, 154  
   topologischer, 5, 7  
   Vektor-, 7, 39, 42, 80  
     dualer, 39  
     normierter, 1, 3, 36, 42  
 reduzieren, *siehe* kürzen  
 regulär, 9, 28  
   vollständig, 9  
 Relation, 118  
 Retrakt, 45, 53  
   Deformations-, 45, 58, 60, 61, 81, 82, 90, 152  
   starker, 45, 46, 90  
 Retraktion, 84  
 Ring  
   graduierter, 177  
   mit Eins, 177  
   Hauptideal-, 119  
   Kohomologie-, 179  
   kommutativer  
     graduierter, 177  
     mit Einselement, 79, 98  
 Ringe  
   Borromäische, 60  
  
 Satz  
   Ausschneidungs-, 109, 111–114  
   Azyklische Modelle, 131  
   Borsuk-Ulam, 53, 75, 158  
   Darstellungs-  
     Brownscher, 141  
   Eilenberg-Zilber, 133  
     Kokettenkomplexe, 176  
   Eulerscher Polyeder-, 96  
   Exponentialgesetz, 21  
   Fixpunkt-  
     Banach, 1  
     Brouwer, 1, 53, 84  
     Lefschetz, 148  
   Freudenthal, 141

Fundamental- der Algebra, 75  
 Heine-Borel, 18, 20, 31  
 Hilbert Basis-, 38  
 Hopf, 85, **145**  
 Hurewicz, **116**, 172  
 Künneth-Formel  
   algebraische, **129**  
   Kohomologie, **177**  
   topologische, 128, **134**  
 Kervaire-Milnor, 2  
 Lebesgue, 20, 57, 109  
 Liftungs-, **67**, 71  
   Homotopie-, **51**, 67  
 Metrisations-  
   Urysohn, 12, 28  
 Poincaré-Dualität, **198**  
 Seifert-van Kampen, **57**, 58–61  
 Simplicialer Approximations-  
   Abbildungen, **144**  
 Tychonoff, 20  
 Universelle Koeffizienten, 172, 173  
   Homologie, **125**, 127  
   Kohomologie, **170**  
 vom Igel, 2, **88**  
 Zwischenwert-, 53  
 Schleife, *46*, 67  
 Schleifenraum, 48  
   freier, 48  
 Schneeflockenkurve, 7  
 Schwerpunkt, 107, 108  
 Seite, *97*, 98, 100, 105  
 Sequenz, *80*  
   exakte, *80*, 152  
   kurze, *80*, 97, 102, 110, 111  
   lange, 82, 84, 89–91, 101, 102, 113, 114, 152, 154,  
   160, 164  
   spaltende, 81, 97, 110  
   Homologie-, 82, 101, 104, 111–114  
   Kohomologie-, 160, 164  
   Mayer-Vietoris, 110, 195  
   relative, 196  
   Transfer-, 157  
 Simplex, 97  
   affiner, 105–109  
   singulärer, *97*, 105, 108  
   Standard-, 97  
 Skelett, 28, *29*  
 Sphäre, 2, 27, 60, 66, 83–88, 93, 94  
 Spur, *146*  
 Stern  
   abgeschlossener, 144  
   offener, 144  
 stetig, 3, 4, *6*, 13  
   am Punkt, 3, 37  
 Subbasis, *11*, 16, 21  
 Summe  
   direkte, 39, 54  
   topologische, *13*  
 System  
   gerichtetes, *191*  
   inverses, *191*  
 Teilfolge, 18  
 Teilmenge  
   offene, 27  
 Topologie, *5*  
   Box-, 17, 20  
   CW-, 29, 30, 32, 34, 42  
   diskrete, *5*, 11, 23, 24, 28, 29, 38, 50–52, 54  
   Final-, *24*  
   Identifizierungs-, *siehe* Quotienten-  
   induzierte, 15, *24*, 41  
   Initial-, *24*  
   Klumpen-, *5*, 11, 17, 24, 38, 69  
   koendliche, 37, 38  
   koinduzierte, *24*, 26, 41  
   Kolimes-, 27, 29, 31, 33  
   kompakt-offene, *21*, 22, 34, 40, 45, 48  
   metrische, *4*, 39, 40  
   Ordnungs-, 38  
   *p*-adische, 40  
   Produkt-, *15*, 20, 21, 24, 33, 34, 39, 40, 42, 43  
   Quotienten-, *25*, 26–28, 31, 33, 40–42, 59, 61, 69,  
   70, 82  
   Relativ-, *siehe* Unterraum-  
   schwache, *26*, 29, 31, 33  
   Spur-, *siehe* Unterraum-  
   Summen-, *13*, *24*  
   Unterraum-, *15*, 17, 24, 25, 27, 29, 30, 32, 39, 40,  
   45, 48, 76, 82, 97  
   Verklebungs-, 26, 29, 30, 40  
   Zariski-, 37, 38  
   zur Basis, *12*, 17, 72  
   zur Subbasis, *12*, 16, 21  
 Torus, 66  
   Clifford-, 61  
 Transformation  
   natürliche, *81*, 82, 83, 103, 108, 115  
   kontravariante, *159*  
 Überdeckung  
   offene, *18*, 20, 57, 109  
   Teil-, 19  
 überlagert  
   gleichmäßig, *51*, 68, 70, 72  
 Überlagerung, *50*, 52, 54, 66–74, 77  
   normale, *70*, 71–74, 78  
   Orientierungs-, *190*  
   universelle, *51*, 66, 71–74, 78  
 Umgebung, *4*, *5*, 27, 37, 69  
   abgeschlossene, 22  
   kompakte, 20  
   zusammenhängende, 24  
   weg-, 24  
 Umgebungsbasis, 17, 30

Umlaufzahl, 43  
 Untermannigfaltigkeit, 27  
 Unterraum, 17, 19  
 Unterteilung  
   baryzentrische, 107–109, 144, 164  
 unzusammenhängend  
   total, 24, 40  
  
 Vektorfeld, 88  
 Vektorraum, 80  
 Vereinigung  
   disjunkte, 13, 17, 39, 100  
 Vererbung, 17, 25, 41, 70  
 Verkettung, 7, 44, 46, 153  
  
 Weg, 23, 34, 36, 45, 46, 68, 100  
 Wirkung, *siehe* Operation  
 Wort, 54  
   gekürztes, 54  
   reduziertes, 54, 55  
  
 Zahl  
   Betti-, 95  
   dyadische, 9  
   Euler-, 95, 156  
   Lefschetz-, 147  
 Zelle, 28, 29, 32, 89  
   abgeschlossene, 29  
 zusammenhängend, 23, 25, 35, 40, 66–74, 78, 82  
   einfach, 50, 60, 66, 75  
   semilokal, 71, 74  
   lokal, 24  
   weg-, 23, 25, 34–36, 40, 47, 48, 50, 57–68, 75  
   lokal, 24, 67–74  
 Zusammenhangskomponente, 24, 74, 82  
   Weg-, 24, 35, 40, 45, 48, 67, 73, 100, 113  
 zusammenziehbar, 34, 44–46, 50, 51, 59–62, 83–85,  
   89, 91  
   lokal, 34, 78, 82  
 Zykel, 92, 94