Differentialgeometrie I/II — WS 09/10 und SS 2010

Sebastian Goette

Die Differentialgeometrie ist Geometrie mit Methoden der Analysis. Man erweitert den Begriff der Differenzierbarkeit auf Mannigfaltigkeiten. In der Riemannschen Geometrie tragen Mannigfaltigkeiten zusätzlich Riemannsche Metriken. Für diese Riemannschen Mannigfaltigkeiten existieren verschiedene Krümmungsgrößen. Weiterhin lassen sich Geodätische (lokal kürzeste Verbindungskurven zwischen zwei Punkten) durch eine bestimmte Differentialgleichung zweiter Ordnung beschreiben. Dies führt zu Fragestellungen nach Zusammenhängen zwischen Topologie der Krümmung, Mannigfaltigkeit und dem globalen Verhalten von Geodätischen. Ziel der Vorlesung ist es, die oben genannten Begriffe einzuführen, und ein paar dieser Zusammenhänge herauszuarbeiten.

In der Vorlesung werden wir die beiden folgenden Themengebiete behandeln.

(1) **Riemannsche Mannigfaltigkeiten.** Wir definieren den Begriff der Riemannschen Mannigfaltigkeit, und lernen verschiedene Krümmungsbegriffe kennen. Außerdem betrachten wir Überlagerungen und die Fundamentalgruppe. Danach erinnern wir uns an die Bogenlänge von Kurven auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten und betrachten Variationsformeln für die Bogenlänge. Dabei sehen wir, dass kürzeste Kurven zwischen zwei Punkten einer bestimmten Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen. Das führt uns auf den Begriff der Geodätischen. Im Rest der Vorlesung betrachten wir das globale Verhalten von Geodätischen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Zunächst benutzen wir Geodätische, um Normalkoordinaten und Exponentialabbildung einzuführen. Die Frage, ob Geodätische global existieren, führt auf den Begriff der geodätischen Vollständigkeit.

(2) **Vergleichssätze.** Das globale Verhalten von Geodätischen auf einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit wird von ihrer Krümmung bestimmt. Wir werden sehen, dass Mannigfaltigkeiten nichtpositiver Schnittkrümmung asphärisch sind, d.h., eine universelle Überlagerung besitzen, die diffeomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist. Auf der anderen Seite haben vollständige Mannigfaltigkeiten, deren Ricci-Krümmung größer als eine positive Konstante ist, stets beschränkten Durchmesser und endliche Fundamentalgruppe. Danach setzen wir das Volumenwachstum geodätischer Bälle in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit in Beziehung zu ihrer Ricci-Krümmung. Zum Schluss beweisen wir einige Ungleichungen für geodätische Dreiecke in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit.

KAPITEL 1

Riemannsche Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel führen wir zunächst die grundlegenden Definitionen differenzierbarer und Riemannscher Mannigfaltigkeiten ein. Anschließend lernen wir die zwei Variationsformeln für die Bogenlänge und Geodätische kennen. Die geodätische Exponentialabbildung liefert uns nicht nur geodätische Normalkoordinaten, sondern auch den Begriff der geodätischen Vollständigkeit. Am Ende dieses Kapitels geben wir noch einen Überblick über die Fundamentalgruppe und Überlagerungen von Mannigfaltigkeiten.

1.1. Mannigfaltigkeiten

Definition. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, wenn es zu jedem Punkt $x \in M$ eine Umgebung U von x, eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ und einen C^k-Diffeomorphismus $\varphi\colon U \to V$ mit

$$U \cap M = \varphi^{-1}(V \cap (\mathbb{R}^m \times \{o\}))$$

gibt. φ heißt Karte von M.

Beispiel. $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist n-dimensionale C^∞ Untermannigfaltigkeit. Eine große Klasse von Untermannigfaltigkeiten liefert der Satz vom regulären Wert. Hierbei heißt $y \in \mathbb{R}^m$ regulärer Wert von $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (U offen), falls $Df(x) = f'(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv ist $\forall\, x \in f^{-1}(\{y\})$.

Satz. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \geq 1$ und $y_0 \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert von $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$. Dann ist $f^{-1}(\{y_0\})$ eine $(n-m)$ dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.*

1.1. Beispiel. $Gl(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $O(n)$ und $SO(n)$ sind C^∞ Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n^2}$.

Wir ersetzen jetzt den Begriff der Untermannigfaltigkeit durch das abstraktere Objekt der Mannigfaltigkeit.

1.2. Definition. Eine *n-dimensionale Mannigfaltigkeit* ist ein Hausdorff-Raum M mit abzählbarer Basis, so dass jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset M$ besitzt, die zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist.

1.3. Bemerkung. Es folgen einige weitere Definitionen und Eigenschaften:

(1) Ein *Hausdorff-Raum* ist ein topologischer Raum, in dem je zwei verschiedene Punkte disjunkte offene Umgebungen besitzen.
(2) Eine *abzählbare Basis* eines topologischen Raumes X ist eine abzählbare Menge $\mathcal{B}$ offener Teilmengen von X, so dass jede offene Menge als Vereinigung von Mengen $U \in \mathcal{B}$ geschrieben werden kann.
(3) Ein Homöomorphismus $\varphi\colon x \to y$ von topologischen Räumen ist eine stetige Abbildung, für die eine stetige Umkehrabbildung existiert.
(4) Eine (n-dimensionale) *Karte* von M ist ein Homöomorphismus $\varphi\colon U^\varphi \to V^\varphi$, wobei $U^\varphi \subset M$ und $V^\varphi \subset \mathbb{R}^n$ offen seien. Eine *Karte* um $p \in M$ ist eine Karte $\varphi\colon U^\varphi \to V^\varphi$ mit $p \in U^\varphi$.

(5) Ein (n-dimensionaler) *Atlas* von M ist eine Menge $\mathcal{A}$ von Karten von M, so dass die Definitionsbereiche der Karten ganz M überdecken. Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist somit ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis, der einen n-dimensionalen Atlas besitzt.
(6) Aus der „Invarianz des Gebietes“ folgt, dass die Dimension eine Invariante ist. Wenn ein topologischer Raum einen m- und einen n-dimensionalen Atlas besitzt, folgt also $m = n$.
(7) Seien schließlich φ, ψ Karten in einem Atlas $\mathcal{A}$, dann heißt die Abbildung
$$\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U^\phi \cap U^\psi) \to \psi(U^\phi \cap U^\psi)$$
ein *Kartenwechsel* im Atlas $\mathcal{A}$. Man beachte, dass $\psi \circ \varphi^{-1}$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ auf eine andere homöomorph abbildet. Man kann also fragen, ob der Kartenwechsel $\psi \circ \varphi^{-1}$ ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus ist.

1.4. Definition. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, und sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Ein *$\mathcal{C}^k$-Atlas* auf M ist ein Atlas $\mathcal{A}$ auf M, dessen Kartenwechsel $\psi \circ \varphi^{-1}$ für alle φ, $\psi \in \mathcal{A}$ $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismen sind.

Ein $\mathcal{C}^k$-Atlas heißt *maximal,* wenn er in keinem anderen $\mathcal{C}^k$-Atlas echt enthalten ist.

Eine *n-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit* ist ein Paar aus einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M und einem maximalen $\mathcal{C}^k$-Atlas von M. Eine $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit heißt auch *differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

1.5. Bemerkung. Man kann leicht zeigen, dass jeder $\mathcal{C}^k$-Atlas $\mathcal{A}$ von M in genau einem maximalen $\mathcal{C}^k$-Atlas $\bar{\mathcal{A}}$ enthalten ist, nämlich in
$$\left\{\, \psi \colon U^\psi \to V^\psi \text{ Karte von } M \,\middle|\, \psi \circ \varphi^{-1} \text{ ist } \mathcal{C}^k\text{-Diffeomorphismus für alle } \varphi \in \mathcal{A} \,\right\} .$$
Es reicht also, einen beliebigen $\mathcal{C}^k$-Atlas auf M anzugeben. In der Praxis möchte man oft so wenig Karten wie nötig benutzen.

In diesem Sinne liefern zwei $\mathcal{C}^k$-Atlanten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ von M die gleiche $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit, wenn sie in dem gleichen maximalen Atlas enthalten sind. Das gilt genau dann, wenn die Kartenwechsel $\psi \circ \varphi^{-1}$ für alle $\varphi \in \mathcal{A}$ und $\psi \in \mathcal{A}'$ $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismen sind.

1.6. Beispiel. (1) R^n ist n-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit für alle k mit Atlas $\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\}$. Genauso ist jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit Atlas $\{\mathrm{id}_U\}$.
(2) Die n-dimensionale Kugel $S^n = \left\{\, x \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, |x| = 1 \,\right\}$ ist eine n-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit für alle k. Die stereographischen Projektionen an den Punkten $\pm e_{n+1}$ bilden einen Atlas $\{\varphi_+, \varphi_-\}$ mit
$$\varphi_\pm \colon S^n \setminus \{\pm e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^n , \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{1 \mp x_{n+1}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$
Die Umkehrabbildungen werden gegeben durch
$$\varphi_\pm^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1} \begin{pmatrix} 2y_1 \\ \vdots \\ 2y_n \\ \pm y_1^2 \pm \dots \pm y_n^2 \mp 1 \end{pmatrix} ,$$
also erhalten wir als Kartenwechsel zum Beispiel
$$\varphi_- \circ \varphi_+^{-1} \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \qquad \text{mit} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{y_1^2 + \dots + y_n^2} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} .$$

Es ist jetzt leicht zu sehen, dass dieser und alle anderen Kartenwechsel $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismen sind.

1.7. Bemerkung. (1) Sei $0 \le l \le k$, und sei $(M, \mathcal{A})$ eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit, dann ist M trivialerweise auch eine $\mathcal{C}^l$-Mannigfaltigkeit, wobei der maximale $\mathcal{C}^k$-Atlas automatisch zu einem (im allgemeinen nicht maximalen) $\mathcal{C}^l$-Atlas wird.

(2) Die Umkehrung ist nicht trivial: sei $1 \le l \le k$, und sei $(M, \mathcal{A})$ ein $\mathcal{C}^l$-Mannigfaltigkeit. Nach einem Resultat von Whitney enthält $\mathcal{A}$ einen $\mathcal{C}^k$-Atlas, ja sogar einen Atlas mit reell analytischen Kartenwechseln, siehe [**GKM**], §1.1.1. Wir werden solche reell analytischen Mannigfaltigkeiten jedoch nicht weiter betrachten, da $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeiten für alle folgenden Konstruktionen genau das richtige Maß an Flexibilität bieten.

(3) Nicht jede toplogische (also $\mathcal{C}^0$-)Mannigfaltigkeit M trägt einen $\mathcal{C}^k$-Atlas mit $k \ge 1$, und wenn doch, kann es verschiedene, nicht diffeomorphe $\mathcal{C}^k$-Strukturen auf M geben, beispielsweise 28 verschiedene solche Strukturen auf S^7, oder überabzählbar viele auf $\mathbb{R}^4$.

Wir wollen auch Untermannigfaltigkeiten betrachten.

1.8. Definition. Sei $(N, \mathcal{A})$ eine n-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit. Eine *m-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit* von N ist eine Teilmenge $M \subset N$, so dass zu jedem $p \in M$ eine Karte $\varphi \in \mathcal{A}$ mit

$$\varphi\colon U^\varphi \to V^\varphi \subset \mathbb{R}^n \qquad \text{und} \qquad M \cap U^\varphi = \varphi^{-1}\bigl(V^\varphi \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})\bigr)$$

existiert. Eine solche Karte φ heißt *Untermannigfaltigkeitskarte* von M in N.

1.9. Bemerkung. (1) Jede $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit M von N ist selbst eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit. Dazu versehen wir M zunächst mit der Unterraumtopologie, dann erbt M die Hausdorff-Eigenschaft und eine abzählbare Basis von N. Als $\mathcal{C}^k$-Atlas wählen wir

$$\bigl\{\, \varphi|_{U^\varphi \cap M}\colon U^\varphi \cap M \to V^\varphi \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^m \bigm| \varphi \text{ ist Untermannigfaltigkeitskarte} \,\bigr\}\ .$$

(2) Insbesondere ist jede $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit. Die Umkehrung ist ein weiterer **Satz von Whitney:** *jede m-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit M ist diffeomorph zu einer Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.* Dabei kann $n = 2m + 1$ gewählt werden (sogar $n = 2m$, falls M kompakt ist), siehe [**GKM**], §1.1.6.

1.10. Definition. Seien $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{A}')$ zwei $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $F\colon M \to N$ heißt *$\mathcal{C}^k$-differenzierbar,* wenn sie stetig ist und die Abbildungen

$$F^{\varphi,\psi} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U^\varphi \cap F^{-1}U^\psi)}\colon \varphi\bigl(U^\varphi \cap F^{-1}(U^\psi)\bigr) \to V^\psi$$

für alle Karten $\varphi \in \mathcal{A}$ und $\psi \in \mathcal{A}'$ von der Klasse $\mathcal{C}^k$ ist. Sie heißt *$\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus,* falls die Umkehrabbildung existiert und ebenfalls $\mathcal{C}^k$-differenzierbar ist.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, dann heißt eine $\mathcal{C}^k$-differenzierbare Abbildung $\gamma\colon I \to M$ auch eine *$\mathcal{C}^k$-Kurve* in M. Eine $\mathcal{C}^k$-differenzierbare Abbildung $f\colon M \to \mathbb{R}$ heißt auch eine *$\mathcal{C}^k$-Funktion* auf M.

In Zukunft werden wir statt $(M, \mathcal{A})$ einfach nur noch M schreiben. Wir schreiben $\mathcal{C}^k(M, N)$ für die Menge der $\mathcal{C}^k$-differenzierbaren Abbildungen von M nach N, und $\mathcal{C}^k(M) = \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R})$ für den Vektorraum der $\mathcal{C}^k$-differenzierbaren Funktionen auf M.

1.11. Bemerkung. Die $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten bilden die Objekte einer Kategorie, deren Morphismen von M nach N gerade durch $\mathcal{C}^k(M, N)$ gegeben sind.

Der Raum $\mathcal{C}^k(M)$ trägt eine Algebren-Struktur, gegeben durch punktweise Multiplikation von Funktionen,

$$(f \cdot g)(p) = f(p) \cdot g(p)\ .$$

1.12. Beispiel. Für späteren Gebrauch konstruieren wir sogenannte „Abschneidefunktionen“, die nahe eines festen Punktes $p \in M$ konstant 1 sind und außerhalb einer etwas größeren Umgebung von M verschwinden.

Betrachte dazu zunächst $\vartheta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$\vartheta(r) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{r}} & \text{für } r > 0, \text{ und} \\ 0 & \text{für } r \leq 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist beliebig oft differenzierbar, und es gilt

$$\vartheta(r) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r > 0 \,.$$

Sei jetzt $p \in M$, und sei φ Karte um p, o.B.d.A. mit $\varphi(p) = 0$. Wähle $0 < a < b$ so, dass $\overline{B_b(0)} \subset V^\varphi$, wobei

$$B_r(x) = \left\{\, y \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |x - y| < r \,\right\} .$$

Der Überblick bezeichnet den topologischen Abschluss, also $\overline{B_b(0)} = \{\, y \in \mathbb{R}^n \mid |y| \leq r \,\}$. Dann definiere eine Abschneidefunktion $\rho \in \mathcal{C}^\infty(M)$ durch

$$\rho(q) = \begin{cases} \dfrac{\vartheta(b - |\varphi(q)|)}{\vartheta(b - |\varphi(q)|) + \vartheta(|\varphi(q)| - a)} & \text{für } q \in U^\varphi, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es folgt

$$\rho|_{\varphi^{-1}\overline{B_a(0)}} \equiv 1 \qquad \text{und} \qquad \rho|_{M \setminus \varphi^{-1}\overline{B_b(0)}} \equiv 0 \,.$$

Insbesondere ist der *Träger* von ρ gerade

$$\operatorname{supp}(\rho) := \overline{\{\, q \in M \mid \rho(q) \neq 0 \,\}} = \varphi^{-1}\overline{B_b(0)} \,.$$

Als nächstes definieren wir das Tangentialbündel. Zunächst wollen wir Tangentialvektoren auf drei verschiedene Arten darstellen und uns überlegen, dass wir jedesmal die gleichen Objekte erhalten. Eine beliebige Karte φ schreiben wir als

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \vdots \\ \varphi^n \end{pmatrix} : U^\varphi \to V^\varphi \subset \mathbb{R}^n \,,$$

dann heißen die Funktionen $\varphi^i \colon U^\varphi \to \mathbb{R}$ die *Koordinatenfunktionen* von φ.

1.13. Definition. Sei M eine n-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit $k \geq 1$, und sei $p \in M$.

(1) Ein *algebraischer Tangentialvektor* in p ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\partial \colon \mathcal{C}^k(M) \to \mathbb{R}$ mit

$$\partial(f \cdot g) = \partial f \cdot g(p) + f(p) \cdot \partial g \qquad \text{für alle } f,\, g \in \mathcal{C}^k(M) \,.$$

(2) Ein *physikalischer Tangentialvektor* $(v_\varphi)_\varphi$ in p ordnet jeder Karte φ von M um p einen Vektor $v_\varphi \in \mathbb{R}^n$ zu, so dass

$$v_\psi^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}\, v_\varphi^j$$

für alle Karten φ, ψ um p und alle $i = 1, \dots, n$ gilt.

(3) Ein *geometrischer Tangentialvektor* in p ist eine Äquivalenzklasse von Kurven $\gamma \colon I \to M$ mit $0 \in I \subset \mathbb{R}$ und $\gamma(0) = p$ unter der Äquivalenzrelation

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \quad \Longleftrightarrow \quad (\varphi \circ \gamma_1)^{\boldsymbol{\cdot}}(0) = (\varphi \circ \gamma_2)^{\boldsymbol{\cdot}}(0)$$

für eine Karte φ von M um p.

In (3) ist es egal, welche Karte φ wir wählen, denn $\gamma_1 \sim \gamma_2$ gilt für eine bestimmte Karte φ genau dann, wenn es für alle Karten um p gilt.

Die algebraische Definition ist sowohl die eleganteste als auch die am schwierigsten zu verstehende.

1.14. Proposition. *Sei M eine $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$, und sei φ eine Karte um p. Eine Abbildung $\partial\colon \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ ist genau dann ein algebraischer Tangentialvektor in p, wenn es einen Vektor $V \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass*

$$\partial f = V_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1}) = d_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1})(V) \;.$$

Man beachte, dass diese Proposition falsch ist für $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten mit $k < \infty$ ([**GKM**], §1.1.3).

Beweis. „$\Leftarrow$“ ist klar.

Zu „$\Rightarrow$“ zunächst ein paar Vorüberlegungen. Aus der Produktregel folgt für die konstante Funktion 1, dass

$$\partial 1 = \partial(1 \cdot 1) = \partial 1 \cdot 1 + 1 \cdot \partial 1 = 2\,\partial 1 \quad \Longrightarrow \quad \partial 1 = 0 \;.$$

Wegen $\mathbb{R}$-Linearität folgt für die konstante Funktion $p \mapsto r \in \mathbb{R}$, dass

$$\partial r = r \cdot \partial 1 = 0 \;. \tag{1.1}$$

Sei nun f beliebig, und sei φ Karte um p. O.B.d.A. gelte $\varphi(p) = 0$ und $B_1(0) \subset V^\varphi$. Dann konstruieren wir zwei Abschneidefunktionen ρ_1, $\rho_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ wie in Beispiel 1.12 mit

$$\begin{aligned} \rho_1|_{\varphi^{-1}B_{\frac14}(0)} &\equiv 1 \;, & & \operatorname{supp}\rho_1 = \varphi^{-1}\overline{B_{\frac12}(0)} \;, \\ \rho_2|_{\varphi^{-1}B_{\frac12}(0)} &\equiv 1 & \text{und} \qquad & \operatorname{supp}\rho_1 = \varphi^{-1}\overline{B_{\frac34}(0)} \;. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $\rho_1 = \rho_1 \cdot \rho_2$, also

$$\partial\rho_1 = \partial(\rho_1 \cdot \rho_2) = \partial\rho_1 \cdot \rho_2(p) + \rho_1(p) \cdot \partial\rho_2 = \partial\rho_1 + \partial\rho_2 \quad \Longrightarrow \quad \partial\rho_2 = 0 \;.$$

Da wir zu jeder Abschneidefunktion ρ_2 um p wie in Beispiel 1.12 eine Abschneidefunktion ρ_1 um p mit $\rho_2|_{\operatorname{supp}(\rho_1)} = 1$ finden können, gilt $\partial\rho = 0$ für jede Abschneidefunktion ρ um p und jeden algebraischen Tangentialvektor ∂ im Punkt p.

Insbesondere gilt

$$\partial(\rho \cdot f) = \rho(p) \cdot \partial f + \partial\rho \cdot f(p) = \partial f \;. \tag{1.2}$$

Also hängt ∂f nur von dem Verhalten von f in einer kleinen Umgebung von p ab.

Sei jetzt φ eine Karte um p mit $\varphi(p) = 0$, und sei ρ eine Abschneidefunktion mit $\operatorname{supp}(\rho) \subset U^\varphi$. Wir definieren Funktionen $f_i\colon M \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp} f_i \subset U^\varphi$,

$$f_i(q) = \rho(q) \cdot \begin{cases} \dfrac{(f \circ \varphi^{-1})(0, \dots, 0, y^i, \dots, y^n) - (f \circ \varphi^{-1})(0, \dots, 0, y^{i+1}, \dots, y^n)}{y^i} & \text{falls } y_i \neq 0 \text{, und} \\[2ex] \dfrac{\partial(f \circ \varphi^{-1})(y)}{\partial y^i} & \text{für } y^i = 0. \end{cases}$$

für alle $q \in U^\varphi$ und $y = \varphi(q) \in V^\varphi$. Insbesondere gilt

$$f_i(p) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})(x)}{\partial x^i}\bigg|_{x=0} \;. \tag{1.3}$$

Man überzeugt sich leicht, dass f_i von der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ ist (wäre $f \in \mathcal{C}^k(M)$, so wäre im allgemeinen $f_i \in \mathcal{C}^{k-1}(M)$, und der Beweis bräche hier zusammen). Aus $y^i = \varphi^i(q)$ folgt

$$\rho \cdot f = f(p) \cdot \rho + \sum_{i=1}^n \varphi^i \cdot f_i$$

auf ganz U^φ.

Wir setzen die Funktionen $\rho\varphi^i \colon U^\varphi \to \mathbb{R}$ auf ganz M fort. Aus (1.1), (1.2) und (1.3) erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned}\partial f &= \partial(\rho^2 \cdot f) = f(p) \cdot \partial\rho^2 + \sum_{i=1}^n \partial((\rho\varphi^i) \cdot f_i)\\ &= \sum_{i=1}^n \Big(\partial(\rho\varphi^i) \cdot f_i(p) + \underbrace{(\rho\varphi^i)(p)}_{=0} \cdot \partial f_i\Big) = \sum_{i=1}^n \partial(\rho\varphi^i) \cdot \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\Big|_{x=0}\\ &= d_0(f \circ \varphi^{-1})(v_\varphi)\ ,\end{aligned}$$

mit

$$v_\varphi = \begin{pmatrix} \partial(\rho\varphi^1) \\ \vdots \\ \partial(\rho\varphi^n) \end{pmatrix} .$$

□

1.15. Satz und Definition. *Sei M eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit $k \geq 1$, dann existiert eine natürliche Bijektion zwischen den Mengen der physikalischen und der geometrischen Tangentialvektoren in p. Wir identifizieren beide Mengen und sprechen fortan nur noch vom* Tangentialraum T_pM *von M im Punkt p. Dieser Raum trägt eine natürliche Vektorraumstruktur aufgrund von Definition 1.13* (2)*.*

Falls $k = \infty$, so steht T_pM in natürlicher Bijektion mit der Menge der algebraischen Tangentialvektoren in p, und wir identifizieren alle drei Mengen.

Beweis. Wir rekapitulieren hier die „Übersetzungsvorschriften“ zwischen den drei Begriffen, da wir später häufiger zwischen den verschiedenen Interpretationen hin- und herwechseln wollen. Den formalen Beweis, dass die angegebenen Abbildungen jeweils wohldefinierte Bijektionen sind, überlassen wir als Übung.

Sei zunächst ∂ ein algebraischer Tangentialvektor in p, dann erhalten wir einen physikalischen Tangentialvektor v in p durch die Zuordnung

$$v_\varphi^i = \partial\varphi^i := \partial(\rho \cdot \varphi)$$

für eine geeignete Abschneidefunktion ρ. In der Tat kann man wie in Proposition 1.14 zeigen, dass

$$v_\psi^i = \partial(\psi^i \circ \varphi^{-1} \circ \varphi) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}\Big|_{\varphi(p)} \partial\varphi^j .$$

Sei umgekehrt φ eine Karte von M um p, dann definieren wir Richtungsableitungen bei p durch

$$\frac{\partial f}{\partial\varphi^i}(p) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)) .$$

Sei nun $v = (v_\varphi)_\varphi$ ein physikalischer Tangentialvektor, dann erhalten wir einen algebraischen Tangentialvektor

$$\partial := \sum_{i=1}^n v_\varphi^i \frac{\partial}{\partial\varphi^i}\Big|_p .$$

Aufgrund der Transformationsvorschrift in Definition 1.13 (2) ist es egal, welche Karte φ wir zur Konstruktion von ∂ heranziehen.

Sei wieder v ein physikalischer Tangentialvektor. Wir wählen eine Karte φ um p und erhalten eine Kurve

$$\gamma_\varphi \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U^\varphi \qquad \text{mit} \qquad \gamma_\varphi(t) = \varphi^{-1}(t \cdot v_\varphi)$$

für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein. Aufgrund der Transformationsvorschrift in Definition 1.13 (2) sind die Kurven γ_φ für alle Karten φ um p paarweise äquivalent im Sinne von Definition 1.13 (3), wir erhalten also einen geometrischen Tangentialvektor $[\gamma_\varphi]$.

Sei umgekehrt γ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$, dann definiert

$$v_\varphi := (\varphi \circ \gamma)^{\cdot}(0)$$

einen physikalischen Tangentialvektor in p unabhängig von $\gamma \in [\gamma]$.

Sei wieder γ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$, dann erhalten wir einen algebraischen Tangentialvektor ∂ mit

$$\partial f = (f \circ \gamma)^{\cdot}(0)$$

Für die umgekehrte Abbildung gehen wir den Umweg über physikalische Tangentialvektoren.

Schließlich zur Vektorraumstruktur: Die algebraischen Tangentialvektoren bilden einen Vektorraum mit den Verknüpfungen

$$(\partial_1 + \partial_2)(f) = \partial_1 f + \partial_2 f \qquad \text{und} \qquad (r \cdot \partial)(f) = r \cdot (\partial f) \qquad \text{für alle } r \in \mathbb{R} \,.$$

Analog bilden die physikalischen Tangentialvektoren einen Vektorraum mit

$$(v + w)_\varphi = v_\varphi + w_\varphi \qquad \text{und} \qquad (r \cdot v)_\varphi = r \cdot (v_\varphi) \qquad \text{für alle } r \in \mathbb{R} \,.$$

Die obigen Operationen sind verträglich mit der Transformationsvorschrift in Definition 1.13 (2) und den obigen Bijektionen. □

1.16. Proposition und Definition. *Sei M eine n-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit Atlas $\mathcal{A}$. Die Vereinigung*

$$TM = \dot{\bigcup_{p \in M}} T_pM = \bigl\{\, (p, v) \bigm| p \in M, v \in T_pM \,\bigr\}$$

trägt eine Topologie, so dass $\mathcal{A} = \{\, d\varphi \mid \varphi$ Karte von $M \,\}$ einen $2n$-dimensionalen $\mathcal{C}^{k-1}$-Atlas auf TM definiert, wobei

$$d\varphi \colon U^{d\varphi} := \bigcup_{p \in U^\varphi} T_pM \longrightarrow V^{d\varphi} := V^\varphi \times \mathbb{R}^n \qquad \textit{mit} \qquad (p, v) \mapsto \bigl(\varphi(p), v_\varphi\bigr) \,.$$

Die Mannigfaltigkeit TM heißt das Tangentialbündel *von M, die $\mathcal{C}^{k-1}$-Abbildung*

$$\pi \colon TM \longrightarrow M \qquad \textit{mit} \qquad (p, v) \mapsto p$$

heißt die (Fußpunkt-) Projektion.

Beweis. Die Topologie auf TM wird wie folgt definiert: Eine Teilmenge $U \subset TM$ heißt offen, wenn $d\varphi(U \cap U^{d\varphi}) \subset \mathbb{R}^{2n}$ für alle Karten $\varphi \in \mathcal{A}$ offen ist. Man überprüft leicht, dass

(1) die angegebene Topologie Hausdorffsch ist,
(2) eine abzählbare Basis besitzt,
(3) und nicht vom Atlas $\mathcal{A}$, sondern nur vom dazugehörigen maximalen Atlas abhängt.

Die Kartenwechsel haben die Gestalt

$$\bigl(d\psi \circ (d\varphi)^{-1}\bigr)(x, v) = \bigl((\psi \circ \varphi^{-1})(x), d_x(\psi \circ \varphi^{-1})(v)\bigr) \,.$$

Da $\psi \circ \varphi^{-1}$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung ist, ist $d(\psi \circ \varphi^{-1})$ eine $\mathcal{C}^{k-1}$-Abbildung, und das gleiche gilt dann auch für $d\psi \circ (d\varphi)^{-1}$. Somit haben wir einen $\mathcal{C}^{k-1}$-Atlas für TM konstruiert. □

Sei jetzt $F\colon M \to N$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung zwischen $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten mit $k \geq 1$. Dann induziert F eine Abbildung $dF\colon TM \to TN$. Wir geben drei Konstruktionen dieser Abbildung an. Für $p \in M$ definieren wir zunächst $d_pF\colon T_pM \to T_{F(p)}N$.

(1) Falls $k = \infty$ und $\partial \in T_pM$ ein algebraischer Tangentialvektor ist, dann definiere

$$\big(d_pF(\partial)\big)(f) = \partial(f \circ F) \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{C}^\infty(N)\ .$$

(2) Sei φ Karte von M um p und ψ Karte von N um $F(p)$, und sei $v \in T_pM$ physikalischer Tangentialvektor. In der Notation von Definition 1.10 definiere

$$(d_pF(v))_\psi = dF^{\varphi,\psi}{}_{\varphi(p)}(v_\varphi) \in T_{F(p)}N\ .$$

(3) Sei schließlich $\gamma\colon I \to M$ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $[\gamma]$ der dazugehörige geometrische Tangentialvektor. Dann definiere

$$d_pF([\gamma]) = [F \circ \gamma] \in T_{F(p)}N\ .$$

In den Konstruktionen (2) und (3) ist wieder Wohldefiniertheit zu beweisen. Insgesamt definieren wir schließlich

$$dF\colon TM \to TN \qquad \text{durch} \qquad dF(p,v) = d_pF(v) \qquad \text{für alle } (p,v) \in TM\ .$$

1.17. Satz und Definition. *Sei $F\colon M \to N$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung zwischen $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten mit $k \geq 1$. Dann definieren die drei obigen Konstruktionen dieselbe faserweise lineare $\mathcal{C}^{k-1}$-Abbildung $dF\colon TM \to TN$, das* Differential *von F.*

Die Zuordnung $M \mapsto TM$ und $F \mapsto dF$ definiert einen Funktor von der Kategorie der $\mathcal{C}^k$- ($\mathcal{C}^\infty$-) Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der $\mathcal{C}^{k-1}$- ($\mathcal{C}^\infty$-) Mannigfaltigkeiten.

Beweis. Man sieht leicht, dass die obigen drei Konstruktionen wohldefiniert und mit den Abbildungen aus dem Beweis von Satz 1.15 verträglich sind. Hieraus folgt, dass (1)–(3) die gleiche Abbildung $d_pF\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ für alle $p \in M$, und damit auch die gleiche Abbildung $dF\colon TM \to TN$ definieren.

Um zu zeigen, dass dF von der Klasse $\mathcal{C}^{k-1}$ ist betrachten wir beliebige Karten φ von M und ψ von N. Nach Definition 1.16 und obiger Konstruktion (2) erhalten wir

$$\begin{aligned} dF^{d\varphi,d\psi}(x,v_\varphi) &= (d\psi \circ dF \circ (d\varphi)^{-1})(x,v_\varphi) = (d\psi \circ dF)\big(p,v\big) \\ &= \big(F^{\varphi,\psi}(x), dF^{\varphi,\psi}{}_x(v_\varphi)\big) \end{aligned}$$

mit $x = \varphi(p)$ und $v_\varphi = d\varphi(v)$. Somit ist dF in den Karten $d\varphi$ von TM und $d\psi$ von TN durch die Abbildung

$$dF^{d\varphi,d\psi} = \big(F^{\varphi,\psi}, dF^{\varphi,\psi}\big)\colon V^{d\varphi} \to V^{d\psi}$$

gegeben. Da $F^{\varphi,\psi}$ von der Klasse $\mathcal{C}^k$ ist, ist $dF^{\varphi,\psi}$ von der Klasse $\mathcal{C}^{k-1}$, also ist dF eine $\mathcal{C}^{k-1}$-Abbildung.

Funktorialität folgt aus

(1) $d\mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{TM}$ für alle $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten M, und
(2) (*Kettenregel*) $d(F \circ G) = dF \circ dG$ für alle $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten L, M, N und alle Abbildungen $F\colon M \to N$ und $G\colon L \to M$.

Diese Aussagen überlassen wir dem Leser als Übung. □

1.18. Definition. Sei M eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit Tangentialbündel $\pi\colon TM \to M$. Ein ($\mathcal{C}^{k-1}$-) *Vektorfeld* auf M ist eine $\mathcal{C}^{k-1}$-Abbildung $X\colon M \to TM$, so dass $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$. Der Raum aller $\mathcal{C}^{k-1}$-Vektorfelder auf M wird mit $\mathfrak{X}^{k-1}(M)$ oder mit $\Gamma(TM)$ bezeichnet.

Mit anderen Worten: Ein Vektorfeld X ordnet jedem Punkt $p \in M$ einen Vektor $X_p \in T_pM$ zu, denn $(\pi \circ X)(p) = \pi(X_p) = p$. Diese Abbildung ist von der Klasse $\mathcal{C}^{k-1}$ im Sinne der Definitionen 1.10 und 1.16.

1.19. Beispiel. (1) Sei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Dann erhalten wir Vektorfelder $e_1, \dots, e_n$ auf der $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^n$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ realisieren wir den Vektor $e_i|_x \in T_x\mathbb{R}^n$ geometrisch durch die Kurve

$$t \mapsto x + t \cdot e_i ,$$

physikalisch durch den Vektor

$$(e_i|_p)_{\mathrm{id}} = e_i$$

in der Karte $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, und algebraisch durch die Richtungsableitung

$$f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) .$$

(2) Sei $\varphi\colon U^\varphi \to V^\varphi \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte von M, dann ist $U^\varphi \subset M$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Im Beweis von Satz 1.15 haben wir Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial\varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial\varphi^n} \in \mathfrak{X}^{k-1}(U^\varphi)$ definiert. In der Karte φ erhalten wir einfach

$$\left(d\varphi \circ \frac{\partial}{\partial\varphi^i} \circ \varphi^{-1}\right)(x) = d\varphi\left(\varphi^{-1}(x), \frac{\partial}{\partial\varphi^i}\Big|_{\varphi^{-1}(x)}\right) = (x, e_i) .$$

1.20. Bemerkung. (1) $\mathfrak{X}^{k-1}(M)$ ist ein reeller Vektorraum, da sich Vektorfelder mit Skalaren aus $\mathbb{R}$ multiplizieren und punktweise addieren lassen.

(2) $\mathfrak{X}^{k-1}(M)$ ist ein $\mathcal{C}^{k-1}(M)$-Modul, dabei sei

$$(fX)_p = (f \cdot X)_p = f(p) \cdot X_p \in T_pM$$

für alle $f \in \mathcal{C}^{k-1}(M)$, $X \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ und alle $p \in M$. Da $\mathcal{C}^k(M) \subset \mathcal{C}^{k-1}(M)$, ist $\mathfrak{X}^{k-1}(M)$ erst recht ein $\mathcal{C}^k(M)$-Modul.

(3) Man kann Funktionen nach Vektorfeldern ableiten und erhält eine Ableitung $d\colon \mathcal{C}^k(M) \times \mathfrak{X}^{k-1}(M) \to \mathcal{C}^{k-1}(M)$ mit

$$df(X) := X(f) , \qquad \text{mit} \qquad d_pf(X) = X_p(f) \in \mathbb{R}$$

für alle $f \in \mathcal{C}^{k-1}(M)$, $X \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ und alle $p \in M$. Hierbei haben wir benutzt, dass jeder (physikalische oder geometrische) Tangentialvektor wie im Beweis von Satz 1.15 einen algebraischen Tangentialvektor, also eine Richtungsableitung definiert. Es gilt dann die Produktregel

$$X(f \cdot g) = X(f) \cdot g + f \cdot (X(g)) \qquad \text{für alle } f,\, g \in \mathcal{C}^k(M) \text{ und alle } X \in \mathfrak{X}^{k-1}(M) .$$

(4) Die beiden Verknüpfungen aus (2) und (3) hängen wie folgt zusammen:

$$(f \cdot X)(g) = f \cdot (X(g)) \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{C}^{k-1}(M),\, g \in \mathcal{C}^k(M) \text{ und alle } X \in \mathfrak{X}^{k-1}(M) .$$

1.21. Bemerkung. Eine *Derivation* auf einer $\Bbbk$-Algebra $\Bbbk$ ist eine K-lineare Abbildung

$$\mathcal{D}\colon A \to A$$

die eine Produktregel erfüllt:

$$\mathcal{D}(f \cdot g) = \mathcal{D}f \cdot g + f \cdot \mathcal{D}g \qquad \text{für alle } f,\, g \in A .$$

Sei M eine $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit, so kann man wie im Beweis von Satz 1.15 zeigen, dass der $\mathcal{C}^\infty(M)$-Modul $\mathfrak{X}^\infty(M)$ isomorph zum $\mathcal{C}^\infty(M)$-Modul der Derivationen auf $\mathcal{C}^\infty(M)$ ist vermöge Bemerkung 1.20 (3). Wir erhalten also eine „algebraische“ Beschreibung von Vektorfeldern.

1.22. Bemerkung. Sei $X \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ ein Vektorfeld und φ eine Karte von M, dann erhalten wir eine $\mathcal{C}^{k-1}$-Abbildung

$$\pi_{\mathbb{R}^n} \circ d\varphi \circ X \circ \varphi^{-1} \colon V^\varphi \to V^{d\varphi} = V^\varphi \times \mathbb{R}^n$$

mit

$$x \mapsto \bigl(x, (X_{\varphi^{-1}(x)})_\varphi\bigr) =: \bigl(x, X_\varphi(x)\bigr) \;.$$

Wir nennen $X_\varphi \colon V^\varphi \to \mathbb{R}^n$ das *Vektorfeld X in den Koordinaten φ.*

Seien $X_\varphi^1, \dots, X_\varphi^n \colon V^\varphi \to \mathbb{R}$ die Komponenten der Funktion X_φ, dann erhalten wir mit den Vektorfeldern aus Beispiel 1.19 (2), dass

$$X|_{U^\varphi} = \sum_{i=1}^n (X_\varphi^i \circ \varphi) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \;.$$

Als $\mathcal{C}^{k-1}(U^\varphi)$-Modul ist $\mathfrak{X}^{k-1}(U^\varphi)$ also frei mit der Basis $\frac{\partial}{\partial\varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial\varphi^n}$. Auf beliebigen $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten ist $\mathfrak{X}^{k-1}(M)$ im allgemeinen jedoch kein freier $\mathcal{C}^{k-1}(M)$-Modul.

Wir berechnen X_φ wie folgt:

$$X|_{U^\varphi}(\varphi^i) = \sum_{j=1}^n (X_\varphi^j \circ \varphi) \cdot \frac{\partial \varphi^i}{\partial \varphi^j} = \sum_{j=1}^n (X_\varphi^j \circ \varphi) \cdot \frac{\partial(\varphi^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} = X_\varphi^i \circ \varphi \;,$$

also

$$X_\varphi^i = \bigl(X|_{U^\varphi}(\varphi^i)\bigr) \circ \varphi^{-1}$$

und

$$X|_{U^\varphi} = \sum_{i=1}^n X|_{U^\varphi}(\varphi^i) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \;.$$

Es gibt auch eine „geometrische“ Beschreibung von Vektorfeldern mit Hilfe von Flüssen. Hierbei löst man eine zum Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ assoziierte gewöhnliche Differentialgleichung auf M und erhält dadurch eine Schar von Integralkurven auf M, deren Geschwindigkeitsvektor an jeder Stelle gleich X ist.

Wir wollen jetzt eine Lie-Algebren-Struktur auf $\mathfrak{X}^\infty(M)$ einführen. Die Lie-Klammer ist später wichtig bei der Definition 1.38 des Levi-Civita-Zusammenhangs und bei der Definition 1.45 des Riemannschen Krümmungstensors.

1.23. Definition. Eine *Lie-Klammer* auf einem K-Vektorraum V ist eine Abbildung

$$[\,\cdot\,,\,\cdot\,] \colon V \times V \to V$$

mit den Eigenschaften

(1) *Linearität:* $[au + bv, w] = a[u,w] + b[v,w]$ für alle a, $b \in K$ und u, v, $w \in V$;
(2) *Antisymmetrie:* $[u,v] = -[v,u]$ für alle v, $w \in V$;
(3) *Jacobi-Identität:* für alle u, v, $w \in V$ gilt

$$\bigl[u,[v,w]\bigr] + \bigl[v,[w,u]\bigr] + \bigl[w,[u,v]\bigr] = 0 \;.$$

Das Paar $(V, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ heißt dann eine *Lie-Algebra.*

Aus (1) und (2) folgt Bilinearität.

1.24. Beispiel. Auf den Raum $M_n(K)$ der $n \times n$-Matrizen über einem Körper $\Bbbk$ ist eine Lie-Klammer definiert durch

$$[A,B] = AB - BA \;.$$

Die Jacobi-Identität folgt aus der Assoziativität des Matrixproduktes. Eine analoge Definition funktioniert auf jeder assoziativen Algebra.

Die obige Lie-Klammer auf $M_n(\Bbbk)$ lässt sich auf einige interessante Unterräume wie die Räume $\mathfrak{o}(n) \subset M_n(\mathbb{R})$ der schiefsymmetrischen oder $\mathfrak{u}(n) \subset M_n(\mathbb{C})$ der antiselbstadjungierten Matrizen einschränken.

Wir beginnen mit einer „algebraischen“ Beschreibung der Lie-Klammer auf Vektorfeldern. Sei M eine glatte (also $\mathcal{C}^\infty$-) Mannigfaltigkeit, und seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Wir definieren den Operator

$$[X,Y]\colon \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M) \qquad \text{durch} \qquad [X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Aus der Produktregel in Bemerkung 1.20(3) folgt

$$\begin{aligned} [X,Y](f \cdot g) &= \dots \\ &= ([X,Y](f)) \cdot g + f \cdot ([X,Y](g)) \;. \end{aligned}$$

Nach Bemerkung 1.21 ist $[X,Y]$ wieder eine Derivation auf M, also ein Vektorfeld.

In Karten geben wir dieses Vektorfeld unten an. Wir wollen nun eine allgemeinere Beschreibung der Lie-Klammer auf $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten geben. Wenn X ein Vektorfeld auf M ist, und $F\colon M \to N$ differenzierbar, dann ist $dF(X)$ eine Abbildung $M \to TN$, aber kein Vektorfeld auf N. Daher folgende Definition.

1.25. Definition. Sei $F\colon M \to N$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung zwischen $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten. Zwei Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(N)$ heißen *F-verwandt,* wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{dF} & TN \\ {\scriptstyle X}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle Y} \\ M & \xrightarrow{F} & N \;, \end{array}$$

kommutiert, d.h., wenn $d_pF(X_p) = Y_{F(p)}$ für alle $p \in M$ gilt.

1.26. Beispiel. Sei M eine Mannigfaltigkeit, sei φ eine Karte von M, und sei $X \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ ein Vektorfeld auf M, dann erhalten wir eine Abbildung $X_\varphi\colon V^\varphi \to \mathbb{R}^n$ wie in Bemerkung 1.22. Wir fassen X_φ als Vektorfeld auf V^φ auf. Dann sind die Vektorfelder $X|_{U^\varphi}$ auf U^φ und X_φ auf V^φ φ-verwandt. Oder noch etwas schöner: Die Vektorfelder X_φ und X sind φ^{-1}-verwandt.

1.27. Satz und Definition. *Zu jeder $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit $k \geq 2$ existiert eine* Lie-Klammer $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]\colon \mathfrak{X}^{k-1}(M) \times \mathfrak{X}^{k-1}(M) \to \mathfrak{X}^{k-2}(M)$ *mit folgenden Eigenschaften.*

(1) *Für alle X, $Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ und alle Funktionen $f \in \mathcal{C}^k(M)$ gilt*

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \in \mathcal{C}^{k-2}(M) \;.$$

(2) *Sei $M = \mathbb{R}^n$ und seien X, Y Vektorfelder auf $\mathbb{R}^n$, aufgefasst als $\mathcal{C}^\infty$-Abbildungen X, $Y\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dann gilt*

$$[X,Y] = X(Y) - Y(X)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \;,$$

(3) *Sei $F\colon M \to N$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung und X, $Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ seien F-verwandt zu V, $W \in \mathfrak{X}^{k-1}(N)$, dann ist $[X,Y]$ auch F-verwandt zu $[V,W]$. wobei $X(Y)$ die komponentenweise Ableitung von Y nach X bezeichne.*

(4) *Falls $k \geq 3$, so gilt die Jacobi-Identität*

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0 \in \mathfrak{X}^{k-3}(M) \qquad \textit{für alle } X,\ Y,\ Z \in \mathfrak{X}^{k-1}(M) \;.$$

Falls $k = \infty$, so bildet $(\mathfrak{X}^\infty(M), [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ eine Lie-Algebra. Wir nennen $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ auch im Fall $k < \infty$ eine Lie-Klammer auf $\mathfrak{X}^{k-1}(M)$, auch wenn die Werte im Algemeinen nicht wieder in $\mathfrak{X}^{k-1}(M)$ liegen.

Beweis. Wenn wir $[X,Y]\colon \mathcal{C}^k(M) \to \mathcal{C}^{k-2}(M)$ durch (1) definieren, erfüllt $[X,Y]$ nach Vorüberlegung eine Produktregel. Falls $k=\infty$, reicht das nach Bemerkung 1.21 aus, um zu zeigen, dass $[X,Y]$ wieder ein Vektorfeld ist.

Für $\mathcal{C}^k$-Vektorfelder X, Y auf $U \subset \mathbb{R}^n$ folgt aus der Produktregel und dem Satz von Schwarz aus der Analysis II, dass

$$\begin{aligned} X(Y(f)) - Y(X(f)) &= \sum_{i,j=1}^n \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\right) \\ &= \dots = (X(Y) - Y(X))(f) \;. \end{aligned}$$

Also ist (2) mit (1) verträglich.

Außerdem überlegen wir uns, dass (1) mit (3) verträglich ist, denn für $f \in \mathcal{C}^k(N)$ und X, $Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ F-verwandt zu V, W folgt

$$\begin{aligned} (dF \circ [X,Y])(f) &= [X,Y](f \circ F) = X(Y(f\circ F)) - Y(X(f \circ F)) \\ &= X\big((dF \circ Y)(f)\big) - Y\big((dF \circ X)(f)\big) \\ &= X\big(W(f) \circ F\big) - Y\big(V(f) \circ F\big) = [V,W](f) \circ F \;. \end{aligned}$$

Wir benutzen jetzt die „physikalische Darstellung“ in Bemerkung 1.22 und die Überlegung in Beispiel 1.26. Wenn $[X,Y]$ ein Vektorfeld ist, ist $[X,Y]$ φ^{-1}-verwandt zu

$$[X,Y]_\varphi = [X_\varphi, Y_\varphi] = X_\varphi(Y_\varphi) - Y_\varphi(X_\varphi) \;. \tag{*}$$

Damit ist $[X,Y]|_{U^\varphi}$ eindeutig bestimmt. Sei ψ eine weitere Karte, dann ist $X_\varphi|_{\varphi(U^\varphi \cap U^\psi)}$ $\psi \circ \varphi^{-1}$-verwandt zu $X_\psi|_{\psi(U^\varphi\cap U^\psi)}$, analoges gilt für Y_φ und Y_ψ. Dann sind aber auch die Vektorfelder

$$[X_\varphi, Y_\varphi]|_{\varphi(U^\varphi\cap U^\psi)} \qquad \text{und} \qquad [X_\psi, Y_\psi]|_{\psi(U^\varphi \cap U^\psi)}$$

$\psi\circ\varphi^{-1}$-verwandt. Hieraus sieht man leicht, dass ein globales Vektorfeld $[X,Y]$ existiert, welches in jeder Karte φ von M durch $[X_\varphi, Y_\varphi]$ dargestellt wird und (1) erfüllt. Damit sind (1)–(3) bewiesen.

Mit (1) folgt (4) sofort, da

$$\begin{aligned} &([X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]])(f) \\ &\qquad = X(Y(Z(f))) - X(Z(Y(f))) - Y(Z(X(f))) + Z(Y(X(f))) \pm \dots = 0 \;. \qquad \square \end{aligned}$$

Aus (*) erhalten wir auch eine explizite Formel für die Lie-Klammer in Karten. Aus $X|_{U^\varphi} = \sum_{i=1}^n (X_\varphi^i \circ \varphi) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ und Y entsprechend folgt

$$\begin{aligned} [X,Y]|_{U^\varphi} &= \sum_{i=1}^n \Big(\big(X_\varphi(Y_\varphi^i) - Y_\varphi(X_\varphi^i)\big) \circ \varphi\Big) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\left(X_\varphi^j \cdot \frac{\partial Y_\varphi^i}{\partial x^j} - Y_\varphi^j \cdot \frac{\partial X_\varphi^i}{\partial x^j}\right) \circ \varphi\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \;. \end{aligned}$$

1.28. Beispiel. Sei φ eine Karte von M. Die Koordinatenvektorfelder $\frac{\partial}{\partial \varphi^1}$, …, $\frac{\partial}{\partial\varphi^n}$ sind φ-verwandt mit den Standardbasisfeldern e_1, …, e_n auf $V^\varphi \subset \mathbb{R}^n$, nach der Konstruktion der $\frac{\partial}{\partial\varphi^i}$ in Beispiel 1.19 (2) ist das ein Spezialfall von Beispiel 1.26. Da $[e_i, e_j] = 0$, folgt mit Satz 1.27 (3), dass

$$\left[\frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial\varphi^j}\right] = 0 \in \mathfrak{X}(U^\varphi) \;.$$

Insbesondere können wir zweite Ableitungen bezüglich einer festen Karte φ für alle f auf M definieren durch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^i\,\partial\varphi^j} := \frac{\partial}{\partial\varphi^i}\,\frac{\partial f}{\partial\varphi^j} = \frac{\partial}{\partial\varphi^j}\,\frac{\partial f}{\partial\varphi^i} = \frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i\,\partial x^j}\circ\varphi\ .$$

Mit anderen Worten: die Ableitungen nach Koodinatenvektorfeldern zu einer festen Karte vertauschen. In diesem Sinne gilt ein „Satz von Schwarz“ auch auf Mannigfaltigkeiten.

Umgekehrt kann man zeigen: Seien $X_1, \dots, X_n$ Vektorfelder auf M, deren Lie-Klammern auf einer Umgebung U von $p \in M$ verschwinden, so dass $X_{1,p}, \dots, X_{n,p}$ eine Basis von T_pM bilden, dann existiert eine Karte φ mit $U^\varphi \subset U$, so dass $X_i|_{U^\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi^i}$.

1.2. Riemannsche Metriken

In diesem Abschnitt definieren wir Riemannsche Metrik und leiten daraus den Riemannschen Krümmungstensor ab. Der Krümmungstensor ist die entscheidende lokale Größe der Riemannschen Geometrie. In späteren Abschnitten werden wir uns globale Eigenschaften Riemannscher Mannigfaltigkeiten ansehen; einige dieser Eigenschaften lassen bereits aus der Riemannschen Krümmung ableiten.

1.29. Definition. Sei M eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit $k \geq 1$. Eine ($\mathcal{C}^{k-1}$-) *Riemannsche Metrik* g auf M ordnet jedem $p \in M$ ein Skalarprodukt g_p auf dem Vektorraum T_pM zu, so dass für je zwei Vektorfelder X, $Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ die Funktion

$$g(X,Y) \qquad \text{mit} \qquad \bigl(g(X,Y)\bigr)(p) = g_p(X_p, Y_p)$$

von der Klasse $\mathcal{C}^{k-1}$ ist. Eine *Riemannsche* ($\mathcal{C}^k$-) *Mannigfaltigkeit* ist ein Paar (M,g) aus einer $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit und einer Riemannschen Metrik g auf M.

Eine *Riemannsche Isometrie* von (M,g) nach (N,h) ist ein Diffeomorphismus $F\colon M \to N$ mit $F^*h = g$, d.h., für alle $p \in M$ und alle v, $w \in T_pM$ gilt

$$g(v,w) = (F_p^*h)(v,w) = h(d_pF(v), d_pF(w))\ .$$

Sei φ eine Karte von M, dann heißt die Funktion $g^\varphi\colon V^\varphi \to M_n(\mathbb{R})$ mit

$$g_x^\varphi = (g_{ij}^\varphi(x))_{i,j} = \left(g_{\varphi^{-1}(x)}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi^i}, \frac{\partial}{\partial\varphi^j}\right)\right)_{i,j}$$

die *Darstellung* von g in der Karte φ. Das Inverse der Matrix $g_x^\varphi = (g_{ij}^\varphi(x))_{i,j}$ wird mit $(g_\varphi^{ij}(x))_{i,j}$ bezeichnet.

Man überlegt sich leicht (etwa mit Hilfe von Abschneidefunktionen), dass die g_{ij}^φ genau dann für alle Karten φ von der Klasse $\mathcal{C}^{k-1}$ sind, wenn g selbst von der Klasse $\mathcal{C}^{k-1}$ ist.

1.30. Beispiel. Der *n-dimensionale Euklidische Raum* ist definiert als $(\mathbb{R}^n, g^{\mathrm{eukl}})$ mit $g_x^{\mathrm{eukl}} = \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Zur Konstruktion Riemannscher Metriken können wir eine Partition der Eins verwenden. Sei dazu $\mathcal{A}$ ein $\mathcal{C}^k$-Atlas auf M. Eine *$\mathcal{C}^k$-Partition der Eins* zum Atlas $\mathcal{A}$ ist eine Familie $(\rho_i)_{i\in I}$ von $\mathcal{C}^k$-Funktionen auf M mit folgenden Eigenschaften:

(1) Zu jedem $i \in I$ existiert eine Karte $\varphi_i \in \mathcal{A}$, so dass $\operatorname{supp}(\rho_i) \subset U^{\varphi_i}$.
(2) Jeder Punkt in M besitzt eine Umgebung, auf der fast alle ρ_i verschwinden.
(3) Es gilt $\rho_i \geq 0$ für alle $i \in I$ auf ganz M und

$$\sum_{i\in I}\rho_i = 1\ .$$

Wegen (2) ist die Summe in (3) endlich. Eine solche $\mathcal{C}^k$-Partition der Eins existiert auf jeder $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit, wobei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Auf jeder Teilmenge $V^\varphi \subset \mathbb{R}^n$ haben wir die Euklidische Metrik $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ aus Beispiel 1.30. Auf M definieren wir g durch

$$g_p(v,w) = \sum_{i \in I} \rho_i(p) \langle v_{\varphi_i}, w_{\varphi_i} \rangle$$

für alle $p \in M$ und $v, w \in T_pM$. Wegen (1) ist jeder Summand wohldefiniert, wegen (2) ist die Summe lokal endlich und daher g von der Klasse $\mathcal{C}^{k-1}$, und wegen (3) ist g_p positiv definit für alle $p \in M$. Also trägt jede $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit $k \geq 1$ eine Riemannsche $\mathcal{C}^{k-1}$-Metrik, für $\dim M \geq 1$ gibt es sogar überabzählbar viele verschiedene.

Weitere Riemannsche Mannigfaltigkeiten erhalten wir zum Beispiel als Riemannsche Untermannigfaltigkeiten.

1.31. Proposition. *Sei $M \subset N$ eine $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit mit $k \geq 1$. Dann ist T_pM ein linearer Unterraum von T_pN für alle $p \in M$.*

Beweis. Sei $\varphi\colon U^\varphi \to V^\varphi$ eine Untermannigfaltigkeitskarte von M in N um $p \in M$ wie in Definition 1.8. Dann ist $\varphi|_{U^\varphi \cap M}\colon U^\varphi \cap M \to V^\varphi \cap \mathbb{R}^m$ eine Karte von M. Vom „physikalischen“ Standpunkt aus erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} T_pM & \subset & T_pN \\ {\scriptstyle d\varphi|_{U^\varphi \cap M}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle d\varphi} \\ \mathbb{R}^m & \subset & \mathbb{R}^n \end{array} .$$

$\square$

1.32. Definition. Sei $M \subset N$ eine $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit der Riemannschen Mannigfaltigkeit $(N, \bar g)$. Dann ist die *induzierte Riemannsche Metrik* $g = \bar g|_{TM}$ auf M gegeben durch $g_p = \bar g|_{T_pM}$ für alle $p \in M$. Eine *Riemannsche Untermannigfaltigkeit* von $(N, \bar g)$ ist ein Paar (M, g), wobei $M \subset N$ Untermannigfaltigkeit und g die induzierte Metrik ist.

Man überprüft leicht, dass g dann wieder eine Riemannsche $\mathcal{C}^{k-1}$-Metrik ist.

Nach dem Satz von Whitney aus Bemerkung 1.9 (2) ist jede Mannigfaltigkeit diffeomorph zu einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$ und trägt daher die induzierte Metrik. Wir erhalten also einen weiteren Beweis für die Existenz Riemannscher Metriken auf M.

1.33. Bemerkung. Es gilt der **Satz von Nash:** *Jede m-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit ist isometrisch zu einer Riemannschen Untermannigfaltigkeit des n-dimensionalen Euklidischen Raumes, für n hinreichend groß.* Dieser Satz ist weitaus schwieriger zu beweisen als der analoge Satz von Whitney für differenzierbare Mannigfaltigkeiten aus Bemerkung 1.9.

1.34. Beispiel. Die *runde n-Sphäre* ist die Riemannsche Untermannigfaltigkeit (S^n, g^{sph}) des Euklidischen Raumes $(\mathbb{R}^{n+1}, g^{\mathrm{eukl}})$ mit $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ wie in Beispiel 1.6.

Um g^{sph} bezüglich der stereographischen Projektionen $\varphi_\pm$ auszudrücken, bilden wir zwei Vektoren v, $w \in \mathbb{R}^n$ mit Hilfe von $d_x(\varphi_\pm^{-1})$ nach $T_{\varphi^{-1}(x)}S^n \subset T_p\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ ab und berechnen dann ihr Euklidisches Skalarprodukt. Wir haben diese Rechnung für den Fall $n = 2$ in der elementaren Differentialgeometrie durchgeführt. Das Ergebnis war

$$g_x^{\mathrm{sph},\varphi_\pm}(v,w) = \langle d(\varphi_\pm^{-1})_x(v), d(\varphi_\pm^{-1})_x(w) \rangle = \frac{4}{(|x|^2+1)^2} \langle v, w \rangle .$$

1.35. BEISPIEL. Auch der hyperbolische Raum aus der elementaren Differentialgeometrie hat ein n-dimensionales Analogon. Das *Poincarésche Ballmodell* des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes hat die Gestalt $(B_1^n(0), g^{\mathrm{hyp}})$, mit

$$g_x^{\mathrm{hyp}}(v,w) = \frac{4}{(1-|x|^2)^2}\,\langle v,w\rangle\ .$$

Als nächstes betrachten wir den Levi-Civita-Zusammenhang einer Riemannschen Mannigfaltigkeit.

1.36. DEFINITION. Sei M eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit $k \geq 2$. Ein ($\mathcal{C}^{k-2}$-) *Zusammenhang* auf TM ist eine Abbildung

$$\nabla\colon \mathfrak{X}^{k-2}(M) \times \mathfrak{X}^{k-1}(M) \to \mathfrak{X}^{k-2}(M) \qquad \text{mit} \qquad (X,Y) \mapsto \nabla_X Y$$

mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\mathcal{C}^{k-2}(M)$-Linearität im ersten Argument:

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z \qquad \text{für alle } X,\, Y \in \mathfrak{X}^{k-2}(M),\, Z \in \mathfrak{X}^{k-1}(M) \text{ und } f,\, g \in \mathcal{C}^{k-2}(M)\ ,$$

(2) $\mathbb{R}$-Linearität im zweiten Argument:

$$\nabla_X(rY+sZ) = r\nabla_X Y + s\nabla_X Z \qquad \text{für alle } X \in \mathfrak{X}^{k-2}(M),\, Y,\, Z \in \mathfrak{X}^{k-1}(M) \text{ und alle } r,\, s \in \mathbb{R}\ ,$$

(3) $\mathcal{C}^{k-1}(M)$-Derivativität im zweiten Argument:

$$\nabla_X(fY) = X(f)\cdot Y + f\,\nabla_X Y \qquad \text{für alle } X \in \mathfrak{X}^{k-2}(M),\, Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M) \text{ und alle } f \in \mathcal{C}^{k-1}(M)\ .$$

Ein Zusammenhang leitet also ein Vektorfeld nach einem anderen ab.

1.37. BEISPIEL. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, seien X, $Y : U \to \mathbb{R}^n$ Vektorfelder auf U. Die komponentenweise Ableitung

$$\nabla_X Y = X(Y)$$

definiert offensichtlich einen Zusammenhang auf $TU = U \times \mathbb{R}^n$. Dieser Zusammenhang hat die folgenden Eigenschaften:

$$[X,Y] = X(Y) - Y(X) \qquad \text{und} \qquad X\bigl(g^{\mathrm{eukl}}(Y,Z)\bigr) = g^{\mathrm{eukl}}(X(Y),Z) + g^{\mathrm{eukl}}(Y,X(Z))\ .$$

Leider lässt sich auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit nicht so einfach ein Zusammenhang angeben wie auf dem $\mathbb{R}^n$. Wir werden stattdessen die beiden obigen Eigenschaften benutzen, um zumindest auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten einen eindeutigen Zusammenhang zu definieren.

1.38. DEFINITION. Sei M eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit $k \geq 2$. Ein Zusammenhang ∇ auf TM heißt

(1) *torsionsfrei,* wenn

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \in \mathfrak{X}^{k-2}(M) \qquad \text{für alle } X,\, Y \in \mathfrak{X}(M), \text{ und}$$

(2) *Riemannsch* oder *metrisch* bezüglich einer Riemannschen Metrik g auf M, wenn

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \in \mathcal{C}^{k-2}(M) \qquad \text{für alle } X,\, Y,\, Z \in \mathfrak{X}(M)\ .$$

Ein torsionsfreier, Riemannscher Zusammenhang bezüglich einer Riemannschen Metrik g heißt *Levi-Civita-Zusammenhang* von (M,g).

Wir werden bald sehen, dass es auf jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit genau einen solchen Levi-Civita-Zusammenhang gibt. Vorher benötigen wir jedoch noch ein wenig Technik. Wir verallgemeinern das Lemma von Riesz auf Vektorfelder.

1.39. Lemma. *Sei (M,g) eine Riemannsche $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit, und sei $\alpha\colon \mathfrak{X}^{k-1}(M) \to \mathcal{C}^\ell(M)$ eine $\mathcal{C}^{k-1}(M)$-lineare Abbildung mit $\ell \le k-1$. Dann existiert genau ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}^\ell(M)$, so dass*

$$\alpha(Y) = \langle X, Y\rangle \in \mathcal{C}^\ell(M) \qquad \textit{für alle } Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)\ .$$

Beweis. Sei φ eine Karte von M. Für jedes $p \in U^\varphi$ existiert eine Abschneidefunktion $\rho \in \mathcal{C}^k(M)$ mit $\rho(p) = 1$ und mit Träger in U^φ. Für alle $Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ folgt

$$(\alpha(\rho Y))(p) = \rho(p)\,(\alpha(Y))(p) = (\alpha(Y))(p)\ ,$$

also hängt $\alpha(Y)|_{U^\varphi}$ nur von $Y|_{U^\varphi}$ ab. Aus $Y = \sum_{i=1}^n (Y^i \circ \varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi_i} = \sum_{i=1}^n Y(\varphi^i)\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi_i}$ folgt

$$\alpha(Y)|_{U^\varphi} = \alpha\biggl(\sum_{i=1}^n Y(\varphi^i)\,\frac{\partial}{\partial\varphi^i}\biggr) = \sum_{i=1}^n Y(\varphi^i)\,\alpha\biggl(\frac{\partial}{\partial\varphi^i}\biggr)\ .$$

Da g_p nicht ausgeartet ist, existiert nach dem Lemma von Riesz für alle p ein eindeutig bestimmter Vektor

$$X_p^\varphi = \sum_{i,j=1}^n g_\varphi^{ij}(\varphi(p))\,\alpha\biggl(\frac{\partial}{\partial\varphi^i}\Big|_p\biggr)\,\frac{\partial}{\partial\varphi^j}\Big|_p\ ,$$

so dass

$$\langle X_p^\varphi, Y_p\rangle = \sum_{i,j,k=1}^n g_\varphi^{ij}(\varphi(p))\,\alpha\biggl(\frac{\partial}{\partial\varphi^i}\Big|_p\biggr)\,g^\varphi_{jk}(\varphi(p))\,Y(\varphi^k) = \alpha_p(Y)\ ,$$

und X_p^φ hängt $\mathcal{C}^\ell$-differenzierbar von $p \in U^\varphi$ ab.

Sei ψ eine weitere Karte, so folgt

$$\langle X^\varphi - X^\psi, Y\rangle|_{U^\varphi \cap U^\psi} = \alpha(Y) - \alpha(Y) = 0 \qquad \text{für alle } Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)\ ,$$

also gilt $X^\varphi = X^\psi$ auf $U^\varphi \cap U^\psi$, und wir erhalten ein globales Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}^\ell(M)$ mit $X|_{U^\varphi} = X^\varphi$ und

$$\alpha(Y) = \langle X, Y\rangle \in \mathcal{C}^\ell(M) \qquad \text{für alle } Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)\ .$$

Aus dem gleichen Argument folgt auch die Eindeutigkeit von X. □

1.40. Bemerkung. Auch für die Lie-Klammer gelten Produktregeln, nämlich

$$[fX, Y] = f\,[X,Y] - Y(f)\,X \qquad \text{und} \qquad [X, fY] = X(f)\,Y + f\,[X,Y]$$

für alle $f \in \mathcal{C}^{k-1}(M)$ und alle X, $Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$. Zum Beweis berechne etwa

$$\begin{aligned}[][X, fY](h) &= X(fY(h)) - f\,Y(X(h))\\ &= X(f)\,Y(h) + f\,X(Y(h)) - f\,Y(X(h)) = X(f)\,Y + f\,[X,Y]\ .\end{aligned}$$

Indem man $h = \varphi^1, \dots, \varphi^n$ wählt, erhält man die Komponenten von $[X, fY]$ und $X(f)\cdot Y + f\cdot[X,Y]$ bezüglich einer Karte φ, und damit Gleichheit der Vektorfelder.

1.41. Satz. *Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann gibt es genau einen Levi-Civita-Zusammenhang ∇ auf TM. Es gilt die* Koszul-Formel

$$\begin{aligned}2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y))\\ &\qquad + g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y)\ .\end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen zunächst die Koszul-Formel. Dann folgern wir mit Lemma 1.39, dass für alle X, $Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ genau ein Vektorfeld $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}^{k-2}(M)$ existiert, das die Koszul-Formel erfüllt. Zum Schluss zeigen wir, dass $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$ tatsächlich einen Levi-Civita-Zusammenhang definiert. Wegen der Koszul-Formel ist dieser aber auch eindeutig.

Die Koszul-Formel ergibt sich sofort als Summe der Gleichungen

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) &= X(g(Y,Z)) \;, \\ g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) &= Y(g(Z,X)) \;, \\ -g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) &= -Z(g(X,Y)) \;, \\ g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) &= g([X,Y],Z) \;, \\ -g(\nabla_Y Z, X) + g(\nabla_Z Y, X) &= -g([Y,Z],X) \\ \text{und} \qquad g(\nabla_Z X, Y) - g(\nabla_X Z, Y) &= g([Z,X],Y) \;, \end{aligned}$$

die sich daraus ergeben, dass ∇ Riemannsch und torsionsfrei sein soll. Man sieht leicht, dass das Vektorfeld $\nabla_X Y$ — falls es existiert — durch die Koszulformel eindeutig bestimmt ist.

Wir beweisen $\mathcal{C}^{k-2}$-Linearität der Abbildung

$$Z \mapsto X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y) \;.$$

In der Tat gilt

$$\begin{aligned} &X(g(Y,fZ)) + Y(g(fZ,X)) - fZ(g(X,Y)) + g([X,Y],fZ) - g([Y,fZ],X) + g([fZ,X],Y) \\ &\quad = X(f)\, g(Y,Z) + f\, X(g(Y,Z)) + Y(f)\, g(Z,X) + f\, Y(g(Z,X)) - f\, Z(g(X,Y)) \\ &\qquad\quad + f\, g([X,Y],Z) - Y(f)\, g(Z,X) - f\, g([Y,Z],X) - X(f)\, g(Z,Y) + f\, g([Z,X],Y) \\ &\quad = f \cdot \big(X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y) \big) \;. \end{aligned}$$

Aus Lemma 1.39 folgt die Existenz eines Vektorfeldes $\nabla_X Y$, das der Koszul-Formel genügt.

Analog zur obigen Rechnung beweisen wir

$$\nabla_{fX} Y = f\, \nabla_X Y \qquad \text{und} \qquad \nabla_X (fY) = X(f)\, Y + f\, \nabla_X Y \;,$$

es folgt, dass $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$ ein Zusammenhang ist.

Aus der Koszul-Formel folgt auch

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle + 2\langle \nabla_X Z, Y \rangle &= 2X\langle Y, Z\rangle \\ \text{und} \qquad 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle - 2\langle \nabla_Y X, Z \rangle &= 2\langle [X,Y], Z \rangle \;, \end{aligned}$$

also ist ∇ Riemannsch und torsionsfrei. Insgesamt existiert also der Levi-Civita-Zusammenhang und ist durch die Koszul-Formel eindeutig festgelegt. ☐

1.42. Bemerkung. Es sei (M,g) Riemannsche Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Metrik. Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, dann können wir Y auffassen als Abbildung $Y\colon M \to \mathbb{R}^N$ mit

$$p \mapsto Y(p) \in T_p M \subset T_p \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N \;.$$

Es sei $X(Y)\colon M \to \mathbb{R}^N$ die komponentenweise Ableitung. Dann wird der Levi-Civita-Zusammenhang auf M eindeutig festgelegt durch die Gleichung

$$g(\nabla_X Y, Z) = \langle X(Y), Z \rangle$$

für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ (Übung).

1.43. Definition. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei φ eine Karte von M, und sei ∇ ein Zusammenhang auf TM. Dann heißen die Koeffizienten ${}^{\varphi}\Gamma_{ij}^{k}\colon V^{\varphi} \to \mathbb{R}$ in

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} = \sum_{k=1}^{n} ({}^{\varphi}\Gamma_{ij}^{k} \circ \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi^k}$$

für $i, j = 1, \ldots, n$ die *Christoffel-Symbole* von ∇ bezüglich φ.

1.44. Bemerkung. Die Koordinatenfelder an der Stelle $p \in U^{\varphi}$ bilden eine Basis von T_pM. Außerdem kann man für jedes $p \in U^{\varphi}$ mit Hilfe einer geeigneten Abschneidefunktion wie im Beweis von Proposition 1.14 zeigen, dass $(\nabla_X Y)_p$ nur von $X|_{U^{\varphi}}$ und $Y|_{U^{\varphi}}$ abhängt. Daher ist die Definition der ${}^{\varphi}\Gamma_{ij}^{k}$ sinnvoll.

Der Zusammenhang ∇ ist auf U^{φ} durch Angabe aller ${}^{\varphi}\Gamma_{ij}^{k}$ eindeutig beschrieben. Aus Definition 1.36 folgern wir, dass für beliebige Vektorfelder X und Y auf M gilt:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y|_{U^{\varphi}} &= \sum_{i,k=1}^{n} \nabla_{X(\varphi^i)\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \left(Y(\varphi^k) \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right) \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} X(\varphi^i) \left(\frac{\partial (Y(\varphi^k))}{\partial \varphi^i} + \sum_{j=1}^{n} Y(\varphi^j) \, ({}^{\varphi}\Gamma_{ij}^{k} \circ \varphi) \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \, . \end{aligned}$$

1.45. Definition. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $k \geq 3$, dann heißt die Abbildung $R\colon \mathfrak{X}^{k-2}(M) \times \mathfrak{X}^{k-2}(M) \times \mathfrak{X}^{k-1}(M) \to \mathfrak{X}^{k-3}(M)$ mit

$$(X, Y, Z) \mapsto R_{X,Y} Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

der *Riemannsche Krümmungstensor* von (M, g).

Wir wollen kurz erläutern, warum R ein „Tensor“ genannt wird. Der Einfachheit halber definieren wir aber nur $(a, 0)$- und $(a, 1)$-Tensoren.

1.46. Definition. Sei M eine differenzierbare $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit $k \geq 1$, und sei $a \in \mathbb{N}_0$. Ein $(a, 0)$-*Tensor* der Klasse $\mathcal{C}^l$ ist eine $\mathcal{C}^k$-multilineare Abbildung $S\colon \mathfrak{X}^{k-1}(M)^a \to \mathcal{C}^l(M)$. Ein $(a, 1)$-*Tensor* der Klasse $\mathcal{C}^l$ ist eine $\mathcal{C}^k$-multilineare Abbildung $S\colon \mathfrak{X}^{k-1}(M)^a \to \mathfrak{X}^l(M)$.

1.47. Beispiel. (1) Eine $\mathcal{C}^l$-Funktion ist ein $(0, 0)$-Tensor.
(2) Ein $\mathcal{C}^l$-Vektorfeld ist ein $(0, 1)$-Tensor.
(3) Eine Riemannsche Metrik ist ein symmetrischer $(2, 0)$-Tensor der Klasse $\mathcal{C}^{k-1}$.

1.48. Lemma. *Sei S ein (a, b)-Tensor mit $b = 0$ oder 1, seien $X_1, \ldots, X_a \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$, und sei $p \in M$. Dann hängt $S(X_1, \ldots, X_a)(p)$ nur von $X_1|_p, \ldots, X_a|_p \in T_pM$ ab, wir erhalten also eine $\mathbb{R}$-multilineare Abbildung $S_p\colon (T_pM)^a \to \mathbb{R}$ bzw. $\to T_pM$.*

Da Tensoren also bereits punktweise multlinear sind, erhalten wir insbesondere $\mathcal{C}^r$-Multilinearität $\mathfrak{X}^r(M) \to \mathcal{C}^r(M)$ bzw. $\mathfrak{X}^r(M)$ für alle $0 \leq r \leq l$.

Beweis. Sei φ eine Karte von M, dann existiert zu jedem $p \in U^{\varphi}$ eine Abschneidefunktion ρ wie im Beweis von Lemma 1.39. Aus Multilinearität folgt

$$S(\rho X_1, \ldots, \rho X_a)(p) = \rho(p)^a \, S(X_1, \ldots, X_a)(p) = S(X_1, \ldots, X_a)(p) \, ,$$

also hängt $S(\rho X_1, \ldots, \rho X_a)|_{U^{\varphi}}$ nur von $X_1|_{U^{\varphi}}, \ldots, X_a|_{U^{\varphi}} \in \mathfrak{X}(U^{\varphi})$ ab.

Einschränken auf U^φ ist also möglich und liefert

$$\begin{aligned} S(X_1,\dots,X_a)(p) &= S\biggl(\sum_{i_1=1}^n \rho\, X_1(\varphi^{i_1})\,\frac{\partial}{\partial\varphi^{i_1}},\dots,\sum_{i_a=1}^n \rho\, X_a(\varphi^{i_a})\,\frac{\partial}{\partial\varphi^{i_a}}\biggr)(p)\\ &= \sum_{i_1,\dots,i_a=1}^n X_{1,p}(\varphi^{i_1})\cdots X_{a,p}(\varphi^{i_a})\,\cdot S\biggl(\frac{\partial}{\partial\varphi^{i_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial\varphi^{i_a}}\biggr)(p)\;. \end{aligned}$$

□

1.49. Bemerkung. Aus dem obigen Beweis folgt für einen $(a,0)$-Tensor S sofort

$$S(X_1,\dots,X_a)|_{U^\varphi} = \sum_{i_1,\dots,i_a=1}^n X_1(\varphi^{i_1})\cdots X_a(\varphi^{i_a})\,\cdot({}^\varphi S_{i_1,\dots,i_a}\circ\varphi)$$

mit ${}^\varphi S_{i_1,\dots,i_a}\in\mathcal{C}^l(V^\varphi)$ für alle Indexkombinationen. Einen $(a,1)$-Tensor S können wir noch weiter zerlegen in

$$S(X_1,\dots,X_a)|_{U^\varphi} = \sum_{i_1,\dots,i_a=1}^n\sum_{j=1}^n X_1(\varphi^{i_1})\cdots X_a(\varphi^{i_a})\,\cdot({}^\varphi S^j_{i_1,\dots,i_a}\circ\varphi)\,\frac{\partial}{\partial\varphi^j}\;.$$

1.50. Satz. *Sei M eine Riemannsche $\mathcal{C}^K$-Mannigfaltigkeit mit $k\ge 3$. Dann ist R ein $(3,1)$-Tensor der Klasse $\mathcal{C}^{k-3}$.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $R_{X,Y}Z$ in jedem Argument $\mathcal{C}^{k-1}$-linear ist.
Sei also $f\in\mathcal{C}^{k-1}(M)$ und X, Y, $Z\in\mathfrak{X}^{k-1}(M)$, dann folgt

$$\begin{aligned} R_{fX,Y}Z &= \nabla_{fX}\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_{fX}Z-\nabla_{[fX,Y]}Z\\ &= f\,\nabla_X\nabla_Y Z - Y(f)\,\nabla_X Z - f\,\nabla_Y\nabla_X Z+\nabla_{Y(f)\,X}Z - f\,\nabla_{[X,Y]}Z\\ &= f\,R_{X,Y}Z\;. \end{aligned}$$

Außerdem gilt offensichtlich

$$R_{X,fY}Z = -R_{fY,X}Z = -f\,R_{Y,X}Z = f\,R_{X,Y}Z\;.$$

Für das letzte Argument müssen wir etwas mehr rechnen:

$$\begin{aligned} R_{X,Y}(fZ) &= \nabla_X\bigl(Y(f)\,Z+f\,\nabla_Y Z\bigr)-\nabla_Y\bigl(X(f)\,Z+f\,\nabla_X Z\bigr)-[X,Y](f)\,Z-f\,\nabla_{[X,Y]}Z\\ &= X(Y(f))\,Z+Y(f)\,\nabla_X Z+X(f)\,\nabla_Y Z+f\,\nabla_X\nabla_Y Z\\ &\qquad -Y(X(f))\,Z-X(f)\,\nabla_Y Z-Y(f)\,\nabla_X Z-f\,\nabla_Y\nabla_X Z\\ &\qquad -[X,Y](f)\,Z-f\,\nabla_{[X,Y]}Z\\ &= f\,R_{X,Y}Z\;. \end{aligned}$$

□

Der Riemannsche Krümmungstensor enthält sehr viel geometrische Information über die globale Gestalt der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g). Bevor wir geometrische Größen aus dem Krümmungstensor herauslesen können, müssen wir erst seine wichtigsten algebraischen Eigenschaften verstehen.

1.51. Satz. *Der Riemannsche Krümmungstensor hat die folgenden Symmetrien.*

(1) *Schiefsymmetrie: $R_{X,X}Z=0$,*
(2) *erste Bianchi-Identität: $R_{X,Y}Z+R_{Y,Z}X+R_{Z,X}Y=0$,*
(3) *Metrizität: $g(R_{X,Y}Z,Z)=0$,*
(4) *Blocksymmetrie: $g(R_{X,Y}Z,W)=g(R_{Z,W}X,Y)$*

für alle X, Y, Z, $W\in\mathfrak{X}^{k-1}(M)$.

Beachte, dass nach Lemma 1.39 der 3-1-Tensor R und der 4-0-Tensor $g(R_{\cdot,\cdot}\,\cdot,\,\cdot)$ genau die gleiche Information enthalten. Aus (1) bzw. (3) folgt wegen der Multilinearität auch

$$R_{X,Y}Z + R_{Y,X}Z = R_{X+Y,X+Y}Z - R_{X,X}Z - R_{Y,Y}Z = 0 \text{und} \quad g(R_{X,Y}Z, W) + g(R_{X,Y}W, Z) \quad = 0\ .$$

Beweis. Wegen Lemma 1.48 reicht es, die Behauptungen in allen Karten φ einzeln zu beweisen. Außerdem dürfen wir $X, Y, Z, W \in \left\{\frac{\partial}{\partial\varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial\varphi^n}\right\}$ annehmen, da sich alle anderen Vektorfelder aus diesen linear kombinieren lassen. Insbesondere verschwinden dann alle Lie-Klammern gemäß Beispiel 1.28, was die Rechnungen etwas vereinfacht.

Behauptung (1) ist offensichtlich. Behauptung (2) folgt aus der Torsionsfreiheit von ∇:

$$\begin{aligned} R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y \\ &= \nabla_Y[Z,X] + \nabla_Z[X,Y] + \nabla_X[Y,Z] = 0 \end{aligned}$$

nach Wahl der Vektorfelder X, Y, Z.

Behauptung (3) folgt, da ∇ metrisch ist:

$$\begin{aligned} g(R_{X,Y}Z, Z) &= g(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z, Z) \\ &= X\big(g(\nabla_Y Z, Z)\big) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) - Y\big(g(\nabla_X Z, Z)\big) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) \\ &= \frac{1}{2}\Big(X\big(Y(g(Z,Z))\big) - Y\big(X(g(Z,Z))\big)\Big) = [X,Z](g(Z,Z)) = 0\ . \end{aligned}$$

Schließlich folgt Behauptung (4) rein algebraisch aus (1)–(3), denn

$$\begin{aligned} 2g(R_{X,Y}Z, W) &= -g(R_{Y,Z}X, W) - g(R_{Z,X}Y, W) - g(R_{X,Y}W, Z) \\ &= g(R_{Y,Z}W, X) + g(R_{Z,X}W, Y) - g(R_{X,Y}W, Z) \\ &= -g(R_{Z,W}Y, X) - g(R_{W,Y}Z, X) - g(R_{X,W}Z, Y) - g(R_{W,Z}X, Y) - g(R_{X,Y}W, Z) \\ &= 2g(R_{Z,W}X, Y) + \underbrace{g(R_{W,Y}X, Z) + g(R_{X,W}Y, Z) + g(R_{Y,X}W, Z)}_{=0}\ . \end{aligned}$$

□

1.52. Proposition. *Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei φ eine Karte von M. Dann gilt*

$$\begin{aligned} {}^{\varphi}\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n g_\varphi^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}^\varphi}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}^\varphi}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}^\varphi}{\partial x^l}\right) \\ \textit{und} \qquad {}^{\varphi}R_{ijk}^l &= \frac{\partial\,{}^{\varphi}\Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial\,{}^{\varphi}\Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \sum_{m=1}^n\left({}^{\varphi}\Gamma_{im}^l\,{}^{\varphi}\Gamma_{jk}^m - {}^{\varphi}\Gamma_{jm}^l\,{}^{\varphi}\Gamma_{ik}^m\right)\ . \end{aligned}$$

Beweis. Wir benutzen die Formel im Beweis von Lemma 1.39, um die erste Gleichung aus der Koszul-Formel in Satz 1.41 herzuleiten. Die zweite Formel ist dann eine einfache Konsequenz aus der Definition von R und Bemerkung 1.44. Bei beiden Rechnungen nutzen wir wieder aus, dass die Lie-Klammern der Koordinatenfelder verschwinden. □

Nachdem wir den Krümmungstensor definiert haben, wollen wir aus ihm drei weitere Krümmungsgrößen ableiten.

1.53. Definition. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Krümmungstensor R, und sei $p \in M$.

(1) Für jeden zweidimensionalen Unterraum $E \subset T_pM$ mit Basis (v, w) ist die *Schnittkrümmung* definiert als

$$K_p(E) = \frac{g(R_{v,w}w, v)}{g(v,v)g(w,w) - g(v,w)^2} \in \mathbb{R}\ .$$

(2) Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Orthonormalbasis von T_pM, dann ist die *Ricci-Krümmung* auf T_pM definiert als

$$\mathrm{ric}_p(v,w) = \mathrm{tr}(R_{\cdot\,,v}w) = \sum_{i=1}^n g(R_{v,e_i}, e_i, w) \in \mathbb{R}\;.$$

(3) Die *Skalarkrümmung* von M ist definiert als

$$\mathrm{scal}(p) = \sum_{i=1}^n \mathrm{ric}(e_i, e_i) = \sum_{i,j=1}^n g(R_{e_i,e_j} e_j, e_i) \in \mathbb{R}\;.$$

1.54. Bemerkung. (1) Wir müssen zeigen, dass die Schnittkrümmung wohldefiniert, das heißt unabhängig von der Basis ist. Man kann das durch nachrechnen einsehen, oder aber wie folgt: Nach Satz 1.51 (1) und (3) sind für alle v, $w \in E$ die $(2,0)$-Tensoren

$$g(R_{\cdot\,,\cdot}\,w, v) \qquad \text{und} \qquad g(R_{v,w}\,\cdot\,,\,\cdot\,)\colon E \times E \to \mathbb{R}$$

Determinantenfunktionen (alternierende Formen maximalen Grades) auf E. Sei also $A \in GL(E)$, dann gilt für die Basis (Av, Aw), dass

$$g(R_{Av,Aw}Aw, Av) = \det A\, g(R_{Av,Aw}w, v) = (\det A)^2\; g(R_{v,w}w, v)\;.$$

Eine entsprechende Formel gilt für den Nenner

$$|v|^2\,|w|^2 - \langle v, w\rangle^2 = \big(\langle\,\cdot\,,v\rangle\langle\,\cdot\,,w\rangle - \langle\,\cdot\,,w\rangle\langle\,\cdot\,,v\rangle\big)(v,w)\;,$$

also ist $K_p(E)$ von der Wahl der Basis unabhängig.

(2) Man kann den Krümmungstensor aus der Schnittkrümmung zurückgewinnen (Übung).

(3) Auch Ricci- und Skalarkrümmung sind wohldefiniert, wie man (etwa für die Ricci-Krümmung) leicht überprüft: Sei etwa $f_1, \ldots, f_n$ eine weitere Orthonormalbasis von T_pM, dann existiert eine Matrix $A \in O(n)$ mit

$$f_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}\, e_i \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}\;,$$

da $A \cdot A^t$ die Einheitsmatrix ergibt. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n g(R_{v,f_k}f_k, w) &= \sum_{i,j,k=1}^n g(R_{v,a_{ik}e_i}a_{jk}e_j, w)\\ &= \sum_{i,j,k=1}^n a_{ik}a_{jk}\, g(R_{v,e_i}e_j, w) = \sum_{i=1}^n g(R_{v,e_i}, e_i, w) \in \mathbb{R}\;.\end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung liefert die Wohldefiniertheit der Skalarkrümmung.

(4) Wegen Satz 1.51 ist ric ein symmetrischer $(2,0)$-Tensor.

Wir werden der Schnitt- und Riccikrümmung im Laufe der Vorlesung im Zusammenhang mit dem Verhalten von Geodätischen gelegentlich begegnen. Die Skalarkrümmung wird nicht auftauchen; sie spielt aber eine gewisse Rolle beim Studium von Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten.

1.3. Bogenlänge und Geodätische

In diesem Kapitel definieren wir die Bogenlänge von Kurven und den Riemannschen Abstandsbegriff auf Mannigfaltigkeiten. Wir sehen, dass kürzeste Kurven zwischen zwei Punkten einer bestimmten Differentialgleichung genügen, und nennen solche Kurven geodätische Linien.

Wir werden ab jetzt keinen Wert mehr auf die genaue Differenzierbarkeitsordnung legen. Außerdem werden wir die Abkürzungen

$$\langle v, w\rangle = g_p(v, w) \qquad \text{und} \qquad \|v\| = \sqrt{g_p(v, v)}$$

für alle $p \in M$ und alle v, $w \in T_pM$ verwenden, so lange Fußpunkt p und Metrik g aus dem Kontext klar sind.

1.55. Definition. Eine (parametrisierte) Kurve $\gamma\colon I \to M$ heißt *regulär,* wenn $\dot\gamma(t) = [\gamma(\cdot - t)] \neq 0 \in T_{\gamma(t)}M$ für alle $t \in I$. Eine *Parametertransformation* für γ ist ein Diffeomorphismus $\vartheta\colon J \to I$ mit $J \subset \mathbb{R}$, in diesem Fall heißt $\gamma \circ \vartheta\colon J \to M$ eine *Umparametrisierung* von M.

Im Gegensatz zur elementaren Differentialgeometrie betrachten wir hier parametrisierte Kurven, nicht parametrisierte Kurven bis auf Umparametrisierung.

1.56. Definition. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $\gamma\colon I \to M$ eine Kurve, und sei $[a, b] \subset I$. Dann ist die *Bogenlänge* von $\gamma|_{[a,b]}$ definiert als

$$L(\gamma|_{[a,b]}) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\; dt = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}\, dt\ .$$

Die Kurve γ heißt *nach Bogenlänge parametrisiert,* wenn $\|\dot\gamma(t)\| = 1$ für alle $t \in I$.

1.57. Bemerkung. Im Euklidischen Raum hatten wir die Bogenlänge einer Kurve als das Supremum aller Längen von approximierenden Polygonzügen definiert. Anschließend haben wir gezeigt, dass für (stückweise) differenzierbare Kurven die Bogenlänge durch obiges Integral berechnet werden kann, siehe Abschnitt 2.1 der Vorlesung vom letzten Semester. Da die ursprüngliche Definition auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten nicht sinnvoll ist, verwenden wir hier den Integralausdruck.

Die folgenden Eigenschaften der Bogenlänge gelten auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit denselben Beweisen wie in der elementaren Differentialgeometrie.

(1) Die Bogenlänge ist invariant unter Umparametrisierungen, also

$$L\big((\gamma \circ \vartheta)|_{[a,b]}\big) = L(\gamma|_{[\vartheta(a),\vartheta(b)]})\ .$$

Wie in der elementaren Differentialgeometrie folgt das unmittelbar aus der Integraltransformationsformel.

(2) Eine Kurve $\gamma\colon I \to M$ ist genau dann nach Bogenlänge parametrisiert, wenn für alle a, $b \in I$ mit $a < b$ gilt, dass

$$L(\gamma|_{[a,b]}) = \int_a^b 1\, dt = b - a\ .$$

(3) Jede reguläre Kurve lässt sich nach Bogenlänge umparametrisieren. Dazu wählen wir eine Umparametrisierung $\vartheta\colon J \to I$ mit

$$\vartheta^{-1}(t) = \int_{t_0}^t \|\dot\gamma(s)\|\; ds\ ,$$

dann ist $\varphi \circ \vartheta\colon J \to I$ nach Bogenlänge parametrisiert. Sei umgekehrt $\vartheta'\colon J' \to I$ eine weitere Umparametrisierung, so dass auch $\varphi \circ \vartheta'$ nach Bogenlänge parametrisiert ist, dann existiert eine Konstante c, so dass $\vartheta'(s) = \vartheta(c \pm s)$ für alle $s \in J'$.

Wir wollen als nächstes die „erste Variation“ der Bogenlänge berechnen. Gemeint ist dabei die erste Ableitung der Bogenlänge einer differenzierbaren Familie von Kurven. Um die zugehörige Rechnung durchzuführen, brauchen wir Vektorfelder und Zusammenhänge längs Abbildungen.

1.58. DEFINITION. Sei $F\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung, und sei $\pi\colon TN \to N$ das Tangentialbündel von N. Ein *Vektorfeld längs* F ist eine differenzierbare Abbildung $X\colon M \to TN$ mit $\pi \circ X = F$. Wir bezeichnen den Raum dieser Vektorfelder mit $\mathfrak{X}(F)$.

1.59. BEMERKUNG. Vektorfelder längs $F\colon M \to N$ haben ähnliche Eigenschaften wie gewöhnliche Vektorfelder, siehe Bemerkung 1.20.

(1) Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(N)$, dann sind $dF \circ X$ und $Y \circ F\colon M \to TN$ Vektorfelder längs F.

(2) Der Raum $\mathfrak{X}(F)$ bildet ein $\mathcal{C}(M)$-Modul mit

$$(fX)_p = f(p)\, X_p \in T_{F(p)}N$$

für alle $f \in \mathcal{C}(M)$, $X \in \mathfrak{X}(F)$ und alle $p \in M$.

(3) Ableiten liefert eine Abbildung $\mathfrak{X}(F) \times \mathcal{C}^1(N) \to \mathcal{C}(M)$ mit

$$(X(f))_p = X_p(f) = df_{F(p)}(X_p)$$

für alle $f \in \mathcal{C}^1(N)$, $X \in \mathfrak{X}(F)$ und alle $p \in M$. Für alle f, $h \in \mathcal{C}^1(N)$ und $\mathfrak{X}(F)$ gilt die Produktregel

$$X(fh) = X(f) \cdot (h \circ F) + (f \circ F) \cdot X(h) \in C(M)\ .$$

(4) Sei ψ eine Karte von N, dann ist $U := F^{-1}(U^\psi)$ offen in M, da F als differenzierbare Abbildung insbesondere stetig ist. Wie in Bemerkung 1.22 sehen wir für alle $X \in \mathfrak{X}(F)$, dass

$$X|_U = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{X(\psi^i)}_{\in \mathcal{C}(U)} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \psi^i} \circ F\right)}_{\in \mathfrak{X}(F|_U)}\ .$$

1.60. DEFINITION. Ein *Zusammenhang längs* F ist eine Abbildung $\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^1(F) \to \mathfrak{X}(F)$ mit den Eigenschaften

(1) $\mathcal{C}(M)$-Linearität im ersten Argument,
(2) $\mathbb{R}$-Linearität im zweiten Argument,
(3) $\mathcal{C}^1(M)$-Derivativität im zweiten Argument:

$$\nabla_X(fY) = X(f) \cdot Y + f\, \nabla_X Y \qquad \text{für alle } X \in \mathfrak{X}(M),\ Y \in \mathfrak{X}^1(F) \text{ und alle } f \in \mathcal{C}^1(M)\ .$$

Die *Krümmung* eines Zusammenhangs ∇ längs F ist definiert als

$$R_{X,Y}Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \in \mathfrak{X}(F) \qquad \text{für alle } X,\ Y \in \mathfrak{X}^1(M) \text{ und alle } Z \in \mathfrak{X}^2(F)\ .$$

1.61. PROPOSITION UND DEFINITION. *Sei ∇^{TN} ein Zusammenhang auf TN, und sei $F\colon M \to N$ differenzierbar, dann existiert genau ein Zusammenhang ∇^F längs F, so dass*

$$\nabla^F_X(Y \circ F) = \nabla^{TN}_{dF\circ X} Y \in \mathfrak{X}(F) \tag{1}$$

für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ und alle $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Er heißt der von ∇^{TN} induzierte Zusammenhang längs F. *Sei R^{TN} die Krümmung von ∇^{TN}, dann hat ∇^F für alle X, $Y \in \mathfrak{X}^1(M)$, $Z \in \mathfrak{X}^2(F)$ und alle $p \in M$ die Krümmung*

$$R^F_{X,Y}Z|_p = R^{TN}_{dF_p(X_p),dF_p(Y_p)}Z_p \in T_{F(p)}N\ . \tag{2}$$

Beweis. Wir beweisen zunächst Eindeutigkeit. Sei $p \in M$, sei ψ eine Karte von N um $F(p)$, und sei $U = F^{-1}(U^\psi)$. Mit Hilfe von Abschneidefunktionen auf M sehen wir, dass $\nabla^F_X Y|_p$ für alle $Y \in \mathfrak{X}(F)$ nur von $Y|_U$ abhängt. Aus Bemerkung 1.59 (4) und Definition 1.60 (3) folgt

$$\begin{aligned} \nabla^F_X Y|_U &= \nabla^F_X \sum_{i=1}^n Y(\psi^i) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \psi^i} \circ F\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(X\bigl(Y(\psi^i)\bigr) \left(\frac{\partial}{\partial \psi^i} \circ F\right) + Y(\psi^i)\, \nabla^{TN}_{dF \circ X} \frac{\partial}{\partial \psi^i} \right) . \end{aligned} \tag{*}$$

Also ist ∇^F eindeutig.

Zur Existenz überprüfen wir zuerst, dass obige Formel (*) für jede Karte ψ von N einen lokalen Zusammenhang längs $F|_{F^{-1}(U^\psi)}$ mit der geforderten Eigenschaft definiert. Sei dann φ eine weitere Karte von N, dann stimmen aufgrund der obigen Eindeutigkeitsaussage die mit Hilfe von φ und ψ konstruierten Zusammenhänge auf $F^{-1}(U^\varphi \cap U^\psi)$ überein. Also erhalten wir eine Abbildung $\nabla^F \colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(F) \to \mathfrak{X}(F)$ durch Zusammensetzen der lokalen Definitionen. Wir müssen überprüfen, dass ∇^F einen Zusammenhang längs F mit der Eigenschaft (1) definiert, aber diese Rechnungen wollen wir hier nicht durchführen.

Behauptung (2) rechnet man am einfachsten in lokalen Koordinaten nach. Sei dazu φ eine Karte von M um p und ψ eine Karte von N um $F(p)$. Schreibe

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi^a} = \sum_{i=1}^n \left(dF \circ \frac{\partial}{\partial \varphi^a}\right)(\psi^i) \left(\frac{\partial}{\partial \psi^i} \circ F\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\psi^i \circ F)}{\partial \varphi^a} \left(\frac{\partial}{\partial \psi^i} \circ F\right) ,$$

dann gilt

$$\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial \varphi^a}} \left(\frac{\partial}{\partial \psi^j} \circ F\right) = \nabla^{TN}_{\frac{\partial F}{\partial \varphi^a}} \frac{\partial}{\partial \psi^j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\psi^i \circ F)}{\partial \varphi^a} \left(\nabla^{TN}_{\frac{\partial}{\partial \psi^i}} \frac{\partial}{\partial \psi^j}\right) \circ F .$$

Wir können jetzt die Krümmung berechnen und erhalten

$$\begin{aligned} &R^F_{\frac{\partial}{\partial \varphi^a}, \frac{\partial}{\partial \varphi^b}} \left(\frac{\partial}{\partial \psi^k} \circ F\right) \\ &\qquad = \nabla^F_{\frac{\partial}{\partial \varphi^a}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi^j \circ F)}{\partial \varphi^b} \left(\nabla^{TN}_{\frac{\partial}{\partial \psi^j}} \frac{\partial}{\partial \psi^k} \circ F\right) - \nabla^F_{\frac{\partial}{\partial \varphi^b}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\psi^i \circ F)}{\partial \varphi^a} \left(\nabla^{TN}_{\frac{\partial}{\partial \psi^i}} \frac{\partial}{\partial \psi^k} \circ F\right) \\ &\qquad = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2(\psi^j \circ F)}{\partial \varphi^a\, \partial \varphi^b} \left(\nabla^{TN}_{\frac{\partial}{\partial \psi^j}} \frac{\partial}{\partial \psi^k} \circ F\right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2(\psi^i \circ F)}{\partial \varphi^a\, \partial \varphi^b} \left(\nabla^{TN}_{\frac{\partial}{\partial \psi^i}} \frac{\partial}{\partial \psi^k} \circ F\right) \\ &\qquad\quad + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial(\psi^i \circ F)}{\partial \varphi^a} \frac{\partial(\psi^j \circ F)}{\partial \varphi^b} \left(\left(\nabla^{TN}_{\frac{\partial}{\partial \psi^i}} \nabla^{TN}_{\frac{\partial}{\partial \psi^j}} \frac{\partial}{\partial \psi^k} - \nabla^{TN}_{\frac{\partial}{\partial \psi^j}} \nabla^{TN}_{\frac{\partial}{\partial \psi^i}} \frac{\partial}{\partial \psi^k} \right) \circ F \right) \\ &\qquad = \sum_{i,j,l=1}^n \frac{\partial(\psi^i \circ F)}{\partial \varphi^a} \frac{\partial(\psi^j \circ F)}{\partial \varphi^b} \left(R^{TN}_{\frac{\partial}{\partial \psi^i}, \frac{\partial}{\partial \psi^j}} \frac{\partial}{\partial \psi^k} \circ F \right) = R^{TN}_{\frac{\partial F}{\partial \varphi^a}, \frac{\partial F}{\partial \varphi^b}} \frac{\partial}{\partial \psi^k} . \qquad \square \end{aligned}$$

1.62. Bemerkung. Ab sofort sei stets ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang und ∇^F der dadurch induzierte Zusammenhang längs einer Abbildung F. Wir haben die folgenden Eigenschaften.

(1) *Torsionsfreiheit:* es gilt

$$\nabla^F_X (dF \circ Y) - \nabla^F_Y (dF \circ X) = dF \circ [X, Y] \in \mathfrak{X}(F)$$

für alle X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Seien dazu φ und ψ Karten von M bzw. N, dann ist ${}^{\psi}\Gamma_{ij}^k$ symmetrisch in i, j wegen der Torsionsfreiheit von ∇. Wir sehen, dass

$$\begin{aligned}\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial\varphi^a}} \frac{\partial F}{\partial\varphi^b} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2(\psi^k \circ F)}{\partial\varphi^a\,\partial\varphi^b} \left(\frac{\partial}{\partial\psi^k} \circ F\right) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial(\psi^i \circ F)}{\partial\varphi^a} \frac{\partial(\psi^j \circ F)}{\partial\varphi^b} \left(\nabla^{TN}_{\frac{\partial}{\partial\psi^i}} \frac{\partial}{\partial\psi^j} \circ F\right)\\ &= \nabla^F_{\frac{\partial}{\partial\varphi^b}} \frac{\partial F}{\partial\varphi^a}\ ,\end{aligned}$$

da der obige Ausdruck symmetrisch in a und b ist. Hieraus folgt die allgemeine Formel leicht mit der Produktregel für die Lie-Klammer aus Bemerkung 1.40.

(2) Der Zusammenhang ist auch *metrisch:*

$$X(\langle Y, Z\rangle) = \langle \nabla^F_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla^F_X Z\rangle$$

für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ und alle Y, $Z \in \mathfrak{X}(F)$. Falls $Y = V \circ F$ und $Z = W \circ F$ mit V, $W \in \mathfrak{X}(N)$ gilt, folgt das sofort aus

$$X(\langle Y, Z\rangle) = X(\langle V, W\rangle \circ F) = \langle \nabla_{dF\circ X} V, Z\rangle + \langle Y, \nabla_{dF\circ X} W\rangle = \langle \nabla^F_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla^F_X Z\rangle\ .$$

Für beliebige Vektorfelder gehen wir vor wie bei der Konstruktion von ∇^F im Beweis von Proposition 1.61.

Im Falle einer Kurve $F = \gamma$ sei stets

$$\dot\gamma = \frac{\partial\gamma}{\partial t} \qquad \text{und} \qquad \ddot\gamma = \nabla^\gamma_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial\gamma}{\partial t} \in \mathfrak{X}(\gamma)\ .$$

Wir kommen nun zur ersten Variationsformel der Bogenlänge. Wir erinnern uns dazu an die Definition von Produktmannigfaltigkeiten aus den Übungen, mit

$$T(M \times N) = TM \times TN\ .$$

1.63. Definition. Sei $F\colon M \to N$ eine Abbildung. Eine *Variation von* F ist eine Abbildung $\bar F\colon M \times I \to N$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$ ist, so dass

$$\bar F(p, 0) = F(p) \qquad \text{für alle } p \in M\ .$$

Wir schreiben $F_s(p) = \bar F(p, s)$ für alle $p \in M$ und $s \in I$. Das *Variationsvektorfeld* von $\bar F$ ist definiert als

$$V = \frac{\partial \bar F}{\partial s} = d\bar F \circ \frac{\partial}{\partial s} \in \mathfrak{X}(\bar F)\ .$$

1.64. Satz (Erste Variation der Bogenlänge). *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $\gamma\colon I \to M$ nach Bogenlänge parametrisiert, und sei $\bar\gamma\colon I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine Variation von γ. Dann gilt*

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\gamma_s|_{[a,b]}) = \langle\dot\gamma(t), V(t)\rangle\big|_{t=a}^b - \int_a^b \langle\ddot\gamma(t), V(t)\rangle\, dt\ .$$

Der erste Ausdruck gibt an, wie sehr sich die Kurve dadurch verkürzt oder verlängert, dass man Anfangs- und Endpunkt in Richtung der Kurve bewegt. Der zweite kommt daher, dass sich die Kurve bei Variation in Richtung ihres Krümmungsvektors $\ddot\gamma$ verkürzt. Eine ähnliche (und kompliziertere) Rechnung haben wir im letzten Semester in Lemma 3.47 bei der Charakterisierung von Minimalflächen durchgeführt.

Beweis. Wir benutzen die Rechenregeln aus Bemerkung 1.62. Wenn $\bar\gamma$ von der Klasse $\mathcal{C}^2$ ist, dürfen wir in das Integral hinein differenzieren, und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\gamma_s|_{[a,b]}) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \sqrt{\langle\dot\gamma(t,s),\dot\gamma(t,s)\rangle}\,dt \\
&= \int_a^b \frac{2\Big\langle \nabla^{\bar\gamma}_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial\bar\gamma}{\partial t}, \frac{\partial\bar\gamma}{\partial t}(t,0)\Big\rangle}{2\langle\frac{\partial\bar\gamma}{\partial t}(t,0), \frac{\partial\bar\gamma}{\partial t}(t,0)\rangle}\,dt = \int_a^b \Big\langle \nabla^{\bar\gamma}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial\bar\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\bar\gamma}{\partial t}(t,0)\Big\rangle\,dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t}\Big\langle \frac{\partial\bar\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\bar\gamma}{\partial t}(t,0)\Big\rangle - \Big\langle \frac{\partial\bar\gamma}{\partial s}(t,0), \nabla^{\bar\gamma}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial\bar\gamma}{\partial t}\Big\rangle\right) dt \\
&= \langle\dot\gamma(t),V(t)\rangle\big|_{t=a}^b - \int_a^b \langle\ddot\gamma(t),V(t)\rangle\,dt\;.
\end{aligned}$$

□

Wenn wir also Anfangs- und Endpunkt festhalten, verschwindet die erste Variation genau dann, wenn bereits die Differentialgleichung $\ddot\gamma = 0$ gilt. Sollte es also eine kürzeste Verbindung von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ geben, so müsste sie diese Differentialgleichung erfüllen.

1.65. Definition. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine *geodätische Linie* oder kurz *Geodätische* auf (M,g) ist eine Kurve $c\colon I \to M$, die der Differentialgleichung $\ddot c = 0$ genügt.

1.66. Bemerkung. Man beachte, dass wir nun nicht mehr fordern, dass eine Geodätische c nach Bogenlänge parametrisiert ist. Es gilt aber immerhin

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\|\dot c(t)\|^2 = 2\langle\ddot c(t),\dot c(t)\rangle = 0\;,$$

d.h., Geodätische sind *proportional zur Bogenlänge* parametrisiert.

1.67. Beispiel. Sei $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ Geodätische bezüglich der Euklidischen Standardmetrik, dann ist $\ddot c = 0$, somit $\dot c$ konstant. Also existieren x_0, $v \in \mathbb{R}^n$ mit

$$c(t) = x_0 + tv\;.$$

1.68. Folgerung. *Es sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p,q \in M$. Wenn es eine kürzeste $\mathcal{C}^2$-Kurve $\gamma\colon [a,b] \to M$ mit $\gamma(a) = p$ und $\gamma(b) = q$ gibt, dann ist γ bis auf Umparametrisierung eine Geodätische.*

Beweis. Sei γ eine Kurve in M mit $\gamma(a) = p$ und $\gamma(b) = q$. Da die Bogenlänge von γ nach Bemerkung 1.57 (1) nicht von der Parametrisierung abhängt, dürfen wir annehmen, dass γ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Wir nehmen an, dass $\ddot\gamma(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in [a,b]$. Aufgrund der Stetigkeit von $\ddot\gamma$ dürfen wir $t_0 \in (a,b)$ annehmen. Wähle eine Karte $\varphi\colon U^\varphi \to V^\varphi$ um $\gamma(t_0)$, ein Intervall $I \subset (a,b) \cap \gamma^{-1}(U^\varphi)$ um t_0 und eine Abschneidefunktion $\rho\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ um t_0 mit $\operatorname{supp}\rho \subset I$. Dann können wir für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein eine Variation $\bar\gamma\colon [a,b] \times (-\varepsilon,\varepsilon)$ von γ konstruieren, so dass $\gamma_s(t) = \gamma(t)$ für alle $t \in [a,b] \setminus I$ und

$$\varphi(\gamma_s(t)) = \varphi(\gamma(t)) + s\cdot\rho(t)\cdot\big(\ddot\gamma(t)\big)_\varphi$$

für alle $t \in I$. Es gilt also insbesondere $\gamma_s(a) = p$, $\gamma_s(b) = q$ für alle s, das Variationsfeld ist $V = \rho\cdot\ddot\gamma$, und

$$\int_a^b \langle\ddot\gamma(t),V(t)\rangle\,dt = \int_I \rho(t)\langle\ddot\gamma(t),\ddot\gamma(t)\rangle\,dt > 0\;.$$

Aus der ersten Variationsformel aus Satz 1.64 folgt

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\gamma_s) < 0 \;,$$

und daher $L(\gamma_s) < L(\gamma)$ für alle hinreichend kleinen $s > 0$. Also ist eine Kurve γ mit $\ddot\gamma(t_0) \neq 0$ niemals kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte. $\square$

1.69. Bemerkung. Die Existenz einer kürzesten Verbindung zwischen p und q in M ist nicht selbstverständlich. Sei beispielsweise $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und nicht konvex, dann gibt es Punkte, die sich nicht durch eine kürzeste Kurve verbinden lassen. Etwa gibt es in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ keine kürzeste Kurve von p nach $-p$, wobei $p \neq 0$.

1.4. Exponentialabbildung und Jacobifelder

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass es durch jeden Punkt auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit in jeder Richtung eine maximale Geodätische gibt. Diese Tatsache benutzen wir, um die Exponentialabbildung zu konstruieren. Anschließend betrachten wir ihre Ableitung.

Wir beginnen mit der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen und der differenzierbaren Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

1.70. Definition. Es seien (M, d_M), (N, d_N) metrische Räume. Eine Abbildung $F\colon M \to N$ heißt *Lipschitz-stetig* mit *Lipschitz-Konstante* Λ (kurz Λ-*Lipschitz*), wenn

$$d_N(F(p), F(q)) \le \Lambda \cdot d_M(p, q)$$

für alle $p, q \in M$ gilt. Sei X ein topologischer Raum, dann heißt $F\colon M \times X \to N$ *Lipschitz-stetig in Richtung von* M mit Lipschitz-Konstante Λ, wenn für alle $x \in X$ die Abbildung $F(\,\cdot\,, x)\colon M \to N$ Λ-Lipschitz ist.

Wir nennen $F\colon M \to N$ *lokal Lipschitz* (bzw. $F\colon M \times X \to N$ *lokal Lipschitz* in Richtung von M), wenn für jeden Punkt $p \in M$ ($p \in M \times X$) eine Umgebung U von p und eine Konstante Λ existiert, so dass $F|_U$ die entsprechende Eigenschaft besitzt.

1.71. Bemerkung.
(1) Lokal Lipschitz-stetige Funktionen sind insbesondere stetig.
(2) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $F \in \mathcal{C}^1(U; V)$; dann ist F lokal Lipschitz. Wenn

$$\Lambda = \sup_{p \in U} \|dF_p\|_{\mathrm{op}} < \infty \;,$$

existiert und U konvex ist, ist Λ eine globale Lipschitz-Konstante für F.

1.72. Satz (Picard-Lindelöf). *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \subset U \times \mathbb{R}$ offen mit $U \times \{0\} \subset V$, und $X\colon V \to \mathbb{R}^n$ sei stetig.*

(1) *Wenn jeder Punkt $(p, t) \in V$ eine Umgebung in V besitzt, auf der $X(q, \tau)$ in q gleichmäßig Lipschitz-stetig ist, dann existieren Funktionen $t_-, t_+\colon U \to \mathbb{R} \cup \{\pm, \infty\}$ und eine stetige Abbildung*

$$F\colon W = \bigl\{\, (p, t) \bigm| p \in U, t \in (t_-(p), t_+(p)) \,\bigr\} \to U$$

mit $F(\,\cdot\,, 0) = \mathrm{id_U}$, $(F(p,t), t) \in V$ und

$$\frac{\partial F}{\partial t}(p, t) = X(F(p,t), t) \tag{*}$$

auf ganz W, und wenn t'_-, t'_+ und $F'\colon W' \to U$ Abbildungen mit den gleichen Eigenschaften sind, gilt $t_- \le t'_-$, $t'_+ \le t_+$ und $F' = F|_{W'}$.

(2) *Wenn $X \in \mathcal{C}^k(V)$ für $1 \le k \le \infty$ gilt, dann gilt auch $F \in \mathcal{C}^k(W)$ für die Abbildung aus (1).*

Beweis. Wir zeigen zunächst lokale Existenz und Eindeutigkeit. Globale Existenz und Eindeutigkeit lassen sich daraus leicht ableiten.

Sei zunächst $p \in U$, dann existieren $r > 0$, $0 < C < \infty$ und $0 < t_0 \leq \min\bigl\{\frac{r}{C}, \frac{1}{C}\bigr\}$, so dass

(1) $\overline{B_{2r}(p)} \times [-t_0, t_0] \subset V$,
(2) $\bigl|X|_{\overline{B_{2r}(p)} \times (-t_0,t_0)}\bigr| < C$, und
(3) $\frac{C}{2}$ ist Lipschitz-Konstante für $X|_{\overline{B_{2r}(p)} \times \{t\}}$ für alle $t \in [-t_0, t_0]$.

Aufgrund der Voraussetzungen in Aussage (1) des Satzes lassen sich die Annahmen (1) und (3) leicht erfüllen. Annahme (2) folgt aus der Stetigkeit von X. Wir betrachten den Raum

$$\mathcal{C} = \bigl\{F \in \mathcal{C}^0\bigl(B_r(p) \times (-t_0, t_0); \overline{B_{2r}(p)}\bigr) \bigm| F(q, 0) = q \text{ für alle } q \in B_r(p)\bigr\}$$

mit der Supremumsmetrik. Für $F \in \mathcal{C}$, $q \in B_r(p)$ und $t \in (-t_0, t_0)$ definiere

$$TF(q,t) = q + \int_0^t X(F(q,\tau),\tau)\, d\tau \;.$$

Dann ist $TF\colon B_r(p) \times (-t_0, t) \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $TF(q, 0) = q$, und aus (1) und (2) oben folgt

$$d(TF(q,t), p) \leq d(q,p) + t_0 \cdot C < 2r$$

für alle $q \in B_r(p)$, $t \in (-t_0, t_0)$, so dass $TF \in \mathcal{C}$.

Der Operator T wirkt außerdem kontrahierend auf $\mathcal{C}$ wegen (3), denn

$$\begin{aligned}\bigl|(TF_1) - TF_0)(q,t)\bigr| &\leq \int_0^t \bigl|X(F_1(q,\tau),\tau) - X(F_0(q,\tau),\tau)\bigr|\, d\tau \\ &< t_0 \cdot \frac{C}{2} \cdot |F_1 - F_0|_{\mathcal{C}} \leq \frac{1}{1} |F_1 - F_0|_{\mathcal{C}} \;.\end{aligned}$$

Da $\overline{B_{2r}(p)}$ vollständig ist, ist auch $\mathcal{C}$ mit der Supremumsmetrik vollständig. Nach dem Fixpunktsatz von Banach existiert also ein eindeutiger Fixpunkt F von T auf $\mathcal{C}$. Für alle $q \in B_r(p)$, $t \in (-t_0, t_0)$ folgt

$$\frac{\partial F}{\partial t}(q,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t X(F(q,\tau),\tau)\, d\tau = X(F(q,t)) \;.$$

Sei umgekehrt $F'\colon B_r(p) \times (-t_0, t_0) \to V$ eine Abbildung mit $\frac{\partial F'}{\partial t}(q,t) = X(F'(q,t),t)$ für alle (q,t). Aus (2) oben folgt $\operatorname{im} F' \subset \overline{B_{2r}(p)}$, somit $F' \in \mathcal{C}$. Außerdem gilt

$$TF'(q,t) = q + \int_0^t X(F'(q,\tau),\tau)\, d\tau = F'(q,0) + \int_0^t \frac{\partial F'}{\partial \tau}(q,\tau)\, d\tau = F'(q,t) \;,$$

also ist F' ein Fixpunkt von T und somit $F' = F$. Also ist der obige Fixpunkt F die einzige Lösung der Differentialgleichung (*) auf dem Definitionsbereich $B_r(p) \times (-t_0, t_0)$.

Wir kommen zur Aussage (2), wieder zunächst lokal und nur für $k = 1$. Wir kennen bereits die eindeutige Lösung F. Die partielle Ableitung $\frac{\partial F}{\partial t}$ existiert und ist stetig wegen (*). Es reicht also, die Existenz und Stetigkeit von $\frac{\partial F}{\partial x^i}$ für $i = 1, \dots, n$ zu überprüfen.

Für $q \in B_r(p)$ bestimmen wir zunächst $G_q\colon \mathbb{R}^n \times (-t_0, t_0) \to \mathbb{R}^n$ mit $G_q(v, 0) = v$ und

$$\frac{\partial G_q}{\partial t}(v,t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial X}{\partial x^j}(F(q,t),t) \cdot G_q^j(v,t) \;, \tag{**}$$

denn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x^i}(q,t)$ erfüllen (**), wenn F stetig differenzierbar ist. Die Funktion $(v,t) \mapsto dX_{F(g,t)}(v, 0)$ ist Lipschitz-stetig in v mit Lipschitz-Konstante $\|dX_{F(q,t)}\|_{\mathrm{op}}$, die stetig von q und t abhängt, da $X \in \mathcal{C}^1(v, \mathbb{R}^n)$. Gegebenenfalls nach Verkleinern von t_0 existieren daher für alle $q \in B_r(p)$ Funktionen $G_{q,i}\colon (-t_0, t_0) \to \mathbb{R}^n$, die (**) mit Anfangswert $G_{q,i}(0) = e_i \in \mathbb{R}^n$ lösen.

Wir wollen zeigen, dass $\frac{\partial F}{\partial x^i}(q,t) = G_{q,i}(t)$ für alle $(q,t) \in B_r(p) \times (-t_0, t_0)$, und dass $\frac{\partial F}{\partial x^i}$ stetig ist. Sei dazu T wie im ersten Teil des Beweises, und $F_0(q,t) = q$, insbesondere ist $F_0 \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^1(B_r(p) \times (-t_0, t_0); \overline{B_{2r}(p)})$. Wie im Banachschen Fixpunktsatz ist der Fixpunkt F von T gleichmäßiger Limes der „Picard-Iterierten“

$$F_\nu = T^\nu F_0 \in \mathcal{C} \ .$$

Für die Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\nu+1}}{\partial x^i}(q,t) &= \frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^i} \int_0^t X(F_\nu(q,\tau),\tau)\, d\tau \\ &= e_i + \int_0^t \sum_{j=1}^n \frac{\partial X}{\partial x^j}(F_\nu(q,\tau),\tau) \frac{\partial F_\nu^j}{\partial x^i}(q,\tau)\, d\tau \ , \end{aligned}$$

so dass insbesondere

$$F_\nu \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^1(B_r(p) \times (-t_0, t_0); \overline{B_{2r}(p)})$$

für alle n. Es gilt sogar $\left|\frac{\partial F_\nu}{\partial x^i}(q,t)\right| \leq 2$ für $i = 1, \dots, n$, denn für F_0 gilt $\frac{\partial F_0}{\partial x^i}(q,t) = \frac{\partial q}{\partial x^i} = e_i$. Dazu wählen wir r, t, C wie oben so, dass zusätzlich

(4) $\|dX_q\|_{\mathrm{op}} < \frac{1}{2nt_0}$ für alle $q \in \overline{B_{2r}(p)}$.

Dann ist $\frac{1}{2nt_0}$ Lipschitz-Konstante für dX_q auf ganz $\mathbb{R}^n$. Jetzt folgt durch Induktion über ν, dass

$$\left|\frac{\partial F_{\nu+1}}{\partial x^i}(q,t)\right| \leq |e_i| + \int_0^t \sum_{j=1}^n \underbrace{\left|\frac{\partial X}{\partial x^j}(F_\nu(q,\tau),\tau)\right|}_{<\frac{1}{2nt_0}} \cdot \underbrace{\left|\frac{\partial F_\nu^i}{\partial x^i}(q,\tau)\right|}_{<2} d\tau < 1 + 1 = 2 \ .$$

Analog dazu erfüllen die Lösungen $G_{q,i}$ von (**) die Gleichung

$$G_{q,i}(t) = G_{q,i}(0) + \int_0^t \frac{\partial G_{q,i}}{\partial \tau}(\tau)\, d\tau = e_i + \int_0^t \sum_{j=1}^n \frac{\partial X}{\partial x^j}(F(q,\tau),\tau) \cdot G_{q,i}^j(\tau)\, d\tau \ .$$

Wir betrachten die Folge der Differenzen $\frac{\partial F_\nu}{\partial x^i}(q,t) - G_{q,i}(t)$, und erhalten

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial F_{\nu+1}}{\partial x^i}(q,t) - G_{q,i}(t)\right| \leq \int_0^t \sum_{j=1}^n \Bigg(&\left|\frac{\partial X}{\partial x^j}(F_\nu(q,\tau),\tau) - \frac{\partial X}{\partial x^j}(F(q,\tau),\tau)\right| \cdot \underbrace{\left|\frac{\partial F_\nu^j}{\partial x^i}(q,\tau)\right|}_{\leq 2} \\ &+ \underbrace{\left|\frac{\partial X}{\partial x^j}(F(q,\tau),\tau)\right|}_{<\frac{1}{2nt_0}} \cdot \left|\frac{\partial F_\nu^j}{\partial x^i}(q,\tau) - G_{q,i}(\tau)\right| \Bigg) d\tau \ . \end{aligned}$$

Für

$$d_\nu = \max\left\{ \left|\frac{\partial F_\nu}{\partial x^i}(q,t) - G_{q,i}(t)\right| \,\middle|\, i = 1, \dots, n, q \in B_r(p), |t| \leq t_0 \right\}$$

folgt daraus

$$d_{\nu+1} < 2nt_0 \cdot \sup_{(q,t)} \left|\partial X_{(F_\nu(q,t),t)} - \partial X_{(F(q,t),t)}\right| + \frac{d\nu}{2} \ .$$

Da dX stetig ist, ist dX auf dem Kompaktum $\overline{B_{2r}(p)} \times [-t_0, t_0]$ gleichmäßig stetig. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert also ein $\delta > 0$, so dass

$$\left| \frac{\partial X}{\partial x^j}(x,t) - \frac{\partial X}{\partial x^j}(y,t) \right| < \frac{\varepsilon}{2nt_0}$$

für alle $x, y \in \overline{B_{2r}(p)}$ mit $|x-y| < \delta$ und alle $t \in [t_0, t_0]$. Da die Picard-Iterierten F_ν gleichmäßig gegen F konvergieren, gibt es ein N, so dass $|F_\nu(q,t) - F(q,t)| < \delta$ für alle q, t und alle $\nu \geq N$. Für $\nu \geq N$ gilt $0 \leq d_{\nu+1} < \varepsilon + \frac{d\nu}{2}$, also insbesondere

$$d_{\nu+1} - 2\varepsilon < \frac{d_\nu - 2\varepsilon}{2} \; .$$

Hieraus folgt sofort, dass $d_\nu < 3\varepsilon$ für alle hinreichend großen ν. Da das für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt schließlich

$$\lim_{\nu \to \infty} d_\nu = 0 \; .$$

Wir haben also gezeigt, dass die stetigen Funktionen $\frac{\partial F_\nu}{\partial x^i}$ gleichmäßig gegen $G_i(q,t) = G_{q,i}(t)$ konvergieren. Hieraus folgt zunächst die Stetigkeit der G_i. Für festes (q,t) gilt

$$\frac{d}{ds} F_\nu(q + se_i, t) = \frac{\partial F_\nu}{\partial x^i}(q + se_i, t) \; .$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Ableitungen folgt, dass die Grenzfunktion $s \mapsto F(q + se_i, t)$ differenzierbar ist mit Ableitung

$$\frac{d}{ds} F(q + se_i, t) = \frac{\partial F}{\partial x^i}(q + se_i, t) = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\partial F_\nu}{\partial x^i}(q + se_i, t) = g(q + se_i, t) \; .$$

Also existieren die partiellen Ableitungen von $F(q,t)$ in Richtung q und sind stetig, so dass insgesamt $F \in \mathcal{C}^1(B_r(p) \times (-t_0, t_0); \overline{B_{2r}(p)})$.

Wir zeigen Aussage (2) für $k > 1$ durch vollständige Induktion. Sei also (2) für $k \geq 1$ bereits lokal wie oben bewiesen, sei $X \in \mathcal{C}^{k+1}(V, \mathbb{R}^n)$, und sei $F \in \mathcal{C}^k(B_r(p) \times (-t_0, t_0), U)$ eine Lösung von (*). Dann gilt zunächst

$$\frac{\partial F}{\partial t}(q,t) = X(F(q,t),t) \; ,$$

also $\frac{\partial F}{\partial t} \in \mathcal{C}^k(B_r(p) \times (-t_0, t_0), U)$.

Es bezeichne $G \colon B_r(p) \times \mathbb{R}^n \times (-t_0, t_0) \to \mathbb{R}^n$ die $\mathcal{C}^{k-1}$-Funktion mit

$$G(q,v,t) = dF_{(q,t)}(v,0) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial F}{\partial x^i}(q,t) \; ,$$

dann erfüllt das Paar $(F,G) \colon B_r(p) \times \mathbb{R}^n \times (-t_0, t) \to U \times \mathbb{R}^n$ eine Differentialgleichung ähnlich wie (**) mit $\mathcal{C}^k$-Koeffizienten, nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial(F,G)}{\partial t}(q,v,t) &= \left(X(F(q,t),t), \sum_{i,j=1}^n v^i \cdot \frac{\partial X}{\partial x^j}(F(q,t),t) \cdot \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(q,t) \right) \\ &= \left(X(F(q,t),t), \sum_{i=1}^n \frac{\partial X}{\partial x^j}(F(q,t),t) \cdot G^j(q,v,t) \right) \; . \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist (F,G) eine $\mathcal{C}^k$-Funktion, insbesondere also auch die Funktionen

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}(q,t) = G(q,e_i,t) \; ,$$

eventuell nach Verkleinern von r und t. Alle partiellen Ableitungen von F sind demnach $\mathcal{C}^k$-Funktionen, also ist F selbst eine $\mathcal{C}^{k+1}$-Funktion.

Es bleibt die globale Existenz und Eindeutigkeit sowohl in (1) als auch in (2) zu zeigen. Seien dazu zunächst für $p \in U$ die Funktionen $f_i \colon (t_{i-}, t_{i+}) \to U$ mit $t_{i-} < 0 < t_{i+}$ für $i = 1, 2$ Lösungen von (*), also

$$f_i'(t) = X(f_i(t), t)$$

mit Anfangswerten $f_1(0) = f_2(0) = p$. Angenommen, es gebe $t \in (t_{1-}, t_{1+}) \cap (t_{2-}, t_{2+})$ mit $f_1(t) \neq f_2(t)$, ohne Einschränkung $t > 0$, dann sei

$$t_0 = \inf\{t \in (0, t_{1+}) \cap (0, t_{2+}) \mid f_1(t) \neq f_2(t)\} .$$

Wegen Stetigkeit gilt $f_1(t_0) = f_2(t_0)$. Wir betrachten das „verschobene Problem“

$$\frac{\partial}{\partial s} f_i(t_0 + s) = X(f_i(t_0 + s), t_0 + s)$$

mit Anfangswert $f_1(t_0) = f_2(t_0)$ bei $s = 0$. Wegen der lokalen Existenz und Eindeutigkeit existiert $\varepsilon > 0$, so dass die Lösungen für $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ eindeutig sind, also $f_1(t_0 + s) = f_2(t_0 + s)$ für alle hinreichend kleinen $s > 0$, im Widerspruch zur Konstruktion von t_0. Folglich sind einzelne Lösungen eindeutig. Wir erhalten eine maximale Lösung $f_{\max}$ auf der Vereinigung (t_-, t_+) aller Intervalle, auf denen eine Lösung f mit $f(0) = p$ existiert, indem wir für jedes $t \in (t_-, t_+)$ den Wert einer solchen Lösung, die bei t definiert ist, auswählen. Dafür schreiben wir

$$f_{\max} = \bigcup \Big\{ f \colon (t_-, t_+) \to V \;\Big|\; t_- < 0 < t_+,\ f(0) = p \text{ und } f'(t) = X(f(t), t) \Big\} .$$

Indem wir dieses Argument für alle $p \in U$ durchführen, bestimmen wir $t_-, t_+ \colon U \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, die Menge $W \subset U \times \mathbb{R}$ und $F = F_{\max} \colon W \to U$. □

1.73. Bemerkung. (1) Wenn die maximale Lösung bei $(p, t) \in W$ existiert, existiert sie auch in einer kleinen Umgebung. Also ist die Menge $W \subset U \times \mathbb{R}$ offen, und die Funktionen t_-, t_+ sind ober- bzw. unterhalbstetig auf U. Mehr Regularität können wir auch im $\mathcal{C}^\infty$-Fall nicht erwarten.

(2) Wenn $(t_-(p), t_+(p))$ das maximale Definitionsintervall der Lösung $f_p(t) = F(p, t)$ ist und $t_-(p) > -\infty$ bzw. $t_+(p) < \infty$, dann existieren die Grenzwerte

$$\lim_{t \searrow t_-(p)} (F(p, t), t) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{t \nearrow t_+(p)} (F(p, t), t)$$

nicht in V, denn andernfalls könnten wir die Lösung vom Grenzwert als neuem Anfangswert zur Zeit $t_\pm(p)$ aus noch ein Stück fortsetzen, im Widerspruch zur Maximalität des Intervalls $(t_-(p), t_+(p))$.

(3) Die Existenz und Eindeutigkeit einer globalen $\mathcal{C}^k$-Lösung $F \colon W \to U$ impliziert, dass die einzelnen Lösungen $f_p \colon (t_-(p), t_+(p)) \to U$ eindeutig sind und $\mathcal{C}^k$-differenzierbar vom Anfangswert p abhängen. Mit einem kleinen Trick kann man auch zeigen, dass die Lösungen $\mathcal{C}^k$-differenzierbar von den Koeffizienten X abhängen. Der Fall $k = 0$ ist ein Sonderfall, da wir eine Lipschitz-Bedingung an X stellen müssen — für $k \geq 1$ ist keine Lipschitz-Bedingung an die k-fachen Ableitungen $\frac{\partial^{|\alpha|} X}{\partial X^\alpha}$ mit $|\alpha| = k$ nötig.

(4) Wenn die Koeffizienten X von (*) nur stetig, aber nicht Lipschitz-stetig in Richtung von U sind, existieren nach dem Satz von Peano zwar immer noch Lösungen $f \colon (t_-, t_+) \to U$ mit vorgegebenem Anfangswert $f(0) = p$; diese sind jedoch im allgemeinen nicht eindeutig. Dementsprechend können wir keine stetige globale Lösung $F \colon W \to U$ erwarten (Übung).

1.74. Satz. *Sei (M, g) eine Riemannsche $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit $k \geq 3$. Dann existiert zu jedem $p \in M$ und jedem Vektor $v \in T_pM$ eine eindeutige Geodätische $c = c_v \colon I \to M$ mit maximalem Definitionsbereich $I \subset \mathbb{R}$, so dass $c_v(0) = p$ und $\dot c_v(0) = v$.*

Beweis. Dieser Satz folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf. Um das einzusehen, schreiben wir die Geodätischengleichung in lokalen Koordinaten φ von M um $p = \pi(v)$. Wie in Bemerkung 1.62 (1) erhalten wir

$$\ddot{c}(t) = \nabla^c_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial c}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2(\varphi^i \circ c)}{\partial t^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \circ c \right) + \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial(\varphi^i \circ c)}{\partial t} \frac{\partial(\varphi^j \circ c)}{\partial t} \left(({}^\varphi\Gamma^k_{ij} \circ \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right) \circ c \,.$$

Wenn wir ${}^\varphi c = \varphi \circ c \colon I \to V^\varphi$ schreiben, ist lokal also das nichtlineare System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$${}^\varphi\ddot{c}^k(t) = -\sum_{i,j=1}^n {}^\varphi\Gamma^k_{ij}\big({}^\varphi c(t)\big)\, {}^\varphi\dot{c}^i(t)\, {}^\varphi\dot{c}^j(t) \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n$$

mit den Anfangsbedingungen ${}^\varphi c(0) = \varphi(p)$ und ${}^\varphi\dot{c}(0) = v_\varphi$ zu lösen. Wir schreiben es als ein System von Gleichungen erster Ordnung

$$\frac{d}{dt}\big({}^\varphi c(t), {}^\varphi\dot{c}(t)\big) = \left({}^\varphi\dot{c}(t), -\sum_{i,j=1}^n {}^\varphi\Gamma^k_{ij}\big({}^\varphi c(t)\big)\, {}^\varphi\dot{c}^i(t)\, {}^\varphi\dot{c}^j(t)\, e_k \right) .$$

Dieses System hat eine eindeutige maximale lokale Lösung mit Definitionsintervall I_φ, denn da $k \geq 3$, sind die Christoffelsymbole stetig differenzierbar.

Wir wollen aber eine maximale globale Lösung konstruieren. Dazu betrachten wir alle Kurven $c \colon I \to M$, die der Gleichung $\ddot{c} = 0$ mit der Anfangsbedingung $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = v$ genügen. Wie im letzten Schritt des Beweis von Satz 1.72 sieht man leicht, dass je zwei solche Lösungen $c_i \colon I_i \to \mathbb{R}$ für $i = 1, 2$ auf $I_1 \cap I_2$ übereinstimmen. Wir erhalten also eine eindeutige maximale Lösung

$$c_v = \bigcup \big\{\, c \colon I \to M \bigm| 0 \in I \subset \mathbb{R} \text{ offenes Intervall, } c(0) = p,\ \dot{c}(0) = v \text{ und } \ddot{c} = 0 \,\big\} . \quad \square$$

Wir können alle Geodätischen simultan betrachten. Sei dazu wieder c_v die eindeutige maximale Geodätische mit Startvektor $\dot{c}_v(0) = v$.

1.75. Definition. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Setze

$$D_{\exp} = \big\{\, v \in TM \bigm| c_v(t) \text{ ist für } t = 1 \text{ definiert} \,\big\} \subset TM$$

und definiere die (*Riemannsche*) *Exponentialabbildung* $\exp \colon D_{\exp} \to M$ durch

$$\exp(v) = c_v(1) \,.$$

Für $p \in M$ schreibe $\exp_p = \exp|_{T_pM} \colon T_pM \to M$.

Zunächst müssen wir damit leben, dass eventuell $D_{\exp} \neq TM$ gilt, später werden wir nur noch Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit $D_{\exp} = TM$ betrachten. Als Beispiel betrachte eine kleine konvexe offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, etwa $U = B_1(0)$, mit der Euklidischen Standardmetrik g^{eukl}. Geodätische werden offenbar gegeben durch

$$c_{(p,v)}(t) = p + tv$$

für alle $p \in U$ und alle $v \in T_pU = \mathbb{R}^n$. Da $U = B_1(0)$ konvex ist, erhalten wir

$$D_{\exp} = \big\{\, (p, v) \bigm| p, p + v \in U \,\big\} \subsetneq TU = U \times \mathbb{R}^n \qquad \text{und} \qquad \exp_p(v) = p + v \,.$$

1.76. Bemerkung. Es sei $v \in T_pM$, dann gilt $c_v(t) = \exp(tv)$ auf dem Definitionsintervall

$$I = \big\{\, t \in \mathbb{R} \bigm| tv \in D_{\exp} \,\big\} .$$

Da $\exp(tv) = c_{tv}(1)$, reicht es zu zeigen, dass $c_{tv}(s) = c_v(st)$, dass also $s \mapsto \gamma(s) = c_v(st)$ eine Geodätische mit Startvektor tv ist. Das gilt, denn $\dot\gamma(0) = t\,\dot c_v(0) = tv$ und

$$\nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial s}} \dot\gamma = \nabla^{c_v(\,\cdot\,t)}_{\frac{\partial}{\partial s}} \bigl(t\,\dot c_v(\,\cdot\,t)\bigr)\Big|_s = t\,\nabla^{c_v}_{t\frac{\partial}{\partial s}} \dot c_v\Big|_{st} = t^2\,\ddot c_v(st) = 0\ .$$

1.77. Bemerkung. Wir wollen die Ableitung der Exponentialabbildung bei $0_p \in T_pM$ betrachten; dazu benötigen wir den Tangentialraum $T_{0_p}TM$. Sei also M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, dann ist TM eine $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit nach Proposition 1.16. Wir betrachten die Inklusionsabbildung $\iota\colon T_pM \to TM$ und die Projektion $\pi\colon TM \to M$ aus Proposition 1.16. Da $\pi\circ\iota$ die konstante Abbildung auf den Punkt $p \in M$ darstellt, folgt $d\pi \circ d\iota = 0$. Aus Dimensionsgründen ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \underbrace{T_0T_pM}_{\cong T_pM} \xrightarrow{d\iota} T_{0_p}TM \xrightarrow{d\pi} T_pM \longrightarrow 0$$

exakt, und da T_pM ein Vektorraum ist, folgt $T_0T_pM \cong T_pM$.

Wir können diese Sequenz sogar natürlich spalten. Dazu betrachten wir zu $v \in T_pM$ eine Kurve γ in M mit $[v] = \gamma$, dann ist die dazugehörige Kurve $\bar\gamma(t) = 0_{\gamma(t)}$ von Nullvektoren eine Kurve in TM mit $\pi\circ\bar\gamma = \gamma$, somit $d\pi[\bar\gamma] = [\gamma] = v$. Es gilt also in natürlicher Weise

$$T_{0_p}TM = T_pM \oplus T_pM\ .$$

1.78. Satz. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann hat die Riemannsche Exponentialabbildung die folgenden Eigenschaften.*

(1) *Ist M von der Klasse $\mathcal{C}^k$ mit $k \ge 3$, so ist* exp *von der Klasse $\mathcal{C}^{k-2}$.*

(2) *Für alle $p \in M$ ist $\exp_p$ ein lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung $V_p \subset T_pM$ von $0_p \in T_pM$ mit Differential*

$$d_{0_p}(\exp_p)(v) = v \qquad \text{für alle } v \in T_pM\ .$$

(3) *Für alle $p \in M$ ist $(\pi\times\exp)\colon D_{\exp} \to M \times M$ ein lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung $V \subset D_{\exp}$ von $0_p \in T_pM$ mit Differential*

$$d_{0_p}(\pi\times\exp) = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ \mathrm{id} & \mathrm{id} \end{pmatrix} : T_{0_p}TM \cong T_pM \oplus T_pM \to T_pM \oplus T_pM\ .$$

Beweis. Da die Koeffizienten des Differentialgleichungssystems im Beweis von Satz 1.74 von der Klasse $\mathcal{C}^{k-2}$ sind, folgt das gleiche für die Gesamtheit aller Lösungen mit variablen Anfangsbedingungen, und wir erhalten (1).

Zu (2) benutzen wir Bemerkung 1.76. Mit $T_0T_pM \cong T_pM$ wie oben folgt

$$d_0(\exp_p)(v) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \exp_p(tv) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} c_v(t) = \dot c_v(0) = v\ .$$

Aus dem Umkehrsatz folgt die lokale Umkehrbarkeit in einer Umgebung von 0_p in T_pM, auf der $d\exp_p$ invertierbar ist.

Zu (3) benutzen wir Bemerkung 1.77 und identifizieren $T_{0_p}TM$ mit $(T_pM)^2$. Für eine Kurve $\bar\gamma(t) = 0_{\gamma(t)}$ von Nullvektoren folgt

$$\exp(\bar\gamma(t)) = \exp(0_{\gamma(t)}) = \gamma(t) = \pi(\bar\gamma(t))\ ,$$

also $d\pi\bigl(\dot{\bar\gamma}(0)\bigr) = d\exp\bigl(\dot{\bar\gamma}(0)\bigr) = \dot\gamma(0)$. Das liefert die erste Spalte des Differentials, die zweite ergibt sich aus (2). Die lokale Invertierbarkeit folgt wieder aus dem Umkehrsatz. □

Um das Differential der Exponentialabbildungen besser zu verstehen, betrachten wir jetzt geodätische Variationen.

1.79. Definition. Sei c Geodätische auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g). Ein Vektorfeld V längs c heißt *Jacobifeld,* wenn es die Differentialgleichung

$$\nabla^c_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^c_{\frac{\partial}{\partial t}} V + R_{V,\dot c}\dot c = 0$$

erfüllt. Eine Variation $\bar c\colon I \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ von c heißt *geodätisch,* wenn alle Kurven $c_s = \bar c(\,\cdot\,,s)$ Geodätische sind.

1.80. Bemerkung. (1) Der Krümmungstensor R ist für $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten mit $k \geq 3$ definiert und stetig. In Koordinaten ist die Jacobigleichung ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung, erfüllt in diesem Fall also automatisch die lokale Lipschitz-Bedingung aus dem Satz 1.72 von Picard-Lindelöf.

(2) Zu jeder Geodätischen c und a, $b \in \mathbb{R}$ können wir die geodätische Variation

$$\bar c(t,s) = c\big(as + b(1+s)t\big)$$

mit Variationsfeld

$$V = \frac{\partial \bar c}{\partial s} = a\dot c(t) + bt\,\dot c(t)$$

betrachten. Insbesondere sind also $\dot c$ und $t \cdot \dot c$ nach dem folgenden Satz Jacobifelder.

Wir schreiben

$$\ddot V = \nabla^{\bar c}_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^{\bar c}_{\frac{\partial}{\partial t}} V \;,$$

und die Jacobi-Gleichung schreiben wir kürzer als

$$\ddot V + R_{V,\dot c}\dot c = 0 \;.$$

1.81. Satz. *Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $c\colon I \to M$ eine Geodätische, und sei $[a,b] \subset I$. Ein Vektorfeld V längs $c|_{[a,b]}$ ist genau dann Jacobifeld, wenn es eine geodätische Variation $\bar c\colon I \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ von c gibt, so dass V das Variationsfeld von $\bar c$ ist.*

Beweis. Zu „$\Leftarrow$“ sei $\bar c$ eine geodätische Variation von c. Dann gilt $\nabla^{\bar c}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial \bar c}{\partial t} = \ddot{\bar c}(t,s) = 0$ für alle $(t,s) \in I \times (-\varepsilon,\varepsilon)$. Wir leiten nach s ab und erhalten

$$0 = \nabla^{\bar c}_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla^{\bar c}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial \bar c}{\partial t} = \nabla^{\bar c}_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^{\bar c}_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \bar c}{\partial t} + R^{\bar c}_{\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial \bar c}{\partial t} = \nabla^{\bar c}_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^{\bar c}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial \bar c}{\partial s} + R^{TM}_{\frac{\partial \bar c}{\partial s},\frac{\partial \bar c}{\partial t}} \frac{\partial \bar c}{\partial t} = \ddot V + R_{V,\dot c}\dot c \;,$$

wobei wir zunächst die Definition 1.60 von $R^{\bar c}$ und dann die Torsionsfreiheit von $\nabla^{\bar c}$ in Bemerkung 1.62 ausgenutzt haben. Somit ist das Variationsvektorfeld einer geodätischen Variation ein Jacobi-Feld.

Sei nun umgekehrt V ein Jacobifeld, und sei $t_0 \in [a,b]$. Realisiere zunächst $V(t_0)$ durch eine Kurve γ in M mit $\dot\gamma = V(t_0)$. Im Folgenden sei s der Parameter von γ. Bestimme dann ein differenzierbares Vektorfeld W längs γ mit

$$\nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial s}} W = \dot V(t_0) \;.$$

Das ist möglich, da die obige Bedingung in Koordinaten gerade die erste Ableitung von W bestimmt.

Nach Satz 1.74 existiert zu jedem s eine maximale Geodätische $c_s\colon I_s \to M$ mit $c_s(t_0) = \gamma(s)$ und $\dot c_s(t_0) = W(s)$, und $c_s(t)$ hängt $\mathcal{C}^2$ von s und t ab. Da $[a,b] \subset I$ kompakt ist und da c_s differenzierbar in s ist, können wir $\varepsilon > 0$ so wählen, dass $[a,b] \subset I_s$ für alle $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Wir erhalten also eine Geodätische Variation $\bar c(t,s) = c_s(t)$ für alle $(t,s) \in [a,b] \times (-\varepsilon,\varepsilon)$. Das Variationsfeld $\frac{\partial \bar c}{\partial s}$ ist nach dem ersten Teil des Beweises ein Jacobi-Feld, uns es gilt

$$\frac{\partial \bar c}{\partial s}(t_0) = \dot\gamma(0) = V(t_0) \qquad \text{und} \qquad \nabla^{\bar c}_{\frac{\partial}{\partial t}|_{(t_0,0)}} \frac{\partial \bar c}{\partial s} = \nabla^{\bar c}_{\frac{\partial}{\partial s}|_{(t_0,0)}} \frac{\partial \bar c}{\partial t} = \nabla^{\bar c}_{\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}} W = \dot V(t_0) \;.$$

In Koordinaten ist die Jacobigleichung ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung, also hat es nach Picard-Lindelöf zu jedem Paar von Anfangswerten $V(t_0)$, $\dot V(t_0) \in T_{c(t_0)}M$ eine eindeutige Lösung. Daher folgt $V = \frac{\partial \bar c}{\partial s}$, also leistet die geodätische Variation $\bar c$ das gewünschte. $\square$

1.82. Bemerkung. Wir können das Differential der Exponentialabbildung jetzt (etwas) besser verstehen. Seien dazu $p \in M$ und $v \in T_pM$ beliebig, dann können wir einen Vektor $w \in T_vTM$ wie oben geometrisch durch ein Vektorfeld W längs einer Kurve γ auf M mit $\gamma(0) = p$, $W(0) = v$ realisieren. Wir schreiben wieder

$$w = \big((\nabla^\gamma_{\frac{\partial}{\partial s}} W)(0), \dot\gamma(0)\big) \in T_pM \times T_pM \cong T_vTM \;.$$

Betrachte wieder die geodätische Variation

$$\bar c(t,s) = c_{W(s)}(t) = \exp_{\gamma(s)}(t \cdot W(s))$$

mit Variationsfeld V längs $c_0 = c_v$. Dann ist V das Jacobifeld längs c_v mit den Anfangsbedingungen

$$V(0) = \dot\gamma(0) \in T_pM \qquad \text{und} \qquad \dot V(0) = \nabla^{\bar c}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial \bar c}{\partial s} = \nabla^{\bar c}_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \bar c}{\partial t} = (\nabla^\gamma_{\frac{\partial}{\partial s}} W)(0) \;.$$

Wir erhalten also

$$d_v \exp(w) = \frac{\partial}{\partial s}\big(\exp_{\gamma(s)} W(s)\big) = \frac{\partial \bar c}{\partial s}(1,0) = V(1) \;.$$

Um das Differential von exp zu verstehen, müssen wir also nur die Jacobigleichung mit den oben angegebenen Anfangsbedingungen lösen. Da die Jacobi-Gleichung im Gegensatz zur Geodätischen-Gleichung linear ist, stellt das eine gewisse Vereinfachung dar.

Wir wollen jetzt geodätische Normalkoordinaten definieren. Nach Satz 1.78 (2) ist $\exp_p$ nahe des Nullvektors $0_p \in T_pM$ ein lokaler Diffeomorphismus.

1.83. Definition. Sei (M, g) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei $p \in M$. Sei $V \subset T_pM$ eine Umgebung des Nullvektors 0_p in T_pM, so dass $\exp_p \colon V \to U := \exp_p V$ ein Diffeomorphismus ist, und sei $A \colon (T_pM, g_p) \to (\mathbb{R}^n, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ eine lineare Isometrie, dann nennt man eine Karte der Form $\varphi = A \circ \exp_p^{-1} \colon U \to V^\varphi = A(V)$ *Riemannsche Normalkoordinaten* von M um p.

Für Rechnungen am Punkt p haben Normalkoordinaten um p sehr schöne Eigenschaften.

1.84. Proposition. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei $p \in M$. In Riemannschen Normalkoordinaten $\varphi \colon U \to V$ um p gilt*

$$g^\varphi_{ij}(0_p) = \delta_{ij} \;, \qquad \frac{\partial g^\varphi_{ij}}{\partial x^k}(0_p) = 0 \qquad \textit{und} \qquad {}^\varphi\Gamma^k_{ij}(0_p) = 0 \qquad \textit{für alle } i,\, j,\, k = 1, \dots, n \;.$$

Beweis. Die erste Aussage folgt aus Satz 1.78 (2), da $d_{0_p}(\exp_p) = \mathrm{id}_{T_pM}$ genau wie A eine lineare Isometrie ist. Die zweite Aussage folgt aus der dritten, da

$$\frac{\partial g^\varphi_{ij}}{\partial x^k} = e_k\big({}^\varphi g(e_i, e_j)\big) = \sum_{l=1}^n \big({}^\varphi g(\Gamma^l_{ki} e_l, e_j) + {}^\varphi g(e_i, \Gamma^l_{kj} e_l)\big) = 0 \;.$$

Zur dritten beachten wir, dass Γ^k_{ij} wegen der Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhangs ∇ für alle k in i und j symmetrisch ist. Da außerdem radiale Geraden $c^\varphi_v(t) = tv \in V^\varphi$ für alle $v \in T_pM$ Geodätische bezüglich der Metrik ${}^\varphi g$ auf V^φ sind, folgt

$$0 = \ddot c^\varphi_v(0) = \frac{\partial^2(tv)}{\partial t^2} + \sum_{i,j,k=1}^n v^i\, v^j\; {}^\varphi\Gamma^k_{ij}(0_p)\, e_k = \sum_{i,j,k=1}^n v^i\, v^j\; {}^\varphi\Gamma^k_{ij}(0_p)\, e_k \;,$$

also ${}^{\varphi}\Gamma_{ij}^{k}(0_p)=0$ für alle i, j, k durch Koeffizientenvergleich. □

1.85. Bemerkung. Man kann g_{ij}^{φ} und ${}^{\varphi}\Gamma_{ij}^{k}$ um 0_p nach Taylor entwickeln. Die nächsten interessanten Koeffizienten $\frac{\partial\,{}^{\varphi}\Gamma_{ij}^{l}}{\partial x^k}(0_p)$ und $\frac{\partial^2 g_{ij}^{\varphi}}{\partial x^k\,\partial x^l}(0_p)$ hängen nur von den Koeffizienten $R_{ijk}^{l}(0_p)$ der Krümmung ab (Übung), für die höheren Terme benötigt man außerdem auch die höheren kovarianten Ableitungen des Krümmungstensors im Sinne von Aufgabe 1 auf Blatt 4.

1.86. Satz (Zweite Variation der Bogenlänge). *Sei $c\colon I\to M$ eine Geodätische mit $\|\dot c\|=1$ auf einer Riemmanschen Mannigfaltigkeit (M,g), und sei $\bar c\colon I\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ eine Variation von c mit Variationsvektorfeld V. Setze*

$$\tilde V = V - \langle V,\dot c\rangle\,\dot c\;,$$

dann gilt

$$\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L(c_s|_{[a,b]}) = \Big\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} V,\dot c\Big\rangle\Big|_{t=a}^{b} + \int_a^b \big(\big\langle \dot{\tilde V},\dot{\tilde V}\big\rangle - \langle R_{V,\dot c}\,\dot c, V\rangle\big)\,dt\;.$$

Für geodätische Variationen vereinfacht sich der obige Ausdruck weiter.

Beweis. Da c eine Geodätische mit $\|\dot c\|=1$ ist, gilt

$$\dot{\tilde V} = \dot V - \langle \dot V,\dot c\rangle\dot c - \langle V,\ddot c\rangle\dot c - \langle V,\dot c\rangle\ddot c = \dot V - \langle \dot V,\dot c\rangle\dot c$$

und

$$\big\langle \dot{\tilde V},\dot{\tilde V}\big\rangle = \big\langle \dot V - \langle\dot V,\dot c\rangle\dot c, \dot V - \langle\dot V,\dot c\rangle\dot c\big\rangle = \langle\dot V,\dot V\rangle\langle\dot c,\dot c\rangle - \langle\dot V,\dot c\rangle^2\;.$$

Wir gehen wie im Beweis von Satz 1.64 vor und berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L(c_s|_{[a,b]}) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\int_a^b \frac{\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\dot c_s,\dot c_s\rangle}{\|\dot c_s\|}\,dt = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\int_a^b \frac{\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V,\dot c_s\rangle}{\|\dot c_s\|}\,dt\\
&= \int_a^b \frac{\big(\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V,\dot c\rangle + \langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V,\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V\rangle\big)\langle\dot c_s,\dot c_s\rangle - \langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V,\dot c_s\rangle^2}{\|\dot c_s\|^3}\Bigg|_{s=0}\,dt\\
&= \int_a^b \Big(\Big\langle R^{\bar c}_{\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial t}}V,\dot c\Big\rangle + \frac{\partial}{\partial t}\Big\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}V,\dot c\Big\rangle + \big\langle\dot{\tilde V},\dot{\tilde V}\big\rangle\Big)\,dt\\
&= \Big\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}V,\dot c\Big\rangle\Big|_{t=a}^{b} + \int_a^b\big(\big\langle\dot{\tilde V},\dot{\tilde V}\big\rangle - \langle R_{V,\dot c}\,\dot c,V\rangle\big)\,dt\;.
\end{aligned}$$

□

1.5. Riemannsche Mannigfaltigkeiten als Metrische Räume

In diesem Kapitel betrachten wir Riemannsche Mannigfaltigkeiten (M,g) als metrische Räume. Wir zeigen, dass kurze Teilstücke von Geodätischen den Abstand zwischen ihren Punkten realisieren. Auf diese Weise liefert uns die Exponentialabbildung spezielle Karten von (M,g) um p, die geodätischen Normalkoordinaten, die sehr gut an die lokale Geometrie von M angepasst sind.

Wir definieren zunächst den Abstand d zwischen zwei Punkten auf M und ziehen einige elementare Schlussfolgerungen. Anschließend beweisen wir das Gauß-Lemma, was uns lokale Information über den metrischen Raum (M,d) gibt.

1.87. Definition. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die *Riemannsche Abstandsfunktion* $d\colon M\times M\to[0,\infty]$ ist definiert als

$$d(p,q)=\inf\big\{\,L(\gamma|_{[a,b]})\;\big|\;\gamma\colon I\to M \text{ Kurve mit } \gamma(a)=p \text{ und } \gamma(b)=q \text{ für } a<b\,\big\}$$

für alle p, $q\in M$. Für einen festen Punkt $p\in M$ schreiben wir $d_p=d(p,\,\cdot\,)\colon M\to[0,\infty]$.

Nach Definition des Infimums ist der Abstand $d(p,q)$ genau dann unendlich, wenn es keine Kurven von p nach q gibt, das heißt, wenn p und q in verschiedenen Wegzusammenhangskomponenten von M liegen.

1.88. Bemerkung. Nach Definition ist die Funktion d

(1) *nicht negativ:* $d(p,q) \geq 0$ für alle p, $q \in M$, wobei $d(p,p) = 0$ für alle $p \in M$;
(2) *symmetrisch:* $d(p,q) = d(q,p)$ für alle p, $q \in M$, denn zu jeder Kurve γ mit $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$ für $a < b$ ist $\gamma' = \gamma(-\,\cdot\,)$ eine Kurve mit $\gamma'(a') = q$ und $\gamma'(b') = p$ für $a' = -b < b' = -a$;
(3) und erfüllt die Dreiecksungleichung
$$d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$$
für alle p, q, $r \in M$, denn je zwei Kurven γ_1 von p nach q und γ_2 von q nach r lassen sich zu einer Kurve γ von p nach r verketten, und nach glätten gilt für beliebige $\varepsilon > 0$, dass
$$L(\gamma) < L(\gamma_1) + L(\gamma_2) + \varepsilon \,,$$
und Bilden des Infimums auf beiden Seiten liefert die Behauptung.
(4) Wenn es eine reguläre Kurve γ von $p = \gamma(a)$ nach $q = \gamma(b)$ mit
$$L(\gamma|_{[a,b]}) = d(p,q)$$
gibt, dann ist γ nach Folgerung 1.68 bis auf Umparametrisierung eine Geodätische.

Sobald wir gezeigt haben, dass $d(p,q) > 0$ für $p \neq q$, wissen wir, dass d tatsächlich eine Metrik auf M definiert.

Der folgende Satz ist der erste Schritt zum Verständnis des Abstandsbegriffs auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

1.89. Satz (Gauß-Lemma). *Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$, und seien v, $w \in T_pM$. Wenn wir v, w als Vektoren in $T_vT_pM \cong T_pM$ auffassen, dann gilt*
$$\big\langle d_v(\exp_p)(v), d_v(\exp_p)(w)\big\rangle_{\exp_p v} = \langle v,w\rangle_p \,.$$

Beweis. Es sei c die Geodätische durch p mit Startvektor v, dann gilt $c(0) = p$, $\dot c(0) = v$, $c(1) = \exp_p v$ und $\dot c(1) = d_v(\exp_p)(v)$. Definiere eine Variation von c durch
$$\bar c(t,s) = c_s(t) = \exp_p\big(t \cdot (v + sw)\big) \,,$$
dann folgt
$$d_v(\exp_p)(w) = \frac{\partial}{\partial s} \exp_p\big(t \cdot (v+sw)\big) = \frac{\partial \bar c}{\partial s}\Big|_{(1,0)} = V(1) \,,$$
hierbei ist das Jacobi-Feld V offenbar eindeutig durch die Anfangswerte
$$V(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \dot V(0) = \frac{\partial^2 \bar c}{\partial s\, \partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \underbrace{(v+sw)}_{\in T_pM} = w$$
bestimmt.

Aus der Jacobi-Gleichung folgt
$$\frac{d}{dt}\langle \dot V(t), \dot c(t)\rangle = \langle \ddot V(t), \dot c(t)\rangle = -\langle R_{V(t),\dot c(t)}\, \dot c(t), \dot c(t)\rangle = 0$$
wegen Satz 1.51 (3). Aufgrund unser Anfangsbedingungen gilt also
$$\langle \dot V(t), \dot c(t)\rangle = \langle \dot V(0), \dot c(0)\rangle = \langle v,w\rangle_p \,.$$

Desweiteren gilt $\langle V(0), \dot c(0)\rangle = 0$ und

$$\frac{d}{dt}\langle V(t), \dot c(t)\rangle = \langle \dot V(t), \dot c(t)\rangle = \langle v, w\rangle_p\ ,$$

also

$$\langle V(t), \dot c(t)\rangle = t\,\langle v, w\rangle_p\ .$$

Daraus folgt wie behauptet, dass

$$\big\langle d_v(\exp_p)(v), d_v(\exp_p)(w)\big\rangle_{\exp_p v} = \langle V(1), \dot c(1)\rangle = \int_0^1 \langle V(t), \dot c(t)\rangle\, dt = \langle v, w\rangle_p\ .$$

$\square$

1.90. Folgerung. *Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zu jedem $p \in M$ existiert eine Radius $r > 0$, so dass die Exponentialabbildung $\exp_p$ auf $B_r(0_p) \subset T_pM$ definiert und injektiv ist, und für alle $v \in B_r(0_p)$ gilt*

$$d(p, \exp_p v) = \|v\|\ .$$

Für alle $q \in M \setminus \exp_p(B_r(0_p))$ gilt $d(p, q) \geq r$.

Beweis. Die Existenz von r folgt bereits aus Satz 1.78 (2) über die lokale Umkehrbarkeit von $\exp_p$ nahe $0_p \in T_pM$. Sei jetzt $v \in B_r(0_p)$. Dann ist c_v nach Voraussetzung auf $[0, 1]$ definiert, und es gilt

$$L(c_v|_{[0,1]}) = \int_0^1 \|\dot c_v(t)\|\ dt = \|v\|$$

nach Bemerkung 1.66, folglich

$$d(p, \exp_p v) \leq L(c_v|_{[0,1]}) = \|v\|\ .$$

Für die umgekehrte Abschätzung sei $\gamma\colon I \to M$ eine Kurve mit $\gamma(a) = p$ und $\gamma(b) = \exp_p v$. Wir wollen $L(\gamma|_{[a,b]}) \geq \|v\|$ beweisen, dazu unterscheiden wir zwei Fälle.

Falls $\gamma([a, b])$ in $\exp_p(B_r(0_p))$ verläuft, bilden wir das Urbild unter exp und erhalten eine Kurve

$$\tilde\gamma = \exp_p^{-1} \circ \gamma\colon [a, b] \to B_r(0_p) \subset T_pM\ .$$

Definiere eine Funktion $f\colon [a, b] \to [0, r)$ durch

$$f(s) = \|\tilde\gamma(s)\|\ ,$$

dann ist f differenzierbar auf der Menge

$$I' = \big\{\, t \in [a, b] \,\big|\, \tilde\gamma(t) \neq 0 \,\big\} = \big\{\, t \in [a, b] \,\big|\, \gamma(t) \neq p \,\big\}\ .$$

Sei $s \in I'$, und sei $c_s\colon (-r, r) \to M$ die Geodätische mit Anfangsbedingungen

$$c_s(0) = p \qquad \text{und} \qquad \dot c_s(0) = \frac{\tilde\gamma(s)}{\|\tilde\gamma(s)\|} =: v_s\ .$$

Aus dem Gauß-Lemma und der Cauchy-Schwartz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}\left(\frac{df(s)}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\,\|\tilde\gamma(s)\|}{ds}\right)^2 &= \frac{\big\langle \dot{\tilde\gamma}(s), \tilde\gamma(s)\big\rangle_p^2}{\|\tilde\gamma(s)\|_p^2} = \big\langle \dot{\tilde\gamma}(s), v_s\big\rangle_p^2 \\ &= \big\langle \dot\gamma(s), \dot c_v(f(s))\big\rangle_{\gamma(s)}^2 \leq \|\dot\gamma(s)\|^2\ .\end{aligned}$$

Für die Länge von γ erhalten wir somit

$$L(\gamma|_{[a,b]}) \geq \int_{I'} \|\dot\gamma(s)\|\ ds \geq \int_{I'} \left|\frac{df(s)}{ds}\right|\ ds \geq \|v\|\ ,$$

da $f(a) = 0$ und $f(b) = \|v\|$.

Im zweiten Fall gilt $\gamma([a, b]) \not\subset \exp_p(B_r(0_p))$. Folglich existiert

$$c = \inf\left\{ s \in [a, b] \;\middle|\; \gamma(s) \notin \exp_p(B_r(0_p)) \right\} \in (a, b) .$$

Die obige Abschätzung liefert jetzt

$$L(\gamma|_{[a,b]}) \geq L(\gamma|_{[a,c]}) \geq r > \|v\| \; .$$

In jedem Fall folgt also

$$L(\gamma|_{[a,b]}) \geq L(c_v|_{[0,1]}) = \|v\| \; ,$$

also realisiert c_v den Abstand $d(p, \exp_p v) = \|v\|$ wie behauptet.

Die zweite Aussage folgt mit dem Argument zum zweiten Fall oben. □

1.91. Bemerkung. Wenn man diesen Beweis genauer anschaut, kann man auch noch folgendes zeigen (Übung). Sei $p \in M$ und $r > 0$ wie oben, sei $q \in \exp_p(B_r(0_p))$, und sei $\gamma\colon I \to M$ eine (nicht notwendig reguläre) Kurve mit $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$ und $L(\gamma|_{[a,b]}) = d(p, q)$. Dann existiert $v \in T_pM$ mit $\|v\| = 1$ und eine streng monoton steigende Funktion $f\colon [a, b] \to [0, d(p, q)]$, so dass $\gamma(t) = c_v(f(t))$ für alle $t \in [a, b]$.

Analog gilt allgemein (Übung): Seien p $q \in M$, und sei $\gamma\colon I \to M$ eine (nicht notwendig reguläre) Kurve mit $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$ und $L(\gamma|_{[a,b]}) = d(p, q)$. Dann existiert eine Geodätische c und eine streng monoton steigende Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, so dass $\gamma(t) = c(f(t))$ für alle $t \in [a, b]$. Dazu überlegt man sich, dass die entsprechende Aussage zumindest auf hinreichend kurzen Teilintervallen $[a_i, b_i] \subset [a, b]$ gelten, die ganz in einem Ball $\exp_{p_i}(B_{r_i}(p_i))$ verlaufen.

1.92. Bemerkung. Wir schreiben für $p \in M$ ab sofort

$$B_r(p) := d_p^{-1}[0, r)$$

und sprechen vom (*metrischen*) *Ball* um p mit Radius r. Falls $\exp_p$ auf ganz $B_r(0_p)$ definiert ist und Diffeomorphismus auf das Bild ist, gilt

$$B_r(p) = \exp_p(B_r(0_p))$$

nach Folgerung 1.90. Den allgemeinen Fall behandeln wir in Proposition 1.93.

Es folgt

$$\overline{B_r(p)} = d_p^{-1}[0, r] \; .$$

Genauer gesagt gilt „$\subset$“, da d_p stetig ist, und „$\supset$“ gilt, da für $q \in M$ mit $d(p, q) = r$ und eine Folge von nach Bogenlänge parametrisierter Kurven γ_i mit $\gamma_i(0) = p$, $\gamma_i(r_i) = q$ und $r_i \searrow r$ gilt, dass:

$$\lim_{i\to\infty} d\left(\gamma_i\left(r - \frac{1}{i}\right), q\right) \leq \lim_{i\to\infty} \left(r_i - r + \frac{1}{i}\right) = 0 \; .$$

In geodätischen Normalkoordinaten um q sieht man, dass $\gamma_i\bigl(r-\frac{1}{i}\bigr)$ gegen q konvergiert, aber $d(\gamma_i\bigl(r-\frac{1}{i}\bigr), p) < r$ für alle i, also $q \in \overline{B_r(p)}$.

Wir tragen nun einen wichtigen Schritt im Beweis des Satzes 1.95 von Hopf und Rinow nach. Dabei müssen wir aufpassen, dass wir keine der Aussagen im Satz von Hopf-Rinow verwenden dürfen.

1.93. Proposition. *Es sei M Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Falls die Exponentialabbildung auf ganz $\overline{B_r(0)} \subset T_pM$ definiert ist, gilt*

$$\overline{B_r(p)} = \exp\bigl(\overline{B_r(0)}\bigr) \subset M \; .$$

Beweis. Zunächst überlegen wir uns, dass für alle $s \leq r$ die Menge

$$A_s := \left\{ q \in \overline{B_s(p)} \;\middle|\; q = \exp_p v \text{ für ein } v \in TM \text{ mit } \|v\| = d(p,q) \right\} \subset M$$

derjenigen Punkte in $\overline{B_s(p)}$, die mit p durch eine kürzeste Geodätische verbunden werden können, kompakt ist. Die Menge A_s ist Bild der offensichtlich beschränkten Teilmenge

$$V_s := \left\{ v \in \overline{B}_s(0_p) \;\middle|\; d(p, \exp_p v) = \|v\| \right\} \subset TM$$

unter exp. Diese Menge ist aber auch abgeschlossen, denn sei $v \in \overline{B_s(0_p)}$ Grenzwert einer Folge (v_i) in V_s, dann folgt

$$d(p, \exp_p v) = \lim_{i\to\infty} d(p, \exp_p v_i) = \lim_{i\to\infty} \|v_i\| = \|v\|$$

aus der Stetigkeit der Exponentialabbildung. Folglich sind V_s und $A_s = \exp(V_s)$ kompakt.

Es sei $J \subset [0,r)$ die Menge derjenigen Zahlen s, so dass $A_s = \overline{B_s(p)}$. Nach Folgerung 1.90 enthält J ein Intervall $[0,\delta]$. Nach Definition von A_s liegt mit s bereits ganz $[0,s]$ in J. Aus $[0,s) \in J$ folgt auch $s \in J$, denn jeder Punkt q mit $d(p,q) = s$ lässt sich durch eine Folge (q_i) von Punkten in $d(p,q_i) < s$ approximieren, es gilt $q_i = \exp_p v_i$ für Vektoren $v_i \in T_pM$ mit $\|v_i\| = d(p,q_i)$, und o.B.d.A. existiert ein Grenzwert $v \in T_pM$ der Folge (v_i), für den $\exp_p v = q$ und $\|v\| = s = d(p,q)$ folgt. Mithin ist J ein abgeschlossenes Teilintervall von $[0,r)$.

Es sei also $r_0 = \sup J$, und wir wollen $r_0 = r$ beweisen. Falls $r_0 < r$ ist, ist insbesondere $r_0 < \infty$, und $\overline{B_{r_0}(p)}$ ist kompakt. Wir behaupten, dass es ein $\varepsilon \in (0, r - r_0)$ gibt, so dass $\exp_q|_{B_\varepsilon(0_q)}$ für alle $q \in \overline{B_{r_0}(p)}$ injektiv ist. Wäre das nicht der Fall, so existierten Folgen von Vektoren (v_i), (w_i) in $TM|_{\overline{B_{r_0}(p)}}$ mit

$$v_i \neq w_i\,, \qquad \pi(v_i) = \pi(w_i)\,, \qquad \exp v_i = \exp w_i \qquad \text{und} \qquad \lim_{i\to\infty} \|v_i\| = \lim_{i\to\infty} \|w_i\| = 0\,.$$

Die Folge $\pi(v_i)$ besitzt aber einen Häufungspunkt q_0, und nach Satz 1.78 ist $\pi \times \exp$ in einer Umgebung von 0_{q_0} ein Diffeomorphismus, was der Existenz obiger Folgen widerspricht.

Falls $r_0 = \sup J < r$ gilt, wähle also $\varepsilon > 0$ wie oben und $q \in B_{r_0+\varepsilon}(p) \setminus \overline{B}_{r_0}(p)$. Dann existiert eine Folge nach Bogenlänge parametrisierter Kurven γ_i mit $\gamma_i(0) = p$ und $\gamma_i(t_i) = q$, wobei $t_i \searrow d(p,q)$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert eine Folge von Punkten q_i im Bild von γ_i mit $d(p,q_i) = r_0$. Wegen Kompaktheit konvergiert eine Teilfolge dieser Punkte gegen einen Punkt q_0 mit $d(p,q_0) = r_0$. Aus der Dreiecksungleichung folgt sofort

$$d(p,q_0) + d(q_0,q) = d(p,q)\,.$$

Nach Wahl von $\varepsilon > 0$ und der Folgerung 1.90 aus dem Gauß-Lemma existiert eine kürzeste Geodätische von q_0 nach q, und nach Wahl von r_0 auch eine von p nach q_0. Würden sich diese beiden nicht zu einer Geodätischen von p nach q zusammensetzen lassen, wäre $d(p,q_0) + d(q_0,q) > d(p,q)$ im Widerspruch zur obigen Konstruktion. Es folgt $q \in A_{r_0+\varepsilon}$ für alle $q \in B_{r_0+\varepsilon}(p)$, mithin $[0, r_0+\varepsilon) \subset J$ im Widerspruch zur Wahl von r_0. Hieraus folgt aber letztendlich, dass sich jeder Punkt in $\overline{B_r(p)}$ mit p durch eine kürzeste Geodätische verbinden lässt, und insbesondere gilt

$$\overline{B_r(p)} = \exp\bigl(\overline{B_r(0)}\bigr) \subset M\,.$$

$\square$

1.94. Folgerung. *Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann definiert die Riemannsche Abstandsfunktion d eine Metrik auf M. Die metrische Topologie auf M stimmt mit der zugrundeliegenden Topologie der Mannigfaltigkeit überein.*

Beweis. Aus der vorigen Folgerung 1.90 ergibt sich, dass $d(p,q) > 0$ falls $p \neq q$. Nach Bemerkung 1.88 ist (M,d) also metrischer Raum.

Nun zu den Topologien. Sei $U \subset M$ offen in der zugrundeliegenden Topologie von M, und sei $p \in U$. Sei r wie in Folgerung 1.90 gewählt. In geodätischen Normalkoordinaten φ um p ist $\varphi^{-1}(U)$ offen, es folgt $B_\varepsilon(0_p) \subset \varphi^{-1}(U)$ für ein $\varepsilon \in (0, r)$, und nach Folgerung 1.90 gilt also auch $B_\varepsilon(p) = \exp_p(B_\varepsilon(0_p)) \subset U$. Somit ist U offen in der metrischen Topologie.

Sei andererseits U in der metrischen Topologie offen. Zu $p \in U$ existiert dann ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(p) \subset U$, aber $B_\varepsilon(p)$ ist in der zugrundeliegenden Topologie von M offen. Mithin ist U eine Vereinigung offener metrischer Bälle, also ebenfalls offen. □

Wir haben also einen metrischen Raum (M, d) definiert, und fragen uns als nächstes, ob er vollständig ist. Zur Erinnerung: Eine Folge $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Punkten in M heißt *Cauchy-Folge,* wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $d(p_i, p_j) < \varepsilon$ für alle i, $j \geq n_0$. Eine metrischer Raum (M, d) heißt *vollständig,* wenn jede Cauchy-Folge in M konvergiert.

1.95. Satz (Hopf-Rinow). *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Abstandsfunktion d, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *(M, d) ist vollständig;*
(2) *die Exponentialabbildung* $\exp$ *ist auf ganz TM definiert;*
(3) *für ein $p \in M$ ist $\exp_p$ auf ganz T_pM definiert;*
(4) *für alle $p \in M$ und alle $r > 0$ ist $\overline{B_r(p)}$ kompakt;*
(5) *für ein $p \in M$ und alle $r > 0$ ist $\overline{B_r(p)}$ kompakt.*

Falls diese Aussagen gelten und M zusammenhängend ist , folgt

(2) *zu je zwei Punkten p, $q \in M$ existiert eine Geodätische der Länge $d(p, q)$ von p nach q.*

Die Eigenschaft (6) könnte man *geodätische Konvexität* nennen. Dass (6) zu den anderen Aussagen nicht äquivalent ist, sieht man einfachsten anhand eines metrischen Balles $U = B_r(0) \subset (\mathbb{R}^n, g^{\text{eukl}})$, der zwar (6), aber nicht (1)–(5) erfüllt.

Beweis. Die Implikationen (2) $\Rightarrow$ (3) und (4) $\Rightarrow$ (5) sind trivial. Zu (2) $\Rightarrow$ (4) und (3) $\Rightarrow$ (5) benutzen wir Folgerung 1.90, wonach

$$\overline{B_r(p)} = \exp_p\bigl(\overline{B_r(0_p)}\bigr) .$$

Als Bild einer kompakten Menge unter der stetigen Exponentialabbildung ist $\overline{B_r(p)}$ dann ebenfalls kompakt.

Nun zu (1) $\Rightarrow$ (2). Wir fixieren $p \in M$ und $v \in T_pM$. Wir nehmen

$$t_0 := \sup\bigl\{\, t > 0 \bigm| tv \in D_{\exp} \,\bigr\} < \infty$$

an und wählen eine Folge $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ positiver Zahlen mit $t_i \nearrow t_0$. Dann bilden die Punkte $p_i = c_v(t_i)$ eine Cauchy-Folge in M; sei $q \in M$ ihr Grenzwert. In Normalkoordinaten φ um q ist c_v eine Geodätische, die für $t \nearrow t_0$ gegen 0_q konvergiert. Mithin lässt sich c zu einer radialen Geodätischen durch q fortsetzen, und somit lässt sich $c(tv) = \exp_p(tv)$ auch für ein $t > t_0$ definieren, im Widerspruch zur Wahl von t. Wegen $t_0 = \infty$ ist $\exp_p(tv)$ für alle t definiert, also auch für $t = 1$. Insgesamt folgt $D_{\exp} = TM$.

Zu (5) $\Rightarrow$ (1) sei $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge. Da M zusammenhängend ist, existiert eine Kurve von p zu jedem q_i, also sind alle $d(q_i, p)$ endlich. Da (q_i) Cauchy-Folge ist, existiert $r > 0$ mit $d(q_i, p) < r$ für alle i. Da $\overline{B_r(p)}$ kompakt ist, hat die Folge (q_i) einen Häufungspunkt, der dann auch Grenzwert sein muss. Hieraus folgt die metrische Vollständigkeit.

Schließlich zu (2) $\Rightarrow$ (6). Es seien p, $q \in M$ und $r = d(p, q) < \infty$. Nach Bemerkung 1.91 gilt $q \in \overline{B_r(p)} = \exp_p(\overline{B_r(0_p)})$. Sei also $v \in \exp_p^{-1}(q)$ mit $\|v\| \leq r$, dann ist c_v die gesuchte Geodätische. □

1.96. Definition. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) mit Abstandsfunktion d heißt *vollständig,* wenn der metrische Raum (M, d) vollständig ist.

1.97. Beispiel. Der euklidische Raum (R^n, g^{eukl}), die Sphäre (S^n, g^{sph}), und der hyperbolische Raum $(H, g^{\mathrm{hyp}}) := (B_1^n(0), g^{\mathrm{hyp}})$ aus den Beispielen 1.30, 1.34 und 1.35 sind vollständig (Übung).

Wenn wir das globale Verhalten einer Riemannschen Mannigfaltigkeit studieren wollen, werden wir fast immer annehmen, dass (M, g) vollständigund zusammenhängend ist. Ansonsten werden viele Argumente nicht funktionieren. Als Beispiel erinnern wir uns an die Aussage, dass alle (metrisch) beschränkte Mengen in M präkompakt sind, die wegen Satz 1.95 zur Vollständigkeit äquivalent sind. Wir wollen das präzisieren.

1.98. Definition. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Abstandsfunktion d, dann ist der *Durchmesser* von (M, g) definiert als

$$\operatorname{diam}(M, g) = \sup\bigl\{\, d(p, q) \bigm| p, q \in M \,\bigr\} .$$

1.99. Beispiel. Während der euklidische und der hyperbolische Raum unendlichen Durchmesser haben, gilt

$$\operatorname{diam}(S^n, g^{\mathrm{sph}}) = \pi$$

für alle $n \geq 1$.

Zur Begründung wählen wir p, $q \in S^n$, dann liegen p und q auf einem Großkreis c. Sei c nach Bogenlänge parametrisiert, dann gilt $c(t) = c(t + 2\pi n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. O.B.d.A. sei also $c(0) = p$, $c(r) = q$ für $r \in [0, 2\pi)$. Es folgt

$$d(p, q) \leq \min\bigl(L(c|_{[0,r]}), L(c|_{[r,2\pi]})\bigr) \leq \min(r, 2\pi - r) \leq r .$$

Auf der anderen Seite sieht man leicht, dass Antipoden p und $-p$ genau den Abstand π haben.

Das bedeutet dann aber auch, dass jeder parametrisierte Großkreis der Länge $l > \pi$ nicht mehr die kürzeste Verbindung zwischen seinen Endpunkten ist. Um dieses Phänomen werden wir uns im nächsten Abschnitt kümmern.

Hier noch eine schöne Folgerung aus dem Satz von Hopf-Rinow.

1.100. Folgerung. *Sei (M, g) eine vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann ist M genau dann kompakt, wenn* $\operatorname{diam}(M)$ *endlich ist.* □

1.101. Beispiel. Also sind euklidische und hyperbolische Räume nicht kompakt, wohl aber die Sphären.

1.6. Kürzeste Geodätische, Schnittort und konjugierter Ort

Wir wissen, dass kürzeste Kurven zwischen zwei Punkten Geodätische sind, aber die Umkehrung ist nicht immer richtig, wie wir anhand der Sphäre in Beispiel 1.99 gesehen haben.

Sei (M, g) wie immer eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir betrachten auf TM die Funktion $v \mapsto \|v\|^2$, die genau so oft differenzierbar ist wie TM selbst. Da 1 ein regulärer Wert ist, ist

$$SM = \bigl\{\, v \in TM \bigm| \|v\|^2 = 1 \,\bigr\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von TM, das *Einheitstangentialbündel* oder auch *Einheitssphärenbündel* von M. Wir schreiben $S_pM = SM \cap T_pM$, dann ist S_pM eine runde Sphäre im euklidischen Vektorraum (T_pM, g_p).

1.102. Definition. Sei (M,g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zu jedem $v \in SM$ definieren wir

$$s(v) := \sup\bigl\{\, t > 0 \bigm| d\bigl(c_v(t), c_v(0)\bigr) = t \,\bigr\} \in (0,\infty] ,$$

dann heißt die Menge

$$C := \bigl\{\, s(v) \cdot v \bigm| v \in SM \text{ mit } s(v) < \infty \,\bigr\} \subset TM$$

der *tangentiale Schnittort* von (M,g). Für alle $p \in M$ heißt $C_p := C \cap T_pM$ der *tangentiale Schnittort* und

$$C(p) = \exp_p(C_p) \subset M$$

der *Schnittort* von M. Schließlich heißt

$$\rho(p) = \inf_{v \in S_pM} s(v) = \inf_{q \in C(p)} d(p,q) \in (0,\infty]$$

der *Injektivitätsradius* von p und

$$\rho = \inf_{p \in M} \rho(p) = \inf_{v \in SM} s(v) \in [0,\infty]$$

der *Injektivitätsradius* von M.

1.103. Bemerkung. Wenn wir $r > 0$ wie in Folgerung 1.90 wählen, sehen wir sofort, dass der Injektivitätsradius von p mindestens r beträgt, insbesondere gilt $\rho(p) > 0$ für alle $p \in M$ wie in der Definition behauptet. Es gibt allerdings durchaus Beispiele von Mannigfaltigkeiten mit $\rho(M) = 0$.

1.104. Beispiel. Auf dem Einheitstangentialbündel der runden Sphäre (S^n, g^{sph}) ist die obige Funktion $s \equiv \pi$ konstant nach Beispiel 1.99. Es folgt $C(p) = \{-p\}$ für alle $p \in S^n$, und der Injektivitätsradius ist $\rho(p) = \pi = \rho(M)$.

Im euklidischen wie im hyperbolischen Raum ist jede Geodätische (also jede euklidische bzw. hyperbolische Gerade) die kürzeste Verbindung zwischen je zwei ihrer Punkte. In diesem Fall gilt also $s \equiv \infty$ und $C_p = \emptyset = C(p)$ für alle Punkte p, und wir haben $\rho(p) = \infty = \rho(M)$.

Im allgemeinen ist die Funktion s nicht konstant, oft ist sie nicht einmal differenzierbar. Wir wollen jetzt den Namen „Injektivitätsradius“ näher beleuchten.

1.105. Proposition. *Sei (M,g) eine zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei $s\colon SM \to (0,\infty]$ die Funktion aus Definition 1.102. Dann sind die folgenden Abbildungen injektiv:*

$$\exp_p\colon \bigl\{\, tv \bigm| v \in S_pM, 0 \le t < s(v) \,\bigr\} \to M \qquad \textit{für alle } p \in M$$

$$\textit{und} \qquad \exp \times \pi\colon \bigl\{\, tv \bigm| v \in SM, 0 \le t < s(v) \,\bigr\} \to M \times M .$$

Später werden wir sehen, dass die obigen Abbildungen sogar Diffeomorphismen sind, aber dazu brauchen wir etwas mehr Technik.

Beweis. Die zweite Aussage folgt sofort aus der ersten, denn aus $(\exp \times \pi)(v) = (\exp \times \pi)(w)$ folgt sofort, dass v und $w \in TM$ den gleichen Fußpunkt haben.

Wir nehmen jetzt an, dass v, $w \in SM$ und $t < s(v)$, $u < s(w)$ mit $\exp_p(tv) = \exp_p(uw) =: q \in M$ gegeben sind. Aus der Definition von s folgt, dass sowohl c_v als auch c_w kürzeste Verbindungen sind, also

$$t = L(c_v|_{[0,t]}) = d(p,q) = L(c_w|_{[0,u]}) = u .$$

Für jedes $t' > t$ betrachten wir den Punkt $q' = \exp_p(t'v)$. Wir erhalten zwei Verbindungen der Länge t' von p nach q', nämlich c_v und die nicht differenzierbare Kurve

$$\gamma : r \mapsto \begin{cases} c_w(r) & \text{für } r \le t, \text{ und} \\ c_v(r) & \text{für } r \ge t . \end{cases}$$

In Normalkoordinaten $\varphi\colon U^\varphi \to V^\varphi$ um q sind sowohl c_v als auch c_w radiale Geodätische, die sich unter einem Winkel α treffen. Für jedes hinreichend kleine $0 < \varepsilon < t' - t$ ersetzen wir jetzt γ durch die (ebenfalls nicht differenzierbare) Kurve γ_ε, die außerhalb von $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ mit γ übereinstimmt, und auf $[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ in Normalkoordinaten eine gerade Strecke beschreibt. Nach dem Gauß-Lemma sind $\varphi \circ c_v$ und $\varphi \circ c_w$ euklidische Geraden in V^φ. Es ist jetzt leicht zu sehen, dass die Kurven γ_ε in der euklischen Metrik auf V^φ um $c\varepsilon$ kürzer als γ sind, wobei

$$c = 2\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) > 0 \;.$$

Nach Proposition 1.84 stimmt g^φ in 0_q mit der euklidischen Metrik g_q auf T_qM überein, und die ersten Ableitungen von g^φ bei 0_q verschwinden, also fällt auch die Länge der Kurven γ_ε in M bezüglich g noch streng monoton für hinreichend kleine ε. Aber damit sind weder c_v noch γ kürzeste Verbindungen von p nach q', es folgt $s(v) \le t'$ für alle $t' > t$, und somit $t \ge s(v)$ im Widerspruch zur Annahme. Ein ähnliches Argument beweist auch $t = u \ge s(w)$. □

1.106. Bemerkung. Sei v in SM, dann folgt

$$d(c_v(t), c_v(0)) < t \qquad \text{für alle } t > s(v) \;.$$

Insbesondere ist $c_v|_{[0,t]}$ nicht mehr die kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte für $t > s(v)$.

Zur Begründung sei $t > s(v)$. Nach Definition von $s(v)$ existiert eine Zahl $t_0 \in (s(v), t)$, so dass

$$t_0 = L(c_v|_{[0,t_0]}) > d\bigl(c_v(0), c_v(t_0)\bigr) =: r_0 \;,$$

also existiert eine kürzere Verbindung $\gamma_0\colon [0, r_0] \to M$ von $p := c_v(0)$ nach $q := c_v(t_0) = \gamma_0(r_0)$. Aber dann ist die zusammengesetzte Kurve γ mit

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_0(t) & \text{falls } t \le r_0 \text{, und} \\ c_v(t + t_0 - r_0) & \text{falls } t \ge r_0 \end{cases}$$

eine kürzere Verbindung von p nach $c_v(t)$ als c_v (und sie lässt sich zu einer Kurve glätten, die immer noch kürzer als c_v ist). Ein genaues Studium der Funktion $s\colon SM \to (0, \infty]$ verrät uns also viel über die kürzesten Geodätischen auf einer Mannigfaltigkeit.

Bevor wir weitere Aussagen zur Funktion s und zum Injektivitätsradius machen können, definieren wir den verwandten Begriff des konjugierten Ortes und des konjugierten Punktes.

1.107. Definition. Sei (M, g) vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, und seien $p \in M$ und $v \in S_pM$. Ein Vektor $tv \in T_pM$ für $t > 0$ heißt *zu p konjugiert,* wenn es ein Jacobifeld $V \neq 0$ längs c_v mit $V(0) = V(t) = 0$ gibt. Die Menge aller zu p konjugierten Vektoren in T_pM heißt der *tangentiale konjugierte Ort* von p. Das Infimum der Beträge eines zu p konjugierten Vektors heißt der *konjugierte Radius* von p.

Das Bild des tangentialen konjugierten Ortes von p unter $\exp_p$ heißt der *konjugierte Ort* von p in M, seine Elemente heißen *zu p konjugierte Punkte,* und q heißt zu p konjugiert *längs c,* wenn c eine Geodätische durch $p = c(a)$ und $q = c(b)$ ist, entlang der ein Jacobifeld $V \neq 0$ mit $V(a) = V(b) = 0$ existiert.

Aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen folgt leicht, dass die $t > 0$, für die tv zu p konjugiert sind, diskret in $\mathbb{R}$ liegen.

1.108. Bemerkung. Nach Bemerkung 1.82 wird das Differential von $\exp_p$ bei $v \in TM$ genau durch Lösung der Jacobi-Feld-Gleichung für Vektorfelder V längs c_v mit $V(0) = 0$ gegeben. Insbesondere beschreibt der konjugierte Ort zu p in T_pM genau die kritischen Punkte von $\exp_p$, somit ist $\exp_p$ außerhalb des konjugierten Ortes ein lokaler Diffeomorphismus.

1.109. Beispiel. Nach Übung 1 von Blatt 5 gibt es keine konjugierten Punkte auf $(\mathbb{R}^n, g^{\mathrm{eukl}})$ und (H^n, g^{hyp}). Somit ist der konjugierte Radius hier ∞, genau wie der Injektivitätsradius nach Beispiel 1.104.

Auf der Sphäre (S^n, g^{sph}) hingegen werden Jacobifelder V längs c_v mit $V(0) = 0$ für $v \in SM$ gegeben durch $V(t) = \sin(t)\, W$ für ein zu $\dot c_v$ senkrechtes, längs c_v paralleles Vektorfeld W. Somit sind genau die Vektoren $\pi n v$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $v \in S_pM$ zu p konjugiert. Mithin ist π der konjugierte Radius, und auch der Injektivitätsradius nach Beispiel 1.104.

Wir wollen jetzt den konjugierten Radius mit dem Injektivitätsradius in Beziehung setzen.

1.110. Proposition. *Sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei die Funktion $s\colon S \to (0, \infty]$ wie in Definition 1.102 gegeben. Sei $p \in M$, dann ist kein Vektor tv mit $v \in S_pM$ und $0 < t < s(v)$ zu p konjugiert.*

Beweis. Dieser Beweis verläuft ähnlich wie der von Proposition 1.105. Wir nehmen an, dass $t_0 v$ zu p konjugiert sei für ein $t_0 \in (0, s(v))$, und wollen zeigen, dass dann $c = c_v$ für kein $t_1 \in (t_0, s(v))$ mehr kürzeste Geodätische zwischen p und $c(t_1)$ ist, im Widerspruch zur Definition von $s(v)$.

Sei dazu $X \neq 0$ ein Jacobifeld längs c mit $X(0) = X(t_0) = 0$. Dann folgt $X'(t_0) \neq 0$, denn sonst wäre ja $X \equiv 0$ nach Picard-Lindelöf. Aus der Jacobigleichung folgt $X \perp \dot c$ auf ganz $[0, t_1]$. Sei Y ein beliebiges glattes Vektorfeld längs c mit $Y \perp \dot c$ auf ganz $[0, t_1]$, und mit $Y(t_0) = -X'(t_0)$ und $Y(0) = Y(t_1) = 0$. Wir fixieren $\eta > 0$ und konstruieren eine stetige Variation $c_s\colon [0, t_1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ von c, so dass

(1) die Einschränkungen $c_s|_{[0,t_0]\times(-\varepsilon,\varepsilon)}$ und $c_s|_{[t_0,t_1]\times(-\varepsilon,\varepsilon)}$ glatt sind;
(2) das Variationsfeld V die folgende Gestalt hat:

$$V(t) = \begin{cases} X(t) + \eta\, Y(t) & \text{für } t \in [0, t_0], \text{ und} \\ \eta\, Y(t) & \text{für } t \in [t_0, t_1]; \end{cases}$$

(3) $c_s(0) = c(0)$ und $c_s(t_1) = c(t_1)$ für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt.

Da $c = c_0$ eine Geodätische ist, folgt

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L\big(c_s|_{[0,t_1]}\big) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L\big(c_s|_{[0,t_0]}\big) + \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L\big(c_s|_{[t_0,t_1]}\big) = \langle \dot c, V\rangle|_{[0,t_0]} + \langle \dot c, V\rangle|_{[t_0,t_1]} = 0$$

aus der ersten Variationsformel aus Satz 1.64. Wir benutzen jetzt die zweite Variationsformel aus Satz 1.86. Da $V \perp \dot c$ auf ganz $[0, t_1]$, erhalten wir auf $[0, t_0]$ zunächst

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L\big(c_s|_{[0,t_0]}\big) &= \Big\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} V, \dot c \Big\rangle\Big|_0^{t_0} + \int_0^{t_0} \big(\big\|\dot X + \eta\, \dot Y\big\|^2 - \langle R_{X+\eta Y, \dot c}\dot c, X + \eta Y\rangle\big)\, dt \\ &= \Big\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} V(t_0), \dot c(t_0) \Big\rangle + \langle \dot X, \underbrace{X + 2\eta Y}_{=0 \text{ für } t=0} \rangle\big|_0^{t_0} \\ &\quad + \int_0^{t_0} (\eta^2 \langle \dot Y, \dot Y\rangle - \langle \underbrace{\ddot X + R_{X,\dot c}\dot c}_{=0}, X + 2\eta Y\rangle - \eta^2\, \langle R_{Y,\dot c}\dot c, Y\rangle)\, dt \\ &= \Big\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} V(t_0), \dot c(t_0) \Big\rangle - 2\eta\, \big\|\dot X(t_0)\big\|^2 + \eta^2 \int_0^{t_0} (\langle \dot Y, \dot Y\rangle - \langle R_{Y,\dot c}\dot c, Y\rangle)\, dt \end{aligned}$$

wegen der Jacobifeld-Gleichung, und da $Y(t_0) = -\dot X(t_0)$. Auf dem Teilintervall $[t_0, t_1]$ gilt $V = \eta Y$, und wir erhalten analog

$$\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L\big(c_s|_{[t_0,t_1]}\big) = -\Big\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} V(t_0), \dot c(t_0) \Big\rangle + \eta^2 \int_{t_0}^{t_1} (\langle \dot Y, \dot Y\rangle - \langle R_{Y,\dot c}\dot c, Y\rangle)\, dt\ .$$

Addieren liefert
$$\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L\big(c_s|_{[0,t_1]}\big) = -2\eta\,\big\|\dot X(t_0)\big\|^2 + \eta^2 \int_0^{t_1} \big(\langle \dot Y, \dot Y\rangle - \langle R_{Y,\dot c}\dot c, Y\rangle\big)\, dt\;.$$
Für $\eta > 0$ hinreichend klein ist dieser Ausdruck negativ, folglich ist $c|_{[0,t_1]}$ nicht die kürzeste Verbindung von p nach $c(t_1)$. □

Wir wollen jetzt zeigen, dass die Funktion s aus Definition 1.102 stetig ist. Dazu benötigen wir ein topologisches Lemma.

1.111. Lemma. *Es seien M, N lokalkompakte metrische Räume, $A \subset M$ kompakt, und $F\colon M \to N$ ein lokaler Homöomorphismus, so dass $F|_A$ injektiv ist. Dann existiert eine offene Umgebung U von A in M, so dass $F|_U$ ebenfalls injektiv ist.*

Dann ist $F|_A$ insbesondere ein Homöomorphismus auf sein Bild.

Beweis. Andernfalls wäre $F|_{U_i}$ für kein $i \in \mathbb{N}$ injektiv, wobei
$$U_i = \left\{\, p \in M \;\middle|\; \text{es gibt } x \in A \text{ mit } d(p,x) < \frac{1}{i} \,\right\}.$$
Also finden wir $p_i \neq q_i \in U_i$ mit $F(p_i) = F(q_i)$ und x_i, $y_i \in A$ mit $d(p_i, x_i)$, $d(q_i, y_i) < \frac{1}{i}$. Da A kompakt ist, konvergieren x_i und y_i nach Übergang zu einer Teilfolge gegen p bzw. $q \in A$. Dann folgt aber auch $p = \lim_{i\to\infty} p_i$, $q = \lim_{i\to\infty} q_i$, und
$$F(p) = \lim_{i\to\infty} F(p_i) = \lim_{i\to\infty} F(q_i) = F(q)\;,$$
also $p = q$ wegen der Injektivität von $F|_A$. Da F lokaler Homöomorphismus ist, existiert eine Umgebung V von $p = q$ in M, auf der F umkehrbar, insbesondere injektiv ist. Da fast alle p_i, q_i in V liegen, folgt $p_i = q_i$ aus $F(p_i) = F(q_i)$ für fast alle i, im Widerspruch zur Annahme $p_i \neq q_i$. Also muss die gesuchte Umgebung U von A existieren. □

Für den folgenden Beweis wählen wir beliebige Riemannsche Metriken auf den Mannigfaltigkeiten SM und TM — da die Aussagen, die uns interessieren, topologischer Natur sind, ist es wegen Folgerung 1.94 egal, welche Metriken wir benutzen.

1.112. Lemma. *Sei (M,g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann ist die Funktion $s\colon SM \to (0,\infty]$ aus Definition 1.102 stetig.*

Beweis. Wir beweisen Folgenstetigkeit, die für metrische Räume zur Stetigkeit äquivalent ist. Sei also $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in SM mit Grenzwert v, dann folgt $\lim_{i\to\infty} \pi(v_i) = p := \pi(v)$. Nach Übergang zu einer Teilfolge konvergiert $s_i := s(v_i)$ gegen $s_\infty \in [0,\infty]$.

Falls $s(v) < s_\infty$, wähle $t_0 \in (s(v), s_\infty)$, dann sind die Geodätischen $c_{v_i}|_{[0,t_0]}$ für fast alle i kürzeste. Wegen der Stetigkeit der Abstandsfunktion d ist dann auch $c_v|_{[0,t_0]}$ kürzeste im Widerspruch zu Bemerkung 1.106 und $t_0 > s(v)$. Es folgt also bereits $s(v) \geq s_\infty$.

Falls $s(v) > s_\infty$, wähle $t_0 \in (s_\infty, s(v))$. Dann sind die Geodätischen $c_{v_i}|_{[0,t_0]}$ für fast alle i keine Kürzesten, und es gibt $w_i \in SM$ und kürzere nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische c_{w_i} mit $c_{w_i}(0) = c_{v_i}(0) = \pi(v_i)$ und $c_{w_i}(t_i) = c_{v_i}(t_0)$, wobei $t_i < t_0$. Sei $K \subset M$ eine kompakte Umgebung von $\pi(v)$, dann ist $\pi^{-1}K \subset SM$ ebenfalls kompakt. Insbesondere existiert ein Grenzwert $w = \lim_{i\to\infty} w_i \in SM$ nach Übergang zu einer Teilfolge, und es gilt $\pi(w) = \pi(v)$. Nach nochmaligem Übergang zu einer Teilfolge konvergiert t_i gegen $t' \in [0, t_0]$.

Auf der anderen Seite ist nach Annahme $c_v|_{[0,t_0]}$ Kürzeste, also ist insbesondere die Abbildung $\pi \times \exp$ auf $A = [0,t_0]\cdot v$ injektiv. Nach Lemma 1.111 existiert eine offene Umgebung $U \subset TM$ von A, so dass $(\pi \times \exp)|_U$ injektiv ist. Da fast alle Vektoren $t_0 v_i$ in U liegen, liegen also fast alle $t_i w_i$ außerhalb von U. Da $TM \setminus U$ abgeschlossen ist, liegt dann auch ihr Grenzwert $t'w \in M \setminus U$.

Somit existieren zwei kürzeste Geodätische $c_v|_{[0,t_0]}$ und $c_w|_{[0,t']}$ von p nach $c_v(t_0)$, was wegen Proposition 1.105 im Widerspruch zu $t_0 < s(v)$ steht. Es folgt $s(v) \geq s_\infty$, was die Stetigkeit von $s\colon SM \to (0,\infty)$ beweist. □

1.113. Folgerung. *Der Injektivitätsradius wird durch eine stetige Funktion $\rho\colon M \to (0,\infty)$ gegeben.* □

1.114. Folgerung. *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei $p \in M$. Dann sind die Abbildungen*

$$\begin{aligned} &\exp_p\colon \big\{\, tv \;\big|\; v \in S_pM, 0 \le t < s(v) \,\big\} \to M \qquad &&\textit{für alle } p \in M \\ \textit{und}\quad &\exp\times\pi\colon \big\{\, tv \;\big|\; v \in SM, 0 \le t < s(v) \,\big\} \to M \times M && \end{aligned}$$

auf offenen Teilmengen von T_pM bzw. von TM definiert und Diffeomorphismen auf ihre Bilder.

Beweis. Dies folgt aus Bemerkung 1.108, den Propositionen 1.105 und 1.110, sowie Lemma 1.112. □

1.7. Riemannsche Überlagerungen und Quotienten

In diesem Kapitel geben wir einige wichtige Konstruktionen von Mannigfaltigkeiten an. Die meisten der folgenden Konstruktionen sind für weitaus allgemeinere Klassen topologischer Räume sinnvoll, uns interessieren hier aber nur Mannigfaltigkeiten. Wir werden in diesem Abschnitt ausnahmsweise keine Beweise führen, sondern nur die wichtigsten Ideen skizzieren. **Achtung:** Wir werden aus diesem Kapitel nur einige wenige Definitionen und Resultate brauchen und es daher überspringen. Sie können alles nötige bei Bedarf hier nachschlagen.

1.115. Definition. Eine Abbildung $\pi\colon N \to M$ zwischen topologischen Mannigfaltigkeiten heißt *Überlagerung,* wenn zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U \subset M$ von p, ein diskreter topologischer Raum F und ein Homöomorphismus $\Phi\colon \pi^{-1}U \to U \times F$ existiert, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, "\pi"'] & \supset & \pi^{-1}U \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times F \arrow[d, "\pi_U"'] \\ M & \supset & U \arrow[r, equal] & U \end{tikzcd}$$

kommutiert. Eine Überlagerung zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten $p\colon (N,\bar g) \to (M,g)$ heißt *Riemannsch,* wenn $\bar g = \pi^* g$, d.h., wenn für alle $q \in N$ und alle v, $w \in T_qM$ gilt, dass

$$\bar g_q(v,w) = g_{\pi(q)}(d\pi_q v, d\pi_q w)\ .$$

1.116. Beispiel. Betrachte $S^1 \subset \mathbb{C}$, dann ist die Abbildung $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ mit $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$ eine Überlagerung. Sei etwa $z = e^{i\varphi} \in S^1$ der Punkt mit dem Winkel φ zur positiven reellen Achse, dann ist $p^{-1}(z) = \varphi + 2\pi\mathbb{Z}$. Wähle als Umgebung $U = S^1 \setminus \{-z\} \cong (\varphi-\pi, \varphi+\pi)$, als Faser $F = 2\pi\mathbb{Z}$, dann existiert eine Abbildung $\Phi\colon p^{-1}U \to (\varphi-\pi,\varphi+\pi) \times \mathbb{Z}$ mit $\Phi^{-1}(\psi,n) = \psi + 2\pi\, n$, so dass obiges Diagramm kommutiert. Wenn wir S^1 und $\mathbb{R}$ mit den Standardmetriken versehen, ist diese Überlagerung Riemannsch.

1.117. Bemerkung. Sei $\pi\colon N \to M$ eine Überlagerung.

(1) Dann ist $d\pi_q\colon T_qN \to T_{\pi(q)}M$ für alle q ein Isomorphismus. Außerdem ist auch $d\pi\colon TN \to TM$ wieder eine Überlagerung.
(2) Sei g eine Riemannsche Metrik auf M, dann existiert genau eine Metrik $\bar g = \pi^* g$ auf N, die π zu einer Riemannschen Überlagerung macht.

Mit der folgenden Überlegung können wir später zeigen, dass bestimmte Abbildungen Riemannsche Überlagerungen sind. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und $F\colon N \to M$ glatt, dann bezeichne F^*g die faserweise Bilinearform mit

$$(F^*g)_q(v, w) = g(dF_q(v), dF_q(w)) .$$

Wenn F eine Immersion ist, also $dF_q\colon T_qN \to T_{F(q)}M$ für alle $q \in N$ injektiv ist, dann ist F^*g eine Riemannsche Metrik auf N.

1.118. Lemma. *Es seien (M, g) und $(N, \overline{g})$ zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $F\colon N \to M$ eine lokale Isometrie, für alle $q \in N$ ist also $dF_q\colon T_qN \to T_{F(q)}M$ ein linearer Isomorphismus mit $F^*g = \overline{g}$. Wenn N vollständig ist, dann auch M, und F ist eine Riemannsche Überlagerung.*

Beweis. Da F eine lokale Isometrie ist, bildet F Geodätische in N auf Geodätische in M ab. Insbesondere gilt

$$F \circ \exp = \exp \circ\, dF\colon TN \to M .$$

Sei jetzt $q \in N$ und $p = F(q) \in M$, dann ist

$$\exp_p = F \circ \exp_q \circ (dF_q)^{-1}\colon T_pM \to M$$

aufgrund der Vollständigkeit von N nach dem Satz 1.95 (3) von Hopf-Rinow auf ganz T_pM definiert, also ist M ebenfalls vollständig.

Es sei $p \in M$ und $0 < r < \rho(p)$. Setze $U = B_r(p) = \exp_p(B_r(0_p))$. Wir wollen zeigen, dass

$$F^{-1}(U) = \bigcup_{q \in F^{-1}(\{p\})} B_r(q) , \qquad (*)$$

und dass die obige Vereinigung disjunkt ist.

Zu „$\supset$“ sei $q \in F^{-1}(\{p\})$ und $y \in B_r(q)$. Wegen Vollständigkeit von N existiert $w \in B_r(o_q) \subset T_qN$ mit $y = \exp_q w$. Sei $v = dF_q(w)$, dann gilt

$$F(y) = F(\exp_q w) = \exp_p(v) \in U ,$$

da $\|v\| = \|w\| < r$.

Zu „$\subset$“ sei $y \in F^{-1}(U)$ mit $x = F(y) \in U$. Es sei c die kürzeste Geodätische von $p = c(0)$ nach $x = c(1)$. Setze $w = (dF_y)^{-1}(-\dot{c}(1))$ und $q = \exp_y w$, dann folgt

$$F(q) = F(\exp_y w) = \exp_x(-\dot{c}(1)) = p$$

und $d(q, y) \leq \|w\| = d(p, x) < r$, also $y \in B_r(q)$ mit $q \in F^{-1}(\{p\})$. Somit gilt (*) für alle $p \in M$, und F ist eine Überlagerung. $\square$

1.119. Bemerkung. Die Vollständigkeit von N im obigen Lemma ist eine notwendige Voraussetzung, insbesondere handelt es sich um ein metrisches, nicht um ein rein differentialtopologisches Resultat. Betrachte etwa die Inklusion ι einer offenen Teilmenge $\emptyset \neq N \subset \mathbb{R}^n$ mit $N \neq \mathbb{R}^n$, versehen mit der euklidischen Metrik. Sie ist keine Überlagerung, denn sei $p \in \overline{N} \setminus N$ ein Randpunkt, dann liegt jede Umgebung U teilweise, aber nicht ganz im Bild von ι.

Um mehr Beispiele für Überlagerungen zu erhalten, brauchen wir eine Quotientenkonstruktion für Mannigfaltigkeiten.

1.120. Definition. Sei Γ eine Gruppe mit neutralem Element e, und sei M eine Mannigfaltigkeit.

(1) Eine *Operation* von Γ auf M ist ein Gruppenhomomorphismus von Γ in die Gruppe der Homöomorphismen von M in sich; für $\gamma \in \Gamma$ schreiben wir oft nur kurz $\gamma\colon M \to M$.

(2) Der *Quotient* M/Γ von M nach Γ ist die Menge der *Orbiten*

$$[p] = \{\, \gamma(p) \mid \gamma \in \Gamma \,\}$$

für alle $p \in M$, und die Abbildung $\pi\colon M \mapsto M/\Gamma$ mit $p \mapsto [p]$ heißt *Quotientenabbildung.*
(3) Eine Operation heißt *frei,* wenn $\gamma(p) \neq p$ für alle $p \in M$ und alle $\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}$.
(4) Eine Operation heißt *eigentlich diskontinuierlich,* wenn für alle p, $q \in M$ Umgebungen U von p und V von q in M existieren, so dass $\gamma(U) \cap V = \emptyset$ für alle $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(p) \neq q$.
(5) Sei M Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Operation heißt *isometrisch* oder *Riemannsch,* wenn alle $\gamma \in \Gamma$ durch Isometrien operieren.

Man beachte, dass es für den Begriff „eigentlich diskontinuierlich“ auch andere, aber äquivalente Beschreibungen in der Literatur gibt.

1.121. Beispiel. Wir betrachten den euklidischen Raum $M = \mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik. Jede Untergruppe $\Gamma \subset (\mathbb{R}^n, +)$ operiert frei auf $\mathbb{R}^n$ durch Addition $\gamma(p) = p + \gamma$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Genau dann, wenn Γ diskret ist, d.h., wenn jedes Element $\gamma \in \Gamma$ eine Umgebung U besitzt, die $\Gamma \setminus \{\gamma\}$ nicht trifft, ist diese Operation eigentlich diskontinuierlich. Denn falls

$$r := \inf\{\, d(p+\gamma, q) \mid \gamma \in \Gamma, p + \gamma \neq q \,\} > 0$$

für je zwei p, $q \in \mathbb{R}^n$ gilt, wähle $U = B_{\frac{r}{2}}(p)$ und $V = B_{\frac{r}{2}}(q)$, und Γ operiert eigentlich diskontinuierlich. Ansonsten existiert eine Folge $(\gamma_i) \in \Gamma$ mit

$$\lim_{i\to\infty} d(p + \gamma_i, q) = 0 \,.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\lim_{i\to\infty} d(\gamma_i, \gamma_{i+1}) = \lim_{i\to\infty} d(p+\gamma_i, p+\gamma_{i+1}) \leq \lim_{i\to\infty} d(p+\gamma_i, q) + \lim_{i\to\infty} d(q, p+\gamma_{i+1}) = 0 \,,$$

im Widerspruch zur obigen Annahme.

Man kann zeigen, dass jede diskrete Untergruppe $\Gamma \subset (\mathbb{R}^n, +)$ isomorph zu $\mathbb{Z}^k$ ist, wobei freie Erzeuger $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ in $\mathbb{R}^n$ linear unabhängige Vektoren sind, insbesondere folgt $k \leq n$. Der Quotient von $M = \mathbb{R}^n$ ist diffeomorph zu $(S^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Für $k = n$ erhalten wir Tori $T^n = (S^1)^n$. Ein Spezialfall hiervon ist die Überlagerung der S^1 in Beispiel 1.116. Allerdings sind die Quotienten nach verschiedenen isomorphen Untergruppen von $(\mathbb{R}^n, +)$ im allgemeinen nicht paarweise isometrisch.

1.122. Proposition. *Es sei M eine (differenzierbare) Mannigfaltigkeit und Γ eine Gruppe, die frei und eigentlich diskontinuierlich auf M operiert. Dann trägt der Quotient M/Γ die Struktur einer (differenzierbaren) Mannigfaltigkeit, so dass die Quotientenabbildung $\pi\colon M \to M/\Gamma$ eine Überlagerung ist.*

Falls (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit ist, so existiert genau dann eine Metrik $\bar g$ auf M/Γ, die π zu einer Riemannschen Überlagerung macht, wenn Γ isometrisch auf (M, g) operiert.

Beweis. Zunächst definieren wir die *Quotiententopologie* auf M/Γ: eine Menge $\bar U \subset M/\Gamma$ sei genau dann offen, wenn $\pi^{-1}\bar U \subset M$ offen ist. Wenn M eigentlich diskontinuierlich operiert, folgt sofort, dass M/Γ wieder ein Hausdorff-Raum ist. Und sei $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis von M, dann überprüft man leicht, dass $(\pi(U_i))_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbaere Basis von M/Γ ist.

Sei jetzt $[p] \in M/\Gamma$, dann wählen wir U, V wie in der Definition von „eigentlich diskontinuierlich“ zu $p = q$. Anschließend wählen wir eine Karte φ um p mit $U^\varphi \subset U \cap V$. Nach Konstruktion gilt $g(U^\varphi) \cap U^\varphi = \emptyset$ für alle $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(p) \neq p$, d.h., für alle $\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}$, da Γ frei operiert. Insbesondere trifft jeder Γ-Orbit $[q]$ die Menge U^φ höchstens einmal. Wir definieren

$$\bar\varphi\colon U^{\bar\varphi} = \pi(U^\varphi) \to V^{\bar\varphi} = V^\varphi$$

durch $\bar{\varphi}([q]) = \varphi(q)$ für alle $q \in U^\varphi$. Damit ist $\bar{\varphi}$ bijektiv. Sei $\bar{W} \subset U^{\bar{\varphi}}$, und sei $W = \varphi^{-1}(\bar{\varphi}(W))$. Dann folgt

$$\pi^{-1}(\bar{W}) = \dot{\bigcup_{\gamma\in\Gamma}} \gamma(W) \;,$$

und $\bar{W}$ ist genau dann offen, wenn W und damit $\varphi(W)$ offen ist. Also ist $\bar{\varphi}$ eine Karte von M/Γ um $[p]$, und M/Γ ist eine topologische Mannigfaltigkeit.

Sei jetzt M differenzierbar, dann konstruieren wir wie oben Karten $\bar{\varphi}$ zu differenzierbaren Karten von M. Die Kartenwechsel von M/Γ kommen dann von Kartenwechseln von M, sind also differenzierbar. Also ist M/Γ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Wir zeigen, dass π eine Überlagerung ist. Zu $[p] \in M/\Gamma$ wählen wir eine Karte $\bar{\varphi}$ wie oben. Es folgt

$$\begin{tikzcd}
\dot{\bigcup_{\gamma\in\Gamma}} \gamma(U^\varphi)=\pi^{-1}(U^{\bar{\varphi}}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\pi"'] & U^{\bar{\varphi}} \times \Gamma \arrow[d, "\pi_{U^{\bar{\varphi}}}"] \\
U^{\bar{\varphi}} \arrow[r, equal] & U^{\bar{\varphi}}
\end{tikzcd} \;,$$

also ist π eine Überlagerung.

Sei schließlich g eine Riemannsche Metrik auf M, und sei $p \in M$. Dann haben wir kommutative Diagramme von Isomorphismen

$$\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[r, "d\gamma_p"] \arrow[d, "d\pi_{\gamma(p)}"'] & T_{\gamma(p)}M \arrow[d, "d\pi_{\gamma(p)}"'] \\
T_{[p]}(M/\Gamma) \arrow[r, equal] & T_{[p]}(M/\Gamma)
\end{tikzcd}$$

für alle $\gamma \in \Gamma$. Falls eine Metrik $\bar{g}$ auf M/Γ existiert, so dass π Riemannsche Überlagerung wird, dann müssen insbesondere alle Elemente von Γ Isometrien sein. Falls das so ist, liefert jeder Isomorphismus $T_{\gamma(p)}M \to T_{[p]}(M/\Gamma)$ die gleiche Metrik $\bar{g}_{[p]}$ auf $T_{[p]}(M/\Gamma)$, und in Karten wie oben sieht man leicht, dass so eine differenzierbare Riemannsche Metrik auf M/Γ gegeben wird. $\square$

Nicht jede Überlagerung $\pi\colon \tilde{M} \to M$ kommt von einer Gruppenoperation auf $\tilde{M}$ her, aber die maximale zusammenhängende Überlagerung von M ist immerhin von diesem Typ. Um das besser zu verstehen, benötigen wir auch noch den Begriff der Fundamentalgruppe.

1.123. Definition. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit, und sei $p \in M$.

(1) Eine *Schleife* in M am Punkt p ist eine stetige Kurve $\gamma\colon [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = p$.
(2) Zwei Schleifen γ_0, γ_1 am Punkt p heißen *homotop relativ zu p*, kurz $\gamma_0 \sim \gamma_1$, wenn es eine stetige Abbildung $h\colon [0,1] \times [0,1] \to M$ mit

$$h(t,i) = \gamma_i(t) \qquad \text{und} \qquad h(i,s) = p$$

für alle s, $t \in [0,1]$ und alle $i \in \{0,1\}$ gibt.
(3) Die Verkettung zweier Schleifen γ_0, γ_1 am Punkt p ist die Schleife $\gamma_0\gamma_1$ mit

$$(\gamma_0\gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma_0(2t) & \text{für } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \text{ und} \\ \gamma_1(2t-1) & \text{für } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

(4) Die *Fundamentalgruppe* $\pi_1(M,p)$ ist die Menge aller Schleifen in M am Punkt p bis auf Homotopie, mit der Verkettung als Verknüpfung.

1.124. Bemerkung. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(M,p)$ ist tatsächlich wohldefiniert, und zwar nicht nur für Mannigfaltigkeiten, sondern genauso für beliebige topologische Räume. Das folgende lässt sich leicht überprüfen.

(1) Seien $\gamma_0 \sim \gamma_0'$ und $\gamma_1 \sim \gamma_1'$ Paare homotoper Schleifen am Punkt $p \in M$, dann folgt $\gamma_0\gamma_1 \sim \gamma_0'\gamma_1'$. Insbesondere ist die Verknüpfung auf $\pi_1(M,p)$ wohldefiniert.
(2) Die Verkettung ist assoziativ bis auf Homotopie, denn die Schleifen $(\gamma_0\gamma_1)\gamma_2$ und $\gamma_0(\gamma_1\gamma_2)$ sind bis auf Umparametrisierung gleich, und diese Umkehrung lässt sich durch eine Homotopie realisieren.
(3) Das neutrale Element ist die konstante Kurve $[0,1] \to \{p\} \subset M$, und das Inverse zu $[\gamma]$ ist die Homotopieklasse der rückwärts durchlaufenen Kurve $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$.

1.125. Beispiel. Betrachte den Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{C}$. Es gibt einen Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \pi_1(S^1,1)$ mit

$$n \mapsto \gamma_n \qquad \text{mit} \qquad \gamma_n(t) = e^{2\pi int} \in S^1$$

für alle $t \in [0,1]$. Somit ist γ_n eine Kurve, die den Kreis n-mal in positiver Richtung durchläuft. Man überzeugt sich leicht, dass es sich tatsächlich um einen Gruppenhomomorphismus handelt. Nicht ganz so einzusehen ist, dass es sogar ein Isomorphismus ist, es gilt also

$$\pi_1(S^1,1) \cong \mathbb{Z} .$$

1.126. Beispiel. Es sei $n \geq 2$, dann gilt $\pi_1(S^n,p) \cong \{e\}$. Sei etwa p der Nordpol. Falls γ eine Schleife am Punkt p ist, die den Südpol $-p$ nicht passiert, können wir die Schleife mittels stereographischer Projektion in den $\mathbb{R}^n$ überführen und dort auf den Nullpunkt zusammenziehen, der ja dem Nordpol entspricht. Ein kleines topologisches Argument zeigt, dass jede Schleife am Punkt p homotop zu einer Schleife ist, die den Südpol nicht trifft.

1.127. Bemerkung. Sei $F\colon M \to N$ eine stetige Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten, und seien $p \in M$, $q \in N$ gegeben mit $q = F(p)$. Sei $\gamma\colon [0,1] \to M$ eine Schleife in M am Punkt p, dann ist $F \circ \gamma$ eine Schleife in N am Punkt q. Sei $h\colon [0,1]^2 \to M$ Homotopie zwischen γ und γ', dann ist $F \circ h$ eine Homotopie zwischen $F \circ \gamma$ und $F \circ \gamma'$. Schließlich gilt $F \circ (\gamma_0\gamma_1) = (F \circ \gamma_0) \cdot (F \circ \gamma_1)$. Also existiert ein Gruppenhomomorphismus $\pi_1 F\colon \pi_1(M,p) \to \pi_1(N,q)$ mit

$$[\gamma] \mapsto [F \circ \gamma] .$$

Sei $G \circ L \to M$ eine weitere Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten, so folgt $\pi_1(F \circ G) = \pi_1 F \circ \pi_1 G$. Somit ist π_1 ein Funktor von der Kategorie der *punktierten Mannigfaltigkeiten* (M,p) in die Kategorie der Gruppen. Man kann zeigen: jede endlich präsentierte Gruppe ist Fundamentalgruppe einer kompakten punktierten Mannigfaltigkeit.

Außerdem überlegt man sich leicht, dass $\pi_1 F$ nur von der Homotopieklasse von F unter allen Abbildungen von M nach N abhängt, die p auf q abbilden.

1.128. Bemerkung. Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit, dann ist M insbesondere wegzusammenhängend. Seien p, $q \in M$, dann existiert also ein Weg $\rho\colon [0,1] \to M$ mit $\rho(0) = p$ und $\rho(1) = q$. Sei γ eine Schleife an q, dann ist die Verkettung $\rho \circ \gamma \circ \rho^{-1}$ von Wegen eine Schleife an p. Ähnlich wie bei der Konstruktion des Inversen in $\pi_1(M,p)$ überlegt man sich, dass

$$(\rho\gamma_0\rho^{-1}) \cdot (\rho\gamma_1\rho^{-1}) = \rho \cdot (\gamma_0\gamma_1) \cdot \rho^{-1}$$

gilt, somit erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(M,p) \to \pi_1(M,q)$, der allerdings von der Homotopieklasse des Weges ρ abhängt. Den inversen Homomorphismus liefert der umgekehrte Weg ρ^{-1}. Wenn uns also die Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit M nur bis auf Isomorphie interessiert, dürfen wir $\pi_1(M)$ schreiben — immer vorausgesetzt, dass M zusammenhängend ist. Allerdings können wir jetzt nicht mehr über Elemente von $\pi_1(M)$ sprechen.

1.129. Definition. Eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit M heißt *einfach zusammenhängend,* wenn $\pi_1(M) \cong \{e\}$.

Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Eine Überlagerung $\pi\colon \tilde{M} \to M$ heißt *universell,* wenn $\tilde{M}$ zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist. Wenn M und $\tilde{M}$ außerdem noch Riemannsche Metriken tragen und π Riemannsch ist, heißt π *universelle Riemannsche Überlagerung.*

Wegen Bemerkung 1.128 ist diese Definition sinnvoll. Woher der Begriff „universelle Überlagerung“ kommt, wird im folgenden Satz klar.

1.130. Satz. *Sei M eine zusammenhängende (differenzierbare) Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$, und sei $\Gamma = \pi_1(M, p)$ die Fundamentalgruppe.*

(1) *Dann besitzt M eine universelle Überlagerung $\pi\colon \tilde{M} \to M$. Die Gruppe Γ operiert frei und eigentlich diskontinuierlich auf $\tilde{M}$, und es existiert genau ein Homöomorphismus (Diffeomorphismus) $\tilde{M}/\Gamma \to M$, so dass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \tilde{M} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi"'] & \tilde{M} \arrow[d] \\ M \arrow[r, "\sim"] & \tilde{M}/\Gamma \end{tikzcd}$$

kommutiert. Im folgenden sei $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ fest gewählt.

(2) *Sei $F\colon M_1 \to M$ eine weitere Überlagerung mit zusammenhängendem Totalraum M_1, sei $p_1 \in F^{-1}(p)$, und sei $\Gamma_1 = \pi_1 F(\pi_1(M_1, p_1))$. Dann existiert genau eine Überlagerung $\bar{F}\colon \tilde{M} \to M_1$ mit $\pi = F \circ \bar{F}$ und $\bar{F}(\tilde{p}) = p_1$ und genau ein Homöomorphismus (Diffeomorphismus) $\tilde{M}/\Gamma_1 \to M_1$, so dass das folgende Diagramm kommutiert.*

$$\begin{tikzcd} \tilde{M} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \tilde{M} \arrow[d, "\bar{F}"] & \\ \tilde{M}/\Gamma_1 \arrow[r, "\sim"] & M_1 \arrow[r, "F"] & M\,. \end{tikzcd}$$

(3) *Es existieren Überlagerungen $F_1\colon \tilde{M}/\Gamma_1 \to M$ und $\bar{F}_1\colon \tilde{M} \to\colon \tilde{M}/\Gamma_1$ mit $\pi = F_1 \circ \bar{F}_1$ zu jeder Untergruppe $\Gamma_1 \subset \Gamma$. Wenn Γ_1 Normalteiler von Γ ist, operiert Γ/Γ_1 auf $\tilde{M}/\Gamma_1$, und es existiert ein Homöomorphismus (Diffeomorphismus) $(\tilde{M}/\Gamma_1)/(\Gamma/\Gamma_1) \to M$.*

Beweis. Wir geben hier nur eine kurze Beweisskizze. Ein ausführlicher Beweis findet sich in (fast) jeder Einführung in die algebraische Topologie unter den Stichworten „Fundamentalgruppe“ und „Überlagerungen“. Wir definieren $\tilde{M}$ als Menge der Äquivalenzklassen $[\sigma]$ von Kurven $\sigma\colon [0,1] \to M$ mit $\sigma(0)$ bis auf Homotopie relativ zu den Endpunkten $\sigma(0)$ und $\sigma(1) =\colon \pi([\sigma])$.

Sei $q = \pi([\sigma])$, und sei $\varphi\colon U^\varphi \to V^\varphi \cong B_1(0)$ eine Karte um q mit $\varphi(q) = 0$. Dann erhalten wir eine Karte $\tilde{\varphi}_{[\sigma]}$ um $[\sigma]$ wie folgt. Zu $r \in U^\varphi$ betrachten wir den Weg $\rho(t) = \varphi^{-1}(t \cdot \varphi(r))$ von q nach r, und damit einen Punkt $[\sigma\rho] \in \pi^{-1}(r) \subset \tilde{M}$. Es sei $U^{\tilde{\varphi}_{[\sigma]}}$ die Menge aller dieser Punkte, dann definieren wir

$$\tilde{\varphi}_{[\sigma]}\colon U^{\tilde{\varphi}_{[\sigma]}} \to V^{\tilde{\varphi}_{[\sigma]}} = V^\varphi \qquad \text{durch} \qquad \tilde{\varphi}_{[\sigma]}([\sigma\rho]) = (\varphi \circ \pi)([\sigma\rho]) = \varphi(\rho(1))\,.$$

Man kann eine Topologie auf $\tilde{M}$ konstruieren, so dass alle wie oben konstruierten Karten einen (differenzierbaren) Atlas auf $\tilde{M}$ bilden. Ähnlich wie im Beweis von Proposition 1.122 sieht man auch, dass $\pi\colon \tilde{M} \to M$ eine Überlagerung ist.

Die Mannigfaltigkeit $\tilde{M}$ ist zusammenhängend, denn jeder Punkt $[\sigma] \in \tilde{M}$ ist durch die Kurve $t \mapsto [\sigma|_{[0,t]}]$ mit dem Ursprung $\tilde{p} := [e]$ verbunden, wobei e die konstante Schleife am Punkt p

bezeichne. Wir betrachten jetzt eine Schleife κ in $\tilde{M}$ am Punkt p. Es sei $\sigma = \pi \circ \kappa$ die entsprechende Schleife in M. Für alle t gilt

$$\kappa(t) = [(\pi \circ \kappa)|_{[0,t]}] = [\sigma|_{[0,t]}] \in \tilde{M} \ .$$

Da κ eine Schleife ist, folgt $[\sigma] = \kappa(1) = \tilde{p} = [e]$, mithin existiert lässt sich σ in M durch eine Homotopie $h\colon [0,1]^2 \to M$ zusammenziehen mit

$$h(0,s) = h(1,s) = h(t,0) = p \qquad \text{und} \qquad h(t,1) = \sigma(t) \ .$$

Wir erhalten eine Homotopie $\tilde{h}\colon [0,1]^2 \to \tilde{M}$ mit

$$\tilde{h}(0,s) = \tilde{h}(1,s) = \tilde{h}(t,0) = \tilde{p} \qquad \text{und} \qquad \tilde{h}(t,1) = \kappa(t)$$

durch $\tilde{h}(t,s) = [h(t,\,\cdot\,)|_{[0,s]}]$. Also ist jede Schleife in $\tilde{M}$ am Punkt $\tilde{p}$ zusammenziehbar.

Die Fundamentalgruppe Γ operiert auf $\tilde{M}$ wie folgt. Sei $\sigma\colon [0,1] \to M$ ein Weg von p nach q, und sei γ Schleife in M am Punkt p, dann ist $\gamma\sigma$ ein weiterer Weg von p nach q. Dann hängt $[\gamma\sigma]$ offensichtlich nur von den Homotopieklassen von γ und σ (jeweils mit festgehaltenem Endpunkt) ab, und wir erhalten eine Operation von $\Gamma = \pi_1(M,p)$ auf $\tilde{M}$. Zwei Wege $\gamma\sigma$ und $\gamma'\sigma$ sind genau dann homotop relativ zu ihren Endpunkten, wenn $\gamma \sim \gamma'$, mithin ist diese Operation frei. Mit ein bisschen mehr Arbeit sieht man, dass sie auch eigentlich diskontinuierlich ist.

Für alle $[\gamma] \in \Gamma$ gilt $\pi \circ [\gamma] = \pi\colon \tilde{M} \to M$. Sei umgekehrt $\pi([\sigma]) = \pi([\tau])$, dann existiert eine Schleife $\gamma = \tau\sigma^{-1}$ am Punkt p, so dass $[\gamma]([\sigma]) = [\tau]$, es folgt $\pi^{-1}(q) = \Gamma \cdot [\sigma]$. Also lassen sich die Γ-Orbiten auf $\tilde{M}$ bijektiv den Punkten in M zuordnen, und man sieht leicht, dass das den gesuchten Homöomorphismus $\tilde{M}/\Gamma \to M$ liefert (bzw. Diffeomorphismus, falls M differenzierbare Mannigfaltigkeit ist). Damit ist (1) gezeigt.

Zu (2) benutzen wir die sogenannte „eindeutige Liftungseigenschaft“ von Überlagerungen, wonach sich jeder Pfad σ in M von p nach q zu einem Pfad σ_1 in M_1 mit Startpunkt $p_1 \in M_1$ liften lässt, d.h., es gilt $\sigma = F \circ \sigma_1$. Die eindeutige Liftungseigenschaft impliziert auch, dass homotope Pfade homotope Lifts haben, mithin ist die Abbildung $\bar{F}\colon \tilde{M} \to M$ mit $\bar{F}([\sigma]) = \sigma_1(1) \in F^{-1}(q) \subset M_1$ wohldefiniert. Für eine Schleife γ in M am Punkt p haben die Lifts von σ und $\gamma\sigma$ nach M_1 genau dann denselben Endpunkt, wenn γ zu einer Schleife γ_1 in M_1 liftet, aber genau dann gilt $[\gamma] = \pi_1 F([\gamma_1]) \in \pi_1 F(\pi_1(M_1,p_1))$. Somit erhalten wir auch den gesuchten Homöomorphismus (Diffeomorphismus) $\tilde{M}/\Gamma_1 \cong M_1$, und (2) ist bewiesen.

Die Existenz von $\bar{F}_1\colon \tilde{M}_1 \to \tilde{M}/\Gamma_1$ folgt aus Proposition 1.122, und da jeder Γ_1-Orbit in einem Γ-Orbit enthalten ist, existiert auch die Abbildung $F_1\colon \tilde{M}/\Gamma_1 \to M$, und wieder kann man sich überzeugen, dass es sich um eine Überlagerung handelt. Wenn Γ_1 ein Normalteiler von Γ ist, dann bildet jedes $\gamma \in \Gamma$ jeden Γ_1-Orbit wieder auf einen Γ_1-Orbit ab, wir erhalten die gesuchte Γ/Γ_1-Operation auf $\tilde{M}/\Gamma_1$, und es gilt $(\tilde{M}/\Gamma_1)/(\Gamma/\Gamma_1) \cong \tilde{M}/\Gamma \cong M$ wie beim entsprechenden Isomorphiesatz in der Algebra. □

1.131. Bemerkung. Aus (2) in Satz 1.130 folgt mit den üblichen universellen Argumenten, dass die universelle Überlagerung $\pi\colon (\tilde{M},\tilde{p}) \to (M,p)$ bis auf eindeutige Homöomorphismen (bzw. Diffeomorphismen) eindeutig bestimmt ist. Wir dürfen also in Zukunft von „der“ universellen Überlagerung von M reden.

Die Aussagen in (2) und (3) lassen sich wie folgt zusammenfassen: Die Kategorie der Untergruppen von $\pi_1(M,p)$ (mit den Inklusionen als Morphismen) ist äquivalent zur Kategorie der zusammenhängenden, punktierten Überlagerungen von (M, p), deren Morphismen durch kommutative Diagramme von Überlagerungen

$$\begin{array}{ccc} (M_1, p_1) & \longrightarrow & (M_2, p_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (M, p) & = & (M, p) \end{array}$$

gegeben werden. Die Bestimmung aller zusammenhängenden Überlagerungen von M ist jetzt zu einem rein algebraischen Problem geworden.

Zum Abschluss geben wir eine Beschreibung der zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung $\kappa \in \mathbb{R}$ an. Man beachte, dass die Schnittkrümmung für Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Dimension ≤ 1 eine Funktion auf der leeren Menge ist.

1.132. Definition. Es sei $\kappa \in \mathbb{R}$ und $n \geq 2$, dann definieren wir den *Modellraum* (M^n_κ, g^κ) wie folgt.

(1) Falls $\kappa = 0$, sei $(M^n_\kappa, g^\kappa) = (\mathbb{R}^n, g^{\mathrm{eukl}})$.
(2) Falls $\kappa > 0$, sei $(M^n_\kappa, g^\kappa) = (S^n_{\kappa^{-\frac{1}{2}}}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Sphäre vom Radius $\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$ mit der vom umgebenden Raum induzierten Metrik.
(3) Falls $\kappa < 0$, sei $(M^n, \kappa, g^\kappa) = (B_{(-\kappa)^{-\frac{1}{2}}}(0), g^\kappa) \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$g^\kappa_x(v, w) = \frac{4}{(1 + \kappa\, |x|^2)^2} \langle v, w \rangle \ .$$

1.133. Proposition. *Die Modellräume (M^n_κ, g^κ) sind zusammenhängende, einfach zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung κ. Sie sind genau dann kompakt, wenn $\kappa > 0$ gilt. Durchmesser, konjugierter Radius und Injektivitätsradius sind gleich*

$$\operatorname{diam}(M^n_\kappa) = \rho(M^n_\kappa) = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} & \text{falls } \kappa > 0, \text{ und} \\ \infty & \text{falls } \kappa \leq 0. \end{cases}$$

Beweis. Für $\kappa \in \{0, 1, -1\}$ erhalten wir wohlbekannte Räume: den euklidischen Raum, die Sphäre und den hyperbolischen Raum, jeweils mit der Standardmetrik. Wir wissen aus den Beispielen 1.97, 1.99, 1.109, 1.104 und 1.126 bereits, dass diese Räume zusammenhängend, einfach zusammenhängend und vollständig sind und den angegebenen Durchmesser und Injektivitätsradius haben. Außerdem ist nach Beispiel 1.101 die Sphäre kompakt, die anderen beiden Räume jedoch nicht. Damit haben wir insbesondere den Fall $\kappa = 0$ bereits bewiesen.

Wir betrachten $\kappa > 0$. Mittels einer Streckung am Urpsrung in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Streckfaktor $\kappa^{-\frac{1}{2}}$ erhalten wir einen Diffeomorphismus $F \colon S^n \to S^n_{\kappa^{-\frac{1}{2}}}$. Wir können die Metrik g^κ auf die Standardsphäre S^n zurückholen und erhalten

$$\begin{aligned}(F^*g^\kappa)_x(v, w) = g^\kappa_{F(x)}\big(d_xF(v), d_xF(w)\big) &= g^\kappa_{\kappa^{-\frac{1}{2}}x}\Big(\kappa^{-\frac{1}{2}}x, \kappa^{-\frac{1}{2}}y\Big) \\ &= \Big\langle \kappa^{-\frac{1}{2}}x, \kappa^{-\frac{1}{2}}y \Big\rangle = \frac{\langle x, y\rangle}{\kappa} = \frac{1}{\kappa}\, g^{\mathrm{sph}}_x(v, w) \ .\end{aligned}$$

Anhand der Koszul-Formel aus Satz 1.41 ist leicht zu sehen, dass F^*g^κ und g^{sph} denselben Levi-Civita-Zusammenhang ∇ haben. In Koordinaten gilt nämlich

$$^\kappa\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n {^\kappa g^{kl}} \left(\frac{\partial g^\kappa_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g^\kappa_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g^\kappa_{ij}}{\partial x^l}\right) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n \big(\kappa\ {^{\mathrm{sph}}g^{kl}}\big)\,\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\partial g^{\mathrm{sph}}_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g^{\mathrm{sph}}_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g^{\mathrm{sph}}_{ij}}{\partial x^l}\right) = {^{\mathrm{sph}}\Gamma^k_{ij}} \ .$$

Damit haben beide Metriken auch denselben Krümmungstensor R. Falls v, $w \in T_xS^n$ linear unabhängig sind, betrachte $E = \operatorname{span}(v, w) \subset T_xM$. Wir erhalten

$$(F^*K^\kappa)(E) = \frac{g^\kappa(R_{v,w}w, v)}{g^\kappa(v,v)\,g^\kappa(w,w) - g^\kappa(v,w)^2} = \kappa\,\frac{g^{\mathrm{sph}}(R_{v,w}w, v)}{g^\kappa(v,v)\,g^\kappa(w,w) - g^\kappa(v,w)^2} = \kappa\ .$$

Da g^κ und g^{sph} denselben Levi-Civita-Zusammenhang ∇ haben, haben sie auch dieselbe Exponentialabbildung. Nach dem Satz 1.95 von Hopf-Rinow ist S^n also mit der Metrik F^*g^κ ebenfalls vollständig. Beachte aber: wenn c eine bezüglich g^{sph} nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische ist, dann ist $t \mapsto c(\sqrt{\kappa}\,t)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische bezüglich F^*g^κ.

Da $F\colon (S^n, F^*g^\kappa) \to (S^n_{\kappa^{-\frac{1}{2}}}, g^\kappa)$ eine Isometrie ist, ist auch (M^n_κ, g^κ) eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung κ. Der Fall $\kappa > 0$ ist damit erledigt.

Im Fall $\kappa < 0$ verfahren wir analog. Wir betrachten die zentrische Streckung $F\colon B_1(0) \to B_{(-\kappa)^{-\frac{1}{2}}}$ mit Streckfaktor $(-\kappa)^{-\frac{1}{2}}$. Für die zurückgeholte Metrik erhalten wir

$$\begin{aligned}(F^*g^\kappa)_x(v,w) &= g^\kappa_{(-\kappa)^{-\frac{1}{2}}x}\Big((-\kappa)^{-\frac{1}{2}}v, (-\kappa)^{-\frac{1}{2}}w\Big)\\ &= \frac{4}{\big(1+\kappa\,\big|(-\kappa)^{-\frac{1}{2}}x\big|^2\big)^2}\,\Big\langle(-\kappa)^{-\frac{1}{2}}v, (-\kappa)^{-\frac{1}{2}}w\Big\rangle = -\frac{1}{\kappa}\,\frac{4}{\big(1-|x|^2\big)^2}\,\langle v,w\rangle = -\frac{1}{\kappa}\,g^{\mathrm{hyp}}_x(v,w)\ .\end{aligned}$$

Wie oben folgt, dass $(B_1(0), F^*g^\kappa)$ eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende, vollständige, nicht kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung κ ist, und obendrein isometrisch zu (M^n_κ, g^κ). ☐

1.134. Bemerkung. Wenn wir die Metrik auf den Modellräumen für $\kappa > 0$ in der stereographischen Projektion $\varphi_\pm\colon M^n_\kappa \setminus \{\pm\kappa^{-\frac{1}{2}}\,e_{n+1}\}$ berechnen, erhalten wir ähnlich wie in Beispiel 1.34 die Metrik

$$g^{\kappa,\varphi_\pm}_x(v,w) = \frac{4}{(1+\kappa\,|x|^2)^2}\,\langle v,w\rangle\ .$$

Für $\kappa = 0$ liefert diese Formel eine reskalierte Euklidische Metrik. Wir sehen also, dass in geeigneten Karten die Metriken der Modellräume für alle κ durch die gleiche Formel dargestellt werden.

1.135. Bemerkung. Auf einer Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung κ hat die Jacobigleichung eine besonders einfache Gestalt. Dazu bestimmen wir zunächst einmal einen Teil des Krümmungstensors R. Für einen Einheitsvektoren v, und $x \perp v$ folgt

$$\langle R_{x,v}v, x\rangle = \kappa(\|v\|^2\,\|x\|^2 - \langle v,x\rangle^2) = \kappa\,\|x\|^2\ .$$

Seien jetzt x, $y \perp v$, dann gilt

$$\langle R_{x,v}v, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\langle R_{x+y,v}v, x+y\rangle - \langle R_{x-y,v}v, x-y\rangle\big) = \frac{\kappa}{4}\,(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \kappa\,\langle x,y\rangle\ .$$

Schließlich gilt noch $\langle R_{x,v}v, v\rangle = 0$, und daraus folgt endlich

$$R_{x,v}v = \kappa\,x\ .$$

Allgemeiner kann beweisen, dass

$$R_{x,y}z = \kappa\,(\langle y,z\rangle x - \langle x,z\rangle y)\ .$$

Sei jetzt X ein Jacobifeld längs einer nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen c mit $X \perp \dot c$ und $\dot X \perp \dot c$, dann folgt aus obigem, dass

$$0 = \ddot X + R_{X,\dot c}\dot c = \ddot X + \kappa\,X\ .$$

Für $w \perp \dot c$ wollen wir jetzt die Jacobifelder X, Y längs c mit

$$X(0) = \dot Y(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \dot X(0) = Y(0) = w$$

bestimmen. Dazu sei W ein paralleles Vektorfeld längs c mit $W(0) = w$ gegeben, dann gilt

$$X(t) = s_\kappa(t)\, W(t) \qquad \text{und} \qquad Y(t) = c_\kappa(t)\, W(t)\ ,$$

wobei die „verallgemeinerten Sinus- und Cosinus-Funktionen“ definiert sind als

$$s_\kappa(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\sqrt{\kappa}\, t)}{\sqrt{\kappa}} & \text{für } \kappa > 0, \\ t & \text{für } \kappa = 0 \text{ und} \\ \dfrac{\sinh(\sqrt{-\kappa}\, t)}{\sqrt{-\kappa}} & \text{für } \kappa < 0, \text{ sowie} \end{cases}$$

$$c_\kappa(t) = \dot s_\kappa(t) = \begin{cases} \cos(\sqrt{\kappa}\, t) & \text{für } \kappa > 0, \\ 1 & \text{für } \kappa = 0 \text{ und} \\ \cosh(\sqrt{-\kappa}\, t) & \text{für } \kappa < 0. \end{cases}$$

Diese Funktionen erfüllen die Differentialgleichung

$$\ddot f + \kappa\, f = 0 \qquad \text{mit} \qquad c_\kappa(0) = \dot s_\kappa(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad \dot c_\kappa(0) = s_\kappa(0) = 0\ .$$

Wir können jetzt ein Beispiel für Satz 1.130 geben.

1.136. Satz. *Sei M eine vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n mit konstanter Schnittkrümmung κ. Dann ist die universelle Riemannsche Überlagerung von M isometrisch zu M^n_κ.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $\kappa \le 0$ und fixieren $o \in M^n_\kappa$ und $p \in M$. Da $\rho(M^n_\kappa) = \infty$, ist $\exp_o\colon T_oM^n_\kappa \to M^n_\kappa$ ein Diffeomorphismus nach Folgerung 1.114. Wir wählen eine lineare Isometrie $\Phi\colon (T_oM^n_\kappa, g^\kappa_o) \to (T_pM, g_p)$ und konstruieren eine Abbildung $\pi\colon M^n_\kappa \to M$ durch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_oM^n_\kappa & \xrightarrow[\sim]{\Phi} & T_pM \\ {\scriptstyle \exp_o}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp_p} \\ M^n_\kappa & \xrightarrow{\pi} & M \end{array} .$$

Die zurückgezogenen Metriken $\exp_o^* g^\kappa$ und $\exp_p^* g$ auf $T_oM^n_\kappa$ bzw. T_pM haben die folgenden Eigenschaften.

(1) Am Nullpunkt gilt $(\exp_o^* g^\kappa)_{0_o} = g^\kappa_o$ bzw. $(\exp_p^* g)_{0_p} = g_p$.
(2) Sei v Einheitsvektor bezüglich g^κ_o bzw. g_p, dann ist $c_v(t) = tv$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische bezüglich $\exp_o^* g^\kappa$ bzw. $\exp_p^* g$.
(3) Vektorfelder der Form $X(t) = tw$ längs c_v sind Jacobifelder.

Aus diesen Eigenschaften lassen sich diese Metriken bereits vollständig rekonstruieren.

Seien etwa v, $w \in S_pM$, sei $c_v(t) = tv$ die radiale Geodätische mit Startvektor v, und sei W das parallele Vektorfeld längs c mit $W(0) = w$. Dann wird das Jacobifeld X längs c_v mit $X(0) = 0$ und $\dot X(0) = w$ nach Bemerkung 1.135 gegeben durch

$$tw = X(t) = s_\kappa(t)\, W(t)\ ,$$

es folgt

$$(\exp_p^* g)_{tv}(tw, tw) = s_\kappa(t)^2\, \langle W(t), W(t)\rangle = s_\kappa(t)^2\, \langle w, w\rangle\ ,$$

und allgemeiner für x, $y \perp v$, dass

$$(\exp_p^* g)_{tv}(x,y) = \frac{s_\kappa(t)^2}{t^2} \langle x, y \rangle \; .$$

Ferner gilt noch

$$(\exp_p^* g)_{tv}(v,v) = 1 \qquad \text{und} \qquad (\exp_p^* g)_{tv}(v,x) = 0 \; ,$$

wodurch die Metrik $\exp_p^* g$ auf T_pM bestimmt ist. Die entsprechenden Formeln gelten für $\exp_o^* g^\kappa$, und wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (T_oM_\kappa^n, \exp_o^* g^\kappa) & \xrightarrow[\sim]{\Phi} & (T_pM, \exp_p^* g) \\ {\scriptstyle \exp_o}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp_p} \\ (M_\kappa^n, g^\kappa) & \xrightarrow{\pi} & (M, g) \end{array} \; .$$

lokaler Isometrien, wobei $\exp_o$ und Φ sogar globale Isometrien sind.

Es bleibt zu zeigen, dass π eine Überlagerung ist. Sei also $q \in M$ beliebig, dann wählen wir $U = B_r(q)$ für ein $r \in (0, \rho(q))$. Es ist jetzt leicht zu sehen, dass

$$\pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup_{\tilde{q} \in \pi^{-1}\{q\}}} B_r(\tilde{q}) \cong \pi^{-1}\{q\} \times B_r(q)$$

gilt, wobei der Isomorphismus passend zu Definition 1.115 gewählt werden kann.

Aus ähnlichen Argumenten wie oben (aber um $\tilde{q} \in \pi^{-1}(q)$) folgt sofort

$$\pi^{-1}(U) \supset \bigcup_{\tilde{q} \in \pi^{-1}\{q\}} B_r(\tilde{q}) \; .$$

Zu „$\subset$“ sei $s \in U$ und $\tilde{s} \in \pi^{-1}(U)$. Dann existiert $w \in T_sM$ mit $\|w\| < r$ und $\exp_s w = q$. Sei $\tilde{w} = (d_{\tilde{s}}\pi)^{-1}(w)$, und setze $\tilde{q} = \exp_{\tilde{s}} \tilde{w} \in M_\kappa^n$, dann folgt $\tilde{q} \in \pi^{-1}(q)$, mithin $s \in \bigcup_{\tilde{q} \in \pi^{-1}\{q\}} B_r(\tilde{q})$.

Wäre schließlich die obige Vereinigung nicht disjunkt, dann würde ein Punkt $\tilde{s}$ im Durchschnitt zweier solcher Bälle um $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2 \in \pi^{-1}(q)$ auf einen Punkt in M abgebildet, der durch zwei Geodätische der Länge $< r$ mit q verbunden werden könnte, im Widerspruch dazu, dass $r \leq \rho(q)$. Damit ist der Fall $\kappa \leq 0$ erledigt.

Im Fall $\kappa > 0$ verfahren wir ähnlich, betrachten jedoch jetzt das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Big(B_{\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}}(0_o), \exp_o^* g^\kappa\Big) & \xrightarrow[\sim]{\Phi} & \Big(B_{\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}}(0_p), \exp_p^* g\Big) \\ {\scriptstyle \exp_o}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp_p} \\ M_\kappa^n & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

lokaler Isometrien, dabei ist der Radius $\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ gerade der konjugierte Radius von M_κ^n und von M.

Für alle $v \in S_pM$ und alle $w \perp v$ folgt aus der Formel für die Jacobifelder tw in Bemerkung 1.135 wegen

$$s_\kappa\Big(\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin(\pi) = 0 \; ,$$

dass

$$\Big(d_{\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} v} \exp_p\Big)(w) = 0 \; , \qquad \text{also} \qquad (d \exp_p)\Big(TS^{n-1}_{\pi\kappa^{-\frac{1}{2}}}\Big) = \{0\} \; .$$

Somit bilden die obigen Exponentialabbildungen jeweils $\partial B_{\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}}(0)$ auf einen zu o bzw. p konjugierten Punkt ab. Etwa gilt

$$\exp_o\Big(S^{n-1}_{\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}}\Big) = \{-o\} \subset M_\kappa^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \; .$$

Insbesondere lässt sich π so auf ganz M^n_κ definieren. Um zu zeigen, dass π auch am Punkt $-o$ glatt ist, können wir zum Beispiel Normalkoordinaten um $-o$ und $\pi(-o)$ wählen und mit den obigen Abbildungen vergleichen. Dass π eine Überlagerung ist, folgt jetzt mit dem gleichen Argument wie vorher. □

1.137. Beispiel. Der reell projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ ist Quotient der $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nach $\Gamma = \{1, -1\} \in O(n+1)$. Falls n gerade ist, ist das der einzige Quotient der S^n nach einer freien, eigentlich diskontinuierlichen, isometrischen Gruppenoperation.

Falls $n = 2m-1$ ungerade ist, betrachte $S^{2m-1} \subset$ $mathcalC^m$. Sei p eine natürliche Zahl, und seien $q_1, \dots, q_m \in \{1, \dots, p-1\}$ teilerfremd zu p. Dann operiert die Gruppe

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} e^{2\pi i \frac{q_1 k}{p}} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{2\pi i \frac{q_m k}{p}} \end{pmatrix} \middle| \, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \subset \quad U(m)$$

frei und eigentlich diskontinuierlich auf S^{2m-1}. Der Quotient $L_{p;q_1,\dots,q_m} = S^{2m-1}/\Gamma$ heißt *Linsenraum.* Beispielsweise gilt $\mathbb{R}P^{2m-1} = L_{2;1,\dots,1}$. Darüberhinaus gibt es aber noch weitere Quotienten.

Den Torus als Beispiel einer flachen Mannigfaltigkeit haben wir bereits in Beispiel 1.121 kennengelernt.

1.138. Beispiel. Es gibt viele kompakte Flächen mit Schnittkrümmung $\kappa = -1$. Zur Konstruktion: zu je drei Zahlen a, c, $e \in (0, \infty)$ gibt es genau ein rechtwinkliges Sechseck in der hyperbolischen Ebene $(B_1(0), g^{\mathrm{hyp}})$ Wir verkleben zwei spiegelbildliche Sechsecke entlang der Seiten b, d und f und erhalten eine hyperbolische „Hose“, deren Rand aus drei Kreisen der Längen $2a$, $2c$ und $2e$ besteht.

Anschließend können wir $2k$ solcher Hosen mit passenden Maßen zu einer hyperbolischen Fläche mit Eulerzahl $2k$, das heißt, vom Geschlecht $g = k + 1 \geq 2$ verkleben. Die Maße der Hose und die Drehwinkel beim Verkleben geben $6k$ unabhängige Parameter. Somit gibt es einen (mindestens) $6(g-1)$-dimensionalen Raum kompakter hyperbolischer Flächen vom Geschlecht g. Man kann umgekehrt zeigen, dass jede Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$ eine solche Zerlegung in „Hosen“ zulässt. Da alle diese Flächen homöomorph sind, haben sie isomorphe Fundamentalgruppen. Somit enthält die Isometriegruppe $SO^0(2,1) \cong PSU(1,1)$ eine $6(g-1)$-Parameter-Familie isomorpher Untergruppen, die alle frei und eigentlich diskontinuierlich auf $B_1(0)$ operieren.

KAPITEL 2

Vergleichssätze in der Riemannschen Geometrie

In diesem Kapitel werden wir sehen, wie die Krümmung einer Mannigfaltigkeit ihre geometrische und topologische Gestalt bestimmt.

2.1. Der Vergleichssatz von Rauch und einige Folgerungen

Als erstes untersuchen wir, wie das Wachstum von Jacobi-Feldern von oberen oder unteren Schranken an die Schnittkrümmung abhängt. Außerdem sehen wir, dass Mannigfaltigkeiten nichtpositiver Schnittkrümmung universelle Überlagerungen haben, die diffeomorph zum $\mathbb{R}^n$ sind.

Ein wichtiges Hilfsmittel ist dabei die Indexform, die Bilinearisierung der rechten Seite der zweiten Variationsformel aus Satz 1.86.

2.1. Definition. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei $c\colon [0, L] \to M$ nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Wir definieren Vektorräume

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}'(c) &= \bigl\{\, V \in \mathfrak{X}(c) \bigm| \langle V(t), \dot c(t)\rangle = 0 \text{ für alle } t \in [0, L] \,\bigr\} \\ \text{und} \qquad \mathfrak{X}''(c) &= \bigl\{\, V \in \mathfrak{X}'(c) \bigm| V(0) = V(L) = 0 \,\bigr\} \end{aligned}$$

Die *Indexform* $I_c\colon \mathfrak{X}'(c) \times \mathfrak{X}'(c) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$I_c(V, W) = \int_0^L \bigl(\langle \dot V(t), \dot W(t)\rangle - \langle R_{V(t),\dot c(t)}\dot c(t), W(t)\rangle\bigr)\, dt\,.$$

2.2. Bemerkung. Aufgrund der Symmetrien des Krümmungstensors aus Satz 1.51 ist die Indexform eine symmetrische Bilinearform.

Die Indexform charakterisiert Jacobi-Felder.

2.3. Lemma. *Ein Vektorfeld $V \in \mathfrak{X}'(c)$ längs c ist genau dann Jacobifeld, wenn es im Kern der Indexform $I_c|_{\mathfrak{X}'(c),\mathfrak{X}''(c)}$ liegt.*

Beweis. Für $V \in \mathfrak{X}'(c)$ und $W \in \mathfrak{X}''(c)$ schreibe

$$\begin{aligned} I_c(V, W) &= \int_0^L \bigl(\langle \dot V(t), \dot W(t)\rangle - \langle R_{V(t),\dot c(t)}\dot c(t), W(t)\rangle\bigr)\, dt \\ &= \underbrace{\langle \dot V(t), W(t)\rangle\big|_{t=0}^L}_{=0} - \int_0^L \bigl\langle \ddot V + R_{V(t),\dot c(t)}\dot c(t), W(t)\bigr\rangle\, dt\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort die Behauptung. □

Eine einfache Folgerung aus der zweiten Variationsformel gibt Auskunft über das Vorzeichen der Indexform.

2.4. Proposition. *Sei $c\colon [0, L]$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M. Es ist genau dann kein Punkt $c(t)$ mit $t \in [0, L]$ längs c zu $c(0)$ konjugiert, wenn die Indexform positiv definit auf dem Raum $\mathfrak{X}''(c)$ ist.*

Beweis. Um die Richtung "$\Longleftarrow$" zu zeigen, nehmen wir an, dass $c(t)$ längs c zu $c(0)$ konjugiert ist für ein $t \in (0, L]$. Falls $t = L$, so sei $V \in \chi(c)\setminus\{0\}$ das zugehörige Jacobifeld, dann folgt $I_c(V, V) = 0$ nach Lemma 2.3. Falls $t < L$, so betrachte das Variationsfeld $V \in \chi''(c)$ aus dem Beweis von Proposition 1.110. Aus der dortigen Rechnung folgt $I_c(V, V) < 0$. In beiden Fällen ist also I_c nicht positiv definit.

Falls umgekehrt c keine konjugierten Punkte hat, setze $p = c(0)$ und $v = \dot{c}(0)$. Nach Annahme ist $d_{tv} \exp_p \colon T_pM \cong T_{tv}T_pM \to T_{c(t)}M$ invertierbar, also existiert zu jedem Vektorfeld $V \in \mathfrak{X}''(c)$ ein Vektorfeld W längs der Geraden von 0_p nach Lv in T_pM mit $V(t) = (d_{tv} \exp_p)(W(t))$. Betrachte die Variation

$$c_s(t) = \exp_p(tv + s\,W(t))$$

mit Variationsvektorfeld

$$\frac{\partial c_s(t)}{\partial s} = (d_{tv} \exp_p)(W(t)) = V(t) \;.$$

Wie im Beweis des Gauß-Lemmas 1.89 folgt $L(c_s) \geq L(c)$, mithin wegen Satz 1.86 auch

$$I_c(V, V) = \frac{\partial^2 L(c_s)}{\partial s^2} \geq 0 \;,$$

also ist I_c positiv semidefinit auf dem Raum $\mathfrak{X}''(c)$.

Sei nun $V \in \mathfrak{X}''(c)$ ein Vektorfeld mit $I_c(V, V) = 0$. Für jedes $W \in \mathfrak{X}''(c)$ folgt dann

$$0 \leq I_c(V + \varepsilon W, V + \varepsilon W) = 2\varepsilon\, I_c(V, W) + \varepsilon^2\, I_c(W, W)$$

für alle $\varepsilon \neq 0$, also $I_c(V, W) = 0$. Nach Lemma 2.3 ist V ein Jacobifeld mit $V(0) = V(L) = 0$, aber $c(L)$ ist nach Annahme nicht konjugiert zu $c(0)$, es folgt $V = 0$, und I_c ist damit auf $\mathfrak{X}''(c)$ positiv definit. $\square$

2.5. Satz (Rauch). *Seien (M, g) und $(\bar{M}, \bar{g})$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Dimension n, seien c und $\bar{c}$ nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische in M bzw. $\bar{M}$, und sei $L > 0$ so gewählt, dass kein Punkt $\bar{c}(t)$ mit $t \in (0, L)$ längs $\bar{c}$ zu $\bar{c}(0)$ konjugiert ist. Wenn für alle $t \in [0, L]$ gilt, dass $K(E) \leq K(\bar{E})$ für alle Ebenen $E \subset T_{c(t)}M$ mit $\dot{c}(t) \in E$ und alle Ebenen $\bar{E} \subset T_{\bar{c}(t)}\bar{M}$ mit $\dot{\bar{c}}(t) \in \bar{E}$, dann gilt*

$$\|V(t)\| \geq \|\bar{V}(t)\| \qquad \textit{für alle } t \in [0, L]$$

für alle Jacobifelder V längs c und $\bar{V}$ längs $\bar{c}$ mit $V(0) = \bar{V}(0) = 0$, $\langle \dot{V}(0), \dot{c}(0)\rangle = \langle \dot{\bar{V}}(0), \dot{\bar{c}}(0)\rangle = 0$ und $\|\dot{V}(0)\| = \|\dot{\bar{V}}(0)\|$.

Kürzer gesagt: wenn M kleinere Schnittkrümmung als $\bar{M}$ hat, wachsen vergleichbare Jacobifelder mit Startwert 0 in M schneller als in $\bar{M}$, bis zum ersten konjugierten Punkt in $\bar{M}$. In Anwendungen wird in der Regel eine der beiden Mannigfaltigkeiten konstante Schnittkrümmung haben.

Beweis. Wir beweisen die stärkere Aussage

$$\frac{d}{dt} \log \|V(t)\| \geq \frac{d}{dt} \log \|\bar{V}(t)\|$$

für alle $t \in (0, L)$. Es gilt

$$\frac{d}{dt} \log \|V(t)\| = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \log\langle V(t), V(t)\rangle = \frac{\langle V(t), \dot{V}(t)\rangle}{\langle V(t), V(t)\rangle} \;.$$

Die Aussage des Satzes folgt hieraus, denn nach Voraussetzung gilt $\bar{V}(t) \neq 0$ für alle $t \in (0, L)$, wir erhalten also

$$\frac{d}{dt} \frac{\|V(t)\|}{\|\bar{V}(t)\|} = \frac{\|V(t)\|}{\|\bar{V}(t)\|} \left(\frac{d}{dt} \log \|V(t)\| - \frac{d}{dt} \log \|\bar{V}(t)\| \right) \geq 0 \;,$$

und nach L'Hospital gilt wegen $\|V(0)\| = \|\bar{V}(0)\| = 0$, dass

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|\bar{V}(t)\|}{\|V(t)\|} = \frac{\|\dot{\bar{V}}(t)\|}{\|\dot{V}(t)\|} = 1\ .$$

Hieraus folgt $\|V(t)\| \geq \|\bar{V}(t)\|$ für alle $t \in (0, L)$ und wegen Stetigkeit dann auch für $t = L$. Insbesondere folgt $V(t) \neq 0$ für alle $t \in (0, L]$.

Wir können zum Beweis die Indexform einsetzen, denn da V, $\bar{V}$ Jacobi-Felder sind mit $V(0) = \bar{V}(0) = 0$, gilt

$$\begin{aligned}\langle V(t_0), \dot{V}(t_0)\rangle = \langle V(t), \dot{V}(t)\rangle\big|_{t=0}^{t_0} &= \int_0^{t_0} \big(\langle \dot{V}(t), \dot{V}(t)\rangle + \langle \ddot{V}(t), V(t)\rangle\big)\, dt \\ &= \int_0^{t_0} \big(\|\dot{V}(t)\|^2 - \langle R_{V(t),\dot{c}(t)}\dot{c}(t), V(t)\rangle\big)\, dt = I_{c|_{[0,t_0]}}(V, V) \qquad (*)\end{aligned}$$

für alle $t_0 \in (0, L)$, und entsprechend für $\bar{V}$.

Wir fixieren jetzt $t_0 \in (0, L)$ mit $V(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, t_0]$. Nach Voraussetzung gilt auch $\bar{V}(t_0) \neq 0$. Wir konstruieren parallele Orthonormalrahmen $e_1, \dots, e_n$ längs c und $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ längs $\bar{c}$ wie in Aufgabe 2 von Blatt 7 mit

$$e_1(t_0) = \frac{V(t_0)}{\|V(t_0)\|} \qquad \bar{e}_1(t_0) = \frac{\bar{V}(t_0)}{\|\bar{V}(t_0)\|}\ , \qquad e_n = \dot{c}\ , \qquad \text{und} \qquad \bar{e}_n = \dot{\bar{c}}\ .$$

Dann erhalten wir eine Familie linearer Isometrien $\Phi_t \colon T_{c(t)}M \to T_{\bar{c}(t)}\bar{M}$ mit $\Phi_t(e_i(t)) = \bar{e}_i(t)$ für alle $t \in [0, L]$ und alle i. Diese Familie ist *parallel,* denn für $X = \sum_{i=1}^n x^i\, e_i \in \mathfrak{X}(c)$ gilt

$$\nabla^{\bar{c}}_{\frac{\partial}{\partial t}}(\Phi \circ X) = \nabla^{\bar{c}}_{\frac{\partial}{\partial t}}\left(\sum_{i=1}^n x^i \bar{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial t}\, \bar{e}_i = \Phi \circ \nabla^c_{\frac{\partial}{\partial t}} X\ .$$

Wir betrachten das Vektorfeld

$$W = \frac{\|\bar{V}(t_0)\|}{\|V(t_0)\|}\, \Phi \circ V$$

längs $\bar{c}$, so dass

$$W(t_0) = \big\|\bar{V}(t_0)\big\|\, \bar{e}_1(t_0) = \bar{V}(t_0)\ .$$

Wegen der Parallelität von Φ gilt außerdem

$$\dot{W} = \frac{\|W(t_0)\|}{\|V(t_0)\|}\, \Phi \circ \dot{V} \qquad \text{und} \qquad \ddot{W} = \frac{\|W(t_0)\|}{\|V(t_0)\|}\, \Phi \circ \ddot{V}\ .$$

Allerdings ist W nicht notwendigerweise ein Jacobi-Feld längs $\bar{c}$.

Da $W - \bar{V} \in \mathfrak{X}''(\bar{c}|_{[0,t_0]})$, schließen wir aus Proposition 2.4 und Lemma 2.3, dass

$$I_{\bar{c}|_{[0,t_0]}}(W, W) = \underbrace{I_{\bar{c}|_{[0,t_0]}}(W - \bar{V}, W - \bar{V})}_{\geq 0} + 2\, \underbrace{I_{\bar{c}|_{[0,t_0]}}(\bar{V}, W - \bar{V})}_{=0} + I_{\bar{c}|_{[0,t_0]}}(\bar{V}, \bar{V}) \geq I_{\bar{c}|_{[0,t_0]}}(\bar{V}, \bar{V})\ .$$

Jetzt können wir mit (*) wie folgt abschätzen.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \log\|V(t)\| &= \frac{\langle V(t_0), \dot V(t_0)\rangle}{\|V(t_0)\|^2} = \frac{1}{\|V(t_0)\|^2}\int_0^{t_0}\bigl(\|\dot V(t)\|^2 - K(\operatorname{span}\{V(t),\dot c(t)\})\,\|V(t)\|^2\bigr)\,dt \\
&= \frac{1}{\|(\Phi\circ V)(t_0)\|^2}\int_0^{t_0}\bigl(\|(\Phi\circ\dot V)(t)\|^2 - \underbrace{K(\operatorname{span}\{V(t),\dot c(t)\})}_{\le \bar K(\operatorname{span}\{W(t),\dot{\bar c}(t)\})}\,\|(\Phi\circ V)(t)\|^2\bigr)\,dt \\
&\ge \frac{1}{\|W(t_0)\|^2}\int_0^{t_0}\bigl(\|\dot W(t)\|^2 - \bar K(\operatorname{span}\{W(t),\dot{\bar c}(t)\})\;\|W(t)\|^2\bigr)\,dt \\
&= \frac{1}{\|W(t_0)\|^2}\,I_{\bar c|_{[0,t_0]}}(W,W) \ge \frac{1}{\|\bar V(t_0)\|^2}\,I_{\bar c|_{[0,t_0]}}(\bar V,\bar V) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}\log\bigl\|\bar V(t)\bigr\| \;. \qquad \square
\end{aligned}$$

Aus dem obigen Satz können wir folgern, dass der Abstand zum ersten konjugierten Punkt bei Mannigfaltigkeiten mit größerer Schnittkrümmung kleiner ist. Daraus kann man eine Durchmesser-Abschätzung herleiten, und schließlich feststellen, dass die Fundamentalgruppe dann endlich sein muss. Wir werden im nächsten Abschnitt aber sehen, dass für derlei Aussagen bereits die Ricci-Krümmung ausreicht.

Wir betrachten jetzt ähnliche Diagramme wie im Beweis der Satzes 1.136, allerdings bei variabler Schnittkrümmung. Sei dazu $\Phi\colon T_pM \to T_{\bar p}\bar M$ eine lineare Isometrie und $r > 0$ hinreichend klein, dann betrachten wir

$$\begin{array}{ccccc}
T_pM \supset B_r(0_p) & \xrightarrow[\sim]{\Phi} & B_r(0_{\bar p}) \subset T_{\bar p}\bar M \\
{\scriptstyle \exp_p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp_{\bar p}} \\
M \supset B_r(p) & \dashrightarrow & B_r(\bar p) \subset \bar M
\end{array} \;. \tag{2.1}$$

Für $r \le \rho(p)$ erhalten wir auf diese Weise eine Abbildung $F\colon U \to \bar U$. Falls die Schnittkrümmung von M kleiner oder gleich der von $\bar M$ ist, ist diese Abbildung kontrahierend. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung.

2.6. Folgerung. *Seien (M,g) und $(\bar M,\bar g)$ vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten, seien Punkte $p \in M$, $\bar p \in \bar M$ gegeben, sei $r > 0$ nicht größer als der konjugierte Radius von $\bar p$ in $\bar M$, und sei $\Phi\colon T_pM \to T_{\bar p}\bar M$ eine lineare Isometrie. Für alle $v \in B_r(0_p)$ sei $K(E) \le K(\bar E)$ für alle Ebenen $E \subset T_{\exp_p v}M$ und $\bar E \subset T_{\exp_{\bar p}(\Phi(v))}\bar M$. Sei $\gamma\colon [a,b] \to B_r(0_p)$ eine Kurve in T_pM, dann gilt*

$$L(\exp_p\circ\gamma) \ge L(\exp_{\bar p}\circ\Phi\circ\gamma)\;.$$

Es würde hier reichen, Voraussetzungen nur an die Schnittkrümmungen derjenigen Ebenen in $T_{\exp_p v}M$ bzw. $T_{\exp_{\bar p}(\Phi(v))}\bar M$ zu stellen, die den Geschwindigkeitsvektor der Geodätischen c_v bzw. $c_{\Phi(v)}$ enthalten, aber wir wollen es mit der Allgemeinheit nicht übertreiben.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass

$$\left\|\frac{d}{dt}(\exp_p\circ\gamma)(t)\right\| \ge \left\|\frac{d}{dt}(\exp_{\bar p}\circ\Phi\circ\gamma)(t)\right\|$$

für alle $t \in [a,b]$. Wir fixieren also t und betrachten die Geodätischen $c\colon [0,\|\gamma(t)\|] \to M$ von p nach $\exp_p(\gamma(t))$ und $\bar c\colon [0,\|\gamma(t)\|] \to \bar M$ von $\bar p$ nach $\exp_{\bar p}(\Phi(\gamma(t)))$ mit

$$c(s) = \exp_p\Bigl(\frac{s\,\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}\Bigr) \qquad\text{und}\qquad \bar c(s) = \exp_{\bar p}\Bigl(\Phi\Bigl(\frac{s\,\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}\Bigr)\Bigr)\;.$$

Entlang dieser Geodätischen betrachten wir die Jacobifelder

$$\begin{aligned}
X(s) &= d_{\frac{s\,\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}} \exp_p\biggl(\frac{s\,\dot\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}\biggr) \\
&= s\, d_{\frac{s\,\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}} \exp_p\biggl(\frac{\dot\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} - \frac{\langle\dot\gamma(t),\gamma(t)\rangle}{\|\gamma(t)\|^3}\,\gamma(t)\biggr) + \frac{s\,\langle\dot\gamma(t),\gamma(t)\rangle}{\|\gamma(t)\|^3}\, d_{\frac{s\,\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}} \exp_p(\gamma(t)) \\
&= Y(s) + Z(s)
\end{aligned}$$

und analog

$$\bar X(s) = d_{\Phi\bigl(\frac{s\,\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}\bigr)} \exp_{\bar p}\biggl(\Phi\biggl(\frac{s\,\dot\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}\biggr)\biggr) = \bar Y(s) + \bar Z(s)\;.$$

Dabei sind Y und Z ($\bar Y$ und $\bar Z$) nach dem Gauß-Lemma 1.89 der vertikale und der tangentiale Anteil von X (bzw. $\bar X$). Während

$$\|Z(s)\| = \frac{s\,\langle\dot\gamma(t),\gamma(t)\rangle}{\|\gamma(t)\|^2} = \|\bar Z(s)\|\;,$$

gilt $Y(0) = \bar Y(0) = 0$ und $\dot{\bar Y}(0) = \Phi\bigl(\dot Y(0)\bigr)$.

Da $\|\gamma(t)\| < r$ kleiner als der konjugierte Radius von $\bar p$ in $\bar M$ ist, dürfen wir den Vergleichssatz von Rauch anwenden und erhalten

$$\|Y(s)\| \ge \|\bar Y(s)\| \qquad \text{für alle } s \in [0, \|\gamma(t)\|]\;,$$

also auch

$$\|X(s)\|^2 = \|Y(s)\|^2 + \|Z(s)\|^2 \ge \|\bar Y(s)\|^2 + \|\bar Z(s)\|^2 = \|\bar X(s)\|^2\;.$$

Für $s = \|\gamma(t)\|$ erhalten wir insbesondere

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{d}{dt}(\exp_p\circ\gamma)(t)\right\| &= \bigl\|d_{\gamma(t)}\exp_p(\dot\gamma(t))\bigr\| = \bigl\|X(\|\gamma(t)\|)\bigr\| \\
&\ge \bigl\|\bar X(\|\gamma(t)\|)\bigr\| = \bigl\|d_{\Phi(\gamma(t))}\exp_p(\Phi(\dot\gamma(t)))\bigr\| = \left\|\frac{d}{dt}(\exp_{\bar p}\circ\Phi\circ\gamma)(t)\right\|\;. \qquad \square
\end{aligned}$$

Wir kommen nun zu der vor Folgerung 2.6 angedeuteten Aussage.

2.7. Definition. Eine Abbildung $F\colon (X,d) \to (\bar X,\bar d)$ zwischen metrischen Räumen heißt *kontrahierend* oder eine *Kontraktion,* wenn für alle x, $y \in X$ gilt, dass

$$d(x,y) \ge \bar d(F(x),F(y))\;.$$

2.8. Folgerung. *Unter den Voraussetzungen von Folgerung 2.6 sei außerdem $0 < r \le \rho(p)$. Dann ist die Abbildung*

$$\exp_{\bar p}\circ\Phi\circ\exp_p^{-1}\colon B_{\frac r2}(p) \to B_{\frac r2}(\bar p)$$

wohldefiniert und kontrahierend.

Beweis. Sei $F\colon B_r(p) \to B_r(\bar p)$ die obige Abbildung, vergleich (2.1). Dann ist F wohldefiniert, da $\exp_p\colon B_r(0_p) \to B_r(p)$ wegen $r \le \rho(p)$ invertierbar ist.

Seien nun zwei Punkte q_1, $q_2 \in B_{\frac r2}(p)$ gegeben, und sei $c\colon [0,L] \to B_r(p) \subset M$ eine kürzeste Geodätische von q_1 nach q_2. Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$L = d(q_1,q_2) \le d(q_1,p) + d(p,q_2) < r\;,$$

während jede Kurve, die $B_r(p)$ verlässt, länger als r ist, siehe Beweis von Folgerung 1.90. Somit verläuft c in $B_r(p)$.

Also existiert eine Kurve $\gamma\colon [0,L] \to B_r(0_p) \subset T_pM$ mit $c(t) = \exp_p(\gamma(t))$ für alle $t \in [0,L]$. Die Kurve $\exp_{\bar p} \circ \Phi \circ \gamma$ verbindet $F(q_1)$ und $F(q_2)$. Wegen Folgerung 2.6 gilt

$$\bar d(F(q_1), F(q_2)) \le L(\exp_{\bar p} \circ \Phi \circ \gamma) \le L(\exp_p \circ \gamma) = L(c) = d(q_1, q_2) ,$$

mithin ist F kontrahierend. □

2.9. Beispiel. Wir geben ein Beispiel dafür, dass in Folgerung 1.94 nur Bälle vom Radius $\frac{\rho(p)}{2}$ betrachtet werden dürfen. Dazu sei etwa $M = \mathbb{R}P^n$, und sei $\bar M = M^n_\kappa$ die Sphäre mit Radius $\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$ und konstanter Schnittkrümmung κ, wobei $1 \le \kappa < 4$. Nach Übung 4 von Blatt 9 ist $\rho(p) = \frac{\pi}{2}$ für alle $p \in \mathbb{R}P^n$. Wähle $v \in S_pM$ und $\frac{\pi}{4} < L < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$. Dann gilt

$$d\bigl(c_v(L), c_v(-L)\bigr) = d\bigl(c_v(L), c_v(\pi - L)\bigr) = \pi - 2L ,$$

wobei die kürzeste Geodätische gerade durch $c_v|_{[L,\pi-L]}$ gegeben ist.

Sei entsprechend $\bar p \in M^n_\kappa$ und $\bar v \in S_{\bar p}M^n_\kappa$. Da $L < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$, liegen die Punkte $\exp_{\bar p}(\pm L\bar v)$ in der Hemisphäre um den Punkt $\bar p$, und die kürzeste Geodätische dazwischen ist $\bar c_{\bar v}|_{[-L,L]}$. Also folgt

$$d\bigl(F(c_v(L)), F(c_v(-L))\bigr) = d\bigl(\bar c_{\bar v}(L), \bar c_{\bar v}(-L)\bigr) = 2L > \pi - 2L = d\bigl(c_v(L), c_v(-L)\bigr) ,$$

und F ist nicht mehr kontrahierend für Radien $r > \frac{\rho(p)}{2} = \frac{\pi}{4}$.

2.10. Bemerkung. Wir interpretieren Folgerung 2.8 als Vergleichssatz für kleine Dreiecke. In Abschnitt 2.4 werden wir dieses Argument ausbauen zum Vergleichssatz 2.42 von Toponogov für Dreiecke beliebiger Größe.

Wir betrachten die Konstruktionsaufgabe SWS aus der elementaren Geometrie. Unter den Voraussetzungen von Folgerung 2.8 wählen wir Dreiecke in M und $\bar M$, mit Ecken A, B, C und $\bar A = F(A)$, $\bar B = F(B)$, $\bar C = F(C)$, wobei $C = p$ und $\bar C = \bar p$ gelte. Dann haben die Dreiecke ΔABC und $\Delta \bar A\bar B\bar C$ den gleichen Winkel γ bei C bzw. $\bar C$ und die gleichen Seiten $a = d(B,C) = d(\bar B, \bar C) \le \frac{r}{2}$ und $b = d(A,C) = d(\bar A, \bar C) \le \frac{r}{2}$, aber es gilt $c = d(A,B) \ge \bar c = d(\bar A, \bar B)$.

Das Argument aus dem Beweis von Folgerung 2.8 lässt sich noch ein bisschen verallgemeiern: der obige Vergleichssatz gilt immer noch, falls $a + b \le r$ gilt, denn dann verläuft die Seite c immer noch ganz in $\overline{B_r(p)}$.

Aus dem Vergleichssatz von Rauch folgt unmittelbar eine sehr starke Aussage über die Topologie von Mannigfaltigkeiten mit nichtpositiver Schnittkümmung.

2.11. Satz (Hadamard-Cartan). *Sei (M,g) eine vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \le 0$, und sei $p \in M$. Dann ist $\exp_p\colon T_pM \to M$ eine universelle Überlagerung.*

Beweis. Wir setzen $\bar M = T_pM$ und $\bar p = 0_p$. Da (T_pM, g_p) ein Euklidischer Vektorraum ist, gibt es keine konjugierten Punkte in $\bar M$. Aus dem Satz von Rauch folgt, dass Jacobifelder in M nicht langsamer wachsen als in T_pM, insbesondere gibt es in M dann ebenfalls keine zu p konjugierten Punkte. Nach Bemerkung 1.108 ist also $\exp_p$ ein lokaler Diffeomorphismus.

Wenn $\exp_p$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, dann ist die zurückgeholte Metrik $\exp_p^* g$ mit

$$(\exp_p^* g)_v(x,y) = g_{\exp_p v}(d_v \exp_p(x), d_v \exp_p(y))$$

nirgends ausgeartet. Die Exponentialabbildung von $(T_pM, \exp_p^* g)$ am Punkt 0_p ist gerade die Identität auf $T_pM = T_{0_p}T_pM$, wie im folgenden Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
T_{0_p}T_pM & \xrightarrow[\sim]{\mathrm{id}} & T_pM \\
{\scriptstyle \exp_{0_p}}\big\downarrow{\scriptstyle =\mathrm{id}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp_p} \\
(T_pM, \exp_p^* g) & \xrightarrow{\exp_p} & (M, g)\ .
\end{array}$$

Daher ist die Riemannsche Mannigfaltigkeit $(T_pM, \exp_p^* g)$ nach dem Satz 1.95 von Hopf und Rinow vollständig. Nach Lemma 1.118 ist exp daher eine Überlagerung. Da T_pM einfach zusammenhängend ist, ist $\exp_p\colon T_pM \to M$ eine universelle Überlagerung. □

2.12. Beispiel. Zu den Mannigfaltigkeiten mit nichtpositiver Schnittkrümmung gehören etwa die S^1, die Tori $T^n = (S^1)^n$, sowie alle hyperbolischen Mannigfaltigkeiten, also z.B. die hyperbolischen Flächen aus Beispiel 1.138, siehe dazu auch Satz 1.136.

2.13. Bemerkung. Die Aussage des Satzes von Hadamard-Cartan ist stärker als sie auf den ersten Blick aussehen mag. Sie besagt, dass eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit M mit nichtpositiver Schnittkrümmung ein $K(\pi, 1)$ ist, und damit bis auf Homotopie durch die Fundamentalgruppe $\pi_1(M, p)$ eindeutig bestimmt wird. Insbesondere lassen sich zahlreiche wichtige topologische Invarianten allein aus $\pi_1(M, p)$ ausrechnen. Dazu gehört unter anderem die (Ko-)Homologie von M mit beliebigen Koeffizienten, etwa auch die de Rham-Kohomologie. Wenn M kompakt ist, legt die (Ko-)Homologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, und damit die Fundamentalgruppe, die Dimension von M fest.

Zum Vergleich: die Sphären S^n mit $n \geq 2$ haben alle die gleiche Fundamentalgruppe $\{e\}$ und sind ebenfalls kompakt, aber ihre Dimensionen sind verschieden.

Außerdem ist die Fundamentalgruppe stets unendlich, wenn M selbst kompakt ist. Denn sei $\pi\colon \tilde{M} \to M$ die universelle Überlagerung. Da ein kompaktes M endlichen Durchmesser hat, folgt für $R > \operatorname{diam}(M)$ und $p \in M$ also

$$\tilde{M} = \pi^{-1}(M) = \pi^{-1}(B_R(p)) = \bigcup_{\tilde{p} \in \pi^{-1}\{p\}} B_R(\tilde{p})\ .$$

Aber $\exp_{\tilde{p}} T_p\tilde{M}$ ist sicher nicht in einer endlichen Vereinigung von Bällen mit endlichem Radius enthalten, folglich ist $\pi^{-1}\{p\}$ und damit auch $\pi_1(M, p)$ unendlich.

2.2. Ricci-Krümmung und Volumenvergleich

Wir betrachten jetzt die Ricci-Krümmung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Eine untere Schranke an die Ricci-Krümmung liefert uns eine obere Schranke an das Volumenwachstum von Riemannschen Bällen. Hieraus lassen sich interessante Volumen- und Durchmesser-Abschätzungen ableiten.

Sei ric_p die Ricci-Krümmung von (M, g) am Punkt p. Wir schreiben

$$\mathrm{ric}_p \geq c\, g_p \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{ric}_p(v, v) \geq c\, g_p(v, v) \qquad \text{für alle } v \in T_pM\ ,$$

und $\mathrm{ric} \geq c\, g$, wenn das für alle $p \in M$ gilt.

2.14. Satz (Bonnet, Myers). *Sei (M, g) vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit* $\mathrm{ric} \geq (n-1)\,\kappa\, g$ *für ein $\kappa > 0$. Dann gilt* $\operatorname{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. *Insbesondere ist M kompakt und hat endliche Fundamentalgruppe.*

Somit ist die Situation hier bereits völlig anders als bei nichtpositiver Schnittkrümmung, siehe Bemerkung 2.13.

Beweis. Es sei c eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische in M, und es sei $\ell = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Wir wollen zeigen, dass die Indexform $I_{c|_{[0,\ell]}}$ nicht positiv definit ist. Nach Proposition 2.4 folgt daraus nämlich, dass $c(t)$ zu $c(0)$ konjugiert ist für ein $t \in \bigl[0,\ell\bigr]$. Nach Proposition 1.110 folgt, dass $c|_{[0,L]}$ keine kürzeste Geodätische ist für $L > \ell$. Wenn aber keine kürzeste Geodätische länger als ℓ sein kann, dann ist der Durchmesser von M höchstens ℓ.

Es seien $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis aus parallelen Vektorfelder längs c mit $\dot c = e_1$. Für $i = 2, \dots, n$ betrachte Vektorfelder $V_i \in \mathfrak{X}''(c|_{[0,\ell]})$ mit

$$V_i(t) = \sin(\sqrt{\kappa}\, t)\, e_i(t) \;.$$

Wir wollen zeigen, dass bereits $I_{c|_{[0,\ell]}}$ nicht positiv definit ist. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^n I_{c|_{[0,\ell]}}(V_i,V_i) &= \int_0^\ell \sum_{i=2}^n \Bigl(\bigl\|\sqrt{\kappa}\,\cos(\sqrt{\kappa}\,t)\,e_i(t)\bigr\|^2 - \bigl\langle R_{\sin(\sqrt{\kappa}\,t)e_i,e_1}e_1, \sin(\sqrt{\kappa}\,t)e_i\bigr\rangle\Bigr)\,dt \\
&= \int_0^\ell \bigl((n-1)\,\kappa\,\cos(\sqrt{\kappa}\,t)^2 - \sin(\sqrt{\kappa}\,t)^2\;\mathrm{ric}(e_1,e_1)\bigr)\,dt \\
&\le (n-1)\,\kappa \int_0^\ell \bigl(\cos(\sqrt{\kappa}\,t)^2 - \sin(\sqrt{\kappa}\,t)^2\bigr)\,dt \\
&= (n-1)\,\kappa \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}} \cos(2\sqrt{\kappa}\,t)\,dt = 0 \;.
\end{aligned}$$

Da $\mathrm{diam}(M)$ endlich ist, ist M nach dem Satz 1.95 von Hopf und Rinow kompakt. Sei $\pi\colon \tilde M \to M$ eine universelle Riemannsche Überlagerung, dann erfüllt auch $\tilde M$ die Voraussetzungen dieses Satzes, ist also kompakt. Für $p \in M$ und $\tilde p \in \pi^{-1}(p) \in \tilde M$ besitzt die Teilmenge

$$\pi^{-1}\{p\} = \bigl\{\,\gamma(p) \bigm| \gamma \in \pi_1(M,p)\,\bigr\} \subset \tilde M$$

keinen Häufungspunkt, da $\pi_1(M,p)$ nach Satz 1.130 (1) eigentlich diskontinuierlich operiert. Da $\tilde M$ kompakt ist, muss $\pi^{-1}\{p\}$ endlich sein. Da $\pi_1(M,p)$ frei operiert, ist dann auch $\pi_1(M,p)$ endlich. $\square$

2.15. Bemerkung. Die Abschätzung im Satz von Bonnet-Myers ist optimal, denn für die Sphäre M^n_κ mit Schnittkrümmung $\kappa > 0$ gilt

$$\mathrm{ric} = (n-1)\,\kappa\, g \qquad \text{und} \qquad \mathrm{diam}(M^n_\kappa) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \;.$$

Wir werden in Satz 2.21 sehen, dass umgekehrt eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) mit $\mathrm{ric} \ge (n-1)\,\kappa\, g$ und $\mathrm{diam}(M) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ für ein $\kappa > 0$ bereits isometrisch zu M^n_κ ist.

Das Hauptaugenmerk in diesem Abschnitt richtet sich auf Volumina von Teilmengen in Mannigfaltigkeiten. Wir wiederholen die relevante Definition 3.24 aus dem letzten Semester.

2.16. Definition. Sei (M,g) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $\varphi\colon U^\varphi \to V^\varphi$ eine Karte, und sei $h\colon M \to [0,\infty)$ eine Funktion. Falls $h \circ \varphi^{-1}$ integrierbar ist, definieren wir das (*Volumen-*) *Integral* von h über U^φ als

$$\int_{U^\varphi} h\,\mathrm{dvol}_g = \int_{V^\varphi} (h \circ \varphi^{-1})\,\mathrm{dvol}^\varphi_g = \int_{V^\varphi} h(\varphi^{-1}(x))\;\det(g^\varphi_x)^{\frac12}\,dx^1 \dots dx^n \;.$$

Dabei heißt $d\mathrm{vol}^\varphi_g = \det(g^\varphi_x)^{\frac12}$ das *Volumenelement* von (M,g) in der Karte φ.

Sei jetzt $\mathcal{A} = \{\,\varphi_i\colon U_i \to V_i \mid i \in I\,\}$ ein Atlas von M und $(\psi_i)_{i\in I}$ eine untergeordenete Partition der Eins, siehe Abschnitt 1.2. Wenn die folgenden Integrale existieren und ihre Summe konvergiert, dann heißt $h\colon M \to [0,\infty)$ *integrierbar* und

$$\int_M h\,\mathrm{dvol}_g = \sum_{i\in I} \int_{U_i} \psi_i \cdot h\,\mathrm{dvol}_g$$

das (*Volumen-*) *Integral* von h über M. Für beliebige $h\colon M \to \mathbb{R}$ schreibe $h = h^+ - h^-$ mit $h^\pm = \max(0, \pm h)\colon M \to [0,\infty)$. Dann heißt h *integrierbar,* wenn h^+ und h^- integrierbar sind, mit

$$\int_M h\,\mathrm{dvol}_g = \int_M h^+\,\mathrm{dvol}_g - \int_M h^-\,\mathrm{dvol}_g \;.$$

Sei schließlich $A \subset M$ eine Teilmenge und sei $1_A\colon M \to \{0,1\}$ die Indikatorfunktion von A. Falls 1_A integrierbar ist, ist das (*n-dimensionale*) *Volumen* von A definiert als

$$\mathrm{vol}(A) = \int_M 1_A\,\mathrm{dvol}_g \;.$$

Aus der Integraltransformationsformel folgt, dass $\int_M h\,\mathrm{dvol}_g$ weder vom Atlas noch von der gewählten Partition der Eins abhängt.

2.17. Bemerkung. Wir erinnern uns an ein paar Rechenregeln aus der linearen Algebra.

(1) Auf den symmetrischen reellen $n \times n$-Matrizen definiert $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB)$ ein Skalarprodukt. Aus der Cauchy-Schwartzschen Ungleichung folgt

$$\mathrm{tr}(A)^2 = \langle A, E_n\rangle^2 \le \langle A, A\rangle\langle E_n, E_n\rangle = n\ \mathrm{tr}(A^2)$$

für alle symmetrischen Matrizen $A \in M_n(\mathbb{R})$.

(2) Sei $A(t)$ eine Familie invertierbarer Matrizen. Aus

$$0 = \frac{d}{dt}\big(A(t)\,A(t)^{-1}\big) = \dot A(t)\,A(t)^{-1} + A(t)\,\frac{d}{dt}\big(A(t)^{-1}\big)$$

folgt

$$\frac{d}{dt}\big(A(t)^{-1}\big) = -A(t)^{-1} \cdot \dot A(t) \cdot A(t)^{-1} \;.$$

(3) Sei $A\colon I \to GL_n(\mathbb{R})$ eine Familie invertierbarer reeller Matrizen, wobei $I \subset \mathbb{R}$, dann gilt

$$\frac{d}{dt}\det(A(t)) = \det(A(t))\ \mathrm{tr}\big(A(t)^{-1}\,\dot A(t)\big) \;.$$

Zur Begründung fixiere $t_0 \in I$ und schreibe $A(t) = A(t_0) \cdot B(t)$, dann gilt $B(t_0) = E_n$. Zunächst folgt aus der Multiplikativität der Determinante, dass

$$\frac{d}{dt}\det(A(t)) = \det(A(t_0)) \cdot \frac{d}{dt}\det(B(t)) \;.$$

Mit Hilfe des charakteristischen Polynoms von $\dot B$ sehen wir, dass

$$\begin{aligned}\det(B(t)) &= \det\big(E_n + (t-t_0)\,\dot B(t_0)\big) + O\big((t-t_0)^2\big)\\ &= (t-t_0)^n\,\chi_{-\dot B(t_0)}\big((t-t_0)^{-1}\big) + O\big((t-t_0)^2\big)\\ &= 1 + (t-t_0)\ \mathrm{tr}\big(\dot B(t_0)\big) + O\big((t-t_0)^2\big) \;.\end{aligned}$$

Im folgenden Satz wollen wir das Volumenelement in Normalkoordinaten abschätzen. Für eindimensionale Mannigfaltigkeiten sind Normalkoordinaten das gleiche wie Parametrisierungen nach Bogenlänge s, und das Volumenelement ist ds. Somit interessieren uns jetzt nur noch Mannigfaltigkeiten der Dimension ≥ 2.

Die Ricci-Krümmung $\mathrm{ric}(v,v)$ ist eine Art Mittelwert der Schnittkrümmung aller Ebenen E durch den Vektor v. Wir könnten erwarten, dass eine Schranke an die Ricci-Krümmung so etwas wie eine Schranke an das „gemittelte“ Wachstum von Jacobi-Feldern liefert. Der folgende Satz zeigt, dass das in gewissem Sinne sogar möglich ist.

2.18. Satz (Bishop). *Sei (M, g) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $n \geq 2$, sei $p \in M$, und sei $c(t) = \exp_p(tv)$ eine Geodätische mit Startvektor $v \in S_pM$. Sei $k(t) = \frac{1}{n-1}\operatorname{ric}(\dot c(t), \dot c(t))$, und sei $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ die Lösung der Differentialgleichung*

$$\ddot h + kh = 0 \qquad \textit{mit} \qquad h(0) = 0 \qquad \textit{und} \qquad \dot h(0) = 1 \;.$$

Ferner sei

$$a(t) = \det\Bigl(g_{tv}^{\exp_p^{-1}}\Bigr)^{\frac{1}{2}} \;, \qquad \textit{so dass} \qquad \operatorname{dvol}_g^{\exp_p^{-1}}\big|_{tv} = a(t)\, dx^1 \cdots dx^n \;.$$

Dann gilt

$$\frac{n-1}{t} + \frac{\dot a(t)}{a(t)} \leq (n-1)\, \frac{\dot h(t)}{h(t)} \qquad \textit{und} \qquad t^{n-1}\, a(t) \leq h(t)^{n-1}$$

für alle $t > 0$ kleiner als die kleinste positive Nullstelle t_0 von a. Falls in einer der beiden Gleichungen bei t Gleichheit gilt, so folgt $K(E) = k(s)$ für alle $s \in [0, t]$ und alle Ebenen $E \subset T_{c(s)}M$ mit $\dot c(s) \subset E$.

Beweis. Entlang von c betrachten wir parallele Vektorfelder $e_1, \dots, e_n \in \mathfrak{X}(c)$ mit $e_n = \dot c$ so dass $e_1(t), \dots, e_n(t)$ für alle t eine Orthonormalbasis von $T_{c(t)}M$ bilden. Außerdem betrachten wir Jacobifelder $V_1, \dots, V_{n-1} \in \mathfrak{X}'(c)$ mit den Anfangsbedingungen

$$V_i(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \dot V_i(0) = e_i(0)$$

für alle $i = 1, \dots, n-1$.

Wir definieren eine Familie von Matrizen $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$, so dass

$$V_j(t) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ij}\, e_i(t) \;.$$

Der Krümmungstensor liefert eine Familie symmetrischer Matrizen

$$R(t) = (r_{ij}(t))_{i,j} = (R_{e_i(t), e_n(t)} e_n(t), e_j(t))_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbb{R}) \;.$$

Da die Felder e_i parallel sind, folgt aus der Jacobigleichung

$$0 = \ddot V_j(t) + R_{V_j(t), e_n(t)} e_n(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \ddot a_{ij}(t)\, e_i(t) + \sum_{i,k=1}^{n-1} r_{ik} a_{kj}\, e_i(t) \;,$$

durch Koeffizientenvergleich also

$$\ddot A + R \cdot A = 0 \qquad \text{mit } A(0) = 0 \text{ und } \dot A(0) = E_n \;.$$

Wir wählen $e_1 = e_1(0), \dots, e_n = e_n(0)$ als Orthonormalbasis von T_pM bezüglich g_p, also gilt $e_n = v$. Nach Bemerkung 1.82 gilt

$$d_{tv} \exp_p(e_n) = \dot c(t) = e_n(t) \qquad \text{und} \qquad d_{tv} \exp_p(e_i) = \frac{1}{t}\, d_{tv} \exp_p(te_i) = \frac{1}{t}\, V_i(t)$$

für $i = 1, \ldots, n-1$. In Normalkoordinaten $\varphi = \exp_p^{-1}$ gilt somit

$$a(t) = \det\Bigl(g_{tv}^{\exp_p^{-1}}\Bigr)^{\frac{1}{2}} = \det\begin{pmatrix} \frac{\langle V_1(t), V_1(t)\rangle}{t^2} & \cdots & \frac{\langle V_1(t), V_{n-1}(t)\rangle}{t^2} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\langle V_{n-1}(t), V_1(t)\rangle}{t^2} & \cdots & \frac{\langle V_{n-1}(t), V_{n-1}(t)\rangle}{t^2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}$$
$$= t^{1-n} \det(A(t)^* A(t))^{\frac{1}{2}} = t^{1-n} \det(A(t)) \ .$$

Wir setzen $B(t) = \dot A(t) \cdot A(t)^{-1}$, dann gilt

$$\frac{d}{dt} \log\det(A(t)) = \operatorname{tr}(B(t))$$

nach Bemerkung 2.17 (3). Die Matrizen $B(t)$ sind symmetrisch, denn sei $c(t_0)$ nicht zu $c(0)$ längs c konjugiert, dann existieren Jacobifelder W_i, W_j mit $W_i(0) = W_j(0) = 0$ und $W_i(t_0) = e_i$, $W_j(t_0) = e_j$, insbesondere sei $A^{-1} = (a^{ij})_{ij}$, dann gilt

$$W_i(t) = \sum_{j=1}^{n-1} a^{ji}(t_0)\, V_j(t) = \sum_{j,k=1}^{n-1} a_{jk}(t) a^{ki}(t_0)\, e_j(t) \ .$$

Insbesondere schließen wir daraus, dass

$$\begin{aligned} b_{ij}(t_0) &= \langle \dot W_j(t_0), e_i(t_0)\rangle = \langle \dot W_j(t_0), W_i(t_0)\rangle \\ &= \int_0^{t_0} \bigl(\langle \dot W_j(t), \dot W_i(t)\rangle + \langle \ddot W_j(t), W_i(t)\rangle\bigr)\, dt \\ &= \int_0^{t_0} \bigl(\langle \dot W_i(t), \dot W_j(t)\rangle - \langle R_{W_i(t),\dot c(t)} \dot c(t), W_j(t)\rangle\bigr)\, dt = b_{ji}(t_0) \ . \end{aligned}$$

Wegen Bemerkung 2.17 (2) erfüllt B die *Riccati-Gleichung*

$$\dot B = \ddot A \cdot A^{-1} - \dot A \cdot (A^{-1} \dot A A^{-1}) = -R - B^2 \ .$$

Wir bilden die Spur und wenden Bemerkung 2.17 (1) an, das liefert

$$\operatorname{tr}(\dot B) = -\underbrace{\operatorname{tr}(R)}_{=\operatorname{ric}(\dot c, \dot c)} - \operatorname{tr}(B^2) \le -(n-1)\, k - \frac{\operatorname{tr}(B)^2}{n-1} \ .$$

Wir beweisen jetzt die erste Aussage des Satzes. Dazu definieren wir eine Funktion

$$f(t) = (n-1)\, \frac{\dot h(t)}{h(t)} - \frac{n-1}{t} - \frac{\dot a(t)}{a(t)} \ .$$

Zu zeigen ist $f(t) \ge 0$ bis zur ersten Nullstelle von $a(t)$.

Nach Proposition 1.84 gilt bezüglich der Basis $e_1, \ldots, e_n$ von T_pM, dass

$$a(0) = \det\Bigl(g_{ij}^{\exp_p^{-1}}\Bigr)^{\frac{1}{2}} = 1 \qquad \text{und} \qquad \dot a(0) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\biggl(\frac{\partial g_{ij}^{\exp_p^{-1}}}{\partial x^n}(0_p)\biggr) = 0 \ .$$

Wegen $\ddot h(0) = -k(0) h(0) = 0$ liefert die Taylorentwicklung, dass

$$\lim_{t \searrow 0} f(t) = \lim_{t \searrow 0} \biggl((n-1)\, \frac{1 + O(t^2)}{t + O(t^3)} - \frac{n-1}{t} - \frac{O(t)}{1 + O(t^2)}\biggr) = 0 \ .$$

Wie oben gesehen, gilt

$$\frac{n-1}{t} + \frac{\dot a(t)}{a(t)} = \frac{d}{dt}\log\bigl(t^{n-1}\, a(t)\bigr) = \frac{d}{dt}\log\det(A(t)) = \operatorname{tr}(B(t))\ ,$$

insbesondere

$$f = (n-1)\,\frac{\dot h}{h} - \operatorname{tr}(B)\ .$$

Mit Hilfe der Differential- (un-) gleichungen für $\operatorname{tr}(B(t))$ und h erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned}\dot f(t) &= \frac{d}{dt}\biggl((n-1)\,\frac{\dot h(t)}{h(t)} - \operatorname{tr}(B(t))\biggr) = (n-1)\,\frac{\ddot h(t)\,h(t) - \dot h(t)^2}{h(t)^2} - \operatorname{tr}(\dot B(t))\\ &\geq \frac{\operatorname{tr}(B(t))^2}{n-1} - (n-1)\,\frac{\dot h(t)^2}{h(t)^2} = -f(t)\biggl(\frac{\dot h}{h} + \frac{\operatorname{tr}(B)}{n-1}\biggr)\ .\end{aligned}$$

Um diese Differentialungleichung besser zu verstehen, wollen wir die Funktion $\frac{\dot h}{h} + \frac{\operatorname{tr}(B)}{n-1}$ als gegeben annehmen. Beachte, dass wir aufgrund der Taylorentwicklungen

$$\begin{aligned} h(t) &= h(0) + t\,\dot h(0) + \frac{t^2}{2}\,\ddot h(0) + O(t^3) = t + O(t^3)\\ \text{und}\qquad A(t) &= A(0) + \dot A(0) + \frac{t^2}{2}\,\ddot A(0) + O(t^3) = tE_n + O(t^3)\end{aligned}$$

das Verhalten dieser Funktion nahe 0 durch

$$\frac{\dot h}{h} + \frac{\operatorname{tr}(\dot A\,A^{-1})}{n-1} = \frac{2}{t} + O(t) > 0$$

beschreiben können. Sei $t_0 \in (0,\infty]$ die kleinste positive Nullstelle von h oder von a, je nachdem, welche zuerst eintritt. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\lim_{t\searrow 0}\biggl(\frac{\dot h}{h} + \frac{\operatorname{tr}(B)}{n-1}\biggr) = \lim_{t\searrow 0}\frac{d}{dt}\biggl(\log h(t) + \frac{\log\det A(t)}{n-1}\biggr) = \infty\\ \text{und}\qquad &\lim_{t\nearrow t_0}\biggl(\frac{\dot h}{h} + \frac{\operatorname{tr}(B)}{n-1}\biggr) = \lim_{t\nearrow t_0}\frac{d}{dt}\biggl(\log h(t) + \frac{\log\det A(t)}{n-1}\biggr) = -\infty \qquad \text{falls } t_0 < \infty\end{aligned}$$

Wir machen die folgenden Beobachtungen.

(1) Es könnte sein, dass $f|_{(0,t_0)} = 0$ gilt. In diesem Fall gilt im Satz Gleichheit.

(2) Falls $f(t) > 0$ für ein $t \in (0,t_0)$, so schreiben wir die obige Ungleichung in einer Umgebung von t um als

$$\frac{d\log f(t)}{dt} \geq -\frac{\dot h}{h} - \frac{\operatorname{tr}(B)}{n-1}\ .$$

Man sieht leicht, dass $\lim_{s\nearrow t_1}\log f(s) = -\infty$ für $t_1 \in (t,t_0)$ nicht möglich ist, also folgt $f > 0$ auf (t,t_0). Also — wenn f ab einem t positiv ist, bleibt es das bis zur Zeit t_0.

(3) Wir drehen das Argument unter (2) um. Wenn $f(t) < 0$ für ein $t \in (0,t_0)$, so schreiben wir

$$\frac{d\log(-f(t))}{dt} \leq -\frac{\dot h}{h} - \frac{\operatorname{tr}(B)}{n-1}\ .$$

Jetzt folgern wir, dass $\lim_{s\searrow t_1}\log(-f(s)) = -\infty$ für $t_1 \in (0,t)$ nicht möglich ist, also folgt $f < 0$ auf $(0,t)$. Da $\frac{\dot h(t)}{h(t)} + \frac{\operatorname{tr}(B(t))}{n-1} = \frac{2}{t} + O(t)$ für kleine t positiv ist, kann $\log(-f(s))$ für $s \to 0$ nicht gegen $-\infty$ konvergieren, also kann f nicht gegen 0 konvergieren — im Widerspruch zu unser Anfangsbedingung.

Wegen (3) gilt $f \geq 0$ auf $[0, t_0)$, was zu zeigen war.

Die zweite Behauptung des Satzes folgt aus der ersten, da

$$\lim_{t \to 0} \frac{t^{n-1} a(t)}{h(t)^{n-1}} = \lim_{t \to 0} \frac{t^{n-1} a(t)}{t^{n-1} \dot{h}(t)^{n-1}} = 1$$

und

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{t^{n-1} a(t)}{h(t)^{n-1}} \right) = \frac{t^{n-1} a(t)}{h(t)^{n-1}} \left(\frac{n-1}{t} + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - (n-1) \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} \right) \leq 0$$

bis zur ersten Nullstelle von a oder von h. Es folgt, dass die erste Nullstelle von a nicht kleiner als die erste Nullstelle von h sein kann, was die Abschätzungen beweist.

Falls bei $0 < t < t_0$ in einer der beiden obigen Abschätzungen Gleichheit gilt, so muss $f|_{[0,t]} = 0$ wegen (2) gelten, und es folgt insbesondere $\operatorname{tr}(B(s))^2 = (n-1) \operatorname{tr}(B(s)^2)$, woraus folgt, dass $B(s)$ für alle $s \in [0, t]$ jeweils ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist. Wegen der obigen Differentialgleichung $\dot{B} = -R - B^2$ gilt das dann auch für

$$R(s) = (\langle R_{e_i(s), \dot{c}(s)} \dot{c}(s), e_j(s) \rangle)_{i,j} ,$$

woraus sofort die Behauptung $K(E) = k(s)$ für alle Ebenen $E \in T_{c(s)} M$ mit $\dot{c}(s) \in E$ folgt. □

Dieser Beweis lässt sich etwas geometrischer formulieren. Die Funktion $r^{n-1}\, a(t)$ beschreibt gerade das Volumenelement der Sphäre mit Radius t um p in M im Vergleich zum Volumenelement der Standardsphäre — das liegt daran, dass der radiale Vektor $\dot{c}(t)$ senkrecht auf dieser Sphäre steht und Länge 1 hat. Die Matrix B beschreibt den Weingarten-Operator und die zweite Fundamentalform dieser Abstandssphäre — das erklärt, warum B symmetrisch ist. Also ist $\operatorname{tr}(B)$ genau die mittlere Krümmung, und die Gleichung $\frac{d}{dt} \log \det(A(t)) = \operatorname{tr}(B(t))$ beschreibt die Volumenänderung paralleler Flächen. An den eigentlichen Rechnungen ändert diese Anschauung aber leider nichts.

2.19. Bemerkung. Der Satz von Bishop impliziert den Satz 2.14 von Bonnet-Myers, denn die erste positive Nullstelle t_0 der Funktion a ist nach Bemerkung 1.108 gerade der erste konjugierte Punkt längs der Geodätischen c. Falls $\kappa > 0$ konstant ist, gilt

$$h(t) = s_\kappa(t) = \frac{\sin(\sqrt{\kappa}\, t)}{\sqrt{\kappa}} .$$

Aus dem obigen Satz folgt $t_0 \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$, und daraus ergibt sich $\operatorname{diam}(M, g) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ wie im Beweis des Satzes 2.14.

Wir geben jetzt eine weniger technische Anwendung der obigen Resultate.

2.20. Satz (Bishop-Gromov). *Es sei (M, g) eine n-dimensionale vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit* $\operatorname{ric} \geq (n-1)\kappa\, g$ *für ein $\kappa \in \mathbb{R}$. Es sei $p \in M$ und $\bar{p} \in M^n_\kappa$, dann ist die Funktion*

$$r \mapsto \frac{\operatorname{vol} B_r(p)}{\operatorname{vol} B_r(\bar{p})}$$

monoton nicht wachsend auf $(0, \infty)$ *mit Grenzwert* 1 *bei* $r = 0$. *Aus* $\operatorname{vol} B_r(p) = \operatorname{vol} B_r(\bar{p})$ *folgt, dass die Bälle isometrisch sind.*

Somit wachsen Bälle in M langsamer als in der Vergleichsmannigfaltigkeit M^n_κ. Beachte, dass der Nenner nicht von $\bar{p}$ abhängt.

Beweis. Es sei $s \colon SM \to (0, \infty]$ die Funktion aus Definition 1.102, also

$$s(v) := \sup\bigl\{\, t > 0 \bigm| d\bigl(c_v(t), c_v(0)\bigr) = t \,\bigr\} \in (0, \infty] .$$

Diese Funktion ist stetig nach Lemma 1.112. Für den Modellraum setzen wir

$$\bar{s} = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} & \text{falls } \kappa > 0, \text{ und} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen des Satzes von Bonnet-Myers und Proposition 1.110 gilt

$$s(v) \leq \bar{s} \qquad \text{für alle } v \in SM \;.$$

Betrachte die Teilmenge

$$V_r = \left\{ tv \;\middle|\; v \in S_pM, \text{ und } 0 \leq t < \min(r, s(v)) \right\} \subset B_r(0_p) \subset T_pM \;.$$

Dann ist die Abbildung $\exp_p \colon V_r \to B_r(p)$ injektiv nach Proposition 1.105, und es gilt

$$\exp_p(V_r) \subset B_r(p) \subset \overline{B_r(p)} = \exp_p\big(\overline{V}_r\big) \;.$$

Hieraus schließen wir, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{vol} B_r(p) &= \int_{V_r} \sqrt{\det\big(g_x^{\exp_p^{-1}}\big)}\, dx^1 \cdots dx^n = \int_{V_r} a_{\frac{x}{\|x\|}}(\|x\|)\, dx^1 \cdots dx^n \\ &= \int_{S_pM} \int_0^{\min(r, s(v))} t^{n-1} a_v(t)\, dt\, d\mathrm{vol}_{g^{\mathrm{sph}}}(v) \;. \end{aligned}$$

Hier ist g^{sph} die euklidische Metrik auf der Einheitssphäre S_pM, und a_v ist die Funktion a aus Satz 2.18 zur Geodätischen c_v mit Startvektor $v \in S^pM$. Im letzten Schritt sind wir von kartesischen Koordinaten auf T_pM zu Polarkoordinaten übergegangen, daher der zusätzliche Faktor t^{n-1} aus der Integral-Transformationsformel. Die Schreibweise $d\mathrm{vol}_{g^{\mathrm{sph}}}(v)$ gibt die Integrationsvariable an.

Für den Modellraum $M_n(\kappa)$ gilt Gleichheit im Satz 2.18 von Bishop, es folgt

$$\bar{a}(t) = t^{1-n}\, \bar{h}(t)^{n-1} = \left(\frac{s_\kappa(t)}{t}\right)^{n-1} ,$$

somit

$$\begin{aligned} \mathrm{vol} B_r(\bar{p}) &= \int_{S_{\bar{p}} M^n_\kappa} \int_0^{\min(r, \bar{s})} s_\kappa(t)^{n-1}\, dt\, d\mathrm{vol}_{g^{\mathrm{sph}}}(v) \\ &= \mathrm{vol} S^{n-1} \int_0^{\min(r, \bar{s})} s_\kappa(t)^{n-1}\, dt = \int_{S_pM} \int_0^{\min(r, \bar{s})} s_\kappa(t)^{n-1}\, dt\, d\mathrm{vol}_{g^{\mathrm{sph}}}(v) \;, \end{aligned}$$

denn s_κ löst gerade die Differentialgleichung für h mit $k(t) = \kappa$ konstant.

Es seien k_v und h_v wie in Satz 2.18 zur Geodätischen c_v definiert. Es folgt $k_v(t) \geq \kappa$, und daher

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{s}_\kappa(t)}{s_\kappa(t)} - \frac{\dot{h}_v(t)}{h_v(t)}\right) &= \frac{\ddot{s}_\kappa(t)}{s_\kappa(t)} - \frac{\dot{s}_\kappa(t)^2}{s_\kappa(t)^2} - \frac{\ddot{h}_v(t)}{h_v(t)} + \frac{\dot{h}_v(t)^2}{h_v(t)^2} \\ &= k_v(t) + \frac{\dot{h}_v(t)^2}{h_v(t)^2} - \kappa - \frac{\dot{s}_\kappa(t)^2}{s_\kappa(t)^2} \\ &\geq -\left(\frac{\dot{s}_\kappa(t)}{s_\kappa(t)} - \frac{\dot{h}_v(t)}{h_v(t)}\right)\left(\frac{\dot{s}_\kappa(t)}{s_\kappa(t)} + \frac{\dot{h}_v(t)}{h_v(t)}\right) \;. \end{aligned}$$

Als Startwerte erhalten wir

$$\lim_{t \searrow 0}\left(\frac{\dot{s}_\kappa(t)}{s_\kappa(t)} - \frac{\dot{h}_v(t)}{h_v(t)}\right) = \lim_{t \searrow 0}\left(\frac{1 + O(t^2)}{t + O(t^3)} - \frac{1 + O(t^2)}{t + O(t^3)}\right) = 0 \;.$$

Wie im Beweis des Satzes 2.18 folgt

$$\frac{\dot{s}_\kappa(t)}{s_\kappa(t)} \geq \frac{\dot{h}_v(t)}{h_v(t)} \qquad \text{und} \qquad s_\kappa(t) \geq h_v(t) \;.$$

für alle t bis zur ersten Nullstelle von h_v. Wegen Bemerkung 2.19 gilt das insbesondere für alle $t \in (0, s(v))$.

Wir kombinieren das mit dem Satz 2.18 von Bishop und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \log \frac{t^{n-1}\, a_v(t)}{s_\kappa(t)^{n-1}} &= \frac{d}{dt} \log \frac{t^{n-1}\, a_v(t)}{h_v(t)^{n-1}} + \frac{d}{dt} \log \frac{h_v(t)^{n-1}}{s_\kappa(t)} \\ &= \underbrace{\frac{n-1}{t} + \frac{\dot{a}_v(t)}{a_v(t)} - (n-1)\,\frac{\dot{h}_v(t)}{h_v(t)}}_{\leq 0} + \underbrace{(n-1)\,\frac{\dot{h}_v(t)}{h_v(t)} - (n-1)\,\frac{\dot{s}_\kappa(t)}{s_\kappa(t)}}_{\leq 0} \leq 0\end{aligned}$$

bis zur ersten Nullstelle von a_v, insbesondere für $t \in (0, s(v))$. Insbesondere ist also $\frac{t^{n-1}\, a_v(t)}{s_\kappa(t)^{n-1}}$ monoton nicht wachsend in r.

Es reicht zu zeigen, dass für jeden Vektor $v \in S_pM$ die Funktion

$$r \mapsto f_v(r) := \int_0^{\min(r,s(v))} t^{n-1}\, a_v(t)\, dt \Bigg/ \int_0^{\min(r,\bar{s})} s_\kappa(t)^{n-1}\, dt$$

monoton nicht steigt, denn dann gilt das gleiche auch nach Integration über S_pM. Nach Bemerkung 2.19 gilt im Falle $\kappa > 0$, dass

$$\frac{\mathrm{vol} B_r(p)}{\mathrm{vol} B_r(\bar{p})} = \frac{\mathrm{vol} M}{\mathrm{vol} M^n_\kappa} \qquad \text{für alle } r \geq \bar{s} = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \;.$$

Insbesondere dürfen wir also $r \leq \bar{s}$ annehmen.

Wir betrachten die Funktion $f_v(r)$ zunächst auf dem Intervall $(0, s(v)]$. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt hier

$$\begin{aligned}\frac{df_v(r)}{dr} &= \left(r^{n-1}\, a_v(r) \int_0^r s_\kappa(t)^{n-1}\, dt - s_\kappa(r)^{n-1} \int_0^r t^{n-1}\, a_v(t)\, dt\right) \Bigg/ \left(\int_0^r s_\kappa(t)^{n-1}\, dt\right)^2 \\ &= \int_0^r \underbrace{\left(\frac{r^{n-1}\, a_v(r)}{s_\kappa(r)^{n-1}} - \frac{t^{n-1}\, a_v(t)}{s_\kappa(t)^{n-1}}\right)}_{\leq 0} s_\kappa(t)^{n-1}\, s_\kappa(r)^{n-1}\, dt \Bigg/ \left(\int_0^r s_\kappa(t)^{n-1}\, dt\right)^2 \leq 0 \;.\end{aligned}$$

Auf dem Intervall $[s(v), \bar{s}]$ hingegen gilt

$$\frac{df_v(r)}{dr} = -s_\kappa(r)^{n-1} \int_0^{s(v)} t^{n-1}\, a_v(t)\, dt \Bigg/ \left(\int_0^r s_\kappa(t)^{n-1}\, dt\right)^2 < 0 \;.$$

Damit ist die Ungleichung bewiesen.

Aus den Taylorentwicklungen von $t^{n-1}\, a_v(t)$ und $s_\kappa(t)^{n-1}$ bei $t = 0$ folgt mit der Regel von L'Hospital, dass

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{\mathrm{vol} B_r(p)}{\mathrm{vol} B_r(\bar{p})} = \lim_{r \searrow 0} \frac{t^{n-1}\, a_v(t)}{s_\kappa(t)^{n-1}} = 1 \;.$$

Wir betrachten jetzt den Gleichheitsfall $\mathrm{vol} B_r(p) = \mathrm{vol} B_r(\bar{p})$ für ein $r \leq \bar{s}$. Aus der letzten Abschätzung folgt $r \leq s(v)$ für alle $v \in S_pM$, somit $r \leq \rho(p)$. Darüberhinaus gilt

$$\frac{n-1}{t} + \frac{\dot{a}_v(t)}{a_v(t)} = (n-1)\,\frac{\dot{h}_v(t)}{h_v(t)} \qquad \text{und} \qquad \frac{\dot{h}_v(t)}{h_v(t)} = \frac{\dot{s}_\kappa(t)}{s_\kappa(t)} \;.$$

Aus der zweiten Gleichheit schließen wir $k_v(t) = \kappa$ für alle $t \in [0,r]$, Aus der ersten Gleichheit folgt wie im Beweis von 2.18, dass $K(E) = k_v(t) = \kappa$ für alle $t \in [0,r]$ und alle Ebenen $E \in T_{c_v(t)}M$ mit $\dot c_v(t) \in E$. Hieraus folgt, dass die Jacobifelder V längs c_v mit Startwert $V(0) = 0$ die gleiche Länge haben wie die entsprechenden Jacobifelder in M^n_κ. Wie im Beweis von Satz 1.136 erhalten wir eine Isometrie

$$\begin{array}{ccc} T_pM \supset B_r(0_p) & \xrightarrow{\sim} & B_r(0_{\bar p}) \subset T_{\bar p}M^n_\kappa \\ \big\downarrow{\scriptstyle \exp_p} & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp_{\bar p}} \\ M \supset B_r(p) & \xrightarrow{\sim} & B_r(\bar p) \subset M^n_\kappa \end{array} .$$

□

Man beachte, dass im Beweis dieses Satzes gleich drei unterschiedliche Abschätzungen zusammenkommen (die Spurabschätzung aus Bemerkung 2.17, die Abschätzung des Volumenelementes mit Hilfe der Riccati-Gleichung in Satz 2.18, und die Abschätzung $s(v) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$, unter anderem mit Hilfe von Proposition 1.110). Es ist fast ein kleines Wunder, dass alle diese Abschätzungen zusammenpassen.

Kommen wir jetzt zu einer interessanten Anwendung des obigen Satzes, dem Durchmesserstarrheitssatz von Chen. Dieser behandelt wie versprochen den Gleichheitsfall im Satz 2.14 von Bonnet-Myers.

2.21. Satz (Cheng). *Es sei (M,g) eine n-dimensionale, vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $n \geq 2$ und* $\mathrm{ric} \geq (n-1)\kappa\, g$ *für ein $\kappa > 0$. Wenn* $\mathrm{diam}(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ *gilt, dann ist (M,g) isometrisch zur runden Sphäre $M^n_\kappa = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\, S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.*

Beweis. Setze $R = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} = \mathrm{diam}(M^n_\kappa)$. Aus Satz 2.14 folgt $R = \mathrm{diam}(M)$. Aus dem Satz 2.20 von Bishop-Gromov folgt

$$\frac{\mathrm{vol} M}{\mathrm{vol} M^n_\kappa} = \frac{\mathrm{vol} B_R(p)}{\mathrm{vol} B_R(\bar p)} \leq \frac{\mathrm{vol} B_r(p)}{\mathrm{vol} B_r(\bar p)}$$

für alle r und alle $p \in M$, $\bar p \in M^n_\kappa$.

Da M kompakt ist, existieren Punkte p, $q \in M$ mit $d(p,q) = R$. Seien $\bar p$, $\bar q \in M^n_\kappa$ Antipoden mit $d(\bar p, \bar q) = R$, dann gilt

$$\emptyset = B_r(p) \cap B_{R-r}(q) = B_r(\bar p) \cap B_{R-r}(\bar q) .$$

Wir schließen daraus, dass

$$\mathrm{vol} M \geq \mathrm{vol} B_r(p) + \mathrm{vol} B_{R-r}(q) \geq \frac{\mathrm{vol} M}{\mathrm{vol} M^n_\kappa} \underbrace{\big(\mathrm{vol} B_r(\bar p) + \mathrm{vol} B_{R-r}(\bar q)\big)}_{=\mathrm{vol} M^n_\kappa} = \mathrm{vol} M .$$

Da in der obigen Ungleichung Gleichheit gilt, ist das Verhältnis $\frac{\mathrm{vol} B_r(p)}{\mathrm{vol} B_r(\bar p)}$ von r unabhängig. Indem wir den Limes $r \searrow 0$ betrachten, sehen wir, dass $\mathrm{vol} B_r(p) = \mathrm{vol} B_r(\bar p)$ für alle r gilt. Nach dem Satz von Bishop-Gromov sind $B_r(p)$ und $B_r(\bar p)$ für alle $r \in (0,R)$ isometrisch, aus Stetigkeitsgründen also auch für $r = R$. Insbesondere sind auch $M = \overline{B_R(p)}$ und $M^n_\kappa = \overline{B_R(\bar p)}$ isometrisch. □

2.3. Fundamentalgruppe und kürzeste geschlossene Kurven in kompakten Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt wollen wir einige weitere topologische und geometrische Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten positiver Schnittkrümmung herleiten. Dabei nutzen wir aus, dass es in jeder nicht einfach zusammenhängenden kompakten Mannigfaltigkeit immer kürzeste geschlossene Kurven gibt.

2.22. Definition. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Eine *Schleife* in M ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$. Zwei Schleifen γ_0, γ_1 heißen (*frei*) *homotop,* wenn es eine stetige Abbildung $h\colon [0,1]^2 \to M$ gibt mit

$$h(t,i) = \gamma_i(t) \qquad \text{und} \qquad h(0,s) = h(1,s)$$

für alle s, $t \in [0,1]$ und $i \in \{0,1\}$. Eine Schleife, die zu einer konstanten Schleife frei homotop ist, heißt *zusammenziehbar.*

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann ist eine geschlossene Geodätische eine Geodätische $c\colon [0,1] \to M$ mit $c(0) = c(1)$ und $\dot c(0) = \dot c(1)$.

Diese Definition und das folgende Lemma funktionieren für beliebige topologische Räume.

2.23. Lemma. *Es sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann gibt es eine natürliche Bijektion von freien Homotopieklassen von Schleifen von M und Konjugationsklassen in der Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$.*

Beweis. Zunächst ist jede Schleife frei homotop zu einer Schleife am Punkt p. Dazu wähle einen Weg σ von $\gamma(0) = \gamma(1)$ nach p und definiere frei homotope Schleifen $\gamma_s = \sigma|_{[0,s]}^{-1}\gamma\sigma|_{[0,s]}$ für alle $s \in [0,1]$. Dann ist $\gamma_0 = \gamma$, und γ_1 ist Schleife an p.

Seien nun γ_0, γ_1 zwei Schleifen am Punkt p, und sei $h\colon [0,1]^2 \to M$ eine freie Homotopie zwischen ihnen. Setze $\sigma(t) = h(0,t) = h(1,t)$, dann ist σ eine Schleife an p, und man kann eine Homotopie $\bar h$ zwischen γ_1 und $\sigma^{-1}\gamma_0\sigma$ konstruieren. Es folgt, dass $[\gamma_1] = [\sigma]^{-1}[\gamma_0][\sigma] \in \pi_1(M,p)$.

Wenn umgekehrt γ_0 und γ_1 Elemente ein und derselben Konjugationsklasse von $\pi_1(M)$ repräsentieren, etwa $[\gamma_1] = [\sigma]^{-1}[\gamma_0][\sigma]$, dann ist γ_0 frei homotop zu $\sigma^{-1}\gamma_0\sigma$ wie im ersten Schritt des Beweises, und $\sigma^{-1}\gamma_0\sigma$ ist homotop zu γ_1. $\square$

2.24. Bemerkung. Sei M zusammenhängend. Ohne Angabe eines Basispunktes sind Elemente in $\pi_1(M)$ bis auf Konjugation wohlbestimmt nach Bemerkung 1.128. Wir dürfen also von Konjugationsklassen in $\pi_1(M)$ sprechen.

Außerdem sehen wir leicht, dass eine Schleife genau dann zusammenziehbar ist, wenn sie frei zusammenziehbar ist. Wir dürfen hier also den Zusatz „frei“ weglassen.

Wir geben ein nützliches Kriterium dafür an, dass eine Schleife nicht zusammenziehbar ist. Dazu beweisen wir jetzt doch noch einen wichtigen Satz über Überlagerungen.

2.25. Satz (Homotopieliftungssatz). *Es sei $\pi\colon \tilde M \to M$ eine Überlagerung, es seien $\tilde F\colon N \to \tilde M$ und $H\colon N \times [0,1] \to M$ stetige Abbildungen mit $(\pi \circ \tilde F)(p) = H(p,0)$ für alle $p \in N$.*

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\tilde F} & \tilde M \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \times\{0\}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ N \times [0,1] & \xrightarrow{H} & M\,. \end{array}$$

Dann existiert genau eine stetige Abbildung $\tilde H\colon N \times [0,1] \to \tilde M$ mit $\pi \circ \tilde H = H$ und $\tilde H(p,0) = \tilde F(p)$.

Beweis. Wir betrachten zunächst $p \in N$. Zu jedem $t \in [0,1]$ existiert eine gleichmäßig überlagerte Umgebung U von $H(p,t) \in M$ wie in Definition 1.115; insbesondere gilt also $\pi^{-1}(U) \cong U \times X$ für eine diskrete Menge X. Da $[0,1]$ kompakt ist, existieren endlich viele $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$, gleichmäßig überlagerte offene Mengen U_i und diskrete Mengen X_i, so dass

$$H(p,t) \in U_i \qquad \text{für alle } 1 \le i \le k \text{ und } t \in [t_{i-1}, t_i]$$

und $\pi^{-1}(U_i) = U_i \times X_i$. Wegen Stetigkeit von H und Kompaktheit von $[0,1]$ existiert eine zusammenhängende Umgebung V von p, so dass

$$H(q,t) \in U_i \qquad \text{für alle } q \in V \text{, alle } 1 \leq i \leq k \text{ und alle } t \in [t_{i-1}, t_i]\ .$$

Wegen Stetigkeit von $\tilde{F}$ ist die zusammengesetzte Abbildung

$$V \xrightarrow{\tilde{F}} \pi^{-1}(U_1) \xrightarrow{\sim} U_1 \times X_1 \longrightarrow X_1$$

konstant, da V zusammenhängend ist. Sei $x_1 \in X_1$ der Bildpunkt, dann definieren wir $\tilde{H}|_{V_1 \times [t_0,t_1]}$ durch

$$\tilde{H}(q,t) = \bigl(H(q,t), x_1\bigr) \in U_1 \times X_1 \cong \pi^{-1}(U_1) \subset \tilde{M} \qquad \text{für alle } q \in V \text{ und alle } t \in [t_0, t_1]\ .$$

Das liefert offensichtlich eine stetige Abbildung.

Wir setzen dieses Verfahren induktiv fort, indem wir $\tilde{H}$ fortsetzen durch

$$\tilde{H}(q,t) = \bigl(H(q,t), f_i\bigr) \in U_i \times X_i \cong \pi^{-1}(U_i) \subset \tilde{M} \qquad \text{für alle } q \in V \text{ und alle } t \in [t_{i-1}, t_i]\ .$$

Nach endlich vielen Schritten haben wir $\tilde{H}$ auf $V \times [0,1]$ konstruiert.

Diese Konstruktion ist eindeutig, denn sei $q \in V$, und sei $\tilde{H}'$ eine weitere lokale Fortsetzung von $\tilde{F}$. Wegen Stetigkeit sind die Abbildungen

$$[t_{i-1}, t_i] \xrightarrow{t \mapsto (q,t)} N \times [t_{i-1}, t_i] \xrightarrow{\tilde{H}'} \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times X_i \longrightarrow X_i$$

konstant, und es folgt $\tilde{H}'(q,t) = \tilde{H}(q,t)$ für alle $t \in [0,1]$ nach Induktion über i.

Da jeder Punkt p in M eine geeignete Umgebung V besitzt, so dass sich $\tilde{F}|_V$ auf $V \times [0,1]$ fortsetzen lässt, und je zwei solche Fortsetzungen auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich übereinstimmen, können wir $\tilde{H}$ also auch global definieren, und zwar auf genau eine Weise. □

2.26. Folgerung. *Jede Schleife γ in M am Punkt p lässt sich zu einem Weg $\tilde{\gamma}$ in $\tilde{M}$ liften, wobei $\tilde{\gamma}(0) \in \pi^{-1}(p)$ beliebig gewählt werden kann.*

Beweis. In der Notation von Satz 2.25 ist N ein Punkt, $H = \gamma$ und der Anfangspunkt $\tilde{p} \in \tilde{M}$ ist das Bild von N unter $\tilde{F}$. □

2.27. Folgerung. *Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit universeller Überlagerung $\pi\colon \tilde{M} \to M$. Sei $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to \tilde{M}$ ein Weg, dessen Bild $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ eine Schleife in M ist, d.h., es gilt $\pi\gamma(0) = \pi\gamma(1)$. Dann ist γ genau dann in M zusammenziehbar, wenn $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$.*

Beweis. Übung. □

2.28. Lemma. *Es sei (M,g) eine kompakte, zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

(1) *Jede Schleife γ der Länge $L(\gamma) < 2\rho(M)$ ist zusammenziehbar.*
(2) *Jede freie Homotopieklasse nicht zusammenziehbarer Schleifen wird durch eine kürzeste geschlossene Geodätische realisiert.*

Beweis. Zu (1) sei $p = \gamma(0)$. Für den Injektivitätsradius gilt $\rho(p) \geq \rho(M)$. Wie im Beweis von Folgerung 1.90 verläuft eine Schleife der Länge $L(\gamma) < 2\rho(M)$ ganz in $B_{\rho(p)}(p)$, und wir erhalten eine Homotopie

$$h(t,s) = \exp_p\bigl(s \exp_p^{-1}(\gamma(t))\bigr)\ .$$

Zu (2) sei γ eine beliebige nicht zusammenziehbare Schleife, dann setze

$$\ell = \inf\bigl\{\, L(\gamma') \bigm| \gamma' \text{ ist frei homotop zu } \gamma \,\bigr\}\ .$$

Wegen (1) gilt $\ell \geq 2\rho(M)$. Wir können eine Folge glatter, zu γ frei homotoper Schleifen $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{i\to\infty} L(\gamma_i) = \ell$$

wählen; diese seien o.B.d.A. proportional zur Bogenlänge parametrisiert. Insbesondere existiert eine Konstante $C = \max L(\gamma_i)$ mit

$$d(\gamma_i(s), \gamma_i(t)) \leq C \, \min(|s-t|\,, 1-|s-t|)$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle s, $t \in [0,1]$.

Wir haben also eine Familie gleichgradig stetiger Abbildung in ein Kompaktum M gefunden. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli existiert ein Häufungspunkt in der $\mathcal{C}^0$-Topologie, insbesondere konvergiert eine Teilfolge punktweise gegen eine Schleife $\gamma_\infty\colon [0,1] \to M$ mit

$$d(\gamma_\infty(s), \gamma_\infty(t)) = \ell \, \min(|s-t|\,, 1-|s-t|)$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle s, $t \in [0,1]$. Da diese Schleife lokal kürzeste Verbindung ihrer Punkte ist, ist sie eine Geodätische. Da dies auch über den Punkt $\gamma_\infty(0) = \gamma_\infty(1)$ hinweg gilt, ist γ geschlossen.

Um zu zeigen, dass γ_∞ frei homotop zu γ ist, wähle zunächst i so groß, dass

$$d(\gamma_\infty(t), \gamma_i(t)) < \rho(M)$$

für alle $t \in [0,1]$. Dann existiert eine Homotopie durch kürzeste verbindende Geodätische, d.h., wir definieren $h\colon [0,1]^2 \to M$ durch

$$h(t,s) = \exp_{\gamma_\infty(t)}\bigl(s \, \exp^{-1}_{\gamma_\infty(t)}(\gamma_i(t))\bigr) \; .$$

Damit ist γ_∞ frei homotop zu γ_i, und somit auch zum ursprünglichen γ. □

2.29. Bemerkung. Mit dem obigen Lemma und dem Satz 2.11 von Hadamard-Cartan lässt sich leicht zeigen, dass jede kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \leq 0$ geschlossene Geodätische trägt (Übung).

Als nächstes definieren wir den Begriff der Orientierung, den wir für die folgenden Resultate benötigen.

2.30. Definition. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zwei Karten φ, ψ von M heißen *gleich orientiert,* wenn für alle $p \in U^\varphi \cap U^\psi$ gilt, dass

$$\det\bigl(d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}\bigr) > 0 \; .$$

Ein *orientierter Atlas* von M ist ein Atlas $\mathcal{A}$ von M, in dem je zwei Karten gleich orientiert sind. Zwei orientierte Atlanten von M heißen *gleich orientiert,* wenn ihre Vereinigung wieder ein orientierter Atlas ist. Die Vereinigung aller zu einem gegebenen Atlas gleich orientierter Atlanten heißt ein *maximaler orientierter Atlas* oder eine *Orientierung* von M. Falls so etwas existiert, heißt M *orientierbar.*

Ein Diffeomorphismus $F\colon M \to N$ zwischen orientierten Mannigfaltigkeiten heißt *orientierungserhaltend,* wenn für alle Paare orientierter Karten φ von M und ψ von N und alle $p \in U^\varphi \cap F^{-1}(U^\psi)$ gilt, dass

$$\det\bigl(d(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}\bigr) > 0 \; .$$

Jeder Tangentialraum T_pM lässt sich auf zwei Weisen orientieren, und eine Orientierung wählt in stetiger Weise an jedem Punkt eine dieser beiden Orientierungen aus; sie besteht aus allen Basen $(v_1, \dots, v_n)$ von T_pM, für die $(v_1^\varphi, \dots, v_n^\varphi)$ eine positiv orientierte Basis des $\mathbb{R}^n$ ist.

2.31. Definition. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Es sei $o(T_pM)$ die Menge aller Orientierungen von T_pM, dann heißt

$$\pi\colon o(TM) = \dot{\bigcup_{p \in M}} o(T_pM) \to M \qquad \text{mit} \qquad (p,o) \mapsto p$$

die *Orientierungsüberlagerung* von M.

Eine Schleife γ in M heißt *orientierbar,* wenn sie sich zu einer Schleife in $o(TM)$ liften lässt.

2.32. Bemerkung. Sei M differenzierbare Mannigfaltigkeit, und sei $\pi\colon o(TM) \to M$ die Orientierungsüberlagerung.

(1) Zunächst einmal ist $o(TM)$ tatsächlich eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, und π ist eine zweiblättrige Überlagerung von M. Sei etwa φ eine Karte von M, dann induziert φ für alle $p \in U^\varphi$ eine Orientierung o_p^φ auf T_pM, so dass $d_p\varphi\colon T_pM \to \mathbb{R}^n$ orientierungserhaltend ist. Es sei $-o_p^\varphi$ die dazu entgegengesetzte Orientierung von T_pM, dann folgt
$$U^\varphi \times \{1, -1\} \cong \pi^{-1}(U^\varphi) \qquad \text{mit} \qquad (p, \pm 1) \mapsto \pm o_p^\varphi \in o(T_pM) \; .$$
Seien φ, ψ gleich (verschieden) orientiert, dann erhalten wir
$$\bigl(U^\varphi \times \{\pm 1\}\bigr) \cap \bigl(U^\psi \times \{\mp 1\}\bigr) = \emptyset \qquad \text{bzw.} \qquad \bigl(U^\varphi \times \{\pm 1\}\bigr) \cap \bigl(U^\psi \times \{\pm 1\}\bigr) = \emptyset \; ,$$
und die Kartenwechsel auf M induzieren Kartenwechsel auf $o(TM)$. Also ist $o(TM)$ eine orientierte Mannigfaltigkeit der gleichen Dimension wie M und π eine Überlagerung.

(2) Auf $o(TM)$ operiert die Gruppe $\{1, -1\}$ durch Beibehalten bzw. Wechsel der Orientierung an jedem Punkt von M; es folgt $M \cong o(TM)/\{1, -1\}$, und $\pi\colon o(TM) \to M$ ist die Quotientenabbildung.

(3) Wenn M orientiert ist, folgt $o(TM) \cong M \times \{1, -1\}$, wobei $(p, 1)$ der gewählten Orientierung auf T_pM entspricht. Wenn umgekehrt $o(TM) \cong M \times \{1, -1\}$ gilt, wobei π zur Projektion auf den Faktor M wird, dann lässt sich M orientieren, indem T_pM mit der $(p, 1)$ entsprechenden Orientierung versehen wird.

(4) Es sei $\gamma\colon [0, 1] \to M$ eine Schleife in M. Wir wählen eine Basis $(e_1(0), \dots, e_n(0))$ und setzen diese stetig fort zu einer Familie von Basen $(e_1(t), \dots, e_n(t))_{t \in [0,1]} \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Die Orientierungen dieser Basen beschreiben einen Lift $\tilde\gamma$ von γ nach $o(TM)$. Folglich ist γ genau dann orientierbar, wenn $(e_1(0), \dots, e_n(0))$ und $(e_1(1), \dots, e_n(1))$ gleich orientierte Basen von $T_{\gamma(0)}M$ sind.

2.33. Lemma (Lemma von Synge). *Es sei M eine zusammenhängende, kompakte, n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit positiver Schnittkrümmung.*

(1) *Es sei n gerade. Wenn M orientierbar ist, ist M einfach zusammenhängend, ansonsten gilt $\pi_1(M) \cong \{1, -1\}$.*

(2) *Wenn n ungerade ist, ist M orientierbar.*

Beweis. Wir beweisen hier nur Teil (1). Teil (2) lässt sich mit ähnlichen Methoden zeigen und ist daher eine Übung. Zu (1) zeigen wir, dass M keine nicht zusammenziehbare orientierbare Schleife enthält.

Wenn M orientierbar ist, dann ist jede Schleife orientierbar, also auch zusammenziehbar, und es folgt $\pi_1(M) \cong \{1\}$. Ansonsten hätte $\pi_1(M)$ nämlich mindestens eine nichttriviale Konjugationsklasse, es würde also nicht zusammenziehbare Schleifen geben.

Wenn M nicht orientierbar ist, enthält M mindestens eine nicht orientierbare Schleife, also existiert ein nicht orientierbares Element $\gamma \in \pi_1(M)$. Angenommen, $\gamma' \in \pi_1(M)$ wäre ebenfalls nicht orientierbar. Dann wäre $\gamma^{-1}\gamma'$ orientierbar, es folgt also $\gamma = \gamma'$. Insbesondere gilt $\pi_1(M) \cong \{1, -1\}$.

Es sei jetzt $c\colon [0, \ell] \to M$ eine orientierbare geschlossene Geodätische in M mit $p = c(0) = c(\ell)$ und $v = \dot c(0) = \dot c(\ell)$. Parallelverschiebung längs c definiert eine orientierbare, orthogonale Abbildung $P_c\colon T_pM \to T_pM$ mit $P_c(v) = v$. Nach dem Satz über normale Abbildungen wird P_c in einer geeigneten Orthonormalbasis von T_pM dargestellt durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{smallmatrix} &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \begin{smallmatrix} \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ \sin\varphi_k & \cos\varphi_k \end{smallmatrix} &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 1 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 1 \end{pmatrix} .$$

Da $\det P_c > 0$, ist die Anzahl der Einträge -1 gerade, da $\dim T_pM$ gerade ist, also auch die Anzahl der Einträge 1. Nun ist aber $v = \dot c(0)$ ein Eigenvektor, also gibt es einen weiteren Eigenvektor $w \perp v$ zum Eigenwert 1.

Wir setzen w zu einem parallelen Vektorfeld $W \in \mathfrak{X}'(c)$ längs c fort. Da $P_c(w) = w$, folgt $W(0) = W(\ell)$. Sei nun c_s eine Variation von c mit Variationsvektorfeld W. Da c geschlossene Geodätische ist, folgt

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(c_s) = 0 .$$

Die zweite Variationsformel aus Satz 1.86 liefert

$$\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L(c_s) = \int_0^\ell \Big(\|\underbrace{\dot W(t)}_{=0}\|^2 - \underbrace{K(\operatorname{span}\{\dot c(t), W(t)\})}_{>0} \, \|\dot c(t)\|^2 \, \|W(t)\|^2 \Big) \, dt < 0 .$$

Insbesondere ist die geschlossene Geodätische c nicht die kürzeste Kurve in ihrer freien Homotopieklasse. Nach Lemma 2.23 gibt es aber in jeder freien Homotopieklasse nicht zusammenziehbarer Schleifen eine kürzeste geschlossene Geodätische. Folglich kann es keine nicht zusammenziehbaren, orientierbaren Schleifen in M geben. □

2.34. Bemerkung. Man sieht leicht, dass $\mathbb{R}P^n$ genau dann orientierbar ist, wenn n ungerade ist. Die Linsenräume aus Beispiel 1.137 zeigen, dass im ungerade-dimensionalen Fall die Fundamentalgruppe zwar endlich ist wegen des Satzes 2.14 von Bonnet-Myers, aber beliebig viele Elemente enthalten kann.

Auf die Voraussetzung $K > 0$ kann man nicht verzichten: Indem man das Riemannsche Produkt eines der obigen Beispiele mit S^1 oder $\mathbb{R}P^2$ bildet, erhält man Gegenbeispiele, in denen allerdings nur noch $K \geq 0$ gilt.

Wir wollen das obige Argument zu einer unteren Abschätzung für den Injektivitätsradius ausbauen. Im Gegensatz zum Satz von Bonnet-Myers erhalten wir dadurch eine untere Schranke für die Größe der Mannigfaltigkeit. Zunächst einige Vorüberlegungen.

2.35. Proposition. *Es sei (M, g) kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert entweder eine geschlossene Geodätische der Länge $2\rho(M)$, oder Punkte p, $q \in M$ und eine kürzeste Geodätische von p nach q der Länge $\rho(M)$, entlang der p zu q konjugiert ist.*

Beweis. Es gilt $\rho(M, g) = \inf_{v \in SM} s(v)$, und da SM kompakt ist, wenn M kompakt ist, wird das Infimum bei $v \in T_pM$ mit $p \in M$ angenommen. Es sei c_v die Geodätische mit Startvektor v und $q = c_v(\rho)$. Falls $\rho\, v \in T_pM$ zu p konjugiert ist, sind wir fertig.

Anderfalls gibt es kürzeste Geodätische $c_\varepsilon \neq c_v$ von p nach $c\big(\rho + \varepsilon\big)$ für alle $\varepsilon > 0$ mit Startvektor $w_\varepsilon \in S_pM$. Da SM kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge der $w_{\frac{1}{i}}$ gegen einen Vektor $w \in S_pM$.

Da $\exp_p$ in einer Umgebung U von v invertierbar ist, liegen fast alle $w_{\frac{1}{i}}$ nicht in U, also gilt $w \neq v$ wie im Beweis von Lemma 1.112. Dann ist $c_w \neq c_v$ eine weitere kürzeste Geodätische der Länge ρ von p nach q. Falls $\rho\, w \in T_pM$ zu p konjugiert ist, sind wir wieder fertig.

Wir wollen zeigen, dass c_v und c_w ansonsten gemeinsam eine geschlossene Geodätische bilden. Wäre das nicht so, dann würden sich die beiden Geodätischen in p oder in q in einem Winkel $< \pi$ treffen, etwa in q. Dann gibt es einen Vektor $u \in T_qM$ mit

$$\langle \dot c_v(\rho), u\rangle < 0 \qquad \text{und} \qquad \langle \dot c_w(\rho), u\rangle < 0 \;.$$

Nach Voraussetzung ist $\exp_p$ nahe $\rho\, v$ und nahe $\rho\, w$ lokal invertierbar. Für kleine $\varepsilon > 0$ existieren also Kurven v, $w\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to T_pM$ mit

$$v(0) = v\;, \qquad w(0) = w \qquad \text{und} \qquad \exp_p(\rho\, v(s)) = \exp_p(\rho\, w(s)) = \exp_q(su)\;.$$

Aus der ersten Variationsformel aus Satz 1.64 folgt

$$\|\rho\, v(s)\| \le d(p, \exp_q(su)) < \rho \qquad \text{und} \qquad \|\rho\, w(s)\| \le d(p, \exp_q(su)) < \rho$$

im Widerspruch zur Definition des Injektivitätsradius.

Folglich müssen sich c_v und c_w bei q im Winkel π treffen. Wir vertauschen oben die Rollen von p und q und sehen, dass sich $c_v|_{[0,\rho]}$ und $c_w|_{[0,\rho]}$ auch bei p im Winkel π treffen, und daher nach Umparametrisierung eine geschlossene Geodätische der Länge $2\rho(M)$ bilden. □

2.36. Bemerkung. Die kürzesten geschlossenen Geodätischen auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit heißen auch *Systolen.*

(1) Der Injektivitätsradius der runden Sphäre ist π. Geodätische zwischen Antipoden können sich in beliebigen Winkeln treffen. Das ist möglich, da Antipoden entlang jeder Geodätischen konjugiert sind.
(2) Sei M kompakt mit nichtpositiver Schnittkrümmung. Nach dem Satz 2.11 von Hadamard-Cartan gibt es keine konjugierten Punkte, also wird der Injektivitätsradius stets durch die Systolen realisiert. Da die universelle Überlagerung keine geschlossenen Geodätischen enthält, schließen wir aus Folgerung 2.27, dass die Systolen nicht zusammenziehbar sind, also durch die Fundamentalgruppe bedingt sind.

2.37. Satz (Klingenberg). *Es sei (M, g) eine kompakte, orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit gerader Dimension mit Schnittkrümmung $0 < K \le \kappa$. Dann gilt*

$$\operatorname{diam}(M) \ge \rho(M) \ge \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\;.$$

Beweis. Wir nehmen an, dass $R := \rho(M) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ gilt. Nach dem Satz 2.5 von Rauch ist $\exp_p$ für alle p auf ganz $\overline{B_R(0_p)}$ lokal invertierbar. Nach Proposition 2.35 wird der Injektivitätsradius also durch eine geschlossene Geodätische $c\colon [0,1] \to M$ der Länge $2R$ repräsentiert.

Wie im Beweis des Lemmas 2.33 existiert eine Variation von c durch Schleifen c_s mit $c_0 = c$, die für $0 \neq s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ kürzer als c sind. Insbesondere gilt $d(c_s(0), c_s(t)) < R = \rho(M)$ für alle $s \neq 0$ und alle $t \in [0,1]$. Nach Folgerung 1.114 existiert eine Abbildung

$$\Phi\colon [0,1] \times \big((-\varepsilon,\varepsilon) \setminus \{0\}\big) \to \big\{\, v \in TM \;\big|\; \|v\| < R \,\big\} \quad \text{mit} \quad (\pi \times \exp)(\Phi(t,s)) = (c_s(0), c_s(t))\;.$$

Da die Abbildung $\pi \times \exp$ auf der kompakten Menge $\{\, v \in TM \mid \|v\| \le R\,\}$ wegen $R < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ lokal invertierbar ist, existiert eine Konstant C mit

$$\big\|(d_v \exp^{-1})(w)\big\| \le C\, \|w\| \qquad \text{für alle } v \in TM \text{ mit } \|v\| \le R\;.$$

Andernfalls gäbe es eine Folge von Vektoren $u_i \in T_{p_i}M \subset T_{v_i}TM$ mit $\|v_i\| \le R$, $\|u_i\| = 1$ und $\|(d_{v_i}\exp)(u_i)\| \to 0$ für $i \to \infty$, diese Folge hätte wegen Kompaktheit einen Grenzwert $u_\infty \in$

$T_{v_\infty}M$ mit $\|v_\infty\| \leq R$, $\|u_\infty\| = 1$ und $(d_{v_\infty} \exp)(u_\infty) = 0$ im Widerspruch zur lokalen Invertierbarkeit.

Hieraus folgt

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,s) \right\| \leq C \ \|\dot{c}_s(t)\| \leq C' < \infty$$

für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \neq 0$ und alle $t \in [0,1]$, da auch $\|\dot{c}_s(t)\|$ für $s \in [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$ universell beschränkt ist. Nach Arzela-Ascoli konvergiert eine Folge von Kurven $\Phi(\,\cdot\,, s_i)$ für $s_i \to 0$ gegen eine geschlossene Kurve $\varphi\colon [0,1] \to T_pM$ mit $\exp_p \circ \varphi = c$.

Das steht im Widerspruch dazu, dass φ als Lift einer Geodätischen mit $\varphi(0) = 0_p$ durch eine radiale Gerade gegeben sein muss. Hieraus folgt $\rho(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$, und die Aussage $\operatorname{diam}(M) \geq \rho(M)$ sollte klar sein. □

2.38. Bemerkung. Die runde Sphäre zeigt, dass Gleichheit möglich ist. Insbesondere ist obiger Satz in gewissem Sinne komplementär zum Satz 2.14 von Bonnet-Myers. Insgesamt gilt für geradedimensionale, orientierbare Mannigfaltigkeiten also

$$0 < \kappa_0 \leq K \leq \kappa_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_1}} \leq \rho(M,g) \leq \operatorname{diam}(M,g) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_0}} \,.$$

Die Bedingung $K > 0$ ist nötig, um das Lemma 2.33 anwenden zu können. Für $K = 0$ beispielsweise kann man Tori mit beliebig kleinem Injektivitätsradius konstruieren.

Die Linsenräume aus Beispiel 1.137 zeigen, dass die Abschätzung im ungerade-dimensionalen Fall nicht möglich ist, denn ihr Injektivitätsradius $\frac{\pi}{p}$ wird für große p beliebig klein.

2.4. Der Winkelvergleichssatz von Toponogov

In diesem Kapitel beweisen wir, dass Winkel beliebiger Dreiecke mit kürzesten Seiten in vollstaendigen Mannigfaltigkeiten der Schnittkrümmung $K \geq \kappa$ nie kleiner sind als die eines Vergleichsdreiecks mit gleichen Längen in M^n_κ. Für kleine Dreiecke konnten wir das als Übung 2 von Blatt 13 aus der Folgerung 2.8 aus dem Satz von Rauch herleiten. Die Verallgemeinerung auf beliebige Dreiecke erfordert wieder ein paar globale Überlegungen. Wir werden sie im nächsten Abschnitt benutzen, um von manchen Mannigfaltigkeiten zu beweisen, dass sie homöomorph zur Sphäre sind.

2.39. Definition. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein (*geodätisches*) *Dreieck* $\Delta c_1c_2c_3$ in M besteht aus drei Geodätischen c_1, c_2, $c_3\colon [0,1] \to M$ mit den *Eckpunkten* $p_{i+2} := c_i(1) = c_{i+1}(0) \in M$, wobei Indizes modulo 3 betrachtet werden. Es hat die *Seitenlängen* ℓ_i und die *Winkel* $\gamma_i \in [0,\pi]$ mit

$$\ell_i = L(c_i) = \|\dot{c}_i\| \qquad \text{und} \qquad \gamma_i = \angle_{p_i}\bigl(-\dot{c}_{i+1}(1), \dot{c}_{i+2}(0)\bigr) \,.$$

Ein *geodätisches Dreieck* $\Delta c_1c_2c_3$ heißt *minimal* oder *kürzestes,* wenn $\ell_i = d(p_{i+1}, p_{i+2})$ für alle i.

2.40. Bemerkung.
(1) Es reicht im allgemeinen selbst bei einem kürzesten Dreieck nicht, nur die Eckpunkte p_1, p_2, p_3 anzugeben, da es zwischen ihnen mehrere kürzeste Geodätische geben kann.
(2) In einem kürzesten Dreieck gilt die Dreiecksungleichung $\ell_i \leq \ell_{i+1} + \ell_{i+2}$, in einem beliebigen geodätischen Dreieck kann sie aber verletzt sein.

Wir haben im letzten Semester bereits kürzeste Dreiecke in den Räumen M^n_κ für $\kappa \in \{1, 0, -1\}$ betrachtet. Für beliebige κ behelfen wir uns mit Skalierungsüberlegungen wie im Beweis von Proposition 1.133; den Seitencosinussatz in M^n_κ haben wir in den Übung 1 von Blatt 13 kennengelernt.

2.41. Beispiel. Wir betrachten Beispiele von Dreiecken, um die oben skizzierte Aussage des Satzes von Toponogov zu verstehen.

(1) Auf dem Zylinder $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \times \{0\}$ betrachte ein Dreieck mit den Eckpunkten $p_1 = [x_1, y_1]$, $p_2 = [x_2, y_2]$ und $p_3 = [0, 0]$ mit $0 < x_1 < x_2$ und x_1, $x_2 - x_1$ und $1 - x_2 < \frac{1}{2}$. Dann ist die Seite c_1 von p_2 nach p_3 kürzer als die eines Dreiecks mit den gleichen Koordinaten in $\mathbb{R}^2$, folglich ist der Winkel im Vergleichsdreieck kleiner, und das selbst bei konstanter Schnittkrümmung $K = \kappa$. Wir können also nicht wie im Satz 2.5 von Rauch die Ungleichungszeichen bei Voraussetzung und Abschätzung umdrehen. Für „kleine" Dreiecke gilt so eine Abschätzung immerhin, siehe Aufgabe 1 von Blatt 10.

(2) Wir wollen jetzt nur noch verlangen, dass c_1 und c_2 kürzeste Geodätische sind. Dazu betrachten wir etwa auf $\mathbb{R}P^2$ ein Dreieck, dass sich auf S^2 wie folgt beschreiben lässt. Wähle auf dem Äquator zwei Punkte p_1, p_2 im Abstand $d < \frac{\pi}{2}$. Es sei p_3 ein Punkt auf der Nordhalbkugel mit

$$\frac{\pi - d}{2} < d(p_1, p_3) = d(p_2, p_3) < \frac{\pi}{2} \; .$$

Wir betrachten die Bilder dieser Punkte in $\mathbb{R}P^2$ und wählen für c_1, c_2 die jeweils kürzesten Geodätischen, für c_3 hingegen die Geodätische der Länge $\pi - d$. Dann sind die Winkel γ_1, γ_2 stumpf. Im Vergleichsdreieck können die Winkel $\bar\gamma_1$, $\bar\gamma_2$ beliebig klein werden für $d(p_1, p_3) = d(p_2, p_3) \to \frac{\pi - d}{2}$. Auf der anderen Seite kann es passieren, dass $\bar\gamma_3 > \gamma_3$. Wir werden sehen, dass das daran liegt, dass c_3 keine kürzeste Geodätische ist.

(3) Es sei jetzt $M = S^n = M^n_\kappa$ die runde Sphäre mit $K = \kappa = 1$. Es seien p_2 und $p_3 = -p_2$ Antipoden und $p_1 \in S^n$ ein beliebiger weiterer Punkt. Dann bilden die Seiten c_2 und c_3 zusammen einen Halbkreisbogen, insbesondere gilt $\gamma_1 = \pi$. Für c_1 dürfen wir einen beliebigen Halbkreisbogen zwischen p_2 und p_3 wählen, dann folgt $\gamma_2 = \gamma_3$ und $\ell_1 = \pi = \ell_2 + \ell_3$. Jede andere Wahl von c_1 liefert ein Vergleichsdreieck, dessen Winkel bei p_2, p_3 durchaus kleiner als $\gamma_2 = \gamma_3$ werden können. Wir werden also im Satz von Toponogov bei der Wahl des Vergleichsdreiecks unter Umständen etwas aufpassen müssen.

Wir formulieren jetzt den Satz von Toponogov, der einen älteren Satz von Alexandrov verallgemeinert. Der Beweis wird den Rest dieses Abschnitts in Anspruch nehmen. Größen im Vergleichsdreieck in M^n_κ werden mit dem gleichen Symbol bezeichnet wie die entsprechenden Größen im Originaldreieck in M und zusätzlich mit einem Querstrich versehen.

2.42. Satz (Alexandrov, Toponogov). *Es sei (M, g) vollständige Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \geq \kappa$, und es sei $\Delta c_1 c_2 c_3$ ein Dreieck in M mit kürzesten Seiten c_1 und c_2, und mit $\ell_3 \leq \ell_1 + \ell_2$, und $\ell_3 \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ falls $\kappa > 0$. Dann existiert ein Vergleichsdreieck $\Delta \bar c_1 \bar c_2 \bar c_3$ in M^n_κ mit den gleichen Seitenlängen $\bar\ell_i = \ell_i$ und Winkeln $\bar\gamma_1 \leq \gamma_1$ und $\bar\gamma_2 \leq \gamma_2$.*

Wenn alle drei Seiten kürzeste Geodätische sind und das Vergleichsdreieck bis auf Isometrie eindeutig bestimmt ist, erhalten wir offensichtlich auch noch $\bar\gamma_3 \leq \gamma_3$. Wir beginnen mit einigen Hilfsaussagen, bevor wir weiter unten den Satz beweisen.

2.43. Bemerkung. Es sei (M, g) vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, $K \subset M$ kompakt und $r > 0$. Wir erinnern uns an die Taylorentwicklung der Metrik $g^{\exp_p^{-1}}$ in Normalkoordinaten um p aus Proposition 1.84. Für $p \in K$ und v, $w \in T_pM$ mit $0 < \|v\| \leq r$ betrachte den Ausdruck

$$\frac{\big|\|d_v \exp_p w\| - \|w\|\big|}{\|v\|^2 \, \|w\|} = \frac{\Big|\sqrt{g_v^{\exp_p^{-1}}(w, w)} - \|w\|\Big|}{\|v\|^2 \, \|w\|} = \frac{\big|\|w\| \, \sqrt{1 + O(v^2)} - \|w\|\big|}{\|v\|^2 \, \|w\|} = O\big(\|v\|^0\big)$$

für kleine v; dieser Ausdruck ist also auch für sehr kleine v beschränkt.

Aufgrund der Kompaktheit der Menge

$$\big\{\, (p, v) \in TM \;\big|\; p \in K,\, v \in T_pM \text{ mit } \|v\| \leq r \,\big\}$$

existiert also eine Zahl ϑ mit

$$\Big|\big\|d_v \exp_p w\big\| - \|w\|\Big| \leq \vartheta\, \|v\|^2\, \|w\|$$

für alle $p \in K$ und v, $w \in T_pM$ mit $\|v\| \leq r$. Daraus schließen wir folgendes.

(1) Für alle $0 < \varepsilon \leq r$, alle $p \in K$ und alle Kurven $\gamma\colon [0,1] \to B_\varepsilon(0_p)$ gilt

$$\big|L(\exp_p \circ \gamma) - L(\gamma)\big| \leq \varepsilon^2 \vartheta\, L(\gamma)\ .$$

Dazu integrieren wir obige Abschätzung über γ.

(2) Es sei $p \in M$ und q_i eine Folge von Punkten in M, die gegen p konvergiert, und es seien v_i, $w_i \in T_{q_i}M$ Folgen von Vektoren, die für $i \to \infty$ gegen 0_p konvergieren. Dann folgt

$$d\big(\exp_{q_i}(v_i), \exp_{q_i}(w_i)\big) = \|v_i - w_i\|_{q_i}\, \Big(1 + O\big((\|v_i\| + \|w_i\|)^2\big)\Big)\ ,$$

indem wir (1) zum einen auf die Strecke von v_i nach w_i in $T_{q_i}M$ anwenden, und zum anderen auf die kürzeste Verbindung in M, die einen Ball um q_i mit Radius $\|v_i\| + \|w_i\|$ nicht verlässt, siehe Bemerkung 2.10.

2.44. Proposition. *Es sei $\Delta c_1c_2c_3$ ein Dreieck in M mit einer kürzesten Seite c_2, wobei p_3 nicht auf der Seite c_3 liege. Es sei $t_i \in (0,1)$ eine Folge mit $t_i \searrow 0$ für $i \to \infty$, es seien $b_i\colon [0,1] \to M$ kürzeste Geodätische von p_3 nach $q_i = c_3(t_i)$, und es sei α_i der Winkel bei q_i im Dreieck $\Delta c_1 b_i c_3|_{[t_i,1]}$. Dann konvergiert die Folge α_i gegen einen Winkel $\alpha_\infty \leq \gamma_1$.*

Auf der anderen Seite können die einzelnen α_i durchaus größer sein als der Winkel γ_1, wie man an einem Bild leicht erkennt.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass kein Häufungspunkt α_∞ der Folge α_i größer als γ_1 ist. Sei etwa α_∞ ein Häufungspunkt, dann können wir eine Teilfolge i_j auswählen, so dass die Winkel α_{i_j} gegen α_∞ und die Geodätischen b_{i_j} gegen eine kürzeste Geodätische b_∞ von p_3 nach p_1 konvergieren. Indem wir c_2 durch b_∞ ersetzen, sehen wir, dass α_∞ der größte Häufungspunkt sein muss, aber das gilt natürlich für jeden Häufungspunkt, also kann es nur einen Häufungspunkt geben. Da alle α_i im kompakten Intervall $[0,\pi]$ liegen, folgt, dass α_i gegen α_∞ konvergiert.

Wir fixieren eine große Konstante $1 \ll \tau \in \mathbb{R}$. Für $i \to \infty$ konvergiert $L(b_i) \to \ell_2 > 0$ und $q_i \to p_1$, folglich gilt $\tau\, d(p_1,q_i) \leq L(b_i)$ für alle hinreichend großen i. Wir konstruieren Punkte

$$\begin{array}{llll} & r_i \text{ auf } b_i & \text{mit} & d(r_i,q_i) = \tau\, d(p_1,q_i) \\ \text{und} & s_i \text{ auf } c_2 & \text{mit} & d(s_i,p_1) = d(r_i,p_1)\ . \end{array}$$

Für $i \to \infty$ können wir Bemerkung 2.43 (2) auf die Urbilder von p_1, r_i in $T_{q_i}M$ unter $\exp_{q_i}$ anwenden, und erhalten mit dem Cosinussatz der euklidischen Geometrie, dass

$$\begin{aligned} d(p_1,s_i)^2 &= d(p_1,r_i)^2 \\ &= d(p_1,q_i)^2 + d(q_i,r_i)^2 - 2d(p_1,q_i)\, d(q_i,r_i)\, \cos(\pi - \alpha_i) + \varepsilon_i\, d(q_i,r_i)^2 \\ &= d(p_1,q_i)^2\, \big(1 + \tau^2 + 2\tau\, \cos\alpha_i + \varepsilon_i \tau^2\big)\ , \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon_i \to 0$ für $i \to \infty$.

Genauso verfahren wir mit den Urbildern der Punkte q_i und s_i in $T_{p_1}M$ unter $\exp_{p_1}^{-1}$, und erhalten

$$\begin{aligned} d(q_i,s_i)^2 &= d(p_1,q_i)^2 + d(p_1,s_i)^2 - 2d(p_1,q_i)\, d(p_1,s_i)\, \cos\gamma_1 + \varepsilon_i'\, d(p_1,s_i)^2 \\ &= d(p_1,q_i)^2 + d(p_1,q_i)^2\, \big(1 + \tau^2 + 2\tau\, \cos\alpha_i + \varepsilon_i\tau^2\big)\, (1 + \varepsilon_i') \\ &\qquad - 2\, d(p_1,q_i)^2\, \cos\gamma_1\, \sqrt{1 + \tau^2 + 2\tau\, \cos\alpha_i + \varepsilon_i\tau^2} \\ &= d(p_1,q_i)^2\, \Big(2 + \tau^2 + 2\tau\, \cos\alpha_i - 2\, \cos\gamma_1\, \sqrt{1 + \tau^2 + 2\tau\, \cos\alpha_i} + \varepsilon_i''\tau^2\Big)\ , \end{aligned}$$

wobei ε_i' und ε_i'' weitere Nullfolgen sind.

Mehrfaches Anwenden der Dreiecksungleichung liefert

$$\begin{aligned} d(p_1,r_i)+d(r_i,p_3) &\geq d(p_1,p_3)=d(p_1,s_i)+d(s_i,p_3) \qquad \Longrightarrow \qquad d(r_i,p_3)\geq d(s_i,p_3)\ , \\ d(q_i,s_i)+d(s_i,p_3) &\geq d(q_i,p_3)=d(q_i,r_i)+d(r_i,p_3)\ , \\ \text{also} \qquad d(q_i,s_i) &\geq d(q_i,r_i)+d(r_i,p_3)-d(s_i,p_3) \\ &\geq d(q_i,r_i)=\tau\, d(p_1,q_i)\ . \end{aligned}$$

Wir kombinieren das mit der obigen Gleichung und erhalten

$$d(p_1,q_i)^2\left(2+\tau^2+2\tau\,\cos\alpha_i-2\,\cos\gamma_1\sqrt{1+\tau^2+2\tau\,\cos\alpha_i}+\varepsilon_i''\tau^2\right)=d(q_i,s_i)\geq\tau^2\,d(p_1,q_i)^2\ .$$

Nach Division durch 2τ folgt im Limes $i\to 0$, dass

$$\frac{1}{\tau}+\cos\alpha_\infty-\cos\gamma_1\sqrt{1+\frac{1}{\tau^2}+\frac{2}{\tau}\,\cos\alpha_i}\geq 0$$

für alle $\tau\in\mathbb{R}$. Im Limes $\tau\to\infty$ gilt wegen γ_i, $\alpha_\infty\in[0,\pi]$ also

$$\cos\alpha_\infty\geq\cos\gamma_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_\infty\leq\gamma_1\ . \quad \square$$

2.45. Bemerkung. Den meisten elementargeometrischen Überlegungen hier liegt der Seitencosinussatz für M^n_κ zugrunde. Im Dreieck $\Delta\bar c_1\bar c_2\bar c_3$ in M^n_κ gilt je nachdem, ob $\kappa>0$, $\kappa=0$ oder $\kappa<0$, dass

$$\begin{aligned} \cos\bigl(\sqrt{\kappa}\,\bar\ell_3\bigr) &= \cos\bigl(\sqrt{\kappa}\,\bar\ell_1\bigr)\,\cos\bigl(\sqrt{\kappa}\,\bar\ell_2\bigr)+\sin\bigl(\sqrt{\kappa}\,\bar\ell_1\bigr)\,\sin\bigl(\sqrt{\kappa}\,\bar\ell_2\bigr)\,\cos\bar\gamma_3\ , \\ \bar\ell_3^2 &= \bar\ell_1^2+\bar\ell_2^2-2\,\bar\ell_1\,\bar\ell_2\,\cos\bar\gamma_3\ , \\ \text{bzw.} \qquad \cosh\bigl(\sqrt{-\kappa}\,\bar\ell_3\bigr) &= \cosh\bigl(\sqrt{-\kappa}\,\bar\ell_1\bigr)\,\cosh\bigl(\sqrt{-\kappa}\,\bar\ell_2\bigr)-\sinh\bigl(\sqrt{-\kappa}\,\bar\ell_1\bigr)\,\sinh\bigl(\sqrt{-\kappa}\,\bar\ell_2\bigr)\,\cos\bar\gamma_3\ , \end{aligned}$$

siehe Übung 1 von Blatt 12. In jedem Fall hängt die Seitenlänge $\bar\ell_3$ bei festgehaltenen Längen $\bar\ell_1$ und $\bar\ell_2$ streng monoton vom Winkel $\bar\gamma_3$ ab, außer im Fall $\kappa>0$ und $\bar\ell_1=\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ oder $\bar\ell_2=\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$.

Wir können ein (kürzestes) Vergleichsdreieck in M^n_κ mit vorgegebenen Seitenlängen $\bar\ell_1$, $\bar\ell_2$, $\bar\ell_3$ im Fall $\kappa\leq 0$ konstruieren, wenn diese Zahlen alle Dreiecksungleichungen erfüllen. Im Falle $\kappa>0$ benötigt man zusätzlich noch die Annahme

$$\bar\ell_1+\bar\ell_2+\bar\ell_3\leq\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}\ .$$

Aus ihr folgt mit der Dreiecksungleichung auch

$$\bar\ell_1\leq\frac{\bar\ell_1+\ell_2+\ell_3}{2}\leq\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\ , \qquad \bar\ell_2\leq\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \qquad \text{und} \qquad \bar\ell_3\leq\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\ .$$

Diese Folgerungen besagen, dass kürzeste Geodätische nicht länger als $\operatorname{diam}M^n_\kappa=\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ sein können. Analog folgt aus

$$\bar\ell_1+\bar\ell_2+\bar\ell_3<\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$$

auch

$$\bar\ell_1<\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\ , \qquad \bar\ell_2<\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \qquad \text{und} \qquad \bar\ell_3<\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\ ,$$

und in diesem Fall ist das Vergleichsdreieck bis auf Isometrie eindeutig.

Zur Begründung der obigen Behauptung betrachten wir den Fall $\kappa=1$. Falls $\ell_1=0$, so folgt $\ell_2=\ell_3\in[0,\pi]$; falls $\ell_1=\pi$, dann folgt $\ell_3=\pi-\ell_2\in[0,\pi]$; analoges gilt, falls $\ell_2\in\{0,\pi\}$ oder $\ell_3\in\{0,\pi\}$, alle diese Sonderfälle passen zu den obigen Bedingungen.

Ansonsten seien ℓ_1, $\ell_2 \in (0, \pi)$, dann können wir das Dreieck $\Delta\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3$ konstruieren, sobald den Winkel $\bar{\gamma}_3$ bestimmt haben. Nach obigem gilt

$$\cos\bar{\gamma}_3 = \frac{\cos\bar{\ell}_3 - \cos\bar{\ell}_1\,\cos\bar{\ell}_2}{\sin\bar{\ell}_1\,\sin\bar{\ell}_2}\ .$$

Das ist lösbar, wenn die rechte Seite in $[-1, 1]$ liegt, wenn also

$$\pm(\cos\bar{\ell}_3 - \cos\bar{\ell}_1\,\cos\bar{\ell}_2) \le \sin\bar{\ell}_1\,\sin\bar{\ell}_2\ ,$$

$$\text{d.h., wenn} \qquad \cos(\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2) \le \cos\bar{\ell}_3 \le \cos(\bar{\ell}_1 - \bar{\ell}_2)\ .$$

Aufgrund der Symmetrien der Cosinusfunktion und da $\bar{\ell}_1$, $\bar{\ell}_2$, $\bar{\ell}_3 \in [0, \pi]$, ist die erste Ungleichung äquivalent zu

$$\bar{\ell}_3 \le \bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2 \qquad \text{und} \qquad \bar{\ell}_3 \le 2\pi - \bar{\ell}_1 - \bar{\ell}_2\ ,$$

und die zweite zu

$$\bar{\ell}_3 \ge \bar{\ell}_2 - \bar{\ell}_1 \qquad \text{und} \qquad \bar{\ell}_3 \ge \bar{\ell}_1 - \bar{\ell}_2\ ,$$

aber das sind genau die oben genannten Bedingungen im Falle $\kappa = 1$.

2.46. Bemerkung. Wir betrachten zwei aneinanderstoßende Dreiecke in M^2_κ mit den Eckpunkten p, q, s beziehungsweise q, r, s. Es gelte $d(p,q)+d(q,r) \le d(p,s)+d(s,r)$, und $\angle pqs+\angle sqr \le \pi$. Elementargeometrische Überlegungen liefern folgendes.

(1) Es gilt auch $\angle psq + \angle qsr \le \pi$. Im Falle $\kappa \le 0$ würden andernfalls q und s auf der gleichen Seite der Geodätischen durch p und r liegen, und das steht im Widerspruch zur Annahme $d(p,q) + d(q,r) \le d(p,s) + d(s,r)$. Im Falle $\kappa > 0$ überlegt man sich zunächst, das die kürzeste Geodätische von p nach r auf der selben Seite der Geodätischen durch p und q liegt wie r und umgekehrt, und zwar da $\angle pqs+\angle sqr \le \pi$. Anschließend argumentiert man weiter wie im Fall $\kappa \le 0$.

(2) Es sei $r' \in M^2_\kappa$ ein Punkt mit $d(r',s) = d(r,s)$ und $d(r',p) = d(p,q) + d(q,r)$. Dann gilt $\angle qps \ge \angle r'ps$ und $\angle qrs \ge \angle pr's$. Um die erste Aussage zu zeigen, betrachten wir zunächst den Punkt r'' auf der Fortsetzung der Geodätischen durch p, q mit $d(q,r'') = d(q,r)$, mithin $d(p,r'') = d(p,r')$. Aus dem Seitencosinussatz und der Voraussetzung an die Winkel bei q folgt $d(r'',s) \ge d(r,s)$. Wiederum aus dem Seitencosinussatz folgt

$$\angle qps = \angle r''ps \ge \angle r'ps\ .$$

Die zweite Aussage folgt analog, wenn man die Punkte p und r' gemeinsam so um s dreht, dass r' auf r zu liegen kommt.

Im Beweis werden die obigen Überlegungen und Proposition 2.44 benutzt, um den Satz von Toponogov von zwei Teildreiecken auf das ganze Dreieck zu übertragen. Dazu sei $\Delta c_1c_2c_3$ wie im Satz gegeben, insbesondere sind c_1, c_2 kürzeste Geodätische. Es sei $p' = c_3(t)$ für $t \in (0,1)$, es sei a' eine kürzeste Geodätische von p' nach p_3, und es sei b' Limes einer Folge kürzester Geodätischer von p_3 nach $c_3(t_i)$, wobei $t_i \searrow t$. Es seien α', β' die Winkel bei p' in den Dreiecken $\Delta a'c_2c_3|_{[0,t]}$ und $\Delta c_1b'c_3|_{[t,1]}$.

Wir setzen die Vergleichsdreiecke Δpqs und Δqrs in M^2_κ wie oben aneinander. Die obigen Voraussetzungen sind erfüllt, denn nach den Voraussetzungen im Satz 2.42 und Proposition 2.44 gilt

$$d(p,q) + d(q,r) = L(c_3|_{[0,t]}) + L(c_3|_{[t,1]}) = \ell_3 \le \ell_1 + \ell_2 = d(r,s) + d(p,s)$$

$$\text{und} \qquad \angle pqs + \angle sqr \le \alpha' + \beta' \le \pi\ .$$

Das oben konstruierte Dreieck mit den Ecken p, r', s ist das Vergleichsdreieck für $\Delta c_1c_2c_3$. Wenn für $\Delta a'c_2c_3|_{[0,t]}$ und $\Delta c_1b'c_3|_{[t,1]}$ der Satz von Toponogov gilt, dann folgt aus den obigen Überlegungen insbesondere

$$\begin{aligned} &\bar\gamma_1 = \angle r'ps \geq \angle qps \geq \gamma_1 \\ \text{und} \qquad &\bar\gamma_2 = \angle pr's \geq \angle qrs \geq \gamma_2 \;. \end{aligned}$$

Über die Winkel γ_3 und $\bar\gamma_3$ können wir jeoch keine Aussage machen.

Im folgenden Beweis sind alle Kurven durch $[0,1]$ parametrisiert, solange nicht anders angegeben. Gelegentlich tritt $\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ als obere Schranken für gewisse Größen auf, falls $\kappa \geq 0$. Im Fall $\kappa \leq 0$ werden keine oberen Schranken benötigt. Um den Beweis übersichtlicher zu halten, legen wir hiermit fest, dass $\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} = \infty$ falls $\kappa \leq 0$.

Beweis des Satzes 2.42. Im Verlauf des Beweises werden wir der Reihe nach immer „größere“ Dreiecke betrachten.

(a) *Kleine Dreiecke,* vgl. Übung 2 von Blatt 12. Es sei $\Delta c_1c_2c_3$ ein Dreieck in M, so dass ein Vergleichsdreieck $\Delta\bar c_1\bar c_2\bar c_3$ in M^n_κ mit den gleichen Seitenlängen existiert. Es sei $\Delta\bar c_1'\bar c_2'\bar c_3$ in M^n_κ ein weiteres Dreieck mit $\bar p_1' = \bar p_1$, $\bar p_2' = \bar p_2$ und

$$L(\bar c_2') = L(c_2) \qquad \text{und} \qquad \bar\gamma_1' := \angle_{\bar p_1}(-\dot{\bar c}_2'(1), \dot{\bar c}_3(0)) = \gamma_1 \;.$$

Wir nehmen an, dass $\Delta c_1c_2c_3$ in folgendem Sinne *klein* bei p_1 ist: die Seite c_1 ist kürzeste und es existiere eine sternförmige Menge $U \subset T_{p_1}M$ mit $-\dot c_2(1)$, $\dot c_3(0) \in U$, auf der $\exp_{p_1}$ lokal invertierbar ist, und eine lineare Isometrie

$$\Phi\colon T_{p_1}M \to T_{\bar p_1}M^n_\kappa \qquad \text{mit} \qquad \Phi(-\dot c_2(1)) = -\dot{\bar c}_2'(1) \qquad \text{und} \qquad \Phi(\dot c_3(0)) = \dot{\bar c}_3(0) \;,$$

so dass $\bar c_1'$ ganz in $\exp_{\bar p_1}(\Phi(U))$ verläuft. Diese „kleinen“ Dreiecke können bereits bedeutend größer sein als die aus Übung 2 von Blatt 12, da hier der konjugierte Radius von p_1 und nicht der Injektivitätsradius die entscheidende Rolle spielt.

Hierzu ist folgendes zu bemerken.

(1) Nach dem Satz 2.5 von Rauch ist die Entfernung von p_1 auf einer Geodätischen bis zum ersten konjugierten Punkt höchstens so groß wie in M^n_κ. Folglich ist $\exp_{\bar p_1}$ auf $\Phi(U)$ ebenfalls lokal invertierbar, es folgt

$$U \subset B_{\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}}(0_p) \;,$$

was die Ausnahmefälle $L(\bar c_2') = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ und $L(\bar c_3) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ in Bemerkung 2.45 aussschließt.

(2) Im Modellraum M^n_κ ist $\exp_{\bar p_1}$ auf $\Phi(U)$ injektiv, es existiert also eine eindeutige Kurve

$$\exp_{\bar p_1}^{-1} \circ \bar c_1' \colon [0,1] \to \Phi(U) \subset T_{\bar p_1}M^n_\kappa \;.$$

(3) Diese Kurve verläuft in dem von $-\dot{\bar c}_2'(1)$ und $\dot{\bar c}_3(0)$ aufgespannten, maximal zweidimensionalen Unterraum von $T_{\bar p_1}M^n_\kappa$. Insbesondere hängt die Kurve

$$c_1' = \exp_{p_1} \circ \Phi^{-1} \circ \exp_{\bar p_1}^{-1} \circ \bar c_1' \colon [0,1] \to M$$

nicht von der Wahl von Φ ab.

Im Dreieck $\Delta\bar c_1'\bar c_2'\bar c_3$ gilt wegen Folgerung 2.6, dass

$$L(\bar c_1') = L\big(\bar c_1'\big) \geq L\big(\exp_{p_1} \circ \Phi^{-1} \circ \exp_{\bar p_1}^{-1} \circ \bar c_1'\big) \geq L(c_1) = L(\bar c_1) \;,$$

denn wir hatten c_1 als kürzeste Geodätische vorausgesetzt. Da bei konstanten Seitenlängen $L(\bar c_2')$ und $L(\bar c_3)$ die Länge $L(\bar c_1')$ nach Bemerkung 2.45 streng monoton steigend vom Winkel $\bar\gamma_1'$ bei $\bar p_1$ abhängt, folgt

$$\bar\gamma_1 \leq \bar\gamma_1' = \gamma_1 \;.$$

(*b*) *Lange, schmale Dreiecke.* Wir betrachten ein Dreieck $\Delta c_1 c_2 c_3$ in M vom Umfang

$$L(c_1) + L(c_2) + L(c_3) < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} .$$

Wie in Proposition 2.44 seien $q_i = c_3(t_i)$ Punkte mit $t_i \searrow 0$, also $q_i \to p_1$ für $i \to \infty$. Wir dürfen daher annehmen, dass $c_3|_{[0,t_i]}$ für alle i eine kürzeste Geodätische ist. Weiterhin seien a_i kürzeste Geodätische von q_i nach p_3, die wie im Beweis der Proposition 2.44 gegen eine kürzeste Geodätische a_∞ von p_1 nach p_3 konvergieren. Wir nehmen außerdem an, dass $a_\infty(t) = c_2(1-t)$ für alle $t \in [0,1]$. Denn andernfalls könnten wir c_2 durch $a_\infty(1-\,\cdot\,)$ ersetzen, wodurch der Winkel γ_1 nach Proposition 2.44 durch einen kleineren Winkel ersetzt wird.

Jetzt wollen wir zeigen, dass für alle hinreichend großen i alle Winkel im Dreieck $\Delta a_i c_2 c_3|_{[0,t_i]}$ nicht kleiner sind als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichssdreieck mit den gleichen Seitenlängen in M^n_κ. Dabei unterstellen wir insbesondere, dass ein eindeutiges Vergleichsdreieck existiert. Das ist aber der Fall, denn im Dreieck $\Delta c_1 a_i(1-\,\cdot\,) c_3|_{[t,1]}$ sind a_i und c_1 kürzeste, also gilt die Dreiecksungleichung

$$L(c_3|_{[t,1]}) \geq d(c_3(t_1), p_2) \geq L(c_1) - L(a_i) .$$

Aus der Dreiecksungleichung für das ursprünglich Dreieck $\Delta c_1 c_2 c_3$ schließen wir

$$L(c_3|_{[0,t]}) = L(c_3) - L(c_3|_{[t,1]}) \leq L(c_1) + L(c_2) - L(c_1) + L(a_i) = L(c_2) + L(a_i)$$

$$\text{und} \qquad L(a_i) + L(c_2) + L(c_3|_{[0,t]}) \leq L(c_1) + L(c_3|_{[t,1]}) + L(c_2) + L(c_3|_{[0,t]}) < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$$

falls $\kappa > 0$. Die anderen beiden Dreiecksungleichungen folgen wie oben, da a_i und c_2 kürzeste Geodätische sind. Wegen Bemerkung 2.45 existiert also ein bis auf Isometrie eindeutiges Vergleichsdreieck $\Delta \bar{a} \bar{c}_2 \bar{c}_3'$ zu $\Delta a c_2 c_3|_{[0,t]}$.

Die Vereinigung K der Seiten c_2, c_3 und aller a_i ist kompakt, es folgt $\rho := \inf_{p \in K} \rho(p) > 0$. Für $\varepsilon > 0$ klein genug gilt

$$p' := c_2(1-\varepsilon) \in B_{\frac{\rho}{4}}(p_1) \qquad \text{und} \qquad q_i' := a_i(\varepsilon) \in B_{\frac{\rho}{4}}(q_i) .$$

Außerdem konvergiert $q_i' \to p'$ für $i \to \infty$. Es sei c_i' die kürzeste Geodätische von p' nach q_i'; diese ist für alle (hinreichend großen) i eindeutig.

Da c_2 und alle a_i kürzeste Geodätische sind, ist p' wegen Proposition 1.110 längs c_2 weder zu p_1 noch zu p_3 konjugiert, und q_i' längs a weder zu p_3 noch zu q_i. Folglich existiert ein $\varepsilon' > 0$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) an allen Punkten in $T_{p'}M$ im Abstand $< \varepsilon'$ von $\exp_{p'}^{-1}(c_2)$ ist $\exp_{p'}$ lokal invertierbar;
(2) an allen Punkten in $T_{q_i'}M$ im Abstand $< \varepsilon'$ von $\exp_{q_i'}^{-1}(a_i)$ ist $\exp_{q_i'}$ lokal invertierbar; und
(3) an allen Punkten in $T_{p_3}M$ im Abstand $< \varepsilon'$ von $\exp_{p_3}^{-1}\bigl(c_2|_{[0,1-\varepsilon]} \cup \bigcup_i a_i|_{[\varepsilon,1]}\bigr)$ ist $\exp_{p_3}$ lokal invertierbar.

Für alle (hinreichend großen) i sind daher die folgenden Schlüsse möglich.

Das Dreieck mit den Ecken p', q_i' und p_3 ist klein um jeden seiner Punkte im Sinne von Schritt (*a*), folglich sind seine Winkel nicht kleiner als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichsdreieck in M^n_κ mit gleichen Seitenlängen. Das gleiche gilt für das Dreieck mit den Ecken p_1, q_i' und p'. Damit sind nach Bemerkung 2.46 die Winkel bei p_1 und p_3 im Dreieck mit der Seite c_2 und gegenüberliegender Ecke q_i' ebenfalls nicht kleiner als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichsdreieck in M^n_κ.

Dieses Dreieck ist aber auch klein um q_i' für (hinreichend große) i, da die Vergleichsdreiecke gegen ein entartetes Dreieck vom Umfang kleiner $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ konvergieren, und daher die Strecke $\Phi^{-1} \circ \exp_{\bar{p}_1}^{-1} \bar{c}_1'$ im Beweis von (*a*) für große i in einer Teilmenge von $T_{q_i'}M$ verläuft, auf der $\exp_{q_i'}$ lokal invertierbar ist. Also ist auch der Winkel bei q_i' im Dreieck mit der Seite c_2 und gegenüberliegender Ecke q_i' ebenfalls nicht kleiner als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichsdreieck in M^n_κ.

Schließlich gilt das gleiche auch für das Dreieck mit den Ecken p, q_i und q_i'. Wieder nach nach Bemerkung 2.46 sind die Winkel bei q_1' und p_3 im Dreieck $\Delta a_1 c_2 c_3|_{[0,t_i]}$ nicht kleiner als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichsdreieck in M^n_κ.

Wir können aber auch spiegelbildlich argumentieren, indem wir die Rollen von p_1 und q_i sowie von p' und q_i' vertauschen, und erhalten die entsprechende Aussage dann auch für den Winkel bei p_1.

Wir fassen zusammen. Sei $\Delta c_1 c_2 c_3$ ein Dreieck wie im Satz 2.42 und vom Umfang $< \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Dann existiert $t > 0$ und eine kürzeste Verbindung a von $c_3(t)$ nach p_3, so dass die Winkel bei p_1 und p_3 im Dreieck $\Delta a c_2 c_3|_{[0,t]}$ nicht kleiner als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichsdreieck in M^n_κ mit gleichen Seitenlängen sind.

(c) *Dreiecke von kleinem Umfang.* Wir nehmen wieder an, dass der Umfang von $\Delta c_1 c_2 c_3$ kleiner als $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ ist, und dass c_1 und c_2 kürzeste Geodätische sind.

Wir wollen die Behauptung des Satzes für den Winkel γ_1 beweisen, dazu definieren wir eine Menge

$$I := \left\{ t \in (0,1) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Es gibt eine kürzeste Geodätische } a \text{ von } c_3(t) \text{ nach } p_3\text{, so dass die Winkel} \\ \text{bei } p_1 \text{ und } c_3(t) \text{ im Dreieck } \Delta a c_2 c_3|_{[0,t]} \text{ nicht kleiner ist als die entsprechen-} \\ \text{den Winkel in einem Vergleichsdreieck in } M^n_\kappa \text{ mit gleichen Seitenlängen.} \end{array} \right\} .$$

Wie in Schritt (b) schließen wir, dass alle Dreiecke $\Delta a c_2 c_3|_{[0,t]}$ in der Definition von I tatsächlich eindeutige Vergleichsdreiecke besitzen.

Wegen Schritt (b) ist die Menge I nicht leer, falls $c_2(1 - \cdot)$ Limes von kürzesten Verbindungen von $c_3(t_i)$ nach p_3 für $t_i \to 0$ ist. Aber wegen Proposition 2.44 ist diese Voraussetzung nicht nötig, solange uns der Winkel bei p_3 nicht interessiert. Somit ist I nicht leer.

Es gilt $\sup I \in I$, denn für eine geeignete Folge $t_i \nearrow t_\infty := \sup I$ konvergieren die kürzesten Geodätischen a_i von $c_3(t_i)$ nach p_3 gegen eine kürzeste Geodätische a_∞ von $c_3(t_\infty)$ nach p_3. Gleichzeitig konvergieren auch die Seitenlängen und Winkel der Dreiecke $\Delta a_i c_2 c_3|_{[0,t_i]}$ gegen die des Dreiecks $\Delta a_\infty c_2 c_3|_{[0,t_\infty]}$. Insbesondere ist die Dreiecksungleichung im Limes noch erfüllt, und der Umfang bleibt mit dem Argument aus Schritt (b) kleiner als $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$, so dass die Vergleichsdreiecke in M^n_κ für $\Delta a_i c_2 c_3|_{[0,t_i]}$ mit gemeinsamer Seite $\bar{c}_2$ gegen ein Vergleichdreieck für $\Delta a_\infty c_2 c_3|_{[0,t_\infty]}$ konvergieren. Im Limes sind die Winkel bei p_1 und $c_3(t_\infty)$ ebenfalls nicht kleiner als die Winkel in diesem Vergleichdreieck.

Wir nehmen an, dass $t_0 = \sup I < 1$ und wählen eine kürzeste Geodätische b von p_3 nach $c_3(t_0)$ als Limes einer Folge kürzester Geodätischer von p_3 nach $c_3(t_i')$, wobei $t_i' \searrow t_0$. Dann betrachten wir das Dreieck $\Delta c_1 b c_3|_{[t_0,1]}$. Wie oben existiert $t_1 \in (t_0, 1]$ und eine kürzeste Geodätische a von $c_3(t_1)$ nach p_3, so dass das Dreieck $\Delta a b c_3|_{[t_0,t_1]}$ die Dreiecksungleichung erfüllt, Umfang $< \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ besitzt, und die Winkel bei $c(t_0)$, $c(t_1)$ nicht kleiner als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichdreieck in M^n_κ mit den gleichen Seitenlängen sind. Wir können also Bemerkung 2.46 anwenden und sehen, dass die Winkel bei p_1 und $c_3(t_1)$ im Dreieck $\Delta a c_2 c_3|_{[0,t_1]}$ nicht kleiner sind als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichsdreieck in M^n_κ mit den gleichen Seitenlängen.

Der Fall $\max I < 1$ ist damit zum Widerspruch geführt. Für das Vergleichdreieck $\Delta \bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3$ mit den gleichen Seitenlängen folgt hieraus $\gamma_1 \geq \bar{\gamma}_1$, allerdings können wir über γ_2 (noch) nichts aussagen. Die entsprechende Aussage für γ_2 erhalten wir, indem wir die Rollen von p_1 und p_2 vertauschen, oder mit dem folgenden Argument. Wie oben kann man zeigen, dass es $t_i \in I$ gibt mit $t_i < 1$, $t_i \nearrow 1$, und der Satz gilt für den Winkel γ_2' bei p_2 im Dreieck $\Delta a_\infty c_2 c_3$, wobei a_∞ Häufungspunkt von kürzesten Geodätischen von $c_3(t_i)$ nach p_3 ist. Wegen Proposition 2.44 gilt der Satz dann auch für $\Delta c_1 c_2 c_3$, da $\gamma_2 \geq \gamma_2' \geq \bar{\gamma}_2$.

Also gilt der Satz für alle Dreiecke, die den Voraussetzungen des Satzes genügen und deren Umfang kleiner als $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ ist. Im Falle $\kappa \leq 0$ trifft das auf jedes Dreieck zu, und der Satz ist bewiesen.

(d) *Dreiecke von großem Umfang.* Ab jetzt gelte also $\kappa > 0$. Es sei zunächst $\Delta c_1 c_2 c_3$ wie im Satz gegeben, und es gelte

$$L(c_1) + L(c_2) + L(c_3) = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} .$$

Im Falle $L(c_3) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ folgt $L(c_1) + L(c_2) = L(c_3)$. Also finden wir ein Vergleichsdreieck $\Delta \bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3$ mit $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 0$, und der Satz ist bewiesen. Falls $\gamma_1 = \gamma_2 = \pi$, ist der Satz ebenfalls bewiesen, indem man als Vergleichsdreieck einen unterteilten Großkreis wählt.

Andernfalls gilt $L(c_3) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ und o.B.d.A. $\gamma_1 < \pi$. Wir wählen eine Folge $t_i \searrow 0$ und kürzeste Geodätische b_i von p_3 nach $c_3(t_i)$. Wegen Proposition 2.44 dürfen wir annehmen, dass die b_i gegen c_2 konvergieren. Wegen $\gamma_1 < \pi$ ist die Dreiecksungleichung im Dreieck mit den Ecken p_1, $c_3(t_i)$ und p_3 für große i strikt, und wir erhalten

$$L(c_1) + L(b_i) + L(c_3|_{[t_i,1]}) < L(c_1) + L(c_2) + L(c_3|_{[0,t_i]}) + L(c_3|_{[t_i,1]}) = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} .$$

Somit gilt der Satz für die Dreiecke $\Delta c_1 b_i c_3|_{[t_i,1]}$. Außerdem gilt

$$L(c_1) \leq \frac{L(c_1) + L(b_i) + L(c_3|_{[t_i,1]})}{2} < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} .$$

Falls auch $L(c_2) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$, so konvergieren die Vergleichsdreiecke für $i \to \infty$ gegen ein Vergleichsdreieck, dessen drei Winkel alle π sind. Insbesondere folgt $\gamma_2 = \pi$ und $\alpha_i \to \pi$, wegen Proposition 2.44 also auch $\gamma_1 = \pi$ im Widerspruch zur Annahme.

Es bleibt der Fall $L(c_2) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$, aber daraus folgt

$$L(c_1) + L(c_3) = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} - L(c_2) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} .$$

Wäre $\gamma_2 < \pi$, so könnte man den Weg von p_1 über p_2 nach p_3 zu einem Weg der Länge $< \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ abkürzen. Also muss $\gamma_2 = \pi$ gelten, da c_2 kürzeste ist. Wir können ein Vergleichsdreieck mit $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$ wählen, und der Satz ist auch in diesem Fall bewiesen.

(e) *Dreiecke von übergroßem Umfang.* Es bleibt nur der Fall $\kappa > 0$ und

$$L(c_1) + L(c_2) + L(c_3) > \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} .$$

In diesem Fall gäbe es kein Vergleichsdreieck in M^n_κ, also ist zu zeigen, dass dieser Fall nicht eintritt.

Aus dem Satz 2.5 von Rauch oder dem Satz 2.14 von Bonnet-Myers folgt

$$L(c_1) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \qquad \text{und} \qquad L(c_2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} .$$

Nach Voraussetzung gilt auch $L(c_3) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Wegen der Stetigkeit der Abstandsfunktion existiert $t \in (0,1)$ mit

$$L(c_1|_{[0,1-t]}) + d(c_1(1-t), c_3(t)) + L(c_3|_{[t,1]}) = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} .$$

Da $t > 0$ folgt

$$L(c_1|_{[0,1-t]}) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \qquad \text{und} \qquad L(c_3|_{[t,1]}) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} ,$$

also gilt $\gamma_2 = \pi$ wie in Schritt (e). Analog zeigt man auch $\gamma_1 = \pi$.

Es sei jetzt $t \in [0,1]$ minimal mit

$$L(c_1) + d(c_3(t), p_3) + L(c_3|_{[t,1]}) = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} ,$$

es sei t_i eine Folge mit $t_i \nearrow t$ und b_i eine Folge kürzester Geodätischer von p_3 nach $c_3(t_i)$. Dann haben die Dreiecke $\Delta c_1 b_i c_3|_{[t_i,1]}$ Umfang größer als $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$, folglich sind die Winkel bei $c_3(t_i)$ wie oben stets π. Daraus folgt aber, dass b_i für alle i auf der Vereinigung von c_2 und $c_3|_{[0,t_i]}$ verläuft. Analoges gilt für die kürzeste Geodätische $b := \lim_{i\to\infty} b_i$, aber $L(b) < L(c_2) + L(c_3|_{[0,t]})$. Also ist $p_3 = b(0) \neq p_1$ entweder ein innerer Punkt auf c_2, was unmöglich ist, da c_2 kürzeste ist, oder auf $c_3|_{[0,t]}$ etwa $p_3 = c_3(t')$ mit $t' > 0$. Aber das führt auf einen Widerspruch, da

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} = L(c_1) + L(b) + L(c_3|_{[t,1]}) = L(c_1) + L(c_3|_{[t',1]}) < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} .$$

Folglich können Dreiecke vom Umfang größer als $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ nicht existieren, und der Satz ist vollständig bewiesen. □

Für die Anwendung des Satzes von Toponogov benötigen wir eine Übertragung des Satzes von der Situation SSS (Seite-Seite-Seite) auf die Situation SWS (Seite-Winkel-Seite).

2.47. Folgerung. *Es sei (M,g) vollständige Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \geq \kappa$, und es sei $\Delta c_1 c_2 c_3$ ein Dreieck in M mit kürzesten Seiten c_1 und c_2, und mit $\ell_3 \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ falls $\kappa > 0$. Dann existiert ein Vergleichsdreieck $\Delta \bar c_1 \bar c_2 \bar c_3$ in M mit $\bar\gamma_1 = \gamma_1$, $\bar\ell_2 = \ell_2$ und $\bar\ell_3 = \ell_3$, und es gilt $\ell_1 \leq \bar\ell_1$.*

Beweis. Das Vergleichsdreieck existiert in der Situation SWS immer und ist bis auf Isometrie eindeutig. Wir unterscheiden zwei Fälle.

(1) Es gilt die Dreiecksungleichung $\ell_3 \leq \ell_1 + \ell_2$. In diesem Fall liefert der Satz 2.42 von Toponogov ein weiteres Vergleichsdreieck $\Delta \bar c_1' \bar c_2' \bar c_3$ mit den gleichen Seitenlängen wie $\Delta c_1 c_2 c_3$ und einem Winkel $\bar\gamma_1' \leq \gamma_1 = \bar\gamma_1$. Aus Bemerkung 2.45 folgt $\ell_1 = \bar\ell_1' \leq \bar\ell_1$.
(2) Falls die obige Dreiecksungleichung verletzt ist, folgt aus der Dreiecksungleichung im Vergleichsdreieck, dass
$$\ell_1 < \ell_3 - \ell_2 = \bar\ell_3 - \bar\ell_2 \leq \bar\ell 1 . \quad \square$$

Eine weitere interessanten Anwendung des Satzes von Toponogov war früher der topologische Sphärensatz. Wir erwähnen diesen Satz nur noch, denn mittlerweile ist der weitaus stärkere differenzierbare Spährensatz bewiesen. Bevor wir diesen formulieren, betrachten wir einen wichtigen Grenzfall.

2.48. Beispiel. Es sei (M,g) der komplex projektive Raum $\mathbb{C}P^n$ der (reellen) Dimension $2n$ mit $n \geq 2$, versehen mit der Fubini-Study-Metrik wie jeweils in den Aufgaben 3 und 4 auf Blatt 10 und 14. Wir hatten dort gesehen, dass die Schnittkrümmung die Ungleichung $1 \leq K(E) \leq 4$ für alle Ebenen $E \subset TM$ erfüllt. Dabei wird $K = 1$ angenommen für reelle Ebenen $E = \operatorname{span}\{v,w\}$ mit $w \perp \{v, iv\}$, und $K = 4$ für komplexe Ebenen $E = \operatorname{span}\{v, iv\}$. Reskalierung um den Faktor $\frac{1}{2}$ liefert eine Metrik mit $\frac{1}{4} \leq K \leq 1$.

Der komplex projektive Raum ist nicht homöomorph zur Sphäre S^{2n}; es gibt mehrere Möglichkeiten, das zu sehen — allerdings leider nicht mit den Mitteln dieser Vorlesung.

(1) Die Räume haben unterschiedliche Euler-Charakteristiken
$$\chi(\mathbb{C}P^n) = n + 1 > 2 = \chi(S^{2n}) ,$$
das folgt etwa durch Angabe von Zellzerlegungen oder aus dem Lefschetzschen Fixpunktsatz.

(2) Die Räume haben andere (Ko-) Homologiegruppen. Für $1 \leq k < n$ gilt nämlich

$$H^{2k}(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \ncong 0 = H^{2k}(S^{2n};\mathbb{Z}) .$$

Das folgt wahlweise aus der Existenz einer Morse-Funktion mit kritischen Punkten in den Geraden $0, 2, \dots, 2n$ oder einer entsprechenden Zellzerlegung von $\mathbb{C}P^n$, oder aus der Leray-Spektralsequenz für das Faserbündel $S^1 \to S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$.

(3) Die Räume haben eine unterschiedliche zweite Homotopiegruppe

$$\pi_2(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z} \ncong 0 = \pi_2(S^{2n}) .$$

Das folgt etwa aus der langen exakten Sequenz der Homotopiegruppen im Bündel $S^1 \to S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$, oder aus (1) und dem Satz von Hurewicz.

2.49. Satz (Topologischer Sphärensatz; Berger, Klingenberg). *Es sei M eine orientierbare, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$ mit Schnittkrümmung $\kappa \leq K \leq 1$, wobei $\kappa > \frac{1}{4}$. Dann ist M homöomorph zur Sphäre S^{2n}.*

Beispiel 2.48 zeigt, dass $\frac{1}{4} < \kappa$ notwendig ist. Der Satz gilt auch im ungerade-dimensionalen Fall, wenn man außerdem „orientierbar“ durch „einfach zusammenhängend“ ersetzt.

Beweis. Zunächst wissen wir aus dem Satz 2.14 von Bonnet-Myers und dem Satz 2.37 von Klingenberg, dass

$$\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}} < \pi \leq \rho(M) \leq \operatorname{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} < 2\pi .$$

Insbesondere ist M kompakt wegen Folgerung 1.100. Wir finden also Punkte $p, q \in M$ mit

$$d(p,q) = \operatorname{diam}(p,q) .$$

Da $\rho(M) \geq \pi$, erhalten wir Diffeomorphismen

$$\exp_p \colon B_\pi(0_p) \to B_\pi(p) \qquad \text{und} \qquad \exp_q \colon B_\pi(0_q) \to B_\pi(q) .$$

Wir zeigen zunächst, dass $M = B_\pi(p) \cup B_\pi(q)$, anschließend konstruieren wir den gesuchten Homöomorphismus.

Es sei $v \in T_pM \setminus \{0\}$. Wir zeigen, dass es eine kürzeste Geodätische $c \colon [0,1] \to M$ von p nach q mit $\angle_p(\dot c(0), v) \leq \frac{\pi}{2}$ gibt. Dazu betrachte die Geodätische c_v mit $c_v(0) = p$ und Startvektor $\dot c_v(0) = v$. Zu jedem $t > 0$ sei $c_t \colon [0,1] \to M$ eine kürzeste Verbindung von $c_v(t)$ nach q. Falls es eine Folge t_i gibt mit $t_i > 0$ und

$$\angle_{c_v(t_i)}(\dot c_v(t_i), \dot c_{t_i}(0)) \leq \frac{\pi}{2}$$

für alle i, so dass $t_i \searrow 0$, dann konvergiert eine Teilfolge der c_{t_i} gegen eine kürzeste Verbindung c mit

$$\angle_p(\dot c(0), v) \leq \frac{\pi}{2} .$$

Andernfalls erhalten wir einen Widerspruch wie folgt. Es gibt ein $t_0 > 0$, so dass

$$\angle_{c_v(t)}(\dot c_v(t), \dot c_t(0)) > \frac{\pi}{2} \qquad \text{für alle } t \in (0, t_0) .$$

Zu jedem $t > 0$ konstruiere eine Variation von $c_t = \gamma_0$ durch Kurven $\gamma_s \colon [0,1] \to M$ mit $\gamma_s(0) = c_v(t-s)$ und $\gamma_s(1) = q$. Aus der ersten Variationsformel aus Satz 1.64 folgt dann

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} L(\gamma_s) = \left\langle \frac{\dot c_t(0)}{\|\dot c_t(0)\|}, \dot c_v(t) \right\rangle < 0 ,$$

insbesondere existiert ein $t' \in [0,t)$, so dass

$$d(c_v(u), q) = L(c_u) \leq L(\gamma_{t-u}) < L(c_t) = d(c_v(t), q) \qquad \text{für alle } u \in (t', t) .$$

Da dieses Argument für alle $t \in (0, t_0)$ funktioniert, ist die Funktion $t \mapsto d(c_v(t), q)$ streng monoton steigend auf dem Intervall $(0, t_0)$, im Widerspruch zur Maximalität von $d(p, q) = d(c(0), q) = \operatorname{diam}(M)$.

Wir betrachten jetzt einen weiteren Punkt $r \in M \setminus B_\pi(p)$ und wählen kürzeste Geodätische a, $b\colon [0,1] \to M$ von q nach r und von r nach p. Nach dem soeben gezeigten finden wir eine kürzeste Geodätische c von p nach q mit

$$\alpha = \angle_p(-\dot b(1), \dot c(0)) \leq \frac{\pi}{2} \;.$$

Es seien $\Delta\bar a\bar b\bar c$ und $\Delta\bar a'\bar b'\bar c$ Vergleichsdreiecke in M^n_κ mit Seitenlängen

$$L(\bar b) = L(\bar b') = L(b) \in \Bigl[\pi, \frac{\pi}{\sqrt\kappa}\Bigr] \qquad \text{und} \qquad L(\bar c) = L(c) \in \Bigl[\pi, \frac{\pi}{\sqrt\kappa}\Bigr] \subset \Bigl(\frac{\pi}{2\sqrt\kappa}, \frac{\pi}{\sqrt\kappa}\Bigr]$$

und eingeschlossenen Winkeln

$$\bar\alpha = \alpha \quad \leq \quad \bar\alpha' = \frac{\pi}{2} \;.$$

Mit dem Seitencosinussatz für $\kappa > 0$ berechnen wir

$$\cos\bigl(\sqrt\kappa\, L(\bar a')\bigr) = \underbrace{\cos\bigl(\sqrt\kappa\, L(\bar b')\bigr)}_{<0} \cdot \underbrace{\cos\bigl(\sqrt\kappa\, L(\bar c)\bigr)}_{<0} > 0 \;,$$

und aus Bemerkung 2.45 und der Folgerung 2.47 aus dem Satz von Toponogov folgt

$$L(a) \leq L(\bar a) \leq L(\bar a') < \frac{\pi}{2\sqrt\kappa} < \pi \;.$$

Somit $r \in B_\pi(q)$, und da r beliebig war, folgt insgesamt

$$M = B_\pi(p) \cup B_\pi(q) \;.$$

Es sei wieder c_v eine Geodätische mit Startvektor $v \in S_pM$. Wir wenden den Zwischenwertsatz auf die Funktion

$$f_v\colon [0,\pi] \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad f_v(t) = d(c_v(t), q) - d(c_v(t), p) = d(c_v(t), q) - t$$

an. Da $f_v(0) = \operatorname{diam}(M) > 0$ und nach dem obigen $f_v(\pi) < 0$, finden wir einen Wert $\ell_v \in (0, \pi)$ mit $f_v(\ell_v) = 0$. Insbesondere ist $c_v(\ell_v)$ von p und q gleich weit entfernt.

Der Wert ℓ_v ist auch eindeutig. Denn sei $f_v(\ell) = f_v(\ell') = 0$ für $\ell < \ell' < \pi$, dann folgt

$$d(c_v(\ell'), q) = d(c_v(\ell'), p) = d(c_v(\ell'), c_v(\ell)) + d(c_v(\ell), p) = d(c_v(\ell'), c_v(\ell)) + d(c_v(\ell), q) \;.$$

Aber das ist nur möglich, wenn q auch auf der Geodätischen c_v liegt, und zwar auf der gleichen Seite von $c_v(\ell')$ wie $c_v(\ell)$ und im gleichen Abstand wie p. Es folgt also $p = q$, ein Widerspruch.

Aus der Stetigkeit der Abstandsfunktionen und der Eindeutigkeit von $\ell(v) := \ell_v$ folgt leicht, dass die Funktion ℓ auf S_pM stetig ist. Mit dem Gauß-Lemma ließe sich sogar zeigen, dass ℓ differenzierbar ist.

Um einen Homöomorphismus $F\colon S^{2n} \to M$ zu konstruieren, fixieren wir zunächst eine Isometrie $\Phi\colon S^{2n-1} \to S_pM$. Dann definieren wir

$$F\begin{pmatrix} \sin h \cdot x \\ \cos h \end{pmatrix} = \begin{cases} \exp_p\bigl(\frac{2h}{\pi}\, \ell_{\Phi(x)}\, \Phi(x)\bigr) & \text{für } h \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ , und} \\ \exp_q\bigl(\bigl(2 - \frac{2h}{\pi}\bigr)\ (\exp_q^{-1} \circ \exp_p)\bigl(\ell_{\Phi(x)} \cdot \Phi(x)\bigr)\bigr) & \text{für } h \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \;. \end{cases}$$

für alle $h \in [0, \pi]$ und alle $x \in S^{2n-1}$. Man beachte insbesondere, dass die Definitionen für $h = \frac{\pi}{2}$ zusammenpassen, und dass $h = 0$ bzw. $h = \pi$ unabhängig von x stets den Wert p bzw. q liefern. Es folgt die Stetigkeit von F.

Es sei $S^{2n}_\pm \subset S^{2n}$ die Menge der Punkte mit $\pm h \geq 0$. Man sieht leicht, dass F auf der abgeschlossenen Nordhalbkugel S^{2n}_+ injektiv ist, da $\exp_p$ auf ganz $B_\pi(p)$ injektiv ist, und da $\ell_v < \pi$ für alle $v \in T_pM$. Mit dem gleichen Argument ist auch $F|_{S^{2n}_-}$ injektiv. Nun gilt aber

$$r \in F(S^{2n}_\pm) \quad \Longleftrightarrow \quad \pm(d(p,r) - d(q,r)) \geq 0$$

für alle $r \in M$. und hieraus folgt globale Injektivität.

Zur Surjektivität betrachte wieder $r \in M$. Falls $d(p,r) - d(q,r) \geq 0$, betrachte die kürzeste Geodätische $c_v \colon [0, d(p,r)]$ von p nach r mit Startvektor $v \in S_pM$, dann gilt

$$r = F\begin{pmatrix} \sin h \cdot x \\ \cos h \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x = \Phi^{-1}(v) \quad \text{und} \quad h = \frac{\pi\, d(p,r)}{2\ell_v}\;.$$

Falls $d(p,r) - d(q,r) \leq 0$, betrachte die kürzeste Geodätische $c_w \colon [0, d(q,r)]$ von q nach r mit Startvektor $w \in S_pM$. Wie oben existiert genau ein ℓ_w, so dass $d(c_w(\ell_w), p) = d(c_w(\ell_w), q)$. Es folgt

$$r = F\begin{pmatrix} \sin h \cdot x \\ \cos h \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x = \Phi^{-1}\left(\frac{(\exp_p^{-1} \circ \exp_q)(\ell_w \cdot w)}{\ell_w}\right) \quad \text{und} \quad h = \pi - \frac{\pi\, d(q,r)}{2\ell_w}\;.$$

Ein einfaches topologisches Argument zeigt, dass bijektive, stetige Abbildungen zwischen Kompakta Homöomorphismen sind. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

2.50. Satz (Differenzierbarer Sphärensatz; Brendle-Schoen). *Es sei M kompakte, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, und für alle $p \in M$ und alle Ebenen E, $E' \subset T_pM$ gelte $0 < K(E') \leq 4K(E)$. Dann ist M entweder diffeomorph zu einer Sphäre S^n oder isometrisch zu komplex projektiven Raum $\mathbb{C}P^k$, zum quaternionisch projektiven Raum $\mathbb{H}P^k$, oder zur Cayley-Ebene $\mathbb{O}P^2$.*

KAPITEL 3

De Rham-Kohomologie

Wir wiederholen die Definition der de Rham-Kohomologie und beweisen einige wichtige Eigenschaften. Unter anderem zeigen wir, dass die de Rham-Kohomologie für Mannigfaltigkeiten zur simplizialen und zur Čech-Kohomologie jeweils mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ isomorph ist. Außerdem wiederholen wir den Integrationsbegriff und den Satz von Stokes. Als weiterführende Literatur empfehlen wir das Buch [**BT**] von Bott und Tu.

3.1. Differentialformen und äußere Ableitung

Wir wiederholen zunächst die alternierenden Multilinearformen aus der linearen Algebra und führen dann alternierende Differentialformen und die äußere Ableitung ein.

3.1. Definition. Es sei V ein Modul über einem Ring R. Eine Abbildung $\alpha\colon V^k = V\times\cdots\times V \to R$ heißt *alternierende Multilinearform* vom Grad k oder kurz (*alternierende*) *k-Form,* wenn sie

(1) *multilinear* ist, d.h., wenn für alle $i \in \{1,\dots,k\}$ und $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k \in V$ die Abbildung
$$v \mapsto \alpha(v_1,\dots,v_{i-1},v,v_{i+1},\dots,v_k) \in R$$
linear ist, und

(2) *alternierend* ist, d.h., wenn für alle $i \in \{1,\dots,k-1\}$ und $v_1, \dots, v_{k-1} \in V$ gilt, dass
$$\alpha(v_1,\dots,v_i,v_i,\dots,v_{k-1}) = 0\ .$$

Der Raum der alternierenden Formen vom Grad k wird mit $\Lambda^k V$ bezeichnet. Wir setzen $\Lambda^0 V = R$ und schreiben
$$\Lambda^\bullet V = \oplus_{k=0}^\infty \Lambda^k V\ .$$

Für $k = 1$ ist die Bedingung (2) leer, und $\Lambda^1 V$ ist einfach die Menge der linearen Abbildungen $V \to R$, also das duale Modul V^* von V.

Wir sammeln einige wichtige elementare Eigenschaften von alternierenden Abbildungen.

3.2. Proposition. *Es sei V ein R-Modul.*

(1) *Die alternierenden k-Formen bilden ein R-Modul.*

(2) *Es sei $\alpha \in \Lambda^k V$ und $\sigma \in S(k)$ eine Permutation mit Vorzeichen* $\operatorname{sign}(\sigma) \in \{1,-1\}$*, dann gilt*
$$\alpha(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sign}(\sigma)\cdot\alpha(v_1,\dots,v_k)$$
für alle $v_1,\dots,v_k \in V$.

(3) *Falls R keine 2-Torsion besitzt, sei $\alpha\colon V^k \to \Bbbk$ multilinear, und es gelte*
$$\alpha(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},v_i,v_{i+2},\dots,v_k) = -\alpha(v_1,\dots,v_k)$$
für alle $i \in \{1,\dots,k-1\}$ und alle $v_1,\dots,v_k \in V$, dann ist α alternierend.

Beweis. Zu (1) überlegen wir uns, dass Summen und Vielfache alternierender Multilinearformen wieder alternierend und multilinear sind. Somit bilden die alternierenden k-Formen ein Untermodul des Moduls $\mathrm{Abb}(V^k;\Bbbk)$.

Zu (2) betrachten wir zunächst die Permutation $\sigma = \tau_i$ mit $i \in \{1, \dots, k-1\}$ und

$$\sigma(j) = \begin{cases} i+1 & \text{falls } j = i, \\ i & \text{falls } j = i+1, \text{ und} \\ j & \text{falls } j \notin \{i, i+1\} . \end{cases}$$

Der Einfachheit halber sei $i = 1$; für alle anderen i geht die Rechnung entsprechend. Da α alternierend und multilinear ist, folgt

$$\begin{aligned} \alpha(v_1, \dots, v_k) &= \alpha(v_1, v_2, v_3, \dots, v_k) + \underbrace{\alpha(v_1, v_1, v_3, \dots, v_k)}_{=0} \\ &= \alpha(v_1, v_1 + v_2, v_3, \dots, v_k) - \underbrace{\alpha(v_1 + v_2, v_1 + v_2, v_3, \dots, v_k)}_{=0} \\ &= \alpha(-v_2, v_1 + v_2, v_3, \dots, v_k) + \alpha\underbrace{(-v_2, -v_2, v_3, \dots, v_k)}_{=0} \\ &= \alpha(-v_2, v_1, v_3, \dots, v_k) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) . \end{aligned}$$

Da jede Permutation $\sigma \in S(k)$ als Hintereinanderschaltung der speziellen Permutationen $\tau_1, \dots, \tau_{k-1}$ geschrieben werden kann und das Vorzeichen multiplikativ ist, folgt Aussage (2).

Zu (3) überlegen wir uns, dass das Vertauschen des i-ten und $(i+1)$-ten Arguments den folgenden Ausdruck nicht ändert, so dass

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, v_i, \dots, v_{k-1}) = -\alpha(v_1, \dots, v_i, v_i, \dots, v_{k-1}) .$$

Es folgt

$$2\alpha(v_1, \dots, v_i, v_i, \dots, v_{k-1}) = 0 ,$$

also $\alpha(v_1, \dots, v_i, v_i, \dots, v_{k-1}) = 0$, da R keine 2-Torsion besitzt. Also ist α alternierend. □

Um eine Basis von $\Lambda^k V$ anzugeben, ist es zweckmäßig, zunächst das Produkt von Formen einzuführen.

3.3. Definition. Es sei V ein R-Modul. Das *alternierende Produkt* oder *Dachprodukt* $\wedge\colon \Lambda^j V \times \Lambda^k V \to \Lambda^{j+k} V$ ist definiert durch

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{j+k}) = \sum_{\substack{\sigma \in S(j+k) \\ \sigma(1) < \dots < \sigma(j) \\ \sigma(j+1) < \dots < \sigma(j+k)}} \operatorname{sign}(\sigma)\, \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(j)})\, \beta(v_{\sigma(j+1)}, \dots, v_{\sigma(j+k)})$$

für alle $\alpha \in \Lambda^j V$, $\beta \in \Lambda^k V$ und $v_1, \dots, v_{j+k} \in V$.

3.4. Bemerkung. Das Dachprodukt hat folgende Eigenschaften.

(1) Für alle $\alpha \in \Lambda^j V$, $\beta \in \Lambda^k V$ ist $\alpha \wedge \beta$ multilinear (klar) und alternierend. (Übung)
(2) Das Dachprodukt ist assoziativ (Übung).
(3) Das Dachprodukt ist *graduiert kommutativ*, das heißt, für alle $\alpha \in \Lambda^j V$ und $\beta \in \Lambda^k V$ gilt (Übung), dass

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{jk}\, \alpha \wedge \beta .$$

Es sei jetzt V ein $\Bbbk$-Vektorraum mit Basis $(e_1, \dots, e_n)$. Dann sei $(e^1, \dots, e^n)$ die *duale Basis* von V^* mit

$$e^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Für $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ erhalten wir nach Definition 3.3 Elemente $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ von $\Lambda^k V$ mit

$$(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k})(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\sigma \in S(k)} \operatorname{sign}(\sigma)\, e^{i_1}(v_{\sigma(1)}) \cdots e^{i_k}(v_{\sigma(k)}) .$$

3.5. Proposition. *Es sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine Basis von V und $(e^1, \dots, e^n)$ die dazu duale Basis von V^*, dann bilden die Elemente $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ mit $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ eine Basis von $\Lambda^k V$. Insbesondere gilt $\dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}$ für $0 \leq k \leq n$ und $\Lambda^k V = 0$ für $k > n$.*

Beweis. (Übung) □

Die folgende Definition geht wieder für beliebige R-Moduln.

3.6. Definition. Es sei $F\colon W \to V$ linear und $\alpha \in \Lambda^k V$, dann definiert man die *zurückgeholte k-Form* $F^*\alpha \in \Lambda^k W$ durch

$$(F^*\alpha)(w_1, \dots, w_k) = \alpha(F(w_1), \dots, F(w_k))$$

für alle $w_1, \dots, w_k \in W$.

3.7. Bemerkung. Das Zurückholen von k-Formen hat folgende Eigenschaften.

(1) Der Ausdruck $F^*\alpha$ ist wieder multilinear und alternierend, insbesondere ist $F^*\colon \Lambda^k V \to \Lambda^k W$ wohldefiniert.

(2) Die Abbildung F^* ist linear: für $\alpha, \beta \in \Lambda^k V$ und $r, s \in \Bbbk$ gilt
$$F^*(r\alpha + s\beta) = r \cdot f^*\alpha + s \cdot F^*\beta \in \Lambda^k W .$$

(3) Die Abbildung F^* ist mit dem Dachprodukt verträglich: für alle $\alpha \in \Lambda^j V$, $\beta \in \Lambda^k V$ gilt
$$F^*(\alpha \wedge \beta) = (F^*\alpha) \wedge (F^*\beta) \in \Lambda^{j+k} W .$$

(4) Es sei $G\colon V \to U$ ebenfalls linear, dann gilt
$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*\colon \Lambda^k U \to \Lambda^k W .$$

(5) Es sei jetzt wieder V ein n-dimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum und $F\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Nach Proposition 3.5 ist $\Lambda^n V$ eindimensional. Die Determinante von F lässt sich definieren durch die Eigenschaft
$$F^*\alpha = \det F \cdot \alpha \in \Lambda^n V$$
für alle $\alpha \in \Lambda^n V$. Zusammen mit (4) folgt daraus leicht die Multiplikativität: für F, $G\colon V \to V$ linear gilt
$$\det(F \circ G) = \det F \cdot \det G .$$

3.8. Bemerkung. Es sei R ein Ring, dann bilden die R-Moduln und die R-linearen Abbildungen zwischen ihnen eine Kategorie.

(1) Das Bilden der k-Formen ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der R-Moduln in sich, der jedem Modul V das Modul $\Lambda^k V$ und jeder linearen Abbildung $F\colon W \to V$ die lineare Abbildung $\Lambda^k F := F^*\colon \Lambda^k V \to \Lambda^k W$ zuordnet.

(2) Für $k = 1$ erhalten wir das duale Modul. Auch das Bilden des dualen Moduls ist also ein kontravarianter Funktor.

(3) Da Zurückholen nach Bemerkung 3.7 (3) mit dem Dachprodukt verträglich ist, können wir $\Lambda^\bullet$ als Funktor von der Kategorie der R-Moduln in die Kategorie der Ringe (oder der R-Algebren) auffassen, denn jede lineare Abbildung $F\colon W \to V$ liefert einen Ring- (beziehungsweise R-Algebren-) Homomorphismus $\Lambda^\bullet F := F^*\colon \Lambda^\bullet V \to \Lambda^\bullet W$.

Wir definieren jetzt alternierende Differentialformen auf $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeiten. Der Einfachheit halber werden wir nur glatte, das heißt, $\mathcal{C}^\infty$-Formen betrachten. Genausogut könnten wir $\mathcal{C}^k$-Formen oder L^p-Formen einführen, hätten dann aber mehr Mühe bei der Definition der äußeren Ableitung.

Es sei M eine $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit, dann bilden die glatten Funktionen auf M mit punktweiser Multiplikation einen Ring $\mathcal{C}^\infty(M)$, und der Raum $\mathfrak{X}^\infty(M)$ der glatten Vektorfelder auf M wird ein $\mathcal{C}^\infty(M)$-Modul durch punktweise Multiplikation, siehe Bemerkung 1.20 (2).

3.9. Definition. Eine *alternierende Differentialform* vom *Grad k* oder kurz *k-Form* auf M ist eine *alternierende k-Form* $\alpha\colon \mathfrak{X}^\infty(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$. Der Raum aller k-Formen wird mit $\Omega^k(M) = \Lambda^k \mathfrak{X}^\infty(M)$ bezeichnet, und wir schreiben

$$\Omega^\bullet(M) = \oplus_{k=0}^\infty \Omega^k(M)\ .$$

3.10. Bemerkung. Alternierende Differentialformen sind $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilinear, also $(k,0)$-Tensoren der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ gemäß Definition 1.46. Nach Lemma 1.48 hängt $\alpha(X_1,\dots,X_k)(p) \in \mathbb{R}$ für $\alpha \in \Omega^k(M)$, $X_1,\dots,X_k \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ und $p \in M$ nur von $X_1|_p,\dots,X_k|_p \in T_pM$ ab. Insbesondere ist $\alpha_p \in \Lambda^k T_pM$ eine wohldefinierte alternierende k-Form auf dem reellen Vektorraum T_pM.

Umgekehrt wird die Funktion $\alpha(X_1,\dots,X_k)$ durch ihre Werte $\alpha(X_1,\dots,X_k)(p)$ an allen Punkten $p \in M$ bestimmt. Also wird $\alpha \in \Omega^k(M)$ durch die punktweisen k-Formen $\alpha_p \in \Lambda^k T_pM$ für alle $p \in M$ bestimmt.

Die folgende Konstruktion ist daher sinnvoll.

3.11. Definition. Es seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten, $F\colon N \to M$ eine glatte Abbildung und $\alpha \in \Omega^k(M)$ eine glatte k-Form. Dann definieren wir die *mit F zurückgeholte k-Form* $F^*\alpha \in \Omega^k(N)$ durch

$$(F^*\alpha)(Y_1,\dots,Y_k)(q) = \alpha_{F(q)}(d_qF(Y_1|_q),\dots,d_qF(Y_k|_q)) \in \mathbb{R}$$

für alle $Y_1,\dots,Y_k \in \mathfrak{X}^\infty(N)$ und alle $q \in N$.

3.12. Bemerkung. Aus der vorigen Bemerkung folgt, dass k-Formen eine Garbe bilden. Insbesondere gilt:

(1) Man kann eine Form $\alpha \in \Omega^k(M)$ auf eine offene Teilmenge $U \subset M$ einschränken zu $\alpha|_U = \iota^*\alpha \in \Omega^k(U)$, wobei $\iota\colon U \to M$ die Inklusion bezeichnet.

(2) Sei $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, wobei alle $U_i \subset M$ offen sind, und seien $\alpha_i \in \Omega^k(U_i)$ für alle $i \in I$, so dass $\alpha_i|_{U_i\cap U_j} = \alpha_j|_{U_i\cap U_j}$ für alle $i,j \in I$, dann existiert $\alpha \in \Omega^k(U)$ mit $\alpha|_{U_i} = \alpha_i$ für alle $i \in I$.

(3) Es sei $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ wie oben und $\alpha,\beta \in \Omega^k(U)$, dann gilt $\alpha = \beta$, falls $\alpha|_{U_i} = \beta|_{U_i}$ für alle $i \in I$.

Aussage (1) folgt aus Bemerkung 3.10. Um (2) zu zeigen, betrachten wir Vektorfelder $X_1,\dots,X_k \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ und setzen $f_i = \alpha_i(X_1|_{U_i},\dots,X_k|_{U_i}) \in \mathcal{C}^\infty(U_i)$. Es folgt $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$, also existiert eine Funktion f mit $f|_{U_i} = f_i$. Da Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist, gilt $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, und wir setzen $\alpha(X_1,\dots,X_k) = f$.

Um (3) zu zeigen, betrachten wir wieder $X_1,\dots,X_k \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ und folgern, dass $\alpha(X_1,\dots,X_k) = \beta(X_1,\dots,X_k)$ auf ganz U gilt.

3.13. Bemerkung. Wir wollen k-Formen auf Kartengebieten möglichst eindeutig darstellen.

(1) Nach den Definitionen 3.1 und 3.9 ist eine 0-Form eine Funktion, also $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$.
(2) Sei $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ eine Funktion, dann ist das totale Differential aus Bemerkung 1.20 (3) eine 1-Form $df \in \Omega^1(M)$ mit $df(X) = X(f)$. Nicht jede 1-Form lässt sich so darstellen.
(3) Falls $M = U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge ist, bilden die Vektorfelder $e_1, \dots, e_n$ aus Beispiel 1.19 (1) an jedem Punkt $p \in U$ eine Basis von $T_pU \cong \mathbb{R}^n$. Die totalen Differentiale $dx^1, \dots, dx^n$ der Koordinatenfunktionen bilden an jedem Punkt die duale Basis. Nach Proposition 3.5 bilden die Ausdrücke

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}|_p \quad \text{mit} \quad 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$$

an jedem Punkt $p \in U$ eine Basis von $\Lambda^k T_pU \cong \Lambda^k \mathbb{R}^n$. Mit Hilfe von Bemerkung 3.10 sieht man, dass die k-Formen

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \in \Omega^k(U) \quad \text{mit} \quad 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$$

eine Modul-Basis von $\Omega^k(U)$ über $\mathcal{C}^\infty(U)$ bilden. Es gilt dann

$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \alpha_{i_1,\dots,i_k} \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$
$$\text{mit} \qquad \alpha_{i_1,\dots,i_k} = \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \quad \in \quad \mathcal{C}^\infty(U)$$

(4) Sei jetzt M eine glatte m-dimensionale Mannigfaltigkeit und $\varphi \colon U^\varphi \subset \mathbb{R}^m$ eine Karte. Dann können wir Formen auf M mit $(\varphi^{-1})^*$ auf $V^\varphi \subset \mathbb{R}^m$ zurückziehen und (3) anwenden. Den Vektorfeldern e_i und den Formen dx^i auf V^φ entsprechen die Koordinatenfelder $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ auf U^φ aus Beispiel 1.19 (2) sowie die totalen Ableitungen $d\varphi^i$ der Komponenten von φ. Es folgt

$$\alpha|_{U^\varphi} = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \alpha^\varphi_{i_1,\dots,i_k} \cdot d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_k}$$
$$\text{mit} \qquad \alpha^\varphi_{i_1,\dots,i_k} = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_k}}\right) \quad \in \quad \mathcal{C}^\infty(U^\varphi) \,.$$

(5) Sei $n = \dim M$, dann folgt aus (5) und Bemerkung 3.12, dass

$$\Omega^k(M) = 0 \qquad \text{für alle } k \notin \{0, \dots, n\} \,.$$

Wir kommen jetzt zur äußeren Ableitung.

3.14. Satz und Definition. *Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle glatten Mannigfaltigkeiten M existiert genau eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $d = d^k_M \colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ mit folgenden Eigenschaften.*

(1) *Für Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(M) = \Omega^0(M)$ ist $d^0_M f = df$ die totale Ableitung.*
(2) Produkt- *oder* Leibnizregel: *Für alle $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^\ell(M)$ gilt*

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta \,.$$

(3) *Es gilt $d^2 = d^{k+1}_U \circ d^k_U = 0$.*
(4) Natürlichkeit: *Es seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $F \colon M \to N$ glatt, dann gilt $F^* \circ d^k_M = d^k_N \circ F^*$.*

Der Operator d heißt äußere Ableitung.

Beweis. Es reicht, die Aussage für offene Teilmengen $U \subset M$ zu beweisen, die zu offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^m$ diffeomorph sind. Sei etwa $\alpha \in \Omega^k(M)$, dann definieren wir $d(\alpha|_{U^\varphi})$ für alle φ aus einem Atlas von M. Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage und (4) folgt

$$d(\alpha|_{U^\varphi})|_{U^\varphi \cap U^\psi} = d(\alpha|_{U^\psi})|_{U^\varphi \cap U^\psi}$$

für alle Karten φ, ψ. Nach Bemerkung 3.12 (2) existiert eine globale Form $d\alpha$ mit $(d\alpha)|_{U^\varphi} = d(\alpha|_{U^\varphi})$ für alle φ, und wegen (4) und Bemerkung 3.12 (3) ist sie eindeutig.

Wegen (4) reicht es sogar, von vorneherein anzunehmen, dass U bereits eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ ist, denn dann kann man d lokal über eine Karte definieren, und es ist egal, welche Karte man benutzt.

Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Durch (1) ist d_U^0 bereits festgelegt. Wir betrachten die konstanten 1-Formen $e^i = dx^i$ aus Bemerkung 3.13 (3) für $i = 1, \dots, n$. Aus (3) folgt

$$de^i = d(dx^i) = 0 \; .$$

Wir schreiben eine beliebige k-Form α als

$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \alpha_{i_1,\dots,i_k} \, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \in \Omega^k(U) \; .$$

Aus der Linearität von d, der Produktregel (2) und Eigenschaft 3 folgt

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} d\big(\alpha_{i_1,\dots,i_k} \, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\big) \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \Big(d\alpha_{i_1,\dots,i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &\qquad\qquad + \alpha_{i_1,\dots,i_k} \big(\underbrace{d^2 x^{i_1}}_{=0} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &\qquad\qquad\qquad - dx^{i_1} \wedge \underbrace{d^2 x^{i_2}}_{=0} \wedge dx^{i_3} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \pm \dots \big)\Big) \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} d\alpha_{i_1,\dots,i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \; . \end{aligned} \tag{*}$$

Damit ist die Eindeutigkeit von d_U^k bewiesen.

Um die Existenz zu zeigen, müssen wir nachweisen, dass die Formel (*) für $d\alpha$ Abbildungen d_U^k mit den geforderten Eigenschaften definiert. Eigenschaft (1) ist offensichtlich.

Um (2) zu zeigen, überlegen wir uns zunächst, dass für $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ und $1 \le j_1 < \dots < j_\ell \le n$ das Produkt

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_\ell}$$

entweder 0 ist, falls $i_p = j_q$ für ein $p \in \{1, \dots, k\}$ und ein $q \in \{1, \dots, \ell\}$, oder das ± 1-fache einer entsprechenden Basisform von $\Omega^{k+\ell}(U)$. Sei also α wie oben und

$$\beta = \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_\ell \le n} \beta_{j_1,\dots,j_\ell} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_\ell} \; ,$$

dann folgt (2), denn

$$\begin{aligned}
d(\alpha\wedge\beta) &= d\Bigg(\sum_{\substack{1\le i_1<\dots<i_k\le n\\ 1\le j_1<\dots<j_\ell\le n}} \alpha_{i_1,\dots,i_k}\beta_{j_1,\dots,j_k} dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_\ell}\Bigg)\\
&= \sum_{\substack{1\le i_1<\dots<i_k\le n\\ 1\le j_1<\dots<j_\ell\le n}} \big(\beta_{j_1,\dots,j_\ell} d\alpha_{i_1,\dots,i_k} + \alpha_{i_1,\dots,i_k} d\beta_{j_1,\dots,j_\ell}\big)\\
&\qquad\qquad \wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_\ell}\\
&= \sum_{\substack{1\le i_1<\dots<i_k\le n\\ 1\le j_1<\dots<j_\ell\le n}} \big(d\alpha_{i_1,\dots,i_k}\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\wedge \beta_{j_1,\dots,j_\ell} dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_\ell}\\
&\qquad + (-1)^k \alpha_{i_1,\dots,i_k} dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\wedge d\beta_{j_1,\dots,j_\ell}\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_\ell}\big)\\
&= d\alpha\wedge\beta + (-1)^k\alpha\wedge d\beta\ .
\end{aligned}$$

Für $f\in\Omega^0(U)=\mathcal{C}^\infty(U)$ folgt (3) aus dem Satz von Schwarz, denn

$$\begin{aligned}
d^2 f = d\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j\right) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\,dx^i\wedge dx^j\\
&= \sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}\right) dx^i\wedge dx^j = 0\ .
\end{aligned}$$

Aus der Produktregel (2) und (*) folgt also

$$\begin{aligned}
&d^2 \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \alpha_{i_1,\dots,i_k} dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\\
&\qquad = d\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} d\alpha_{i_1,\dots,i_k}\wedge(1\cdot dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k})\\
&\qquad = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \big(\underbrace{d^2\alpha_{i_1,\dots,i_k}}_{=0}\wedge(1\cdot dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k})\\
&\qquad\qquad - d\alpha_{i_1,\dots,i_k}\wedge(\underbrace{d1}_{=0}\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k})\big) = 0\ .
\end{aligned}$$

Also gilt (3) insgesamt.

Da das Zurückziehen von Differentialformen mit dem Dachprodukt verträglich ist nach Bemerkung 3.7 (3), reicht es wegen der Produktregel (2) und Bemerkung 3.13 (3), die Natürlichkeit nur für Funktionen $f\in\mathcal{C}^\infty(U)$ und die speziellen 1-Formen dx^i zu zeigen. Für $f\in\mathcal{C}^\infty(U)$ gilt für $x\in V$ und $v\in\mathbb{R}^m$ nach (1) und der Kettenregel

$$((d\circ F^*)f)_x(v) = d(f\circ F)_x(v) = (f\circ F)'_x(v) = f'_{F(x)}(F'_x(v)) = df_{F(x)}(F'_x(v)) = (F^*df)_x(v)\ ,$$

also $(d\circ F^*)f = (F^*\circ d)f$. Für dx^i folgt aus (3) mit $F^i = x^i\circ F$, dass

$$d(F^*dx^i) = d(dF_i) = 0 = F^*(d^2x^i) = (F^*\circ d)\,dx^i\ .$$

Damit ist auch (4) bewiesen. □

Nach Eigenschaft (3) erhalten wir eine Familie von $\mathbb{R}$-Vektorräumen $\Omega^k(M)$ und Abbildungen $(d^k_M)_{k\in\mathbb{Z}}$,

$$\dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{d_M^{-1}} \Omega^0(M) \xrightarrow{d_M^0} \dots \xrightarrow{d_M^{n-1}} \Omega^n(M) \xrightarrow{d_M^n} 0 \longrightarrow \dots$$

mit $d_M^{k+1} \circ d_M^k = 0$ für alle k. Dabei setzen wir $\Omega^k(M) = 0$ und $d_M^k = 0$ für $k < 0$. Die folgende Definition funktioniert allgemein für Moduln über Ringen und lineare Abbildungen.

3.15. Definition. Ein *(Koketten-)Komplex* $(V^\bullet, d^\bullet)$ von $\Bbbk$-Vektorräumen besteht aus einer Familie $(V^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ von $\Bbbk$-Vektorräumen und einer Familie $\Bbbk$-linearer Abbildungen $d^k \colon V^k \to V^{k+1}$ mit $d^{k+1} \circ d^k = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Eine *Koketten-Abbildung* $f^\bullet \colon (V^\bullet, d^\bullet) \to (W^\bullet, e^\bullet)$ zwischen Komplexen $(V^\bullet, d^\bullet)$ und $(W^\bullet, e^\bullet)$ ist eine Familie $\Bbbk$-linearer Abbildungen $f^k \colon V^k \to W^k$ mit $f^{k+1} \circ d^k = e^k \circ f^k$.

Ein Element $\alpha \in V^k$ heißt *geschlossen,* wenn $d^k\alpha = 0$, und *exakt,* wenn es ein $\beta \in V^{k-1}$ mit $d^{k-1}\beta = \alpha$ gibt.

Die *Kohomologie* $H^\bullet(V^\bullet, d^\bullet)$ eines Komplexes $(V^\bullet, d^\bullet)$ ist die Familie der $\Bbbk$-Vektorräume

$$H^k(V^\bullet, d^\bullet) = \ker d^k / \operatorname{im} d^{k-1} \;.$$

Die Äquivalenzklasse $[\alpha] \in H^k(V^\bullet, d^\bullet)$ von $\alpha \in \ker d^k$ heißt auch die *Kohomologieklasse* von α.

3.16. Bemerkung. (1) Aus $d^k \circ d^{k-1} = 0$ folgt $d^{k-1}\beta \in \ker d^k$ für alle $\beta \in V^{k-1}$, also sind alle exakten Elemente von V^k auch geschlossen. Deshalb ist $\operatorname{im} d^{k-1}$ ein Untervektorraum des Kernes $\ker d^k$, und der Quotient $\ker d^k / \operatorname{im} d^{k-1}$ ist wohldefiniert.

(2) Die $\Bbbk$-Koketten-Komplexe bilden eine Kategorie $\mathcal{C}h_\Bbbk^\bullet$ mit den Koketten-Abbildungen als Morphismen, denn die Verkettung zweier Koketten-Abbildungen

$$f^\bullet \colon (V^\bullet, d^\bullet) \to (W^\bullet, e^\bullet) \qquad \text{und} \qquad g^\bullet \colon (U^\bullet, c^\bullet) \to (V^\bullet, d^\bullet)$$

ist wieder eine Koketten-Abbildung, da

$$f^{k+1} \circ g^{k+1} \circ c^k = f^{k+1} \circ d^k \circ g^k = e^k \circ f^k \circ g^k \;.$$

(3) Jede Koketten-Abbildung $f^\bullet \colon (V^\bullet, d^\bullet) \to (W^\bullet, e^\bullet)$ induziert eine Familie linearer Abbildungen $Hf^k \colon H^k(V^\bullet, d^\bullet) \to H^k(W^\bullet, d^\bullet)$ mit

$$Hf^k[\alpha] = [f^k\alpha] \;.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert (Übung).

(4) Die Kohomologie ist ein kovarianter Funktor von $\mathcal{C}h_\Bbbk^\bullet$ in sich, der einem Komplex $(V^\bullet, d^\bullet)$ den Komplex $(H^\bullet(V^\bullet, d^\bullet), 0)$ zuordnet, und jeder Koketten-Abbildung die induzierte Abbildung $Hf^\bullet$ oder kurz $f^\bullet$ aus (2). Funktorialität folgt, denn für Kokettenabbildungen $f^\bullet$, $g^\bullet$ wie oben und $\alpha \in \ker c^k$ gilt

$$H(f \circ g)^k[\alpha] = [f^k(g^k(\alpha))] = Hf^k[g^k(\alpha)] = (Hf^k \circ Hg^k)[\alpha] \;,$$

und natürlich induziert $(\mathrm{id}_{V^k})_k$ die Identität $\mathrm{id}_{H^k(V^\bullet, d^\bullet)}$.

3.17. Definition. Der Komplex $(\Omega^\bullet(M), d_M^\bullet)$ heißt *de Rham-Komplex*, und seine Kohomologie $H_{\mathrm{dR}}^\bullet(M) = H^\bullet(\Omega^\bullet(M), d_M^\bullet)$ die *de Rham-Kohomologie* von M.

3.18. Bemerkung. Es sei wieder $\mathcal{C}^\infty$ die Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten und der glatten Abbildungen aus Bemerkung 1.11.

(1) Wir erhalten einen Funktor $(\Omega^\bullet, d^\bullet)$ von $\mathcal{C}^\infty$ nach $\mathcal{C}h_\mathbb{R}^\bullet$, denn nach Satz 3.14 ist $(\Omega^\bullet(M), d_M^\bullet)$ ein Kokettenkomplex und das Zurückholen F^* mit $F \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$ eine Kokettenabbildung. Nach Bemerkung 3.7 (3) können wir den Funktor noch um das Dachprodukt erweitern, so dass wir M den Komplex $(\Omega^\bullet(M), d_M^\bullet, \wedge)$ zuordnen.

(2) Durch Nacheinanderausführen des kontravarianten Funktors $(\Omega^\bullet, d^\bullet)$ und des kovarianten Funktors $H^\bullet$ erhalten wir den kontravarianten Funktor $H_{\mathrm{dR}}^\bullet$, der jeder glatten Mannigfaltigkeit M ihre de Rham-Kohomologie und jeder $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung $F \colon N \to M$ die induzierte Abbildung $F^* = H(F^*)^\bullet \colon H_{\mathrm{dR}}^\bullet(M) \to H_{\mathrm{dR}}^\bullet(N)$ mit

$$F^*[\alpha] = [F^*\alpha]$$

zuordnet.

(3) Nach Satz 3.14 (2) erhalten wir auch eine Familie von „Dachprodukten“ $\wedge\colon H^k_{\mathrm{dR}}(M) \times H^\ell_{\mathrm{dR}}(M) \to H^{k+\ell}_{\mathrm{dR}}(M)$. Dieses Produkt ist immer noch assoziativ und graduiert kommutativ wie in Bemerkung 3.4.

Wir geben jetzt eine koordinatenunabhängige Beschreibung der äußeren Ableitung.

3.19. Satz (Cartan-Formel). *Sei $\alpha \in \Omega^k(M)$ und $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, dann gilt*

$$\begin{aligned} d\alpha(X_0, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i\Big(\alpha\big(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k\big)\Big) \\ + \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \alpha\Big([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k\Big) \,. \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet das Dach über einem Argument, dass dieses Argument wegzulassen ist.

Beweis. Der Beweis erfolgt in drei Schritten, die wir nur kurz skizzieren.

(1) Der Ausdruck $\beta(X_0, \dots, X_k)$ auf der rechten Seite ist $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilinear wegen der Produktregel für die Lie-Klammer aus Bemerkung 1.40 und alternierend, also $\beta \in \Omega^{k+1}(M)$.

(2) Nach den Bemerkungen 3.12 und 3.13 reicht es, $M = U \subset \mathbb{R}^n$ offen anzunehmen und nur $d\alpha(e_{i_0}, \dots, e_{i_k}) = \beta(e_{i_0}, \dots, e_{i_k})$ für $1 \le i_0 < \dots < i_k \le n$ zu beweisen.

(3) Der Spezialfall in (2) ist mit der Formel (*) aus dem Beweis von Satz 3.14 leicht zu überprüfen, da $[e_i, e_j] = 0$ für alle i, j: es gilt

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \left(\sum_{i_0=1}^n e_{i_0} \alpha_{i_1, \dots, i_k} \, dx^{i_0} \right) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{1 \le i_0 < \dots < i_k \le n} \left(\sum_{j=0}^k (-1)^j e_{i_j} \Big(\alpha\big(e_{i_0}, \dots, \widehat{e}_{i_j}, \dots, e_{i_k}\big)\Big)\right) dx^{i_0} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{1 \le i_0 < \dots < i_k \le n} \beta_{i_0, \dots, i_k} \, dx^{i_0} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \beta \,. \end{aligned}$$

□

3.2. Homotopieinvarianz und Mayer-Vietoris-Sequenz

Wir zeigen, dass die de Rham-Kohomologie die wichtigsten Eigenschaften einer Kohomologietheorie erfüllt, allerdings nicht für die Kategorie der topologischen Räume oder der CW-Komplexe, sondern „nur“ für die kleinere Kategorie $\mathcal{C}^\infty$ der glatten Mannigfaltigkeiten.

3.20. Bemerkung. Wir können höhere Ableitungen auch für Funktionen auf halboffenen oder abgeschlossenen Intervallen positiver Länge und auf Produkten $I_1 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ solcher Intervalle definieren, und erhalten einen Ring $\mathcal{C}^\infty(I_1 \times \dots \times I_n)$.

Auch für Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(I_1 \times \dots \times I_n)$ gilt der Satz von Schwarz. Insbesondere kommt es bei k-fachen Ableitungen von $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen nach Koordinatenvektorfeldern nicht auf die Reihenfolge des Ableitens an.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall positiver Länge, dann hat jeder Punkt in $U \times I$ eine Umgebung der Form $I_1 \times \dots \times I_n \times I$. Wir können also Räume $\mathcal{C}^\infty(U \times I; \mathbb{R}^m)$ und $\Omega^k(U \times I)$ betrachten. Analog erhalten wir $\mathcal{C}^\infty(M \times I)$ und $\Omega^k(M \times I)$, wenn M eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Die äußere Ableitung $d\colon \Omega^k(M \times I) \to \Omega^{k+1}(M \times I)$ lässt sich wie oben definieren. Satz 3.14 und Bemerkung 3.18 gelten analog.

3.21. Definition. Es seien M, N Mannigfaltigkeiten, und F, $G \in \mathcal{C}^\infty(M,N)$. Eine *glatte Homotopie* von F nach G ist eine glatte Abbildung $H \in \mathcal{C}^\infty(N \times [0,1], M)$ mit

$$H(y,0) = F(y) \qquad \text{und} \qquad H(y,1) = G(y)$$

für alle $y \in N$. Zwei Abbildungen F, $G \in \mathcal{C}^\infty(N,M)$ heißen glatt *homotop*, kurz $F \sim G$, wenn eine glatte Homotopie von F nach G existiert.

3.22. Bemerkung. (1) Es seien $H, K \in \mathcal{C}^\infty(N \times [0,1], M)$ glatte Homotopien von E nach F beziehungsweise von F nach G, mit $E, F, G \in \mathcal{C}^\infty(N,M)$. Dann existiert eine glatte Homotopie L von E nach G mit

$$L(y,t) = \begin{cases} H\big(y, 1 - e^{-\frac{t}{1-2t}}\big) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}) \;, \\ F(y) & \text{für } t = \frac{1}{2} \;, \\ K\big(y, e^{-\frac{1-t}{2t-1}}\big) & \text{für } t \in (\frac{1}{2}, 1] \;. \end{cases}$$

Hieraus folgt die Transitivität von „$\sim$“, und man überzeugt sich, dass homotop zu sein eine Äquivalenzrelation ist. Ihre Äquivalenzklassen heißen glatte Homotopieklassen.

(2) Seien jetzt $F, G \in \mathcal{C}^\infty(N,M)$ und $D, E \in \mathcal{C}^\infty(M,L)$ homotop vermöge $H \in \mathcal{C}^\infty(N \times [0,1], M)$ und $K \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0,1], L)$, dann sind $D \circ F$ und $E \circ G$ homotop vermöge $L \in \mathcal{C}^\infty(N \times [0,1], L)$ mit

$$L(z,t) = K(H(z,t),t) \;.$$

Also ist die Äquivalenzrelation aus (1) verträglich mit der Verkettung glatter Abbildungen.

(3) Wegen (1) und (2) gibt es eine Kategorie $\mathcal{H}^\infty$, deren Objekte glatte Mannigfaltigkeiten sind, deren Morphismen von N nach M glatte Homotopieklassen von Abbildungen von N nach M sind, mit Verkettung

$$[F] \circ [G] = [F \circ G] \;.$$

Außerdem gibt es einen Funktor von $\mathcal{C}^\infty$ nach $\mathcal{H}^\infty$, der jedes Objekt U auf sich selbst und jeden Morphismus $F \in \mathcal{C}^\infty(V,U)$ auf seine Homotopieklasse $[F]$ abbildet.

(4) Sei $[F]\colon M \to N$ ein Isomorphismus in $\mathcal{H}^\infty$, dann existiert eine glatte Abbildung $G\colon N \to M$ mit

$$G \circ F \sim \mathrm{id}_M \qquad \text{und} \qquad F \circ G \sim \mathrm{id}_M \;.$$

Wir nennen F eine *Homotopieäquivalenz* und G ihr *Homotopieinverses.*

3.23. Proposition und Definition. *Sei M glatte Mannigfaltigkeit. Es gibt genau einen $\mathbb{R}$-bilinearen Operator $\mathcal{L}\colon \mathfrak{X}'(M) \times \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$ mit folgenden Eigenschaften.*

$$X(\alpha(X_1, \dots, X_k)) = (\mathcal{L}_X \alpha)(X_1, \dots, X_k) + \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \alpha\Big([X, X_i], X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_k\Big) \tag{1}$$

$$\mathcal{L}_X(\alpha \cap \beta) = (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X \beta \tag{2}$$

$$\mathcal{L}_{[X,Y]}\alpha = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y \alpha) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X \alpha) \tag{3}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, $X, Y, X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^\bullet(M)$. Dieser Operator heißt Lie-Ableitung.

Die Eigenschaften (1) und (2) lassen sich als Produktregeln verstehen, und Eigenschaft (3) als eine Art Jacobi-Identität oder als Darstellungseigenschaft.

Beweisskizze. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus (1). Definiert man $\mathcal{L}_X\alpha$ durch (1), so überprüft man mit Hilfe der Produktregel für die Lie-Klammer aus Bemerkung 1.40, dass $\mathcal{L}_X\alpha$ multilinear ist. Außerdem ist $\mathcal{L}_X\alpha$ alternierend, so dass $\mathcal{L}_X\alpha \in \Omega^\bullet(M)$. Anschließend überprüft man die anderen Eigenschaften, indem man Vektorfelder einsetzt und (1) benutzt. ☐

3.24. Proposition und Definition. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann gibt es genau einen $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinearen Operator $\iota\colon \mathfrak{X}(M) \times \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$ mit folgenden Eigenschaften.*

$$(\iota_X\alpha)(X_{2,\dots,k}) = \alpha(X, X_2, \dots, X_k)\ , \tag{1}$$

$$\iota_X(\alpha \wedge \beta) = (\iota_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \iota_X\beta\ , \tag{2}$$

$$\iota_X^2\alpha = 0 \tag{3}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, $X, X_2, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^\bullet(M)$. Dieser Operator heißt Einsetzung.

Beweisskizze. Wir definieren ι durch (1), folgern (2) aus der Definition des Dachprodukts und (3) daraus, dass α alternierend ist. ☐

3.25. Lemma. *Es sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein glattes Vektorfeld, dann gilt*

$$\mathcal{L}_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d\ .$$

Beweis. Wir benutzen die Cartan-Formel aus Satz (3.19). Sei $\alpha \in \Omega^k(M)$, $X = X_0$ und X_1, $\dots$, $X_k \in \mathfrak{X}(M)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\big((d \circ \iota_{X_0} + \iota_{X_0} \circ d)\alpha\big)(X_1, \dots, X_k) &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} X_i\Big(\alpha\big(X_0, X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_k\big)\Big) \\
&\quad + \sum_{1 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \alpha\Big(X_0, [X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_k\Big) \\
&\quad + \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i\Big(\alpha\big(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_k\big)\Big) \\
&\quad + \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \alpha\big([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_k\big) \\
&= X_0\Big(\alpha\big(X_1, \dots, X_k\big)\Big) \\
&\quad + \sum_{j=1}^k (-1)^j \alpha\big([X_0, X_j], X_1, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_k\big) \\
&= (\mathcal{L}_{X_0}\alpha)(X_1, \dots, X_k)
\end{aligned}$$

☐

3.26. Bemerkung. Die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_X\alpha$ ist nicht $\mathcal{C}^\infty(M)$-linear in α, und auch nicht in X. Aus Lemma 3.25 folgt statt dessen, dass

$$\mathcal{L}_{fX}\alpha = f \cdot \iota_X \circ d\alpha + d(f \cdot \iota_X\alpha) = f \cdot \mathcal{L}_X\alpha + df \wedge \iota_X\alpha\ .$$

Es sei $M_0 \times M_1$ ein Produkt von Mannigfaltigkeiten mit den Projektionen $\pi_{M_i}\, M_0 \times M_1 \to M_i$ für $i = 0, 1$. Dann gilt $T(M_0 \times M_1) = TM_0 \times TM_1$, und $d\pi_{M_0}$, $d\pi_{M_1}$ sind die Projektionen auf die Faktoren. Zu $X_i \in \mathcal{X}(M_i)$ finden wir Vektorfelder $\overline{X_0}$, $\overline{X_1} \in \mathcal{X}(M_0 \times M_1)$, so dass

$$\overline{X_0}|_{(p,q)} = (X_0|_p, 0) \in T_pM_0 \times T_qM_1 \text{ und } \overline{X_1}|_{(p,q)} = (0, X_1|_q) \in T_pM_0 \times T_qM_1\ .$$

Auf $M \times [0,1]$ schreiben wir kurz $\frac{\partial}{\partial t}$ für das entsprechende Koordinatenfeld $\frac{\partial}{\partial t}$.

3.27. Definition. Sei jetzt $I = [0,1]$ und M eine Mannigfaltigkeit. Wir definieren das Integral von $\alpha \in \Omega^{k+1}(M \times I)$ durch

$$\left(\int_I \alpha\right)_p (X_1, \dots, X_k) = \int_0^1 \alpha_{(p,t)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \overline{X_1}, \dots, \overline{X_k}\right) dt$$

für alle $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M)$, so dass $\int_I \alpha \in \Omega^k(M)$.

Diese Definition verallgemeinert das Integral einer 1-Form über I.

3.28. Lemma (Homotopieformel). *Sei $\alpha \in \Omega^0(M \times I)$ und $i_t \colon M \to M \times I$ gegeben durch $i_t(p) = (p,t)$ für alle $t \in I$. Dann gilt*

$$i_1^*\alpha - i_0^*\alpha = d \int_I \alpha + \int_I d\alpha \,.$$

Beweis. Sei $\alpha \in \Omega^k(M \times I)$ und $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M)$. Sei φ eine Karte von M, dann ist $\varphi \times \mathrm{id}_I \colon U^\varphi \times I \to V^\varphi \times I$ eine Karte von $M \times I$, insbesondere gilt

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\right] = 0 \,.$$

Genauso folgt aus Bemerkung 1.22 und 1.40, dass

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial t}, \overline{X_i}\right] &= \sum_j \left[\frac{\partial}{\partial t}, (X_i(\varphi^j) \circ \pi_M) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\right] \\ &= \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial t}(X_i(\varphi^j) \circ \pi_M) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^j} + (X_i(\varphi^j) \circ \pi_M) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\right]\right) = 0 \,.\end{aligned}$$

Damit sehen wir, dass

$$\left(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} \alpha\right)_{(p,t)} (\overline{X_1}, \dots, \overline{X_k}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_{(p,t)}(\overline{X_1}, \dots, \overline{X_k})\right) .$$

Da I kompakt ist und alle Formen glatt sind, vertauschen Ableitungen in Richtung von M mit Integration über I. Nach der Cartan-Formel enthält $(d\beta)(\overline{X_1}, \dots, \overline{X_k})$ nur Ableitungen in Richtung von M, also gilt

$$\int_0^1 \left(d\iota_{\frac{\partial}{\partial t}} \alpha\right)_{(p,t)} (\overline{X_1}, \dots, \overline{X_k})\, dt = \left(d \int_I \alpha\right)(X_1, \dots, X_k) \,.$$

Damit folgt das Lemma aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und Lemma 3.25.

$$\begin{aligned}(i_1^*\alpha - i_0^*\alpha)_p(X_1, \dots, X_k) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_{(p,t)}(\overline{X_1}, \dots, \overline{X_k})\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} \alpha\right)_{(p,t)} (\overline{X_1}, \dots, \overline{X_k})\, dt \\ &= \int_0^1 \left(\big(d \circ \iota_{\frac{\partial}{\partial t}} + \iota_{\frac{\partial}{\partial t}} \circ d\big)\alpha\right)_{(p,t)} (\overline{X_1}, \dots, \overline{X_k})\, dt \\ &= \left(d \int_I \alpha + \int_I d\alpha\right)_p (X_1, \dots, X_k) \,.\end{aligned}$$

□

3.29. Proposition und Definition. *Es seien* $(V^\bullet, d)$ *und* $(W^\bullet, d)$ *Kokettenkomplexe und* $f^\bullet$, $g^\bullet\colon (V^\bullet, d) \to (W^\bullet, d)$ *Kokettenabbildungen. Wenn es lineare Abbildungen* $h^k\colon V^k \to W^{k-1}$ *gibt, so dass*

$$g^k - f^k = d^{k-1} \circ h^k + h^{k+1} \circ d^k\colon V^k \to W^k \ ,$$

dann gilt

$$Hf^\bullet = Hg^\bullet\colon H^\bullet(V^\bullet, d) \to H^\bullet(W^\bullet, d) \ .$$

In diesem Fall heißen $f^\bullet$ *und* $g^\bullet$ kokettenhomotop, *kurz* $f^\bullet \sim g^\bullet$, *und* $h^\bullet$ *heißt eine* Kokettenhomotopie.

Beweis. . Sei $v \in V^k$ geschlossen, dann folgt

$$(g^k - f^k)(v) = d(h^k v) + h^{k+1}(d^k v) = d(h^k v) \ ,$$

somit $[f^k(v)] = [g^k(v)]$. □

3.30. Satz (Homotopieinvarianz). *Es seien* M, N *glatte Mannigfaltigkeiten und* $F, G\colon M \to N$ *glatte Abbildungen.*

(1) *Sei* $H\colon M \times [0,1] \to N$ *eine Homotopie zwischen* F *und* G*, dann definiert*

$$h^k = \int_I \circ H^*\colon \Omega^k(N) \to \Omega^{k-1}(M)$$

eine Kokettenhomotopie zwischen F^* $G^*\colon \Omega^\bullet(N) \to \Omega^\bullet(M)$*. Insbesondere gilt* $F^* = G^*\colon H^\bullet_{\mathrm{dR}}(N) \to H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M)$*.*

(2) *Wenn* F *eine Homotopieäquivalenz ist, dann ist* $F^*\colon H^\bullet_{\mathrm{dR}}(N) \to H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M)$ *ein Isomorphismus.*

Beweis. Aussage (1) folgt aus der Homotopieformel aus Lemma 3.28, denn mit $H^* \circ d = d \circ H^*$ gilt

$$\begin{aligned}(d \circ h + h \circ d)(\alpha) &= \Big(d \circ \int_I + \int_I \circ d\Big)(H^*\alpha) \\ &= (i_1^* - i_0^*)(H^*\alpha) = G^*\alpha - F^*\alpha \ ,\end{aligned}$$

da $F = H \circ i_0$ und $G = H \circ i_1$ gemäß Definition 3.21. Aus Proposition 3.29 folgt der letzte Satz.

Wegen Bemerkung 3.22 (4) gilt für eine Homotopieäquivalenz F mit Homotopieinversem $E\colon N \to M$, dass

$$E \circ F \sim \mathrm{id}_M \qquad \text{und} \qquad F \circ E \sim \mathrm{id}_N \ ,$$

also sind die Abbildungen E^* und F^* auf der de Rham-Kohomologie zueinander invers nach (1). □

Übrigens ist F^* nach Bemerkung 3.18 mit den Dachprodukten verträglich, wir erhalten also in (2) einen Isomorphismus von Ringen, genauer, von $\mathbb{R}$-Algebren.

Die obige Folgerung wenden wir an, um das Poincaré-Lemma für Formen beliebigen Grades zu beweisen.

3.31. Definition. Eine Mannigfaltigkeit M heißt *glatt zusammenziehbar*, wenn es $x_0 \in M$ und eine Abbildung $H\colon M \times [0,1] \to M$ mit $H(x,0) = x_0$ und $H(x,1) = x$ für alle $x \in M$ gibt.

3.32. Bemerkung. (1) Nach Definition 3.21 ist M genau dann glatt zusammenziehbar, wenn die konstante Abbildung $p_{x_0}\colon M \to \{x_0\} \subset M$ homotop zu id_M ist. Wir schreiben diese Abbildung als Hintereinanderschaltung

$$p_{x_0} = \iota \circ p\colon\ M \xrightarrow{\ p\ } \mathbb{R}^0 \xrightarrow{\ \iota\ } M$$

mit $p(x) = 0 \in \mathbb{R}^0$ für alle $x \in M$ und $\iota(0) = x_0$. Umgekehrt gilt $p \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^0}$. Nach Bemerkung 3.22 (4) ist also M genau dann glatt zusammenziehbar, wenn M glatt homotopieäquivalent zu $\mathbb{R}^0$ ist.

(2) Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig* bezüglich $x_0 \in U$, wenn $H(x,t) = tx+(1-t)x_0 \in U$ für alle $x \in U$ und alle $t \in [0,1]$. Sternförmige offene Mengen sind mittels H glatt zusammenziehbar.

(3) Eine konvexe Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist sternförmig bezüglich jedes Punktes $x_0 \in U$. Also sind konvexe offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ stets glatt zusammenziehbar.

(4) Analog dazu heißt eine Teilmenge U einer Riemannschen Mannigfaltigkeit *geodätisch konvex*, wenn es zu je zwei Punkten x, $y \in U$ genau eine kürzeste Geodätische in M von x nach y gibt und diese in U verläuft. Geodätisch konvexe Mengen sind ebenfalls zusammenziehbar.

3.33. Lemma (Poincaré). *Es sei M glatt zusammenziehbar. Dann gilt*

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } k = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

und Elemente von $H^0_{\mathrm{dR}}(M)$ werden durch konstante Funktionen repräsentiert.

Beweis. Aus Satz 3.30 und Bemerkung 3.32 (1) folgt, dass

$$p^* \colon H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^0) \to H^k_{\mathrm{dR}}(M)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist, wobei wieder $p\colon M \to \mathbb{R}^0$ durch $p(x) = 0$ für alle $x \in M$ gegeben ist.

Um $H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^0)$ zu bestimmen, überlegen wir uns, dass $\Omega^k(\mathbb{R}^0) = 0$ für alle $k \neq 0$ und

$$\Omega^0(\mathbb{R}^0) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^0, \mathbb{R}) = \mathbb{R} ,$$

da $\mathbb{R}^0$ aus genau einem Punkt besteht. Es folgt $d^k_{\mathbb{R}^0} = 0$ für alle k, also

$$H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^0) = \ker d^k_{\mathbb{R}^0} / \operatorname{im} d^{k-1}_{\mathbb{R}^0} = \Omega^k(\mathbb{R}^0)/0 = \Omega^k(\mathbb{R}^0) ,$$

woraus die erste Behauptung folgt. Zur zweiten sei

$$a \in \mathbb{R} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^0, \mathbb{R}) = H^0_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^0) ,$$

dann ist $p^*a \in \Omega^0(U)$ die konstante Funktion mit Wert a. Da $\Omega^{-1}(M) = 0$, sind alle geschlossenen 0-Formen von dieser Gestalt. □

3.34. Bemerkung. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenziehbar, $k \neq 0$ und $\alpha \in \Omega^k(U)$ geschlossen, also $d\alpha = 0$.

(1) Da $H^k_{\mathrm{dR}}(U) = 0$ für alle $k \neq 0$, gilt $\ker d^k_U = \operatorname{im} d^{k-1}_U$. Also ist die Differentialgleichung $d\beta = \alpha$ in $\Omega^{k-1}(U)$ lösbar, aber nicht eindeutig. Seien etwa β, $\gamma \in \Omega^{k-1}(U)$ mit $d\beta = d\gamma = \alpha$ gegeben, dann ist $d(\gamma - \beta) = 0$. Für $k = 1$ folgt $\gamma = \beta + c$, wobei c eine konstante Funktion auf U darstellt. Für $k \geq 2$ folgt $\gamma = \beta + d\eta$ für eine beliebige $(k-2)$-Form η.

(2) Wir können eine Lösung von $d\beta = \alpha$ mit Hilfe von Lemma 3.28 angeben. Sei nämlich $p_{x_0}\colon U \to U$ die konstante Abbildung auf den Punkt x_0 und H eine Homotopie von p_{x_0} zu id_U, dann setze

$$\beta = h\alpha = \int_I H^*\alpha .$$

Aus Satz 3.30 (1) und $d\alpha = 0$ folgt

$$d\beta = dh\alpha + h \underbrace{d\alpha}_{=0} = \mathrm{id}_U^*\alpha - \underbrace{p^*_{x_0}\alpha}_{=0} = \alpha ,$$

wobei $p_{x_0}^*\alpha = 0$ für $k \geq 1$, da $(p_{x_0})' = 0$.

3.35. Definition. Eine *exakte Sequenz* von Vektorräumen ist eine Familie von linearen Abbildungen $(f_i \colon V_i \to V_{i+1})$ mit $\operatorname{im} f_i = \ker f_{i+1}$. Eine exakte Sequenz von Kokettenkomplexen ist eine Familie von Kokettenabbildungen $f_i \colon (V_i^\bullet, d) \to (V_{i+1}^\bullet, d)$, so dass die Sequenzen $(f_i^k \colon V_i^k \to V_{i+1}^k)$ für alle k exakt sind. Eine *kurze exakte Sequenz* ist eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow 0\,.$$

Also ist eine exakte Sequenz das gleiche wie ein Kokettenkomplex mit verschwindender Kohomologie (azyklischer Komplex). Oft betrachtet man exakte Sequenzen von Kokettenkomplexen und von Kohomologiegruppen, wie im folgenden Lemma.

3.36. Lemma (Schlangenlemma). *Zu kurzen exakten Sequenzen*

$$0 \longrightarrow (V'^\bullet, d') \xrightarrow{f^\bullet} (V^\bullet, d) \xrightarrow{g^\bullet} (V''^\bullet, d'') \longrightarrow 0$$

lassen sich in natürlicher Weise lineare Abbildungen $\delta^k \colon H^k(V''^\bullet, d'') \to H^{k+1}(V'^\bullet, d')$ *konstruieren, so dass die Sequenzen*

$$\cdots \longrightarrow H^k(V'^\bullet, d') \xrightarrow{Hf^k} H^k(V^\bullet, d) \xrightarrow{Hg^k} H^k(V''^\bullet, d'') \xrightarrow{\delta^k}$$
$$\xrightarrow{\delta^k} H^{k+1}(V'^\bullet, d') \xrightarrow{Hf^{k+1}} H^{k+1}(V^\bullet, d) \xrightarrow{Hg^{k+1}} H^{k+1}(V''^\bullet, d'') \longrightarrow \cdots$$

exakt sind.

„Natürlich" bedeutet, dass man aus einem kommutativen Diagramm von Kokettenkomplexen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (V'^\bullet, d') \arrow[r] \arrow[d] & (V^\bullet, d) \arrow[r] \arrow[d] & (V''^\bullet, d'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & (W'^\bullet, d') \arrow[r] & (W^\bullet, d) \arrow[r] & (W''^\bullet, d'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ein entsprechendes kommutatives Diagramm von Kohomologiegruppen erhält:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^k(V''^\bullet, d'') \arrow[r, "\delta^k"] \arrow[d] & H^{k+1}(V'^\bullet, d') \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^k(W''^\bullet, d'') \arrow[r, "\delta^k"] & H^{k+1}(W'^\bullet, d') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Beweisskizze. Zur Konstruktion von δ^k betrachten wir einen Ausschnitt aus der kurzen exakten Sequenz von Komplexen

$$\begin{tikzcd}
& {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & V'^k \arrow[r, "f^k"] \arrow[d, "d'^k"] & V^k \arrow[r, "g^k"] \arrow[d, "d^k"] & V''^k \arrow[r] \arrow[d, "d''^k"] & 0 \\
0 \arrow[r] & V'^{k+1} \arrow[r, "f^{k+1}"] \arrow[d] & V^{k+1} \arrow[r, "g^{k+1}"] \arrow[d] & V''^{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

Es sei $v'' \in \ker d''^k \subset V''^k$. Da g^k surjektiv ist, existiert $v \in V^k$ mit $g^k(v) = v''$. Aus Kommutativität folgt $g^{k+1}(d^k v) = d''^k(g^k v) = 0$, also $d^k v \in \ker(g^{k+1}) = \operatorname{im}(f^{k+1})$. Da f^{k+1} injektiv ist, existiert ein eindeutiges $v' \in V'^{k+1}$ mit $f^{k+1}(v') = d^k v$. Mit ähnlichen Argumenten zeigt man, dass $d'^{k+1} v' = 0$, und dass die Kohomologieklasse $[v']$ nur von der Kohomologieklasse $[v'']$, aber nicht von v'' und v abhängt. Dann definiert man $\delta^k[v''] = [v']$.

Es bleibt zu zeigen, dass die resultierende Kohomologiesequenz exakt ist, und dass die Konstruktion von δ^k natürlich ist. Dazu sind viele einzelne Beweisschnitte nötig, die aber nicht schwieriger sind als die obige Konstruktion. $\square$

3.37. Satz (Mayer-Vietoris-Sequenz). *Es seien U, $V \subset M$ offen mit $U \cup V = M$ dann existiert eine natürliche exakte Sequenz*

$$\longrightarrow H^k_{\mathrm{dR}}(M) \longrightarrow H^k_{\mathrm{dR}}(U) \oplus H^k_{\mathrm{dR}}(V) \longrightarrow H^k_{\mathrm{dR}}(U \cap V) \longrightarrow H^{k+1}_{\mathrm{dR}}(M) \longrightarrow \quad .$$

Seien $M = U \cup V$ und $N = X \cup Y$ zwei Vereinigungen offener Mengen und $F \colon N \to M$ eine Abbildung mit $F(X) \subset U$ und $F(Y) \subset V$. „Natürlichkeit" der Sequenz bedeutet, dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^k_{\mathrm{dR}}(U) \oplus H^k_{\mathrm{dR}}(V) \arrow[r] \arrow[d, "F^*"] & H^k_{\mathrm{dR}}(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d, "F^*"] & H^{k+1}_{\mathrm{dR}}(M) \arrow[r] \arrow[d, "F^*"] & {} \arrow[d, "F^*"] \\
{} \arrow[r] & H^k_{\mathrm{dR}}(X) \oplus H^k_{\mathrm{dR}}(Y) \arrow[r] & H^k_{\mathrm{dR}}(X \cap Y) \arrow[r] & H^{k+1}_{\mathrm{dR}}(N) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Beweis. Betrachte die Abbildungen

$$\begin{array}{lll}
r : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) & \text{mit} & \alpha \mapsto (\alpha|_U, \alpha|_V) \\
s : \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) \to \Omega^\bullet(U \cap V) & \text{mit} & (\beta, \gamma) \mapsto \gamma|_{U\cap V} - \beta|_{U\cap V}
\end{array}$$

dann ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \Omega^\bullet(M) \xrightarrow{\ r\ } \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) \xrightarrow{\ s\ } \Omega^\bullet(U \cap V) \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

nach Bemerkung 3.12 an den ersten beiden Stellen exakt.

Zur Exaktheit bei $\Omega^\bullet(U \cap V)$ wählen wir eine Partition der Eins wie in Abschnitt 1.2, also $\varphi, \psi : M \to [0,1]$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset U$, $\operatorname{supp} \psi \subset V$ und $\varphi + \psi = 1$ auf ganz M. Sei $\omega \in \Omega^\bullet(U \cap V)$, dann können wir $-\psi \cdot \omega$ glatt auf U und $\varphi \cdot \omega$ glatt auf V fortsetzen, und es gilt

$$\varphi \cdot \omega - (-\psi \cdot \omega) = (\varphi + \psi) \cdot \omega = \omega \; .$$

Also ist die Abbildung s surjektiv, und die Sequenz (*) ist exakt. Jetzt folgt der Satz aus dem Schlangenlemma 3.36. $\square$

Homotopieinvarianz, Poincaré-Lemma und die Mayer-Vietoris-Sequenz reichen im Prinzip aus, um die de Rham-Kohomologie aller Mannigfaltigkeiten zu bestimmen. Dabei setzt man M systematisch aus einfacheren offenen Teilmengen zusammen. Auf diese Weise kann man einsehen, dass $H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M)$ zur reellwertigen singulären Kohomologie isomorph ist, die man in der algebraischen Topologie betrachtet.

3.38. Beispiel. Wir betrachten die Sphäre

$$S^n = \left\{\, x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; |x| = 1 \,\right\}$$

mit den stereographischen Projektionen $\varphi_\pm \colon U_\pm = S^n \setminus \{\pm e_{n+1}\} \to \mathbb{R}$ aus Beispiel 1.6 (1). Es gilt $S^n = U_+ \cup U_-$ und U_+ und U_- sind zusammenziehbar.

Für $n = 0$ ist die Vereinigung disjunkt, und die Mayer-Vietoris-Sequenz zerfällt in lauter Teilstücke

$$0 = H^{k-1}_{\mathrm{dR}}(\emptyset) \longrightarrow H^k_{\mathrm{dR}}(S^0) \longrightarrow H^k_{\mathrm{dR}}(U_+) \oplus H^k_{\mathrm{dR}}(U_-) \longrightarrow H^k_{\mathrm{dR}}(\emptyset) = 0 \; .$$

Also folgt $H^0_{\mathrm{dR}}(S^0) \cong \mathbb{R}^2$ und $H^k_{\mathrm{dR}}(S^0) = 0$ für $k \neq 0$.

Für $n \geq 1$ ist $U_+ \cap U_- \cong \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ homotopieäquivalent zu S^{n-1}. Dazu betrachten wir die Inklusion $i\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und die Abbildung $r\colon \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to S^{n-1}$ mit $r(v) = \frac{v}{\|v\|}$. Es gilt $r \circ i = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ und $i \circ r \sim \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}}$ via

$$h\colon \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \quad \text{mit} \quad h(v,t) = \frac{v}{\|v\|^t} .$$

Nach dem Poincaré-Lemma werden Elemente von $H^0_{\mathrm{dR}}(U_\pm) \cong \mathbb{R}$ durch konstante Funktionen repräsentiert. Also zerfällt die Mayer-Vietoris-Sequenz jetzt in Abschnitte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0_{\mathrm{dR}}(S^n) & \longrightarrow & H^0_{\mathrm{dR}}(U_+) \oplus H^0_{\mathrm{dR}}(U_-) & \xrightarrow{s} & H^0_{\mathrm{dR}}(U_+ \cap U_-) & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{dR}}(S^n) \longrightarrow 0 \\ & & & & \mathbb{R}^2 \ni (a,b) & \longmapsto & b-a & & \end{array}$$

sowie

$$0 \longrightarrow H^{k-1}_{\mathrm{dR}}(S^{n-1}) \xrightarrow{\sim} H^k_{\mathrm{dR}}(S^{n-1}) \longrightarrow 0$$

für alle $k \geq 1$.

Falls $n = 1$, ist $H^0_{\mathrm{dR}}(U_+ \cap U_-) \cong H^0_{\mathrm{dR}}(S^0) \cong \mathbb{R}^2$, und die Abbildung $s\colon (a,b) \mapsto (b-a, b-a)$ hat Rang 1, so dass $H^0_{\mathrm{dR}}(S^1) = \ker s \cong \mathbb{R}$ und $H^1_{\mathrm{dR}}(S^1) \cong \mathbb{R}^2/\operatorname{im} s \cong \mathbb{R}$. Alle anderen $H^k_{\mathrm{dR}}(S^1)$ verschwinden nach Bemerkung 3.13 (5) oder wegen der zweiten Sequenz.

Für $n > 1$ ist s surjektiv, da $H^0_{\mathrm{dR}}(S^{n-1}) \cong \mathbb{R}$. Wir schließen induktiv, dass

$$H^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \text{ oder } k = n , \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

3.3. Exkurs: der Satz von de Rham

Wir erweitern die Idee des Satzes von Mayer-Vietoris auf beliebige offene Überdeckungen von M und erhalten den Čech-de Rham-Doppelkomplex. Mit seiner Hilfe zeigen wir, dass die de Rham-Kohomologie mit der Garben-Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ übereinstimmt.

Der erweiterte Čech-de Rham-Doppelkomplex hat auch andere Anwendungen. Beispielsweise lässt er sich zur Definition der glatten Deligne-Kohomologie benutzen, in der man verfeinerte charakteristische Klassen für Vektorbündel mit Zusammenhang definieren kann.

3.39. Definition. Eine *Garbe* abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum M ist ein kontravarianter Funktor $\mathcal{G}$ von der Kategorie $\mathcal{O}_M$ der offenen Mengen von M und der Inklusionsabbildungen $i\colon V \to U$ für alle $V \subset U \in \mathcal{O}_M$ in die Kategorie der abelschen Gruppen, so dass zu jeder Vereinigung $U = \dot{\bigcup}_{i \in I} U_i$ und jeder Auswahl von Elementen $g_i \in \mathcal{G}(U_i)$ mit $g_i|_{U_i \cap U_j} = g_j|_{U_i \cap U_j}$ genau ein $g \in \mathcal{G}(U)$ existiert mit $g|_{U_i} = g_i$ für alle $i \in I$.

3.40. Beispiel. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.

(1) Nach Bemerkung 3.12 bilden die k-Formen auf M eine Garbe Ω^k.
(2) Sei A eine feste abelsche Gruppe, etwa $A = \mathbb{Z}$ oder $A = \mathbb{R}$. Dann ordnet die *Garbe* $\underline{A}$ *der lokal-konstanten Funktionen mit Werten in* A jeder offenen Teilmenge $U \subset M$ die Gruppe $\underline{A}(U)$ der lokal konstanten Abbildungen $a\colon U \to A$ und jeder Inklusion $V \to U$ die Einschränkung $a \mapsto a|_V$ zu.

3.41. Proposition und Definition. *Es sei* $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ *eine offene Überdeckung von* M *und* $\mathcal{G}$ *eine Garbe abelscher Gruppen auf* M*. Dann sei*

$$\check{C}^k(\mathcal{U};\mathcal{G}) = \left\{ g \in \bigoplus_{i_0,\dots,i_k \in I} \mathcal{G}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}) \;\middle|\; g_{i_0,\dots,i_j,i_{j-1},\dots,i_k} = -g_{i_0,\dots,i_k} \textit{für alle} 1 \leq j \leq k \right\}$$

und $\check\delta^k\colon \check C^k(\mathcal U;\mathcal G)\to \check C^{k+1}(\mathcal U;\mathcal G)$ *definiert durch*

$$(\check\delta^k g)_{i_0,\dots,i_{k+1}} = \sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j g_{i_0,\dots,\widehat{i_j},\dots,i_{k+1}}\,|_{U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_{k+1}}}$$

Dann bildet $(\check C^\bullet(\mathcal U;\mathcal G),\check\delta)$ *einen Kokettenkomplex, den* Čech-Komplex von $\mathcal U$ mit Werten in $\mathcal G$. *Wir nennen* $\check H^\bullet(\mathcal U;\mathcal G)=H^\bullet(\check C^\bullet(\mathcal U;\mathcal G),\check\delta)$ *die* Čech-Kohomologie von $\mathcal U$ mit Werten in $\mathcal G$. *Es gilt*

$$\check H^0(\mathcal U;\mathcal G)=\mathcal G(M)\ .$$

Beweis. Der Operator $\check\delta$ hat die Struktur eines simplizialen Korand-Operators. Also rechnet man nach, dass

$$\begin{aligned}
\big(\check\delta^{k+1}(\check\delta^k g)\big)_{i_0,\dots,i_{k+2}} &= \sum_{j=0}^{k+2}(-1)^j(\check\delta g)_{i_0,\dots,\widehat{i_j},\dots,i_{k+2}}\big|_{U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_{k+2}}}\\
&= \sum_{j=0}^{k+2}\bigg(\sum_{\ell=0}^{j-1}(-1)^{j+\ell}g_{i_0,\dots,\widehat{i_\ell},\dots,\widehat{i_j},\dots,i_{k+2}}\\
&\qquad + \sum_{\ell=j+1}^{k+2}(-1)^{j+\ell-1}g_{i_0,\dots,\widehat{i_j},\dots,\widehat{i_\ell},\dots,i_{k+2}}\bigg)\bigg|_{U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_{k+2}}}\\
&= 0\ .
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir tatsächlich einen Kokettenkomplex.

Sei $g\in\check H^0(\mathcal U;\mathcal G)=\ker\check\delta^0$, dann gilt

$$g_j|_{U_i\cap U_j}-g_i|_{U_i\cap U_j}=(\check\delta g)_{i,j}=0\ ,$$

also existiert nach Definition 3.39 genau ein $\overline g\in\mathcal G(M)$ mit $\overline g|_{U_i}=g_i$, und wir erhalten eine Abbildung $\check H^0(\mathcal U;\mathcal G)\to\mathcal G(M)$.

Die Umkehrabbildung ordnet $\overline g\in\mathcal G(M)$ das Element $g\in\check C^0(\mathcal U;\mathcal G)$ mit $g_i=\overline g|_{U_i}\in\mathcal G(U_i)$ zu, und es folgt

$$(\check\delta g)_{i,j}=g_j|_{U_i\cap U_j}-g_i|_{U_i\cap U_j}=\overline g|_{U_i\cap U_j}-\overline g|_{U_i\cap U_j}=0\ ,$$

also folgt $g\in\check H^0(\mathcal U;\mathcal G)$. □

Die Čech-Kohomologie einer Garbe $\mathcal G$ ist besonders einfach zu bestimmen, wenn man Elemente aus $\mathcal G(U)$ mit Funktionen aus $\mathcal C^\infty(U)$ multiplizieren darf. Solche Garben heißen auch Garben von $\mathcal C^\infty$-Moduln. Beispiele sind die Garben Ω^k.

3.42. Lemma. *Es sei* $\mathcal G$ *eine Garbe von* $\mathcal C^\infty$*-Moduln auf einer Mannigfaltigkeit* M*.*

(1) *Es seien* U, $V\subset M$ *offen,* $f\in\mathcal G(U\cap V)$ *und* $\rho\colon U\to\mathbb R$ *eine Funktion, so dass der Träger* $\operatorname{supp}\rho\subset U$ *in* M *abgeschlossen ist. Dann existiert* $g\in\mathcal G(V)$ *mit* $g|_{U\cap V}=\rho|_{U\cap V}\cdot f$*.*

(2) *Es sei* $\mathcal U=(U_i)_{i\in I}$ *eine offene Überdeckung von* M*, dann gilt*

$$\check H^k(\mathcal U;\mathcal G)=\begin{cases}\mathcal G(M) & \text{für } k=0, \text{und}\\ 0 & \text{sonst}\ .\end{cases}$$

(3) *Für* $\mathcal U$ *wie oben ist die Sequenz*

$$0\to\mathcal G(M)\xrightarrow{r}\check C^0(\mathcal U;\mathcal G)\xrightarrow{\check\delta^0}\check C^1(\mathcal U;\mathcal G)\to\dots$$

mit $(rf)_i=f|_{U_i}$ *für alle* $f\in\mathcal G(M)$ *exakt.*

Beweis. Da $\operatorname{supp}(\rho)$ in M abgeschlossen ist, ist $U\setminus\operatorname{supp}(\rho)$ offen. Wir definieren g in (1) durch

$$g|_{V\setminus\operatorname{supp}(\rho)} = 0 \qquad \text{und} \qquad g|_{U\cap V} = \rho|_{U\cap V}\cdot f\;.$$

Auf dem Durchschnitt $U\cap V\setminus\operatorname{supp}(\rho)$ verschwinden beide Elemente, also existiert g auf

$$(U\cap V)\cup(V\setminus\operatorname{supp}(\rho)) = V\;.$$

Wir beweisen (3), indem wir eine Kokettenhomotopie h zwischen der Identität und der Nullabbildung angeben. Dann folgt (2) aus (3) und Proposition (3.41). Sei $(\rho_i)_{i\in I}$ eine Partition der Eins zur Überdeckung $\mathcal{U}$. Wir definieren $h^0\colon \check{C}^0(\mathcal{U};\mathcal{G})\to\mathcal{G}(M)$ durch

$$(h^0 g) = \sum_{i\in I}\rho_i\cdot g_i \in \mathcal{G}(M)\;,$$

wobei jeder Summand außerhalb von U_i durch 0 fortgesetzt wird. Analog definieren wir $h^k\colon \check{C}^k(\mathcal{U};\mathcal{G})$ $\to \check{C}^{k-1}(\mathcal{U};\mathcal{G})$ durch

$$(h^k g)_{i_1,\dots,i_k} = \sum_{j\in I}\rho_j\cdot g_{j,i_1,\dots,i_k}\in\mathcal{G}(U_{i_1}\cap\dots\cap U_{i_k})\;,$$

wobei jeder Summand gemäß (1) fortgesetzt wird. Dann folgt (Übung)

$$\check{\delta}\circ h + h\circ\check{\delta} = \mathrm{id}\;. \quad \square$$

3.43. Beispiel. Es sei $M = U\cup V$ und $\mathcal{U} = (U,V)$ eine offene Überdeckung wie in der Mayer-Vietoris-Sequenz aus Satz 3.37. Für die Garbe $\mathcal{G} = \Omega^k$ aus Bemerkung 3.12 erhalten wir den Komplex

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U};\Omega^k) = \Omega^k(U)\oplus\Omega^k(V) & \longrightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U};\Omega^k) = \Omega^k(U\cap V) & \longrightarrow 0 \\ & (\alpha,\beta) & \longmapsto & \beta-\alpha\;. & \end{array}$$

Nach Proposition 3.41 ist $\check{H}^0(\mathcal{U};\Omega^k) = \Omega^k(M)$, während wir im Beweis der Mayer-Vietoris-Sequenz gezeigt haben, dass $\check{H}^1(\mathcal{U};\Omega^k) = 0$.

3.44. Bemerkung. Äquivalent kann man anstelle von $\check{C}^k(\mathcal{U};\mathcal{G})$ den Raum

$$\bigoplus_{i_0,\dots,i_k\in I}\mathcal{G}(U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_k})$$

betrachten, mit $\check{\delta}^k$ wie in Proposition 3.41. Anstelle der Homotopie im Beweis von Lemma 3.42 betrachtet man den Ausdruck

$$(h^k g)_{i_1,\dots,i_k}\sum_{\ell=0}^{k}\sum_{j\in I}(-1)^\ell\rho_j\cdot g_{i_1,\dots,i_\ell,j,i_{\ell+1},\dots,i_k}\in\mathcal{G}(U_{i_1}\cap\dots\cap U_{i_k})$$

mit $h^{k+1}\circ\check{\delta}+\check{\delta}\circ h^k = (k+1)\cdot\mathrm{id}$.

3.45. Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ von M heißt *gut*, wenn für alle $k\ge 0$ und alle $i_0,\dots,i_k\in I$ die Teilmenge $U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_k}$ entweder leer oder glatt zusammenziehbar ist.

3.46. Bemerkung. Man kann gute Überdeckungen auf verschiedene Weisen konstruieren.

(1) Zu jedem Punkt $p\in M$ existiert $r>0$, so dass der Ball $B_r(p)$ geodätisch konvex ist. Eine Überdeckung aus solchen Bällen ist gut, da Durchschnitte konvexer Mengen wieder konvex, also zusammenziehbar, oder leer sind.

(2) Sei $S_\bullet$ eine simpliziale Zerlegung von M, insbesondere ist $S_0 \subset M$ eine Menge von Punkten, S_k eine Menge von Simplizes $\sigma\colon \Delta^k = \{x \in [0,1]^{k+1} \mid x_0 + \dots + x_k = 1\} \to M$, so dass $(\partial_i\sigma)(x_0, \dots, x_{k-1}) = \sigma(x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{k-1}) \in S_{k-1}$ für alle $0 \le i \le k$, und M ist die disjunkte Vereinigung der $\sigma_k(\mathring{\Delta}^k)$ über alle k und alle $\sigma \in S_k$. Wir nehmen an, dass jedes Simplex durch Angabe seiner Ecken $\sigma(0, \dots, 1, \dots, 0) \in S_0$ eindeutig bestimmt ist. Ein k-Simplex σ heißt *Seite* eines Simplexes τ, wenn σ die Einschränkung von τ auf einen $(k+1)$-dimensionalen Koordinatenunterraum darstellt, also $\sigma(x_0, \dots, x_k) = \tau(0, \dots, 0, x_0, 0, \dots)$ Dann ist für jedes $\sigma \in S_k$ der *Stern*

$$\operatorname{st}(\sigma) = \bigcup_{\ell \ge k} \bigcup_{\substack{\tau \in S_\ell \\ \sigma \text{ Seite von } \tau}} \tau\bigl(\mathring{\Delta}^\ell\bigr) \subset M$$

offen und zusammenziebar. Also bilden die Sterne $(\operatorname{st}(p))_{p \in S_0}$ eine gute Überdeckung $\mathcal{U}$ von M.

(3) Sei $\underline{A}$ die lokal konstante Garbe mit Werten in einer abelschen Gruppe A, etwa $A = \mathbb{Z}$ oder $A = \mathbb{R}$, und sei $\mathcal{U} = (\operatorname{st}(p))_{p \in S_0}$ die Überdeckung aus (2), dann ist $(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}; \underline{A}), \check{\delta})$ isomorph zum simplizialen Komplex zu $S_\bullet$ mit Koeffizienten in A. Wir schließen daraus, dass

$$\check{H}^\bullet(\mathcal{U}; \underline{A}) = H^\bullet_{\mathrm{simp}}(S_\bullet; A) .$$

Im allgemeinen sind die Kohomologiegruppen $H^k_{\mathrm{simp}}(S_\bullet; A)$ für $0 \le k \le \dim M$ nichttrivial. Also „sieht" die Garbenkohomologie für lokalkonstante Garben „mehr" als für Garben von $\mathcal{C}^\infty$-Moduln.

3.47. Proposition und Definition. *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von M. Für $k \ge 0$ sei*

$$\begin{aligned}
\check{C}^k_{\mathrm{dR}}(\mathcal{U}) &= \check{C}^k(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}) \oplus \bigoplus_{i=1}^k \check{C}^{k-i}(\mathcal{U}; \Omega^{i-1}) \oplus \Omega^k(M) , \\
\mathbf{d}^k &= \bigl(\varepsilon\colon \check{C}^k(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}) \hookrightarrow \check{C}^k(\mathcal{U}, \Omega^0)\bigr) \\
&\qquad \oplus \bigoplus_{i=1}^k \bigl(d^{i-1}\colon \check{C}^{k-i}(\mathcal{U}; \Omega^{i-1}) \longrightarrow \check{C}^{k-i}(\mathcal{U}; \Omega^i)\bigr) \\
&\qquad \oplus \bigl(d^k\colon \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)\bigr) , \\
\textit{und} \qquad \check{\boldsymbol{\delta}}^k &= \bigl(\check{\delta}\colon \check{C}^k(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}) \longrightarrow \check{C}^{k+1}(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{R}})\bigr) \\
&\qquad \oplus \bigoplus_{i=1}^k \bigl((-1)^i\check{\delta}\colon \check{C}^{k-i}(\mathcal{U}; \Omega^{i-1}) \longrightarrow \check{C}^{k+1-i}(\mathcal{U}; \Omega^{i-1})\bigr) \\
&\qquad \oplus \bigl((-1)^{k+1} r\colon \Omega^k(M) \hookrightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}; \Omega^k)\bigr) .
\end{aligned}$$

Dann ist $\bigl(\check{C}^\bullet_{\mathrm{dR}}(\mathcal{U}), \mathbf{d}^\bullet + \check{\boldsymbol{\delta}}^\bullet\bigr)$ ein Kokettenkomplex, der erweiterte Čech-de Rham-Doppelkomplex *mit Kohomologie $\check{H}^\bullet_{\mathrm{dR}}(\mathcal{U})$, und die Projektionen auf $(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{R}}), \check{\delta}^\bullet)$ und auf $(\Omega^\bullet(M), d^\bullet)$ sind Kokettenabbildungen.*

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \\
\check C^{k+1}(\mathcal U;\mathbb R) \arrow[u] \arrow[r] & {} \\
\check C^{k}(\mathcal U;\mathbb R) \arrow[u, "\check\delta"'] \arrow[r, "\varepsilon"] & \check C^{k}(\mathcal U;\Omega^0) \arrow[u] \arrow[r] & {} \\
\check C^{k-1}(\mathcal U;\mathbb R) \arrow[u, "\check\delta"'] \arrow[r, "\varepsilon"] & \check C^{k-1}(\mathcal U;\Omega^0) \arrow[u, "-\check\delta"'] \arrow[r] & \ddots & {} \\
\vdots \arrow[u, "\check\delta"'] & \vdots \arrow[u, "-\check\delta"'] & \ddots \arrow[r] & \check C^{1}(\mathcal U;\Omega^{k-1}) \arrow[u] \arrow[r] & {} \\
\check C^{0}(\mathcal U;\mathbb R) \arrow[u, "\check\delta"'] \arrow[r, "\varepsilon"] & \check C^{0}(\mathcal U;\Omega^0) \arrow[u, "-\check\delta"'] \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & \check C^{0}(\mathcal U;\Omega^{k-1}) \arrow[u, "(-1)^k\check\delta"'] \arrow[r, "d"] & \check C^{0}(\mathcal U;\Omega^{k}) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
0 \arrow[u] \arrow[r] & \Omega^0(M) \arrow[u, "-r"'] \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & \Omega^{k-1}(M) \arrow[u, "(-1)^k r"'] \arrow[r, "d"] & \Omega^{k}(M) \arrow[u, "(-1)^{k+1} r"'] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Beweis. Um zu zeigen, dass wir einen Komplex erhalten, betrachten wir $\alpha \in \check C^k(\mathcal U;\Omega^j)$. Es gilt

$$(\mathbf{d}^\bullet + \boldsymbol{\check\delta}^\bullet)^2\alpha = d^{j+1}(d^j\alpha) + (-1)^{j-1} d^j(\check\delta^k\alpha) + (-1)^j \check\delta^k(d^j a) + (-1)^{2j}\check\delta^{k+1}(\check\delta^k\alpha) = 0\ ,$$

denn nach Konstruktion ist

$$\bigl(d^j(\check\delta^k\alpha)\bigr)_{i_0,\dots,i_{k+1}} = \bigl(\check\delta^k(d^j\alpha)\bigr)_{i_0,\dots,i_{k+1}} = \sum_{\ell=0}^{k+1}(-1)^\ell d\alpha_{i_0,\dots,\widehat{i_\ell},\dots,i_{k+1}}|_{U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_{k+1}}}\ .$$

Die letzten Aussagen sind klar. □

3.48. Definition. Eine Kokettenabbildung, die auf den Kohomologien einen Isomorphismus induziert, heißt *Quasiisomorphismus*.

3.49. Satz (de Rham). *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathcal U$ eine offene Überdeckung von M.*

(1) *Die Projektion $\check C^\bullet_{\mathrm{dR}}(\mathcal U) \to \check C^\bullet(\mathcal U;\mathbb R)$ ist ein Quasiisomorphismus.*
(2) *Sei $\mathcal U$ gut, dann ist auch die Projektion $\check C^\bullet_{\mathrm{dR}}(\mathcal U) \to \Omega^\bullet(M)$ ein Quasiisomorphismus.*

Beweis. Wir beweisen Aussage (2) mit Hilfe des Poincaré-Lemmas 3.33. Der Beweis von (1) verläuft analog und benutzt Lemma 3.42 (Übung).

Zu (2) zeigen wir zunächst Surjektivität. Zu $\alpha \in \ker d^k \subset \Omega^k(M)$ konstruieren wir induktiv $\alpha^j \in \check C^j(\mathcal U;\Omega^{k-j-1})$ für $j = 0,\dots,k-1$ und $\alpha^k \in \check C^k(\mathcal U;\mathbb R)$, so dass $(\alpha^k,\dots,\alpha^0,\alpha) \in \check C^k_{\mathrm{dR}}(\mathcal U)$ einen Čech-de Rham-Kozykel bildet.

Sei also $d\alpha = 0$, dann gilt $d(r\alpha)_i = d(\alpha|_{U_i}) = 0$. Nach dem Poincaré-Lemma existiert $\alpha_i^0 \in \Omega^{k-1}(U_i)$ mit $d\alpha_i^0 = (-1)^k\alpha|_{U_i}$ für alle $i \in I$. Somit gilt

$$d\alpha^0 + (-1)^{k+1} r\alpha = 0 \in \check C^0(\mathcal U;\Omega^k)\ . \tag{1}$$

Wir schließen daraus, dass

$$d(\check\delta\alpha^0) = \check\delta(d\alpha^0) = (-1)^k\check\delta(r\alpha) = 0\;,$$

da $\check\delta \circ r = 0$. Nach dem Poincaré-Lemma existiert eine Form $\alpha^1_{i,j} \in \Omega^{k-2}(U_{i_0} \cap U_{i_1})$ mit $d\alpha^1_{i,j} = (-1)^{k-1}(\check\delta\alpha^0)_{i,j}$ für alle $i, j \in I$. Da $(\check\delta\alpha^0)_{j,i} = -(\check\delta\alpha^0)_{i,j}$, dürfen wir α^1 so wählen, dass $\alpha^1_{j,i} = -\alpha^1_{i,j}$, so dass $\alpha^1 \in \check C^1(\mathcal U; \Omega^{k-2})$. Dann folgt

$$d\alpha^1 + (-1)^k\check\delta\alpha^0 = 0 \in \check C^1(\mathcal U; \Omega^{k-1})\;. \tag{2}$$

Wir setzen dieses Verfahren fort und erhalten im vorletzten Schritt $\alpha^{k-1} \in \check C^{k-1}(\mathcal U; \Omega^0)$, so dass

$$d\alpha^{k-1} + \check\delta\alpha^{k-2} = 0 \in \check C^{k-1}(\mathcal U; \Omega^1)\;. \tag{3}$$

Insbesondere gilt

$$d(\check\delta\alpha^{k-1}) = \check\delta(d\alpha^{k-1}) = -\check\delta(\check\delta\alpha^{k-2}) = 0 \in \check C^k(\mathcal U; \Omega^1)\;.$$

Aus dem Poincaré-Lemma folgt, dass $(\check\delta\alpha^{k-1})_{i_0,\dots,i_k}$ auf $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}$ konstant ist. Außerdem erfüllt $\check\delta\alpha^{k-1}$ die Symmetriebedingung aus Proposition 3.41. Also erhalten wir schließlich $\alpha^k = \check\delta\alpha^{k-1} \in \check C^k(\mathcal U; \mathbb R)$ mit

$$\varepsilon\alpha^k - \check\delta\alpha^{k-1} = 0 \in \check C^k(\mathcal U; \Omega^0)\;. \tag{4}$$

Wegen der Gleichungen (1)–(4) ist $(\alpha^k, \dots, \alpha^0, \alpha) \in \check C^k_{\mathrm{dR}}(\mathcal U)$ ein (erweiterter) Čech-de Rham-Kozykel, der α fortsetzt.

Zur Injektivität sei ein Kozykel $\boldsymbol\alpha = (\alpha^k, \dots, \alpha^0, \alpha) \in \check C^k_{\mathrm{dR}}(\mathcal U)$ mit $[\alpha] = 0 \in H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ gegeben. Wir konstruieren induktiv $\boldsymbol\beta = (\beta^{k-1}, \dots, \beta^0, \beta) \in \check C^{k-1}_{\mathrm{dR}}(\mathcal U)$, so dass $\boldsymbol\alpha = (\mathbf d + \boldsymbol{\check\delta})\boldsymbol\beta$, also $[\boldsymbol\alpha] = 0 \in \check H^k_{\mathrm{dR}}(\mathcal U)$.

Zunächst wählen wir $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$ mit $\alpha = d\beta \in \Omega^k(M)$. Für alle i folgt aus Gleichung (1), dass

$$d\big(\alpha^0_i - (-1)^k\beta|_{U_i}\big) = (-1)^k(\alpha - d\beta)|_{U_i} = 0 \in \Omega^k(U_i)\;,$$

also existiert eine Form $\beta^0_i \in \Omega^{k-2}(U_i)$ nach dem Poincaré-Lemma mit

$$d\beta^0_i + (-1)^k\beta|_{U_i} = \alpha_i \in \Omega^{k-1}(U_i)\;.$$

Wie oben können wir $\beta^1, \dots, \beta^{k-1}$ induktiv so konstruieren, dass $(\mathbf d + \boldsymbol{\check\delta})\boldsymbol\beta = \boldsymbol\alpha$. Damit folgt auch Injektivität, und die Projektion auf $(\Omega^\bullet(M), d)$ ist tatsächlich ein Quasiisomorphismus. □

3.50. Bemerkung. Bis jetzt haben wir nur gezeigt, dass die de Rham-Kohomologie zur Čech-Kohomologie einer guten Überdeckung isomorph ist. In der algebraischen Geometrie würde man statt dessen den Limes über alle Verfeinerungen bilden. Ein weiteres Garben-theoretisches Argument zeigt, dass dieser Limes mit der Čech-Kohomologie einer beliebigen guten Überdeckung übereinstimmt, da M eine Mannigfaltigkeit ist. Erst jetzt folgt $H^k_{\mathrm{dR}}(M) = H^k(M; \mathbb R)$.

Wir benutzen die obigen Konstruktionen, um die de Rham-Kohomologie mit der ganzzahligen Čech-Kohomologie in Verbindung zu bringen und weiter zu verfeinern. Eine wichtige geometrische Motivation für diese Konstruktion liefern wir im nächsten Abschnitt nach.

3.51. Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $\mathcal{U}$ eine gute Überdeckung und $A \subsetneqq \mathbb{R}$ eine Untergruppe. Für $k \geq 0$ definieren wir den *glatten Deligne-Komplex* $\hat{C}_k^\bullet(\mathcal{U}; A)$ durch

$$\begin{aligned} \hat{C}_k^\ell(\mathcal{U}; A) &= \check{C}^\ell(\mathcal{U}; \underline{A}) \oplus \bigoplus_{i=1}^k \check{C}^{\ell-i}(\mathcal{U}; \Omega^{i-1}) \;, \\ \mathbf{d}_k^\ell &= \mathbf{d}^\ell|_{\hat{C}_{k-1}^\ell(\mathcal{U};A)} \oplus 0|_{\check{C}^\bullet(\mathcal{U};\Omega^{k-1})} \\ \text{und} \qquad \check{\boldsymbol{\delta}}_k^\ell &= \check{\boldsymbol{\delta}}^\ell|_{\hat{C}_k^\ell(\mathcal{U};A)} \;. \end{aligned}$$

Die k-te Kohomologie $\hat{H}^k(M; A) = H^k(\hat{C}_k^\bullet(\mathcal{U}; A))$ heißt die k-te *glatte Deligne-Kohomologie* von M mit Koeffizienten in A.

3.52. Bemerkung. Wir zählen einige Eigenschaften auf. Zum Teil werden wir sie in den Übungen beweisen.

(1) Die glatte Deligne-Kohomologie hängt nicht von der guten Überdeckung $\mathcal{U}$ ab und bildet einen kontravarianten Funktor von der Kategorie $\mathcal{C}^\infty$ in die Kategorie der abelschen Gruppen. Andere, isomorphe Konstruktionen stammen zum Beispiel von Cheeger und Simons, und von Harvey und Lawson.

(2) **Warnung:** Die glatte Deligne-Kohomologie ist keine Kohomologietheorie im klassischen Sinne. Beispielsweise gilt Homotopieinvarianz nicht. Stattdessen handelt es sich um eine „glatte Kohomologietheorie“ im Sinne von Bunke und Schick.

(3) Es bezeichne

$$\Omega_A^k(M) = \left\{ \alpha \in \Omega^k(M) \;\middle|\; \begin{aligned} &\text{es gibt } (\alpha^k, \dots, \alpha^0, \alpha) \in \ker(\mathbf{d} + \check{\boldsymbol{\delta}}) \\ &\subset \check{C}_{\mathrm{dR}}^k(\mathcal{U}) \text{ mit } \alpha^k \in \check{C}^k(\mathcal{U}; \underline{A}) \end{aligned} \right\}$$

die *Formen mit Perioden in A*. Dann gilt

$$\operatorname{im}(d^{k-1}) \subset \Omega_A^k(M) \subset \ker(d^k) \;.$$

Jeder Deligne-Kozykel $(\alpha^k, \dots, \alpha^0) \in \hat{C}_k^k(\mathcal{U}; A)$ lässt sich auf eindeutige Weise zu einem erweiterten Čech-de Rham-Kozykel fortsetzen $(\alpha^k, \dots, \alpha^0, \alpha)$, und wir erhalten eine eindeutige Abbildung

$$d\colon \hat{H}^k(M; A) \to \Omega_A^k(M) \;,$$

die jeder Klasse $[(\alpha^k, \dots, \alpha^0)] \in \hat{H}^k(M; A)$ ihre *Krümmung* $\alpha \in \Omega_A^k(M)$ zuordnet.

(4) Elemente des Kerns der Krümmungsabbildung d lassen sich repräsentieren durch Deligne-Kozykel der Form $(\alpha^k, \alpha^{k-1}, 0, \dots, 0)$. Solche Klassen repräsentieren Kohomologieklassen in $\check{H}^{k-1}(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}/A}) \cong H^{k-1}(M; \mathbb{R}/A)$, und wir erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to H^{k-1}(M; \mathbb{R}/A) \xrightarrow{a} \hat{H}^k(M; A) \xrightarrow{d} \Omega_A^k(M) \to 0 \;.$$

(5) Die Projektion $\hat{C}_k^\bullet(M; A) \to \check{C}^\bullet(\mathcal{U}; \underline{A})$ induziert eine surjektive Abbildung $\delta\colon \hat{H}^k(M; A) \to \check{H}^k(\mathcal{U}; \underline{A}) \cong H^k(M; A)$. Die Einschränkung $r\colon \Omega^{k-1}(M) \to \check{C}^0(\mathcal{U}; \Omega^{k-1}) \to \hat{C}_k^k(\mathcal{U}; A)$ bildet surjektiv auf den Kern der obigen Abbildung ab, und wir erhalten eine weitere kurze exakte Sequenz

$$0 \to \Omega^{k-1}(M)/\Omega_A^{k-1}(M) \xrightarrow{r} \hat{H}^k(M; A) \xrightarrow{\delta} H^k(M; A) \to 0 \;.$$

(6) Für eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit M folgt aus dem obigen, dass $\hat{H}^k(M; A) = 0$ für $k < 0$ sowie für $k > n + 1$, und

$$\hat{H}^0(M; A) \cong H^0(M; A) \qquad \text{und} \qquad \hat{H}^{n+1}(M; A) \cong H^n(M; \mathbb{R}/A) \;.$$

3.4. Integration und der Satz von Stokes

Wir führen Mannigfaltigkeiten mit Rand und Integration von Differentialformen ein. Anschließend beweisen wir den Satz von Stokes.

3.53. Definition. Eine glatte, n-dimensionale em Mannigfaltigkeit mit Rand ist ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis und einem $\mathcal{C}^\infty$-Atlas $\mathcal{A}$ bestehend aus Homöomorphismen $\varphi\colon U^\varphi \to V^\varphi$ mit $U^\varphi \subset M$ offen und $V^\varphi \subset [-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$ offen, so dass M von den U^φ überdeckt wird und für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ die Abbildungen $\psi \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U^\varphi \cap U^\psi) \to \psi(U^\varphi \cap U^\psi)$ glatt sind. Die Abbildungen φ heißen *Karten*, die $\psi \circ \varphi^{-1}$ *Kartenwechsel*. Die Teilmenge

$$\partial M = \bigl\{\, p \in M \bigm| \text{Es gibt eine Karte } \varphi \in \mathcal{A} \text{ mit } \varphi(p) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \,\bigr\}$$

heißt der *Rand* von M. Wir nennen $\mathring{M} = M \backslash \partial M$ das *Innere* von M.

Jede glatte Mannigfaltigkeit M im bisherigen Sinne ist auch Mannigfaltigkeit mit Rand, indem man alle Karten mit der Abbildung $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (-e^{-x_1}, x_2, \dots, x_n)$ nach $(-\infty, 0) \times \mathbb{R}^{n-1}$ verlängert. Dann folgt $\partial M = \emptyset$.

3.54. Bemerkung. Es sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Da alle Kartenwechsel $\psi \circ \varphi^{-1}$ die Teilmenge $\varphi(U^\varphi \cap U^\psi) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ nach $\psi(U^\varphi \cap U^\psi) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ abbilden (Übung), ist es egal, mit welcher Karte φ um $p \in M$ wir feststellen, ob $p \in \partial M$ gilt oder nicht. Einschränken der Karten auf ∂M liefert Homöomorphismen mit Bild in $\mathbb{R}^{n-1}$, so dass ∂M selbst eine glatte, $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M ohne Rand wird. Es gilt also

$$\partial(\partial M) = \emptyset\;.$$

3.55. Beispiel. Die Teilmenge

$$M = \bigl\{\, x \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \bigm| x_{n+1} \geq 0 \text{ und } x_n > 0 \text{ falls } x_{n+1} = 0 \,\bigr\} \subset S^n$$

ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand

$$\partial M = \bigl\{ x \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \times \{0\} \bigm| x_n > 0 \bigr\}\;.$$

Wir können glatte Abbildungen $F\colon N \to M$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten wie gehabt definieren, dabei stellen wir keine zusätzlichen Bedingungen an $F|_{\partial N}$, beispielsweise muss $F(\partial N) \subset \partial M$ nicht gelten. Auf diese erweitern wir unsere Kategorie $\mathcal{C}^\infty$ zur Kategorie $\mathcal{C}^\infty_\partial$ der glatten Mannigfaltigkeiten mit Rand. Das Bilden des Randes ist kein Funktor, da im allgemeinen $F|_{\partial N}$ nicht nach ∂M abbildet. Genauso dehnen wir den Homotopiebegriff aus und erhalten die Kategorie $\mathcal{H}^\infty_\partial$. Da jede Mannigfaltigkeit M zu $\mathring{M}$ homotopieäquivalent ist, sind die Kategorien $\mathcal{H}^\infty$ und $\mathcal{H}^\infty_\partial$ allerdings äquivalent.

Wir definieren den Tangentialraum T_pM für alle $p \in M$ entweder algebraisch wie in Definition 1.13 (1) oder physikalisch wie in 1.13 (2). Für $p \in \partial M$ erhalten wir einen Unterraum $T_p(\partial M) \subset T_pM$ der Codimension 1. Die geometrische Definition aus 1.13 (3) können wir für T_pM nicht verwenden, da für Kurven γ in M durch $\gamma(0) = p \in \partial M$ automatisch $\dot\gamma(0) \in T_p(\partial M)$ gilt.

Entsprechend definieren wir das Differential dF für $F\colon N \to M$ analog zu Satz 1.17 entweder algebraisch oder physikalisch, und erhalten eine glatte Abbildung zwischen den Mannigfaltigkeiten TN und TM mit den Rändern $\partial(TN) = TN|_{\partial N}$ und $\partial(TM) = TM|_{\partial M}$.

Anschließend definieren wir den Raum $\mathfrak{X}(M)$ aller Vektorfelder auf M (ohne Randbedingungen) wie in 1.18, und die Räume $\Omega^k(M)$ der alternierenden k-Formen wie in Definition 3.9. Wir erhalten eine äußere Ableitung $d\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ wie in Satz 3.14 und definieren de Rham-Kohomologie $H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M)$ wie in Definition 3.17. Homotopieinvarianz und Mayer-Vietoris-Sequenz gelten wie in den Sätzen 3.30 und 3.37. Außerdem gilt auch der Satz 3.49 von de Rham entsprechend.

3.56. Bemerkung. Wir kommen zur Integration von Differentialformen. Es sei zunächst $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\alpha \in \Omega^n(U)$. Wir schreiben

$$\alpha_x = a_{1,\dots,n}(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \alpha_x(e_1, \dots, e_n)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

und nennen α integrierbar, falls das Integral

$$\int_U \alpha = \int_U \alpha_x(e_1, \dots, e_n)\, d\lambda^n(x) \in \mathbb{R}$$

existiert und endlich ist. Hier ist $d\lambda^n$ das Lebesgue-Maß. Sei jetzt $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F\colon V \to U$ ein Diffeomorphismus, dann folgt aus der Transformationsformel und Bemerkung 3.7 (5), dass

$$\begin{aligned}\int_V F^*\alpha &= \int_V ((F_{*y})^* \alpha_{F(y)})(e_1, \dots, e_n)\, d\lambda^n(y)\\ &= \int_V \det(F'_y)\alpha_{F(y)}(e_1, \dots, e_n)\, d\lambda^n(y)\\ &= \int_{F(V)} \operatorname{sign}(\det F'_{F^{-1}(x)})\, \alpha_x(e_1, \dots, e_n)\, d\lambda^n(x)\\ &= \int_U \operatorname{sign}((\det F') \circ F^{-1})\, \alpha\ .\end{aligned}$$

Insbesondere ist das Integral einer n-Form invariant unter Zurückholen mit einem Diffeomorphismus, falls dieser positive Jacobi-Determinante hat. Das liegt daran, dass die Jacobi-Determinante in der Transformationsformel als Betrag eingeht, in Bemerkung 3.7 (5) jedoch mit ihrem Vorzeichen.

Wenn wir über Mannigfaltigkeiten integrieren wollen, müssen wir daher zunächst Orientierungen auf den einzelnen Tangentialräumen geeignet festlegen. Anschließend können wir dann bezüglich einzelner Karten integrieren.

3.57. Definition. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum. Eine *Orientierung* von V ist eine Menge $o \subset V^n$ von Basen von V, so dass für je zwei Basen $(v_1, \dots, v_n)$ und $(w_1, \dots, w_n)$ mit $w_i = \sum_j a_{ij} v_i$ gilt:

(1) wenn $\det((a_{ij})_{i,j}) < 0$, dann liegt genau eine der beiden Basen in o.

Basen in o heißen *positiv* (*orientiert*).

Es sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Eine *Orientierung* o von M ordnet jedem Punkt $x \in M$ eine Orientierung o_x von T_xM mit folgender Eigenschaft zu:

(2) Zu jedem $x \in M$ existiert eine Karte $\varphi\colon U^\varphi \to V^\varphi$ um φ, so dass die Basis

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^n}\right)_x$$

entweder für alle $x \in U^\varphi$ positiv ist, oder für keins.

Im ersten Fall heißt die Karte φ *positiv* (*orientiert*). Eine *orientierte Mannigfaltigkeit* (mit Rand) ist eine Mannigfaltigkeit (mit Rand) mit einer Orientierung. Falls es eine Orientierung auf M gibt, heißt M *orientierbar*, ansonsten heißt M *nicht orientierbar*.

3.58. Bemerkung. (1) Es sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Alle Basen $(w_1, \dots, w_n)$ mit Vektoren $w_j = \sum_i a_{ij} v_i$, so dass $\det((a_{ij})_{i,j}) > 0$, bilden eine Orientierung von V, alle anderen bilden eine weitere, die *entgegengesetzte Orientierung*. Mehr Orientierungen als diese zwei gibt es nicht.

(2) Falls $V = \mathbb{R}^n$, so heißt die Orientierung o mit $(e_1, \dots, e_n) \in o$ die *kanonische* Orientierung.

(3) Bedingung (2) in Definition 3.57 sagt, dass die Orientierungen auf U^φ „stetig vom Punkt abhängen“. Wir definieren $o(\varphi)\colon U^\varphi \to \{1,-1\}$ so, dass $o(\varphi)=1$ genau dann gilt, wenn die Basis $\left(\frac{\partial}{\partial\varphi^1},\dots,\frac{\partial}{\partial\varphi^n}\right)$ positiv ist. Dann ist $o(\varphi)$ lokal konstant.

Sei $\psi\colon U^\psi \to V^\psi$ eine weitere Karte. Aus der Multiplikativität der Determinante folgt

$$o_p(\psi) = \left(\operatorname{sign}(\det d(\psi\circ\varphi^{-1})_{\varphi(p)})\right)\cdot o_p(\varphi)$$

(4) Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit M mit Rand ist genau orientierbar, wenn es eine glatte n-Form $w \in \Omega^n(M)$ mit $w_x \neq 0$ für alle $x \in M$ gibt. In diesem Fall definiert w eine Orientierung o mit

$$o_x = \left\{\, (v_1,\dots,v_n) \in (T_xM)^n \;\middle|\; w_x(v_1,\dots,v_n) > 0 \,\right\} .$$

Wie man w für eine gegebene orientierte Untermannigfaltigkeit mit Rand konstruiert, sehen wir später.

3.59. Beispiel. (1) Die Sphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist orientierbar. Dazu betrachten wir die $(n-1)$-Form $\alpha \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\alpha_x = \iota_x(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) .$$

Zurückziehen auf S^{n-1} liefert $\iota^*\alpha \in \Omega^{n-1}(S^{n-1})$. Diese Form verschwindet nirgends, denn wir können $v_1 = x$ für $x \in S^{n-1}$ zu einer Orthonormalbasis $(v_1,\dots,v_n)$ ergänzen. Dann bildet $(v_2,\dots,v_n)$ eine Orthonormalbasis von T_xS^{n-1}, und es gilt

$$\alpha_x(v_2,\dots,v_n) = (dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)(v_1,\dots,v_n) = \pm 1 .$$

Im Fall $n=1$ ist $\alpha \in \Omega^0(S^0) = \mathcal{C}^\infty(S^0)$ mit $\alpha_{\pm 1} = \pm 1$. Wir schließen, dass die induzierte Orientierung o die Gestalt $o_1 = \{()\}$, $o_{-1} = \emptyset$ hat. Also ist $T_1S^0 \cong \mathbb{R}^0$ kanonisch orientiert, $T_{-1}S^0$ jedoch entgegengesetzt.

(2) Das Möbiusband ist nicht orientierbar. Der reell projektive Raum $\mathbb{R}P^2$ enthält ein Möbiusband als offene Teilmenge und ist daher auch nicht orientierbar.

Wir erinnern uns an den Träger $\operatorname{supp} f$ einer Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$. Analog definieren wir für $\alpha \in \Omega^k(M)$ den Träger

$$\operatorname{supp}\alpha = \overline{\{x \in M \mid \alpha_x \neq 0\}} \subset M$$

und schreiben $\Omega^k_0(M)$ für den Vektorraum aller glatten k-Formen auf M mit kompaktem Träger und $\Omega^\bullet_0(M)$ für die direkte Summe all dieser Räume.

3.60. Proposition und Definition. *Es sei M eine orientierte, glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und $\alpha \in \Omega^n_0(M)$. Es sei $\mathcal{A} = (\varphi_i\colon U_i \to V_i)_{i\in I}$ ein Atlas von M und $(\rho_i)_{i\in I}$ eine untergeordnete Partition der Eins. Dann ist das* Integral

$$\int_M \alpha = \sum_{i\in I} \int_{V_i} \left((\varphi_i^{-1})^*(o(\varphi_i)\cdot\rho_i\cdot\alpha)\right)_x (e_1,\dots,e_n)\, d\lambda^n(x)$$

von α über M unabhängig vom Atlas und der Partition der Eins. Für Formen $\alpha \in \Omega^\bullet_0(M)$ bezeichnet $\int_M \alpha$ das Integral des Anteils $\alpha^{[n]} \in \Omega^n_0(M)$ vom Grad n.

Beweis. Seien $(\varphi_i\colon U_i \to V_i)$ und $(\psi_j\colon W_j \to X_j)_{j\in J}$ zwei Atlanten und $(\rho_i)_{i\in I}$, $(\chi_j)_{j\in J}$ jeweils untergeordnete Partitionen der Eins. Dann ist $(\rho_i\chi_j)_{(i,j)\in I\times J}$ eine der Überdeckung $(U_i \cap W_j)$

untergeordnete Partition der Eins. Aus den Bemerkungen 3.56 und 3.58 (3) folgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in I}\int_{V_i}\big((\varphi_i^{-1})^*(o(\varphi_i)\cdot\rho_i\cdot\alpha)\big)_x(e_1,\dots,e_n)\,d\lambda^n(x)\\
&=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\int_{V_i}\big((\varphi_i^{-1})^*(o(\varphi_i)\cdot\rho_i\cdot\chi_j\cdot\alpha)\big)_x(e_1,\dots,e_n)\,d\lambda^n(x)\\
&=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\int_{X_j}\big((\psi_j^{-1})^*(o(\psi_j)\cdot\rho_i\cdot\chi_j\cdot\alpha)\big)_y(e_1,\dots,e_n)\,d\lambda^n(y)\\
&=\sum_{j\in J}\int_{X_j}\big((\psi_j^{-1})^*(o(\psi_j)\cdot\chi_j\cdot\alpha)\big)_y(e_1,\dots,e_n)\,d\lambda^n(y)
\end{aligned}$$

□

Wir können allgemeiner messbare und (p-) integrierbare n-Formen auf M definieren. Dann liegt $\Omega^n_0(M)$ dicht im Raum der integrierbaren Formen. Allerdings hätten wir Mühe, die äußere Ableitung zu definieren, und der Satz von Stokes wäre in dieser Allgemeinheit auch falsch, siehe unten.

3.61. Bemerkung. *Diffeomorphismen-Invarianz.* Es seien M, N orientierte Mannigfaltigkeiten mit Rand und $F\colon N\to M$ ein Diffeomorphismus. Wir definieren $o(F)\colon N\to\{1,-1\}$ analog zu Bemerkung 3.58 (3) so, dass $o(F)=1$ genau an den Punkten $y\in N$ gilt, an denen $F'_y\colon T_yN\to T_{F(y)}M$ die Orientierung erhält, also orientierte Basen auf orientierte Basen abbildet. Wie im obigen Beweis folgt

$$\int_M\alpha=\int_N o(F)\cdot\alpha\;.$$

3.62. Proposition und Definition. *Es sei (M,g) eine glatte, orientierte, n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann existiert eine eindeutige* Riemannsche Volumenform *$\omega_g\in\Omega^n(M)$, so dass für alle $p\in M$ und alle positiv (negativ) orientierten Orthonormalbasen $(e_1,\dots,e_n)$ von T_pM gerade $\omega_p(e_1,\dots,e_n)=1$ (-1) gilt.*

Für $f\in\mathcal C^\infty(M)$ gilt (bei geeigneter Erweiterung des obigen Integralbegriffs)

$$\int_M f\,d\mathrm{vol}_g=\int_M f\cdot\omega_g\;,$$

wobei wir die linke Seite wie in Definition 2.16 definieren.

Beweis. Da Λ^nT_pM eindimensional ist, ist ω_p durch die oben genannte Bedingung eindeutig festgelegt und wohldefiniert, da alle Basiswechselmatrizen zwischen gleich (entgegengesetzt) orientierten Orthonormalbasen Determinante 1 (-1) haben, vergleiche dazu Bemerkung 3.7 (5).

Zur Existenz ω sei $\varphi\colon U^\varphi\to V^\varphi$ eine Karte, dann konstruieren wir ω durch

$$\omega|_{U^\varphi}=o(\varphi)\cdot\det\biggl(g\Bigl(\frac{\partial}{\partial\varphi^i},\frac{\partial}{\partial\varphi^j}\Bigr)_{i,j}\biggr)^{\frac12}\cdot d\varphi^1\wedge\dots\wedge d\varphi^n\;.$$

Denn sei $(e_1,\dots,e_n)$ eine Orthonormalbasis mit

$$e_j=\sum_{i=1}^n a_{ij}\frac{\partial}{\partial\varphi^i}\qquad\text{und}\qquad\frac{\partial}{\partial\varphi^i}=\sum_{j=1}^n a^{ji}e_i$$

und $A=(a_{ij})_{i,j},\dots,A^{-1}=(a^{ij})_{i,j}$, dann hat die *Gramsche Determinante* den Wert

$$\det\biggl(g\Bigl(\frac{\partial}{\partial\varphi^i},\frac{\partial}{\partial\varphi^j}\Bigr)_{i,j}\biggr)^{\frac12}=\det\bigl((A^{-1})^tA^{-1}\bigr)^{\frac12}=\bigl|\det A^{-1}\bigr|$$

und wir erhalten

$$o(\varphi)\cdot\det\biggl(g\bigl(\frac{\partial}{\partial\varphi^i},\frac{\partial}{\partial\varphi^j}\bigr)_{i,j}\biggr)^{\frac{1}{2}}(d\varphi^1\wedge\dots\wedge d\varphi^n)(e_1,\dots,e_n)=o(\varphi)\cdot\bigl|\det A^{-1}\bigr|\cdot\det A=\pm 1\;. \qquad\square$$

Wir wollen jetzt den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf das Integral von Differentialformen über Untermannigfaltigkeiten mit Rand verallgemeinern. Es sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M, dann bezeichnet $i\colon\partial M\to M$ die Inklusionsabbildung. Die Abbildung $di\colon T_x(\partial M)\to T_xM$ ist stets injektiv, und ihr Bild ein Unterraum der Kodimension 1.

3.63. Proposition und Definition. *Es sei $x\in\partial M$. Ein Vektor $v\in T_xM$ weist nach* außen, *wenn $v(\varphi^1)>0$ für eine Karte $\varphi\colon U\to V$ um x gilt.*

Es sei o_x eine Orientierung auf T_xM und $v_1\in T_xM$ ein nach außen weisender Vektor, dann ist die Randorientierung *o_x^∂ auf $T_x(\partial M)$ definiert durch*

$$(v_2,\dots,v_m)\in o_x^\partial\quad\Longleftrightarrow\quad(v_1,\dots,v_m)\in o_x$$

für alle Basen $(v_2,\dots,v_m)$ von $T_x(\partial M)$.

Beweis. Man überzeugt sich, dass das Vorzeichen von $\varphi^1_{*x}(v)=v(\varphi^1)$ nach Definition 3.53 unabhängig von der Karte ist, und dass o_x^∂ nicht von der Wahl des auswärts weisenden Vektors v_1 abhängt. $\square$

Sei also $\varphi\colon U^\varphi\to V^\varphi$ eine Karte und $\partial\varphi=\varphi|_{\partial U^\varphi}\colon U^\varphi\cap\partial M\to V^\varphi\cap(\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1})$ ihre Einschränkung auf den Rand von M, dann ist φ bei $p\in\partial M$ genau dann positiv orientiert, wenn $\partial\varphi$ bei p positiv orientiert ist, kurz

$$o(\partial\varphi)=o(\varphi)|_{\partial U^\varphi}\;.$$

3.64. Satz (Stokes). *Es sei M eine n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M, der die Randorientierung trägt. Für alle $\alpha\in\Omega_0^{n-1}(M)$ gilt dann*

$$\int_{\partial M}i^*\alpha=\int_M d\alpha\;.$$

Beweis. Es sei $(\varphi_i\colon U_i\to V_i)_{i\in I}$ ein Atlas und $(\rho_i\colon M\to\mathbb{R})_{i\in I}$ eine untergeordnete Partition der Eins. Mit $\operatorname{supp}(\alpha)$ sind auch $\operatorname{supp}(d\alpha)\subset\operatorname{supp}(\alpha)$ und $\operatorname{supp}(\rho_i\alpha)\subset\operatorname{supp}\alpha$ kompakt. Wir schreiben

$$\int_M d\alpha=\int_M d\biggl(\sum_{i\in I}\rho_i\cdot\alpha\biggr)=\sum_{i\in I}\int_{U_i}d(\rho_i\alpha)$$

$$\text{und}\qquad\int_{\partial M}i^*\alpha=\sum_{i\in I}\int_{\partial U_i}i^*(\rho_i\alpha)\;.$$

Folglich reicht es, den Satz für $(n-1)$-Formen mit kompaktem Träger in $V\subset(-\infty,0]\times\mathbb{R}^{n-1}$ zu beweisen. Schreibe

$$\beta=\sum_{i=1}^n b_i\cdot dx^1\wedge\dots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\dots\wedge dx^n\;.$$

Aus dem Hauptsatz der Differentialrechnung folgt, da β kompakten Träger hat, mit dem Satz von Fubini, dass

$$\begin{aligned}\int_V d\beta &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial b_i}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^n)\, dx^1 \cdots dx^n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} b_1(x^1, \dots, x^n)\Big|_{x^1=-\infty}^{0} dx^2 \cdots dx^n \\ &\quad + \sum_{i=2}^n (-1)^{i-1} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} b_i(x^1, \dots, x^n)\Big|_{x^i=-\infty}^{\infty} dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} b_1(0, x^2, \dots, x^n)\, dx^2 \cdots dx^n = \int_{\partial V} i^*\beta\ , \end{aligned}$$

□

3.65. Bemerkung. Die Form α im Satz von Stokes hat kompakten Träger. Auf diese Bedingung kann man nicht verzichten. Sei etwa $M = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial M = \emptyset$ und $\alpha = x_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$, dann folgt

$$0 \neq \mathrm{vol} B_1(0) = \int_M d\alpha \neq \int_\emptyset \alpha = 0\ .$$

Geht man zum abgeschlossenen Ball $\overline{B_1(0)}$ mit Rand S^{n-1} über, dann stimmt der Satz von Stokes wieder, da dann $\operatorname{supp}\alpha = \overline{B_1(0)}$ kompakt ist.

3.66. Definition. Eine Mannigfaltigkeit M mit Rand heißt *geschlossen*, wenn M kompakt ist und $\partial M = \emptyset$.

3.67. Folgerung. *Sei M eine m-dimensioale, orientierte geschlossene Mannigfaltigkeit, sei N eine beliebige Mannigfaltigkeit mit Rand, und sei $F\colon M \to N$ glatt. Dann gilt*

(1) *Es sei $\alpha \in \Omega^m(M)$ geschlossen, dann hängt das Integral $\int_M \alpha$ nur von $[a] \in H^m_{\mathrm{dR}}(M)$ ab.*
(2) *Es sei $\alpha \in \Omega^m(N)$ geschlossen, dann hängt das Integral $\int_M F^*\alpha$ nur von $[\alpha] \in H^m_{\mathrm{dR}}(N)$ und der Homotopieklasse von $F\colon M \to N$ ab.*

Beweis. Formen in $[\alpha]$ unterscheiden sich nur um exakte Formen $d\beta$ für $\beta \in \Omega^{m-1}(M)$. Aus Satz 3.64 von Stokes folgt

$$\int_M d\beta = \int_\emptyset \iota^*\beta = 0\ ,$$

also folgt (1). Aussage (2) ergibt sich aus (1) und der Homotopieinvarianz der de Rham-Kohomologie aus Satz 3.30. □

Es sei M eine m-dimensionale kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand und $H\colon M \times [0,1]$ eine Homotopie zwischen F, $G\colon M \to N$ mit $H(x,t) = F(x) = G(x)$ für alle $x \in \partial M$ und alle $t \in [0,1]$. Mit etwas mehr Mühe als oben beweist man für geschlossene $\alpha \in \Omega^m(N)$, dass

$$\int_M F^*\alpha = \int_M G^*\alpha\ ,$$

aber dieses Integral hängt immer noch von der Form α ab, nicht nur von $[\alpha]$.

3.68. Beispiel. Man kann diese Folgerung beispielsweise benutzen, um von de Rham-Kohomologieklassen $[a] \in H^\bullet_{\mathrm{dR}}(N)$ zu zeigen, dass sie nicht verschwinden.

(1) Es sei M eine m-dimensionale, geschlossene, orientierte Untermannigfaltigkeit und $\omega \in \Omega^m(M)$ die Volumenform aus Definition 3.62. Es gilt $d\omega = 0$, da $\Omega^{m+1}(M) = 0$, und

$$\int_M \omega = \mathrm{vol}(M) > 0\ ,$$

also folgt $[w] \neq 0$ in $H^m_{\mathrm{dR}}(M)$. Für $m \geq 1$ ergibt sich aus dem Poincaré-Lemma 3.33, dass m-dimensionale, geschlossene, orientierbare Untermannigfaltigkeiten niemals zusammenziehbar sein können.

(2) Wir betrachten die Form $\alpha \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ aus Aufgabe 3 von Blatt 14 mit

$$\alpha_x = |x|^{-n}\ \iota_x(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)\ .$$

Wir hatten dort gesehen, dass $d\alpha = 0$. Es sei $F_r \colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ für $r > 0$ gegeben durch

$$F_r(x) = rx\ ,$$

dann hatten wir auch gesehen, dass

$$\int_{S^{n-1}} F_r^* \alpha = \int_{S^{n-1}} d\mathrm{vol}_{S^{n-1}} = \mathrm{vol}(S^{n-1}) > 0\ ,$$

also folgt wieder $[\alpha] \neq 0 \in H^{n-1}_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, und auch $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist nicht zusammenziehbar. Außerdem sind die Abbildungen F_r alle zueinander homotop, so dass die obigen Integrale gemäß Folgerung 3.67 (2) alle denselben Wert liefern.

3.69. Definition. Es sei $M(,g)$ eine n-dimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mir Rand, und sei $V \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld auf M.

Die *Divergenz* $\operatorname{div} V \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ist definiert durch

$$\operatorname{div} V \cdot \omega_g = \mathcal{L}_V \omega_g = d(\iota_V \omega_g)$$

für die Volumenform $\omega_g \in \Omega^n(U)$ aus Definition 3.63.

Das *äußere Normalenfeld* $\nu \colon \partial M \to \mathbb{R}^n$ von M ordnet $p \in \partial M$ den nach außen weisenden Vektor $\nu_p \in T_pM$ der Länge 1 zu mit $\langle \nu_p, w \rangle = 0$ für alle $w \in T_p(\partial M)$.

3.70. Bemerkung. (1) Da $d(\iota_V \omega_g) \in \Omega^n(M)$ und da $\Lambda^n T_pM$ eindimensional ist, ist $\operatorname{div} V$ eindeutig bestimmt. Ändert man die Orientierung auf U, so wird ω_g zu $-\omega_g$, aber $\operatorname{div} V$ bleibt erhalten. Also ist $\operatorname{div} V$ auf ganz M definiert, auch wenn M selbst nicht orientierbar ist und keine globale Volumenform trägt. Auf $\mathbb{R}^n$ hat die Divergenz die einfache Form

$$\operatorname{div} V = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V^i}{\partial x^i}\ ,$$

auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten ist die Formel komplizierter. Insbesondere hängt die Divergenz von der Metrik g ab und ist nicht verträglich mit beliebigen Diffeomorphismen.

(2) Anschaulich beschreibt $\operatorname{div} V$ die lokale Volumenänderung einer Teilchenmenge, die sich mit Geschwindigkeit V bewegt.

(3) Analog dazu beschreibt $\langle \nu, V \rangle \colon \partial M \to \mathbb{R}$ die Geschwindigkeit, mit der Teilchen M durch den Rand ∂M verlassen, falls V nach außen weist, bzw. in M hineinströmen, falls V nach innen weist.

Das folgende Resultat zeigt, dass das Integral über die Volumenveränderung im Inneren von M genau dem Integral des Durchflusses durch den Rand entspricht.

3.71. Satz (Gauß; Divergenzsatz). *Es sei M, g eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand, $V \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld mit kompaktem Träger* $\operatorname{supp} V \subset M$ *und ν das äußere Normalenfeld, dann gilt*

$$\int_M \operatorname{div} V\, d\mathrm{vol}_g = \int_{\partial M} \langle \nu, V \rangle\, d\mathrm{vol}_g\ .$$

Beweis. Wenn M orientierbar ist, sei $\omega_g \in \Omega^n(M)$ die Volumenform. Wir betrachten die Form $\alpha = \iota_V \omega_g \in \Omega_0^{n-1}(M)$. Es gilt $d\alpha = \operatorname{div} V \cdot \omega_g$ nach Definition 3.69.

Für $p \in \partial M$ sei $(v_2, \dots, v_m)$ eine positive Basis von $T_p(\partial M)$, dann ist $(\nu_p, v_2, \dots, v_m)$ eine positive Basis von $T_x M$. Also ist $\iota_\nu \omega_g \in \Omega^{m-1}(M)$ eine Volumenform auf ∂M. Da ω_g alternierend und multilinear ist, gilt

$$\iota_V \omega_g(v_2, \dots, v_m) = \omega_g\left(\langle \nu, V\rangle \nu + \sum_{i=2}^m \langle \nu, v_i\rangle v_i, v_2, \dots, v_m\right) = \langle \nu, V\rangle \iota_\nu \omega_g \ ,$$

also gilt $\iota^*\alpha = \langle \nu, V\rangle \iota_\nu \omega_g$ auf ∂M.

Aus den obigen Gleichungen und dem Satz 3.64 von Stokes folgt

$$\int_M \operatorname{div} V \, d\mathrm{vol}_g = \int_M d\alpha = \int_{\partial M} \iota^*\alpha = \int_{\partial M} \langle \nu, V\rangle \, d\mathrm{vol}_{\partial M} \ .$$

Falls M nicht orientierbar ist, wähle $(\varphi_i \colon U_i \to V_i)_i$, $(\rho_i)_i$ wie im Beweis des Satzes von Stokes. Die Karten φ_i induzieren Orientierungen auf U_i. Es folgt

$$\begin{aligned} \int_M \operatorname{div} V \, d\mathrm{vol}_g &= \sum_{i \in I} \int_{U_i} \operatorname{div}(\rho_i V) \, d\mathrm{vol}_g \\ &= \sum_{i \in I} \int_{\partial U_i} \langle \nu, \rho_i V\rangle \, d\mathrm{vol}_{\partial M} = \int_{\partial M} \langle \nu, V\rangle \, d\mathrm{vol}_{\partial M} \ . \end{aligned}$$ □

3.72. Bemerkung. Der Satz von Gauß kann ohne Orientierungen und ohne Differentialformen-Kalkül formuliert werden, wenn man eine Formel für die Divergenz ohne ω_g angibt. Er lässt sich mit ähnlichen Methoden wie der Satz von Stokes beweisen, allerdings machen die Formel für die Divergenz und die Gramsche Determinante den Beweis etwas unübersichtlicher. Aus dem Divergenzsatz lässt sich umgekehrt der Satz von Stokes herleiten.

KAPITEL 4

Vektorbündel und charakteristische Klassen

Wir führen Vektorbündel und Zusammenhänge ein. Schnitte von Vektorbündeln verallgemeinern Funktionen, Vektorfelder und Differentialformen. Ein Zusammenhang auf einem Vektorbündel ermöglicht es, Richtungsableitungen zu definieren. Die Krümmung gibt dann an, inwieweit der Satz von Schwarz Gültigkeit behält. Aus der Krümmung lassen sich charakteristische de Rham-Kohomologieklassen extrahieren, die über die globale Struktur des Bündels Auskunft geben. Der Atiyah-Singer-Indexsatz beschreibt den Fredholm-Index eines elliptischen Differentialoperators auf einer Mannigfaltigkeit M, also eine funktionanalytische Größe, als Integral einer charakteristischen Klasse über M. In einem Exkurs analysieren wir, wie gut charakteristische Klassen in verschiedenen Kohomologietheorien eindimensionale komplexe Vektorbündel beschreiben können.

4.1. Vektorbündel

Wir definieren Vektorbündel auf Mannigfaltigkeiten und geben elementare Konstruktionen an. Im Folgenden sei stets $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Alle Mannigfaltigkeiten seien glatt und können einen Rand haben, auch wenn das nicht explizit mit angegeben ist.

4.1. Definition. Ein *glattes* $\Bbbk$-*Vektorbündel* über einer Mannigfaltigkeit M vom *Rang* $k \in \mathbb{N}$ besteht aus einer Mannigfaltigkeit V, einer Abbildung $\pi\colon V \to M$ und einer Vektorraumstruktur $(V_p, +, \cdot)$ auf $V_p = \pi^{-1}(p)$ für alle $p \in M$, so dass zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung U von p in M und eine glatte Abbildung $\psi\colon \pi^{-1}(U) \to \Bbbk^k$ existiert, die für alle $q \in U$ einen $\Bbbk$-linearen Isomorphismus $\psi_q\colon V_q \to \Bbbk^k$ induziert, und so, dass $\pi|_U \times \psi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \Bbbk^k$ ein Diffeomorphismus ist. Wir nennen V den *Totalraum*, π die *Fußpunktprojektion*, V_p die *Fasern*, die $\psi\colon \pi^{-1}(U) \to \Bbbk^k$ *lokale Trivialisierungen*, und $\Bbbk^k$ die *typische Faser* des Bündels. Wir schreiben kurz $\pi\colon V \to M$ oder nur V, wenn alle weiteren Strukturen klar sind.

Ein *glatter Schnitt* eines Vektorbündels $\pi\colon V \to M$ ist eine glatte Abbildung $s\colon M \to V$ mit $\pi \circ s = id_M$. Der Raum aller Schnitte von V wird mit $\Gamma(V)$ bezeichnet.

Seien $\pi\colon V \to M$ und $\rho\colon W \to M$ Vektorbündel, dann ist ein *Bündelhomomorphismus* eine glatte Abbildung $F\colon V \to W$ mit $\rho = F \circ \pi$, so dass für alle $p \in M$ die Abbildung $F_p\colon V_p \to W_p$ linear ist.

4.2. Beispiel. Wir kennen bereits

(1) das *triviale Bündel* $M \times \mathbb{R} \to M$ mit Schnitten $\Gamma(M \times \mathbb{R}) = \mathcal{C}^\infty(M)$, und
(2) das Tangentialbündel $TM \to M$ mit Schnitten $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$, siehe Proposition 1.16.

4.3. Bemerkung. Es sei $V \to M$ ein $\Bbbk$-Vektorbündel. Dann bilden der Raum der Schnitte $\Gamma(V)$ ein $\mathcal{C}^\infty(M)$-Modul, falls $\Bbbk = \mathbb{R}$, beziehungsweise ein $\mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{C})$-Modul, falls $\Bbbk = \mathbb{C}$. Der Satz von Serre-Swan charakterisiert derartige $\mathcal{C}^\infty(M;\Bbbk)$-Moduln und besagt unter anderem, dass ein $\Bbbk$-Vektorbündel von endlichem Rang bereits bis auf Isomorphie eindeutig durch das $\mathcal{C}^\infty(M;\Bbbk)$-Modul seiner Schnitte bestimmt ist.

4.4. Bemerkung. Es sei $\pi\colon V \to M$ ein Vektorbündel vom Rang ℓ.

(1) Seien $\psi_i\colon \pi^{-1}(U_i) \to \Bbbk^\ell$ lokale Trivialisierungen, dann sind die Abbildungen
$$g_{ij}\colon U_i \cap U_j \to Gl_\ell(\Bbbk) \qquad \text{mit} \qquad g_{ij}(p) = \psi_i \circ (\psi_j|V_p)^{-1}\colon \Bbbk^\ell \to \Bbbk^\ell$$
glatt und erfüllen eine Art *Kozykelbedingung*
$$(g_{jk} \cdot g_{ik}^{-1} \cdot g_{ij})(p) = E_\ell$$
für alle i, j, $k \in I$ und alle $p \in U_i \cap U_j \cap U_k$.

(2) Sei $s \in \Gamma(V)$ ein Schnitt, dann erfüllen die Abbildungen
$$s_i = \psi_i \circ s\colon U_i \to \Bbbk^\ell$$
die Bedingung
$$s_i(p) = g_{ij}(p) \cdot s_j(p)$$
für alle i, $j \in I$ und $p \in U_i \cap U_j$. Seien umgekehrt $s_i\colon U_i \to \Bbbk^\ell$ glatte Abbildungen, die dieser Bedingung genügen, dann existiert ein Schnitt $s \in \Gamma(V)$ mit $s_i = \psi_i \circ s$ für alle $i \in I$.

(3) Seien $\chi_i\colon \pi^{-1}(U_i) \to \Bbbk^\ell$ andere lokale Trivialisierungen und $(h_{ij})_{i,j}$ analog zu $(g_{ij})_{i,j}$ konstruiert, dann definiere
$$f_i\colon U_i \to Gl_\ell(\Bbbk) \qquad \text{mit} \qquad f_i(p) = \chi_i \circ (\psi_i|_{V_p})^{-1}\colon \Bbbk^\ell \to \Bbbk^\ell \;.$$
Für alle i, $j \in I$ und alle $p \in U_i \cap U_j$ folgt
$$(h_{ij} \cdot f_j)(p) = (f_i \cdot g_{ij})(p) \;.$$
Ein Schnitt wird bezüglich der neuen Trivialisierungen beschrieben durch $(t_i)_i$ mit
$$t_i(p) = f_i(p) \cdot s_i(p) \;.$$

(4) Wenn $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung durch zusammenziehbare offene Mengen ist, lassen sich zu jedem Bündel $\pi\colon V \to M$ lokale Trivialisierungen $\psi_i\colon \pi^{-1}(U_i) \to \Bbbk^\ell$ angeben.

4.5. Proposition. *Es sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von M, $\ell \in \mathbb{N}$, und für alle i, $j \in I$ sei $g_{ij}\colon U_i \cap U_j \to Gl_\ell(\Bbbk)$ glatt, so dass für alle i, j, $k \in I$ die Kozykelbedingung*
$$(g_{jk} \circ g_{ik}^{-1} \circ g_{ij})(p) = E_\ell \qquad \text{für alle} \qquad p \in U_i \cap U_j \cap U_k$$
erfüllt ist. Dann existiert ein Vektorbündel $\pi\colon V \to M$ vom Rang ℓ mit lokalen Trivialisierungen $\psi_i\colon \pi^{-1}(U_i) \to \Bbbk^\ell$, so dass $\psi_i|_p = g_{ij}(p) \cdot \psi_j|_p\colon V_p \to \Bbbk^\ell$ für alle $p \in U_i \cap U_j$ gilt. Schnitte von V werden gegeben durch glatte Abbildungen $s_i\colon U_i \to \Bbbk^\ell$ für alle $i \in I$, so dass
$$s_i(p) = g_{ij}(p) \cdot s_j(p)$$
für alle i, $j \in I$ und alle $p \in U_i \cap U_j$ gilt.

Sei $\rho\colon W \to M$ analog zu $(h_{ij})_{i,j}$ konstruiert, dann existiert genau dann ein Bündelisomorphismus $F\colon V \to W$, das heißt, ein invertierbarer Vektorbündel-Homomorphismus, wenn es Abbildungen $f_i\colon U_i \to Gl_\ell(\Bbbk)$ für alle $i \in I$ gibt, so dass
$$(h_{ij} \circ f_j)(p) = (f_i \circ g_{ij})(p) \qquad \text{für alle} \qquad p \in U_i \cap U_j$$
für alle i, $j \in I$ gibt.

Beweis. Zur Konstruktion von V definiere eine Relation $\sim$ auf $\bigcup_{i\in I} U_i \times \Bbbk^\ell$, so dass $(p,v) \sim (q,w)$ für $p \in U_i$, $q \in U_j$ genau dann gilt, wenn $p = q \in M$ und $v = g_{ij}(p) \cdot w \in \Bbbk^\ell$. Aufgrund der Kozykelbedingung handelt es sich um eine Äquivalenzrelation: Für $i = j = k$ folgt $g_{ii}(p) = E_\ell$ für alle $p \in U_i$, also ist $\sim$ reflexiv. Für $i = k \neq j$ folgt $g_{ji}(p) = g_{ij}(p)^{-1}$, also ist $\sim$ symmetrisch. Für beliebige i, j, k erhalten wir schließlich Transitivität.

Wir setzen
$$V = \bigcup_{i\in I} U_i \times \Bbbk^\ell \,/\!\sim \;.$$

Für $(p,v), (q,w) \in U_i \times \Bbbk^\ell$ gilt $(p,v) \sim (q,w)$ genau dann, wenn $p = q$ und $v = w$, also enthält V die einzelnen Mengen $U_i \times \Bbbk^\ell$ als Teilmengen. Eine Teilmenge $U \subset V$ sei offen genau dann, wenn $U \cap U_i \times \Bbbk^\ell$ für alle $i \in I$ bezüglich der Produkttopologie offen ist. Man kann überprüfen, dass V dadurch zu einem Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis wird. Seien Karten $\varphi_i \colon U_i \to X_i \subset \mathbb{R}^n$ von M gegeben, dann erhalten wir Karten $\varphi_i \times id_{\Bbbk^\ell} \colon U_i \times \Bbbk^\ell \to X_i \times \Bbbk^\ell$ von V, und man überzeugt sich, dass alle Kartenwechsel glatt sind.

Schließlich induziert die Vektorraumstruktur auf der typischen Faser $\Bbbk^\ell$ eine Vektorraumstruktur auf allen Fasern V_p, passend zu den lokalen Trivialisierungen $\psi_i = U_i \times \Bbbk^\ell \to \Bbbk^\ell$ mit $\psi_i(p,v) = v$. Also ist $\pi \colon V \to M$ ein Vektorbündel.

Schnitte von V werden wie in Bemerkung 4.4 (2) beschrieben.

Falls V und W durch Kozykel $(g_{ij})_{i,j}$ bzw. $(h_{ij})_{i,j}$ gegeben wurden, und Abbildungen $(f_i)_{i\in I}$ wie in der Proposition gegeben sind, konstruiert man F auf $U_i \times \Bbbk^\ell$ durch

$$F(p,v) = (p, f_i(p) \cdot v)$$

und zeigt, dass diese Definition mit den Äquivalenzrelationen verträglich ist.

Ist umgekehrt $F \colon V \to W$ gegeben, so definiert man die f_i wie in Bemerkung 4.4 (3). □

4.6. Beispiel. Es sei $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $\Bbbk P^n = (\Bbbk^{n+1} \setminus \{0\})/\Bbbk^\times$ der projektive Raum, siehe Beispiele 1.137 und 2.48. Wir ordnen jedem Punkt $p = [x] = \Bbbk^\times \cdot x \in \Bbbk P^n$ den Unterraum $\Bbbk \cdot x \subset \Bbbk^{n+1}$ zu und erhalten das *tautologische Bündel* $\pi \colon \tau \to \Bbbk P^n$. Um zu überprüfen, dass τ tatsächlich ein Vektorbündel ist, betrachten wir affine Koordinaten

$$\varphi_i \colon U_i = \bigl\{ [x_0 \colon \dots \colon x_n] \bigm| x_i \neq 0 \bigr\} \to \Bbbk^n \qquad \text{mit} \qquad [x_0 \colon \dots \colon x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) .$$

Dazu konstruieren wir lokale Trivialisierungen

$$\psi_i \colon \pi^{-1}(U_i) \to \Bbbk \qquad \text{mit} \qquad \tau_{[x]} \ni y \mapsto y_i \ ,$$

so dass

$$y = \psi_i(y) \cdot \bigl(\varphi^1([x]), \dots, \varphi^i([x]), 1, \varphi^{i+1}([x]), \dots, \varphi^n([x]) \bigr) \quad \in \quad \Bbbk \cdot x = \tau_{[x]} \ ,$$

Die Übergangsfunktion $g_{ij} \colon U_i \cap U_j \to Gl_1(\Bbbk) = \Bbbk^\times$ werden durch

$$g_{ij}([x]) = \frac{x_i}{x_j}$$

gegeben. Die obige Proposition 4.5 zeigt, dass das soeben konstruierte $\pi \colon \tau \to \Bbbk P^n$ tatsächlich ein Vektorbündel ist.

Wir erinnern uns an die allgemeine Definition von direkter Summe und Tensorprodukt. Seiten etwa A, B Moduln über einem kommutativen Ring R mit Eins, dann sind $A \oplus B$ und $A \otimes_R B$ durch folgende universelle Eigenschaften charakterisiert.

4.7. Bemerkung. (1) Eine *direkte Summe* von A und B ist ein R-Modul C mit zwei R-linearen Abbildungen $p_A \colon C \to A$ und $p_B \colon C \to B$, so dass zu jedem R-Modul D mit R-linearen Abbildungen $f \colon D \to A$ und $g \colon D \to B$ existiert genau eine Abbildung $h \colon D \to C$, so dass die Diagramme

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "p_A"] \\ D \arrow[ur] \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} & C \arrow[d, "p_B"] \\ D \arrow[ur] \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

kommutieren. Direkte Summen sind bis auf eindeutige R-Modul-Isomorphismen eindeutig bestimmt und werden realisiert durch das kartesische Produkt

$$A \oplus B = A \times B \quad \text{mit} \quad p_A(a,b) = a \quad \text{und} \quad p_B(a,b) = b \, .$$

(2) Ein *Tensorprodukt* von A und B über R ist ein R-Modul C mit einer R-bilinearen Abbildung $t\colon A \times B \to C$, so dass zu jedem R-Modul D und jeder R-bilinearen Abbildung $f\colon A \times B \to D$ genau eine R-lineare Abbildung $h\colon C \to D$ existiert, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr] & \\ A \times B \arrow[u, "t"] \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$$

kommutiert. Tensorprodukte sind bis auf eindeutige R-Modul-Isomorphismen eindeutig bestimmt und werden realisiert durch

$$A \otimes_R B = \Bigl\langle A \times B \Bigm| (a_1 + a_2, b) = (a_1, b) + (a_2, b), \\ (a, b_1 + b_2) = (a, b_1) + (a, b_2),\ (ar, b) = (a, rb) = r(a,b) \Bigr\rangle \, .$$

(3) Das duale Modul $A^* = \operatorname{Hom}_R(A, R) = \Lambda^1_R A$ und die äußeren Potenzen $\Lambda^k_R A$ hatten wir bereits in Definition 3.1 kennengelernt.

4.8. Proposition und Definition. *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und V, $W \to M$ zwei glatte $\Bbbk$-Vektorbündel. Dann existieren bis auf eindeutige Vektorbündelisomorphismen eindeutige Vektorbündel $V \oplus W$ (die* Whitney-Summe*), $V \otimes_\Bbbk W$ (das* Whitney-Produkt*), V^* (das* duale Bündel*), $\Lambda^k_\Bbbk V$ (die k-te* äußere Potenz*), $\operatorname{Hom}_\Bbbk(V, W)$ (das* Homomorphismenbündel*), so dass*

$$\Gamma(V \oplus W) \cong \Gamma(V) \oplus \Gamma(W) \, , \tag{1}$$

$$\Gamma(V \otimes_\Bbbk W) \cong \Gamma(V) \otimes_{\mathcal{C}^\infty(M;\Bbbk)} \Gamma(W) \, , \tag{2}$$

$$\Gamma(V^*) \cong \Gamma(V)^* \, , \tag{3}$$

$$\Gamma(\Lambda^k_\Bbbk V) \cong \Lambda^k_{\mathcal{C}^\infty(M;\Bbbk)} \Gamma(V) \tag{4}$$

$$\textit{und} \quad \Gamma(\operatorname{Hom}_\Bbbk(V, W)) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M;\Bbbk)}(\Gamma(V), \Gamma(W)) \, . \tag{5}$$

Beweis. Zunächst seien $V \cong M \times \Bbbk^r$ und $W \cong M \times \Bbbk^s \to M$ trivial. Dann existieren Basen $(v_1, \dots, v_r)$ von $\Gamma(V)$ und $(w_1, \dots, w_s)$ von $\Gamma(W)$ über $\mathcal{C}^\infty(M; \Bbbk)$ aus konstanten Schnitten. Wir definieren die duale Basis $(v^1, \dots, v^r)$ durch

$$v^i \biggl(\sum_{j=1}^r f^j v_j \biggr) = f^i \in \mathcal{C}^\infty(M; \Bbbk) \, .$$

Dann betrachten wir triviale Bündel

$$\begin{aligned} V \oplus W &\cong M \times \Bbbk^{r+s} && \text{mit Basis } (v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s) \, , \\ V \otimes_\Bbbk W &\cong M \times \Bbbk^{rs} && \text{mit Basis } (v_i \otimes w_j)_{i,j} \, , \\ V^* &\cong M \times \Bbbk^r && \text{mit Basis } (v^i)_i \\ \Lambda^k_\Bbbk V &\cong M \times \Bbbk^{\binom{r}{k}} && \text{mit Basis wie in Proposition 3.5} \, , \\ \operatorname{Hom}_\Bbbk(V, W) &\cong M \times \Bbbk^{rs} && \text{mit Basis } (v^i \otimes w_j)_{i,j} \, . \end{aligned}$$

Man überzeugt sich, dass die Bedingungen (1)—(5) erfüllt sind. Betrachte beispielsweise zu (2) die natürliche bilineare Abbildung $\otimes\colon \Gamma(V)\times\Gamma(W)\to\Gamma(V\otimes_k W)$. Sei D ein $\mathcal{C}^\infty(M;\Bbbk)$-Modul und $h\colon \Gamma(V)\times\Gamma(W)\to D$ eine $\mathcal{C}^\infty(M;\Bbbk)$-bilineare Abbildung wie in Bemerkung 4.7 (2), dann definiere $\bar h\colon \Gamma(V\otimes_\Bbbk W)\to D$ durch

$$\bar h(v_i\otimes w_j)=h(v_i,w_j)\ .$$

Dadurch ist $\bar h$ bereits eindeutig bestimmt, und es folgt

$$\begin{aligned}
h\biggl(\sum_{a=1}^r f^a v_a,\sum_{b=1}^s g^b w_b\biggr)&=\sum_{a=1}^r\sum_{b=1}^s f^a g^b h(v_a,w_b)\\
&=\sum_{a=1}^r\sum_{b=1}^s f^a g^b\,\bar h(v_a\otimes w_b)=\bar h\biggl(\Bigl(\sum_{a=1}^r f^a v_a\Bigr)\otimes\Bigl(\sum_{b=1}^s g^b w_b\Bigr)\biggr)\ .
\end{aligned}$$

Seien jetzt zwei offene Überdeckungen von M gegeben, so dass V eingeschränkt auf die Mengen der ersten und W auf den Mengen der zweiten Überdeckung trivial ist. Dann sind beide Bündel eingeschränkt auf den Durchschnitt je einer Menge der ersten und einer der zweiten Überdeckung trivial. Also existiert eine Überdeckung $\mathcal{U}=(U_i)_{i\in I}$, so dass $V|_{U_i}$ und $W|_{U_i}$ für alle $i\in I$ trivial sind. Wir wählen lokale Trivialisierungen ψ_i von V und ρ_i von W und erhalten Basen $(v_1^{(i)},\dots,v_r^{(i)})$ von $\Gamma(V|_{U_i})$ und $(w_1^{(i)},\dots,w_s^{(i)})$ von $\Gamma(W|_{U_i})$ wie oben, so dass $\psi_i(v_a^{(i)})=e_a\in\Bbbk^r$ und $\rho_i(w_b^{(i)})=e_b\in\Bbbk^s$. Wir erhalten $g_{ij}\colon U_i\cap U_j\to Gl_r(\Bbbk)$ und $h_{ij}\colon U_i\cap U_j\to Gl_s(\Bbbk)$ wie in Bemerkung 4.4 (1), und auf $U_i\cap U_j$ gilt

$$\begin{aligned}
v_a^{(i)}|_p=(\psi_j|_p)^{-1}e_a&=(\psi_i|_p)^{-1}\bigl(\psi_i|_p\circ(\psi_j|_p)^{-1}\bigr)e_a\\
&=(\psi_i|_p)^{-1}\sum_{b=1}^r(g_{ij}(p))_{ba}e_b=\sum_{b=1}^r(g_{ij}(p))_{ba}v_b^{(i)}|_p\ .
\end{aligned}$$

Wenn wir analog die obigen, von den lokalen Trivialisierungen auf U_j abgeleiteten Basen von $\Gamma(V\oplus W|_{U_i\cap U_j})$ etc. durch die entsprechend von den lokalen Trivialisierungen auf U_i abgeleiteten Basen darstellen, erhalten wir die Übergangsmatrizen

$$\begin{aligned}
g_{ij}(p)\oplus h_{ij}(p)&\qquad\text{für } V\oplus W\ ,\\
g_{ij}(p)\otimes h_{ij}(p)&\qquad\text{für } V\otimes_\Bbbk W\\
\text{und}\quad\bigl(g_{ij}(p)^t\bigr)^{-1}&\qquad\text{für } V^*\ ,
\end{aligned}$$

wobei die *direkte Summe* und das *Kroneckerprodukt* zweier Matrizen gegeben sind durch

$$G\oplus H=\begin{pmatrix}G&0\\0&H\end{pmatrix}\qquad\text{und}\qquad(G\otimes H)_{a+r(c-1),b+r(d-1)}=g_{ab}\cdot h_{cd}\ .$$

Für die direkte Summe und das Tensorprodukt überprüft man leicht, dass die Übergangsmatrizen entsprechend gegeben sind.

Es bezeichne $(v^1_{(i)},\dots,v^r_{(i)})$ die zu $(v_1^{(i)},\dots,v_r^{(i)})$ duale Basis. Dann folgt

$$\begin{aligned}
v^a_{(j)}\biggl(\sum_{b=1}^r f^b v_b^{(i)}\biggr)&=v^a_{(j)}\biggl(\sum_{b,c=1}^r f^b\cdot(g_{ji})_{cb}v_c^{(j)}\biggr)\\
&=\sum_{b=1}^r f^b\cdot(g_{ij}^{-1})_{ab}=\biggl(\sum_{a,c=1}^r(g_{ij}^{-1})_{ac}v^c_{(i)}\biggr)\biggl(\sum_{b=1}^r f^b v_b^{(i)}\biggr)\ ,
\end{aligned}$$

somit sind $(g_{ij}^{-1})^t=(g_{ij}^t)^{-1}\colon U_i\cap U_j\to Gl_r(\Bbbk)$ die Übergangsmatrizen für V^*.

Für $\Lambda^k_{\Bbbk} V$ finden wir analoge Übergangsmatrizen, indem wir Basiswechselmatrizen für die Basen aus Proposition 3.5 bestimmen. Da wir die Übergangsmatrizen als Basiswechselmatrizen bestimmt haben, ist die Kozykelbedingung in allen Fällen automatisch erfüllt. Also erhalten wir Vektorbündel $V \oplus W$, $V \otimes_{\Bbbk} W$, V^* und $\Lambda^k_{\Bbbk} V$ mit Hilfe von Proposition 4.5. Außerdem setzen wir

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W) = V^* \otimes_{\Bbbk} W \; .$$

Damit haben wir die Bündel konstruiert und müssen jetzt die Eigenschaften (1) – (5) prüfen. Für die direkte Summe sehen wir, dass $\Gamma(V) \times \Gamma(W) \cong \Gamma(V \oplus W)$. Dabei werden $\sigma \in \Gamma(V)$, $\tau \in \Gamma(W)$ abgebildet auf $\sigma \oplus \tau$ mit

$$\sigma \oplus \tau|_{U_i} = (\sigma|_{U_i}, \tau|_{U_i}) \in \Gamma(V \oplus W|_{U_i})$$

Mit Bemerkung 4.7 (1) folgt (1).

Als nächstes definieren wir eine $\mathcal{C}^\infty(M; \Bbbk)$-bilineare Abbildung $\otimes \colon \Gamma(V) \times \Gamma(W) \to \Gamma(V \otimes_{\Bbbk} W)$ durch

$$\sigma \otimes \tau|_{U_i} = (\sigma|_{U_i}) \otimes (\tau|_{U_i}) \in \Gamma(V|_{U_i}) \otimes_{\mathcal{C}^\infty(U_i, \Bbbk)} \Gamma(W|_{U_i}) = \Gamma(V \otimes W|_{U_i}) \; .$$

Sei wieder D ein $\mathcal{C}^\infty(M; \Bbbk)$-Modul und $h \colon \Gamma(V) \times \Gamma(W) \to D$ eine $\mathcal{C}^\infty(M; \Bbbk)$-bilineare Abbildung. Dann müssen wir nach Bemerkung 4.7 (2) zeigen, dass es genau eine lineare Abbildung $\bar{h} \colon \Gamma(V \otimes W) \to D$ mit $\bar{h} \circ \otimes = h$ gibt.

Dazu benutzen wir, dass es stets eine endliche Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ gibt, so dass $V|_{U_i}$ und $W|_{U_i}$ für alle $i \in I$ trivial sind (es reichen $\dim M + 1$ Mengen). Sei $(\rho_i)_{i \in I}$ eine untergeordnete Partition der Eins, und seien $\vartheta_i \colon M \to [0, 1]$ glatte Funktionen mit

$$\operatorname{supp} \vartheta_i \subset U_i \qquad \text{und} \qquad \vartheta_i|_{\operatorname{supp} \rho_i} \equiv 1 \; .$$

Dann definieren wir $h_i \colon \Gamma(V|_{U_i}) \times \Gamma(W|_{U_i})$ durch

$$h_i(\sigma_i, \tau_i) = \rho_i h(\vartheta_i \sigma_i, \vartheta_i \tau_i)$$

für $\sigma_i \in \Gamma(V|_{U_i})$, $\tau_i \in \Gamma(W|_{U_i})$, indem wir $\vartheta_i \sigma_i$ und $\vartheta_i \tau_i$ als Schnitte auf ganz M auffassen. Wir haben oben bereits gesehen, dass es eine eindeutige Abbildung

$$\bar{h}_i \colon \Gamma(V \otimes_{\Bbbk} W|_{U_i}) \to D \qquad \text{mit} \qquad \bar{h}_i \circ \otimes = h_i$$

gibt. Einschränken liefert eine $\mathcal{C}^\infty(M; \Bbbk)$-lineare Abbildung

$$\bar{h}_i \colon \Gamma(V \otimes_{\Bbbk} W) \to \Gamma(V \otimes W|_{U_i}) \to D \; .$$

Für $\sigma \in \Gamma(V)$, $\tau \in \Gamma(W)$ ist $\bar{h}(v \otimes w)^{\in D}$ jetzt eindeutig festgelegt als die endliche Summe

$$\bar{h}(\sigma \otimes \tau) = h(\sigma, \tau) = \sum_{i \in I} \rho_i h(\sigma, \tau) = \sum_{i \in I} h_i(\sigma, \tau) = \sum_{i \in I} \bar{h}_i(\sigma \otimes \tau) \; .$$

Also erfüllt $\otimes \colon \Gamma(V) \times \Gamma(W) \to \Gamma(V \otimes_{\Bbbk} W)$ die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes, und es folgt (2).

Um (3) — (5) zu zeigen, überlegt man sich zunächst wie in Lemma 1.48 für $\mathcal{C}^\infty(M; \Bbbk)$-(multi-)lineare Abbildungen $\alpha \colon \Gamma(V)^k \to \mathcal{C}^\infty(M; \Bbbk)$ und $F \colon \Gamma(V) \to \Gamma(W)$ die Werte $\alpha(\sigma_1, \dots, \sigma_k)_{p \in \Bbbk}$ und $F(\sigma)_p \in W_p$ nur von $\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p)$ beziehungsweise von $\sigma(p)$ abhängen. Dann folgt leicht, dass α und F eindeutig durch Schnitte von $\Lambda^k V$ beziehungsweise von $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W)$ repräsentiert werden. Umgekehrt liefert jeder solche Schnitt eine entsprechende $\mathcal{C}^\infty(M; \Bbbk)$-(multi-)lineare Abbildung. □

Die Argumente im Beweis der obigen Proposition, insbesondere in Verbindung mit Lemma 1.48 legen nahe, grundsätzlich alle geometrischen Objekte, die an jedem Punkt einer Mannigfaltigkeit definiert werden können, als Schnitte in Vektorbündeln aufzufassen. Und jede (multi-)lineare Operation mit solchen Objekten, die punktweise durchgeführt werden kann, sollte einem Schnitt in einem Formen- oder Homomorphismenbündel entsprechen.

4.9. BEISPIEL. (1) Es gilt $TS^2 \cong T\mathbb{C}P^1 \cong (\tau \otimes_{\mathbb{C}} \tau)_{\mathbb{R}}$ (Übung).

(2) Nach Bemerkung 3.10 gilt $\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k TM)$.

(3) Wir können eine Riemannsche Metrik g und ihren Krümmungstensor auffassen als

$$g \in \Gamma((TM \otimes TM)^*) = \Gamma(T^*M \otimes T^*M) \qquad \text{und} \qquad R \in \Gamma(\Lambda^2 TM \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(TM, TM)) \subset \Gamma(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(TM \otimes TM \otimes TM, TM))$$

4.10. PROPOSITION UND DEFINITION. *Es sei $F\colon N \to M$ glatt und $\pi\colon V \to M$ ein Vektorbündel, dann ist*

$$F^*V = \{(q, v) \in N \times V \mid F(q) = \pi(V)\} \to N \qquad \textit{mit} \qquad (q, v) \mapsto q$$

ein Vektorbündel über N mit $(F^*V)_q \cong V_{F(q)}$ via $(q, v) \mapsto v$, das zurückgezogene Vektorbündel.

BEWEIS. Nach dem Satz vom regulären Wert ist $F^*V \subset N \times V$ eine Untermannigfaltigkeit. Sei dazu $(q, v) \in F^*V$ mit $p = F(q) = \pi(v) \in M$, dann wählen wir eine Karte $\varphi\colon U^\varphi \to V^\varphi$ von M um p und betrachten die Abbildung

$$G\colon F^{-1}(U^\varphi) \times \pi^{-1}(U^\varphi) \xrightarrow{F \times \pi} U^\varphi \times U^\varphi \xrightarrow{\varphi \times \varphi} V^\varphi \times V^\varphi \xrightarrow{-} \mathbb{R}^m ,$$

so dass

$$F^*V \cap (F^{-1}(U^\varphi) \times \pi^{-1}(U^\varphi)) = G^{-1}(\{0\}) .$$

Um zu zeigen, dass 0 ein regulärer Wert ist, wähle zu $(r, w) \in G^{-1}(\{0\})$ eine lokale Trivialisierung ψ von V auf einer Umgebung $U \subset U^\varphi$ von r. Sei $\sigma\colon U \to V$ der Schnitt von $V|_U$, für den $\psi \circ \sigma = \psi(w)$ konstant ist, dann folgt für jede Kurve γ in U durch $r = \gamma(0)$, dass

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} G(r, (\sigma \circ \gamma)(t)) = 0 - d\varphi(\dot\gamma(0)) \in \mathbb{R}^m ,$$

also ist $dG_{(r,w)}$ surjektiv und 0 ein regulärer Wert.

Die Vektorraumstruktur auf $(F^*V)_q$ wird von der auf $V_{F(q)}$ induziert, und jede lokale Trivialisierung $\psi\colon \pi^{-1}(U) \to \Bbbk^r$ von V liefert eine lokale Trivialisierung von $F^*V|_{F^{-1}(U)}$ mit $(q, v) \mapsto \psi(v)$. □

4.11. BEMERKUNG. Ein Schnitt $\sigma \in \Gamma(F^*V)$ ist nichts anderes als eine Abbildung $\sigma\colon N \to V$ mit $\pi \circ \sigma = F$. Also sind Vektorfelder längs einer Abbildung F wie in Definition 1.58 Schnitte in F^*TM, und es folgt $\mathfrak{X}(F) = \Gamma(F^*TM)$.

4.2. Metriken und Zusammenhänge

Um Geometrie mit Vektorbündeln zu betreiben, führen wir Metriken und Zusammenhänge auf Vektorbündeln ein. Dabei verfahren wir analog zu Abschnitt 1.2. Ähnlich wie beim Tangentialbündel wird die lokale Geometrie durch die Krümmung des Bündels beschrieben.

4.12. DEFINITION. Es sei $V \to M$ ein reelles (komplexes) Vektorbündel. Eine *Metrik* g auf V ordnet jedem $p \in M$ ein (hermitesches) Skalarprodukt g_p auf V_p zu, so dass für alle σ, $\tau \in \Gamma(V)$ die Funktion $p \mapsto g_p(\sigma(p), \tau(p))$ auf M glatt ist.

4.13. BEMERKUNG. Es sei g eine Metrik auf $V \to M$.

(1) Falls $\Bbbk = \mathbb{R}$ ist, können wir g auffassen als

$$g \in \Gamma(V \otimes_{\mathbb{R}} V)^* \cong \Gamma((V \otimes_{\mathbb{R}} V)^*) \cong \Gamma(V^* \otimes_{\mathbb{R}} V^*) \cong \Gamma(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V^*)) .$$

Da g positiv definit, also insbesondere nicht ausgeartet ist, ist g invertierbar. Also liefert g einen Isomorphismus $V \cong V^*$, vergleiche Lemma 1.39. Da g symmetrisch ist, ist die Abbildung $g\colon V \to V^*$ selbstadjungiert.

(2) Falls $\Bbbk = \mathbb{C}$ ist, definieren wir $\bar{V} \to M$ als Vektorbündel mit Totalraum $\bar{V} = V$ und Vektorraumstruktur $(z, v) \mapsto \bar{z}v$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $v \in \bar{V}$. Analog zum obigen erhalten wir

$$g \in \Gamma(\bar{V}^* \otimes_{\mathbb{C}} V^*) \cong \Gamma(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\bar{V}, V^*) \cong \Gamma(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \bar{V}^*)) ,$$

also liefert g zueinander adjungierte $\mathbb{C}$-lineare Isomorphismen $g\colon \bar{V} \to V^*$ und $g^*\colon V \to \bar{V}^*$, so dass für $\sigma \in \Gamma(V)$, $\tau \in \Gamma(\bar{V})$ gilt

$$(g(\tau))(\sigma) = g(\tau, \sigma) = (g^*(\sigma))(\tau) .$$

(3) Mit dem Gram-Schmidt-Verfahren können wir lokale Trivialisierung $\psi_i\colon V|_{U_i} \to \Bbbk^r$ stets so wählen, dass $\psi_i|_p\colon (V_p, g_p) \to (\Bbbk^r, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ für alle $p \in U_i$ eine lineare Isometrie ist. In diesem Fall nehmen die Übergangsfunktionen g_{ij} aus Bemerkung 4.4 Werte in $O(r)$ beziehungsweise $U(r)$ an. Insbesondere gilt

$$\bar{g_{ij}} = \left(g_{ij}^t\right)^{-1} ,$$

das heißt, $\bar{V}$ und V^* (und analog V und $\bar{V}^*$) haben dieselben Übergangsfunktionen.

4.14. Definition. Es sei $V \to M$ ein $\Bbbk$-Vektorbündel. Ein *Zusammenhang* auf V ist eine Abbildung $\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(V) \to \Gamma(V)$, die $\mathcal{C}^\infty(M)$-linear in $\mathfrak{X}(M)$ und $\Bbbk$-linear in $\Gamma(V)$ ist, und für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M;\Bbbk)$ und $\sigma \in \Gamma(V)$ die Produktregel

$$\nabla_X(f \cdot \sigma) = X(f) \cdot \sigma + f \cdot \nabla_X\sigma$$

erfüllt. Sei g eine Metrik auf V, dann heißt ∇ *metrisch* bezüglich g, wenn für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ und alle σ, $\tau \in \Gamma(V)$ die folgende Produktregel gilt:

$$X(g(\sigma, \tau)) = g(\nabla_X\sigma, \tau) + g(\sigma, \nabla_X\tau) .$$

4.15. Bemerkung. Es sei $V \to M$ ein Vektorbündel, $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von M mit lokalen Trivialisierungen $\psi_i\colon V|_{U_i} \to \Bbbk^r$, und $(\rho_i)_{i\in I}$ eine Partition der Eins zu $\mathcal{U}$.

(1) Dann definiert

$$g(\sigma, \tau) = \sum_{i\in I} \rho_i \sum_{a=1}^{r} (\overline{\psi_i^a \circ \sigma}) \cdot (\psi_i^b \circ \tau)$$

für alle σ, $\tau \in \Gamma(V)$ eine Metrik auf V, denn g ist glatt, sesquilinear, alle Summanden sind positiv semidefinit, und für alle $p \in M$ existiert ein $i \in I$ mit $\rho_i(p) > 0$, so dass der entsprechende Summand der ersten Summe auf V_p positiv definit ist.

In den Übungen sehen wir, dass alle Metriken isomorph sind, so dass die Auswahl einer Metrik auf V allein die Geometrie noch nicht festlegt — auf TM und davon abgeleiteten Bündeln gilt das nicht, da Elemente von TM, Λ^kTM etc. bereits eine geometrische Bedeutung haben, so dass hier die Metrik doch eine Rolle spielt.

(2) Wir identifizieren Schnitte von $V|_{U_i}$ mit $\Bbbk^r$-wertigen Funktionen und erhalten einen Zusammenhang ∇^i auf $V|_{U_i}$ mit

$$\psi_i \circ (\nabla^i_X\sigma) = X(\sigma \circ \psi_i) .$$

Wir konstruieren einen Zusammenhang ∇ auf $V \to M$ für $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\sigma \in \Gamma(V)$ durch

$$\nabla_X\sigma = \sum_{i\in I} \rho_i \cdot \nabla^i_X\sigma .$$

Für $f \in \mathcal{C}^\infty(M;\Bbbk)$ folgt dann

$$\begin{aligned}\nabla_X(f\sigma)|_p &= \sum_{i\in I} \rho_i(p)(\psi_i|_p)^{-1}(X(f\cdot(\psi\circ\sigma))\\ &= \sum_{i\in I} \rho_i(p)(\psi_i|_p)^{-1}(X(f)\cdot(\psi\circ\sigma)+f\cdot X(\psi\circ\sigma))\\ &= X(f)\cdot\sigma + f\cdot\nabla_X\sigma\ .\end{aligned}$$

(3) Wenn wir in (2) mit lokalen Trivialisierungen durch Orthonormalbasen wie in Bemerkung 4.13 (3) starten, erhalten wir einen metrischen Zusammenhang, denn die Zusammenhänge ∇^i auf $V|_{U_i}$ sind dann metrisch, und für σ, $\tau \in \Gamma(V)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ folgt

$$\begin{aligned}g(\nabla_X\sigma,\tau)+g(\sigma,\nabla_X\tau) &= \sum_{i\in I}\rho_i\big(g(\nabla^i_X\sigma,\tau)+g(\sigma,\nabla^i_X\tau)\big)\\ &= \sum_{i\in I}\rho_i\cdot X(g(\sigma,\tau)) = X(g(\sigma,\tau))\ .\end{aligned}$$

4.16. Definition. Es sei $V \to M$ ein $\Bbbk$-Vektorbündel, dann heißt $\Lambda^kTM\otimes_{\mathbb{R}} V \to M$ das $\Bbbk$-Vektorbündel der *V-wertigen k-Formen auf M*, und wir schreiben

$$\Omega^k(M;V) = \Gamma(\Lambda^kTM\otimes_{\mathbb{R}} V)\ .$$

Sei $W \to M$ ein weiteres $\Bbbk$-Vektorbündel, dann definieren wir ein Produkt

$$\begin{aligned}\wedge\colon \Omega^k(M;\operatorname{Hom}(V,W))\times\Omega^\ell(M;V) &\longrightarrow \Omega^{k+\ell}(M;W)\\ \text{durch}\qquad ((\alpha\otimes F),(\beta\otimes\sigma)) &\longmapsto (\alpha\wedge\beta)\otimes(F(\sigma))\end{aligned}$$

für alle $\alpha\in\Omega^k(M)$, $\beta\in\Omega^\ell(M)$, $F\in\Gamma(\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V,W))$, $\sigma\in\Gamma(V)$.

Analog definieren wir Produkte wie zum Beispiel $\Omega^k(M)\times\Omega^\ell(M;V)\to\Omega^{k+\ell}(M;V)$ und $\Omega^k(M;\operatorname{End}V)\times\Omega^\ell(M;\operatorname{End}V)\to\Omega^{k+\ell}(M;\operatorname{End}V)$. Das Symbol "$\wedge$" lassen wir mitunter weg.

4.17. Proposition und Definition. *Es sei $V \to M$ ein Vektorbündel.*

(1) *Zu jedem Zusammenhang ∇ auf V existieren Abbildungen $\nabla\colon\Omega^k(M;V)\to\Omega^{k+1}(M;V)$, so dass*

$$\begin{aligned}(\nabla\sigma)(X) &= \nabla_X\sigma\in\Gamma(V)\\ \nabla(\alpha\otimes\sigma) &= d\alpha\otimes\sigma+(-1)^k\alpha\wedge\nabla\sigma\end{aligned}$$

für alle $X\in\mathfrak{X}(M)$, $\sigma\in\Gamma(V)$ und $\alpha\in\Omega^k(M)$. Insbesondere gilt für $\beta\in\Omega^\ell(M;V)$, dass

$$\nabla(\alpha\wedge\beta) = d\alpha\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge\nabla\beta$$

und
$$\begin{aligned}(\nabla\beta)(X_0,\dots,X_\ell) &= \sum_{i=0}^{\ell}(-1)^i\nabla_{X_i}(\beta(X_0,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_\ell))\\ &\quad+\sum_{0\le i<j\le\ell}(-1)^{i+j}\beta([X_i,X_j],X_0,\dots,\widehat{X_i},\dots,\widehat{X_j},\dots,X_\ell)\ .\end{aligned}$$

(2) *Seien ∇, ∇' zwei Zusammenhänge auf V, dann operiert $\nabla'-\nabla$ durch Multiplikation mit einer $\operatorname{End}V$-wertigen 1-Form $\nabla'-\nabla\in\Omega^1(M;\operatorname{End}V)$. Falls ∇ und ∇' metrisch bezüglich einer Metrik g^V auf V sind, nimmt $\nabla'-\nabla$ Werte in den schief-adjungierten Endomorphismen an: für alle $X\in\mathfrak{X}(M)$, und σ, $\tau\in\Gamma(V)$ gilt*

$$g^V((\nabla'-\nabla)_X\sigma,\tau)+g^V(\sigma,(\nabla'-\nabla)_X\tau)=0\ ,$$

schreibe $\nabla'-\nabla\in\Omega^1(M;\mathfrak{so}(V))$ für $\Bbbk=\mathbb{R}$ und $\nabla'-\nabla\in\Omega^1(M;\mathfrak{u}(V))$ für $\Bbbk=\mathbb{C}$.

(3) *Das Quadrat* ∇^2 *operiert durch Multiplikation mit einer* $\operatorname{End} V$*-wertigen 2-Form* $F = \nabla^2 \in \Omega^2(M; \operatorname{End} V)$, *der* Krümmung *von* ∇, *mit*

$$F_{X,Y}\sigma = F(X,Y)(\sigma) = \nabla_X \nabla_Y \sigma - \nabla_Y \nabla_X \sigma - \nabla_{[X,Y]}\sigma \ .$$

Falls ∇ *metrisch ist, gilt* $F \in \Omega^2(M; \mathfrak{so}(V))$ *beziehungsweise* $F \in \Omega^2(M; \mathfrak{u}(V))$. *Für alle* X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ *und* σ, $\tau \in \Gamma(V)$ *gilt also*

$$g^V(F_{X,Y}\sigma, \tau) + g^V(\sigma, F_{X,Y}\tau) = 0 \ .$$

(4) *Für* ∇, F *wie oben gilt die* zweite Bianchi-Identität

$$\nabla \circ F - F \circ \nabla = 0 \colon \Omega^k(M; V) \to \Omega^{k+3}(M; V) \ .$$

Als typische Anwendung von (2) sei ∇ ein Zusammenhang auf V, $\psi \colon V|_U \to \Bbbk^r$ eine lokale Trivialisierung und $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ die zugehörige Basis von $\Gamma(V|_U)$. Insbesondere gilt $d\sigma_i = 0$ für den von ψ induzierten trivialen Zusammenhang d. Dann existieren Formen $\omega_{ij} \in \Omega^1(U)$, so dass

$$\nabla\sigma_j = (\nabla - d)\sigma_j = \sum_{j=1}^{r} \omega_{ij} \otimes \sigma_i \ .$$

Die Form $\omega \in \Omega^1(U; M, (\Bbbk))$ heißt *Zusammenhangsform* von ∇ bezüglich ψ; ihre Komponenten entsprechen den Christoffel-Symbolen aus Definition 1.43.

Die Krümmung F verallgemeinert den Riemannschen Krümmungstensor R aus Definition 1.45 als Krümmung des Levi-Civita-Zusammenhangs ∇^{TM}. Die zweite Bianchi-Identität gilt daher auch für ∇^{TM} und R. Eine erste Bianchi-Identität wie in Satz 1.51 (2) ist für allgemeine Zusammenhänge nicht sinnvoll.

Man beachte, dass F nur den schiefsymmetrischen Anteil der zweiten Ableitung eines Schnitts σ sieht. Dieser schiefsymmetrische Anteil hängt nur vom Zusammenhang auf V ab und ist tensoriell in σ, hängt also nicht von den Ableitungen von σ ab. Die gesamte zweite Ableitung

$$\nabla^V_X \nabla^V_Y \sigma - \nabla^V_{\nabla^{TM}_X Y}\sigma$$

benötigt zusätzlich einen Zusammenhang ∇^{TM} auf TM, beispielsweise den Levi-Civita-Zusammenhang zu einer Riemannschen Metrik auf M. Die eigentliche Ableitungsinformation ist im symmetrischen Teil dieser zweiten Ableitung enthalten. Beispielsweise hängt die Konstruktion eines Laplace-Operators auf $\Gamma(V)$ vom symmetrischen Anteil der zweiten Ableitung ab, und von einer Riemannschen Metrik auf M.

Beweis. Wir müssen zunächst zeigen, dass $\nabla \colon \Omega^k(M; V) \to \Omega^{k+1}(M; V)$ wohldefiniert, also mit den Relationen aus Bemerkung 4.7 (2) verträglich ist. Sei dazu $f \in \mathcal{C}^\infty(M; \Bbbk)$, dann gilt

$$\begin{aligned} d(f\alpha) \wedge \sigma + (-1)^k \alpha \wedge \nabla\sigma &= df \wedge \alpha \wedge \sigma + f \cdot d\alpha \wedge \sigma + (-1)^k \alpha \wedge \nabla\sigma \\ &= d\alpha \wedge (f\sigma) + (-1)^k \alpha \wedge (df \wedge \sigma + f \cdot \nabla\sigma) \\ &= d\alpha \wedge (f\sigma) + (-1)^k \alpha \wedge \nabla(f\sigma) \ . \end{aligned}$$

Analog beweist man die Produktregel.

Um die Cartan-Formel zu verallgemeinern, seien $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\nabla(\alpha \otimes \sigma))(X_0, \dots, X_k) &= d\alpha(X_0, \dots, X_k) \cdot \sigma + (-1)^k (d \wedge \nabla\sigma)(X_0, \dots, X_k) \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \bigl(X_i(\alpha(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_k)) \cdot \sigma \\
&\qquad\qquad + \alpha(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_k) \cdot \nabla_{X_i}\sigma \bigr) \\
&\quad + \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \alpha\bigl([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_k\bigr) \otimes \sigma \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \nabla_{X_i}\bigl((\alpha \otimes \sigma)(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_k)\bigr) \\
&\quad + \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} (\alpha \otimes \sigma)\bigl([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_k\bigr) .
\end{aligned}$$

Zu (2) folgt auf Definition 4.14, dass $(\nabla' - \nabla)_X \sigma$ in beiden Argumenten $\mathcal{C}^\infty(M)$-linear ist. Somit gilt $\nabla' - \nabla \in \Omega^1(M; \operatorname{End} V)$. Für $\alpha \otimes \sigma \in \Omega^k(M; V)$ folgt aus der Produktregel in (1), dass

$$(\nabla' - \nabla)(\alpha \otimes \sigma) = (-1)^k \, \alpha \wedge \bigl((\nabla' - \nabla) \wedge \sigma\bigr) = (\nabla' - \nabla) \wedge (\alpha \otimes \sigma) .$$

Seien ∇ und ∇' metrisch, dann gilt außerdem

$$0 = X(g(\sigma, \tau)) - X(g(\sigma, \tau)) = g(\nabla'_X \sigma - \nabla_X \sigma, \tau) + g(\sigma, \nabla'_X \tau - \nabla_X \tau) .$$

Um (3) zu zeigen, benutzen wir die Cartan-Formel aus (1). Für X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $\sigma \in \Gamma(V)$ gilt

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 \sigma)(X, Y) &= \nabla_X((\nabla\sigma)(Y)) - \nabla_Y((\nabla_\sigma)(X)) - (\nabla\sigma)([X, Y]) \\
&= \nabla_X \nabla_Y \sigma - \nabla_Y \nabla_X \sigma - \nabla_{[X,Y]} \sigma = F\sigma .
\end{aligned}$$

Für $\beta = \alpha \otimes \sigma \in \Omega^k(M, V)$ folgt $\nabla(\nabla\beta) = F \wedge \beta$ aus der obigen Formel und der Produktregel:

$$\begin{aligned}
\nabla^2(\alpha \otimes \sigma) &= \nabla((\nabla\alpha) \otimes \sigma + (-1)^k \alpha \wedge \nabla\sigma) \\
&= (d^2\alpha) \otimes \sigma + (-1)^{k+1} (d\alpha) \wedge (\nabla\sigma) + (-1)^k (d\alpha) \wedge (\nabla\sigma) + \alpha \wedge (\nabla^2 \sigma) \\
&= \alpha \wedge (F\sigma) = F(\alpha \otimes \sigma) .
\end{aligned}$$

Sei ∇ metrisch, dann ist $F_{X,Y}$ schiefadjungiert wie in Satz 1.51 (3).

Schließlich ergibt sich (4) unmittelbar aus (3), denn

$$\nabla \circ F - F \circ \nabla = \nabla \circ \nabla \circ \nabla - \nabla \circ \nabla \circ \nabla = 0 . \quad \square$$

4.18. Bemerkung. Ein Zusammenhang ∇^V heißt *flach*, wenn $\nabla^2 = 0$. In diesem Fall erhalten wir den getwisteten de Rham-Komplex

$$\dots \to \Omega^{k-1}(M; V) \xrightarrow{\nabla^V} \Omega^k(M; V) \to \Omega^{k+1}(M; V) \to \dots$$

Das Paar (V, ∇^V) heißt *flaches Vektorbündel*, und

$$H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M; V, \nabla^V) = H^\bullet(\Omega^\bullet(M, V); \nabla^V)$$

heißt die *getwistete de Rham-Kohomologie mit Koeffizienten in* (V, ∇^V). Ein Beispiel ist die mit dem Orientierungsbündel $\circ(TM)$ getwistete de Rham-Kohomologie $H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M; o(TM))$.

Als nächstes konstruieren wir induzierte Metriken und Zusammenhänge auf den Vektorbündeln aus Proposition 4.8.

4.19. Proposition und Definition. *Es seien V, $W \to M$ Vektorbündel.*

(1) *Seien g^V und g^W Metriken auf V und W, dann existieren eindeutige Metriken auf $V \oplus W$, $V \otimes_{\Bbbk} W$, $\Lambda^k V$ und $\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V,W)$, so dass*

$$
\begin{aligned}
g^{V\oplus W}(\sigma_1 \oplus \tau_1, \sigma_2 \oplus \sigma_2) &= g^V(\sigma_1,\sigma_2) + g^W(\tau_1,\tau_2)\;, \\
g^{V\otimes_{\Bbbk} W}(\sigma_1 \otimes \tau_1, \sigma_2 \otimes \tau_2) &= g^V(\sigma_1,\sigma_2) \cdot g^W(\tau_1,\tau_2)\;, \\
g^{\Lambda^k_{\Bbbk} V}(\alpha,\beta)|_U &= \sum_{1\le a_1<\dots<a_k\le r} \overline{\alpha(e_{a_1},\dots,e_{a_k})} \cdot \beta(e_{a_1},\dots,e_{a_k}) \\
\text{und} \qquad g^{\operatorname{Hom}_k(V,W)}(F,G) &= \sum_{a=1}^r g^W(F(e_a),G(e_a))\;,
\end{aligned}
$$

wobei $U \subset (e_1,\dots,e_n)$ eine Orthonormalbasis von $\Gamma(V|_U)$ sei.

(2) *Seien ∇^V und ∇^W Zusammenhänge auf V und W, dann existieren eindeutige Zusammenhänge auf $V \oplus W$, $V \otimes_{\Bbbk} W$, V^*, $\Lambda^k V$ und $\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V,W)$, so dass*

$$
\begin{aligned}
\nabla^{V\oplus W}_X(\sigma \oplus \tau) &= (\nabla^V_X \sigma) \oplus (\nabla^W_X \tau)\;, \\
\nabla^{V\otimes_{\Bbbk} W}_X(\sigma \otimes \tau) &= (\nabla^V_X \sigma) \otimes \tau + \sigma \otimes (\nabla^W_X \tau)\;, \\
X(\alpha(\sigma_1,\dots,\sigma_k)) &= \Bigl(\nabla^{\Lambda^k_{\Bbbk} V}_X \alpha\Bigr)(\sigma_1,\dots,\sigma_k) + \sum_{j=1}^k \alpha\bigl(\sigma_1,\dots,\sigma_j,\dots,\nabla^V_X\sigma_j,\sigma_{j+1},\dots,\sigma_k\bigr) \\
\nabla^{\Lambda^{k+\ell}_{\Bbbk} V}_X(\alpha \wedge \beta) &= \Bigl(\nabla^{\Lambda^k_{\Bbbk} V}_X \alpha\Bigr) \wedge \beta + \alpha \wedge \Bigl(\nabla^{\Lambda^\ell_{\Bbbk} V}_X \beta\Bigr)\;, \\
\nabla^W_X(f(\sigma)) &= \Bigl(\nabla^{\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V,W)}_X f\Bigr)(\sigma) + f(\nabla^V_X \sigma)\;.
\end{aligned}
$$

(3) *Die Krümmungen der Zusammenhänge aus (2) werden gegeben durch*

$$
\begin{aligned}
F^{V\oplus W}_{X,Y}(\sigma \oplus \tau) &= (F^V_{X,Y}\sigma) \oplus (F^W_{X,Y}\tau)\;, \\
F^{V\otimes_{\Bbbk} W}_{X,Y}(\sigma \otimes \tau) &= (F^V_{X,Y}\sigma) \otimes \tau + \sigma \otimes (F^W_{X,Y}\tau)\;, \\
\Bigl(F^{\Lambda^k_{\Bbbk} V}_{X,Y}\alpha\Bigr)(\sigma_1,\dots,\sigma_k) &= \sum_{i=1}^k (-1)^i \alpha\bigl(F^V_{X,Y}\sigma_i,\sigma_1,\dots,\widehat{\sigma}_i,\dots,\sigma_k\bigr)\;, \\
F^{\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V,W)}_{X,Y} f &= F^W_{X,Y} \circ f - f \circ F^V_{X,Y}\;.
\end{aligned}
$$

(4) *Falls die Zusammenhänge ∇^V und ∇^W bezüglich g^V beziehungsweise g^W metrisch sind, dann sind die in (2) konstruierten Zusammenhänge bezüglich der entsprechenden in (1) konstruierten Metriken metrisch.*

Beweisskizze. In (1) ist $g^{V\oplus W}$ offensichtlich eine Metrik.

Um zu zeigen, dass $g^{V\otimes_{\Bbbk} W}$ wohldefiniert ist, überlegen wir uns zunächst, dass die Abbildung von $\Gamma(V) \times \Gamma(W)$ nach $\mathcal{C}^\infty(M;\Bbbk)$ mit

$$(\sigma_2,\tau_2) \mapsto g^V(\sigma_1,\sigma_2) \cdot g^W(\tau_1,\tau_2)$$

bilinear ist, und sich daher ausdehnt zu einer Abbildung von $\Gamma(V \otimes W)$ nach $\mathcal{C}^\infty(M;\Bbbk)$. Genauso ist die Abbildung $\Gamma(\bar V) \times \Gamma(\bar W) \to \mathcal{C}^\infty(M,\Bbbk)$ mit

$$(\sigma_1,\tau_1) \mapsto \sum_{i=1}^N g^V(\sigma_1,\sigma_2^i) \cdot g^W(\tau_1,\tau_2^i)$$

für alle $\sum_{i=1}^N \sigma_2^i \otimes \tau_2^i \in \Gamma(V \otimes_{\mathbb{k}} W) \cong \Gamma(V) \otimes_{\mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{k})} \Gamma(W)$ bilinear, und wir erhalten eine bilineare Abbildung

$$g^{V\otimes W} \colon \Gamma(\bar{V} \otimes_{\mathbb{k}} \bar{W}) \times \Gamma(V \otimes_{\mathbb{k}} W) \cong \Gamma(\overline{V \otimes_{\mathbb{k}} W}) \times \Gamma(V \otimes_{\mathbb{k}} W) \to \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{k}) ,$$

also eine sesquilineare Abbildung

$$g^{V\otimes W} \colon \Gamma(V \otimes_{\mathbb{k}} W) \times \Gamma(V \otimes_{\mathbb{k}} W) \to \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{k}) .$$

Seien $e_1, \dots, e_n$ und $f_1, \dots, f_m$ lokale Orthonormalbasen von $\Gamma(V|_U)$ und $\Gamma(W|_U)$, dann bildet die Basis $e_1 \otimes f_1, \dots, e_n \otimes f_m$ aus der Konstruktion des Tensorproduktes in Proposition 4.8 (2) eine $g^{V\otimes W}$-Orthonormalbasis von $\Gamma(V \otimes W|_U)$, denn

$$g^{V\otimes W}(e_i \otimes f_j, e_k \otimes f_\ell) = g^V(e_i, e_k) \cdot g^W(f_j, f_\ell) = \delta_{ik}\delta_{j\ell} .$$

Insbesondere ist $g^{V\otimes W}$ ein (Hermitesches) Skalarprodukt.

Analog überlegt man sich, dass g^{V^*} und $g^{\Lambda^k_{\mathbb{k}} V}$ wohldefinierte Skalarprodukte sind, und zwar unabhängig von der Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_n$ von $\Gamma(V|_U)$. Die Basen $(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k})$ mit $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ aus Proposition 3.5 bilden für alle k Orthonormalbasen von $\Gamma(\Lambda^k_{\mathbb{k}} V|_U)$.

Schließlich gilt $g^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V,W)} = g^{V^*\otimes_{\mathbb{k}} W}$, und daher ist auch $g^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V,W)}$ wieder eine Metrik. Damit ist (1) gezeigt.

Wir betrachten jetzt die induzierten Zusammenhänge. Die Konstruktion von $\nabla^{V\oplus W}$ liefert offensichtlich einen Zusammenhang.

Als nächstes überlegen wir uns, dass $\nabla^{V\otimes_{\mathbb{k}} W}$ mit den Relationen aus Bemerkung 4.7 (2) und mit den Axiomen aus Definition 4.14 verträglich ist. Die Additivität des Ausdrucks

$$(\nabla^V_X \sigma) \otimes \tau + \sigma \otimes (\nabla^W_X \tau)$$

in X, in σ und in τ ist klar, genauso die $\mathcal{C}^\infty(M)$-Linearität in X. Wir überprüfen die Verträglichkeit der Relation $(f\sigma) \otimes \tau = f(\sigma \otimes \tau)$: es gilt

$$\begin{aligned}
\nabla^{V\otimes_{\mathbb{k}} W}_X((f\sigma) \otimes \tau) &= (X(f) \cdot \sigma + f \cdot \nabla^V_X \sigma) \otimes \tau + f \cdot \sigma \otimes (\nabla^W_X \tau) \\
&= X(f) \cdot (\sigma \otimes \tau) + f \cdot \nabla^{V\otimes_{\mathbb{k}} W}_X (\sigma \otimes \tau) \\
&= \nabla^{V\otimes_{\mathbb{k}} W}_X (f(\sigma \otimes \tau))
\end{aligned}$$

und analog für $\sigma \otimes (f\tau)$. Somit ist $\nabla^{V\otimes_{\mathbb{k}} W}_X$ auf $\Gamma(V) \otimes_{\mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{k})} \Gamma(W)$ wohldefiniert und ein Zusammenhang.

Analog prüfen wir für $\nabla^{V^*} = \nabla^{\Lambda^1_k V}$, dass

$$\begin{aligned}
(\nabla^{V^*}_X \alpha)(f \cdot \sigma) &= X(f \cdot \alpha(\sigma)) - \alpha(X(f) \cdot \sigma + f \cdot \nabla^V_X \sigma) \\
&= f \cdot X(\alpha(\sigma)) - f \cdot \alpha(\nabla^V_X \sigma) \\
&= f \cdot (\nabla^{V^*}_X \alpha)(\sigma) ,
\end{aligned}$$

somit ist $(\nabla^{V^*}_X \alpha) \in \Gamma(V^*) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{k})}(\Gamma(V), \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{k}))$. Außerdem erfüllt ∇^{V^*} die Leibnizregel, denn

$$\begin{aligned}
(\nabla^{V^*}_X (f \cdot \alpha))(\sigma) &= X(f \cdot \alpha(\sigma)) - f \cdot \alpha(\nabla^V_X \sigma) \\
&= X(f) \cdot \alpha(\sigma) + f \cdot (X(\alpha(\sigma)) - \alpha(\nabla^V_X \sigma)) \\
&= (X(f) \cdot \alpha + f \cdot \nabla^{V^*}_X \alpha)(\sigma) .
\end{aligned}$$

Somit ist auch ∇^{V^*} ein Zusammenhang.

Analog überprüfen wir, dass auch $\nabla^{\Lambda^k_{\mathbb{k}} V}$ und $\nabla^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V,W)} = \nabla^{V^*\otimes_{\mathbb{k}} W}$ wohldefiniert sind und die Zusammenhangsaxiome erfüllen, und haben (2) gezeigt.

Für das Tensorprodukt gilt nach (2) und Proposition 4.17 (3), dass

$$\begin{aligned}
F^{V\otimes_{\mathbb{k}}W}_{X,Y}(\sigma\otimes\tau) &= \nabla^{V\otimes_{\mathbb{k}}W}_X\big((\nabla^V_Y\sigma)\otimes\tau+\sigma\otimes(\nabla^W_Y\tau)\big)\\
&\quad-\nabla^{V\otimes_{\mathbb{k}}W}_Y\big((\nabla^V_X\sigma)\otimes\tau+\sigma\otimes(\nabla^W_X\tau)\big)\\
&\quad-\big((\nabla^V_{[X,Y]}\sigma)\otimes\tau+\sigma\otimes(\nabla^W_{[X,Y]}\tau)\big)\\
&=(\nabla^V_X\nabla^V_Y\sigma)\otimes\tau+(\nabla^V_X\sigma)\otimes(\nabla^W_Y\tau)+(\nabla^V_Y\sigma)\otimes(\nabla^W_X\tau)+\sigma\otimes(\nabla^W_X\nabla^W_Y\tau)\\
&\quad-(\nabla^V_Y\nabla^V_X\sigma)\otimes\tau-(\nabla^V_Y\sigma)\otimes(\nabla^W_X\tau)-(\nabla^V_X\sigma)\otimes(\nabla^W_Y\tau)-\sigma\otimes(\nabla^W_Y\nabla^W_X\tau)\\
&\quad-(\nabla^V_{[X,Y]}\sigma)\otimes\tau-\sigma\otimes(\nabla^W_{[X,Y]}\tau)\\
&=(F^V_{X,Y}\sigma)\otimes\tau+\sigma\otimes(F^W_{X,Y}\tau)
\end{aligned}$$

Für das duale Bündel überprüfen wir (3) ebenfalls. Analog zum obigen gilt

$$\begin{aligned}
0 &= X(Y(\alpha(\sigma)))-Y(X(\alpha(\sigma)))-[X,Y](\alpha(\sigma))\\
&=(F^{V^*}_{X,Y}\alpha)(\sigma)+\alpha(F^V_{X,Y}\sigma)\;.
\end{aligned}$$

Wir überprüfen (4) für das Tensorprodukt. Es gilt

$$\begin{aligned}
X(g^{V\otimes_{\mathbb{k}}W}(\sigma_1\otimes\tau_1,\sigma_2\otimes\tau_2)) &= (X(g^V(\sigma_1,\sigma_2)))\cdot g^W(\tau_1,\tau_2)+g^V(\sigma_1,\sigma_2)\cdot(X(g^W(\tau_1,\tau_2)))\\
&=\Big(g^V(\nabla^V_X\sigma_1,\sigma_2)+g^V(\sigma_1,\nabla^V_X\sigma_2)\Big)\cdot g^W(\tau_1,\tau_2)\\
&\qquad+g^V(\sigma_1,\sigma_2)\cdot\Big(g^W(\nabla^W_X\tau_1,\tau_2)+g^W(\tau_1,\nabla^W_X\tau_2)\Big)\\
&=g^{V\otimes_{\mathbb{k}}W}\Big(\nabla^{V\otimes_{\mathbb{k}}W}_X(\sigma_1\otimes\tau_1),\sigma_2\otimes\tau_2\Big)\\
&\qquad+g^{V\otimes_{\mathbb{k}}W}\Big(\sigma_1\otimes\tau_1,\nabla^{V\otimes_{\mathbb{k}}W}_X(\sigma_2\otimes\tau_2)\Big)\;.
\end{aligned}$$

Sei jetzt wieder $e_1,\dots,e_n$ eine Orthonormalbasis von $\Gamma(V|_U)$, dann gilt

$$0=X(g^V(e_a,e_b))=g^V(e_a,\nabla_Xe_b)+\overline{g^V(e_b,\nabla_Xe_a)}\;.$$

Durch Nachrechnen ergibt sich

$$\begin{aligned}
X(g^{V^*}(\alpha,\beta)) &= \sum_{a=1}^N(X(\overline{\alpha(e_a)})\cdot\beta(e_a)+\overline{\alpha(e_a)}\cdot X(\beta(e_a)))\\
&=\sum_{a=1}^N\big(\overline{(\nabla^{V^*}_X\alpha)(e_a)}\cdot\beta(e_a)+\overline{\alpha(e_a)}\cdot(\nabla^{V^*}_X\beta)(e_a)\big)\\
&\qquad+\sum_{a,b=1}^N\big(\overline{\langle e_b,\nabla^V_Xe_a\rangle}+\langle e_a,\nabla^V_Xe_b\rangle\big)\overline{\alpha(e_b)}\cdot\beta(e_a)\\
&=g^{V^*}(\nabla^{V^*}_X\alpha,\beta)+g^{V^*}(\alpha,\nabla^{V^*}_X\beta)\;.
\end{aligned}$$

Die anderen Fälle werden ähnlich behandelt. □

Insbesondere ist $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}\,v=\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V,V)\to M$ das Bündel der Endomorphismen. Für $X\in\mathfrak{X}(M)$, $F\in\Gamma(\mathrm{End}_{\mathbb{k}}V)$ und $\sigma\in\Gamma(V)$ folgt,

$$\Big(\nabla^{\mathrm{End}_{\mathbb{k}}V}_XF\Big)(\sigma)=\Big(\nabla^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V,V)}_XF\Big)(\sigma)=\nabla^V_X(F(\sigma))-F(\nabla^V_X(\sigma))\;,$$

also schreiben wir auch suggestiv

$$(\nabla^{\mathrm{End}_{\mathbb{k}}V}_XF)=[\nabla^V_X,F]\;.$$

4.20. Proposition und Definition. *Es sei $V \to M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇^V und $F\colon N \to M$ eine glatte Abbildung. Dann existiert genau ein Zusammenhang $\nabla^{F^*V} = F^*\nabla^V$ auf F^*V, der* zurückgeholte Zusammehang*, so dass für alle $\sigma \in \Gamma(V)$ und alle $Y \in \mathfrak{X}(N)$ gilt*

$$\nabla_Y^{F^*V}(\sigma \circ F)_q = \nabla^V_{dF_q(Y_q)}\sigma \in (F^*V)_q \cong V_{F(q)} \; . \tag{1}$$

Für die Krümmung gilt

$$(\nabla^{F^*V})^2_{X,Y}(\sigma \circ F)_q = (\nabla^V)^2_{dF_q(X_q),dF_q(Y_q)}\sigma_{F(q)} \; . \tag{2}$$

Für die rechte Seite von (2) schreiben wir auch kurz $F^*(\nabla^V)^2_{X,Y}(\sigma \circ F)$, also gilt $(\nabla^{F^*V})^2 = F^*(\nabla^V)^2$.

Beweis. Der Beweis entspricht dem von Proposition 1.61. $\square$

Wie in der Riemannschen Geometrie kann man Elemente eines Vektorbündels V mit Zusammenhang ∇^V entlang von Kurven parallel verschieben. Sei etwa $\gamma\colon [a,b] \to M$ eine Kurve und $v \in V_{\gamma(a)}$, dann existiert nach dem Satz 1.72 ein eindeutiger Schnitt $\sigma \in \Gamma(\gamma^*V)$ mit $\sigma(a) = v \in V_{\gamma(a)} = (\gamma^*V)_a$ und $\nabla^{\gamma^*V}_{\frac{\partial}{\partial t}}\sigma = 0$, und wir definieren die Parallelverschiebung von v entlang γ nach $V_{\gamma(b)}$ als $\sigma(b) \in V_{\gamma(b)} = (\gamma^*V)_b$. Mithilfe der Parallelverschiebung lassen sich auf geometrische Weise lokale Trivialisierungen von Vektorbündeln mit Zusammenhang konstruieren. Sei $\psi\colon V|_U \to \mathbb{k}^r$ eine Trivialisierung, dann wollen wir die Schnitte σ_a^ψ mit $\sigma_a^\psi(q) = \psi_q^{-1}(e_a) \in V_q$ als Basisschnitte von ψ bezeichnen.

Wir erinnern uns an die Exponentialabbildung $\exp_p\colon T_pM \to M$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g). Geraden durch $O_p \in T_pM$ werden auf radiale Geodätische durch p in M abgebildet, und für kleine $v \in T_pM$ gilt $d(p, \exp_p v) = \|v\|$. Wir betrachten das Radialfeld $\mathcal{R}$ auf $\exp_p U$ mit

$$\mathcal{R}_{\exp_p x} = d\exp_p|_x(x) \; .$$

4.21. Satz. *Es sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $U \subset T_pM$ sternförmig um 0_p, so dass $\exp_p|_U$ ein Diffeomorphismus auf das Bild ist. Es sei $V \to M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇^V und $(v_1, \dots, v_r)$ eine Basis von V_p.*

(1) *Dann existiert eine eindeutige Trivialisierung $\psi\colon V|_{\exp_p U} \to \mathbb{k}^r$ mit $\psi_p(v_a) = e_a \in \mathbb{k}^r$ und so, dass σ_a^ψ längs aller radialen Geodätischen $t \mapsto \exp_p tx$ parallel ist für alle $a = 1, \dots, r$, alle $v \in T_pM$ und alle t mit $tx \in U$.*

(2) *Für alle Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt auf $\exp_p U$, dass*

$$\nabla^V_X\sigma_a^\psi\big|_q = \frac{1}{2}F^V_{\mathcal{R},X}\sigma_a^\psi\big|_q + O(d(p,q)^2\|Y\|) \; .$$

(3) *Falls ∇^V metrisch bezüglich einer Metrik g^V ist und $(v_1, \dots, v_a)$ eine Orthonormalbasis, dann ist $\sigma_1^\psi, \dots, \sigma_r^\psi$ eine Orthonormalbasis auf ganz $\exp_p U$, insbesondere*

$$0 = \langle \nabla^V_Y\sigma_a^\psi, \sigma_b^\psi\rangle + \langle \sigma_a^\psi, \nabla^V_Y\sigma_b^\psi\rangle = \langle F^V_{X,Y}\sigma_a^\psi, \sigma_b^\psi\rangle + \langle \sigma_a^\psi, F^V_{X,Y}\sigma_b^\psi\rangle$$

auf $\exp_p U$ für alle X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ und alle a, b.

Beweis. Anstelle von $V \to M$ reicht es, das zurückgeholte Bündel $\exp_p^* V \to U$ mit Zusammenhang $\nabla^{\exp_p^* V}$ auf (U, g_p) zu betrachten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei also $M = U \subset \mathbb{R}^n$ und g die Euklidische Metrik und $\pi\colon V \to U$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang.

Zu (1) betrachten wir für $x \in U$ die Kurve $\gamma_x\colon [0,1] \to U$ mit $\gamma_x(s) = sx$ und die Lösung $\sigma_{a,x} \in \Gamma(\gamma_x^*V)$ der Differentialgleichung $\nabla^{\gamma_x^*V}_{\frac{\partial}{\partial s}}\sigma_{a,x} = 0$ mit $\sigma_{a,x}(0) = v_a$. Nach dem Satz 1.72 von Picard-Lindelöf hängt $\sigma_a(x) = \sigma_{a,x}(1)$ glatt von x ab. Außerdem gilt $\sigma_{a,tx}(s) = \sigma_{a,x}(ts)$ wegen der Eindeutigkeitsaussage, so dass $\sigma_a(tx) = \sigma_{a,x}(t)$ parallel längs radialer Geodätischer ist.

Zu (2) betrachte Vektorfelder $\mathcal{R}$ und Y auf U mit

$$\mathcal{R}_x = x = \sum_{k=1}^n x^k e_k \qquad \text{und} \qquad Y_x = x^i e_j$$

für feste i, $j \in \{1, \dots, n\}$. Es folgt

$$[\mathcal{R}, Y]_x = \sum_{k=1}^n \bigl(x^k \cdot e_k(x^i) \cdot e_j - x^i \cdot e_j(x^k) \cdot e_k\bigr) = Y_x - Y_x = 0 \; .$$

Nach Konstruktion gilt $\nabla_{\mathcal{R}} \sigma_a^\psi = 0$ auf ganz U, also erhalten wir

$$F_{\mathcal{R},Y} \sigma_a^\psi \big|_x = \nabla_{\mathcal{R}} \bigl(\nabla_Y \sigma_a^\psi\bigr)\big|_x = \sum_{k=1}^n x^k \nabla_{e_k} \bigl(x^i \cdot \nabla_{e_j} \sigma_a^\psi\bigr) \; .$$

Nach Konstruktion gilt $\nabla_Y \sigma_a^\psi\big|_0 = 0$, und für $x = x^i e_i$ schließen wir, dass

$$(x^i)^2 F_{e_i,e_j} \sigma_a^\psi \big|_x = x^i \nabla_{e_i} \bigl(x^i \nabla_{e_j} \sigma_a^\psi\bigr) \; .$$

Da ∇ in der Trivialisierung aus (1) bei 0 mit der gewöhnlichen Ableitung übereinstimmt, folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \bigl(x^i \nabla_{e_j} \sigma_a^\psi\bigr) = x^i F_{e_i,e_j} \sigma_a^\psi \big|_{x^i e_i} \; ,$$

und wegen $\nabla_{e_j} \sigma_a^\psi\big|_0 = 0$ also

$$x^i \nabla_{e_j} \sigma_a^\psi \big|_{x^i e_i} = \frac{(x^i)^2}{2} F_{e_i,e_j} \sigma_a^\psi \big|_{x^i e_i} + O(\|x^i\|^3) \; ,$$

somit

$$\nabla_{e_j} \sigma_a^\psi \big|_{x^i e_i} = \frac{1}{2} F_{x^i e_i, e_j} \sigma_a^\psi \big|_{x^i e_i} + O(\|x^i\|^2) = \frac{1}{2} F_{\mathcal{R}, e_j} \sigma_a^\psi \big|_{x^i e_i} + O(\|x^i\|^2) \; .$$

Aus dem Satz von Taylor für $\nabla_{e_j} \sigma_a^\psi$ und Linearität von $\nabla_Y \sigma_a^\psi$ in Y folgt die allgemeine Behauptung.

Zu (3) bemerken wir, dass

$$\langle \sigma_a^\psi(0), \sigma_b^\psi(0) \rangle = \delta_{ab}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \sigma_a^\psi(tx), \sigma_b^\psi(tx) \rangle = \langle \nabla_X \sigma_a^\psi \big|_{tx}, \sigma_b^\psi(tx) \rangle + \langle \sigma_a^\psi(tx), \nabla_X \sigma_b^\psi \big|_{tx} \rangle = 0 \; ,$$

so dass $\langle \sigma_a^\psi, \sigma_b^\psi \rangle = \delta_{ab}$ auf ganz U gilt. Die letzten zwei Aussagen folgen dann aus Proposition 4.17 (2) und (3). □

Der obige Satz erklärt die Bedeutung der Krümmung F^V etwas geometrischer als Proposition 4.17. Man beachte, dass geodätische Normalkoordinaten eine andere Trivialisierung von TM durch Koordinatenfelder ergeben als der obige Satz.

4.3. Chern-Weil-Theorie

In diesem Abschnitt wollen wir jedem Vektorbündel $V \to M$ mit Zusammenhang ∇^V gewisse Differentialformen $P(V, \nabla^V)$ zuordnen, die stets geschlossen sind, und deren Kohomologieklassen nur von V, aber nicht von ∇^V abhängen. Diese Klassen $P(V) = [P(V, \nabla^V)] \in H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M)$ heißen charakteristische Klassen von V. Mehr dazu finden sich im Buch [**Zh**] von Zhang, Kapitel 1.

Im folgenden sei $G \subset M_n(\Bbbk)$ stets eine *Matrix-Lie-Gruppe*, also eine Untermannigfaltigkeit von $M_n(\Bbbk) \cong \Bbbk^{n^2}$, die zugleich bezüglich Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet. Wichtigste Beispiele sind

$$\begin{aligned} Gl_n(\Bbbk) &= \{g \subset M_n(\Bbbk) \mid \det g \neq 0\} \\ \text{und} \quad SO(n) &= \{g \subset M_n(\Bbbk) \mid \det g = 1 \quad \text{und} \quad g^t g = e\} \;; \end{aligned}$$

hierbei ist e die Einheitsmatrix und g^t die transponierte Matrix zu g. Für alle $g \in G$ ist die Abbildung

$$\operatorname{int}_g \colon G \to G \quad \text{mit} \quad h \mapsto ghg^{-1}$$

ein Gruppenautomorphismus, der *innere Automorphismus* zu g.

Der Tangentialraum $\mathfrak{g} = T_eG$ heißt auch die *Lie-Algebra* von G. Sei $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ eine Kurve mit $\gamma(0) = e$ und $\dot\gamma(0) = X \in \mathfrak{g}$, dann ist auch $\operatorname{int}_g \circ \gamma$ eine Kurve in G mit $\operatorname{int}_g \gamma(0) = e$. Das Differential

$$X \mapsto \operatorname{Ad}_g X = d(\operatorname{int}_g)_e(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g \cdot \dot\gamma(0) \cdot g^{-1} = g \cdot X \cdot g^{-1} \in \mathfrak{g} \subset M_n(\Bbbk)$$

heißt die *adjungierte Wirkung* $\operatorname{Ad}_g \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ von $g \in G$ auf $\mathfrak{g}$. Für $Y \in \mathfrak{g}$ liefert Ableiten von $\operatorname{Ad}_g Y \in \mathfrak{g}$ nach g bei e die *Lie-Klammer*

$$(X, Y) \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \operatorname{Ad}_{\gamma(t)} Y = \dot\gamma(t) \cdot Y - Y \cdot \dot\gamma(t) = [X, Y] \in \mathfrak{g} \;.$$

4.22. Definition. Ein Polynom $P \in \mathbb{C}[g]$ oder allgemeiner eine Potenzreihe $P \in \mathbb{C}[\![\mathfrak{g}]\!]$ in den Matrixeinträgen heißt *G-invariant*, wenn $P(\operatorname{Ad}_g X) = P(X)$ für alle $g \in G$ und alle $X \in \mathfrak{g}$ gilt.

4.23. Beispiel. Wir betrachten vor allem die folgenden Polynome und Potenzreihen.

(1) Es sei $c(X) = \det_\Bbbk(E_n - X)$ für $X \in \mathfrak{gl}_n(\Bbbk) = M_n(\Bbbk)$ wie in der Definition des charakteristischen Polynoms, dann ist c invariant, genau wie $\det_\Bbbk(f(X))$ für eine Potenzreihe f, beispielsweise

$$\hat A(X) = \det\biggl(\Bigl(\frac{X/2}{\sinh(X/2)}\Bigr)^{\frac12}\biggr) \;.$$

Hier bilden wir zuerst die Wurzel der geraden Funktion $x \mapsto \frac{x/2}{\sinh(x/2)}$, bevor wir die Matrix X in die zugehörige Potenzreihe um $x = 0$ einsetzen.

(2) Die Spur $\operatorname{tr}_\Bbbk(X)$ einer Matrix ist ebenfalls $Gl_n(\Bbbk)$-invariant. Wir betrachten speziell

$$\operatorname{ch}(X) = \operatorname{tr}_\Bbbk\bigl(e^{-X}\bigr) \;.$$

(3) Für schiefsymmetrische Matrizen $X \in \mathfrak{so}(2n)$ betrachten wir die alternierende 2-Form $\alpha \in \Lambda^2\mathbb{R}^{2n}$ mit

$$\alpha(v, w) = \langle v, Xw\rangle \;.$$

Für eine orientierte Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_{2n}$ von $\mathbb{R}^{2n}$ setzen wir

$$\operatorname{Pf}(X) = (\alpha \wedge \dots \wedge \alpha)(e_1, \dots, e_{2n}) = 2^{-n} \sum_{\sigma \in S(n)} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n X_{\sigma(2i-1),\sigma(2i)} \;,$$

und erhalten die $SO(2n)$-invariante *Pfaffsche Determinante* von X. Es gilt $\operatorname{Pf}(X)^2 = \det(X)$, und das Vorzeichen wird durch die Orientierung festgelegt.

4.24. Bemerkung. Invariante Polynome und Potenzreihen haben folgende Eigenschaften.

(1) Es seien $X, Y \in \mathfrak{g}$ und $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ mit $\dot\gamma(0) = X$ wie oben, dann gilt

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (P(\operatorname{Ad}_{\gamma(t)} Y)) = dP_Y\biggl(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \operatorname{Ad}_{\gamma(t)} Y\biggr) = dP_Y([X, Y]) \;.$$

(2) Da der Ring $(\Lambda^{2\bullet}T_pM, \wedge)$ kommutativ ist, können wir $\mathfrak{g}$-wertige Formen in P einsetzen. Für ein $\Bbbk$-Vektorbündel V mit Zusammenhang ∇^V gilt $F^V \in \Omega^2(M, \mathfrak{gl}_n(\Bbbk))$ bezüglich einer lokalen Trivialisierung, und wir setzen

$$P(V, \nabla^V) = P(F^V) \in \Omega^{2\bullet}(M; \Bbbk)$$

Da die Matrixeinträge von F^V in Λ^2TM liegen, verschwinden Produkte von mehr als $\frac{\dim M}{2}$ Faktoren. Insbesondere dürfen wir F^V auch in invariante Potenzreihen einsetzen, ohne auf den Konvergenzradius Rücksicht zu nehmen. Wenn P invariant ist, hängt diese Form nicht von der Trivialisierung ab, denn sei $g\colon U \to Gl_n(\Bbbk)$ eine Basiswechselmatrix, so erhalten wir gF^Vg^{-1} als Krümmung bezüglich der neuen Trivialisierung, aber

$$P(gF^Vg^{-1}) = P(\mathrm{Ad}_g F^V) = P(F^V) \ .$$

(3) Sei $V \to M$ ein orientierbares $\mathbb{R}$-Vektorbündel vom Rang k mit Metrik und metrischem Zusammenhang ∇^V, dann folgt $F^V \in \Omega^2(M; \mathfrak{so}(V))$ nach Proposition 4.17 (3). Für ein $SO(k)$-invariantes Polynom P_k betrachten wir analog

$$P(V, \nabla^V) = P(F^V) \in \Omega^{2\bullet}(M) \ .$$

(4) Sei $\omega \in \Omega^1(M; \mathfrak{g})$. Da Elemente aus Λ^1T_pM mit allen Elementen des Rings $(\Lambda^{2\bullet}T_pM, \wedge)$ kommutieren, ergibt sich aus (1) auch

$$dP_{F^V}([\omega^V, F^V]) = 0 \ .$$

4.25. Satz und Definition (Chern-Weil). *Für $\Bbbk$-Vektorbündel $V \to M$ mit Zusammenhang ∇^V definieren wir*

(1) *die* totale Chern-Form $c(V, \nabla^V) = \det\Big(1 - \frac{F^V}{2\pi i}\Big)$,

(2) *die* $\hat{A}$-Form $\hat{A}(V, \nabla^V) = \det\bigg(\Big(\frac{F^V/4\pi i}{\sinh(F^V/4\pi i)}\Big)^{\frac{1}{2}}\bigg)$,

(3) *die* Chern-Charakter-Form $\mathrm{ch}(V, \nabla^V) = \mathrm{tr}\big(e^{-\frac{F^V}{2\pi i}}\big)$.

Für reelle orientierte Vektorbündel V vom Rang $2k$ mit Metrik und metrischem Zusammenhang ∇^V definieren wir außerdem

(4) *die* Euler-Form $e(V, \nabla^V) = \mathrm{Pf}\big(\frac{F^V}{2n}\big)$.

Diese Formen sind geschlossen und definieren reelle Kohomologieklassen $c(V)$, $\hat{A}(V), \mathrm{ch}(V)$ beziehungsweise $e(V) \in H^{2\bullet}_{\mathrm{dR}}(M)$ unabhängig vom (im Fall (4) metrischen) Zusammenhang ∇^V. Sei schließlich $f\colon N \to M$ glatt, dann gilt $P(f^*V, \nabla^{f^*V}) = f^*P(V, \nabla^V)$ und insbesondere $P(f^*V) = f^*P(V)$.

Auf diese Weise konstruierte Differentialformen und Kohomologieklassen heißen *Chern-Weil-Formen* beziehungsweise *Chern-Weil-Klassen* von Vektorbündeln. Allgemeiner nennt man Kohomologieklassen zu Vektorbündeln, die sich unter Zurückholen natürlich verhalten, auch *charakteristische Klassen.*

Wir haben in den Übungen gesehen, dass je zwei Metriken auf einem Vektorbündel isomorph sind. Insbesondere hängt $e(V)$ also auch nicht von der Metrik ab.

Beweis. Die Wohldefiniertheit der Formen $P(V, \nabla^V) \in \Omega^{2\bullet}(M; \mathbb{C})$ haben wir bereits in Bemerkung 4.24 geklärt.

Um zu zeigen, dass $P(V, \nabla^V)$ geschlossen ist, wählen wir eine Trivialisierung $\psi\colon V|_U \to \Bbbk^k$. Auf $U \times \Bbbk^k$ schreiben wir den gegebenen Zusammenhang als $\nabla = d + \omega$ mit $\omega \in \Omega^1(U; \mathfrak{g})$. Aus der Kettenregel folgt zunächst

$$d(P(V, \nabla^V)) = dP_{F^V}(dF^V) = dP_{F^V}([d, F^V])$$

und wir schreiben $dF^V = d \circ F^V - F^V \circ d = [d, F^V] \colon \Omega^\bullet(U; \Bbbk^k) \to \Omega^{\bullet+1}(U; \Bbbk^k)$.

Nach Bemerkung 4.24 (4) gilt auch

$$dP_{F^V}([\omega, F^V]) = 0$$

wegen der G-Invarianz. Insgesamt folgt

$$d(P(V, \nabla^V)) = dP_{F^V}([d + \omega, F^V]) = dP_{F^V}([\nabla, F^V]) = 0$$

aufgrund der zweiten Bianchi-Identität aus Proposition 4.17 (4). Also ist $P(V, \nabla^V)$ tatsächlich geschlossen.

Als nächstes folgt $P(f^*V, \nabla^{f^*V}) = f^*P(V, \nabla^V)$ aus Proposition 4.20. Diese „*Natürlichkeit*“ von $P(V, \nabla^V)$ benötigen wir im folgenden Schnitt.

Es seien ∇^0 und ∇^1 zwei Zusammenhänge auf $V \to M$. Wir betrachten das zurückgeholte Bündel

$$\tilde{V} = p^*V \to \tilde{M} = M \times [0, 1] ,$$

wobei $p \colon \tilde{M} \to M$ die Projektion sei. Auf $\tilde{V}|_{M \times [0,1)}$ betrachten wir $p^*\nabla^0$, auf $\tilde{V}|_{M \times (0,1]}$ den Zusammenhang $p^*\nabla^1$. Wie in Bemerkung 4.15 (2) interpolieren wir und erhalten einen Zusammenhang $\nabla^{\tilde{V}}$, der bei $M \times \{0\}$ mit $p^*\nabla^0$ und bei $M \times \{1\}$ mit $p^*\nabla^1$ übereinstimmt. Außerdem ist $\nabla^{\tilde{V}}$ nach 4.15 (3) metrisch bezüglich der zurückgeholten Metrik p^*g^V auf V, wenn ∇^0, ∇^1 metrisch bezüglich g^V sind.

Wir betrachten Einbettungen $i_t \colon M \to \tilde{M}$ mit $i_t(p) = (p, t)$ für $t \in [0, 1]$, dann folgt aus der obigen Natürlichkeit, dass

$$i_0^*P(\tilde{V}, \nabla^{\tilde{V}}) = P(V, \nabla^0) \qquad \text{und} \qquad i_1^*P(\tilde{V}, \nabla^{\tilde{V}}) = P(V, \nabla^1) .$$

Aus der Homotopieformel 3.28 folgt, dass

$$P(V, \nabla^1) - P(V, \nabla^0) = d \int_{[0,1]} P(\tilde{V}, \nabla^{\tilde{V}}) ,$$

insbesondere folgt $[P(V, \nabla^1)] = [P(V, \nabla^0)] = H^{2\bullet}_{\mathrm{dR}}(M; \Bbbk)$, also ist $P(V)$ unabhängig vom Zusammenhang.

Es bleibt zu zeigen, dass die Formen (1) — (3) reelle Klassen repräsentieren. Um das zu zeigen, wählen wir eine Metrik und einen metrischen Zusammenhang auf V. Nach Proposition 4.17 (3) nimmt F^V Werte in $\mathfrak{so}(k)$ beziehungsweise $\mathfrak{u}(k)$ an, und solche Matrizen haben bekanntlich imaginäre Eigenwerte. Also hat $\frac{F^V}{2\pi i}$ reelle Eigenwerte, somit sind $\det\bigl(e - \frac{F^V}{2\pi i}\bigr)$, $\mathrm{ch}\bigl(e^{-\frac{F^V}{2\pi i}}\bigr)$, $\hat{A}\biggl(\Bigl(\frac{F^V/4\pi i}{\sinh(F^V/4\pi i)}\Bigr)^{\frac{1}{2}}\biggr)$ reell. Die Euler-Form ist bereits nach Konstruktion reell. □

Es folgt ein kleiner Exkurs über die topologische und geometrische Bedeutung der soeben konstruierten Chern-Weil-Formen und charakteristischen Klassen.

4.26. Bemerkung. Es sei $V \to M$ ein komplexes Vektorbündel mit Zusammenhang ∇^V. Die *k-te Chern-Form* $c_k(V, \nabla^V) = c(V, \nabla^V)^{[2k]} \in \Omega^{2k}(M)$ ist die homogene Komponente von $c(V, \nabla^V) \in \Omega^{2\bullet}(M; \mathbb{C})$ vom Grad $2k$. Insbesondere gilt $c_0(V, \nabla^V) = 1$ und

$$\det\biggl(e - z\frac{F^V}{2\pi i}\biggr) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k c_k(V, \nabla^V) \text{ für alle } z \in \mathbb{C} .$$

Die *k-te Chern-Klasse* ist definiert als $c_k(V) = [c_k(V, \nabla^V)] \in H^{2k}_{\mathrm{dR}}(M)$. Die Chern-Klassen haben folgende Eigenschaften.

(1) Chern-Klassen sind natürlich.

(2) Wegen der Multiplikativität der Determinante gilt

$$c(V\oplus W,\nabla^{V\oplus W})=\det\begin{pmatrix} e-\frac{F^V}{2\pi i} & 0\\ 0 & e-\frac{F^W}{2\pi i}\end{pmatrix}=c(V,\nabla^V)\wedge c(W,\nabla^W)\;.$$

Für die einzelnen Chern-Klassen gilt also

$$c_k(V\oplus W)=\sum_{j=0}^k c_j(V)\wedge c_{k-j}(W)\;.$$

(3) Sei $L\to M$ ein *Geradenbündel*, also ein $\mathbb{C}$-Vektorbündel vom Rang 1 mit Zusammenhang ∇^L, dann ist $F^L\in\Omega^2(M;\operatorname{End}_{\mathbb{C}}L)\cong\Omega^2(M;\mathbb{C})$ eine komplexwertige 2-Form unabhängig von der Wahl der Trivialisierung. Wir nehmen an, dass ∇^L metrisch ist bezüglich einer Metrik auf L, dann ist $F^L=i\alpha$ imaginärwertig nach Proposition 4.17 (3). Wir können L dann als orientiertes, reelles Vektorbündel $L_{\mathbb{R}}$ vom Rang 2 mit metrischem Zusammenhang $\nabla^{L_{\mathbb{R}}}$ und Krümmung

$$F^{L_{\mathbb{R}}}=\begin{pmatrix}0 & -\alpha\\ \alpha & 0\end{pmatrix}\in\Omega^2(M;\mathfrak{so}(2))$$

auffassen. Es folgt

$$c(L,\nabla^L)=1-\frac{\alpha}{2\pi}=1+\operatorname{Pf}\left(\frac{F^{L_{\mathbb{R}}}}{2\pi}\right)=1+e(L,\nabla^L)\;.$$

Wenn man die Eulerklasse $e(L)$ bereits definiert hat, sind die Chern-Klassen durch (1) — (3) bereits eindeutig festgelegt. Dabei darf man sich sogar aussuchen, in welcher Kohomologietheorie man $e(L)$ definieren möchte. Am besten eignet sich $e_{\mathbb{Z}}(L)\in H^2(M;\mathbb{Z})$, und man erhält Klassen $c_{k,\mathbb{Z}}(V)\in H^{2k}(M;\mathbb{Z})$. Chern-Weil-Theorie liefert allerdings nur $c_k(V)\in H^{2k}_{\mathrm{dR}}(M)\cong H^{2k}(M;\mathbb{R})$.

4.27. Bemerkung. Zusätzlich zu den Axiomen aus der letzten Bemerkung haben Chern-Klassen noch folgende Eigenschaften:

(1) Es seien $s_0,\dots,s_n$ die elementarsymmetrischen Polynome

$$s_k(x_1,\dots,x_n)=\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} x_{i_1}\dots x_{i_k}\;,$$

und es sei $A\in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{C}$. Dann gilt

$$\det(e-zA)=\sum_{k=0}^n(-z)^k s_k(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=:\sum_{k=0}^n(-z)^k(A)\;.$$

Man kann zeigen, dass jedes $Gl_n(\mathbb{C})$-invariante Polynom auf $M_n(\mathbb{C})$ auf eindeutige Weise als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen $s_1,\dots,s_n$ geschrieben werden kann. Da diagonalisierbare Matrizen in $M_n(\mathbb{C})$ dicht liegen und Polynome stetig sind, reicht es dazu, nur diagonalisierbare Matrizen zu betrachten. Daraus folgt: jede Chern-Weil-Klasse komplexer Vektorbündel ist ein Polynom in den Chern-Klassen. Zum Beispiel gilt

$$\operatorname{ch}(V)=\operatorname{rk}V+c_1(V)+\frac{c_1(v)^2-2c_2(v)}{2}+\frac{c_1(v)^3-3c_1(v)c_2(v)+3c_3(v)}{6}+\dots\;.$$

(2) Die Menge der komplexen Geradenbündel $L\to M$ bis auf Isomorphie bildet eine abelsche Gruppe $\operatorname{Pic}(M)$ mit dem Tensorprodukt, und die erste Chern-Klasse liefert einen Gruppenhomomorphismus, da

$$c_1(V\otimes W)=c_1(V)+c_1(W)\in H^2_{\mathrm{dR}}(M)\;.$$

Im allgemeinen ist c_1 weder injektiv noch surjektiv. Geht man allerdings zu ganzzahligen Chern-Klassen über, so erhält man einen Isomorphismus

$$c_{1,\mathbb{Z}}\colon \operatorname{Pic}(M) \to H^2(M;\mathbb{Z}) .$$

Bündel von höherem Rang lassen sich im allgemeinen nicht so einfach klassifizieren.

(3) Wir können Deligne-Chern-Klassen (differenzielle Charaktere) $\hat{c}_k(V,\nabla^V) \in \hat{H}^k(M;\mathbb{Z})$ für Vektorbündel V mit Metrik und metrischem Zusammenhang ∇^V definieren, wobei

$$d\hat{c}_k(V,\nabla^V) = c_k(V,\nabla^V) \qquad \text{und} \qquad \delta\hat{c}_k(V,\nabla^V) = c_{k,\mathbb{Z}}(V) .$$

Dann klassifiziert $\hat{c}_1$ sogar Geradenbündel mit metrischem Zusammenhang bis auf Isomorphie.

Alternativ ersetzen wir $\Omega^\bullet(\,\cdot\,)$ durch $\Omega^\bullet(\,\cdot\,;\mathbb{C})$ in Definition 3.51 und erhalten komplexe glatte Deligne-Kohomologie $\hat{H}^k_{\mathbb{C}}(M;A)$. Dann können wir $\hat{c}_k(V,\nabla^V) \in \hat{H}^k_{\mathbb{C}}(M;\mathbb{Z})$ für beliebige Vektorbündel mit Zusammenhang definieren, und $\hat{c}_1$ liefert einen Isomorphismus der entsprechenden Gruppe mit $\hat{H}^2_{\mathbb{C}}(M;\mathbb{Z})$.

4.28. Beispiel. Es sei $M = S^1 \subset \mathbb{C}$ und $L \to S^1$ ein Geradenbündel mit Zusammenhang ∇^L. Wir wählen $v \in L_1 \setminus \{0\}$ und konstruieren einen parallelen Schnitt σ von $\gamma^*L \to \mathbb{R}$, wobei $\gamma(t) = e^{2\pi i t} \in S^1$. Dann ist $\sigma(1) \in L_1$ ein Vielfaches von v, etwa $\sigma(1) = z \cdot \sigma(0) = z \cdot v$ mit $z \in \mathbb{C}^\times$. Da auch $z \cdot \sigma$ ein paralleler Schnitt ist, folgt $\sigma(t+1) = z \cdot \sigma(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Man nennt z die *Holonomie* von ∇^L. Falls ∇^L metrisch ist, folgt $|z| = 1$.

Sei $L' \to S^1$ ein weiteres Geradenbündel mit Zusammenhang $\nabla^{L'}$, dann konstruieren wir analog σ' und z'. Falls $z = z'$ gilt, erhalten wir einen Isomorphismus $F\colon L \to L'$ mit $F(\sigma(t)) = \sigma'(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Falls $z \neq z'$, gibt es keinen Isomorphismus, der die Zusammenhänge erhält. Also werden Geradenbündel über S^1 mit (metrischem) Zusammenhang durch ihre Holonomie in $\mathbb{C}^\times(S^1)$ klassifiziert.

Es gilt $H^2(S^1;\mathbb{Z}) = H^2_{\mathrm{dR}}(S^1) = 0$, also sind nach Bemerkung 4.27 (2) alle komplexen Geradenbündel trivial. Allerdings gilt $\hat{H}^2(S^1;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ nach Bemerkung 3.52 (6), und analog $\hat{H}^2_{\mathbb{C}}(S^1;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. In der Tat wird die Holonomie gerade gegeben durch

$$z = e^{2\pi i\,\hat{c}_1(L,\nabla^L)} .$$

Über anderen Mannigfaltigkeiten M enthält $\hat{c}_1(L,\nabla^L) \in \hat{H}^2_{\Bbbk}(M;\mathbb{Z})^\bullet$ entsprechend die Holonomien von $\gamma^*(L,\nabla^L) \to S^1$ entlang aller glatten Schleifen $\gamma\colon S^1 \to M$.

4.29. Bemerkung. Wir möchten für reelle Vektorbündel ähnliche „fundamentale“ charakteristische Klassen angeben wie in Bemerkung 4.27 (1) für komplexe Vektorbündel.

(1) Sei zunächst P ein $Gl_n(\mathbb{R})$-invariantes Polynom mit reellen Koeffizienten. Es sei $V \to M$ ein reelles Vektorbündel, dann betrachten wir das komplexifizierte Vektorbündel $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ mit $V_{\mathbb{C}} \cong \bar{V}_{\mathbb{C}}$. Sei ∇^V ein Zusammenhang auf V, dann induziert ∇^V Zusammenhänge auf $V_{\mathbb{C}}$ und $\bar{V}_{\mathbb{C}}$ mit $F^{V_{\mathbb{C}}} = F^V \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}} = F^{\bar{V}_{\mathbb{C}}}$. Es folgt

$$P\Big(\frac{1}{2\pi i}F^V\Big) = P(V_{\mathbb{C}},\nabla^{V_{\mathbb{C}}}) = P(V,\nabla^V) = P(\bar{V}_{\mathbb{C}},\nabla^{\bar{V}_{\mathbb{C}}}) = \overline{P\Big(\frac{1}{2\pi i}F^{V_{\mathbb{C}}}\Big)} = P\Big(-\frac{1}{2\pi i}F^V\Big) ,$$

insbesondere tragen nur Potenzen von $(F^V)^2$ zu $P(V,\nabla^V)$ bei.

Wir definieren daher die *Pontrijagin-Formen* $p_k(V,\nabla^V) \in \Omega^{4k}(M)$ durch

$$\det\Big(e - \frac{t}{2\pi}F^V\Big) = \sum_{k=0}^\infty t^{2k} p_k(V,\nabla^V) = \sum_{j=0}^\infty (it)^j c_j(V,\nabla^V) ;$$

insbesondere gilt $p_k = (-1)^k c_{2k}$.

Die Pontrijagin-Formen erzeugen alle Chern-Weil-theoretischen Klassen reeller Vektorbündel: jedes $Gl_n(\mathbb{R})$-invariante Polynom kann auf eindeutige Weise als Polynom in p_1, $\dots$, $p_{[\frac{n}{2}]}$ geschrieben werden. Zum Beispiel gilt

$$\hat{A}(V) = 1 - \frac{p_1(V)}{24} + \frac{7p_1(V)^2 - 4p_2(V)}{5760} \mp \dots .$$

(2) Für orientierte reelle Vektorbündel ist die Situation etwas komplizierter. Jedes $SL_{2n+1}(\mathbb{R})$-invariante Polynom kann auf eindeutige Weise als Polynom in den Pontrijagin-Klasse p_1, $\dots$, p_n geschrieben werden. Für Vektorbündel von geradem Rang $2n$ wählen wir zunächst eine Metrik und einen metrischen Zusammenhang, so dass wir nur noch $SO(2n)$-invariante Polynome auf $\mathfrak{so}(2n)$ betrachten müssen. Jedes solche Polynom kann als Polynom in p_1, $\dots$, p_{n-1} und e geschrieben werden. Dabei gilt

$$e(V, \nabla^V)^2 = \operatorname{Pf}\left(\frac{F^V}{2\pi}\right)^2 = \det\left(\frac{F^V}{2\pi}\right) = p_n(V, \nabla^V) .$$

Falls M nicht orientierbar ist, kann man $e(TM, \nabla^{TM}) \in \Omega^{2n}(M; o(TM))$ definieren. Nach einer alten Übung ist also $\int_M e(TM)$ auch wohldefiniert, wenn M nicht orientierbar ist.

(3) Außerdem gibt es für reelle Vektorbündel sogenannte *Stiefel-Whitney-Klassen* $w_k(V) \in H^k(M; \mathbb{Z}/2R)$. Sie verhalten sich ähnlich wie Chern-Klassen, insbesondere klassifiziert w_1 reelle Geradenbündel (Übung).

4.4. Der Hodge-Dirac-Operator

In diesem Abschnitt konstruieren wir die zur äußeren Ableitung d adjungierte innere Ableitung δ und ergänzen so d zu einem selbstadjungierter Operator D. Diese Konstruktion dient als Motivation dafür, im nächsten Abschnitt Cliffordalgebren, Spinor- und Dirac-Bündel zu betrachten.

4.30. Definition. Es sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $V, g^V) \to M$ ein metrisches $\Bbbk$-Vektorbündel. Dann definieren wir das *L^2-Skalarprodukt* auf $\Gamma(V)$ durch

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{L^2} = \int_M g_p^V(\sigma(p), \tau(p))\, d\mathrm{vol}_g(p) \qquad \text{für alle} \qquad \sigma, \tau \in \Gamma(V) .$$

Wir nennen Operatoren $A\colon \Gamma(V) \to \Gamma(W)$ und $B\colon \Gamma(W) \to \Gamma(V)$ *formal zueinander L^2-adjungiert*, bezüglich g^V, g^W, wenn

$$\langle A\sigma, \tau \rangle_{L^2} = \langle \sigma, B\tau \rangle_{L^2} \qquad \text{für alle} \qquad \sigma \in \Gamma(V), \tau \in \Gamma(W) .$$

Hierbei ist $d\mathrm{vol}_g$ das Riemannsche Volumenmaß aus Definition 2.16. Alternativ können wir die Volumenform $\omega_g \in \Omega^n(M)$ mit $n = \dim M$ aus Definition 3.62 betrachten, falls M orientierbar ist, oder $\omega_g \in \Omega^n(M; o(TM))$ wie in den Übungen. Das L^2-Skalarprodukt ist wohldefiniert, denn da M kompakt ist, hat M endliches Volumen, und da der Integrand stetig ist, ist er messbar und beschränkt. Das L^2-Skalarprodukt ist nicht ausgeartet, denn sei $0 \neq \sigma \in \Gamma(V)$, dann gilt $g^V(\sigma, \sigma) > 0$ auf einer offenen Teilmenge von M aufgrund der Stetigkeit von σ, und das Integral in der Definition von $\|\sigma\|_{L^2}^2 = \langle \sigma, \sigma \rangle_{L^2}$ ist positiv.

In der Hodge-Theorie versucht man, eine de Rham-Kohomologieklasse auf einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) durch eine Form $\alpha \in \Omega^k(M)$ mit minimaler L^2-Norm $\|\alpha\|_{L^2}$ zu repräsentieren. Wenn das möglich ist, folgt

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \|\alpha + t\, d\beta\|_{L^2} = 2\, \langle \alpha, d\beta \rangle_{L^2} = 2\, \langle \delta\alpha, \beta \rangle_{L^2}$$

für alle $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$, wobei $\delta = d^*$ das L^2-Adjungierte von d bezüglich der von g wie in Proposition 4.19 (1) induzierten Metriken $g^{\Lambda^k TM}$, $g^{\Lambda^{k+1} TM}$. Da das L^2-Skalarprodukt nicht ausgeartet ist, gilt für ein $\alpha \in \Omega^k(M)$ wie oben, dass

$$\alpha \in \ker d \cap \ker \delta \cap \Omega^k(M) = \ker(d + \delta|_{\Omega^k(M)}) \ .$$

Solche Formen nennt man *harmonisch*. Sei umgekehrt α harmonisch, dann ist $\|\alpha\|_{L^2}$ minimal, denn

$$\|\alpha + d\beta\|_{L^2}^2 = \|\alpha\|_{L^2}^2 + 2 \underbrace{\langle \delta\alpha, \beta \rangle_{L^2}}_{=0} + \|d\beta\|_{L^2}^2 \ ,$$

und α ist dadurch in seiner Kohomologieklasse eindeutig festgelegt. Wir studieren diese Formen im nächsten Kapitel. Als erstes wollen wir jetzt den Operator $\delta\colon \Omega^{k+1}(M) \to \Omega^k(M)$ konstruieren.

4.31. Bemerkung. Wir beginnen mit der Vorarbeit, insbesondere werden wir eine Formel für die Divergenz $\operatorname{div} X$ für $X \in \mathfrak{X}(M)$ aus Definition 3.69 herleiten.

(1) Zu $\iota_X\colon \Omega^k(M)$ aus Definition 3.24 ist der Operator $g(X, \cdot\,)\wedge\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ adjungiert. Das brauchen wir nur punktweise in $p \in M$, wegen Linearität nur für Vektoren einer Orthonormalbasis $(e_1, \dots, e_n)$ von T_pM und wegen Symmetrie sogar nur für e_1 zu zeigen. Für $\alpha \in \Lambda^k T_pM$, $\beta \in \Lambda^{k+1} T_pM$ gilt dann

$$\begin{aligned}\langle \alpha, \iota_{e_1}\beta \rangle &= \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \cdot \beta(e_1, e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \\ &= \sum_{1 = i_0 < \dots < i_k \le n} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \cdot \beta(e_{i_0}, \dots, e_{i_k}) \\ &= \sum_{1 \le i_0 < \dots < i_k \le n} (g(e_1, \cdot\,) \wedge \alpha)(e_{i_0}, \dots, e_{i_k}) \cdot \beta(e_{i_0}, \dots, e_{i_k}) = \langle g(e_1, \cdot\,) \wedge \alpha, \beta \rangle \ .\end{aligned}$$

(2) Die Riemannsche Volumenform $\omega_g \in \Omega^n(M; o(TM))$ ist parallel. Dazu überlegen wir uns, dass $g^{\Lambda^n TM}(\omega_g, \omega_g) = 1$ lokal konstant ist nach Definition 4.19 (1). Aus 4.19 (4) folgt dann

$$0 = X\big(g^{\Lambda^n TM}(\omega_g, \omega_g)\big) = 2 g^{\Lambda^n TM}\big(\nabla_X^{\Lambda^n TM} \omega_g, \omega_g\big) \ ,$$

aber da (ω_g) eine Bases von $\Lambda^n TM$ bildet, folgt $\nabla_X^{\Lambda^n TM} \omega_g = 0$ für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$.

(3) Für den Einsetzungsoperator ι gilt

$$\nabla_Y^{\Lambda^k TM}(\iota_X \beta) = \iota_{\nabla_Y X} \alpha + \iota_X \nabla_Y^{\Lambda^{k+1}} \beta \ .$$

Dazu berechnen wir für $X = X_0$ und $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, dass

$$\begin{aligned}\big(\nabla_Y^{\Lambda^k TM}(\iota_{X_0}\beta)\big)(X_1, \dots, X_k) &= Y(\beta(X_0, \dots, X_k)) - \beta(X_0, \nabla_Y X_1, X_2, \dots, X_k) \\ &\qquad - \dots - \beta(X_0, \dots, X_{k-1}, \nabla_Y X_k) \\ &= \big(\iota_{X_0} \nabla_Y^{\Lambda^{k+1} TM} \beta + \iota_{\nabla_Y X_0} \beta\big)(X_1, \dots, X_k) \ .\end{aligned}$$

(4) Die Divergenz eines Vektorfeldes X wird bezüglich einer lokalen Orthonormalbasis $(e_1, \dots, e_n)$ von $\mathfrak{X}(U)$ gegeben als

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i) \ .$$

Aus Definition 3.69, Übung 2 von Blatt 5 und (2), (3) oben folgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= d(\iota_X \omega_g)(e_1, \dots, e_n) \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (\nabla_{e_i}(\iota_X \omega_g))(e_1, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n) \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (\iota_{\nabla_{e_i} X} \omega_g)(e_1, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n) \\
&= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i) \cdot \omega_g(e_1, \dots, e_n) = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i) \; .
\end{aligned}$$

4.32. Satz. *Es sei (M, g) eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann ist der formal zu d adjungierte Operator $\delta\colon \Omega^{k+1}(M) \to \Omega^k(M)$ lokal bezüglich einer Orthonormalbasis $(e_1, \dots, e_n)$ von $\mathfrak{X}(U)$ gegeben durch*

$$\delta\beta = -\sum_{i=1}^n \iota_{e_i} \nabla_{e_i} \beta \; .$$

Beweis. Seien $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^{k+1}(M)$. Wir definieren ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ lokal durch

$$X = \sum_{j=1}^n g^{\Lambda^{k+1}TM}(g(e_j, \,\cdot\,) \wedge \alpha, \beta) \cdot e_j = \sum_{j=1}^n g^{\Lambda^k TM}(\alpha, \iota_{e_j} \beta) \cdot e_j \; .$$

Da die rechte Seite nicht von der Wahl der Basis abhängt, ist X auf ganz M definiert. Wir wählen $(e_1, \dots, e_n)$ gemäß Satz 4.21 so, dass $\nabla e_j|_p = 0$ für ein $p \in M$ und alle j. An der Stelle p folgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X|_p &= \sum_{i,j=1}^n g\Bigl(\nabla_{e_i}\bigl(g^{\Lambda^k TM}(\alpha, \iota_{e_j}\beta) \cdot e_j\bigr), e_i\Bigr) \\
&= \sum_{i=1}^n \Bigl(g^{\Lambda^k TM}\bigl(\nabla^{\Lambda^k TM}_{e_i} \alpha, \iota_{e_i} \beta\bigr) + g^{\Lambda^k TM}\bigl(\alpha, \iota_{e_i} \nabla^{\Lambda^{k+1} TM}_{e_i} \beta\bigr)\Bigr) \\
&= g^{\Lambda^{k+1} TM}\left(\sum_{i=1}^n g(e_i, \,\cdot\,) \wedge \nabla^{\Lambda^k TM}_{e_i} \alpha, \beta\right) + g^{\Lambda^k TM}\left(\alpha, \sum_{i=1}^n \iota_{e_i} \nabla^{\Lambda^{k+1} TM}_{e_i} \beta\right) \\
&= g^{\Lambda^{k+1} TM}(d\alpha, \beta) - g^{\Lambda^k TM}(\alpha, \delta\beta) \; .
\end{aligned}$$

Wir wenden den Divergenzsatz 3.71 an und erhalten

$$0 = \int_M \operatorname{div} X \, d\mathrm{vol}_g = \langle d\alpha, \beta \rangle_{L^2} - \langle \alpha, \delta\beta \rangle_{L^2} \; . \quad \square$$

4.33. Definition. Der Operator δ heißt auch *innere Ableitung*, und $D = d + \delta\colon \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$ heißt *Hodge-Dirac-Operator*. Sein Quadrat D^2 heißt *Hodge-Laplace-Operator*.

4.34. Bemerkung. Wir erhalten folgende elementare Eigenschaften.

(1) Es gilt $\delta^2 = (d^2)^* = 0$. Wir sehen später, dass die Kohomologie von $(\Omega^\bullet(M), \delta)$ nichts Neues über M aussagt.
(2) Es gilt $\ker d \perp \operatorname{im} \delta$ und $\operatorname{im} d \perp \ker \delta$, denn

$$\begin{aligned}
&\langle \alpha, \delta\beta \rangle = \langle d\alpha, \beta \rangle = 0 \qquad \text{falls} \qquad \alpha \in \ker d \\
\text{und} \qquad &\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta\beta \rangle = 0 \qquad \text{falls} \qquad \beta \in \ker \delta \; .
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt dann $\operatorname{im} d \perp \operatorname{im} \delta$, da $\operatorname{im} d \subset \ker d$ und $\operatorname{im} \delta \subset \ker \delta$ wegen $d^2 = \delta^2 = 0$.

(3) Es folgt $\ker D = \ker d \cap \ker \delta$, da

$$\|D\alpha\|_{L^2}^2 = \langle d\alpha, d\alpha \rangle_{L^2} + 2\langle d\alpha, \delta\alpha \rangle_{L^2} + \langle \delta\alpha, \delta\alpha \rangle_{L^2} = \|d\alpha\|_{L^2}^2 + \|\delta\alpha\|_{L^2}^2 \,.$$

Später sehen wir, dass in gewissem Sinne sogar

$$\Omega^\bullet(M) = \operatorname{im} d \oplus \operatorname{im} \delta \oplus (\ker d \cap \ker \delta) = \operatorname{im} D \oplus \ker D \,.$$

Daraus folgt $\ker D \cong H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M) \cong H^\bullet(M;\mathbb{R})$, wir können also die topologisch definierte Kohomologie analytisch als Kern des Differentialoperators D realisieren.

4.5. Clifford-Multiplikation und Dirac-Bündel

Motiviert durch die Konstruktion des Hodge-Dirac-Operators führen wir eine bestimmte algebraische Operation des Tangentialbündels auf Vektorbündeln über M ein und erhalten so den Begriff eines Dirac-Bündels. Für derartige Bündel definieren wir die Twist-Krümmung und den Twist-Chern-Charakter. Außerdem geben wir eine Formel für Quadrate von Dirac-Operatoren an. Zum Schluss konstruieren wir auf geeigneten Mannigfaltigkeiten Spinorbündel und den sogenannten ungetwisteten Dirac-Operator.

4.35. Bemerkung. Wir fassen den Hodge-Dirac-Operator als Verkettung dreier Operatoren auf:

$$\Gamma(\Lambda^\bullet TM) \xrightarrow{\nabla^{\Lambda^\bullet TM}} \Gamma(T^*M \otimes \Lambda^\bullet TM) \xrightarrow{g^{-1}\otimes\mathrm{id}} \Gamma(TM \otimes \Lambda^\bullet TM) \xrightarrow{c} \Gamma(\Lambda^\bullet TM) \,,$$

indem wir die Metrik als Isomorphismus $g\colon TM \to T^*M$ verstehen. Hierbei ist die *Clifford-Multiplikation* c definiert durch

$$c(X \otimes \alpha) = c_X\alpha = g(X, \,\cdot\,) \wedge \alpha - \iota_X\alpha \,.$$

Seien X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ zwei Vektorfelder, dann gilt

$$c_Xc_Y\alpha + c_Yc_X\alpha + 2g(X,Y)\cdot\alpha = 0 \,,$$

denn

$$\begin{aligned} c_Xc_Y\alpha + c_Yc_X\alpha &= (g(X,\,\cdot\,) \wedge g(Y,\,\cdot\,) + g(Y,\,\cdot\,) \wedge g(X,\,\cdot\,)) \wedge \alpha \\ &\qquad - \iota_X(g(Y,\,\cdot\,) \wedge \alpha) - g(Y,\,\cdot\,) \wedge \iota_X\alpha \\ &\qquad - \iota_Y(g(X,\,\cdot\,) \wedge \alpha) - g(X,\,\cdot\,) \wedge \iota_Y\alpha \\ &\qquad + \iota_Y\iota_Y\alpha + \iota_Y\iota_X\alpha \\ &= -(\iota_Xg(Y,\,\cdot\,)) \wedge \alpha - (\iota_Yg(X,\,\cdot\,)) \wedge \alpha \\ &= -2g(X,Y)\cdot\alpha \,. \end{aligned}$$

Dabei haben wir unter anderem die Produktregel für ι aus Proposition 3.24 (2) benutzt.

Da wir in der Konstruktion der Clifford-Multiplikation bereits TM und T^*M mittels der Metrik identifiziert haben, ist diese Konstruktion nur dann sinnvoll, wenn wir eine feste Riemannsche Metrik zugrunde legen. Außerdem könnten wir genausogut $c\colon T^*M \times \Lambda^\bullet TM \to \Lambda^\bullet TM$ definieren. In der Literatur kommen beide Varianten vor.

4.36. Proposition und Definition. *Es sei V ein reeller Vektorraum mit Metrik g.*

(1) *Die* Clifford-Algebra $C\ell(V,g)$ *ist die von V über $\mathbb{R}$ erzeugte assoziative Algebra mit Eins mit den Relationen*

$$X \cdot Y + Y \cdot X + 2g(X,Y) = 0 \qquad \text{für alle} \qquad X, Y \in V \,.$$

Es gibt einen natürlichen Vektorraum-Isomorphismus $\varphi\colon \Lambda^\bullet V \to C\ell(V,g)$, *so dass* $\varphi(1) = 1$ *und*

$$\varphi\big((g(X,\,\cdot\,)_\wedge - \iota_X)\alpha\big) = X \cdot \varphi(\alpha)\ .$$

Man definiert $C\ell^{\mathrm{ev}}(V,g) = \varphi^{-1}(\Lambda^{\mathrm{ev}}V) = \varphi^{-1}(\Lambda^{2\bullet}V)$ *und* $C\ell^{\mathrm{odd}}(V,g) = \varphi^{-1}(\Lambda^{\mathrm{odd}}V)$. *Wir setzen* $\mathbb{C}\ell(V,g) = C\ell(V,g) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

(2) *Eine* Clifford-Multiplikation *ist eine lineare Abbildung* $c\colon V \to \operatorname{End} W$, *wobei* W *ein beliebiger* $\Bbbk$-*Vektorraum sei, so dass*

$$c_X c_Y + c_Y c_X + 2g(X,Y)\,\mathrm{id}_W = 0 \qquad \text{für alle} \qquad X, Y \in V\ .$$

Jede Clifford-Multiplikation lässt sich eindeutig zu einem Algebren-Homomorphismus $c\colon C\ell(V,g) \to \operatorname{End} W$ *falls* $\Bbbk = \mathbb{R}$ *(beziehungsweise* $c\colon \mathbb{C}\ell(V,g) \to \operatorname{End} W$ *falls* $\Bbbk = \mathbb{C}$*) erweitern.*

Beweis. Es sei $(e_1,\dots,e_n)$ eine Orthonormalbasis, dann wird $C\ell(V,g)$ als Vektorraum erzeugt von Produkten $e_{i_1}\cdots e_{i_k}$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $i_1,\dots,i_k \in \{1,\dots,n\}$ beliebig. Aufgrund der Relationen gilt

$$e_i^2 = -1 \qquad \text{und} \qquad e_i e_j = -e_j e_i \quad \text{falls} \quad i \neq j\ .$$

Also können wir die einzelnen Faktoren in den Erzeugern sortieren. Außerdem braucht jeder Index in $\{1,\dots,n\}$ höchstens einmal vorzukommen. Wir erhalten also eine surjektive lineare Abbildung $\varphi\colon \Lambda^\bullet V \to C\ell(V,g)$ mit

$$\varphi(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}) = e_{i_1} \dots e_{i_k}\ ,$$

wobei $(e^1,\dots,e^n)$ die zu $(e_1,\dots,e_n)$ duale Basis sei.

Es gilt

$$\begin{aligned}
X \cdot \varphi(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}) &= \sum_{j=1}^n (X^j e_j) \cdot e_{i_1} \dots e_{i_k} \\
&= \sum_{a=1}^k (-1)^{i_a} X^{i_a} e_{i_1} \dots \widehat{e_{i_a}} \dots e_{i_k} + \sum_{j \notin \{i_1,\dots,i_k\}} X^j e^j \cdot e^{i_1} \dots e^{i_k} \\
&= \varphi((-\iota_X + g(X,\,\cdot\,)\wedge)(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}))\ .
\end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt, dass φ bijektiv ist. Dazu beweisen wir zunächst (2). Da $C\ell$ und $\mathbb{C}\ell$ als assoziative Algebra mit Eins durch Erzeuger und Relationen definiert wurden, können wir $c\colon V \to \operatorname{End} W$ auf ganz $C\ell(V,g)$ beziehungsweise $\mathbb{C}\ell(V,g)$ fortsetzen, da $\operatorname{End} W$ assoziativ ist, eine Eins id_W besitzt, und die definierenden Relationen der Clifford-Algebra nach Voraussetzung erfüllt sind. Diese Fortsetzung ist eindeutig, da wir die Basiselemente $e_{i_1}\cdots e_{i_k}$ jeweils auf $c(e_{i_1}) \circ \dots \circ c(e_{i_k})$ abbilden müssen.

Wir können (2) benutzen, um eine Umkehrabbildung zu φ anzugeben. Nach Bemerkung 4.35 gibt es eine Clifford-Multiplikation $c\colon V \to \operatorname{End} \Lambda^\bullet V$ mit

$$c(v) = g(v,\cdot) \wedge -\iota_v\ .$$

Wir erhalten also einen Homomorphismus $c\colon C\ell(V,g) \to \operatorname{End} \Lambda^\bullet V$. Es sei $\psi\colon C\ell(V,g) \to \Lambda^\bullet V$ definiert durch

$$\psi(a) = c(a)(1) \qquad \text{für alle} \qquad a \in C\ell(V,g)\ .$$

Insbesondere folgt für alle $k \leq n$ und alle $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, dass

$$\begin{aligned}
\psi(\varphi(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k})) &= \psi(e_{i_1} \dots e_{i_k}) \\
&= (e^{i_1} \wedge \iota_{e_{i_1}}) \circ \dots \circ (e^{i_k} \wedge \iota_{e_{i_k}})(1)^i = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}\ ,
\end{aligned}$$

da ja $\iota_{e_{i_a}} e^{i_b} = 0$ für alle $a < b$. Somit ist φ offensichtlich injektiv, und da $\dim C\ell(V,g) \le 2^n = \dim \Lambda^\bullet V$ nach unserer Vorüberlegung, auch surjektiv, und ψ ist die Umkehrabbildung. Da ψ nach Konstruktion nicht von der Wahl der Orthonormalbasis $(e_1, \dots, e_n)$ abhängt, gilt das auch für φ. $\square$

4.37. Beispiel. Sei g das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Für kleine n ist $C\ell(\mathbb{R}^n, g)$ isomorph zu wohlbekannten Algebren.

(1) Es gilt $C\ell(\mathbb{R}^0, g) \cong \mathbb{R}$ mit Basis (1).
(2) Es gilt $C\ell(\mathbb{R}^1, g) \cong \mathbb{C}$ mit

$$1 \longmapsto 1 \qquad \text{und} \qquad e_1 \longmapsto i \,,$$

denn es gilt $i^2 = -1$. Außerdem ist $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2 = 2^1$.

(3) Es gilt $C\ell(\mathbb{R}^2, g) \cong \mathbb{H}$ mit

$$1 \longmapsto 1, \qquad e_1 \longmapsto i \qquad \text{und} \qquad e_2 \longmapsto j \,,$$

denn $i^2 = j^2 = -1$ und $i \cdot j = k = -j \cdot i$, außerdem gilt $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = 4 = 2^2$.

(4) Es gilt $C\ell(\mathbb{R}^3, g) \cong \mathbb{H} \oplus H$ mit

$$1 \longmapsto (1,1), \qquad e_1 \longmapsto (i,-i), \qquad e_2 \longmapsto (j,-j) \qquad \text{und} \qquad e_3 \longmapsto (k,-k) \,.$$

Es gilt $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}) = 8 = 2^3$. Ein einzelner Faktor $\mathbb{H}$ hätte nicht ausgreicht, da wir die zusätzliche Relation $e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \longmapsto \pm ijk = \mp 1$ erhalten hätten. Im obigen Modell wird stattdessen $e_1 \cdot e_2 \cdot e_3$ auf $(-1, 1) \ne \pm(1,1)$ abgebildet.

(5) Die komplexen Clifford-Algebren sind einfacher zu konstruieren: es gilt stets

$$C\ell(\mathbb{R}^{2n}, g) \cong M_{2^n}(\mathbb{C}) \qquad \text{und} \qquad C\ell(\mathbb{R}^{2n+1}, g) \cong M_{2^n}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^n}(\mathbb{C}) \,.$$

Beispielsweise wird $C\ell(\mathbb{R}^3, g) \cong M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$ von den sogenannten schiefadjungierten Pauli-Matrizen erzeugt:

$$e_1 \longmapsto \left(\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right), \qquad e_2 \longmapsto \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$\text{und} \qquad e_3 \longmapsto \left(\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Mithilfe der Pauli-Matrizen und des Kroneckerproduktes von Matrizen (siehe Beweis von Proposition 4.8) kann man die obige Behauptung durch Induktion über n beweisen.

4.38. Proposition und Definition. *Es sei $V \to M$ ein reelles Vektorbündel mit Metrik g^V, dann existieren Bündel $C\ell(V, g^V) \to M$ und $C\ell(V, g^V) \to M$ mit Abbildungen $V \hookrightarrow C\ell(V, g^V)$ und $V \hookrightarrow C\ell(V, g^V)$, so dass für alle $p \in M$ die Faser $C\ell(V, g^V)_p$ die von $V_p \subset C\ell(V, g^V)_p$ erzeugte Clifford-Algebra ist.*

Sei ∇^V ein metrischer Zusammenhang auf (V, g), dann existiert ein eindeutiger Zusammenhang $\nabla^{C\ell(V,g)}$ auf $C\ell(V, g)$, so dass

$$\nabla_X^{C\ell(V,g)} \sigma = \nabla_{X^\sigma}^V \qquad \text{für alle} \sigma \in \Gamma(V) \subset \Gamma(C\ell(V,g)), X \in \mathfrak{X}(M)$$

und für alle σ, $\tau \in \Gamma(C\ell(V,g))$ die Produktregel

$$\nabla_X^{C\ell(V,g)}(\sigma \cdot \tau) = \left(\nabla_X^{C\ell(V,g)} \sigma\right) \cdot \tau + \sigma \cdot \left(\nabla_X^{C\ell(V,g)} \tau\right)$$

gilt. Dieser Zusammenhang ist metrisch bezüglich einer geeigneten, von g induzierten Metrik $g^{C\ell(V,g)}$ auf $C\ell(V,g)$.

Beweis. Wir setzen $C\ell(V,g) = \Lambda^\bullet V$ und betrachten die Metrik g als Einbettung

$$g\colon V \cong \Lambda^1 V \hookrightarrow \Lambda^\bullet V \qquad \text{mit} \qquad \sigma \longmapsto g(\sigma,\cdot)\ .$$

Anschließend definieren wir die Clifford-Algebren-Struktur faserweise mit Hilfe des Isomorphismus $\varphi_p\colon \Lambda^\bullet V_p \cong C\ell(V,g)_p$ aus Proposition 4.36. Da φ natürlich ist, ist die Multiplikation „ $\cdot$ “ auf $\Lambda^\bullet V$ wohldefiniert. Wir trivialisieren V lokal wie in Satz 4.21 (3) und sehen, dass „ $\cdot$ “ auch glatt von $p \in M$ abhängt.

Sei jetzt ∇^V ein Zusammenhang, dann wählen wir für $\nabla^{C\ell(V,g)}$ den Zusammenhang $\nabla^{\Lambda^\bullet V}$ aus Proposition 4.19 (2). Er ist metrisch bezüglich $g^{C\ell(V,g)} = g^{\Lambda^\bullet V}$ nach 4.19 (4). Die Produktregel beweisen wir induktiv, indem wir zunächst mit den Produktregeln aus 4.19 (2) und Bemerkung 4.31 (3) für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\sigma \in \Gamma(V)$ und $\beta \in \Gamma(\Lambda^\bullet V)$ zeigen, dass

$$\begin{aligned}
\nabla^{C\ell(V,g)}_X(\sigma\cdot\varphi(\beta)) &= \varphi\Big(\nabla^{\Lambda^\bullet V}_X\big(g(\sigma,\cdot)\wedge\beta - \iota_\sigma\beta\big)\Big)\\
&= \varphi\Big(\big(g(\nabla^V_X\sigma,\cdot)\wedge - \iota_\sigma\big)\beta + \big(g(\sigma,\cdot)\wedge - \iota_\sigma\big)\nabla^{\Lambda^\bullet V}_X\beta\Big)\\
&= (\nabla^V_X\sigma)\cdot\varphi(\beta) + \sigma\cdot\nabla^{C\ell(V,g)}_X\varphi(\beta)\ .
\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt betrachten wir dann Produkte $\alpha = \sigma_1\cdots\sigma_k$, auf die wir die obige Rechnung induktiv anwenden.

Die Eindeutigkeit von $\nabla^{C\ell(V,g)}$ folgt, da die Gleichung

$$\nabla^{C\ell(V,g)}_X(\sigma_1\cdots\sigma_k) = (\nabla^V_X\sigma_1)\cdot\sigma_2\cdots\sigma_k + \dots + \sigma_1\cdots\sigma_{k-1}\cdot(\nabla^V_X\sigma_k)$$

den Zusammenhang bereits festlegt. □

Auch das Bündel $C\ell(V,g) \to M$ ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphismen, die jeweils mit der Einbettung $V \hookrightarrow C\ell(V,g)$ verträglich sind.

4.39. Definition. Es sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇. Ein *Dirac-Bündel* über M ist ein Vektorbündel $V \to M$ mit Metrik g^V, metrischem Zusammenhang ∇^V und einer glatten linearen Abbildung $c\colon TM \to \operatorname{End} V$ mit folgenden Eigenschaften.

(1) Für alle $p \in M$ ist $c|_p\colon T_pM \to \operatorname{End} V_p$ eine Clifford-Multiplikation
(2) Für alle $v \in T_pM$ ist $c_v \in \operatorname{End} V_p$ schiefsymmetrisch bezüglich g^V_p.
(3) Für alle X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ und alle $\sigma \in \Gamma(V)$ gilt die Produktregel

$$\nabla^V_X(c_Y\sigma) = c_{\nabla_X Y}\sigma + c_Y\nabla^V_X\sigma\ .$$

Sei (V, g^V, ∇^V, c) ein Dirac-Bündel, dann definieren wir den *Dirac-Operator* $D\colon \Gamma(V) \to \Gamma(V)$ als Verkettung

$$D\colon \Gamma(V) \xrightarrow{\nabla^V} \Gamma(T^*M\otimes V) \xrightarrow{(g^V)^{-1}\otimes\mathrm{id}_V} \Gamma(TM\otimes V) \xrightarrow{c} \Gamma(V)\ .$$

4.40. Bemerkung. Es sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und (V, g^V, ∇^V, c) ein Dirac-Bündel über M. Um den Dirac-Operator darzustellen, wählen wir eine lokale Orthonormalbasis $(e_1,\dots,e_n)$ von TM wie in Satz 4.21 (3) mit dualer Basis $e^1,\dots,e^n$ von T^*M, wobei $e^i = g(e_i,\,\cdot)$.

Dann wird $\sigma \in \Gamma(V)$ abgebildet auf

$$\begin{aligned}\sigma &\longmapsto \nabla^V_\sigma = \sum_{i=1}^n e^i \otimes \nabla^V_{e_i}\sigma \\ &\longmapsto ((g^V)^{-1} \otimes \mathrm{id}_V)(\nabla^V \sigma) = \sum_{i=1}^n e_i \otimes \nabla^V_{e_i}\sigma \\ &\longmapsto D\sigma = \sum_{i=1}^n c_{e_i} \otimes \nabla^V_{e_i}\sigma \;.\end{aligned}$$

Wir werden später vor allem mit dieser Formel arbeiten. Wir hätten sie als Definition für D verwenden können, hätten dann aber noch die Unabhängigkeit von der Basis zeigen müssen.

4.41. Beispiel. Wir geben erste Beispiele von Dirac-Operatoren.

(1) Es sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $V = \Lambda^\bullet TM$ mit $g^V = g^{\Lambda^\bullet TM}$ und $\nabla^V = \nabla^{\Lambda^\bullet TM}$ induziert von der Riemannschen Metrik und dem Levi-Civita-Zusammenhang. Nach Bemerkung 4.35 definiert

$$c_X\alpha = (g(X,\,\cdot\,) \wedge -\iota_X)\alpha$$

eine Clifford-Multiplikation $c\colon TM \to \operatorname{End}\Lambda^\bullet TM$.

Nach Bemerkung 4.31 (1) sind $g(X,\,\cdot\,)\wedge$ und ι_X zueinander adjungiert, also wird das Adjungierte zu c_X gegeben durch

$$c_X^* = \iota_X - g(X,\,\cdot\,)\wedge = -c_X \;,$$

und c_X ist schiefsymmetrisch wie gefordert.

Aus den Produktregeln in Definition 4.19 (2) und Bemerkung 4.31 (3) folgt wie im Beweis von Proposition 4.38, dass

$$\nabla^{\Lambda^\bullet TM}_X (c_Y\alpha) = c_{\nabla_X Y}\alpha + c_Y \nabla^{\Lambda^\bullet TM}_X \alpha \;.$$

Also ist $(\Lambda^\bullet TM, g^{\Lambda^\bullet TM}, \nabla^{\Lambda^\bullet TM}, c)$ ein Dirac-Bündel. Nach Bemerkung 4.35 ist der Hodge-Dirac-Operator aus Definition 4.33 der zugehörige Dirac-Operator.

(2) Auf dem Bündel $V = \Lambda^\bullet TM$ aus (1) existiert eine weitere Dirac-Bündel-Struktur. Dazu betrachten wir den Operator $(-1)^{\deg} \in \operatorname{End}\Lambda^\bullet TM$ mit

$$(-1)^{\deg}\alpha = (-1)^k\alpha \qquad \text{für alle} \qquad \alpha \in \Omega^k(M) \;.$$

Dieser Operator ist offensichtlich $g^{\Lambda^\bullet TM}$-selbstadjungiert und $\nabla^{\Lambda^\bullet TM}$-parallel. Man kann dann zeigen, dass

$$\hat c_X\alpha = (g(X,\,\cdot\,) \wedge +\iota_X)(-1)^{\deg}\alpha$$

eine weitere Dirac-Bündel-Struktur auf $(\Lambda^\bullet TM, g^{\Lambda^\bullet TM}, \nabla^{\Lambda^\bullet TM})$ definiert. Diese kommutiert mit c, und es gibt einen Vektorbündel-Automorphismus $(-1)^{\frac{\deg(\deg -1)}{2}}$ von $\Lambda^\bullet TM$, der c und $\hat c$ vertauscht. Somit liefert $\hat c$ einen zum Hodge-Dirac-Operator isomorphen Dirac-Operator auf $\Omega^\bullet(M)$. Dennoch werden wir $\hat c$ später noch gelegentlich brauchen.

(3) Es sei $M = S^1 \subset \mathbb{C}$ und $L \to M$ ein komplexes Geradenbündel mit hermitescher Metrik g^L und metrischem Zusammenhang ∇^L. Da $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$ trivial ist, folgt $C\ell(TS^1, g) \cong S^1 \times \mathbb{C}$ mit Beispiel 4.37 (2). Es sei $t \longmapsto e^{it}$ eine Parametrisierung von S^1, dann wirkt der Vektor $\frac{\partial}{\partial t}$ der Länge 1 auf L durch $c_{\frac{\partial}{\partial t}} = -i$. Diese Operation ist antiselbstadjungiert und parallel, also ist (L, g^L, ∇^L, c) ein Dirac-Bündel mit Dirac-Operator

$$D = c_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^L_{\frac{\partial}{\partial t}} \;.$$

Wir wissen, dass $L \cong S^1 \times \mathbb{C}$ trivial ist, und setzen

$$\nabla^L_{\frac{\partial}{\partial t}} \sigma = \left(\frac{\partial}{\partial t} - ia \right) \sigma$$

für ein $a \in \mathbb{R}$. Dieser Zusammenhang ist Hermitesch bezüglich der Standardmetrik auf $\mathbb{C}$, da

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \sigma, \tau \rangle = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\sigma} \tau) = \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} - \overline{i \alpha \sigma} \right) \tau + \bar{\sigma} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} - ia\tau \right) ,$$

und hat Holonomie $z = e^{2\pi i \alpha}$, da $\sigma(t) = e^{i\alpha t}$ ein paralleler Schnitt ist. Also hat D die Form

$$D = -i \left(\frac{\partial}{\partial t} - ia \right) = -i \frac{\partial}{\partial t} - a \, .$$

Wir wissen, dass $\left(t \longmapsto e^{ikt} \right)$ eine L^2-Hilbert-Basis von $\Gamma(L)$ liefert (Fourierzerlegung). Es folgt

$$D(e^{ikt}) = -i \frac{\partial}{\partial t} e^{ikt} - a \cdot e^{ikt} = (k - a) \cdot e^{ikt} \, ,$$

also hat D genau die Eigenwerte $(k - a)_{k \in \mathbb{Z}}$. Wir sehen später, dass das typisch für Dirac-Operatoren auf kompakten Mannigfaltigkeiten ist: die Menge der Eigenwerte, das sogenannte *Spektrum*, ist diskret, jeder Eigenwert hat endliche Vielfachheit, und die dazugehörigen Eigenschnitte spannen ganz $\Gamma(L)$ im L^2-Sinne auf.

Die Krümmung eines jeden Dirac-Bündels lässt sich in zwei völlig verschiedene Teile zerlegen.

4.42. Proposition und Definition. *Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇ und Riemannschem Krümmungstensor $R \in \Omega^2(M; \operatorname{End} TM)$, und es sei (V, g^V, ∇^V, c) ein Dirac-Bündel über M. Wir definieren die* Spin-Krümmung

$$F^S = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{n} g(R_{\cdot,\cdot} e_i, e_j) \cdot e_i \cdot e_j \in \Omega^2(M; C\ell(TM, g))$$

bezüglich einer lokalen Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_n$, und die Twist-Krümmung *von V durch*

$$F^{V/S} = (\nabla^V)^2 - c(F^S) \in \Omega^2(M; \operatorname{End} V) \, ,$$

so dass $F^V = c(F^S) + F^{V/S}$. Dann gilt

(1) *Die Twistkrümmung kommutiert mit Clifford-Multiplikation, für X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ gilt also*

$$c_X \circ F^{V/S}_{Y,Z} = F^{V/S}_{Y,Z} \circ c_X \, .$$

(2) *Es gilt eine zweite Bianchi-Identität*

$$\nabla^V \circ F^{V/S} - F^{V/S} \circ \nabla^V = 0 \in \Omega^3(M; \operatorname{End} V) \, .$$

Sei $n = \dim M$, dann definieren wir die Twist-Chern-Charakter-Form *durch*

$$\operatorname{ch}(V/S, \nabla^V) = 2^{-[\frac{n}{2}]} \operatorname{tr} \left(e^{-\frac{F^{V/S}}{2\pi i}} \right) .$$

Sei $(V, g^V_t, \nabla^{V,t}, c_t)_t$ eine Familie von Dirac-Bündel-Strukturen auf V, dann hängt der Twist-Chern-Charakter $\operatorname{ch}(V/S) = [\operatorname{ch}(V/S, \nabla^{V,t})]$ *nicht von t ab.*

Beweis. Der Einfachheit halber sei $e_1, \dots, e_n$ auf $U \subset M$ eine lokale Orthonormalbasis wie in Satz 4.21 (3). Für X, $Y \in \mathfrak{X}(U)$ mit $[X, Y] = 0$ und $\sigma \in \Gamma(V)$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
\Big(F^V_{X,Y} \circ c_{e_k}\Big) &= \nabla^V_X \nabla^V_Y (c_{e_k}\sigma) - \nabla^V_Y \nabla^V_X (c_{e_k}\sigma) \\
&= \nabla^V_X \Big(c_{\nabla_Y e_k}\sigma + c_{e_k}\nabla^V_Y\sigma\Big) - \nabla^V_Y \Big(c_{\nabla_X e_k}\sigma + c_{e_k}\nabla^V_Y\sigma\Big) \\
&= c_{\nabla_X\nabla_Y e_k}\sigma + c_{\nabla_Y e_k}\nabla^V_X\sigma + c_{\nabla_X e_k}\nabla^V_Y\sigma + c_{e_k}\nabla^V_X\nabla^V_Y\sigma \\
&\quad - c_{\nabla_Y\nabla_X e_k}\sigma - c_{\nabla_X e_k}\nabla^V_Y\sigma - c_{\nabla_Y e_k}\nabla^V_X\sigma - c_{e_k}\nabla^V_Y\nabla^V_X\sigma \\
&= c_{R_{X,Y}e_k}\sigma + \big(c_{e_k} \circ F^V\big)(\sigma)\,.
\end{aligned}$$

Auf der anderen Seite gilt

$$\begin{aligned}
c(F^S_{X,Y}) \circ c_{e_k} &= \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^n g(R_{X,Y}e_i, e_j) c_{e_i} c_{e_j} c_{e_k} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^n g(R_{X,Y}e_i, e_j) c_{e_i} c_{e_k} c_{e_j} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n g(R_{X,Y}e_i, e_k) c_{e_i} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^n g(R_{X,Y}e_i, e_j) c_{e_k} c_{e_i} c_{e_j} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n g(R_{X,Y}e_k, e_j) c_{e_j} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n g(R_{X,Y}e_k, e_i) c_{e_i} \\
&= c_{e_k} \circ c\big(F^S_{X,Y}\big) + c_{R_{X,Y}e_k}\,.
\end{aligned}$$

Es folgt (1), denn

$$\big[F^{V/S}, c_{e_k}\big] = \big[F^V - c(F^S), c_{e_k}\big] = c_{R_{\cdot,\cdot}e_k} - c_{R_{\cdot,\cdot}e_k} = 0\,.$$

Zu (2) dürfen wir annehmen, dass $\nabla e_1|_p = \dots = \nabla e_n|_p = 0$ an einer Stelle $p \in U$ gilt. Aus der Produktregel in Definition 4.39 (3) folgt

$$\begin{aligned}
\big[\nabla^V, c(F^S)\big]_p &= \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^n \big[\nabla^V, g(R\,e_i, e_j) c_{e_i} c_{e_j}\big]_p \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^n \Big(\big(g([\nabla, R]e_i, e_j) + g(R\,\nabla_{e_i,e_j}) \\
&\qquad + g(R\,e_i, \nabla e_j)\big) c_{e_i} c_{e_j} + g(R\,e_i, e_j)(c_{\nabla e_i} c_{e_j} + c_{e_i} c_{\nabla e_j})\Big) = 0
\end{aligned}$$

wegen der zweiten Bianchi-Identität 4.17 (4) für ∇ und R. Aus der zweiten Bianchi-Identität für ∇^V und F^V folgt

$$[\nabla^V, F^{V/S}] = [\nabla^V, F^V] - [\nabla^V, c(F^S)] = 0\,.$$

Noch zu ergänzen ist die Invarianz unter Homotopien. $\square$

4.43. Beispiel. Wir betrachten wieder das Dirac-Bündel $(\Lambda^\bullet TM, g^{\Lambda^\bullet TM}, \nabla^{\Lambda^\bullet TM}, c)$ aus Beispiel 4.41 (1). Man kann zeigen, dass

$$F^{\Lambda^\bullet TM} = \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^n g(Re_i, e_j)(c_{e_i} c_{e_j} + \hat{c}_{e_i}\hat{c}_{e_j}) = c(F^S) + \hat{c}(F^S)\,.$$

Also wird die Twistkrümmung durch $F^{\Lambda^\bullet TM/S} = \hat{c}(F^S)$ gegeben (Übung). Den Twist-Chern-Charakter berechnen wir später.

Um Dirac-Operatoren besser zu verstehen, berechnen wir ihr Quadrat. Der folgende Satz geht in verschiedenen Spezialfällen auf verschiedene Mathematiker und Physiker zurück.

4.44. Satz (Bochner, Lichnerowicz, Schrödinger, Weitzenböck). *Es sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und (V,g^V,∇^V,c) ein Dirac-Bündel über M mit Dirac-Operator D. Dann gilt*

$$D^2 = \Delta^V + \frac{1}{2}\sum_{i,j} c_{e_i}c_{e_j}F^V_{e_i,e_j} = \Delta^V + \frac{\mathrm{scal}}{4}\cdot + \frac{1}{2}\sum_{i,j} c_{e_i}c_{e_j}F^{V/S}_{e_i,e_j}\;.$$

Dabei operiert die Skalarkrümmung $\mathrm{scal}\in\mathcal{C}^\infty(M)$ *durch Multiplikation, und* Δ^V *ist der* Zusammenhangs- *oder* Bochner-Laplace-Operator

$$\Delta^V = -\sum_{i=1}^n\Big(\nabla^V_{e_i}\nabla^V_{e_i} - \nabla^V_{\nabla_{e_i}e_i}\Big)$$

bezüglich einer lokalen Orthonormalbasis $e_1,\dots,e_n$.

Beweis. Indem wir den Zusammenhangs-Laplace-Operator als Verkettung

$$-\Delta^V\colon\Gamma(V)\xrightarrow{\nabla^V}\Gamma(T^*M\otimes V)\xrightarrow{\nabla^{T^*M\otimes V}}\Gamma(T^*M\otimes T^*M\otimes V)\xrightarrow{g^{T^*M}\otimes\mathrm{id}_V}\Gamma(V)$$

schreiben, sehen wir, dass die obige Formel nicht von der Wahl der Orthonormalbasis abhängt:

$$\begin{aligned}
\sigma &\longmapsto \nabla^V\sigma = \sum_{i=1}^n e^i\otimes\nabla^V_{e_i}\sigma\\
&\longmapsto \nabla^{T^*M\otimes V}(\nabla^V\sigma) = \sum_{i,j=1}^n e^j\otimes\Big(\nabla^{T^*M}_{e_j}e^i\otimes\nabla^V_{e_i}\sigma + e^i\otimes\nabla^V_{e_j}\nabla^V_{e_i}\sigma\Big)\\
&\longmapsto -\Delta^V\sigma = \sum_{i,j,k=1}^n e^j(e_k)\cdot\Big(\big(\nabla^{T^*M}_{e_j}e^i\big)(e_k)\cdot\nabla^V_{e_i}\sigma + e^i(e_k)\cdot\nabla^V_{e_j}\nabla^V_{e_i}\sigma\Big)\\
&\qquad = \sum_{i,j=1}^n\Big(\big(e_j\underbrace{(e^i(e_j))}_{=\delta_{ij}} - e^i(\nabla_{e_j}e_j)\big)\cdot\nabla^V_{e_i}\sigma + \underbrace{e^i(e_j)}_{=\delta_{ij}}\cdot\nabla^V_{e_j}\nabla^V_{e_i}\sigma\Big)\\
&\qquad = \sum_{i=1}^n\Big(-\nabla^V_{\nabla_{e_i}e_i}\sigma + \nabla^V_{e_i}\nabla^V_{e_i}\sigma\Big)\;.
\end{aligned}$$

Um die erste obige Gleichung zu beweisen, wählen wir wieder eine lokale Orthonormalbasis $e_1,\dots,e_n$ von TM auf $U\subset M$ wie in Satz 4.21 (3) mit $\nabla e_i|_p=0$ für ein $p\in U$ und alle $i=1,\dots,n$. Dann berechnen wir für $\sigma\in\Gamma(V)$ an der Stelle p, dass

$$\begin{aligned}
D^2\sigma &= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\Big(c_{e_i}\nabla^V_{e_i}\big(c_{e_j}\nabla^V_{e_j}\sigma\big) + c_{e_j}\nabla^V_{e_j}\big(c_{e_i}\nabla^V_{e_i}\sigma\big)\Big)_p\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\Big(c_{e_i}c_{e_j}\nabla^V_{e_i}\nabla^V_{e_j}\sigma + c_{e_j}c_{e_i}\nabla^V_{e_j}\nabla^V_{e_i}\sigma\Big)_p\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\Big(c_{e_i}c_{e_j}F^V_{e_i,e_j}\sigma - 2\delta_{ij}\nabla^V_{e_j}\nabla^V_{e_i}\sigma\Big)_p\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j}c_{e_i}c_{e_j}F^V_{e_i,e_j}\sigma|_p + \Delta^V\sigma|_p\;.
\end{aligned}$$

Als nächstes zerlegen wir $F^V = c(F^S) + F^{V/S}$ und berechnen

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i,j} c_{e_i}c_{e_j}c(F^S_{e_i,e_j}) &= \frac{1}{8}\sum_{i,j,k,\ell} g(R_{e_i,e_j}e_k,e_\ell)c_{e_i}c_{e_j}c_{e_k}c_{e_\ell}\\
&= \frac{1}{24}\sum_{i,j,k,\ell}\Big(g(R_{e_i,e_j}e_k,e_\ell)c_{e_i}c_{e_j}c_{e_k}c_{e_\ell} + g(R_{e_j,e_k}e_i,e_\ell)c_{e_j}c_{e_k}c_{e_i}c_{e_\ell} + g(R_{e_k,e_i}e_j,e_\ell)c_{e_k}c_{e_j}c_{e_i}c_{e_\ell}\Big)\\
&= \frac{1}{24}\sum_{i,j,k,\ell}\Big(g(R_{e_i,e_j}e_k,e_\ell)c_{e_i}c_{e_j}c_{e_k}c_{e_\ell} - g(R_{e_j,e_k}e_i,e_\ell)(c_{e_j}c_{e_i}c_{e_k}c_{e_\ell} + 2\delta_{ik}c_{e_j}c_{e_\ell})\\
&\qquad\qquad - g(R_{e_k,e_i}e_j,e_\ell)\big(c_{e_i}c_{e_k}c_{e_j}c_{e_\ell} + 2\underbrace{\delta_{ik}}_{=0}c_{e_j}c_{e_\ell}\big)\Big)\\
&= \frac{1}{24}\sum_{i,j,k,\ell}\Big(g\big(\underbrace{R_{e_i,e_j}e_k + R_{e_j,e_k}e_i + R_{e_k,e_i}e_j}_{=0},e_\ell\big)c_{e_i}c_{e_j}c_{e_k}c_{e_\ell}\\
&\qquad\qquad + g(R_{e_j,e_k}e_i,e_\ell)(2\delta_{ij}c_{e_k}c_{e_\ell} - 2\delta_{ik}c_{e_j}c_{e_\ell}) + g(R_{e_k,e_i}e_j,e_\ell)\cdot 2\delta_{jk}c_{e_i}c_{e_\ell}\Big)\\
&= \frac{1}{4}\sum_{i,j,\ell=1}^n \underbrace{g(R_{e_ie_j}e_j,e_\ell)}_{=g(R_{e_\ell e_j}e_j,e_i)}(-c_{e_i}c_{e_\ell}) = \frac{1}{8}\sum_{i,j,k=1}^n g(R_{e_i,e_j}e_j,e_\ell)\underbrace{(-c_{e_i}c_{e_\ell} - c_{e_\ell}c_{e_i})}_{=2\delta_{i\ell}}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^n g(R_{e_i,e_j}e_j,e_i) = \frac{\mathrm{scal}}{4}
\end{aligned}
$$

aufgrund der Symmetrien des Riemannschen Krümmungstensors aus Satz 1.51. Es folgt

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j} c_{e_i}c_{e_j}F^V_{e_i,e_j} = \frac{\mathrm{scal}}{4} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n c_{e_i}c_{e_j}F^{V/S}_{e_i,e_j}\;. \quad \square$$

4.6. Spinorbündel und ungetwistete Dirac-Operatoren

In diesem Abschnitt konstruieren wir die universelle Überlagerung der speziellen orthogonalen Gruppe und den Spinormodul als „kleinsten“ Modul, auf dem die Cliffordalgebra operiert. Unter gewissen Umständen erhalten wir ein Dirac-Bündel mit dem Spinormodul als Faser. Der zugehörige Dirac-Operator heißt „ungetwisteter“ oder „Spin-“Dirac-Operator, und ist eine Riemannsche Version des physikalischen Dirac-Operators in der Dirac-Gleichung für das Elektron.

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik g. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ der Länge $\|v\| = 1$ ist investierbar in $C\ell(\mathbb{R}^n, g)$ mit Inversem $-v$, denn

$$-v\cdot v = -(-\|v\|^2) = 1\;.$$

4.45. Definition. Es sei $\mathrm{Pin}(n) \subset C\ell(\mathbb{R}^n, g)$ die von den Vektoren der Länge 1 erzeugte Gruppe unter der Cliffordmultiplikation, und es sei $\mathrm{Spin}(n) = \mathrm{Pin}(n) \cap C\ell^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^n, g)$ die *Spingruppe*.

Elemente von $\mathrm{Pin}(n)$ sind also Produkte $v_1, \dots, v_k \in C\ell(\mathbb{R}^n, g)$ mit $\|v_1\| = \dots = \|v_k\| = 1$, mit

$$(v_1\cdots v_k)\cdot(w_1\cdots w_\ell) = v_1\cdots v_k\cdot w_1\cdots w_\ell$$

und

$$(v_1\cdots v_k)^{-1} = (-1)^k v_k\cdots v_1\;.$$

Es gilt $v_1\cdots v_k \in \mathrm{Spin}(n)$ genau dann, wenn k gerade ist.

4.46. Proposition. *Für $n \geq 1$ gibt es surjektive Gruppenhomomorphismen $\pi\colon \mathrm{Pin}(n) \to O(n)$ und $\pi\colon \mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ mit Kern $\ker \pi = \{\pm 1\} \subset \mathrm{Spin}(n)$, so dass $v_1 \cdots v_k \in \mathrm{Pin}(n)$ auf $\mathbb{R}^n$ durch*

$$\pi(v_1 \cdots v_k)(w) = v_1 \cdots v_k \cdot w \cdot v_k \cdots v_1 \in \mathbb{R}^n \subset C\ell(\mathbb{R}^n, g) .$$

$\mathrm{Pin}(n)$ *und* $\mathrm{Spin}(n)$ *sind Lie-Gruppen mit Lie-Algebra*

$$\mathfrak{spin}(n) = T_1\mathrm{Pin}(n) = T_1\mathrm{Spin}(n) = \psi(\Lambda^2\mathbb{R}^n) \subset C\ell(\mathbb{R}^n, g) .$$

Für $n \geq 3$ ist $\pi\colon \mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ die universelle Überlagerung.

Beweis. Seien v, $w \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$, dann gilt

$$v \cdot w \cdot v = -w \cdot v \cdot v - 2\langle v, w\rangle v = w - 2\langle v, w\rangle v = s_v w \in \mathbb{R}^n ,$$

und das ist gerade das Ergebnis der Spiegelung s_v von w an der zu v senkrechten Hyperebene in $\mathbb{R}^n$. Also wirkt $v \in \mathrm{Pin}(n)$ als Spiegelung $s_v \in O(n)$. Für $v_1 \cdots v_k \in \mathrm{Pin}(n)$ folgt

$$\pi(v_1 \cdots v_k)(w) = v_1 \cdot (\cdots (v_k \cdot w \cdot v_k) \cdots) \cdot v_1 = s_{v_1}(\cdots (s_{v_k}(N) \cdots) ,$$

und wir erhalten einen Homomorphismus $\pi\colon \mathrm{Pin}(n) \to O(n)$. Da bekanntlich jede orthonormale Abbildung als Verkettung von Spiegelungen dargestellt werden kann, ist π surjektiv. Eine Verkettung von k Spiegelungen erhält genau dann die Orientierung, wenn k gerade ist, also ist $\pi\colon \mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ ebenfalls ein surjektiver Homomorphismus.

Sei jetzt $v_1 \cdots v_k \in \ker \pi = \pi^{-1}(\mathrm{id})$. Da die Identität die Orientierung erhält, ist k gerade. Für alle $w \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$v_1 \cdots v_k \cdot w \cdot v_k \cdots v_1 = w \qquad \Longleftrightarrow \qquad v_1 \cdots v_k \cdot w = w \cdot v_1 \cdots v_k .$$

Sei also $a \in C\ell^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^n)$ mit $a \cdot w = w \cdot a$ für alle $w \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Wir stellen a in der Basis $(e_{i_1} \cdots e_{i_k})_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n}$ aus dar und erhalten

$$a = a_0 + e_1 \cdot a_1 ,$$

wobei $a_0 \in C\ell^{\mathrm{ev}}(0 \times \mathbb{R}^{n-1}, g)$ und $a_1 \in C\ell^{\mathrm{odd}}(0 \times \mathbb{R}^{n-1}, g)$ nur aus Monomen bestehen, die e_1 nicht enthalten. Aus der Cliffordrelation $e_1 \cdot e_i = -e_i \cdot e_1$ für alle $i \geq 2$ folgt für $w = e_1$

$$a \cdot e_1 = (a_0 + e_1 \cdot a_1) \cdot e_1 = e_1 \cdot a_0 - e_1 \cdot e_1 \cdot a_1 ,$$

auf der anderen Seite gilt aber

$$a \cdot e_1 = e_1 \cdot a = e_1 \cdot a_0 + e_1 \cdot e_1 \cdot a_1 .$$

Koeffizientenvergleich liefert $a_1 = 0$, somit $a = a_0 \in C\ell^{\mathrm{ev}}(0 \times \mathbb{R}^{n-1}, g)$. Indunktiv folgt, dass $a = v_1 \cdots v_k \in \psi(\Lambda^0\mathbb{R}^n) = \mathbb{R} \subset C\ell(\mathbb{R}^n, g)$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt aber

$$w = \lambda \cdot w \cdot \lambda = \lambda^2 \cdot w \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda \in \{\pm 1\} .$$

Auf der anderen Seite liegen 1 und $-1 = e_1 \cdot e_1 \in \mathrm{Spin}(n)$, und es folgt $\ker \pi = \{\pm 1\}$. ☐

Als nächstes wollen wir zeigen, dass $\mathrm{Pin}(n)$ und $\mathrm{Spin}(n)$ Untermannigfaltigkeiten von $C\ell(\mathbb{R}^n, g)$ mit Tangentialraum $\mathfrak{spin}(n)T_1\mathrm{Pin}(n) = T_1\mathrm{Spin}(n) = \psi(\Lambda^2\mathbb{R}^n)$ sind. Dazu konstruieren wir Exponentialabbildungen $\exp\colon \mathfrak{so}(n) \to SO(n)$ und $\exp\colon \mathfrak{spin}(n) \to \mathrm{Spin}(n)$, und erhalten schließlich lokale Diffeomorphismen zwischen kleinen offenen Teilmengen von $SO(n)$ und von $\mathrm{Spin}(n)$.

4.47. Bemerkung. Wir konstruieren Exponentialabbildungen $\exp\colon \mathfrak{so}(n) \to SO(n)$ und $\exp\colon \varphi(\Lambda^2\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Spin}(n)$.

(1) Für $a \in \mathbb{R}$ betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(2) \; .$$

Da $A^{2k} = (-a^2)^k E_2$ und $A^{2k+1} = (-a^2)^k \cdot A$, erhalten wir

$$\exp A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j = \sum_{k=0}^{\infty} \biggl(\frac{(-a^2)^k}{(2k)!} E_2 + \frac{(-a^2)^k}{(2k+1)!} A \biggr) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \in SO(2) \; .$$

(2) Betrachte jetzt das Element $c = \frac{a}{2}\, e_1 \cdot e_2 \in \varphi(\Lambda^2 \mathbb{R}^2) \subset C\ell(\mathbb{R}^2, g)$. Aus

$$c^2 = \frac{a^2}{4} e_1 \cdot e_2 \cdot e_1 \cdot e_2 = -\frac{a^2}{4} e_1^2 \cdot e_2^2 = -\frac{a^2}{4}$$

folgt $c^{2k} = \bigl(-\frac{a^2}{4}\bigr)^k$ und $c^{2k+1} = \bigl(-\frac{a^2}{4}\bigr)^k c$, somit

$$\begin{aligned} \exp c = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} c^j &= \sum_{k=0}^{\infty} \biggl(\frac{1}{(2k)!} \Bigl(-\frac{a^2}{4}\Bigr)^k + \frac{1}{(2k+1)!} \Bigl(-\frac{a^2}{4}\Bigr)^k c \biggr) \\ &= \cos \frac{a}{2} + \sin \frac{a}{2}\, e_1 \cdot e_2 = -\Bigl(\cos \frac{a}{2}\, e_1 + \sin \frac{a}{2}\, e_2 \Bigr) \cdot e_1 \in \mathrm{Spin}(n) \; . \end{aligned}$$

(3) Das soeben konstruierte Element $\exp c \in \mathrm{Spin}(n)$ wirkt auf $\mathbb{R}^2$ via $\pi \colon \mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ durch

$$\begin{aligned} \pi(\exp c)(e_1) &= \Bigl(\cos \frac{a}{2}\, e_1 + \sin \frac{a}{2}\, e_2 \Bigr) \cdot \underbrace{e_1 \cdot e_1 \cdot e_1}_{=-e_1} \cdot \Bigl(\cos \frac{a}{2}\, e_1 + \sin \frac{a}{2}\, e_2 \Bigr) \\ &= \Bigl(\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} \Bigr) e_1 + 2 \cos \frac{a}{2}\, \sin \frac{a}{2}\, e_2 \\ &= \cos a \cdot e_1 + \sin a \cdot e_2 = \exp A(e_1) \\ \text{und} \quad \pi(\exp c)(e_2) &= -\sin a \cdot e_1 + \cos a \cdot e_2 = \exp A(e_2) \; . \end{aligned}$$

(4) Wir definieren eine lineare Abbildung $\psi_* \colon \mathfrak{so}(n) \to \mathfrak{spin}(n)$ durch

$$\psi_* \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} (e_1 \cdot A(e_1) + e_2 \cdot A(e_2)) = \frac{a}{2}\, e_1 \cdot e_2 = c \; .$$

Aus (3) schließen wir, dass

$$\pi \biggl(\exp \psi_* \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \biggr) = \exp \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \; .$$

(5) Aus dem Satz über die Hauptachsentransformation folgt, dass jede schiefsymmetrische Matrix $A \in SO(n)$ bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis in 2×2-Blöcke zerfällt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & -a_k & & & \\ & & & a_k & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann folgt

$$\psi_* A = \frac{1}{2}(a_1\, e_1 \cdot e_2 + \cdots + a_k\, e_{2k-1} \cdot e_{2k}) \,,$$
$$\exp \psi_* A = \left(\cos \frac{a_1}{2} + \sin \frac{a_1}{2}\, e_1 \cdot e_2\right) \cdots \left(\cos \frac{a_k}{2} + \sin \frac{a_k}{2}\, e_{2k-1} e_{2k}\right) \,,$$

da die Elemente $e_1 \cdot e_2, e_3 \cdot e_4, \dots, e_{2k-1} \cdot e_{2k} \in C\ell(\mathbb{R}, g)$ paarweise kommutieren. Wie in (3) folgt, dass

$$\pi \exp \psi_* A = \begin{pmatrix} \cos a_1 & -\sin a_1 & & & & & & \\ \sin a_1 & \cos a_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \cos a_k & -\sin a_k & & & \\ & & & \sin a_k & \cos a_k & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} = \exp A \,.$$

Also erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \varphi(\Lambda^2\mathbb{R}^n) & \xleftarrow{\psi_*} & \mathfrak{so}(n) \\ {\scriptstyle \exp}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathrm{Spin}(n) & \xrightarrow{\pi} & SO(n) \,. \end{array}$$

4.48. Proposition. *Die Gruppen* $\mathrm{Pin}(n)$ *und* $\mathrm{Spin}(n)$ *sind Untermannigfaltigkeiten der Clifford-Algebra* $C\ell(\mathbb{R}^n, g)$*, und die Abbildungen* $\pi\colon \mathrm{Pin}(n) \to O(n)$ *und* $\pi\colon \mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ *sind glatte Überlagerungen.*

Beweis. Die Exponentialabbildung $\exp\colon \mathfrak{so}(n) \to SO(n)$ aus Bemerkung 4.47 (1) ist glatt, hat bei $0 \in \mathfrak{so}(n)$ injektives Differential und ist daher ein lokaler Diffeomorphismus auf einer Umgebung U der 0 in $\mathfrak{so}(n)$. Die Exponentialabbildung $\exp\colon \psi(\Lambda^2\mathbb{R}^n) \to C\ell(\mathbb{R}^n, g)$ aus Bemerkung 4.47 (2) — (3) ist glatt und hat bei $0 \in C\ell(\mathbb{R}^n, g)$ ebenfalls injektives Differential. Also erhalten wir eine Immersion

$$F\colon \exp(U) \xrightarrow{\exp^{-1}} U \xrightarrow{\psi_*} \psi(\Lambda^2\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\exp} C\ell(\mathbb{R}^n, g) \,.$$

Wegen Bemerkung 4.47 (5) gilt $\pi \circ F = \mathrm{id}_U$, also ist F auch injektiv. Nach Verkleinern von U ist $F(U) \subset \mathrm{Spin}(n)$ eine Untermannigfaltigkeit von $C\ell(\mathbb{R}^n, g)$ und F eine Einbettung.

Für $g \in O(n)$ und $\tilde g \in \pi^{-1}(g) \subset \mathrm{Pin}(n)$ konstruieren wir analog eine Einbettung

$$F_{\tilde g}\colon g \cdot \exp(U) \xrightarrow{g^{-1}\cdot} \exp(U) \xrightarrow{F} \mathrm{im}(F) \xrightarrow{\tilde g\,\cdot} \tilde g \cdot \mathrm{im}(F) \,,$$

da Linksmultiplikation mit $g \in O(n)$ beziehungsweise $\tilde g \in C\ell(\mathbb{R}^n, g)$ eine invertierbare glatte Abbildung mit $\pi \circ F_{\tilde g} = \mathrm{id}_{g\cdot\exp(U)}$ ist. Also ist $\mathrm{im}\, F_{\tilde g}$ eine Untermannigfaltigkeit von $C\ell(\mathbb{R}^n, g)$.

Da $O(n)$ kompakt ist, folgt $O(n) = \bigcup_{i=1}^N g_i \cdot \exp(U)$ für endlich viele $g_1, \dots, g_N \in O(n)$. Wähle $\tilde g_1, \dots, \tilde g_N \in \mathrm{Pin}(n)$ wie oben, dann folgt

$$\mathrm{Pin}(n) = \bigcup_{i=1}^N (\mathrm{im}\, F_{\tilde g} \cup \mathrm{im}\, F_{-\tilde g}) \,,$$

da jedes Element $g \in O(n)$ genau zwei Urbilder unter π hat wegen Proposition 4.46.

Hieraus kann man folgern, dass $\mathrm{Pin}(n)$ tatsächlich eine Untermannigfaltigkeit von $C\ell(\mathbb{R}^n, g)$ ist, und dass $\pi\colon \mathrm{Pin}(n) \to O(n)$ eine Überlagerung ist. Durch Einschränken folgen die analogen Behauptungen für $\mathrm{Spin}(n)$. □

4.49. Beispiel. Wir betrachten die Gruppen $\mathrm{Pin}(n)$ und $\mathrm{Spin}(n)$ für kleine n, vergleiche Beispiel 4.37.

(1) Es gilt $O(1) = \{\pm \mathrm{id}_\mathbb{R}\}$, $SO(1) = \{\mathrm{id}_\mathbb{R}\}$. In $C\ell(\mathbb{R}^1, g) \cong \mathbb{C}$ erhalten wir $\mathrm{Pin}(1) = \{\pm 1, \pm i\}$ und $\mathrm{Spin}(1) = \{\pm 1\}$, beispielsweise gilt
$$\pi(i)(v) = i \cdot v \cdot i = -v \qquad \text{für alle}\, v \in \mathbb{R}^1 \;.$$

(2) In $C\ell(\mathbb{R}^2, g) \cong \mathbb{H}$ gilt
$$\mathrm{Spin}(2) = \left\{ \cos\frac{t}{2} + k \cdot \sin\frac{t}{2} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \cong S^1 \;,$$
denn wir haben den von i und j erzeugten reellen Unterraum mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert, und daher
$$\cos\frac{t}{2} + k \cdot \sin\frac{t}{2} = \left(i \cos\frac{t}{2} + j \sin\frac{t}{2} \right) \cdot (-i) \in \mathrm{Spin}(2) \;.$$
Außerdem operiert dieses Element durch
$$\begin{aligned}
&\left(\cos\frac{t}{2} + k \sin\frac{t}{2}\right)(xi + yj)\left(\cos\frac{t}{2} - k \sin\frac{t}{2}\right)\\
&= \left(\cos\frac{t}{2} + k \sin\frac{t}{2}\right)^2 (xi + yj)\\
&= (\cos t + k \sin t)(xi + yj) \;,
\end{aligned}$$
und k wirkt wie eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$, da $k \cdot i = j$ und $k \cdot j = -i$.

Es folgt
$$\mathrm{Pin}(2) \cong \mathrm{Spin}(2) \cup i \cdot \mathrm{Spin}(2) \cong S^1 \sqcup S^1 \;.$$

(3) In $C\ell(\mathbb{R}^3, g) \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ gilt (Übung):
$$\begin{aligned}
&\mathrm{Spin}(3) \cong \{(q, q) \mid |q| = 1\} \cong S^3\\
\text{und} \qquad &\mathrm{Pin}(3) \cong \{(q, \pm q) \mid |q| = 1\} \cong S^3 \sqcup S^3 \;.
\end{aligned}$$

4.50. Bemerkung. Wir haben gerade gesehen, dass $\mathrm{Spin}(3) \cong S^3$ gilt; insbesondere ist $\mathrm{Spin}(3)$ einfach zusammenhängend, und $\pi\colon \mathrm{Spin}(3) \to SO(3)$ ist daher die universelle Überlagerung. Analog ist $\mathrm{Spin}(n)$ die universelle Überlagerung von $SO(n)$ für alle $n \geq 3$, und die Fundamentalgruppe von $SO(n)$ ist isomorph zu $\{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Wir haben in Beispiel 4.37 (5) behauptet, dass komplexe Cliffordalgebren im wesentlichen Matrixalgebren sind. Wir wollen jetzt Vektorräume konstruieren, auf denen $\mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^n, g)$ entsprechend wirkt.

4.51. Proposition und Definition. *Es sei $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik g.*

(1) *Für $n = 2k$ wirkt $\mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^n, g)$ auf dem* Spinormodul $\Sigma_{2k} = \Lambda^\bullet \mathbb{C}\ell^k \cong \mathbb{C}\ell^{2^k}$ *durch die Cliffordmultiplikation c mit*
$$c(e_{2a-1}) = f^a \wedge - \iota_{f_a} \qquad \textit{und} \qquad c(e_{2a}) = i(f^a \wedge + \iota_{f_a}) \;,$$

wobei $(f_1, \dots, f_k)$ die Standardbasis des $\mathbb{C}^k$ und $(f^1, \dots, f^k)$ die duale Basis bezeichne. Bezüglich der von der Standardmetrik auf $\Lambda^\bullet\mathbb{C}^k$ induzierten Metrik wirkt $c(v)$ antiselbstadjungiert für alle $v \in \mathbb{R}^{2k} \subset \mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^{2k}, g)$, und es gilt

$$\mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^{2k}, g) \cong \operatorname{End}\Sigma_{2k} \cong M_{2^k}(\mathbb{C}) \ .$$

(2) *Es sei c' die Wirkung von $\mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^{2k}, g) \subset \mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^{2k+1}, g)$ auf Σ_{2k} aus (1) und $\omega' = i^k e_1 \cdots e_{2k}$. Wir definieren zwei Wirkungen c_+ und c_- von $\mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^{2k+1}, g)$ auf Σ_{2k} durch*

$$c_\pm(e_j) = \begin{cases} \mp i c'(e_j)c'(\omega') & \text{für } j = 1, \dots, 2k \ , \text{und} \\ \mp i c'(\omega') & \text{für } j = 2k+1 \ , \end{cases}$$

und nennen Σ_{2k} mit der Wirkung $c_\pm$ das Spinormodul $\Sigma^\pm_{2k+1}$. *Für alle $v \in \mathbb{R}^{2k+1}$ operiert $c_\pm(v)$ antiselbstadjungiert, das Element $\omega = i^{k+1} e_1 \cdots e_{2k+1} \in \mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^{2k+1}, g)$ operiert auf $\Sigma^\pm_{2k+1}$ durch ± 1, und es gilt*

$$\mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^{2k+1}, g) \cong \operatorname{End}\Sigma^+_{2k+1} \oplus \operatorname{End}\Sigma^-_{2k+1} \cong M_{2^k}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^k}(\mathbb{C}) \ .$$

Beweis. Zu (1) überprüfen wir zunächst die Cliffordrelationen. Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} &c(e_{2a})c(e_{2b-1}) + c(e_{2b-1})c(e_{2a}) \\ &\qquad = i(f^a \wedge f^b \wedge + f^b \wedge f^a \wedge + \iota_{f_a} \circ f^b \wedge - \iota_{f_b} \circ f^a \wedge \\ &\qquad\quad + f^b \wedge \iota_{f_a} - f^a \wedge \iota_{f_b} - \iota_{f_a}\iota_{f_b} - \iota_{f_b}\iota_{f_a}) \\ &\qquad = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &c(e_{2a})c(e_{2b}) + c(e_{2b})c(e_{2a}) \\ &\qquad = -(f^a \wedge f^b \wedge + f^b \wedge f^a \wedge + \iota_{f_a} \circ f^b \wedge + f^b \wedge \iota_{f_a} \\ &\qquad\quad + \iota_{f_b} \circ f^a \wedge + f^a \wedge \iota_{f_b} + \iota_{f_a}\iota_{f_b} + \iota_{f_b}\iota_{f_a}) \\ &\qquad = -2\delta_{ab} \ . \end{aligned}$$

Da $f^a\wedge$ zu ι_{f_a} adjungiert ist, sieht man leicht, dass $c(e_1), \dots, c(e_{2k})$ antiselbstadjungiert sind.

Als nächstes überlegen wir uns, dass

$$f^a\wedge = \frac{1}{2}(c(e_{2a-1}) - i\,c(e_{2a})) \qquad \text{und} \qquad \iota_{f_a} = -\frac{1}{2}(c(e_{2a-1}) + i\,c(e_{2a})) \in \mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^{2k}, g) \ .$$

Wir zeigen, dass $f^a\wedge$ und ι_{f_a} bereits $\operatorname{End}\Lambda^\bullet\mathbb{C}^k$ erzeugen. Aus $\dim \operatorname{End}\Lambda^\bullet\mathbb{C}^k (2^k)^2 = \dim \mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^{2k}, g)$ folgt dann der behauptete Isomorphismus. Es sei also $1 \le j_1 < \dots < j_m \le k$. Man überprüft, dass

$$f^a \wedge \iota_{f_a}(f^{j_1} \wedge \dots \wedge f^{j_m}) = \begin{cases} f^{j_1} \wedge f^{j_m} & \text{falls } \alpha \in \{j_1, \dots, j_m\} \ , \\ 0 & \text{falls } \alpha \notin \{j_1, \dots, j_m\} \ , \end{cases}$$

$$\iota_{f_a} \circ f^a \wedge (f^{j_1} \wedge \dots \wedge f^{j_m}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha \in \{j_1, \dots, j_m\} \\ f^{j_1} \wedge \dots \wedge f^{j_m} & \text{falls } \alpha \notin \{j_1, \dots, j_m\} \end{cases}$$

Somit stellt

$$\prod_{a \in \{j_1, \dots, j_m\}} f^a \wedge \iota_{f_a} \circ \prod_{a \notin \{j_1, \dots, j_m\}} \iota_{f_a} \circ f^a \wedge$$

genau die Projektion auf den von $f^{j_1} \wedge \dots \wedge f^{j_m}$ erzeugten Unterraum dar. Durch Verketten mit weiteren $f^a\wedge$ und ι_{f_a} erhalten wir bezüglich der Basis $(f^{j_1} \wedge \dots \wedge f^{j_m})_{j_1 < \dots < j_m}$ aus Proposition 3.5 alle Matrizen, deren Einträge bis auf eine 1 alle verschwinden. Da diese Matrizen eine Vektorraumbasis von $\operatorname{End}\Sigma_{2k} = M_{2^k}(\mathbb{C})$ bilden, ist der Isomorphismus gezeigt.

Auch zu (2) überprüfen wir zunächst die Cliffordrelation. Da $c'(e_i)$ mit sich selbst vertauscht, mit $c'(e_j)$ für $j \neq i$ aber antikommutiert, antikommutiert $c'(\omega')$ mit allen $c'(e_i)$ für $1 \leq i \leq 2k$. Aus Übung 1 von Blatt 7 folgt $\omega'^2 = 1 \in C\ell(\mathbb{R}^{2k}, g)$. Also gilt

$$\begin{aligned} c_\pm(e_i)c_\pm(e_j) + c_\pm(e_j)c_\pm(e_i) &= -c'(e_i)c'(\omega')c'(e_j)c'(\omega') - c'(e_j)c'(\omega')c'(e_i)c'(\omega') \\ &= (c'(e_i)c'(e_i) + c'(e_j)c'(e_i))c'(\omega')^2 = -2\delta_{ij} \end{aligned}$$

Analog erhalten wir für $1 \leq i \leq 2k$, dass

$$c_\pm(e_i)c_\pm(e_{2k+1}) + c_\pm(e_{2k+1})c_\pm(e_i) = 0 \qquad \text{und} \qquad c_\pm(e_{2k+1})^2 = -c'(\omega')^2 = -1 \;.$$

Alle Faktoren — nämlich i und $c'(e_j)$ — in $c'(\omega')$ operieren auf Σ_{2k} durch Isometrien, das heißt, ihr Adjungiertes ist gleichzeitig ihr Inverses. Das gilt dann auch für das Produkt. Aus $c'(\omega')^2 = 1$ folgt also

$$c'(\omega')^* = c'(\omega')^{-1} = c'(\omega') \;,$$

und $c'(\omega')$ ist selbstadjungiert. Jetzt erhalten wir

$$\begin{aligned} c_\pm(e_j)^* &= c'(\omega')(-c'(e_j))(\pm i) = \pm i c'(e_j)c'(\omega') = -c_\pm(e_j) \\ \text{und} \qquad c_\pm(e_{2k+1}) &= \pm i c'(\omega') = -c_\pm(e_{2k+1}) \;. \end{aligned}$$

Als nächstes betrachten wir $\omega = i^{k+1} e_1 \cdots e_{2k+1} \in \mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^{2k+1}, g)$ und erhalten

$$\begin{aligned} c_\pm(\omega) &= i^{k+1}(\mp i c'(e_1)c'(\omega')) \cdots (\mp i c'(e_{2k})c'(\omega'))(\mp i c'(\omega')) \\ &= (\mp i)^{2k+1}(-1)^{\frac{2k(2k-1)}{2}} \underbrace{i^{k+1} c'(e_1) \cdots c'(e_{2k})}_{ic'(\omega')} c'(\omega')^{2k+1} \\ &= \mp i^{2(k+1)}(-1)^k c'(\omega')^{2k+2} = \pm 1 \;. \end{aligned}$$

Insbesondere sind Σ^+_{2k+1} und Σ^-_{2k+1} als $\mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^{2k+1}, g)$ nicht isomorph.

Es sei jetzt

$$p_\pm = \frac{1 \pm \omega}{2} \in \mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^{2k+1}, g) \;,$$

dann wirkt $p_\pm$ auf $\Sigma^\pm_{2k+1}$ als Identität und auf $\Sigma^\mp_{2k+1}$ als Null. Für $1 \leq j \leq 2k+1$ antikommutiert $c(e_j)$ mit $2k$ Faktoren von ω, so dass $c(e_j)$ mit ω insgesamt vertauscht. Also vertauscht jedes Element $a \in \mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^{2k+1}, g)$ mit ω, und außerdem gilt

$$a = p_+ \circ a + p_- \circ a = a \circ p_+ + a \circ p_- = a_+ + a_- \;,$$

und wir erhalten

$$\mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^{2k+1}, g) \xrightarrow[\sim]{(p_+, p_-)} \operatorname{End} \Sigma^+_{2k+1} \oplus \operatorname{End} \Sigma^-_{2k+1} \cong M_{2^k}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^k}(\mathbb{C}) \;. \quad \square$$

4.52. Bemerkung. Mit Hilfe dieser Proposition verstehen wir die Gruppen $\mathrm{Spin}(n)$ und ihre Wirkung auf Σ_n gleich viel besser.

(1) Da $\mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^{2k}, g) \cong M_{2^k}(\mathbb{C})$ gilt, ist $\mathrm{Spin}(2k) \subset \mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^{2k}, g)$ eine Matrix-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{spin}(2k) = \varphi(\Lambda^2\mathbb{R}^{2k})$. Da $\mathrm{Spin}(2k) \subset \mathbb{C}\ell^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^n, g)$, erhält $\mathrm{Spin}(2k)$ die ± 1-Eigenräume $\Sigma^\pm_{2k}$ von $\omega = i^k c e_1 \cdots c e_{2k}$.

(2) Sei jetzt $n = 2k+1$ ungerade. Da nach Konstruktion in Proposition 4.51 (2) gerade Elemente auf Σ^+_{2k+1} und Σ^-_{2k+1} gleich operieren, können wir auch

$$\mathrm{Spin}(2k+1) \subset \mathbb{C}\ell^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{2k+1}, g) \subset M_{2^k}(\mathbb{C})$$

als Matrix-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{spin}(2k+1) = \varphi(\Lambda^2\mathbb{R}^{2k+1})$ auffassen. Wir setzen $\Sigma_{2k+1} = \Sigma^+_{2k+1}$, wodurch $\omega = i^k c e_1 \cdots c e_{2k+1}$ wie 1 operiert.

4.53. Bemerkung. Sei (M, g) eine orientierte n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir wollen uns überlegen, ob es möglich ist, ein Dirac-Bündel ΣM mit Faser Σ_n zu konstruieren. Dabei benutzen wir, dass $\operatorname{End}\Sigma_n = \mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^n, g)$, falls n gerade beziehungsweise $\operatorname{End}\Sigma_n = \mathbb{C}\ell^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^n, g)$, falls n ungerade ist.

Sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine gute Überdeckung von M mit lokalen orthonormalen Trivialisierungen $\psi_i \colon TM|_{U_i} \to \mathbb{R}^n$ und Übergangsmatrizen $g_{ij} \colon U_i \cap U_j \to SO(n)$ wie in Bemerkung 4.4. Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ wird dann durch $X_i = \psi_i \circ X|_{U_i} \colon U_i \to \mathbb{R}^n$ bestimmt, wobei

$$X_i = g_{ij} X_j \qquad \text{für alle } i, j \in I\ .$$

(1) Falls ΣM durch Übergangsmatrizen $h_{ij} \colon U_i \cap U_j \to \operatorname{End}\Sigma_n \subset \mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^n, g)$ gegeben wird, wird ein Schnitt $\sigma \in \Gamma(\Sigma M)$ durch $\sigma_i \colon U_i \to \Sigma_n$ bestimmt, wobei

$$\sigma_i = c(h_{ij})\sigma_j \qquad \text{für alle} i, j \in I\ .$$

Da das Bündel $C\ell(TM, g)$ auf ΣM durch Clifford-Multiplikation operieren soll, folgt für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\sigma \in \Gamma(\Sigma M)$ wie oben, dass

$$c(h_{ij} \cdot X_j)\sigma_j = c(h_{ij})(c(X)\sigma)_j = (c(X)\sigma)_i = c(X_i)\sigma_i = c(g_{ij}X_j) \cdot c(h_{ij})\sigma_j\ .$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$g_{ij}(X_j) = h_{ij} \cdot X_j \cdot h_{ij}^{-1} \in \Gamma(\mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^n, g))\ .$$

Seien jetzt $\tilde{g}_{ij} \colon U_i \cap U_j \to \operatorname{Spin}(n) \subset \mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^n, g)$ lokale Lifts von g_{ij} bezüglich der Überlagerung $\pi \colon \operatorname{Spin}(n) \to SO(n)$. Diese existieren, da $\mathcal{U}$ gut ist. Für $h'_{ij} = \tilde{g}_{ij} \cdot h_{ij}$ gilt dann

$$h'_{ij} \cdot X_j \cdot h'^{-1}_{ij} = \tilde{g}_{ij}^{-1} \cdot (g_{ij}(X_j)) \cdot \tilde{g}_{ij} = X_j\ ,$$

also $h'_{ij} \cdot X_j = X_j \cdot h'_{ij}$ für alle $X_j \colon U_j \to \mathbb{R}^n$. Analog zum Beweis von Proposition 4.46 folgt, dass h'_{ij} Werte in $\mathbb{C}^\times$ annimmt. Da $\Sigma M \to M$ die von $g^{\Sigma M}$ induzierte Metrik tragen soll, müssen wir sogar $h'_{ij} \in U(1) = S^1 \subset \mathbb{C}^\times$ annehmen. Folglich benötigen wir Übergangsmatrizen

$$h_{ij} = \tilde{g}_{ij} \cdot h'_{ij} \colon U_i \cap U_j \to \operatorname{Spin}(n) \cdot S^1 \subset \mathbb{C}\ell^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^n, g)\ ,$$

wobei $\tilde{g}_{ij}$ ein Lift von g_{ij} ist. Wir werden uns auf den Fall $h'_{ij} \equiv 1$ konzentrieren und nennen das induzierte Vektorbündel $\Sigma M \to M$ ein *Spinorbündel*.

(2) Der Levi-Civita-Zusammenhang ∇ auf TM wird durch $\omega_i \in \Omega^1(U_i; \mathfrak{so}(n))$ beschrieben, wobei

$$(\nabla X)_i = dX_i + \omega_i(X_i)\ .$$

Analog sei $\nabla^{\Sigma M}$ ein metrischer Zusammenhang auf ΣM, der mit Clifford-Multiplikation wie in Definition 4.39 verträglich ist. Wir beschreiben $\nabla^{\Sigma M}$ analog durch Formen $\vartheta_i \in \Omega^1(U_i; \operatorname{End}\Sigma_n) \subset \Omega^1(U_i; \mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^n, g))$ mit

$$(\nabla^{\Sigma M}\sigma)_i = d\sigma_i + c(\vartheta_i)\sigma_i\ .$$

Aus der Produktregel in Definition 4.39 (3) folgt

$$\begin{aligned} c(\vartheta_i \cdot X_i)\sigma_i &= \nabla^{\Sigma M}(c(X)\sigma)_i - d(c(X)\sigma)_i \\ &= (c(\nabla X)_i - c(dX_i))\sigma_i + c(X_i)((\nabla^{\Sigma M}\sigma)_i - d\sigma_i) \\ &= c(\omega_i(X_i))\sigma_i + c(X_i \cdot \vartheta_i)\sigma_i\ , \end{aligned}$$

und Koeffizientenvergleich liefert

$$\omega_i(X_i) = \vartheta_i \cdot X_i - X_i \cdot \vartheta_i \qquad \text{für alle } X_i \colon U_i \to \mathbb{R}^n\ .$$

Bezüglich einer lokalen Orthonormalbasis definieren wir

$$\tilde{\omega}_i = \frac{1}{4}\sum_{i,j} \langle \omega_i e_i, e_j \rangle e_i \cdot e_j \in \Omega^1(U_i; \mathfrak{spin}(n))$$

analog zur Konstruktion von F^S. Wie im Beweis der Proposition 4.42 folgt für $\vartheta_i' = \vartheta_i - \tilde{\omega}_i$, dass

$$\vartheta_i' \cdot X_i - X_i \cdot \vartheta_i' = 0 \;,$$

also $\vartheta_i \in \Omega^1(U_i; \mathbb{C})$ mit dem gleichen Argument wie oben. Da wir einen metrischen Zusammenhang $\nabla^{\Sigma M}$ benötigen, muss ϑ_i' rein imaginär sein. Wir konzentrieren uns später auf den Fall $\vartheta_i' = 0$ und sprechen vom *Spin-Zusammenhang* auf ΣM.

(3) Da der Levi-Civita-Zusammenhang mit Trivialisierungswechseln verträglich ist, gilt

$$d(g_{ij} X_j) + (\omega_i \circ g_{ij})(X_j) = (\nabla X)_i = g_{ij}(dX_j + \omega_j(X_j))$$

für alle $X_j \colon U_j \to \mathbb{R}^n$, also

$$\omega_j = g_{ij}^{-1} \circ dg_{ij} + g_{ij}^{-1} \circ \omega_i \circ g_{ij} \in \Omega^1(U_i \cap U_j; \mathfrak{so}(n)) \;. \tag{*}$$

Analog sind (ϑ_i) und (h_{ij}) verträglich, falls

$$\vartheta_j = h_{ij}^{-1} \cdot dh_{ij} + h_{ij}^{-1} \cdot \vartheta_i \cdot h_{ij} \in \Omega^1(U_i \cap U_j; \mathfrak{spin}(n) + i\mathbb{R}) \;.$$

Falls $\vartheta_i' = h_{ij}' = 0$, muss also

$$\tilde{\omega}_j = \tilde{g}_{ij}^{-1} \cdot d\tilde{g}_{ij} + \tilde{g}_{ij}^{-1} \cdot \tilde{\omega}_i \cdot \tilde{g}_{ij} \in \Omega^1(U_i \cap U_j; \mathfrak{spin}(n))$$

gelten. Aber das folgt aus der Konstruktion von $\tilde{g}_{ij}$ und $\tilde{\omega}_j$ und (*) durch Nachrechnen. Andernfalls müssen wir noch überprüfen, dass

$$\vartheta_j' = h_{ij}'^{-1} \cdot dh_{ij} + \vartheta_i' \in \Omega^1(U_i \cap U_j; i\mathbb{R})$$

für alle $i, j \in I$ gilt.

(4) Zu guter Letzt bestimmen wir noch die Krümmung von $\nabla^{\Sigma M}$ im Falle $\vartheta_i' = 0$ für alle $i \in I$. Indem wir X_i, $Y_i \colon U_i \to \mathbb{R}^n$ und $\sigma_i \colon U_i \to \Sigma_n$ konstant annehmen, erhalten wir

$$\begin{aligned}(F^{\Sigma M}_{X,Y}\sigma)_i &= X_i(\tilde{\omega}_i(Y_i)\sigma_i) + \tilde{\omega}_i(X_i)\tilde{\omega}_i(Y_i)\sigma_i - Y_i(\tilde{\omega}_i(X_i)\sigma_i) - \tilde{\omega}_i(Y_i)\tilde{\omega}_i(Y_i)\sigma_i \\ &= (d\tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_i \wedge \tilde{\omega}_i)(X_i, Y_i)\sigma_i \;.\end{aligned}$$

Wenn wir außerdem gemäß Satz 4.21 annehmen, dass $\omega_i|_p = 0$ für ein $p \in U_i$ gilt, erhalten wir nach Konstruktion $\tilde{\omega}_i|_p = 0$ und

$$\begin{aligned}d\tilde{\omega}_i(X_i, Y_i) &= \frac{1}{4}\sum_{a,b=1}^n (X_i\langle \omega_i(Y_i)e_a, e_b\rangle - Y_i\langle \omega_i(X_i)e_a, e_b\rangle)c(e_a)c(e_b) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{a,b=1}^n \langle \underbrace{d\omega_i(X_i, Y_i)}_{=R_{X,Y}} e_a, e_b\rangle c(e_a)c(e_b) = c(F^S) \;.\end{aligned}$$

Die Krümmung von $\nabla^{\Sigma M}$ im Fall $\vartheta = 0$ ist also genau die Spinkrümmung. Im Allgemeinen gilt

$$F^{\Sigma M} = c(F^S) + d\vartheta \;,$$

also trägt ϑ nur zur Twistkrümmung bei.

Wir beschäftigen uns als nächstes mit der Frage, ob und wie man die Vorzeichen der Lifts $\tilde{g}_{ij}$ aus Bemerkung 4.53 (1) so wählen kann, dass die Kozykelbedingung aus Bemerkung 4.4 (1) und Proposition 4.5 gilt. Denn nur dann existiert ein Vektorbündel $\Sigma M \to M$.

4.54. Satz und Definition. *Es sei (M,g) eine orientierte, n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\mathcal{U}=(U_i)_{i\in I}$ eine gute Überdeckung und $g_{ij}\colon U_i\cap U_j\to SO(n)$ Übergangsmatrizen zu gegebenen lokalen Trivialisierungen von TM.*

(1) *Seien $\tilde g_{ij}\colon U_i\cap U_j\to \mathrm{Spin}(n)$ Lifts der g_{ij}, dann bildet*
$$w_{ijk}=\tilde g_{jk}\cdot\tilde g_{ik}^{-1}\cdot\tilde g_{ij}\colon U_i\cap U_j\cap U_k\to\{\pm 1\}$$
einen Čech-Kozykel, dessen Klasse $w_2(TM)\in H^2(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, die zweite Stiefel-Whitney-Klasse *von TM, nicht von den getroffenen Wahlen abhängt.*

(2) *Es existieren genau dann $\tilde g_{ij}$, die die Kozykelbedingung $w_{ijk}=1$ für alle i, j, $k\in I$ erfüllen, wenn $w_2(TM)=0$. In diesem Fall heißt M* spin *oder* Spin-Mannigfaltigkeit*, und das vom Kozykel $(\tilde g_{ij})$ induzierte Diracbündel $(\Sigma M,g^{\Sigma M},\nabla^{\Sigma M},c)$ aus Bemerkung 4.53 ein* Spinorbündel *von (M,g).*

(3) *Sei M spin, dann operiert $H^1(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ einfach transitiv auf den Isomorphieklassen der Spinorbündel von (M,g), aufgefasst als Dirac-Bündel mit Metrik, Zusammenhang und Clifford-Multiplikation.*

Beweis. Da $\pi\colon\mathrm{Spin}(n)\to SO(n)$ ein Gruppenhomorphismus ist und (g_{ij}) die Kozykelbedingung erfüllt, ist w_{ijk} ein Lift von $g_{jk}\circ g_{ik}^{-1}\circ g_{ij}=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, also $w_{ijk}\in\{\pm 1\}$ nach Proposition 4.46. Wir dürfen annehmen, dass $\tilde g_{ii}=1$ und $\tilde g_{ji}=\tilde g_{ij}^{-1}$ für alle i, $j\in I$. Da ± 1 mit allen Elementen der Spin-Gruppe vertauscht, folgt
$$w_{jki}=\tilde g_{jk}^{-1}\circ w_{ijk}\circ\tilde g_{jk}=w_{ijk}=w_{ijk}^{-1}=\tilde g_{ji}\circ\tilde g_{ki}^{-1}\circ\tilde g_{kj}=w_{kji}\ ,$$
so dass wir die Indizes beliebig rotieren lassen dürfen. Um zu überprüfen, ob w_{ijk} ein Kozykel ist, berechnen wir
$$\begin{aligned}(\check\delta w)_{ijkl}&=w_{jkl}\cdot w_{ikl}^{-1}\cdot w_{ijl}\cdot w_{ijk}^{-1}=w_{lkj}\cdot w_{ikl}\cdot w_{jil}w_{kij}\\&=\tilde g_{kj}\tilde g_{jl}\underbrace{\tilde g_{lk}\cdot\tilde g_{kl}}_{=1}\tilde g_{li}\tilde g_{ik}\cdot\underbrace{\tilde g_{il}\tilde g_{lj}\underbrace{\tilde g_{ji}\cdot\tilde g_{ij}}\tilde g_{jk}\tilde g_{ki}}_{=\pm 1}\\&=\tilde g_{kj}\tilde g_{jl}\underbrace{\tilde g_{li}(\tilde g_{il}}_{=1}\tilde g_{lj}\tilde g_{jk}\underbrace{\tilde g_{ki})\tilde g_{ik}}_{=1}=\tilde g_{kj}\underbrace{\tilde g_{jl}\tilde g_{lj}}_{=1}\tilde g_{jk}=1\ .\end{aligned}$$

Wählen wir andere Lifts $\tilde g'_{ij}$, so folgt $\tilde g'_{ij}=\tilde g_{ij}\cdot\varepsilon_{ij}$ für eine Čech-Kokette $\varepsilon\in\check C^1(\mathcal{U};\{\pm 1\})$, und wir erhalten einen neuen Kozykel w' mit
$$w'_{ijk}=\tilde g'_{jk}\tilde g'_{ki}\tilde g'_{ij}=\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki}\varepsilon_{ij}\cdot w_{ijk}=(\check\delta\varepsilon\cdot w)_{ijk}\ ,$$
somit hängt $[w]\in\check H^2(\mathcal{U};\{\pm 1\})=H^2(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ nicht von der Wahl der Lifts $\tilde g_{ij}$ ab. Auch von der Wahl der Überdeckung $\mathcal{U}$ und der Wahl der lokalen Trivialisierungen hängt $[w]$ nicht ab; das sieht man, indem man zwei Überdeckungen mit den zugehörigen Trivialisierungen vereinigt. Damit ist (1) gezeigt.

Sei nun M spin, $\tilde g_{ij}$ eine Wahl von Lifts und $w=\check\delta\varepsilon\in\check C^2(\mathcal{U};\pm 1)$ der zugehörige Kozykel, dann erfüllen die Lifts $\varepsilon_{ij}\cdot\tilde g_{ij}$ die Kozykelbedingung, und wir können ein Dirac-Bündel $(\Sigma M,g^{\Sigma M},\nabla^{\Sigma M},c)$ wie in Bemerkung 4.53 angeben. Zu (3) betrachten wir zwei Spinorbündel ΣM, $\Sigma' M\to M$ zu Lifts $\tilde g_{ij}$, $\tilde g'_{ij}$ der Übergangsmatrizen g_{ij}. Nach Proposition 4.5 wird ein Isomorphismus $F\colon\Sigma M\to\Sigma' M$ durch Abbildungen $F_i\colon U_i\to\operatorname{End}\Sigma_n\subset\mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^n,g)$ mit $\tilde g'_{ij}\cdot F_j=F_i\cdot\tilde g_{ij}$ gegeben. Da F_i mit den Zusammenhängen verträglich sein soll, die sowohl für ΣM als auch für $\Sigma' M$ durch $\tilde\omega_i\in\Omega^1(U_i;\mathfrak{spin}(n))$ gegeben sind, muss F_i lokal konstant sein, also konstant auf U_i, da U_i nach Voraussetzung zusammenziehbar ist. Außerdem kommutiert F_i mit Clifford-Multiplikation, so dass $F_i\in\mathbb{C}^\times$ wie in Bemerkung 4.53. Da F_i die Metriken erhält, folgt sogar $F_i\in U(1)\subset\mathbb{C}^\times$.

Wir dürfen den ganzen Isomorphismus F_i mit einer lokal konstanten Funktion multiplizieren, so dass $F_i = 1$ für ein U_i in jeder Zusammenhangskomponente von M. Aus Bemerkung 4.53 (1) wissen wir, dass $\tilde g'_{ij} = \pm\tilde g_{ij}$, also folgt $F_i = \pm 1$ für alle $i \in I$. Ähnlich wie oben sei $\tilde g'_{ij} = \varepsilon_{ij} \cdot \tilde g_{ij}$ mit $\varepsilon \in \check C^1(\mathcal U; \{\pm 1\})$. Da sowohl $\tilde g_{ij}$ als auch $\tilde g'_{ij}$ die Kozykelbedingung erfüllen, gilt $\check\delta\varepsilon = 0$. Wenn F_i wie oben einen Isomorphismus beschreibt, folgt

$$\varepsilon_{ij} = \tilde g'_{ij} \cdot \tilde g_{ij}^{-1} = F_i \cdot \tilde g_{ij} \cdot F_j^{-1} \tilde g_{ij}^{-1} = (\check\delta F)_{ij} \ .$$

Somit unterscheiden sich zwei Spinstrukturen stets um eine Klasse in $\check H^1(\mathcal U; \{\pm 1\}) \cong H^1(M; \mathbb Z/2\mathbb Z)$, und $a \in H^1(M; \mathbb Z/2\mathbb Z)$ operiert auf der Menge der Isomorphieklassen von Spinorbündeln durch Multiplikation der Übergangsmatrizen $\tilde g_{ij}$ mit einem beliebigen Repräsentanten ε_{ij} von a. □

4.55. Bemerkung. Man vergleiche die Spin-Bedingung mit Orientierbarkeit: nach Aufgabe 2 von Blatt 6 ist M genau dann orientierbar, wenn $w_1(TM) = 0 \in H^1(M; \mathbb Z/2\mathbb Z)$. Zwei verschiedene Orientierungen unterscheiden sich um ein Vorzeichen pro Zusammenhangskomponente von M, also genau um ein Element aus $H^0(M; \mathbb Z/2\mathbb Z)$. Also ist „Spin“ so etwas wie „höhere Orientierbarkeit“.

Hätten wir in Bemerkung 4.53 und Satz 4.54 auch $h'_{ij} \neq 1$ und $\vartheta'_i \neq 0$ erlaubt, so hätten wir die etwas allgemeinere Spin^c-Bedingung erhalten. Spin^c-Strukturen existieren, falls es eine ganzzahlige Klasse $c \in H^2(M; \mathbb Z)$ gibt, die modulo 2 mit $w_2(TM)$ übereinstimmt. Das ist genau dann der Fall, wenn die sogenannte ganzzahlige Stiefel-Whitney-Klasse $W_3(TM) = 0 \in H^3(M; \mathbb Z/2\mathbb Z)$ verschwindet. Je zwei verschiedene Spin^c-Spinorbündel unterscheiden sich um ein Element aus $H^2(M; \mathbb Z)$.

4.56. Bemerkung. Es sei (M, g) eine Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit und $\Sigma M \to M$ ein Spinorbündel. Sei weiterhin (V, g^V, ∇^V) ein Hermitesches Vektorbündel über M, dann ist

$$\Big(\Sigma M \otimes V, g^{\Sigma M \otimes V}, \nabla^{\Sigma M \otimes V}, c \otimes \mathrm{id}_V\Big)$$

ein komplexes Dirac Bündel über M, wobei $g^{\Sigma M \otimes V}$ und $\nabla^{\Sigma M \otimes V}$ in Proposition 4.19 definiert sind und

$$c \otimes \mathrm{id}_V \colon \mathbb{C}\ell(TM, g) \to \mathrm{End}(\Sigma M \otimes V) \qquad \text{mit} \qquad X \mapsto c(X) \otimes \mathrm{id}_V = c_X \otimes \mathrm{id}_V$$

durch $(c(X) \otimes \mathrm{id}_V)(\varphi \otimes \psi) = c(X)(\varphi) \otimes \psi = (c_X \varphi) \otimes \psi$. Der zugehörige Dirac-Operator

$$D \colon \Gamma(\Sigma M \otimes V) \to \Gamma(\Sigma M \otimes V)$$

heißt *getwisteter Dirac-Operator*. Für das triviale Bündel $V = M \times \mathbb C$ nennt man $D \colon \Gamma(\Sigma M) \to \Gamma(\Sigma M)$ entsprechend einen *ungetwisteten Dirac-Operator* beziehungsweise *spin-Dirac-Operator*.

Die Twistkrümmung des Dirac-Bündels $(\Sigma M \otimes V, g^{\Sigma M \otimes V}, \nabla^{\Sigma M \otimes V}, c \otimes \mathrm{id}_V)$ ist gegeben durch

$$F^{\Sigma M \otimes V/S}_{X,Y}(\varphi \otimes \psi) = \varphi \otimes (F^V_{X,Y}\psi)$$

$\forall\, X, Y \in \mathfrak X(M)$, $\varphi \in \Gamma(\Sigma M)$, $\psi \in \Gamma(V)$.

4.57. Bemerkung. Nach Proposition 4.51 und den Betrachtungen von oben gilt für jedes Spinorbündel (bzw. Spin^c-Bündel) ΣM, falls $\dim M = 2k$

$$\Sigma M \otimes (\Sigma M)^* = \mathrm{End}(\Sigma M) \cong \mathbb{C}\ell(TM, g) \ .$$

Hier benutzen wir, dass sich TM bzw. $\mathbb{C}\ell(TM, g)$ auch mit Hilfe der Übergangsmatrizen $\tilde g_{ij}$ beschreiben lassen. Das getwistete Dirac-Bündel $\Sigma M \otimes (\Sigma M)^*$ entspricht unter dem Isomorphismus $\Sigma M \otimes \Sigma M^* \to \mathbb{C}\ell(TM, g)$ der Dirac-Bündel-Struktur aus Beispiel 4.41 (1) auf $\mathbb{C}\ell(TM, g) \cong \Lambda^\bullet TM$, die durch Multiplikation von links gegeben wird:

$$\Phi \colon \mathbb{C}\ell(TM, g) \to \mathrm{End}(\mathbb{C}\ell(TM, g)), \qquad \sigma \to \Phi(\sigma), \qquad \Phi(\sigma)(\tau) = \sigma \cdot \tau \ .$$

KAPITEL 5

Der Atiyah-Singer-Indexsatz

In diesem Kapitel betrachten wir analytische Eigenschaften von Dirac-Operatoren und definieren insbesondere ihren Fredholm-Index. Außerdem beweisen wir den Satz von Hodge und zeigen, dass Eulercharakteristik und Signatur Indizes von Dirac-Operatoren sind. Schließlich beweisen wir den Indexsatz von Atiyah und Singer mit der Wärmeleitungsmethode nach Gilkey, Patodi und Getzler.

5.1. Sobolev-Räume und Spektrum

Wir führen Sobolev-Räume ein und beweisen elliptische Abschätzungen für Dirac-Operatoren. Dabei setzen wir einige wichtige Sätze aus der Analysis auf Mannigfaltigkeiten voraus. Wir benutzen diese Techniken, um zu zeigen, dass Dirac-Operatoren auf kompakten Mannigfaltigkeiten nur Punktspektrum besitzen, und eine kompakte Beinahe-Umkehrung besitzen. Wir folgen grob dem Buch [**B**].

5.1. Definition. Ein Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ heißt *Hilbert-Raum*, wenn er bezüglich der durch die Norm $\|v\|_V = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ induzierten metrischen Topologie vollständig ist. Eine Folge $(v_i)_i$ in einem Hilbert-Raum V *konvergiert stark* gegen $v \in V$, kurz $v_i \to v$, wenn $\|v_i - v\| \to 0$. Sie *konvergiert schwach* gegen v, kurz $v_i \rightharpoonup v$, wenn $\langle v_i, w\rangle \to \langle v, w\rangle$ für alle $w \in V$.

Eine Abbildung $A\colon V \to W$ zwischen Hilbert-Räumen heißt *stetig* oder *beschränkt*, wenn es ein $C > 0$ mit $\|A\|\,v_W \le C \cdot \|v\|_V$ für alle $v \in V$ gibt. Sie heißt *kompakt*, wenn das Bild

$$\{Av \mid v \in V, \|v\| \le 1\} \subset W$$

der Einheitskugel von V in W *präkompakt* ist, das heißt, kompakten Abschluss besitzt.

5.2. Bemerkung. Es seien V und W Hilbert-Räume.

(1) Da Hilbert-Räume metrische Räume sind, sind die Begriffe kompakt und folgenkompakt (im Sinne starker Konvergenz) äquivalent. Die Einheitskugel von V ist genau dann kompakt, wenn V endlich-dimensional ist. Denn wäre V unendlich-dimensional, so gäbe es eine Folge paarweise senkrechter Einheitsvektoren $v_i \in V$, die nicht konvergiert.
(2) Folglich ist $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ genau dann kompakt, wenn $\dim V < \infty$.
(3) Betrachtet man Elemente $v \in V$ als Funktionen auf der Einheitskugel mit $w \mapsto \langle v, w\rangle$, so entspricht schwache Konvergenz der punktweisen Konvergenz und starke Konvergenz der gleichmäßigen Konvergenz. Aus starker Konvergenz folgt daher stets schwache Konvergenz, die Umkehrung gilt aber nicht allgemein.
(4) Die Einheitskugel von V ist stets *schwach* (*folgen-*) *kompakt*. Sei also $(v_i)_i$ eine beschränkte Folge in V, das heißt, es gibt ein $C \ge 0$ mit $\|v\|_i \le C$ für alle i, dann existiert immer eine schwach konvergente Teilfolge.
(5) Sei $A\colon V \to W$ stetig und $(v_i)_i$ eine stark (beziehungsweise schwach) konvergente Folge mit Grenzwert v. Dann konvergiert $(Av_i)_i$ in W ebenfalls stark (beziehungsweise schwach) gegen Av.
(6) Wenn $A\colon V \to W$ kompakt und $(v_i)_i$ eine beschränkte Folge ist, dann besitzt $(Av_i)_i$ eine in W stark konvergente Teilfolge.

5.3. Definition. Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇ und $V \to M$ ein Vekorbündel mit Metrik g^V und Zusammenhang ∇^V. Dann definieren wir die *k-te kovariante Ableitung*

$$\nabla^{V,k} \colon \Gamma(V) \to \Gamma(\underbrace{(T^*M) \otimes \cdots \otimes (T^*M)}_{k \text{ Faktoren}} \otimes V) = \Gamma((T^*M)^{\otimes k} \otimes V)$$

als Hintereinanderschaltung

$$\Gamma(V) \xrightarrow{\nabla^V} \Gamma((T^*M) \otimes V) \xrightarrow{\nabla^{T^*M \otimes V}} \dots \xrightarrow{\nabla^{(T^*M)^{\otimes(k-1)} \otimes V}} \Gamma((T^*M)^{\otimes k} \otimes V) \ .$$

Dann ist der *k-te Sovolev-Raum* $W^k(M; V) = W^{k,2}(M; V)$ die Vervollständigung des Raumes $\Gamma(V)$ der glatten Schnitte von V bezüglich der Norm zum Skalarprodukt

$$\langle \sigma, \tau \rangle_k = \sum_{j=0}^{k} \int_M g^{(T^*M)^{\otimes j} \otimes V}(\nabla^{V,j}\sigma, \nabla^{V,j}\tau) \, d\mathrm{vol}_g \ .$$

Wir schreiben $\|\cdot\|_k$ für die induzierte *Sovolev-k-Norm* auf $W^k(M; V)$ und schreiben auch $L^2(M; V)$ für $W^0(M; V)$.

Beispielsweise gilt $(\nabla^{V,2}\sigma)(X, Y) = \nabla^V_X \nabla^V_Y \sigma - \nabla^V_{\nabla_X Y}\sigma$. Für eine lokale Orthonormalbasis von $TM|_U$ und σ, $\tau \in \Gamma(V)$ mit $\operatorname{supp} \sigma \in U$ lässt sich das Sobolev-1-Skalarprodukt schreiben als

$$\langle \sigma, \tau \rangle_1 = \int_M (g^V(\sigma, \tau)_x + \sum_{j=1}^{n} g^V(\nabla_{e_j}\sigma, \nabla_{e_j}\tau)_x) \, d\mathrm{vol}_g(x) \ .$$

5.4. Bemerkung. Für alle $\sigma \in \Gamma(V)$, alle $\tau \in \Gamma(V)$ mit kompaktem Träger und alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$\operatorname{div}(\langle \sigma, \tau \rangle_V \cdot X) = X\langle \sigma, \tau \rangle_V + \langle \sigma, \tau \rangle_V \operatorname{div} X = \langle \nabla^V_X \sigma, \tau \rangle_V + \langle \sigma, \nabla^V_X \tau \rangle_V + \langle \sigma, \operatorname{div} X \cdot \tau \rangle_V \ ,$$

nach dem Divergenzsatz von Gauß also

$$\langle \nabla^V \sigma, \tau \rangle_{L^2} = \int_M \operatorname{div}(\langle \sigma, \tau \rangle_V \cdot X) \, d\mathrm{vol}_g - \langle \sigma, \nabla^V_X \tau + \operatorname{div} X \cdot \tau \rangle_{L^2} = -\langle \sigma, \nabla^V_X \tau + \operatorname{div} X \cdot \tau \rangle_{L^2} \ .$$

Wir nennen daher $\sigma \in L^2(M; V)$ *schwach (kovariant) differenzierbar* mit *schwacher (kovarianter) Ableitung* $\alpha \in L^2(M; T^*M \otimes V)$, wenn für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ und alle $\tau \in \Gamma(V)$ mit kompaktem Träger gilt

$$\langle \alpha, X \otimes \tau \rangle_{L^2} = -\langle \sigma, \nabla^V_X \tau + \operatorname{div} X \cdot \tau \rangle_{L^2} \ .$$

Höhere schwache kovariante Ableitungen in $L^2(M; (T^*M)^{\otimes k} \otimes V)$ werden analog definiert.

Zum Beispiel ist der Absolutbetrag auf $\mathbb{R}$ schwach differenzierbar, und seine schwache Ableitung ist die Vorzeichenfunktion sign. Die Vorzeichenfunktion hat keine schwache Ableitung bei 0.

5.5. Bemerkung. Wir zitieren drei wichtige Sätze über Sovolev-Räume.

(1) *Satz von Meyers-Serrin:* Es sei (M, g) vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann ist $W^k(M; V) \subset L^2(M; V)$ die Teilmenge der L^2-Schnitte, die schwache j-te Ableitungen in L^2 für alle $j \leq k$ besitzen.
(2) *Satz von Rellich-Kondrachov:* Es sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $j < k$, dann ist die Inklusionsabbildung $W^k(M; V) \to W^j(M, V)$ kompakt.
(3) *Satz von Sobolev:* Sei (M, g) eine n-dimensionale kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $k > \frac{u}{2} + j$. Dann existiert zu jedem $\sigma \in W^k(M; V)$ ein j-fach differenzierbarer Schnitt von V, der fast überall mit σ übereinstimmt, und man erhält eine stetige Einbettung $W^k(M; V) \to \mathcal{C}^j(M; V)$.

Der Dirac-Operator D auf den Schnitten eines Dirac-Bündels (V, g^V, ∇^V, c) über einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M ist mithilfe der kovarianten Ableitungen ∇^V definiert. Wenn wir diese durch schwache kovariante Ableitungen ersetzen, erhalten wir einen neuen Operator $W^1(M;V) \to W^0(M;V)$, den wir wieder mit D bezeichnen. Es existiert eine Konstante C, so dass lokal

$$\|D\sigma\|_0^2 \leq \sum_{i=1}^n \left\|c_{e_i} \nabla^V_{e_i} \sigma\right\|_0^2 \leq C \cdot \|\sigma\|_1^2 \ .$$

Mithilfe einer Partition der Eins folgt global

$$\|D\sigma\|_0^2 \leq C \cdot \|\sigma\|_1^2 \qquad \text{für alle } \sigma \in W^1(M;V)$$

und $D\colon W^1(M;V) \to W^0(M;V)$ ist stetig. Analog existieren Konstanten C_k, so dass

$$\|D\sigma\|_k^2 \leq C_k \, \|\sigma\|_{k+1}^2 \qquad \text{für alle } \sigma \in W^{k+1}(M;V) \ .$$

Dirac-Operatoren sind *elliptisch*, und daraus folgt, dass alle obigen Ungleichungen in gewissem Sinne umkehrbar sind.

5.6. Satz. *Es sei (M,g) kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und (V, g^V, ∇^V, c) ein Dirac-Bündel über M mit Dirac-Operator D.*

(1) Gårding-Ungleichung. *Es existiert $C > 0$, so dass für alle $\sigma \in W^1(M;V)$ gilt:*

$$\|\sigma\|_1^2 \leq \|D\sigma\|_0^2 + C \, \|\sigma\|_0^2 \ .$$

(2) Elliptische Abschätzung. *Für alle $k \geq 1$ existiert $C_k > 0$, so dass*

$$\|\sigma\|_k^2 \leq C_k \cdot \sum_{j=0}^k \left\|D^k \sigma\right\|_0^2 \ .$$

Beweis. Wir erinnern uns an die Bochner-Lichnerovicz-Weitzenböck-Formel

$$D^2 = \nabla^V + \frac{1}{2} \sum_{i,j} c_{e_i} c_{e_j} F^V_{e_i,e_j}$$

aus Satz 4.44. In Übung 4 von Blatt 7 haben wir gesehen, dass

$$\langle \Delta^V \sigma, \tau \rangle_{L^2(M;V)} = \langle \nabla\sigma, \nabla\tau \rangle_{L^2(M;T^*M \otimes V)} \ ,$$

so dass

$$\begin{aligned} \|\sigma\|_1^2 &= \langle \nabla\sigma, \nabla\sigma \rangle L^2 + \langle \sigma, \sigma \rangle_{L^2} = \langle \Delta^V \sigma + \sigma, \sigma \rangle_{L^2} \\ &= \|D\sigma\|_0^2 + \left\langle \sigma - \frac{1}{2} \sum_{i,j} c_{e_i,e_j} F^V_{e_i,e_j} \sigma, \sigma \right\rangle_{L^2} . \end{aligned}$$

Da V endlichen Rang hat und da M kompakt ist, existiert eine Konstante C, so dass

$$\left\langle v - \frac{1}{2} \sum_{i,j} c_{e_i,e_j} F^V_{e_i,e_j} v, v \right\rangle \leq C \, \|v\|^2$$

für alle $v \in V$. Insgesamt folgt (1) aus

$$\|\sigma\|_1^2 = \|D\sigma\|_0^2 + \left\langle \sigma - \frac{1}{2} \sum_{i,j} c_{e_i,e_j} F^V_{e_i,e_j} \sigma, \sigma \right\rangle_{L^2} \leq \|D\sigma\|_0^2 + C \, \|\sigma\|_0^2 \ .$$

Die Aussage (2) beweist man durch Induktion über k, indem man geeignete Ableitungen der Bochner-Lichnerowicz-Weitzenböck-Formel benutzt (Übung). □

5.7. Bemerkung. Betrachtet man die Gårding-Ungleichung zusammen mit den Ungleichungen $\|D\sigma\|_k \le \|\sigma\|_{k+1}$, so sieht man, dass die Sobolev-k-Norm äquivalent zu der vom Skalarprodukt

$$(\sigma,\tau) \mapsto \sum_{j=0}^{k} \langle D^j\sigma, D^j\tau\rangle_{L^2}$$

induzierten Norm ist. Wir dürfen also schwache und starke Konvergenz in $W^k(M;V)$ äquivalent mit Hilfe des obigen Skalarproduktes und der obigen Norm entscheiden. Dadurch werden im Folgenden manche Argumente etwas einfacher.

Außerdem zeigt die Gårding-Ungleichung, dass $W^1(W;M) \subset L^2(W;M)$ ein natürlicher Definitionsbereich für den Operator D ist, denn $W^1(W;M)$ besteht genau aus den Elementen $\sigma \in L^2(W;M)$, für die $\|D\sigma\|_0 < \infty$.

5.8. Proposition. *Es sei (V, g^V, ∇^V, c) ein Dirac-Bündel mit Dirac-Operator D, dann ist D formal selbstadjungiert, das heißt, es gilt*

$$\langle D\sigma,\tau\rangle_{L^2} = \langle\sigma, D\tau\rangle_{L^2} \qquad \textit{für alle } \sigma,\tau \in W^1(M;V)\ .$$

Beweis. Da wir $W^1(M;V)$ als Abschluss der glatten Schnitte unter $\|\cdot\|_1$ definiert hatten, reicht es, diese Aussage nur für $\sigma,\tau \in \Gamma(V)$ zu zeigen. Wir betrachten das Vektorfeld X, das lokal durch

$$X = \sum_{i=1}^{n} \langle c_{e_i}\sigma,\tau\rangle \cdot e_i$$

bezüglich einer Orthonormalbasis (e_i) von $TM|_U$ dargestellt wird. Dann gilt

$$\operatorname{div} X = \langle D\sigma,\tau\rangle - \langle\sigma, D\tau\rangle\ ,$$

siehe Übung 4 von Blatt 9. Dann folgt die Behauptung aus dem Divergenzsatz. □

5.9. Bemerkung. In Analogie zu den schwachen Ableitungen aus Bemerkung 5.4 sagen wir, dass $\sigma \in L^2(M;V)$ die Gleichung $D\sigma = \tau$ *schwach löst*, wenn

$$\langle\sigma, D\varphi\rangle = \langle\tau,\varphi\rangle \qquad \text{für alle } \varphi \in W^1(M;V)\ .$$

Da $\Gamma(V)$ in $W^1(M;V)$ dicht liegt, reicht es sogar, diese Gleichung nur für alle $\varphi \in \Gamma(V)$ zu überprüfen. Indem man die Ableitungen in D in geeigneter Weise durch Differenzenquotienten ersetzt, kann man aus obiger Gleichung und der Gårding-Ungleichung 5.6 (1) $\sigma \in W^1(M;V)$ mit $D\sigma = \tau$ folgern (*Innere Regularität*). Falls $\tau \in W^k(M;V)$, liefert die elliptische Abschätzung 5.6 (2) sogar $\sigma \in W^{k+1}(M;V)$.

5.10. Satz. *Es sei (V, g^V, ∇^V, c) ein Dirac-Bündel über einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) mit Dirac-Operator D. Zu $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $E_\lambda \subset W^1(M;V)$ der Eigenraum von D zum Eigenwert λ und*

$$\operatorname{Spec}(D) = \{\lambda \in D \mid E_\lambda \neq 0\}\ .$$

Dann sind alle E_λ endlich-dimensional, und für alle $C > 0$ gilt $\#(\operatorname{Spec}(D) \cap [-C,C]) < \infty$. Jeder Eigenvektor $\sigma \in E_\lambda$ wird durch einen glatten Schnitt repräsentiert, also gilt $E_\lambda \subset \Gamma(V)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander, und $L^2(M;V)$ ist der L^2-Abschluss der direkten Summe aller Eigenräume.

In der Sprache der Funktionalanalysis heißt das, dass D ein reines Punktspektrum besitzt, gegeben durch die obige Menge $\operatorname{Spec}(D)$.

Beweis. Wir beweisen einen analogen Satz für D^2, wonach es Zahlen $0 = \mu_0 < \mu_1 < \dots$ mit $\lim_{i\to\infty} \mu_i = \infty$ gibt, so dass die μ_i genau die Eigenwerte von D^2 sind, die Eigenräume E'_μ aus glatten Funktionen bestehen mit $\dim E'_\mu < \infty$, und $L^2(M;V)$ der Abschluss der direkten Summe aller E'_μ ist. Daraus folgt der Satz mit Methoden aus der linearen Algebra.

Da D mit D^2 auf $\Gamma(V)$ vertauscht, operiert D insbesondere auf jedem Eigenraum E'_μ von D^2, und zwar als selbstadjungierter Endomorphismus. Also zerfällt E'_μ vollständig in D-Eigenräume, und wegen $D^2|_{E'_\mu} = \mu \cdot \mathrm{id}_{E'_\mu}$ kommen als Eigenwerte von $D|_{E'_\mu}$ nur $\lambda = \sqrt{\mu}$ und $-\lambda$ in Frage. Jetzt lassen sich alle weiteren Aussagen aus den entsprechenden Aussagen über die Eigenwerte und Eigenräume von D^2 ableiten.

Nun also zu D^2. Für $\sigma \in W^1(M;V)\backslash\{0\}$ definieren wir den *Rayleigh-Ritz-Quotienten*

$$R(\sigma) = \frac{\|D\sigma\|_0^2}{\|\sigma\|_0^2} \in [0,\infty)$$

und setzen

$$\mu = \inf\{R(\sigma) \mid \sigma \in W^1(M;V)\backslash\{0\} \ .$$

Sei jetzt $(\sigma_i)_i$ eine Folge in $W^1(M;V)\backslash\{0\}$ mit

$$\lim_{i\to\infty} R(\sigma_i) = \mu \ .$$

Da R homogen ist, dürfen wir $\|\sigma_i\|_0 = 1$ annehmen, und da $\Gamma(V)$ direkt in $W^1(M;V)$ liegt, auch $\sigma_i \in \Gamma(V)$.

Nach Bemerkung 5.2 (4) existiert eine Teilfolge, die in $W^1(M;V)$ schwach gegen σ konvergiert. Nach Bemerkung 5.5 (2) ist die Abbildung $W^1(M;V) \to L^2(M;V)$ kompakt, also konvergiert eine Teilfolge der obigen stark in $L^2(M;V)$ gegen τ. Wir bezeichnen diese Teilfolge nach wie vor mit $(\sigma_i)_i$. Da die Inklusion $W^1(M;V) \to L^2(M;V)$ stetig ist, konvergiert v_i auch in $L^2(M;V)$ schwach gegen v, und es folgt $\sigma = \tau$. Somit gilt $\sigma_i \rightharpoonup \sigma$ in $W^1(M;V)$ und $\sigma_i \to \sigma$ in $L^2(M;V)$.

Für die folgenden Schnitte benutzen wir auf $W^1(M;V)$ die Norm $\|\cdot\|'_1$ aus Bemerkung 5.7 mit

$$\|v\|_1'^2 = \|Dv\|_0^2 + \|v\|_0^2 = (R(v)+1)\,\|v\|_0^2 \qquad \text{für alle } v \in W^1(M;V)\backslash\{0\} \ .$$

Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der schwachen Konvergenz in $W^1(M;V)$ folgt

$$\|\sigma_i\|'_1 \cdot \|\sigma\|'_1 \geq \langle D\sigma_i, D\sigma\rangle_{L^2} + \langle \sigma_i, \sigma\rangle_{L^2} \to \|\sigma\|_1'^2$$

und wegen $\sigma_i \to \sigma$ in $L^2(M;V)$ auch $\|\sigma\|_0 = \|\sigma_i\|_0 = 1$, also

$$R(\sigma) + 1 = \|\sigma\|_1'^2 \leq \lim_{i\to\infty} \|\sigma_i\|_1'^2 = \lim_{i\to\infty} R(\sigma_i) + 1 = \mu + 1 \ .$$

Wir betrachten jetzt die Teilmenge

$$E' = \{\sigma \in W^1(M;V) \mid \|D\sigma\|_0^2 = \mu \cdot \|\sigma\|_0^2\} \supsetneqq \{0\} \ .$$

Sei $\sigma \in E'\backslash\{0\}$ und $\tau \in W^1(M;V)$ beliebig. Dann folgt aus der Minimalität von $R(\sigma)$, dass

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} R(\sigma + t\tau) &= 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\langle D\sigma, D\tau\rangle_{L^2}\,\|\sigma\|_0^2 - \|D\sigma\|_0^2\,\langle\sigma,\tau\rangle}{\|\sigma\|_0^4} \\ &= 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\langle D\sigma, D\tau\rangle_{L^2} - \mu\langle\sigma,\tau\rangle_{L^2}}{\|\sigma\|_0^2} \ . \end{aligned}$$

Da D komplex linear ist, liefert Einsetzen von $i\tau$ für τ die analoge Gleichung für den Imaginärteil. Insbesondere erfüllt σ die schwache Eigenwertgleichung

$$\langle D\sigma, D\tau\rangle_{L^2} = \mu\langle\sigma,\tau\rangle_{L^2} \qquad \text{für alle } \tau \in W^1(M;V) \ .$$

Einsetzen von $\tau = \sigma$ zeigt, dass

$$E' = \left\{ \sigma \in W^1(M;V) \;\middle|\; \langle D\sigma, D\tau\rangle_{L^2} = \mu\langle\sigma,\tau\rangle_{L^2} \text{ für alle } \tau \in W^1(M;V) \right\} .$$

Also ist E' genau der schwache μ-Eigenraum von D^2.

Somit ist $E' \subset W^1(M;V)$ ein linearer Unterraum. Da die Sobolev-1-Norm auf E' zur Sobolev-0-Norm äquivalent ist, ist nach dem Satz von Rellich-Kondrachov aus Bemerkung 5.5 (2) die Identität

$$\mathrm{id}_{E'}\colon (E', \|\cdot\|_1) \to (E', \|\cdot\|_0) \to (E', \|\cdot\|_1)$$

kompakt, nach Bemerkung 5.2 (2) also E' endlich-dimensional.

Aus der „inneren Regularität“ aus Bemerkung 5.9 folgt für $\sigma \in E'$ zunächst $\sigma \in W^2(M;V)$ mit $D^2\sigma = \mu\sigma$. Induktiv schließen wir aus $D^2\sigma = \mu\sigma \in W^{2k}(M;V)$ mit der elliptischen Abschätzung aus Satz 5.6 (2), dass $\sigma \in W^{2k+2}(M;V)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, und erhalten aus dem Satz von Sobolev aus Bemerkung 5.5 (3) die Glattheit von σ.

Die weiteren Eigenräume von D^2 werden induktiv bestimmt. Seien etwa $\mu_1, \dots, \mu_\ell$ bereits bekannt und seien $E'_{\mu_1}, \dots, E'_{\mu_\ell} \subset \Gamma(V)$ die zugehörigen Eigenräume, und $(E'_{\mu_1} \oplus \dots \oplus E'_{\mu_\ell})^\perp$ das L^2-orthogonale Komplement in $L^2(M;V)$, so lässt sich D^2 als selbstadjungierter Operator einschränken zu

$$D^2\colon W^1(M;V) \cap (E'_{\mu_1} \oplus \dots \oplus E'_{\mu_\ell})^\perp \to (E'_{\mu_1} \oplus \dots \oplus E'_{\mu_\ell})^\perp .$$

Wir wenden nun das obige Verfahren auf diese Unterräume an und erhalten ein neues Minimum $\mu = \mu_{\ell+1}$ des Rayleigh-Ritz-Quotienten und einen zugehörigen Eigenraum $E' = E'_{\mu_{\ell+1}}$. Nach Konstruktion folgt $\mu_{\ell+1} > \mu_\ell$.

Falls die Folge $(\mu_\ell)_\ell$ beschränkt ist, erhalten wir einen unendlich-dimensionalen Unterraum

$$E' = \bigoplus_{\ell=1}^{\infty} E'_{\mu_\ell} \subset \Gamma(V) \subset W^1(M;V) ,$$

auf dem $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_0$ äquivalent sind, im Widerspruch zur Kompaktheit der Inklusionsabbildung $(E', \|\cdot\|_1) \to (E', \|\cdot\|_0)$. Also konvergiert μ_ℓ gegen ∞, und $\operatorname{Spec} D^2 \cap [-C, C]$ ist endlich für alle $C > 0$.

Falls schließlich der L^2-Abschluss von $E' \subset \Gamma(V)$ nicht ganz $L^2(M;V)$ ist, so folgt aus der Dichtheit von $W^1(M;V)$ in $L^2(M;V)$ die Existenz eines $\sigma \in W^1(M;V)\setminus\{0\}$ mit $\sigma \perp E'_{\mu_\ell}$ für alle ℓ. Insbesondere ist $R(\sigma) < \infty$, also $R(\sigma) < \mu_\ell$ für ℓ hinreichend groß, im Widerspruch zur Wahl von μ_ℓ.

Damit sind alle Behauptungen im Satz für D^2 — und nach Vorüberlegung auch für D — bewiesen. ☐

5.11. Folgerung. *Es sei $D\colon W^1(M;V) \to L^2(M;V)$ Dirac-Operator aus Satz 5.10, dann gilt:*

(1) *der Kern* $\ker D$ *ist endlich-dimensional;*
(2) *das Bild* $\operatorname{im} D$ *ist abgeschlossen in $L^2(M;V)$;*
(3) *es gilt* $\ker D \oplus \operatorname{im} D = L^2(M;V)$ *mit* $\ker D \perp \operatorname{im} D$*;*
(4) *Sei $P\colon L^2(M;V) \to \Gamma(V) \subset L^2(M;V)$ die L^2-orthogonale Projektion auf* $\ker D$ *und der Green-Operator G als stetige lineare Abbildung definiert durch*

$$G(\sigma) = \begin{cases} 0 & \sigma \in E_0 , \\ \frac{\sigma}{\lambda} & \sigma \in E_\lambda \text{ mit } \lambda \neq 0 , \end{cases}$$

dann gilt

$$D \circ G + P = \mathrm{id}_{L^2(M;V)} \qquad \text{und} \qquad G \circ D + P = \mathrm{id}_{W^1(M;V)} .$$

Insbesondere ist der Green-Operator G ein „Beinahe-Inverses“ von D, und G ist als Endomorphismus von $L^2(M;V)$ kompakt wegen des Satzes von Rellich-Kondrachov, siehe Bemerkung 5.5 (2).

Beweis. Punkt (1) folgt unmittelbar aus Satz 5.10. Für (2) und (3) benutzen wir (4). Nach Satz 5.10 können wir $\sigma \in L^2(M;V)$ zerlegen als Reihe

$$\sigma = \sum_{\lambda \in \operatorname{Spec} D} \sigma_\lambda \qquad \text{mit} \qquad \sigma_\lambda \in E_\lambda ,$$

so dass

$$\|\sigma\|_0^2 = \sum_{\lambda \in \operatorname{Spec} D} \|\sigma_\lambda\|_0^2 < \infty .$$

Dann sind P und G definiert durch

$$P\sigma = \sigma_0 \qquad \text{und} \qquad G\sigma = \sum_{\lambda \in \operatorname{Spec} D \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda} \sigma .$$

Also gilt $(P + DG)(\sigma) = \sigma$ für alle $\sigma \in L^2(M;V)$. Es sei jetzt

$$c = \min\bigl\{ |\lambda| \bigm| \lambda \in \operatorname{Spec} D \setminus \{0\} \bigr\} > 0 ,$$

dann folgt

$$\|G\sigma\|_1^2 = \|DG\sigma\|_0^2 + \|G\sigma\|_0^2 = \sum_{\lambda \in \operatorname{Spec} D \setminus \{0\}} \left(\|\sigma_\lambda\|_0^2 + \frac{1}{\lambda^2} \|\sigma_\lambda\|_0^2 \right) \le \left(1 + \frac{1}{c^2} \right) \|\sigma\|_0^2 ,$$

also ist $G\colon L^2(M,V) \to W^1(M,V)$ stetig, und es folgt auch $P + GD = \mathrm{id}$ auf $W^1(M,V)$.

Sei jetzt $(\sigma_i)_i$ eine Folge in $W^1(M;V)$, so dass $D\sigma_i \to \tau$ in $L^2(M,V)$. Wir ersetzen σ_i durch $\sigma_i' = \sigma_i - P\sigma_i$, so dass

$$D\sigma_i' = D\sigma_i - DP\sigma_i = D\sigma_i \qquad \text{und} \qquad \sigma_i' = GD\sigma_i .$$

Da $G\colon L^2(M;V) \to W^1(M;V)$ stetig ist, konvergiert $\sigma_i' = GD\sigma_i \to \sigma = G\tau$. Da $D\colon W^1(M;V) \to L^2(M;V)$ stetig ist, folgt $\tau = D\sigma \in \operatorname{im} D$. Also ist $\operatorname{im} D$ abgeschlossen.

Zu (3) bemerken wir, dass für alle $\sigma \in \ker D \subset \Gamma(V)$ und alle $D\tau \in \operatorname{im} D$ wegen Proposition 5.8 gerade

$$\langle \sigma, D\tau \rangle_{L^2} = \langle D\sigma, \tau \rangle_{L^2} = 0$$

gilt, also $\ker D \perp \operatorname{im} D$. Wir zerlegen ein beliebiges $\sigma \in L^2(M;V)$ als

$$\sigma = P\sigma + DG\sigma \in \ker D \oplus \operatorname{im} D ,$$

und erhalten daher $L^2(M;V) = \ker D \oplus \operatorname{im} D$. □

Es sei jetzt $D = d + \delta\colon W^1(M;\Lambda^\bullet TM) \to L^2(M;\Lambda^\bullet TM)$ der Hodge-Dirac-Operator aus Definition 4.33. Da $\operatorname{im} d \perp \operatorname{im} \delta$ nach Bemerkung 4.34 (2), folgt

$$\operatorname{im} D = \operatorname{im} d \oplus \operatorname{im} \delta .$$

Damit erhalten wir schließlich

5.12. Satz (Hodge). *Es sei (M,g) kompakt und $D = d + \delta$ der Hodge-Dirac-Operator. Dann gilt:*

(1) *die Räume* $\operatorname{im} d$ *und* $\operatorname{im} \delta \subset L^2(M;\Lambda^\bullet TM)$ *sind abgeschlossen, und es gilt*

$$\ker D \oplus \operatorname{im} d \oplus \operatorname{im} \delta = L^2(M;\Lambda^\bullet TM) ;$$

(2) *die natürliche Abbildung* $\ker D \to H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M)$ *ist ein Isomorphismus, also ist* $H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M)$ *insbesondere endlichdimensional, und jede Klasse* $a \in H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M)$ *wird durch eine eindeutige glatte, harmonische Form* $\alpha \in \ker D$ *repräsentiert.*

Beweis. Aussage (1) folgt dicht aus Folgerung 5.11. In (2) betrachten wir die Abbildung

$$\ker D \longrightarrow \ker D \oplus \operatorname{im} d = \ker d \longrightarrow \ker d / \operatorname{im} d = H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M) \ .$$

Da $d^2 = \delta^2 = 0$, werden die Operatoren D und G auf $\ker D \oplus \operatorname{im} d \oplus \operatorname{im} \delta$ als Blockmatrizen gegeben durch

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & d \\ & \delta & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \delta^{-1} \\ & d^{-1} & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Wir erhalten eine Umkehrung der Abbildung $\ker D \to H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M)$, indem wir $[\alpha] \in H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M)$ mit $\alpha \in \ker d$ abbilden auf

$$P\alpha = \alpha - DG\alpha = \alpha - dG\alpha \ ,$$

so dass $[P\alpha] = [\alpha]$ und $P\alpha \in \Omega^\bullet(M)$ harmonisch ist. □

Wir schreiben im Folgenden $\mathcal{H}^k(M, g) = \ker D \cap \Omega^k(M) \cong H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ für den Raum der harmonischen Formen vom Grad k.

5.2. Analytischer und Kohomologischer Index

Wir benutzen die Ergebnisse aus dem letzten Abschnitt, um Kern, Kokern und Index von Dirac-Operatoren zu studieren. Dabei betrachten wir insbesondere das Beispiel des Hodge-Dirac-Operators D aus Abschnitt 4.4.

5.13. Definition. Ein *Fredholm-Operator* ist eine stetige lineare Abbildung $A \colon V \to W$ zwischen Hilbert-Räumen V, W, so dass $\operatorname{im} A \subset W$ abgeschlossen ist und $\ker A$ und $\operatorname{coker} A = W / \operatorname{im} A$ endlich-dimensional sind. Der *Fredholm-Index* von A ist dann definiert als

$$\operatorname{ind} A = \dim \ker A - \dim \operatorname{coker} A \in \mathbb{Z} \ .$$

Nach Folgerung 5.11 liefert jeder Dirac-Operator einen Fredholm Operator $D \colon W^1(M; V) \to L^2(M; V)$ mit

$$\operatorname{coker} D = (\ker D \oplus \operatorname{im} D) / \operatorname{im} D \cong \ker D \ ,$$

also $\operatorname{ind} D = 0$. Wir brauchen also noch etwas mehr Strukturen auf dem Dirac-Bündel V, um einen interessanten Index definieren zu können.

5.14. Definition. Ein *$\mathbb{Z}_2$-graduiertes Dirac-Bündel* ist ein Dirac-Bündel (V, g^V, ∇^V, c) mit einem Endomorphismus $\omega \in \operatorname{End} V$, der g^V-selbstadjungiert und ∇^V-parallel ist, mit $\omega^2 = 1$, so dass ω mit $c(X)$ antikommutiert für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$.

5.15. Bemerkung. Dann hat ω genau die Eigenwerte ± 1, und die Eigenräume $V^\pm$ bilden Vektorbündel über M. Es gilt $V^+ \perp V^-$, und V^+ und V^- sind parallel, da die Projektionen $\frac{1 \pm \omega}{2} \colon V \to V^\pm$ parallel sind. Da $c(X)$ mit ω antikommutiert, folgt

$$C \colon \mathbb{C}\ell^{\mathrm{odd}}(TM) \times V^\pm \to V^\mp \qquad \text{und} \qquad c \colon \mathbb{C}\ell^{\mathrm{ev}}(TM) \times V^\pm \to V^\pm \ .$$

Insbesondere erhalten wir Dirac-Operatoren

$$D^\pm \colon \Gamma(V^\pm) \xrightarrow{\ \nabla\ } \Gamma(T^*M \otimes V^\pm) \xrightarrow{\ g^{-1}\ } \Gamma(TM \otimes V^\pm) \xrightarrow{\ c\ } \Gamma(V^\mp) \ .$$

Nach Folgerung 5.11 sind $D^\pm$ wieder Fredholm-Operatoren mit

$$\ker D^\pm = \ker D \cap \Gamma(V^\pm) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{coker} D^\pm = \Gamma(V^\mp) / \operatorname{im} D^\pm \cong \ker D^\mp \ .$$

5.16. Definition. Sei $(V, g^V, \nabla^V, c, \omega)$ ein $\mathbb{Z}_2$-graduiertes Dirac-Bündel, dann heißt

$$\operatorname{ind} D^+ = \dim \ker D^+ - \dim \operatorname{coker} D^+ = \dim \ker D^+ - \dim \ker D^-$$

der *analytische Index* von D^+.

Wenn kein Anlass zu Missverständnissen besteht, schreiben wir auch einfach $\operatorname{ind} D$.

5.17. Bemerkung. Die Menge der Fredholm-Operatoren ist offen in der Operator-Norm-Topologie, und der Index ist lokal konstant. Das bedeutet, dass sich $\operatorname{ind}(D^+)$ nicht ändert, wenn wir die Riemannsche Metrik g und Metrik g^V, Zusammenhang ∇^V, Clifford-Multiplikation c und den Endomorphismus ω in der Definition von D^+ stetig variieren. Somit ist $\operatorname{ind} D^+$ eine differentialtoplogische, keine geometrische Invariante des betrachteten Operators.

5.18. Beispiel. Wir betrachten drei wichtige Beispiele von $\mathbb{Z}_2$-graduierten Dirac-Bündeln. Es sei stets M orientiert, $n = \dim M$ gerade und $e_1, \dots, e_n$ eine orientierte Orthonormalbasis.

(1) Es sei $\omega = i^{\frac{n}{2}} e_1 \dots e_{2n}$ das komplexe Clifford-Volumenelement aus Proposition 4.51 und Aufgabe 1 von Blatt 9. Dann erfüllt $c(\omega) \in \operatorname{End} V$ alle Bedingungen aus Definition 5.14 für jedes Dirac-Bündel (V, g^V, ∇^V, c) auf (M, g), und wir schreiben D^+ für den zugehörigen Dirac-Operator. Dieses Beispiel ist universell, dennoch betrachten wir noch zwei Spezialfälle.

(2) Es sei $(V, g^V, \nabla^V, c) = (\Lambda^\bullet TM, g^{\Lambda^\bullet TM}, \nabla^{\Lambda^\bullet TM}, c) \cong (\sum \otimes \sum^*, g^{\Sigma \otimes \Sigma^*}, \nabla^{\Sigma \otimes \Sigma^*}, c \otimes \mathrm{id}_{\Sigma^*})$ wie in Bemerkung 4.57. Wir wollen $c(\omega)$ mit dem Hodge-Stern-Operator $\star$ aus Übung 3 von Blatt 7 vergleichen, definiert durch
$$\int_M \alpha \wedge \star\beta = \langle \alpha, \beta \rangle_{L^2(\Lambda^\bullet TM)} \; .$$
Sei dazu $\beta = e^1 \wedge \dots \wedge e^k$, dann gilt
$$\begin{aligned} c(\omega)\beta &= i^{\frac{n}{2}} c(e_1 \dots e_n) e^1 \wedge \dots \wedge e^k \\ &= i^{\frac{n}{2}} \underbrace{(-1)^{k(n-k)} (-1)^k}_{=1 \text{ da } n \text{ gerade}} (\iota_{e_1} \circ \dots \circ \iota_{e_k}) e^1 \wedge \dots \wedge e^k \wedge e^{k+1} \wedge \dots \wedge e^n \\ &= i^{\frac{n}{2}} (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} e^{k+1} \wedge \dots \wedge e^n \; . \end{aligned}$$
Für $\alpha \in \Omega^k(M)$ folgt
$$\alpha \wedge (c(\omega)\beta) = i^{\frac{n}{2}} (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \langle \alpha, \beta \rangle_{\Lambda^\bullet TM} e^1 \wedge \dots \wedge e^n \; ,$$
so dass sich $c(\omega)$ nur um eine Konstante c_k von $\star$ unterscheidet.

Sei nun $n = 4m$, dann gilt im mittleren Grad $k = 2m$, dass
$$c(\omega)|_{\Lambda^{2m} TM} = i^{2m} (-1)^{m(2m-1)} \star|_{\Lambda^{2m} TM} = \star|_{\Lambda^{2m} TM} \; .$$
Für den Hodge-Dirac-Operator $D = d + \delta$ folgt also
$$\begin{aligned} \ker D^+ \cap \Omega^{2m}(M) &= \{ \alpha \in \mathcal{H}^{2m}(u, g) \mid \alpha = \star\alpha \} = \mathcal{H}^{2m,+}(M, g) \; , \\ \operatorname{coker} D^+ \cap \Omega^{2m}(M) &\cong \ker D^- \cap \Omega^{2m}(M) = \{ \alpha \in \mathcal{H}^{2m}(u, g) \mid \alpha = - \star \alpha \} = \mathcal{H}^{2m,-}(u, g) \; . \end{aligned}$$
Für $k \neq 2m$ hingegen vertauscht $c(\omega)$ die Unterbündel $\Lambda^k TM$ und $\Lambda^{n-k} TM$, und wir erhalten Isomorphismen
$$\frac{1 \pm c(\omega)}{2} \colon \mathcal{H}^k(M, g) \to \ker D^\pm \cap (\Omega^k(M) \oplus \Omega^{n-k}(M)) \; .$$
Somit folgt
$$\operatorname{ind} D^+ = \dim \mathcal{H}^{2m,+}(M, g) - \dim \mathcal{H}^{2m,-}(M, g) \; .$$
Man kann diesen Index auch als die Signatur der nicht-ausgearteten Bilinearform
$$(\alpha, \beta) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$$

auf $H^{2m}_{\mathrm{dR}}(M)$ verstehen, der sogenannten *Signatur* $\operatorname{sign}(M)$. Daher heißt D^+ auch *Signatur-Operator.* Man beachte, dass $\operatorname{sign}(M)$ von der Orientierung von M abhängt, aber nicht von der Riemannschen Metrik.

(3) Wir betrachten wieder den Hodge-Dirac-Operator D, wählen als Graduierung aber den Endomorphismus $(-1)^{\deg}$ aus Beispiel 4.41 (2). Anstelle von D^+, D^- schreiben wir D^{ev}, D^{odd}, um Verwechslungen zu vermeiden. Jetzt gilt

$$\begin{aligned}\ker D^{\mathrm{ev}} &= \ker D \cap \Omega^{\mathrm{ev}}(M) = \mathcal{H}^{\mathrm{ev}}(M,g) \cong H^{\mathrm{ev}}_{\mathrm{dR}}(M)\;,\\ \operatorname{coker} D^{\mathrm{ev}} &\cong \ker D^{\mathrm{odd}} = \ker D \cap \Omega^{\mathrm{odd}}(M) = \mathcal{H}^{\mathrm{odd}}(M,g) \cong H^{\mathrm{odd}}_{\mathrm{dR}}(M)\;,\end{aligned}$$

und

$$\operatorname{ind} D^{\mathrm{ev}} = \dim \mathcal{H}^{\mathrm{ev}}(M,g) - \dim \mathcal{H}^{\mathrm{odd}}(M,g) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim H^k_{\mathrm{dR}}(M) = \chi(M)$$

ist gerade die *Eulerzahl* von M. Daher heißt der Operator D^{ev} auch *Euler-Operator.*

Sei $\hat c$ die Clifford-Multiplikation auf $\Lambda^\bullet TM$ aus Beispiel 4.41 (2), dann rechnet man nach, dass

$$\begin{aligned}c(\omega)\hat c(\overline{\omega}) &= i^{\frac n2}\,(-i)^{\frac n2}\,c(e_1)\hat c(e_1)\dots c(e_n)\hat c(e_n)\\ &= (e^1 \wedge - \iota_{e_1})(e^1 \wedge + \iota_{e_1})(-1)^{\deg} \dots (e^n \wedge - \iota_{e_n})(e^n \wedge + \iota_{e_n})(-1)^{\deg}\\ &= \big((e^1\wedge)\circ \iota_{e_1} - \iota_{e_1}\circ (e^1\wedge)\big)\dots\big((e^n\wedge)\circ\iota_{e_n} - \iota_{e_n}\circ(e^n\wedge)\big)\\ &= (-1)^{n-\deg} = (-1)^{\deg}\;,\end{aligned}$$

da die Cliffordmultiplikationen c und $\hat c$ miteinander kommutieren. Das lässt sich so interpretieren, dass

$$\begin{aligned}\operatorname{ind} D^{\mathrm{ev}} = \operatorname{ind}\big(D\colon \Gamma(\Sigma^+ \otimes \Sigma^{+,*}) \to \Gamma(\Sigma^- \otimes \Sigma^{+,*})\big)\\ - \operatorname{ind}\big(D\colon \Gamma(\Sigma^+ \otimes \Sigma^{-,*}) \to \Gamma(\Sigma^- \otimes \Sigma^{-,*})\big)\;,\end{aligned}$$

also ist die Eulercharakteristik $\chi(M)$ die Differenz der Indizes zweier Dirac-Operatoren vom Typ (1), während die Signatur gleich ihrer Summe ist.

Man beachte noch, dass $(-1)^{\deg}$ nicht von der Orientierung abhängt. Tatsächlich kann man D^{ev} im Gegensatz zu D^+ auch auf nicht orientierbaren Mannigfaltigkeiten definieren.

Wir passen die Definition 4.42 des Twist-Chern-Charakters an unsere Definition von $\mathbb{Z}_2$-graduierten Dirac-Bündeln an und definieren den kohomologischen Index. Wir erinnern uns an die $\hat A$-Form aus Satz 4.25.

5.19. Proposition und Definition. *Es sei $(V, g^V, \nabla^V, c, \omega^V)$ ein $\mathbb{Z}_2$-graduiertes Dirac-Bündel über einer n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) mit n gerade.*

(1) *Bezüglich einer lokalen Orientierung sei $\omega = i^{\frac n2} e_1 \dots e_n \in \mathbb{C}\ell(TM,g)$ das komplexe Volumenelement, dann definieren wir die* Twist-Graduierung $\omega^{V/S} \in \Gamma(\operatorname{End} V \otimes o(TM))$ *durch*

$$\omega^{V/S} = c(\omega)\cdot\omega^V\;.$$

Dann ist $\omega^{V/S}$ selbstadjungt mit $(\omega^{V/S})^2 = 1$, parallel und kommutiert mit der Clifford-Multiplikation.

(2) *Der $\mathbb{Z}_2$-graduierte* Twist-Chern-Charakter $\operatorname{ch}(V/S,\omega^V) \in H^{\mathrm{ev}}_{\mathrm{dR}}(M; o(TM))$ *wird repräsentiert durch die geschlossene, getwistete Form*

$$\operatorname{ch}(V/S, \nabla^V, \omega^V) = 2^{-\frac n2}\operatorname{tr}\Big(\omega^{V/S} e^{-\frac{F^{V/S}}{2\pi i}}\Big)\;.$$

(3) *Der* kohomologische Index *des zugehörigen Dirac-Operators D^+ wird gegeben durch*

$$\big(\hat{A}(TM)\,\mathrm{ch}(V/S,\omega^V)\big)[M] = \int_M \hat{A}(TM,\nabla^{TM})\,\mathrm{ch}(V/S,\nabla^V,\omega^V)\ .$$

Beweis. Zu (1) sei $X \in \mathfrak{X}(M)$, dann gilt lokal

$$\nabla_X^{\operatorname{End}V}(c(\omega)\omega^V) = c\big(\nabla_X^{\mathbb{C}\ell(TM,g)}\omega\big)\omega^V + c(\omega)\nabla_X^{\operatorname{End}V}\omega^V = 0$$

und

$$c(X)\cdot c(\omega)\cdot\omega^V = -c(\omega)c(X)\omega^V = c(\omega)\omega^V c(X)\ ,$$

also ist $\omega^{V/S}$ parallel und kommutiert mit Clifford-Multiplikation. Es folgt

$$(\omega^{V/S})^* = (\omega^V)^*c(\omega)^* = \underbrace{c(\omega)^2}_{=1}\omega^V c(\omega) = c(\omega)\omega^{V/S}c(\omega) = \omega^{V/S}$$

und

$$(\omega^{V/S})^2 = \omega^{V/S}c(\omega)\omega^V = c(\omega)\omega^{V/S}\omega^V = c(\omega)^2(\omega^V)^2 = 1\ .$$

Zu (2) zeigen wir wie im Beweis von Proposition 4.42, dass $\mathrm{ch}(V/S,\nabla^V,\omega^V)$ geschlossen ist. Sei jetzt $(V,g_t^V,\nabla^{V,t},c_t,\omega_t^V)$ eine glatte Familie von Dirac-Bündeln zu (M,g_t) für $t\in[0,1]$, dann betrachten wir $\overline{V} = V\times[0,1] \to \overline{M} = M\times[0,1]$ als ein $\mathbb{C}\ell(TM\times\{0\},g)$-Modul zum Unterbündel $TM\times\{0\}\subset T\overline{M}$. Wie vorher ist $\mathrm{ch}(\overline{V}/S,\nabla^{\overline{V}},\omega^{\overline{V}})$ geschlossen, und wir können wie im Beweis von Satz 4.25 zeigen, dass $\mathrm{ch}(V/S,\nabla^V,\omega^V)\in H^{\mathrm{ev}}_{\mathrm{dR}}(M;o(TM))$ nicht von $t\in[0,1]$ abhängt.

Schließlich ist $\hat{A}(TM,\nabla^{TM})$ eine (ungetwistete) Differentialform, so dass der Integrand in (3) getwistet und das Integral gemäß Übung 1.c von Blatt 4 wohldefiniert ist. □

Falls M orientiert ist und $\omega^V = c(\omega)$ wie in den Beispielen 5.18 (1) und (2), erhalten wir $\omega^{V/S} = 1$ und $\mathrm{ch}(V/S,\nabla^V,\omega^V) = \mathrm{ch}(V/S,\nabla^V)$. In diesem Fall reduziert sich (3) auf das Integral einer (ungetwisteten) de Rham-Kohomologieklasse über eine orientierte Mannigfaltigkeit. Unser obiger Formalismus erlaubt es aber, den Euler-Operator aus Beispiel 5.18 (3) auch auf nicht orientierbaren Mannigfaltigkeiten zu betrachten.

5.20. Satz (Atiyah-Singer; kohomologische Fassung). *Es sei $(V,g^V,\nabla^V,c,\omega^V)$ ein $\mathbb{Z}_2$-graduiertes Dirac-Bündel über einer gerade-dimensionalen geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g). Dann stimmen analytischer und kohomologischer Index des zugehörigen Dirac-Operators D^+ überein, das heißt, es gilt*

$$\operatorname{ind}D^+ = \big(\hat{A}(TM)\,\mathrm{ch}(V/S,\omega^V)\big)[M] = \int_M \hat{A}\big(TM,\nabla^{TM}\big)\,\mathrm{ch}\big(V/S,\nabla^V,\omega^V\big)\ .$$

Den Beweis führen wir in den nächsten zwei Abschnitten. Zunächst betrachten wir die zwei Spezialfälle des Signatur- und des Euler-Operators. Beide sind etwas älter als der Indexsatz.

5.21. Satz (Hirzebruch). *Es sei (M,g) eine orientierte, $n=4m$-dimensionale, geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit und* $\mathrm{sign}(M)$ *die Signatur der nicht ausgearteten, symmetrischen Bilinearform auf $H^{2m}_{\mathrm{dR}}(M)$, gegeben durch*

$$(\alpha,\beta)\mapsto(\alpha\wedge\beta)[M] = \int_M \alpha\wedge\beta\ .$$

Es seien $L(TM)$, $\hat{L}(TM)\in H^{4\cdot}_{\mathrm{dR}}(M)$ die Chern-Weil-Klassen zu

$$L(TM,\nabla^{TM}) = \det\left(\frac{R}{2\pi i}\coth\frac{R}{2\pi i}\right) \qquad \textit{und} \qquad \hat{L}(TM,\nabla^{TM}) = \det\left(\frac{R}{4\pi i}\coth\frac{R}{4\pi i}\right)\ .$$

Dann gilt

$$\operatorname{sign}(M) = 2^{\frac{n}{2}}\,\hat{L}(TM)[M] = L(TM)[M] = \int_M L\big(TM, \nabla^{TM}\big)\ .$$

Beweis. Es sei R der Riemannsche Krümmungstensor und

$$F^S = \psi_* R = \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n} \langle R_{\cdot,\cdot}\, e_i, e_j\rangle e_i \cdot e_j \in \Omega^2(M; \mathbb{C}\ell(TM, g))$$

die Spinkrümmung von (M, g) aus Proposition 4.42 in der Notation aus Bemerkung 4.47 (4). Nach Übung 1 von Blatt 8 hat das Dirac-Bündel $(\Lambda^\bullet TM, g^{\Lambda^\bullet TM}, \nabla^{\Lambda^\bullet TM}, c)$ die Twist-Krümmung

$$F^{\Lambda^\bullet TM/S} = \hat{c}(F^S) = \hat{c}(\psi_* R)\ .$$

Bezüglich der $\mathbb{Z}_2$-Graduierung $c(\omega)$ aus Beispiel 5.18 (2) ist $\omega^{\Lambda^\bullet TM/S} = 1$, und mit Aufgabe 4.a von Blatt 10 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}\big(\Lambda^\bullet TM/S, \nabla^{\Lambda^\bullet TM}, \omega^{\Lambda^\bullet TM}\big) &= \operatorname{ch}\big(\Lambda^\bullet TM/S, \nabla^{\Lambda^\bullet TM}\big) = 2^{-\frac{n}{2}} \operatorname{tr}_{\Lambda^\bullet TM}\Big(e^{-\frac{F^{\Lambda^\bullet TM/S}}{2\pi i}}\Big) \\
&= 2^{-\frac{n}{2}} \operatorname{tr}_{\Lambda^\bullet TM}\Big(e^{-\frac{\hat{c}(\psi_* R)}{2\pi i}}\Big) = \operatorname{tr}_{\Sigma}\Big(e^{-\frac{c(\psi_* R)}{2\pi i}}\Big) = \det\bigg(\Big(2\cosh\frac{R}{4\pi i}\Big)^{\frac{1}{2}}\bigg)\ .
\end{aligned}$$

Der Integrand im Atiyah-Singer-Indexsatz wird zu

$$\begin{aligned}
\hat{A}\big(TM, \nabla^{TM}\big)\operatorname{ch}\big(\Lambda^\bullet TM/S, \nabla^{\Lambda^\bullet TM/S}\big) &= 2^{\frac{n}{2}} \det\bigg(\Big(\frac{R}{4\pi i}\coth\frac{R}{4\pi i}\Big)^{\frac{1}{2}}\bigg) = 2^{\frac{n}{2}}\,\hat{L}\big(TM, \nabla^{TM}\big) \\
&= \det\bigg(\Big(\frac{R}{2\pi i}\coth\frac{R}{2\pi i}\Big)^{\frac{1}{2}}\bigg) = L\big(TM, \nabla^{TM}\big)\ .
\end{aligned}$$

Nach Beispiel 5.18 (2) gilt $\operatorname{sign}(M) = \operatorname{ind} D^+$, also folgt die Behauptung aus dem Atiyah-Singer-Indexsatz 5.20. □

5.22. Satz (Gauß-Bonnet-Chern). *Es sei (M, g) eine gerade-dimensionale geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann gilt*

$$\chi(M) = e(TM)[M] = \int_M e\big(TM, \nabla^{TM}\big)\ .$$

Man beachte, dass die Pfaffsche Determinante aus Beispiel 4.23(3) bei Orientierungswechsel ihr Vorzeichen ändert, so dass $e(TM, \nabla^{TM}) \in \Omega^{\mathrm{ev}}(M; o(TM))$, und das Integral auf der rechten Seite gemäß Übung 1.c von Blatt 4 auch dann wohldefiniert ist, wenn M nicht orientierbar ist. In Dimension $n = 2$ gilt

$$e(TM, \nabla^{TM}) = \frac{\mathrm{scal}}{4\pi}\, d\mathrm{vol}_g = \frac{K}{2\pi}\, d\mathrm{vol}_g\ ,$$

und wir erhalten den globalen Satz von Gauß-Bonnet aus der elementaren Differentialgeometrie.

Beweis. Wir haben in Beispiel 5.18 (3) bereits gesehen, dass lokal

$$\omega^{\Lambda^\bullet TM/S} = c(\omega)\,(-1)^{\deg} = \hat{c}(\overline{\omega})\ .$$

Ähnlich wie im Beweis des Hirzebruch-Signatursatzes 5.21 berechnen wir mit Hilfe von Übung 4.b von Blatt 10, dass

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}\bigl(\Lambda^\bullet TM/S, \nabla^{\Lambda^\bullet TM}, (-1)^{\deg}\bigr) &= 2^{-\frac{n}{2}} \operatorname{tr}_{\Lambda^\bullet TM}\biggl(\hat c(\overline{\omega})e^{-\frac{\hat c(\psi_* R)}{2\pi i}}\biggr)\\ &= (-1)^{\frac{n}{2}} \operatorname{tr}_\Sigma\biggl(c(\omega)e^{-\frac{c(\psi_* R)}{2\pi i}}\biggr) = \operatorname{Pf}\biggl(2i\sinh\frac{R}{4\pi i}\biggr)\,.\end{aligned}$$

Man beachte, dass $\det()^{\frac{1}{2}}$ nicht von der Orientierung abhängt, so dass

$$\begin{aligned}&\hat A\bigl(TM,\nabla^{TM}\bigr)\operatorname{ch}\bigl(\Lambda^\bullet TM/S,\nabla^{\Lambda^\bullet TM},(-1)^{\deg}\bigr)\\ &\qquad= \det\biggl(\Bigl(\frac{R/4\pi i}{\sinh(R/4\pi i)}\Bigr)^{\frac12}\biggr)\cdot\operatorname{Pf}\biggl(2i\sinh\frac{R}{4\pi i}\biggr) = \operatorname{Pf}\biggl(\frac{R}{2\pi}\biggr) = e\bigl(TM,\nabla^{TM}\bigr)\,.\end{aligned}$$

Jetzt folgt die Behauptung aus dem Atiyah-Singer-Indexsatz 5.20, da $\operatorname{ind} D^{\mathrm{ev}} = \chi(M)$. □

5.3. Der Wärmeleitungskern

In diesem Abschnitt führen wir den analytischen Index eines Dirac-Operators D^+ auf die sogenannte Superspur des Wärmeleitungsoperators e^{-tD^2} zurück. Dann zeigen wir, dass e^{-tD^2} als Integraloperator geschrieben werden kann, und dass die asymptotische Entwicklung des Integralkerns nur von der lokalen Geometrie abhängt. Im folgenden Abschnitt berechnen wir den Grenzwert der Superspur explizit.

Wir zerlegen $\sigma \in L^2(M;V)$ wie in der Definition des Green-Operators in Folgerung 5.11 (4) als

$$\sigma = \sum_{\lambda\in\operatorname{Spec} D}\sigma_\lambda \qquad\text{mit}\qquad \sigma_\lambda\in E_\lambda$$

und definieren den *Wärmeleitungsoperator* $e^{-tD^2}\sigma$ für $t\ge 0$ durch

$$e^{-tD^2}\sigma = \sum_{\lambda\in\operatorname{Spec} D} e^{-t\lambda^2}\sigma_\lambda\,.$$

Da $0 < e^{-t\lambda^2} \le 1$, folgt $e^{-tD^2}\sigma \in L^2(M;V)$. Später sehen wir sogar, dass $e^{-tD^2}\sigma\in\Gamma(V)$ für alle $t>0$.

Die Elemente $e^{-t\lambda^2}\sigma$ haben zwei wichtige Eigenschaften:

$$\Bigl(\frac{\partial}{\partial t} + D^2\Bigr)e^{-tD^2}\sigma = (-D^2+D^2)e^{-tD^2}\sigma = 0$$

und $\lim_{t\to 0} e^{-tD^2}\sigma = \sigma$. Wir sagen dazu, dass $e^{-t\lambda^2}\sigma$ die *Wärmeleitungsgleichung mit Anfangsbedingung* σ löst.

5.23. Proposition und Definition. *Es sei (w,g) ein Hilbert-Raum, dann definieren wir den Raum* $\operatorname{End}_1 W$ *der* Spurklasse-Operatoren *als Abschluss des Raumes $W\otimes W^*$ der Endomorphismen von endlichem Rang unter der Norm*

$$\|F\|_{\mathrm{tr}} = \operatorname{tr}_W\Bigl((F^*F)^{\frac12}\Bigr) = \inf\biggl\{\sum_{i=1}^n \|w_i\|_W\cdot\|\alpha_i\|_{W^*}\ \biggm|\ F = \sum_{i=1}^n w_i\otimes\alpha_i\biggr\}\,, \tag{1}$$

und die (Hilbert-) Spur $\operatorname{tr}\colon \operatorname{End}_1 W\to\mathbb{C}$ *als die stetige, lineare Fortsetzung der endlich-dimensionalen Spur*

$$\operatorname{tr}\Bigl(\sum_{i=1}^n W_i\otimes\alpha_i\Bigr) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(W_i)\in\mathbb{C}\,. \tag{2}$$

Sei (M,g) geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $W = L^2(M;V)$, und sei $V \boxtimes V^* = p_1^*V \otimes p_2^*V^* \to M \times M$, dann definiert der Integralkern $k \in \Gamma(V \boxtimes V^*)$ *durch* Faltung „$*$“ *einen* Integraloperator K *auf* $L^2(M;V)$ *mit*

$$(K\sigma)(x) = (k * \sigma)(x) = \int_M \underbrace{k(x,y)}_{\in \operatorname{Hom}(V_y,V_x)} \underbrace{\sigma(y)}_{\in V_y} \, d\mathrm{vol}_g \, . \tag{3}$$

Dieser Operator K ist ein Spurklasse-Operator mit

$$\operatorname{tr}(K) = \int_M \operatorname{tr}_V(k(x,x)) \, d\mathrm{vol}_g \, . \tag{4}$$

Beweis. Um „$\geq$“ in (1) zu zeigen, wählen wir für den selbstadjungierten Operator F^*F von endlichem Rang paarweise orthogonale Einheits-Eigenvektoren v_i und setzen $\alpha_i = \langle v_i, \cdot \rangle$ und $w_i = F(v_i)$. Die Summe in (2) konvergiert für alle Spurklasse-Operatoren nach Definition der Spurklasse-Norm in (1).

Sei jetzt K ein Integraloperator wie in (3). Wir betrachten zwei Schnitte σ, τ von V, dann wird der Operator $K = \sigma \otimes \langle \tau, \cdot \rangle$ durch den Integralkern k mit

$$k(x,y) = \sigma_x \otimes \langle \tau_y, \cdot \rangle \in \operatorname{Hom}(V_y, V_x)$$

gegeben, und wir erhalten

$$\operatorname{tr}(K) = \langle \tau, \sigma \rangle_{L^2} = \int_M \langle \tau(x), \sigma(x) \rangle \, d\mathrm{vol}_g = \int_M \operatorname{tr}_V(k(x,x)) \, d\mathrm{vol}_g \, .$$

Den Beweis, dass alle Operatoren K mit Integralkern k von Spurklasse sind, lassen wir weg. Aus der Linearität von tr und obiger Formel folgt aber die Formel (4) für $\operatorname{tr}(K)$. $\square$

Wir verschieben den Beweis, dass e^{-tD^2} einen Integralkern besitzt, auf später.

5.24. Definition. Es sei $W = W^+ \oplus W^-$ ein $\mathbb{Z}_2$-graduierter Hilbert-Raum und ω^W der Graduierungsoperator mit $\omega^W|_{W^\pm} = \pm \mathrm{id}_{W^\pm}$, dann ist die *Superspur* eines Spurklasse-Operators $K \in \operatorname{End}_1 W$ definiert durch

$$\operatorname{str}(K) = \operatorname{tr}(\omega^W \circ K)$$

Für Integraloperatoren K mit Integralkern $k \in \Gamma(V \boxtimes V^*)$ und mit $(\omega^W \sigma)(x) = \omega_x^V \cdot \sigma(x)$ folgt entsprechend

$$\operatorname{str}(K) = \operatorname{tr}(\omega^W K) = \int_M \operatorname{tr}(\omega_x^V k(x,x)) \, d\mathrm{vol}_g(x) = \int_M \operatorname{str}(k(x,x)) \, d\mathrm{vol}_g(x) \, .$$

Wir kommen nun zum ersten Schnitt im Beweis des Satzes 5.20 von Atiyah-Singer.

5.25. Lemma (McKean-Singer). *Es sei D der Dirac-Operator zum $\mathbb{Z}_2$-graduierten Dirac-Bündel $(V, g^V, \nabla^V, c, \omega^V)$ auf der geschlossenen gerade-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g). Dann ist der Wärmeleitungs-Operator e^{-tD^2} Spurklasse für alle $t > 0$, und es gilt*

$$\operatorname{ind} D^+ = \operatorname{str}(e^{-tD^2}) \qquad \textit{für alle } t > 0 \, .$$

Beweis. Wir zeigen die Spurklasse-Eigenschaft später, indem wir einen Integralkern für den Wärmeleitungsoperator konstruieren.

Es bezeichne $P'_\mu \colon L^2(M;V) \to L^2(M;V)$ die L^2-Projektion auf den μ-Eigenraum E'_μ von D^2. Dann folgt

$$\operatorname{str}(e^{-tD^2}) = \operatorname{str}\Big(\sum_{\mu \in \operatorname{Spec} D^2} e^{-t\mu} P'_\mu \Big) = \sum_{\mu \in \operatorname{Spec} D^2} e^{-t\mu} \operatorname{tr}(\omega^V \circ P'_\mu) \, .$$

Da ω^V nach Definition mit D antikommutiert, vertauscht ω^V die Eigenräume E_λ und $E_{-\lambda}$ von D. Insbesondere operiert ω^V auf E'_μ für $\mu = \lambda^2$. Umgekehrt vertauscht D die ±1-Eigenräume $E'_\mu \cap \Gamma(V^+)$ und $E'_\mu \cap \Gamma(V^-)$ von ω^V, also haben beide die gleiche Dimension für $\mu \neq 0$, da D dann als Automorphismus auf E'_μ mit Inversem $\frac{1}{\mu} D$ operiert. Es folgt

$$\operatorname{tr}(\omega^V \circ P'_\mu) = \operatorname{tr}_{E'_\mu \cap \Gamma(V^+)}(\mathrm{id}) + \operatorname{tr}_{E'_\mu \cap \Gamma(V^-)}(-\mathrm{id}) = \dim(E'_\mu \cap \Gamma(V^+)) - \dim(E'_\mu \cap \Gamma(V^-)) = 0 \;.$$

Für $\mu = 0$ hingegen ergibt sich

$$\operatorname{tr}(\omega^V \circ P'_0) = \dim\ker D^+ - \dim\ker D^- = \operatorname{ind} D^+ \;.$$

Falls e^{-tD^2} für $t > 0$ ein Spurklasse-Operator ist, folgt also

$$\operatorname{str}(e^{-tD^2}) = \sum_{\mu \in \operatorname{Spec} D^2} e^{-t\mu} \operatorname{tr}(\omega^V = P'_\mu) = \operatorname{tr}(\omega^V \circ P'_0) = \operatorname{ind} D^+ \;. \quad \square$$

Zum Beweis des Atiyah-Singer-Indexsatzes reicht es also, für kleine $t > 0$ die Superspur des Wärmeleitungs-Operators e^{-tD^2} zu bestimmen. Im Rest dieses Abschnittes zeigen wir, dass die asymptotische Entwicklung des Integralkerns zum Operator e^{-tD^2} nur von der lokalen Geometrie abhängt.

Für die folgenden Überlegungen reicht es, zu wissen, dass D^2 wie in der Bochner-Lichnerowicz-Weitzenböck-Formel 4.44 als Summe aus einem Zusammenhangs-Laplace-Operator Δ^V auf V und einem Endomorphismus $F \in \operatorname{End} V$ geschrieben werden kann.

5.26. Definition. Es sei (V, ∇^V) ein Vektorbündel mit Zusammenhang über einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g).

(1) Ein *verallgemeinerter Laplace-Operator* ist ein Operator $H\colon \Gamma(V) \to \Gamma(V)$, so dass $F = H - \Delta^V \in \operatorname{End} V$.
(2) ein *Wärmeleitungskern* für H ist eine differenzierbare Familie $p\colon (0,\infty) \to \Gamma(V \boxtimes V^*)$ von Integralkernen, so dass

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + H\right) p_t(\,\cdot\,, y) = 0 \qquad \text{für alle } t > 0, x, y \in M \tag{2a}$$

$$\lim_{t\to 0} \int_M p_t(x,y)\,\sigma(y)\,d\mathrm{vol}_g(y) = \sigma(x) \qquad \text{für alle } \sigma \in \Gamma_0(V) \text{ mit kompaktem Träger.} \tag{2b}$$

Sei $H = \Delta^V + F$ ein verallgemeinerter Laplace-Operator auf (V, ∇^V), und sei ∇^{V^*} der von ∇^V auf V^* induzierte Zusammenhang. Dann folgt

$$\begin{aligned}\int_M \alpha(\Delta^V \sigma)\,d\mathrm{vol}_g &= \int_M \sum_{i=1}^n (\nabla^{V^*}_{e_i}\alpha)(\nabla^V_{e_i}\sigma)\,d\mathrm{vol}_g + \underbrace{\int_M \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^n \alpha(\nabla^V_{e_i}\sigma)e_i\right) d\mathrm{vol}_g}_{=0} \\ &= \int_M (\Delta^{V^*}\alpha)(\sigma)\,d\mathrm{vol}_g - \underbrace{\int_M \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^n (\nabla^{V^*}_{e_i}\alpha)(\sigma)e_i\right) d\mathrm{vol}_g}_{=0} \;,\end{aligned}$$

somit ist der zu H adjungierte Operator $H^* = \Delta^{V^*} + F^*$ also ebenfalls ein verallgemeinerter Laplace-Operator.

5.27. Proposition. *Es sei H ein verallgemeinerter Laplace-Operator auf V, und $H^*\colon \Gamma(V^*) \to \Gamma(V^*)$ der formal L^2-adjungierte Operator. Es seien p und p^* Wärmeleitungskerne für H und H^*.*

(1) *Dann sind die Wärmeleitungskerne eindeutig.*

(2) *Es gilt* $p_t^*(y,x) = (p_t(x,y))^* \in \operatorname{Hom}(V_x^*, V_y^*)$.
(3) *Es gilt die* Halbgruppeneigenschaft

$$p_{t+s}(x,z) = (p_t * p_s)(x,z) = \int_M p_t(x,y) \circ p_s(y,z) \, d\mathrm{vol}_g y \; .$$

Beweis. Zu (1) und (2) fixieren wir $\alpha \in \Gamma(V)$, $\alpha \in \Gamma(V^*)$ und betrachten für $0 < t < T$ das Integral

$$f(t) = \int_M \int_M \int_M \bigl(p_{T-t}^*(x,y)\alpha(y)\bigr)\bigl(p_t(x,z)\sigma(z)\bigr) \, d\mathrm{vol}_g y \, d\mathrm{vol}_g z \, d\mathrm{vol}_g x \; .$$

Aus Definition 5.26 (2a) folgt

$$\begin{aligned} f'(t) = \int_M \int_M \int_M \Biggl(\biggl(& \frac{\partial p_{T-t}^*}{\partial t}(x,y)\alpha(y)\biggr)(p_t(x,z)\sigma(z)) \\ & + (p_{T-t}^*(x,y)\alpha(y)) \biggl(\frac{\partial p_t}{\partial t}(x,z)\sigma(z)\biggr)\Biggr) \, d\mathrm{vol}_g y \, d\mathrm{vol}_g z \, d\mathrm{vol}_g x \\ = \int_M \int_M \int_M \Bigl(& \bigl(-(H_x^* p_{T-t}^*)(x,y)\alpha(y)\bigr)\bigl(p_t(x,z)\sigma(z)\bigr) \\ & + \bigl(p_{T-t}^*(x,y)\alpha(y)\bigr)\bigl((H_x p_t)(x,z)\sigma(z)\bigr)\Bigr) \, d\mathrm{vol}_g y \, d\mathrm{vol}_g z \, d\mathrm{vol}_g x = 0 \; . \end{aligned}$$

Somit ist f konstant, und bei 0 und T erhalten wir als Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} f(t) &= \int_M \int_M (p_T^*(x,y)\alpha(y))\sigma(x) \, d\mathrm{vol}_g y \, d\mathrm{vol}_g x \; , \\ \lim_{t \to T} f(t) &= \int_M \int_M \alpha(x)(p_T(x,z)\sigma(z)) \, d\mathrm{vol}_g z \, d\mathrm{vol}_g x \; , \end{aligned}$$

und es folgt $p_T^*(x,y) = (p_T(y,x))^*$ wie behauptet.

Analog kann man zeigen, dass Lösungen $\sigma_t(x)$ der Wärmeleitungsgleichung mit Anfangsbedingung $\sigma_0 \in \Gamma(V)$ eindeutig sind, indem man das Integral über $p_t(x,z)\sigma(z)$ in den obigen Rechnungen durch $\sigma_t(x)$ ersetzt. Jetzt folgt (3), da beide Seiten die Wärmeleitungsgleichung mit Anfangsbedingung $p_s(\,\cdot\,,z)$ lösen. □

5.28. Beispiel. Der skalare Laplace-Operator

$$\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

auf $\mathbb{R}^n$ hat den Wärmeleitungskern

$$q_t(x,y) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} \; .$$

Wir überprüfen zunächst die Eigenschaft 5.26 (2a). Da $q_t(x,y) = q_t(x-v, y-v)$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$, dürfen wir $y = 0$ setzen. Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} q_t(x,0) = \left(\frac{\partial \log\bigl((4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\bigr)}{\partial t} - \frac{\partial(\|x\|^2/4t)}{\partial t}\right) q_t(x,0) = \left(-\frac{n}{2t} + \frac{\|x\|^2}{4t^2}\right) q_t(x,0)$$

und

$$\begin{aligned}\Delta_x q_t(x,0) &= -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\biggl(-\frac{\partial(\|x\|^2/4t)}{\partial x_i} q_t(x,0)\biggr) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\biggl(\frac{x_i}{2t} q_t(x,0)\biggr)\\ &= \sum_{i=1}^n\biggl(\frac{\partial(x_i/2t)}{\partial x_i} - \frac{x_i}{2t}\frac{\partial(\|x\|^2/4t)}{\partial x_i}\biggr) q_t(x,0)\\ &= \biggl(\frac{n}{2t} - \frac{\|x\|^2}{4t}\biggr) q_t(x,0) = -\frac{\partial}{\partial t} q_t(x,0)\;.\end{aligned}$$

Außerdem gilt Eigenschaft 5.26 (2b) für beliebige stetige f bei $x = 0$, da

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|0-y\|^2}{4t}} f(y) d\lambda^n y = \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|v\|^2}{2}} f(\sqrt{2t}v)\, d\lambda^n v = f(0)\;,$$

da das Integral über die Gaußsche Glockenkurve genau 1 ergibt. Wir werden $q_t(x,y)$ als nullte Näherung an den Wärmeleitungskern zu einem beliebigen verallgemeinerten Laplace-Operator auf $\Gamma(V)$ über (M,g) benutzen.

Wir betrachten im Folgenden Normalkoordinaten um $y \in M$ wie in Definition 1.83. Wir betrachten Punkte x innerhalb des Injektivitätsradius aus Definition 1.102, also $d(x,y) < \rho(y)$, so dass $\exp_y^{-1} x$ immer eindeutig definiert ist. Wir definieren die kürzeste Geodätische $x_s\colon [0,1] \to u$ von y nach x mit

$$x_s = \exp_y(s\exp_y^{-1} x)$$

und das *Radialfeld* $\mathcal{R}$ um y durch

$$\mathcal{R}_x = d\exp_y|_{\exp_y^{-1} x}(\exp_y^{-1} x) = \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=1} x_s\;.$$

In einer kleinen Umgebung $U \subset B_{\rho(y)}(y)\backslash\{y\}$ von $x \neq y$ wählen wir eine Orthonormalbasis $e_1,\dots,e_n$ von $TM|_U$ so, dass

$$e_1 = \frac{\mathcal{R}}{|\mathcal{R}|} = \frac{\mathcal{R}}{r}\;, \qquad \text{wobei } r(x) = d(x,y)\;.$$

Da e_1 tangential an radiale Geodätische ist, folgt $\nabla_{e_1} e_1 = 0$. Die Vektoren $e_2,\dots,e_n$ sind nach dem Gauß-Lemma 1.89 tangential an die Abstandssphären, auf denen r jeweils konstant ist. In dieser Basis hat der Laplace-Operator Δ^V aus Satz 4.44 also die Gestalt

$$\Delta^V = -\nabla^V_{e_1}\nabla^V_{e_1} - \sum_{i=2}^n\Bigl(\nabla^V_{e_i}\nabla^V_{e_i} - \nabla^V_{\nabla_{e_i} e_i}\Bigr) = -\nabla^V_{e_1}\nabla^V_{e_1} + \nabla^V_h - \sum_{i=2}^n \nabla^V_{e_i}\nabla^V_{e_i}\;,$$

wobei $h = \sum \nabla_{e_i} e_i$ das mittlere Krümmungsfeld der Abstandssphären bezeichnet. Wie im Beweis des Satzes 2.18 von Bishop-Gromov setzen wir

$$a(x) = \det\Bigl(\bigl(\exp_y|_{\exp_y^{-1} x}\bigr)^* g\Bigr)^{\frac{1}{2}}\;.$$

Da die mittlere Krümmung die logarithmische Variation des Volumenelements misst, erhalten wir

$$h_x = -e_1(\log(r^{n-1}\cdot a))\cdot e_1 = -\frac{n-1}{r} e_1 - e_1(\log a)\cdot e_1\;,$$

da $e_1(r) = 1$.

Sei jetzt $\sigma \in \Gamma(V)$ und $q_t\colon B_{\rho(y)}(y) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$q_t(x) = (e\pi t)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{r(x)^2}{4t}}$$

wie in Beispiel 5.28, dann berechnen wir

$$\begin{aligned}\Delta^V(q_t\cdot\sigma) &= -e_1(e_1(q_t))\cdot\sigma - 2e_1(q_t)\cdot\nabla^V_{e_i}\sigma - q_t\cdot\nabla^V_{e_1}\nabla^V_{e_1}\sigma + h(q_t)\cdot\sigma + q_t\cdot\nabla^V_h\sigma \\ &\qquad - \sum_{i=2}^n\Bigl(\underbrace{e_i(e_i(q_t))\cdot\sigma + 2e_i(q_t)\cdot\nabla^V_{e_i}\sigma}_{=0} + q_t\cdot\nabla^V_{e_i}\nabla^V_{e_i}\sigma\Bigr) \\ &= \Bigl(\frac{n}{2t} - \frac{r(x)^2}{4t^2} + \underbrace{e_1(\log a)\frac{r(x)}{2t}}_{=\frac{1}{2t}\mathcal{R}(\log a)}\Bigr)q_t\cdot\sigma + \underbrace{\frac{r(x)}{t}\cdot q_t\nabla^V_{e_1}\sigma}_{=\frac{q_t}{t}\nabla^V_{\mathcal{R}}\sigma} + q_t\cdot\Delta^V\sigma\ .\end{aligned}$$

Hierbei haben wir zunächst ausgenutzt, dass q_t radialsymmetrisch um y ist, so dass $e_i(q_t) = 0$ für $i \neq 1$. Die Ableitungen von q_t in Richtung e_1 lassen sich analog zum Euklidischen Fall ausrechnen, so dass wir bis auf den Term mit $\mathcal{R}(\log a)$ genau den Ausdruck für Δq_t in der obigen Formel wiederfinden.

Mit Hilfe dieser Vorbereitungen können wir jetzt den Wärmeleitungskern lokal durch eine formale Potenzreihe in t approximieren. Dazu erinnern wir uns an die Trivialisierung von V um y durch radiale Parallelverschiebung wie in Satz 4.21.

5.29. Proposition und Definition. *Es sei (M,g) vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und H ein verallgemeinerter Laplace-Operator auf (V,∇^V). Dann existiert eine Umgebung U der Diagonalen in $M\times M$ und eindeutige glatte $\Phi_i \in \Gamma(V\boxtimes V^*|_U)$, so dass*

$$\Bigl(\frac{\partial}{\partial t} + H_x\Bigr)k_t(\,\cdot\,,y) = 0$$

als Produkt von q_t mit einer formalen Potenzreihe in t, wobei

$$k_t(x,y) = q_t(x,y)\sum_{i=0}^\infty t^i\Phi_i(x,y) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{d(x,y)^2}{4t}}\sum_{i=0}^\infty t^i\Phi_i(x,y)\ ,$$

mit $\Phi_0(x,x) = \mathrm{id}_{V_x}$ für alle $x\in M$. Dann heißt $k_t(x,y)$ eine formale Lösung der Wärmeleitungsgleichung*. Bezüglich der Trivialisierung von V nahe y durch radiale Parallelverschiebung gilt $\Phi_0(x,y) = a(x)^{-\frac12}\cdot\mathrm{id}_{V_y}$ und*

$$\Phi_i(x,y) = -a(x)^{-\frac12}\int_0^1 s^{i-1}a(x_s)^{\frac12}(H_x\Phi_{i-1})(x_s,y)\,ds\ .$$

Beweis. Mit Hilfe der obigen Rechnung und Beispiel 5.28 folgt für $y\in M$ fest, dass

$$\begin{aligned}\Bigl(\frac{\partial}{\partial t} + H_x\Bigr)k_t &= \sum_{i=0}^\infty\Bigl(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta^V_x + F_x\Bigr)(t^iq_t\cdot\Phi_i) \\ &= \sum_{i=0}^\infty\Bigl(\Bigl(it^{i-1} + e_1(\log a)\frac{r(x)}{2}t^{i-1}\Bigr)q_t\cdot\Phi_i + t^{i-1}q_t\cdot\nabla^V_{\mathcal{R}}\Phi_i + t^iq_t\cdot(\Delta^V_x + F_x)\Phi_i\Bigr) \\ &= \sum_{i=0}^\infty t^{i-1}q_t\cdot\Bigl(\Bigl(i + \frac12\mathcal{R}(\log a)\Bigr)\Phi_i + \nabla^V_{\mathcal{R}}\Phi_i + H_x\Phi_{i-1}\Bigr)\end{aligned}$$

mit $\Phi_{-1} = 0$. Wir erhalten also für jedes Φ_i eine gewöhnliche Differentialgleichung in radialer Richtung mit Inhomogenität $H_x\Phi_{i-1}$.

Wir überprüfen, dass die im Satz angegebenen Φ_i diese Differentialgleichung erfüllen. Dazu sei $x = rv$ ein Punkt im Abstand r zu y. Dann gilt

$$\nabla^V_{\mathcal{R}}\Phi_0 = \nabla^V_{\mathcal{R}}\Big(-a(rv)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{id}_{V_y}\Big) = -\frac{1}{2}\,\mathcal{R}(\log a)\,\Phi_0$$

und
$$\begin{aligned}\nabla^V_{\mathcal{R}}\Phi_i &= \nabla^V_{\mathcal{R}}\Big(-a(rv)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 s^{i-1}a(rsv)^{\frac{1}{2}}(H_x\Phi_{i-1})(rsv,y)\,ds\Big)\\ &= r\frac{\partial}{\partial r}\Big(-a(rv)^{-\frac{1}{2}}\int_0^r\Big(\frac{\varrho}{r}\Big)^{i-1}a(\varrho v)^{\frac{1}{2}}(H_x\Phi_{i-1})(\varrho v,y)\,\frac{d\varrho}{r}\Big)\\ &= -\frac{1}{2}\,\mathcal{R}(\log a)\cdot\Phi_i - H_x\Phi_{i-1} - i\cdot\Phi_i\;. \end{aligned}$$ □

Wir nehmen jetzt an, dass (M,g) vollständig ist mit Injektivitätsradius $0 < \varrho \leq \varrho(y)$ für alle $y \in M$. Es sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Abschneidefunktion mit

$$\operatorname{supp}\varphi \subset (-\varrho,\varrho) \qquad \text{und} \qquad \varphi|_{[-\frac{\varrho}{2},\frac{\varrho}{2}]} \equiv 1\;.$$

Außerdem sei $\ell \geq 0$ und $N > \frac{n+\ell+1}{2}$, dann definieren wir

$$k^N_t(x,y) = \varphi(d(x,y))q_t(x,y)\sum_{i=0}^N t^i\Phi_i(x,y)\;.$$

Dadurch erhalten wir einen glatten Integralkern $k^N\colon (0,\infty) \to \Gamma(V \boxtimes V^*)$ und müssen uns keine Gedanken über die Konvergenz der Potenzreihe machen.

Unser nächstes Ziel ist es, mit Hilfe von k^N den tatsächlichen Wärmeleitungskern p zu e^{-tH} zu konstruieren. Dabei sehen wir, dass k^N eine Art „Taylor-Approximation“ von p darstellt. Dazu sei zunächst

$$r^N_t(x,y) = \Big(\frac{\partial}{\partial t} + H_x\Big)k^N_t(x,y)\;,$$

und R^N, K^N seien die zugehörigen Integraloperatoren. Für die Faltung schreiben wir $*$, so dass

$$(K^N_t\sigma)(x) = (k^N_t * \sigma)(x) = \int_M k^N_t(x,y)\,\sigma(y)\,d\mathrm{vol}_g y\;.$$

5.30. Proposition. *Es sei $\ell \geq 0$.*

(1) *Es sei $T > 0$, dann ist $K^N\colon (0,T] \to \mathrm{End}(\Gamma(V))$ gleichmäßig beschränkt in der Operatornorm bezüglich der $\mathcal{C}^\ell$-Norm auf $\Gamma(V)$.*
(2) *In der $\mathcal{C}^\ell$-Norm gilt*

$$\lim_{t\to 0}\big\|K^N_t\sigma - \sigma\big\|_{\mathcal{C}^\ell} = 0\;.$$

(3) *Für alle $k \geq 0$ gilt*

$$\Big\|\frac{\partial^k}{\partial t^k}r^N_t\Big\|_\ell < C\cdot t^{N-\frac{n+\ell}{2}-k}\;.$$

Beweis. Da die Φ_i nach Konstruktion glatt sind, folgt (1) sofort für $t \in [t_0,T]$ mit $t_0 > 0$. Um $(K^N_t\sigma)(x)$ für kleine t zu bestimmen, schreiben wir y in Normalkoordinaten um x und trivialisieren V durch radiale Parallelverschiebung um x. Mit $y = \sqrt{t}\, v$ erhalten wir

$$\begin{aligned}(K_t^N \sigma)(x) &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{T_xM} e^{-\frac{\|y\|^2}{4t}} \varphi(\|y\|) \sum_{i=0}^N t^i \Phi_i(x,y)\sigma(y)\, d\mathrm{vol}_{\exp_x^* g} y \\ &= (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{T_xM} e^{-\frac{\|v\|^2}{4}} \underbrace{\varphi(\sqrt{t}\,\|v\|)}_{\to 1} \sum_{i=0}^N t^i \Phi_i(x, \sqrt{t}v)\, \underbrace{\sigma(\sqrt{t}v)}_{\to \sigma(x)}\, \underbrace{d\mathrm{vol}_{(\exp_x \circ \sqrt{t})^* \frac{g}{t}} y}_{\to d\lambda^n y}\ .\end{aligned}$$

Für stetige σ folgt $\mathcal{C}^0$-Konvergenz gegen $\sigma(x)$. Analog, mit etwas mehr Aufwand, zeigt man auch $\mathcal{C}^\ell$-Konvergenz. Daraus ergeben sich (2) und (1) für kleine t.

In (3) treten die Ableitungen der Abschneidefunktion $\varphi(r)$ als Störterm in $H_x k_t^N$ auf. Nach Konstruktion ist aber $\varphi(r)$ konstant auf $B_{\frac{\varrho}{2}}(y)$, so dass diese Störterme insgesamt nur Beiträge der Ordnung $O(e^{-\frac{\varepsilon}{t}})$ für $0 < \varepsilon < \frac{\varrho^2}{16}$ liefern. Wir können φ in der folglenden Betrachtung also vernachlässigen. Aus dem Beweis von Proposition 5.29 ergibt sich

$$\Bigl(\frac{\partial}{\partial t} + H_x\Bigr) r_t(x,y) = t^N q_t(x,y)(H_x \Phi_N(x,y)) + O\Bigl(e^{-\frac{\varepsilon}{t}}\Bigr) = O\Bigl(t^{N-\frac{n}{2}}\Bigr)\ .$$

Um die Ableitungen nach t und x in (3) abzuschätzen, benutzen wir

$$\frac{\partial}{\partial t} q_t(x,y) = \Bigl(-\frac{n}{2t} + \frac{1}{t} \cdot \frac{r(x)^2}{4t}\Bigr) \cdot (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{r(x)^2}{4t}}$$

$$\text{und} \qquad \frac{\partial}{\partial x^i} q_t(x,y) = e_i(r) \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{r}{2\sqrt{t}} \cdot (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{r(x)^2}{4t}}\ .$$

Dabei nutzen wir aus, dass wir jeweils Suprema von Funktionen in $\frac{r(x)}{2\sqrt{t}}$ zu bilden haben. □

Wir betrachten für $t > 0$ Simplizes

$$t\Delta^k = \bigl\{\, s \in [0,t]^{k+1} \bigm| s_0 + \dots + s_k = t \,\bigr\}$$

und definieren Integraloperatoren

$$Q_t^{N,k} = \int_{t\Delta^k} K_{s_0}^N \circ R_{s_1}^N \circ \dots \circ R_{s_k}^N \, d\lambda^k s$$

mit Integralkern

$$\begin{aligned} q_t^{N,k}(x,y) &= \int_{t\Delta^k} \Bigl(k_{s_0}^N * r_{s_1}^N * \dots * r_{s_k}^N\Bigr)(x,y)\, d\lambda^k s \\ &= \int_{t\Delta^k} \int_M \cdots \int_M k_{s_0}^N(x,z_1) r_{s_1}^N(z_1,z_2) \cdots r_{s_k}^N(z_k,y)\, d\mathrm{vol}_g z_1 \cdots d\mathrm{vol}_g z_k \, d\lambda^k s\ .\end{aligned}$$

Insbesondere sei $Q_t^0 = K_t^N$.

5.31. Satz (Minakshisundaram-Pleijel). *Es sei $\ell \geq 0$ und $N > \frac{n+\ell}{2}$.*

(1) *Die Reihe*

$$\sum_{k=0}^\infty (-1)^k q_t^{N,k}(x,y)$$

konvergiert in der $\mathcal{C}^\ell$-Norm gegen den Wärmeleitungskern $p_t(x,y)$ zum Operator e^{-tH}.

(2) *Für $t \to 0$ gilt*

$$\Bigl\| \frac{\partial^k}{\partial t^k}(p_t - k_t^N) \Bigr\|_{\mathcal{C}^\ell} = O\Bigl(t^{N - \frac{n+\ell}{2} - k}\Bigr)\ .$$

Für die Approximation des Wärmeleitungskernes p_t wählen wir also ein festes, ausreichend großes N. Der Satz sagt nicht, dass $k_t^N(x,y)$ für $N \to \infty$ gegen $p_t(x,y)$ konvergiert. Das stimmt nicht, was man schon daran sehen kann, dass wir den Euklidischen Wärmeleitungskern für $d(x,y) \geq \frac{\varrho}{2}$ mit φ abschneiden. Stattdessen sagt der Satz, wie man den echten Wärmeleitungskern $p_t(x,y)$ aus einer festen Approximation $k_t^N(x,y)$ zurückzugewinnen kann. Je größer N, desto besser ist diese Approximation für sehr kleine t.

Beweis. Wir betrachten die Integraloperatoren

$$R_t^{N,k+1} = \int_{t\Delta^k} R_{s_0} \circ \cdots \circ R_{s_k} \, d\lambda^k s$$

mit Integralkern

$$r_t^{N,k+1}(x,y) = \int_{t\Delta^k} \int_M \cdots \int_M r_{s_0}(x,z_1) \cdots r_{s_k}(z_k,y) \, d\mathrm{vol}_g z_1 \cdots d\mathrm{vol}_g z_k \, d\lambda^k s \; .$$

Für $0 < s \leq t$ gilt $\|r_s\|_{\mathcal{C}^\ell} \leq C s^{N-\frac{n+\ell}{2}}$ gleichmäßig in s auf kompakten Teilmengen von $M \times M$. Integration über das Simplex $t\Delta^k$ vom Volumen $\frac{t^k}{k!}$ ergibt

$$\left\| r_t^{N,k+1} \right\|_{\mathcal{C}^\ell} \leq \frac{C^{k+1} \mathrm{vol}(M)^k t^k}{k!} t^{(k+1)(N-\frac{n+\ell}{2})} \; .$$

Insbesondere wird die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k r_t^{N,k}(x,y)$$

von der Exponentialreihe majorisiert und konvergiert daher auf allen Kompakta in der $\mathcal{C}^\ell$-Norm. Als nächstes schreiben wir

$$q_t^{N,k}(x,y) = \int_0^t \int_M k_{t-s}^N(x,z) r_s^{N,k}(z,y) \, d\mathrm{vol}_g z \, ds$$

und erhalten auf Kompakta die $\mathcal{C}^\ell$-Konvergenz der Reihe

$$p_t(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q_t^{N,k}(x,y) = k_t^N(x,y) + \int_0^t \int_M k_{t-s}^N(x,z) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k r_t^{N,k}(z,y) \, d\mathrm{vol}_g z \, ds \; .$$

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + H_x \right) q_t^{N,k}(x,y) &= \lim_{s \to t} \int_M \underbrace{k_{t-s}^N(x,z)}_{\to \delta_x(z)} r_s^{N,k}(z,y) \, d\mathrm{vol}_g z \\ &\qquad + \int_0^t \int_M \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} + H_x \right) k_{t-s}^N(x,z)}_{= r_{t-s}^N(x,z)} r_s^{N,k}(z,y) \, d\mathrm{vol}_g z \, ds \\ &= r_t^{N,k}(x,y) + r_t^{N,k+1}(x,y) \; . \end{aligned}$$

Ableiten der gesamten Reihe liefert eine Teleskopsumme, und es folgt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + H_x \right) p_t(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\partial}{\partial t} + H_x \right) q_t^{N,k}(x,y) = \lim_{k \to \infty} (-1)^k r_t^{N,k+1}(x,y) = 0 \; .$$

Aus Proposition 5.30 (1) folgt auch

$$\left\| q_t^{N,k} \right\|_{\mathcal{C}^\ell} \leq C' \cdot \int_0^t \left\| r_s^{N,k} \right\|_{\mathcal{C}^\ell} ds \leq C' \cdot \frac{C^k \mathrm{vol}(M)^{k-1} t^k}{k!} t^{k(N-\frac{n+\ell}{2})} \; .$$

Analoge Abschätzungen gelten für die t-Ableitungen, und wir erhalten (2) aus

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial t^k}(p_t - k_t^N)\right\|_{\mathcal{C}^\ell} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\|\frac{\partial^k}{\partial t^k} q_t^{N,k}\right\|_{\mathcal{C}^\ell} \leq C \cdot t^{N-\frac{n+\ell}{2}-k} .$$

Insbesondere gilt für alle $\sigma \in \Gamma(V)$, dass

$$\lim_{t\to 0} \|p_t * \sigma - \sigma\|_{\mathcal{C}^\ell} = \lim_{t\to 0} \left\|(p_t - k_t^N) * \sigma\right\|_{\mathcal{C}^\ell} + \lim_{t\to 0} \left\|k_t^N * \sigma - \sigma\right\|_{\mathcal{C}^\ell} = 0 .$$

Also ist p_t tatsächlich ein Wärmeleitungskern. □

Nach Proposition 5.27 ist p_t der eindeutige Wärmeleitungskern. Aus der Approximationseigenschaft in Satz 5.31 (1) folgt im Nachhinein jetzt auch die Eindeutigkeitsaussage aus Proposition 5.29.

Für uns ist entscheidend, dass die Asymptotik des Wärmeleitungskerns im Grenzfall $t \to 0$ lokal berechnet werden kann. In der Tat zeigt Beispiel 5.28, dass $q_t(x, y) > 0$ für alle $t > 0$, unabhängig von der Entfernung zwischen x und y, allerdings ist $q_t(x, y)$ für kleine t und großen Abstand sehr klein. Auf kompakten Mannigfaltigkeiten bedeutet das, dass es zusätzlich zu der „Taylorreihe“ $k_t(x, y)$ weitere Beiträge von der Ordnung $e^{-\frac{\varepsilon}{t}}$ gibt, die anschaulich dadurch zustande kommen, dass die „Wärme“ einen weiten Weg auf M zurücklegt, bevor sie in die Nähe des Ausgangspunktes zurückkehrt. Im Zugang von Minakshisundaram-Pleijel erkennt man das daran, dass große Abstände und weite Wege erst von den Kernen $q_t^{N,k}$ mit k hinreichend groß zurückgelegt werden. Diese Integralkerne haben aber einen sehr kleinen Betrag für $t \to 0$, wie wir im Beweis gesehen haben.

5.4. Berechnung der Superspur

In diesem Abschnitt berechnen wir die Superspur des Wärmeleitungsoperators e^{-tD^2} im Grenzwert $t \to 0$. Dazu reskalieren wir Zeit- und Ortskoordinaten in der Umgebung eines Punktes $(x, 0) \in M \times [0, \infty)$, das heißt, wir betrachten die Geometrie „durch ein Mikroskop“. Der Wärmeleitungskern entwickelt eine Singularität für $t \to 0$, die wir dadurch beseitigen, dass wir die Clifford-Algebra $\mathbb{C}\ell(TM, g) \cong \Lambda^\bullet TM$ so reskalieren, dass nur die für die Superspur verantwortlichen Formen vom höchsten Grad unverändert bleiben. Dieser Trick geht auf Getzler zurück. Im Grenzwert erhalten wir den Wärmeleitungsoperator eines harmonischen Oszillators, den wir mit Mehlers Formel explizit bestimmen können. Die Superspur wird dann genau durch den lokalen Ausdruck $\hat{A}(TM, \nabla^{TM}) \operatorname{ch}(V/S, \nabla^V, \omega^V)$ gegeben.

Wir fassen noch einmal zusammen. Nach Lemma 5.25 von McKean-Singer ist der Index von D^+ die Superspur des Wärmeleitungsoperators e^{-tD^2}. Dieser wird nach dem Satz 5.31 von Minakshisundaram-Pleijel durch einen Integralkern $p\colon (0, \infty) \to \Gamma(V \boxtimes V^*)$ gegeben. Proposition 5.23 und Definition 5.24 sagen, dass wir die Superspur wie folgt als Integral erhalten:

$$\operatorname{ind} D^+ = \operatorname{str}(e^{-tD^2}) = \int_M \operatorname{str}_V(p_t(x, x))\, d\mathrm{vol}_g x .$$

Dazu benötigen wir die $\mathbb{Z}_2$-Graduierung $\omega^V = c(\omega) \cdot \omega^{V/S}$ von V. Die Endomorphismen-Algebra des Dirac-Bündels V lässt sich zerlegen als

$$\begin{aligned} &\operatorname{End} V \cong \mathbb{C}\ell(TM, g) \otimes \operatorname{End}(V/S) \cong \Lambda^\bullet TM \otimes \operatorname{End}(V/S) \\ \text{mit} \qquad &\operatorname{End} V/S = \{F \in \operatorname{End} V \mid c(X) \circ F = F \circ c(X) \text{ für alle } X \in \mathfrak{X}(M)\} . \end{aligned}$$

Dabei haben wir den Isomorphismus φ aus Proposition 4.36 zur Identifikation von $\mathbb{C}\ell(TM, g)$ mit $\Lambda^\bullet TM$ benutzt. Wir werden diese Zerlegung hier nicht beweisen, aber alle Operatoren in den folgenden Rechnungen werden entsprechend zerfallen.

5.32. Bemerkung. Wie in Übung 3.b) von Blatt 10 tragen nur Elemente von $\varphi(\Lambda^n TM) \otimes \operatorname{End}(V/S)$ zur Superspur bei. Für alle Basiselemente $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$ von $\mathbb{C}\ell(TM,g)$ mit $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ und $k < n$ finden wir e_j, so dass e_j mit $\omega \cdot e_{i_1} \cdots e_{i_k}$ antikommutiert (und damit auch mit $\omega \cdot e_{i_1} \cdots e_{i_k} \otimes F$ für $F \in \operatorname{End}(V/S)$), nämlich $j \in \{i_1, \dots, i_k\}$ für ungerades k und $j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ für ungerades k. Somit haben die λ- und $-\lambda$-Eigenräume jeweils die gleiche Dimension, und es folgt

$$\operatorname{str}(c(e_{i_1} \cdots e_{i_k}) \otimes F) = \operatorname{tr}(c(\omega \cdot e_{i_1} \cdots e_{i_k}) \otimes (\omega^{V/S} \circ F)) = 0 .$$

Auf der anderen Seite gilt

$$\operatorname{str}\big(c(e_1 \cdots e_n) \otimes F\big) = \operatorname{str}\big((-i)^{\frac{n}{2}} c(\omega) \otimes F\big) = (-i)^{\frac{n}{2}} \operatorname{tr}\big(\omega^{V/S} F\big) .$$

5.33. Bemerkung. Wir motivieren nun die sogenannte Getzler-Reskalierung.

(1) Für $t \to 0$ konzentriert sich die Funktion $q_t(x,y)$ aus Beispiel 5.28 und Proposition 5.29 fast vollständig im Bereich $\{(x,y) \in M \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ für $\varepsilon > 0$. Wir fixieren daher y und schreiben $x = \exp_y(\sqrt{r}v)$ für $r > 0$ klein. Für Funktionen in $v = \frac{x}{\sqrt{r}}$ folgt

$$f(x) = f(\sqrt{r}v) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial f}{\partial v^i}(\sqrt{r}v)$$

in geodätischen Normalkoordinaten um y.

(2) Wir trivialisieren V um y durch Parallelverschiebung entlang radialer Geodätischer wie in Satz 4.21. Mit Proposition 4.42 erhalten wir in dieser Trivialisierung

$$\nabla^V_{\frac{\partial}{\partial v^i}} = \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2} F^V_{x,\frac{\partial}{\partial v^i}} + O(\|x\|^2) = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial}{\partial v^i} + \frac{\sqrt{r}}{2} c(F^S_{v,\frac{\partial}{\partial v^i}}) + \frac{\sqrt{r}}{2} F^{V/S}_{v,\frac{\partial}{\partial v^i}} + O(r\,\|v\|^2) .$$

Dabei ist $F^S_{v,\partial/\partial v^i} \in \varphi(\Lambda^2 TM)$ und $F^{V/S}_{v,\partial/delv^i} \in \operatorname{End}(V/S)$. Mit einem ähnlichen Argument wie im Beweis von Proposition 4.42 und Bemerkung 4.53 (2) folgt, dass die Zusammenhangsform des Bündels und damit auch der Störkern $O(\|x\|^2) = O(r\,\|v\|^2)$ nur Terme in $\Lambda^k TM \otimes \operatorname{End}(V/S)$ mit $k \in \{0,2\}$ enthält.

Wir reskalieren den Isomorphismus φ zu

$$\varphi_r(\alpha) = r^{\frac{n-k}{2}} \varphi(\alpha) \qquad \text{für alle } \alpha \in \Lambda^k TM .$$

Insbesondere bleibt der Anteil vom Grad n, der nach Bemerkung 5.32 für die Superspur verantwortlich ist, unverändert. Außerdem gilt jetzt

$$c(e_i) \circ \varphi_r(\alpha) = \varphi_r\bigg(\Big(\frac{1}{\sqrt{r}} e^i \wedge - \sqrt{r}\iota_{e_i}\Big)\alpha\bigg) .$$

Aus dem obigen Ausdruck wird jetzt

$$\begin{aligned}
\nabla^V_{\frac{\partial}{\partial v^i}} &= \frac{1}{\sqrt{r}}\bigg(\frac{\partial}{\partial v^i} + \frac{1}{8}\sum_{j,k} \langle R_{v,\frac{\partial}{\partial v^i}} e_j, e_k\rangle e^j \wedge e^k \wedge + O(\sqrt{r}(1 + \|v\|^2))\bigg) \\
&= \frac{1}{\sqrt{r}}\bigg(\frac{\partial}{\partial v^i} + \frac{1}{4}\Big\langle R|_y v, \frac{\partial}{\partial v^i}\Big\rangle + O(\sqrt{r}(1 + \|v\|^2))\bigg)
\end{aligned}$$

aufgrund der Blocksymmetrie des Riemannschen Krümmungstensors R auf Satz 1.51 (4) und der Glattheit von R.

(3) Analog folgt

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j} c(e_i)c(e_j)F^{V/S}_{e_i,e_j} = \frac{1}{r} F^{V/S} + O(r^0) = \frac{1}{r} F^{V/S}|_y + O\bigg(1 + \frac{\|v\|}{\sqrt{r}}\bigg) .$$

(4) Nach Satz stimmen $(\exp_y^* g)_v$ und g_y auf T_yM bis auf $O(\|v\|^2)$ überein, also weicht die konstante Basis $\frac{\partial}{\partial v^i}$ auf T_yM nur um $O(\|v\|^2)$ von einer orthonormalen Basis ab. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}\Delta^{\exp_y^* V} &= -\sum_{i=1}^n \Big(\nabla^V_{\frac{\partial}{\partial v^i}} \nabla^V_{\frac{\partial}{\partial v^i}} - \nabla^V_{\nabla_{\partial/\partial v_i} \frac{\partial}{\partial v^i}} \Big) \\ &\qquad + \sum_{j,k=1}^n O(\|v\|^2) \frac{\partial^2}{\partial v^j \partial v^k} + \sum_{j=1}^n O(\|v\|) \frac{\partial}{\partial v^j} \ .\end{aligned}$$

Wir benutzen die Bochner-Lichnerowicz-Weitzenböck-Formel aus Satz 4.44 und erhalten

$$D^2 = \frac{1}{r} \biggl(\underbrace{- \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial}{\partial v^i} + \frac{1}{4} \langle R|_y v, e_i \rangle \Big)^2 + F^{V/S}|_y}_{=H} + O\big(\sqrt{r}(1 + \|v\|^2)\big) \biggr) \ .$$

(5) Für den Wärmeleitungsoperator folgt wegen der Lokalität aus Satz 5.31, dass $e^{-rtD^2} \to e^{-tH}$ für $r \to 0$. Es bezeichne $r_t(v,w)$ den Wärmeleitungskern zum Operator H. Dann gilt

$$\lim_{r \to 0} \operatorname{str}(p_{rt}(y,y)) = \operatorname{str}(r_t(0,0)) \ ,$$

wobei der Störkern Ableitungsoperatoren bis zur Ordnung 2 enthalten kann.

Im folgenden bezeichne $\pi \colon TM \to M$ das Tangentialbündel von M, $\psi_y \colon \exp_y^* V \to V_y$ die Trivialisierung des zurückgeholten Bündels $\exp_y^* V \to T_yM$ durch Parallelverschiebung entlang radialer Geodätischer und $\varphi_r \colon \Lambda^\bullet TM \otimes \operatorname{End}(V/S) \to \mathbb{C}\ell(TM, g) \otimes \operatorname{End}(V/S) \cong \operatorname{End} V$ den reskalierten Isomorphismus aus Bemerkung 5.33 (2).

5.34. Definition. Es sei (V, g^V, ∇^V, c) ein Dirac-Bündel über (M,g). Die Abbildung ϱ_r, die einer Familie $p \colon (0,\infty) \to \Gamma(V \boxtimes V^*)$ von Integralkernen eine Familie von Schnitten $(\varrho_r p) \colon (0,\infty) \to \Gamma(\pi^*(\Lambda^\bullet TM \otimes \operatorname{End}(V/S)) \to TM)$ mit

$$(\varrho, p)_t(v,y) = \varphi_r^{-1} \circ \psi_y \circ p_{rt}\big(\exp_y(\sqrt{r} v), y\big) \in \Lambda^\bullet T_yM \otimes \operatorname{End}(V/S)_y$$

für alle $v \in T_yM$ zuordnet, heißt *Getzler-Reskalierung* um den Faktor $r > 0$.

5.35. Bemerkung. Wir haben uns in Bemerkung 5.33 (5) überlegt, dass im Grenzwert $r \to 0$ die Schnitte $(\varrho_r p)$ gegen den Wärmeleitungskern eines Operators H auf T_yM konvergieren, der nur vom Krümmungstensor $R|_y \in \Lambda^2 T_yM \otimes \mathfrak{so}(T_yM)$ und der Twistkrümmung $F^{V/S}|_y \in \Lambda^2 TM \otimes \mathfrak{u}(V_y)$ abhängt. Wir ersetzen diese durch eine schiefsymmetrische Matrix $A \in \mathfrak{so}(n)$ und eine schiefhermitesche Matrix $B \in \mathfrak{u}(\operatorname{rk} V)$ und betrachten den *Getzler-Operator*

$$H = -\sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{4} \langle Ax, e_i \rangle \Big)^2 + B$$

auf Abbildungen von $\mathbb{R}^n \cong T_yM$ nach $\mathbb{C}^{\operatorname{rk} V} \cong V_y$. Ausmultiplizieren ergibt

$$\begin{aligned}H &= -\sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{4} \underbrace{\langle Ae_i, e_i \rangle}_{=0} + \frac{1}{2} \langle Ax, e_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{16} \langle Ax, e_i \rangle^2 \Big) + B \\ &= \Delta - \frac{1}{2} \nabla_{A\mathcal{R}} - \frac{1}{16} \|A\mathcal{R}\|^2 + B \ ,\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{R}_x = x$ wieder das Radialfeld und ∇ den trivialen Zusammenhang bezeichne. Dieser Operator zerfällt in drei paarweise kommutierende Summanden

$$\Delta - \frac{1}{16}\left\|A\mathcal{R}\right\|^2 , \qquad \frac{1}{2}\nabla_{A\mathcal{R}} \quad \text{und} \qquad B \,.$$

Wir rechnen insbesondere nach, dass

$$\begin{aligned}\left[\Delta - \frac{1}{16}\left\|A\mathcal{R}\right\|^2 , \frac{1}{2}\nabla_{A\mathcal{R}}\right] &= -\sum_{i,j}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i} + \frac{1}{16}\langle Ax, e_i\rangle, \frac{1}{2}\langle Ax, e_j\rangle\frac{\partial}{\partial x_j}\right] \\ &= -\sum_{i,j}\langle Ae_i, e_j\rangle\left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{1}{16}\right) = 0\end{aligned}$$

wegen der Schiefsymmetrie von A und des Satzes von Schwarz. Alternativ schreiben wir $-\frac{1}{2}\nabla_{A\mathcal{R}}$ als Ableitung der Familie von Drehungen $x \mapsto e^{-\frac{t}{2}A}x$, die offensichtlich mit $\Delta - \frac{1}{16}\left\|A\mathcal{R}\right\|^2$ kommutiert. Der Operator $\Delta - \frac{1}{16}\left\|A\mathcal{R}\right\|^2$ ähnelt bis auf das Vorzeichen einem harmonischen Oszillator der Form $\Delta + \frac{1}{16}\left\|A\mathcal{R}\right\|^2$. Für eine „echte“ Matrix A verhält sich unser Modelloperator analytisch schlecht, während der harmonische Oszillator einen Wärmeleitungskern für alle $t \in (0, \infty)$ besitzt. Da wir am Ende aber Matrizen mit nilpotenten Koeffizienten in $\Lambda^2 T_y M$ betrachten, spielt das Vorzeichen für uns keine Rolle.

5.36. Proposition (Mehlers Formel). *Der Getzler-Operator*

$$H = \Delta - \frac{1}{16}\left\|A\mathcal{R}\right\|^2 - \frac{1}{2}\nabla_{A\mathcal{R}} + B$$

auf $\mathcal{C}^\infty\big(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{\operatorname{rk} V}\big)$ *hat für kleine* $t > 0$ *und* x, $y \in \mathbb{R}^n$ *den Wärmeleitungskern*

$$\det\left(4\pi t\,\frac{\sinh(tA/2)}{tA/2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4t}\left(\left\langle x, \frac{tA/2}{\tanh(tA/2)}x\right\rangle - 2\left\langle x, \frac{tA/2}{\sinh(tA/2)}e^{-\frac{tA}{2}}y\right\rangle + \left\langle y, \frac{tA/2}{\tanh(tA/2)}y\right\rangle\right)} \cdot e^{-tB} \,.$$

Beweis. Wir schreiben A bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ wie in Bemerkung 4.47 (5) und zerlegen A als direkte Summe von $2{\times}2$-Matrizen A_i. Dann kommutieren die Operator $\Delta_i - \frac{1}{16}\,A_i$ und $\frac{1}{2}\nabla_{A_i\mathcal{R}}$ paarweise, und wir können die Wärmeleitungskerne einzeln berechnen. Schließlich zerfällt der harmonische Oszillator zur Matrix $A_i = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -a \\ a & 0\end{smallmatrix}\right)$ in zwei eindimensionale harmonische Oszillatoren $-\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{a^2}{16}$.

Wir betrachten daher zunächst den eindimenisonalen Modelloperator $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a^2 x^2$. Er ist quadratisch in Ableitungen und Ortsvariablen und selbstadjungiert. Als Ansatz versuchen wir es mit einer zeitabhängigen Gaußschen Glockenkurve und setzen

$$p_t(x, y) = e^{f(t)x^2 + 2g(t)xy + f(t)y^2 + h(t)} \,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}p_t(x, y) &= \big(f'(t)(x^2 + y^2) + 2g'(t)xy + h'(t)\big)\,p_t(x, y)\,, \\ \frac{\partial}{\partial x}p_t(x, y) &= 2\big(f(t)x + g(t)y\big)\,p_t(x, y) \\ \text{und} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}p_t(x, y) &= \big(4(f(t)x + g(t)y)^2 + 2f(t)\big)\,p_t(x, y)\,.\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} f'(t) &= 4f(t)^2 - a^2 = 4g(t)^2 \;, \\ g'(t) &= 4f(t)g(t) \\ \text{und} \qquad h'(t) &= 2f(t) \;. \end{aligned}$$

Lösungen werden gegeben durch

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{a}{2}\coth(2at+c) && \text{mit} && f'(t) = a^2 - a^2\coth(2at+c)^2 \;, \\ g(t) &= \frac{a}{2\sinh(2at+c)} && \text{mit} && g'(t) = a^2 \cdot \frac{\coth(2at+c)}{\sinh(2at+c)} \;, \\ \text{und} \qquad h(t) &= -\frac{1}{2}\cdot\log(\sinh(2at+c)\cdot d) && \text{mit} && h'(t) = -a\coth(2at+c) \;. \end{aligned}$$

Im Grenzwert $t \to 0$ soll sich $p_t(x,y)$ wie der Euklidische Wärmeleitungskern verhalten. Daraus folgt $c = 0$, und wegen $\sinh(2at) \sim 2at$ für kleine t auch $d = \frac{2\pi}{a}$. Somit

$$p_t(x,y) = \left(\frac{2\pi}{a}\cdot\sinh(2at)\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{a}{2}\left(\coth(2at)(x^2+y^2) - \frac{2xy}{\sinh(2at)}\right)} \;.$$

Man beachte, dass diese Formel für $a = 0$ wieder den Euklidischen Wärmeleitungskern liefert.

Da $-\|A\mathcal{R}\|^2 = \langle \mathcal{R}, A^2\mathcal{R}\rangle$, dürfen wir in der obigen Formel a durch $\frac{A}{4}$ ersetzen. Mit der Multiplikativität der Determinante erhalten wir

$$\det\left(4\pi t\,\frac{\sinh(tA/2)}{tA/2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4t}\left(\left\langle x, \frac{tA/2}{\tanh(tA/2)}x\right\rangle - 2\left\langle x, \frac{tA/2}{\sinh(tA/2)}y\right\rangle + \left\langle y, \frac{tA/2}{\tanh(tA/2)}y\right\rangle\right)}$$

als formalen Wärmeleitungskern für den Operator $\Delta - \frac{1}{16}\|A\mathcal{R}\|^2$. Man beachte, dass im Nenner stets $\sinh(tA/2)$ auftaucht. Da schiefsymmetrische Matrizen imaginäre Eigenwerte haben und sich der hyperbolische Sinus $\sinh(it\lambda/2)$ wie der echte Sinus $i\sin(t\lambda/2)$ verhält, existiert dieser Integralkern nur für kleine $t > 0$.

Der Operator $e^{-\frac{t}{2}\nabla_{A\mathcal{R}}}$ entspricht einer Drehung um $e^{-\frac{tA}{2}} \in SO(n)$. Für den gesamten Getzler-Operator H erhalten wir also den Wärmeleitungskern

$$\det\left(4\pi t\,\frac{\sinh(tA/2)}{tA/2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ e^{-\frac{1}{4t}\left(\left\langle x, \frac{tA/2}{\tanh(tA/2)}x\right\rangle - 2\left\langle x, \frac{tA/2}{\sinh(tA/2)}\cdot e^{-\frac{tA}{2}}y\right\rangle + \left\langle y, \frac{tA/2}{\tanh(tA/2)}y\right\rangle\right)} \cdot e^{-tB} \;. \qquad \square$$

Beweis des Atiyah-Singer-Indexsatzes 5.20. Wie bereits gesagt, schreiben wir mit der McKean-Singer-Formel aus Lemma 5.25 und Proposition 5.23 und Definition 5.24 den Index von D^+ als Integral über die punktweise Superspur des Wärmeleitungskerns, also

$$\operatorname{ind} D^+ = \operatorname{str}(e^{-tD^2}) = \int_M \operatorname{str}_V(p_t(x,x))\,d\mathrm{vol}_g x$$

für ein beliebiges $t > 0$. Da dieses Integral nicht von t abhängt, dürfen wir mit Bemerkung 5.33 (5) Getzler-Reskalierung anwenden. Dabei wird aus der Superspur str_V auf $\operatorname{End} V$ nach Bemerkung 5.32 die Spur des Formenanteils vom Grad $n = \dim M$ mit Vorfaktor $(-i)^{\frac{n}{2}}\omega^{V/S}$, also

$$\operatorname{ind} D^+ = \int_M \operatorname{tr}_V\left((-i)^{\frac{n}{2}}\omega^{V/S}(\varrho_r p)_t(x,x)\right)$$

mit $t > 0$, $r > 0$ beliebig. Da $\omega^{V/S} \in \Gamma(\circ(TM) \otimes \operatorname{End} V/S)$, wählt Integration der Spur den Anteil von maximalem Grad in $\Omega^n(M; \circ(TM))$ aus.

Wir belassen t endlich und betrachten den Grenzwert für $r \to 0$. Nach Bemerkung 5.33 (4) konvergiert der reskalierte Operator rD^2 gegen den Getzler-Operator H. Da die asymptotische Entwicklung des Wärmeleitungskerns nach dem Satz 5.31 von Minakshisundaram-Pleijel und Proposition 5.29 stetig von der lokalen Geometrie von (M,g) und dem verallgemeinerten Laplace-Operator abhängt, folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{ind} D^+ &= \lim_{r\to 0}\int_M \operatorname{tr}_V\Big((-i)^{\frac{n}{2}}\omega^{V/S}(\varrho,p)_t(x,x)\Big)\\ &= \int_M \operatorname{tr}_V\Big((-i)^{\frac{n}{2}}\omega^{V/S}\lim_{r\to 0}(\varrho_r,p)_t(x,x)\Big)\\ &= \int_M \operatorname{tr}_V\Big((-i)^{\frac{n}{2}}\omega^{V/S}k_t(0,0)\Big)\;,\end{aligned}$$

wobei $k_t = k_{x,t}$ den formalen Wärmeleitungskern zum Getzler-Operator H_x auf $\Gamma(\exp_x^* V \to T_xM)$ bezeichne. Wir setzen Mehlers Formel aus Proposition 5.36 ein und erhalten

$$\begin{aligned}\operatorname{ind} D^+ &= \int_M \operatorname{tr}_V\left(\omega^{V/S}\det\left(4\pi i t\frac{\sinh(tR/2)}{tR/2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-tF^{V/S}}\right)\\ &= \int_M \det\left(4\pi i t\frac{\sinh(tR/2)}{tR/2}\right)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{tr}_V\left(\omega^{V/S}e^{-tF^{V/S}}\right)\;,\end{aligned}$$

unabhängig von $t > 0$. Da der Integrand ein Polynom in t ist, dürfen wir für t eine beliebige Zahl einsetzen, etwa $t = \frac{1}{2\pi i}$, und erhalten

$$\begin{aligned}\operatorname{ind} D^+ &= \int_M \det\left(\frac{R/4\pi i}{\sinh(R/4\pi i)}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{tr}_V\left(2^{-\frac{n}{2}}\omega^{V/S}e^{-\frac{F^{V/S}}{2\pi i}}\right)\\ &= \int_M \hat{A}(TM,\nabla^{TM})\operatorname{ch}(V/S,\nabla^V,\omega^V)\;. \qquad\square\end{aligned}$$

5.5. Zwei Anwendungen

Stellvertretend für viele mehr oder weniger trickreiche Anwendungen des Atiyah-Singer-Indexsatzes geben wir ein topologisches und ein geometrisches Resultat.

5.37. Satz (Rokhlin). *Es sei M eine vierdimensionale geschlossene Spin-Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

$$\operatorname{sign}(M) \in 16\mathbb{Z}\;.$$

Beispielsweise gilt $\dim H^2_{dR}(\mathbb{C}P^2) = 1$, somit $\operatorname{sign}(M) = \pm 1$, je nach Orientierung. In der Tat ist $\mathbb{C}P^n$ genau dann spin, wenn n ungerade ist, so dass der Satz von Rokhlin stimmt. Ein anderes Beispiel sind $K3$-Flächen M mit $\dim H^2_{dR}(M) = 22$ und $\operatorname{sign}(M) = (3-19) = -16$. $K3$-Flächen sind spin.

Beweis. Es sei D^+ ein ungetwisteter Dirac-Operator wie in Bemerkung 4.56 (da die Spinstruktur nicht eindeutig ist, könnte es mehrere geben). Nach Definition ist $\operatorname{ind}(D^+)$ immer eine ganze Zahl. Für $n = 4$ trägt das Spinorbündel ΣM eine sogenannte quaternionische Struktur, so dass es eine parallele skalare Multiplikation mit Quaternionen auf ΣM gibt, die mit D^+ kommutiert. Da $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{H} = 2$ und $\mathbb{H}$ auch auf $\ker D^+$ und $\ker D^- \cong \operatorname{coker} D^+$ wirkt, haben beide gerade komplexe Dimension, und es folgt

$$\operatorname{ind} D^+ \in 2\mathbb{Z}\;.$$

Nach Bemerkung 4.29 (1) gilt

$$\hat{A}(TM) = 1 - \frac{1}{24}\,p_1(TM) + \cdots\ ,$$

nach dem Atiyah-Singer-Indexsatz 5.20 also

$$\operatorname{ind} D^+ = \hat{A}(TM)[M] = -\frac{1}{24}\,p_1(TM)[M] \in 2\mathbb{Z}\ ,$$

somit

$$p_1(TM)[M] \in 48\mathbb{Z}\ .$$

Analog zu Bemerkung 4.29 (1) rechnet man nach, dass

$$L(TM) = 1 + \frac{1}{3}\,p_1(TM) + \cdots\ ,$$

somit gilt nach dem Signatursatz 5.21 von Hirzebruch

$$\operatorname{sign}(M) = L(TM)[M] = \frac{1}{3}\,p_1(TM)[M] \in 16\mathbb{Z}\ . \quad \square$$

Die Ganzzahligkeit gewisser Indizes spielt in vielen weiteren Anwendungen eine Rolle. Selbst für ungerade-dimensionale Mannigfaltigkeiten, für die unsere Indizes gar nicht definiert sind, erhält man mit diesem Trick und Kobordismus-Theorie Invarianten in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, wie zum Beispiel Eells-Kuiper und Kreck-Stolz-Invarianten.

Unsere zweite Anwendung gibt Auskunft über die Skalarkrümmung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Mit geometrischen Mitteln ist die Skalarkrümmung sehr schwer zu fassen; alle geometrischen Sätze in Kapitel 2 handelten von Schnitt- oder Ricci-Krümmung.

5.38. Satz (Lichnerowicz). *Es sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 4m$ mit $\hat{A}(TM)[M] \neq 0$. Dann impliziert* $\mathrm{scal} \geq 0$ *auf ganz M, dass* $\mathrm{scal} = 0$*. Insbesondere trägt M keine Metrik mit positiver Skalarkrümmung.*

Beweis. Es sei wieder D^+ ein ungetwisteter Dirac-Operator. Da

$$\ker D^+ - \ker D^- = \operatorname{ind} D^+ = \hat{A}(TM)[M] \neq 0\ ,$$

folgt $\ker D \neq \{0\}$, also existiert ein Spinor $\psi \in \Gamma(\Sigma M) \setminus \{0\}$ mit $D\psi = 0$. Wir setzen ψ in die Bochner-Lichnerowicz-Weitzenböck-Formel aus Satz 4.44 ein und erhalten

$$\begin{aligned} 0 = \int_M \langle \psi, D^2\psi \rangle d\mathrm{vol}_g &= \int_M \langle \psi, \Delta^{\Sigma M}\psi + \frac{\mathrm{scal}}{4} \cdot \psi \rangle\, d\mathrm{vol}_g \\ &= \int_M \left(\left\| \nabla^{\Sigma M}\psi \right\|^2 + \frac{\mathrm{scal}}{4}\, \|\psi\|^2 \right) d\mathrm{vol}_g \end{aligned}$$

nach Übung 4.b) von Blatt 7. Wenn wir $\mathrm{scal} \geq 0$ annehmen, ist der Integrand nicht-negativ, also fast überall 0. Aus $\left\| \nabla^{\Sigma M}\psi \right\|^2 = 0$ folgt Parallelität von ψ. Da M zusammenhängend ist, verschwindet ψ also nirgends auf M. Aber dann folgt aus $\mathrm{scal} \cdot \|\psi\|^2 = 0$ bereits $\mathrm{scal} = 0$ auf ganz M. $\square$

5.39. Bemerkung. Der Trick, das Auftreten von $\frac{\mathrm{scal}}{4}$ in einer Formel für D^2 für den Beweis auszunutzen, lässt den obigen Satz nach einer nichtssagenden Zufalls-Erkenntnis aussehen. Umso erstaunlicher ist folgendes Resultat von Gromov und Lawson:

Sei M geschlossen und einfach zusammenhängend mit $\dim M \geq 5$*. Genau dann, wenn M nicht spin ist, oder wenn M spin ist mit $\alpha(M) = 0$, trägt M eine Metrik mit positiver Skalarkrümmung.*

Hierbei bezeichnet $\alpha(M)$ das sogenannte α-Geschlecht. Es gilt $\alpha(M) = \hat{A}(TM)[M] \in \mathbb{Z}$, falls $n = \dim M \in 4\mathbb{Z}$, $\alpha(M) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für $n \equiv 1, 2 \bmod 8$ und $\alpha(M) = 0$ für $n \equiv 3, 5, 6$ oder $7 \bmod 8$. In Dimension $4m$ ist der Satz 5.38 also das einzige Hindernis gegen positive Skalarkrümmung auf einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten. Und im Falle $n \equiv 1$ oder 2 mod 8 benutzen wir die KO-theoretische Formulierung des Indexsatzes, um einen Spinor $\psi \neq 0$ mit $D\psi = 0$ zu finden und fahren dann fort wie im obigen Beweis.

Somit ist Satz 5.38 ein unerwartet gutes Ergebnis. Für gewisse „einfache“ Fundamentalgruppen liefern ähnliche Methoden wie bei Gromov-Lawson, dass Indizes geeigneter Dirac-Operatoren das einzige Hindernis gegen scal > 0 sind. Für kompliziertere Fundamentalgruppen reicht Indextheoreie nicht mehr aus. Hier ist die Frage nach der Existenz von Metriken mit scal > 0 im allgemeinen noch offen.

Literatur

[B] P. H. Bérard, *Spectral geometry: direct and inverse problems,* Springer, Berlin, 1986.
[BGV] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators,* Springer, Berlin, 1992.
[BT] R. Bott, L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology,* Springer, New York, 1982.
[CE] J. Cheeger, D. G. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry,* North-Holland, Amsterdam 1975.
[GHL] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry,* Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1987.
[GKM] D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer, *Riemannsche Geometrie im Großen,* Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1975.
[L1] J. M. Lee, Riemannian manifolds, An introduction to curvature, Springer-Verlag, New York, 1997.
[L2] J. M. Lee, Introduction to smooth manifolds, Springer-Verlag, New York, 2003.
[R] J. Roe, *Elliptic operators, topology and asymptotic methods,* Second edition, Longman, Harlow, 1998.
[Zh] W. Zhang, Lectures on Chern-Weil Theory and Witten Deformations, World Scientific, Singapur, 2001.