

Differentialtopologie SS 2018

Sebastian Goette

Die Differentialtopologie betrachtet differenzierbare Mannigfaltigkeiten und glatte Abbildungen zwischen ihnen. Typische Fragestellungen sind zum Beispiel: sind zwei gegebene Mannigfaltigkeiten diffeomorph? Sind zwei gegebene Abbildungen homotop? Haben alle Selbstabbildungen einer Mannigfaltigkeit in sich selbst in einer gegebenen Homotopieklasse Fixpunkte? Wir lernen verschiedene Techniken kennen, um solche Fragen zu beantworten.

Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel führen wir die grundlegenden Definitionen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten ein.

1.1. Mannigfaltigkeiten mit Rand

DEFINITION. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt m -dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , wenn es zu jedem Punkt $x \in M$ eine Umgebung U von x , eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^m$ und einen C^k -Diffeomorphismus $\varphi: U \rightarrow V$ mit

$$U \cap M = \varphi^{-1}(V \cap (\mathbb{R}^m \times \{o\}))$$

gibt. φ heißt Karte von M .

BEISPIEL. $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist n -dimensionale C^∞ Untermannigfaltigkeit. Eine große Klasse von Untermannigfaltigkeiten liefert der Satz vom regulären Wert. Hierbei heißt $y \in \mathbb{R}^m$ regulärer Wert von $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (U offen), falls $Df(x) = f'(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ surjektiv ist $\forall x \in f^{-1}(\{y\})$.

SATZ (vom regulären Wert, Analysis 2). *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \geq 1$ und $y_0 \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert von $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$. Dann ist $f^{-1}(\{y_0\})$ eine $(n - m)$ dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n .*

1.1. BEISPIEL. $Gl(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $O(n)$ und $SO(n)$ sind C^∞ Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^{n^2} .

Wir ersetzen jetzt den Begriff der Untermannigfaltigkeit durch das abstraktere Objekt der Mannigfaltigkeit.

1.2. DEFINITION. Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein Hausdorff-Raum M mit abzählbarer Basis, so dass jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset M$ besitzt, die zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n homöomorph ist.

1.3. BEMERKUNG. Es folgen einige weitere Definitionen und Eigenschaften:

- (1) Ein *Hausdorff-Raum* ist ein topologischer Raum, in dem je zwei verschiedene Punkte disjunkte offene Umgebungen besitzen.
- (2) Eine *abzählbare Basis* eines topologischen Raumes X ist eine abzählbare Menge \mathcal{B} offener Teilmengen von X , so dass jede offene Menge als Vereinigung von Mengen $U \in \mathcal{B}$ geschrieben werden kann.
- (3) Ein Homöomorphismus $\varphi: X \rightarrow Y$ on topologischen Räumen ist eine stetige Abbildung, für die eine stetige Umkehrabbildung existiert.
- (4) Eine (n -dimensionale) *Karte* von M ist ein Homöomorphismus $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$, wobei $U^\varphi \subset M$ und $V^\varphi \subset \mathbb{R}^n$ offen seien. Eine *Karte* um $p \in M$ ist eine Karte $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$ mit $p \in U^\varphi$.
- (5) Ein (n -dimensionaler) *Atlas* von M ist eine Menge \mathcal{A} von Karten von M , so dass die Definitionsbereiche der Karten ganz M überdecken. Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist somit ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis, der einen n -dimensionalen Atlas besitzt.

- (6) Aus der „Invarianz des Gebietes“ folgt, dass die Dimension eine Invariante ist. Wenn ein topologischer Raum einen m - und einen n -dimensionalen Atlas besitzt, folgt also $m = n$.
- (7) Seien schließlich φ, ψ Karten in einem Atlas \mathcal{A} , dann heißt die Abbildung

$$\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U^\varphi \cap U^\psi) \rightarrow \psi(U^\varphi \cap U^\psi)$$

ein *Kartenwechsel* im Atlas \mathcal{A} . Man beachte, dass $\psi \circ \varphi^{-1}$ eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n auf eine andere homöomorph abbildet. Man kann also fragen, ob der Kartenwechsel $\psi \circ \varphi^{-1}$ ein \mathcal{C}^k -Diffeomorphismus ist.

1.4. DEFINITION. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, und sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Ein \mathcal{C}^k -Atlas auf M ist ein Atlas \mathcal{A} auf M , dessen Kartenwechsel $\psi \circ \varphi^{-1}$ für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ \mathcal{C}^k -Diffeomorphismen sind.

Ein \mathcal{C}^k -Atlas heißt *maximal*, wenn er in keinem anderen \mathcal{C}^k -Atlas echt enthalten ist.

Eine n -dimensionale \mathcal{C}^k -Mannigfaltigkeit ist ein Paar aus einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M und einem maximalen \mathcal{C}^k -Atlas von M . Eine \mathcal{C}^∞ -Mannigfaltigkeit heißt auch *glatte Mannigfaltigkeit*.

1.5. BEMERKUNG. Man kann leicht zeigen, dass jeder \mathcal{C}^k -Atlas \mathcal{A} von M in genau einem maximalen \mathcal{C}^k -Atlas $\bar{\mathcal{A}}$ enthalten ist, nämlich in

$$\{ \psi: U^\psi \rightarrow V^\psi \text{ Karte von } M \mid \psi \circ \varphi^{-1} \text{ ist } \mathcal{C}^k\text{-Diffeomorphismus für alle } \varphi \in \mathcal{A} \} .$$

Es reicht also, einen beliebigen \mathcal{C}^k -Atlas auf M anzugeben. In der Praxis möchte man oft so wenig Karten wie nötig benutzen.

In diesem Sinne liefern zwei \mathcal{C}^k -Atlanten \mathcal{A} und \mathcal{A}' von M die gleiche \mathcal{C}^k -Mannigfaltigkeit, wenn sie in dem gleichen maximalen Atlas enthalten sind. Das gilt genau dann, wenn die Kartenwechsel $\psi \circ \varphi^{-1}$ für alle $\varphi \in \mathcal{A}$ und $\psi \in \mathcal{A}'$ \mathcal{C}^k -Diffeomorphismen sind.

- 1.6. BEISPIEL. (1) \mathbb{R}^n ist n -dimensionale \mathcal{C}^k -Mannigfaltigkeit für alle k mit Atlas $\{\text{id}_{\mathbb{R}^n}\}$. Genauso ist jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ eine \mathcal{C}^k -Mannigfaltigkeit mit Atlas $\{\text{id}_U\}$.
- (2) Die n -dimensionale Kugel $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ ist eine n -dimensionale \mathcal{C}^k -Mannigfaltigkeit für alle k . Die stereographischen Projektionen an den Punkten $\pm e_{n+1}$ bilden einen Atlas $\{\varphi_+, \varphi_-\}$ mit

$$\varphi_\pm: S^n \setminus \{\pm e_{n+1}\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{1 \mp x_{n+1}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

Die Umkehrabbildungen werden gegeben durch

$$\varphi_\pm^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1} \begin{pmatrix} 2y_1 \\ \vdots \\ 2y_n \\ \pm y_1^2 \pm \dots \pm y_n^2 \mp 1 \end{pmatrix},$$

also erhalten wir als Kartenwechsel zum Beispiel

$$\varphi_- \circ \varphi_+^{-1}: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{y_1^2 + \dots + y_n^2} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} .$$

Es ist jetzt leicht zu sehen, dass dieser und alle anderen Kartenwechsel \mathcal{C}^∞ -Diffeomorphismen sind.

- 1.7. BEMERKUNG. (1) Sei $0 \leq l \leq k$, und sei (M, \mathcal{A}) eine \mathcal{C}^k -Mannigfaltigkeit, dann ist M trivialerweise auch eine \mathcal{C}^l -Mannigfaltigkeit, wobei der maximale \mathcal{C}^k -Atlas automatisch zu einem (im allgemeinen nicht maximalen) \mathcal{C}^l -Atlas wird.
- (2) Die Umkehrung ist nicht trivial: sei $1 \leq l \leq k$, und sei (M, \mathcal{A}) ein \mathcal{C}^l -Mannigfaltigkeit. Nach einem Resultat von Whitney enthält \mathcal{A} einen \mathcal{C}^k -Atlas, ja sogar einen Atlas mit reell analytischen Kartenwechseln, siehe [Hi, Ch. 2]. Wir werden solche reell analytischen Mannigfaltigkeiten jedoch nicht weiter betrachten, da \mathcal{C}^∞ -Mannigfaltigkeiten für alle folgenden Konstruktionen genau das richtige Maß an Flexibilität bieten.
- (3) Nicht jede topologische (also \mathcal{C}^0 -)Mannigfaltigkeit M trägt einen \mathcal{C}^k -Atlas mit $k \geq 1$, und wenn doch, kann es verschiedene, nicht diffeomorphe \mathcal{C}^k -Strukturen auf M geben, beispielsweise 28 verschiedene solche Strukturen auf S^7 , oder überabzählbar viele auf \mathbb{R}^4 .

1.8. DEFINITION. Seien (M, \mathcal{A}) , (N, \mathcal{A}') zwei \mathcal{C}^k -Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $F: M \rightarrow N$ heißt \mathcal{C}^k -differenzierbar, wenn sie stetig ist und die Abbildungen

$$F^\varphi \cdot \psi = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U^\varphi \cap F^{-1}U^\psi)}: \varphi(U^\varphi \cap F^{-1}U^\psi) \rightarrow V^\psi$$

für alle Karten $\varphi \in \mathcal{A}$ und $\psi \in \mathcal{A}'$ von der Klasse \mathcal{C}^k ist. Sie heißt \mathcal{C}^k -Diffeomorphismus, falls die Umkehrabbildung existiert und ebenfalls \mathcal{C}^k -differenzierbar ist.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, dann heißt eine \mathcal{C}^k -differenzierbare Abbildung $\gamma: I \rightarrow M$ auch eine \mathcal{C}^k -Kurve in M . Eine \mathcal{C}^k -differenzierbare Abbildung $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt auch eine \mathcal{C}^k -Funktion auf M .

In Zukunft werden wir statt (M, \mathcal{A}) einfach nur noch M schreiben. Wir schreiben $\mathcal{C}^k(M, N)$ für die Menge der \mathcal{C}^k -differenzierbaren Abbildungen von M nach N , und $\mathcal{C}^k(M) = \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R})$ für den Vektorraum der \mathcal{C}^k -differenzierbaren Funktionen auf M .

1.9. BEMERKUNG. Die \mathcal{C}^k -Mannigfaltigkeiten bilden die Objekte einer Kategorie, deren Morphismen von M nach N gerade durch $\mathcal{C}^k(M, N)$ gegeben sind.

Wir werden später auch regelmäßig Mannigfaltigkeiten mit Rand betrachten. Dazu betrachten wir den *Standard-Halbraum*

$$\mathbb{R}_-^n = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_0 \leq 0 \}$$

und definieren seinen *Rand* $\partial\mathbb{R}_-^n$ und sein *Inneres* $\mathring{\mathbb{R}}_-^n$ durch

$$\begin{aligned} \partial\mathbb{R}_-^n &= \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_0 = 0 \}, \\ \mathring{\mathbb{R}}_-^n &= \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_0 < 0 \}. \end{aligned}$$

Wir könnten hier auch jeden anderen Halbraum hernehmen, aber dieser macht uns das Leben im Beweis des Satzes von Stokes etwas einfacher.

1.10. DEFINITION. Eine n -dimensionale *Mannigfaltigkeit mit Rand* ist ein Hausdorff-Raum M mit abzählbarer Basis, so dass es zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset M$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}_-^n$ und einen Homöomorphismus $\varphi: U \rightarrow V$ gibt. Wir nennen p *Randpunkt*, wenn $p \in \varphi^{-1}(\partial\mathbb{R}_-^n)$, andernfalls heißt p *innerer Punkt*. Der *Rand* $\partial M \subset M$ ist die Menge aller Randpunkte, das Komplement $\mathring{M} = M \setminus \partial M$ heißt das *Innere* von M .

Rand und inneres sind wohldefiniert: aus der Invarianz des Gebietes folgt, dass jeder Kartenwechsel $\psi \circ \varphi^{-1}$ Randpunkte von \mathbb{R}_-^n auf Randpunkte von \mathbb{R}_-^n abbildet.

Wir wollen wieder über \mathcal{C}^k -Diffeomorphismen sprechen. Dazu definieren wir die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ für $f: \mathbb{R}_-^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf $\partial\mathbb{R}_-^n$ als halbseitigen Differentialquotienten. Eine Funktion auf \mathbb{R}_-^n heißt nach wie vor stetig differenzierbar oder \mathcal{C}^1 , wenn die partiellen Ableitungen existieren und stetig sind, sie heißt \mathcal{C}^k , wenn die $(k-1)$ -sten Ableitungen stetig differenzierbar sind, und \mathcal{C}^∞ , wenn

sie \mathcal{C}^k ist für alle $k \geq 0$. Auch hier gilt der Satz von Schwarz, also insbesondere $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}$. Eine Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist von der Klasse \mathcal{C}^k , wenn ihre Komponenten f_1, \dots, f_m alle von Klasse \mathcal{C}^k sind.

Jetzt können wir \mathcal{C}^k -Atlanten für Mannigfaltigkeiten mit Rand analog zu Bemerkung 1.3 und Definition 1.4 definieren, indem wir systematisch \mathbb{R}^n durch \mathbb{R}_-^n ersetzen und verlangen, dass Kartenwechsel im obigen Sinne von der Klasse \mathcal{C}^k sind. Für $k \geq 1$ ist wesentlich leichter zu sehen, dass Kartenwechsel Randpunkte auf Randpunkte abbilden (Übung).

1.11. DEFINITION. Eine n -dimensionale \mathcal{C}^k -Mannigfaltigkeit mit Rand ist ein Paar aus einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit mit Rand und einem \mathcal{C}^k -Atlas von M . Eine \mathcal{C}^∞ -Mannigfaltigkeit mit Rand heißt auch *glatte Mannigfaltigkeit mit Rand*.

Zum Sprachgebrauch: üblicherweise bezeichnet das Wort „Mannigfaltigkeit“ eine Mannigfaltigkeit im Sinne der Definitionen 1.2 und 1.4, also eine Mannigfaltigkeit ohne Rand. Umgekehrt kann $\partial M = \emptyset$ für eine Mannigfaltigkeit mit Rand gelten, es gibt also Mannigfaltigkeiten mit Rand ohne Rand. Bitte lassen Sie sich davon nicht verwirren.

- 1.12. BEISPIEL. (1) Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und $y_0 \in \mathbb{R}$ sei ein regulärer Wert. Dann ist $f^{-1}((-\infty, y_0]) \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit mit Rand. Einfachstes Beispiel ist die *Kreisscheibe* $D^n \subset \mathbb{R}^n$. Es bezeichne $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm, dann ist

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial D^n = S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, und ihr Inneres ist der offene Einheitsball $B^n = \overset{\circ}{D}^n$.

- (2) Allgemeiner sei M eine Mannigfaltigkeit ohne Rand und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Sei 0 regulärer Wert von f , dann ist $f^{-1}([0, \infty)) \subset M$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Wir werden gleich sehen, dass $f^{-1}([0, \infty))$ eine Untermannigfaltigkeit mit Rand von M ist. Ein einfaches Beispiel ist die obere Hemisphäre $S_+^n \subset S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$S_+^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \text{ und } x_{n+1} \geq 0\}.$$

Mir der stereographischen Projektion aus Beispiel 1.6 (2) sehen wir, dass D^n zu S_+^n diffeomorph ist.

1.13. BEMERKUNG. Man definiert \mathcal{C}^k -Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten mit Rand analog zu Definition 1.8. Wie in Bemerkung 1.9 erhält man so die *Kategorie der \mathcal{C}^k -Mannigfaltigkeiten mit Rand*.

Diese Kategorie hat eine volle Unterkategorie, bestehend aus allen M mit $\partial M = \emptyset$, und allen \mathcal{C}^k -Abbildungen zwischen ihnen. Das Adjektiv „voll“ bedeutet, dass die Unterkategorie für zwei solche Objekte alle Morphismen zwischen ihnen enthält.

Diese Unterkategorie ist äquivalent zur Kategorie der \mathcal{C}^k -Mannigfaltigkeiten aus Bemerkung 1.9. Denn sei M Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = \emptyset$, dann sind alle Kartengebiete offen in $\overset{\circ}{\mathbb{R}}_-^n$, also auch offen in \mathbb{R}^n , da $\overset{\circ}{\mathbb{R}}_-^n \subset \mathbb{R}^n$ offen ist. Ein maximaler Atlas in der Kategorie der Mannigfaltigkeiten mit Rand ist zwar kein maximaler Atlas im Sinne von Bemerkung 1.3 (7), da alle Karten fehlen, deren Bildmengen über $\overset{\circ}{\mathbb{R}}_-^n$ hinausgehen. Wie in Bemerkung 1.5 kann man ihn aber zu einem maximalen Atlas ergänzen.

Umgekehrt sei M eine \mathcal{C}^k -Mannigfaltigkeit. Dann verketteten wir jede Karte $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ mit dem Diffeomorphismus

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_-^n, \quad \text{mit} \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (-e^{-x_1}, x_2, \dots, x_n)$$

und erhalten eine Karte mit Bildbereich in \mathbb{R}_-^n . Tatsächlich sind die beiden Konstruktionen zueinander invers.

Wir wollen Untermannigfaltigkeiten mit Rand definieren. Dabei wollen wir möglichst großzügig sein, und beispielsweise erlauben, dass der Rand einer Untermannigfaltigkeit $M \subset N$ den Rand ∂N in einer beliebig wilden Teilmenge treffen kann.

1.14. DEFINITION. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *m-dimensionale \mathcal{C}^k -Untermannigfaltigkeit mit Rand des \mathbb{R}^n* , wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung U von p im \mathbb{R}^n und einen \mathcal{C}^k -Diffeomorphismus $\psi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$U \cap M = \psi^{-1}((\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap \mathbb{R}_-^n).$$

Eine Teilmenge $M \subset N$ einer n -dimensionalen \mathcal{C}^k -Mannigfaltigkeit N heißt *m-dimensionale \mathcal{C}^k -Untermannigfaltigkeit mit Rand* von N , wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine Karte $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}_-^n$ mit $p \in U$ gibt, so dass $\varphi(U \cap M) \subset V$ eine m -dimensionale \mathcal{C}^k -Untermannigfaltigkeit mit Rand des \mathbb{R}^n im obigen Sinne ist.

Man beachte, dass in dieser Definition φ in den Halbraum \mathbb{R}_-^n abbildet, dass wir aber von $\varphi(U \cap M)$ nur verlangen, dass es Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist. Es ist also egal, wie die Ränder zueinander liegen.

1.15. BEMERKUNG. (1) Jede \mathcal{C}^k -Untermannigfaltigkeit M mit Rand von N ist selbst eine \mathcal{C}^k -Mannigfaltigkeit mit Rand. Dazu versehen wir M zunächst mit der Unterraumtopologie, dann erbt M die Hausdorff-Eigenschaft und eine abzählbare Basis von N . Um eine Karte um $p \in M$ zu konstruieren, wählen wir eine Karte $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$ von N um p und einen \mathcal{C}^k -Diffeomorphismus $\psi: U^\psi \rightarrow V^\psi$ wie in Definition 1.14 mit $\varphi(p) \in U^\psi$. Dann erhalten wir eine Karte

$$(\psi \circ \varphi|_{M \cap U^\varphi \cap \varphi^{-1}U^\psi}): M \cap U^\varphi \cap \varphi^{-1}U^\psi \longrightarrow \psi(V^\varphi) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

Man kann überprüfen, dass alle Karten dieser Form einen Atlas von M bilden.

- (2) Insbesondere ist jede \mathcal{C}^k -Untermannigfaltigkeit mit Rand des \mathbb{R}^n eine \mathcal{C}^k -Mannigfaltigkeit. Die Umkehrung zeigen wir im nächsten Kapitel.
- (3) Sei N eine n -dimensionale \mathcal{C}^k -Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann sind ihr Rand ∂M und ihr inneres $\overset{\circ}{M}$ ebenfalls Untermannigfaltigkeiten mit leerem Rand. Für das Innere ist das leicht zu sehen, für den Rand ist es eine Übungsaufgabe.

1.16. BEISPIEL. Der Halbraum \mathbb{R}_-^n ist selbst eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Eine Untermannigfaltigkeit mit Rand ist zum Beispiel die Vollkugel

$$D^n \cong \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x + e_1\| \leq 1\} \subset \mathbb{R}_-^n.$$

Der Rand der Vollkugel berührt $\partial \mathbb{R}_-^n$ im Punkt 0. Mit etwas mehr Mühe kann man auch Untermannigfaltigkeiten $M \subset N$ mit Rand definieren, so dass $\partial M \cap \partial N$ eine nichtleere offene Teilmenge von ∂M enthält. Dementsprechend ist ∂M selbst eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}_-^n , die eine offene nicht leere Teilmenge besitzt, die in ∂N enthalten ist.

1.2. Das Tangentialbündel

Als nächstes definieren wir das Tangentialbündel. Dabei nehmen wir der Einfachheit an, dass alle Mannigfaltigkeiten glatt, also von der Klasse \mathcal{C}^∞ sind — andernfalls funktionieren manche der folgenden Überlegungen nicht richtig. Wir beginnen zunächst mit Mannigfaltigkeiten ohne Rand.

Zunächst wollen wir Tangentialvektoren auf drei verschiedene Arten darstellen und uns überlegen, dass wir jedesmal die gleichen Objekte erhalten. Eine beliebige Karte φ schreiben wir als

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \vdots \\ \varphi^n \end{pmatrix} : U^\varphi \rightarrow V^\varphi \subset \mathbb{R}^n,$$

dann heißen die Funktionen $\varphi^i: U^\varphi \rightarrow \mathbb{R}$ die *Koordinatenfunktionen* von φ .

Der Raum $\mathcal{C}^\infty(M)$ der glatten Funktionen auf M trägt eine Algebren-Struktur, gegeben durch punktweise Multiplikation von Funktionen,

$$(f \cdot g)(p) = f(p) \cdot g(p).$$

1.17. BEISPIEL. Für späteren Gebrauch konstruieren wir sogenannte „Abschneidefunktionen“, die nahe eines festen Punktes $p \in M$ konstant 1 sind und außerhalb einer etwas größeren Umgebung von M verschwinden.

Betrachte dazu zunächst $\vartheta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$\vartheta(r) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{r}} & \text{für } r > 0, \text{ und} \\ 0 & \text{für } r \leq 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist beliebig oft differenzierbar, und es gilt

$$\vartheta(r) > 0 \iff r > 0.$$

Sei jetzt $p \in M$, und sei φ Karte um p , o.B.d.A. mit $\varphi(p) = 0$. Wähle $0 < a < b$ so, dass $\overline{B_b(0)} \subset V^\varphi$, wobei

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < r\}.$$

Der Überblick bezeichnet den topologischen Abschluss, also $\overline{B_b(0)} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| \leq b\}$. Dann definiere eine Abschneidefunktion $\rho \in \mathcal{C}^\infty(M)$ durch

$$\rho(q) = \begin{cases} \frac{\vartheta(b - |\varphi(q)|)}{\vartheta(b - |\varphi(q)|) + \vartheta(|\varphi(q)| - a)} & \text{für } q \in U^\varphi, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es folgt

$$\rho|_{\varphi^{-1}\overline{B_a(0)}} \equiv 1 \quad \text{und} \quad \rho|_{M \setminus \varphi^{-1}\overline{B_b(0)}} \equiv 0.$$

Inbesondere ist der *Träger* von ρ gerade

$$\text{supp}(\rho) := \overline{\{q \in M \mid \rho(q) \neq 0\}} = \varphi^{-1}\overline{B_b(0)}.$$

1.18. DEFINITION. Sei M eine n -dimensionale \mathcal{C}^∞ -Mannigfaltigkeit mit $k \geq 1$, und sei $p \in M$.

(1) Ein *algebraischer Tangentialvektor* in p ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\partial: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\partial(f \cdot g) = \partial f \cdot g(p) + f(p) \cdot \partial g \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

(2) Ein *physikalischer Tangentialvektor* $(v_\varphi)_\varphi$ in p ordnet jeder Karte φ von M um p einen Vektor $v_\varphi \in \mathbb{R}^n$ zu, so dass

$$v_\psi^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} v_\varphi^j$$

für alle Karten φ, ψ um p und alle $i = 1, \dots, n$ gilt.

(3) Ein *geometrischer Tangentialvektor* in p ist eine Äquivalenzklasse von Kurven $\gamma: I \rightarrow M$ mit $0 \in I \subset \mathbb{R}$ und $\gamma(0) = p$ unter der Äquivalenzrelation

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff (\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$$

für eine Karte φ von M um p .

In (3) ist es egal, welche Karte φ wir wählen, denn $\gamma_1 \sim \gamma_2$ gilt für eine bestimmte Karte φ genau dann, wenn es für alle Karten um p gilt.

Die algebraische Definition ist sowohl die eleganteste als auch die am schwierigsten zu verstehende.

1.19. PROPOSITION. Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$, und sei φ eine Karte um p . Eine Abbildung $\partial: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann ein algebraischer Tangentialvektor in p , wenn es einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$\partial f = v(f \circ \varphi^{-1}) = d_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1})(v).$$

Man beachte, dass diese Proposition falsch ist für C^k -Mannigfaltigkeiten mit $k < \infty$. Man erhält aber immerhin eine injektive Abbildung vom physikalischen oder geometrischen Tangentialraum in den algebraischen.

BEWEIS. „ \Leftarrow “ ist klar wegen der Produktregel der Ableitung.

Zu „ \Rightarrow “ sei φ Karte um p . O.B.d.A. gelte $\varphi(p) = 0$ und $B_1(0) \subset V^\varphi$. Dann konstruieren wir zwei Abschneidefunktionen $\rho, \rho_1 \in C^\infty(M)$ wie in Beispiel 1.17 mit

$$\begin{aligned} \rho_1|_{\varphi^{-1}B_{\frac{1}{4}}(0)} &\equiv 1, & \text{supp } \rho_1 &= \varphi^{-1}\overline{B_{\frac{1}{2}}(0)}, \\ \rho|_{\varphi^{-1}B_{\frac{1}{2}}(0)} &\equiv 1 & \text{und} & \text{supp } \rho = \varphi^{-1}\overline{B_{\frac{3}{4}}(0)}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $\rho_1 = \rho_1 \cdot \rho$, nach Definition 1.18 (1) also

$$\partial \rho_1 = \partial(\rho_1 \cdot \rho) = \partial \rho_1 \cdot \rho(p) + \rho_1(p) \cdot \partial \rho = \partial \rho_1 + \partial \rho \implies \partial \rho = 0. \quad (1.1)$$

Sei jetzt $f \in C^\infty(M)$ beliebig, dann gilt

$$\partial(\rho \cdot f) = \rho(p) \cdot \partial f + \partial \rho \cdot f(p) = \partial f. \quad (1.2)$$

Also hängt ∂f nur von dem Verhalten von f in einer kleinen Umgebung von p ab. Wir definieren Funktionen $f_i: M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{supp } f_i \subset U^\varphi$,

$$f_i(q) = \rho(q) \cdot \begin{cases} \frac{(f \circ \varphi^{-1})(0, \dots, 0, y^i, \dots, y^n) - (f \circ \varphi^{-1})(0, \dots, 0, y^{i+1}, \dots, y^n)}{y^i} & \text{falls } y_i \neq 0, \text{ und} \\ \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial y^i}(0, \dots, 0, y^{i+1}, \dots, y^n) & \text{für } y^i = 0. \end{cases}$$

für alle $q \in U^\varphi$ und $y = \varphi(q) \in V^\varphi$. Insbesondere gilt

$$f_i(p) = \left. \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})(x)}{\partial x^i} \right|_{x=0}. \quad (1.3)$$

Man überzeugt sich leicht, dass f_i von der Klasse C^∞ ist (wäre $f \in C^k(M)$, so wäre im allgemeinen nur $f_i \in C^{k-1}(M)$, und der Beweis bräche hier zusammen). Mit $y^i = \varphi^i(q)$ erhalten wir

$$\rho \cdot f = f(p) \cdot \rho + \sum_{i=1}^n \varphi^i \cdot f_i \quad (1.4)$$

auf ganz U^φ .

Wir setzen die Funktionen $\rho \varphi^i: U^\varphi \rightarrow \mathbb{R}$ auf ganz M fort, mit Wert 0 außerhalb von U^φ . Aus \mathbb{R} -Linearität von und Produktregel für ∂ sowie (1.1)–(1.4) folgt

$$\begin{aligned} \partial f &\stackrel{(1.2)}{=} \partial(\rho \cdot (\rho f)) \stackrel{(1.4)}{=} \partial(\rho^2 \cdot \underbrace{f(p)}_{\in \mathbb{R}}) + \sum_{i=1}^n \partial((\rho \varphi^i) \cdot f_i) \\ &= 2f(p)\rho(p) \underbrace{\partial \rho}_{=0} + \sum_{i=1}^n \left(\underbrace{\partial(\rho \varphi^i)}_{=: v^i} \cdot f_i(p) + \underbrace{(\rho \varphi^i)(p)}_{=0} \cdot \partial f_i \right) \stackrel{(1.3)}{=} \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \right|_{x=0} \cdot v^i \\ &= d_0(f \circ \varphi^{-1})(v), \end{aligned}$$

mit

$$v_\varphi = \begin{pmatrix} \partial(\rho\varphi^1) \\ \vdots \\ \partial(\rho\varphi^n) \end{pmatrix}. \quad \square$$

1.20. SATZ UND DEFINITION. Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit, dann existieren miteinander verträgliche natürliche Bijektionen zwischen den Mengen der algebraischen, der physikalischen und der geometrischen Tangentialvektoren in p . Wir identifizieren beide Mengen und sprechen fortan nur noch vom Tangentialraum T_pM von M im Punkt p . Dieser Raum trägt eine natürliche Vektorraumstruktur aufgrund von Definition 1.18 (2).

BEWEIS. Wir rekapitulieren hier die „Übersetzungsvorschriften“ zwischen den drei Begriffen, da wir später häufiger zwischen den verschiedenen Interpretationen hin- und herwechseln wollen. Den formalen Beweis, dass die angegebenen Abbildungen jeweils wohldefinierte Bijektionen sind, überlassen wir als Übung.

Sei zunächst ∂ ein algebraischer Tangentialvektor in p , dann erhalten wir einen physikalischen Tangentialvektor v in p durch die Zuordnung

$$v_\varphi^i = \partial\varphi^i := \partial(\rho \cdot \varphi)$$

für eine geeignete Abschneidefunktion ρ . In der Tat kann man wie in Proposition 1.19 zeigen, dass

$$v_\psi^i = \partial(\psi^i \circ \varphi^{-1} \circ \varphi^i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} \Big|_{\varphi(p)} \partial\varphi^j.$$

Sei umgekehrt φ eine Karte von M um p , dann definieren wir Richtungsableitungen bei p durch

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi^i}(p) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)).$$

Sei nun $v = (v_\varphi)_\varphi$ ein physikalischer Tangentialvektor, dann erhalten wir einen algebraischen Tangentialvektor

$$\partial := \sum_{i=1}^n v_\varphi^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p.$$

Aufgrund der Transformationsvorschrift in Definition 1.18 (2) ist es egal, welche Karte φ wir zur Konstruktion von ∂ heranziehen.

Sei wieder v ein physikalischer Tangentialvektor. Wir wählen eine Karte φ um p und erhalten eine Kurve

$$\gamma_\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U^\varphi \quad \text{mit} \quad \gamma_\varphi(t) = \varphi^{-1}(t \cdot v_\varphi)$$

für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein. Aufgrund der Transformationsvorschrift in Definition 1.18 (2) sind die Kurven γ_φ für alle Karten φ um p paarweise äquivalent im Sinne von Definition 1.18 (3), wir erhalten also einen geometrischen Tangentialvektor $[\gamma_\varphi]$.

Sei umgekehrt γ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$, dann definiert

$$v_\varphi := (\varphi \circ \gamma)'(0)$$

einen physikalischen Tangentialvektor in p unabhängig von $\gamma \in [\gamma]$.

Sei wieder γ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$, dann erhalten wir einen algebraischen Tangentialvektor ∂ mit

$$\partial f = (f \circ \gamma)'(0)$$

Für die umgekehrte Abbildung gehen wir den Umweg über physikalische Tangentialvektoren.

Schließlich zur Vektorraumstruktur: Die algebraischen Tangentialvektoren bilden einen Vektorraum mit den Verknüpfungen

$$(\partial_1 + \partial_2)(f) = \partial_1 f + \partial_2 f \quad \text{und} \quad (r \cdot \partial)(f) = r \cdot (\partial f) \quad \text{für alle } r \in \mathbb{R} .$$

Analog bilden die physikalischen Tangentialvektoren einen Vektorraum mit

$$(v + w)_\varphi = v_\varphi + w_\varphi \quad \text{und} \quad (r \cdot v)_\varphi = r \cdot (v_\varphi) \quad \text{für alle } r \in \mathbb{R} .$$

Die obigen Operationen sind verträglich mit der Transformationsvorschrift in Definition 1.18 (2) und den obigen Bijektionen. \square

1.21. PROPOSITION UND DEFINITION. *Sei M eine n -dimensionale \mathcal{C}^∞ -Mannigfaltigkeit mit Atlas \mathcal{A} . Die Vereinigung*

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M = \{ (p, v) \mid p \in M, v \in T_p M \}$$

trägt eine Topologie, so dass $\mathcal{A} = \{ d\varphi \mid \varphi \text{ Karte von } M \}$ einen $2n$ -dimensionalen \mathcal{C}^∞ -Atlas auf TM definiert, wobei

$$d\varphi: U^{d\varphi} := \bigcup_{p \in U^\varphi} T_p M \longrightarrow V^{d\varphi} := V^\varphi \times \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad (p, v) \mapsto (\varphi(p), v_\varphi) .$$

Die Mannigfaltigkeit TM heißt das Tangentialbündel von M , die \mathcal{C}^∞ -Abbildung

$$\pi: TM \longrightarrow M \quad \text{mit} \quad (p, v) \mapsto p$$

heißt die (Fußpunkt-) Projektion.

BEWEIS. Die Topologie auf TM wird wie folgt definiert: Eine Teilmenge $U \subset TM$ heißt offen, wenn zu jedem Vektor $(p, v) \in U$ eine Karte $d\varphi$ um (p, v) mit $\varphi \in \mathcal{A}$ existiert, so dass $d\varphi(U \cap U^{d\varphi}) \subset \mathbb{R}^{2n}$ offen ist. Man überprüft leicht, dass

- (1) dadurch tatsächlich eine Topologie definiert wird,
- (2) die angegebene Topologie Hausdorffsch ist,
- (3) eine abzählbare Basis besitzt,
- (4) und nicht vom Atlas \mathcal{A} , sondern nur vom dazugehörigen maximalen Atlas abhängt.

Man muss auch zeigen, dass $\{ d\varphi \mid \varphi \in \mathcal{A} \}$ einen Atlas bildet. Die Mengen $U^{d\varphi}$ überdecken TM , und die Kartenwechsel haben die Gestalt

$$(d\psi \circ (d\varphi)^{-1})(x, v) = ((\psi \circ \varphi^{-1})(x), d_x(\psi \circ \varphi^{-1})(v)) .$$

Da $\psi \circ \varphi^{-1}$ eine \mathcal{C}^∞ -Abbildung ist, ist $d(\psi \circ \varphi^{-1})$ eine \mathcal{C}^∞ -Abbildung, und das gleiche gilt dann auch für $d\psi \circ (d\varphi)^{-1}$. Somit haben wir einen \mathcal{C}^∞ -Atlas für TM konstruiert. \square

Sei jetzt $F: M \rightarrow N$ eine \mathcal{C}^∞ -Abbildung zwischen \mathcal{C}^∞ -Mannigfaltigkeiten mit $k \geq 1$. Dann induziert F eine Abbildung $dF: TM \rightarrow TN$. Wir geben drei Konstruktionen dieser Abbildung an. Für $p \in M$ definieren wir zunächst $d_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$.

- (1) Falls $k = \infty$ und $\partial \in T_p M$ ein algebraischer Tangentialvektor ist, dann definiere

$$(d_p F(\partial))(f) = \partial(f \circ F) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{C}^\infty(N) .$$

- (2) Sei φ Karte von M um p und ψ Karte von N um $F(p)$, und sei $v \in T_p M$ physikalischer Tangentialvektor. In der Notation von Definition 1.8 definiere

$$(d_p F(v))_\psi = dF^{\varphi, \psi}_{\varphi(p)}(v_\varphi) \in T_{F(p)} N .$$

- (3) Sei schließlich $\gamma: I \rightarrow M$ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $[\gamma]$ der dazugehörige geometrische Tangentialvektor. Dann definiere

$$d_p F([\gamma]) = [F \circ \gamma] \in T_{F(p)} N.$$

In den Konstruktionen (2) und (3) ist wieder Wohldefiniertheit zu beweisen. Insgesamt definieren wir schließlich

$$dF: TM \rightarrow TN \quad \text{durch} \quad dF(p, v) = d_p F(v) \quad \text{für alle } (p, v) \in TM.$$

1.22. SATZ UND DEFINITION. Sei $F: M \rightarrow N$ eine C^∞ -Abbildung zwischen C^∞ -Mannigfaltigkeiten mit $k \geq 1$. Dann definieren die drei obigen Konstruktionen dieselbe faserweise lineare C^∞ -Abbildung $dF: TM \rightarrow TN$, das Differential von F .

Die Zuordnung $M \mapsto TM$ und $F \mapsto dF$ definiert einen Funktor von der Kategorie der C^∞ -Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der C^∞ -Mannigfaltigkeiten.

BEWEIS. Man sieht leicht, dass die obigen drei Konstruktionen wohldefiniert und mit den Abbildungen aus dem Beweis von Satz 1.20 verträglich sind. Hieraus folgt, dass (1)–(3) die gleiche Abbildung $d_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ für alle $p \in M$, und damit auch die gleiche Abbildung $dF: TM \rightarrow TN$ definieren.

Um zu zeigen, dass dF von der Klasse C^∞ ist betrachten wir beliebige Karten φ von M und ψ von N . Nach Definition 1.21 und obiger Konstruktion (2) erhalten wir

$$\begin{aligned} dF^{d\varphi, d\psi}(x, v_\varphi) &= (d\psi \circ dF \circ (d\varphi)^{-1})(x, v_\varphi) = (d\psi \circ dF)(p, v) \\ &= (F^{\varphi, \psi}(x), dF^{\varphi, \psi}_x(v_\varphi)) \end{aligned}$$

mit $x = \varphi(p)$ und $v_\varphi = d\varphi(v)$. Somit ist dF in den Karten $d\varphi$ von TM und $d\psi$ von TN durch die Abbildung

$$dF^{d\varphi, d\psi} = (F^{\varphi, \psi}, dF^{\varphi, \psi}): V^{d\varphi} \rightarrow V^{d\psi}$$

gegeben. Da $F^{\varphi, \psi}$ von der Klasse C^∞ ist, ist $dF^{\varphi, \psi}$ von der Klasse C^∞ , also ist dF eine C^∞ -Abbildung.

Funktorialität folgt aus

- (1) $did_M = id_{TM}$ für alle C^∞ -Mannigfaltigkeiten M , und
- (2) (*Kettenregel*) $d(F \circ G) = dF \circ dG$ für alle C^∞ -Mannigfaltigkeiten L, M, N und alle Abbildungen $F: M \rightarrow N$ und $G: L \rightarrow M$.

Diese Aussagen überlassen wir dem Leser als Übung. □

1.23. BEMERKUNG. Schließlich betrachten wir noch n -dimensionale Mannigfaltigkeiten mit Rand. Wenn $p \in \overset{\circ}{M}$ innerer Punkt ist, ändert sich nichts, und wir erhalten nach wie vor einen Tangentialraum $T_p M \cong \mathbb{R}^n$ wie oben.

- (1) Sei also $p \in \partial M$. Sowohl die physikalische als auch die algebraische Definition liefern uns nach wie vor einen Tangentialraum $T_p M \cong \mathbb{R}^n$.

Gleichzeitig gilt $p \in \partial M$, und wir erhalten auch einen Tangentialraum $T_p(\partial M) \cong \mathbb{R}^{n-1}$. Für ∂M betrachten wir die Karte $\partial\varphi = (\varphi^2, \dots, \varphi^n): \partial U^\varphi \rightarrow \partial V^\varphi \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$, dann hat ein physikalischer Vektor $v \in T_p(\partial M)$ die Koordinaten $v_\varphi^2, \dots, v_\varphi^n$. Sei jetzt $\iota: \partial M \rightarrow M$ die Inklusionsabbildung, dann gilt $\varphi^1 \circ \iota \equiv 0$, somit

$$d\iota_p \begin{pmatrix} v_\varphi^2 \\ \vdots \\ v_\varphi^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_\varphi^2 \\ \vdots \\ v_\varphi^n \end{pmatrix}.$$

Also ist $T_p(\partial M)$ ein Unterraum von T_pM , nämlich

$$T_p(\partial M) = \{ v = (v_\varphi)_\varphi \in T_pM \mid v_\varphi^1 = 0 \text{ für eine Karte } \varphi \in \mathcal{A} \text{ um } p \} \subset T_pM .$$

Dabei ist es egal, ob wir $v_\varphi^1 = 0$ für eine oder für alle Karten um p verlangen. Die geometrische Definition würde uns übrigens nur Vektoren in $T_p(\partial M)$ liefern, da Kurven nicht aus M herauslaufen können.

- (2) Schließlich gibt es jetzt drei Varianten des Tangentialbündels, die für uns von Interesse sind:

$$\begin{array}{ccccc} T(\partial M) & \hookrightarrow & TM|_{\partial M} = \{ (p, v) \in TM \mid p \in \partial M, v \in T_pM \} & \hookrightarrow & TM \\ & \searrow \pi_{T(\partial M)} & \downarrow & & \downarrow \pi_{TM} \\ & & \partial M & \xrightarrow{\iota} & M . \end{array}$$

Die Mannigfaltigkeiten $T(\partial M)$, $TM|_{\partial M}$ und TM haben die Dimensionen $2(n-1)$, $2n-1$, beziehungsweise $2n$.

1.3. Einbettungen

Wir definieren die Begriffe „Immersion“ und „Einbettung“. Anschließend zeigen wir, dass sich jede glatte Mannigfaltigkeit M glatt in einen euklidischen Raum \mathbb{R}^n einbetten lässt, wenn $n \in \mathbb{N}$ nur ausreichend groß ist. Später werden wir sehen, wie wir stets $n = 2m + 1$ wählen können. Je nach Problemstellung wird es geschickter sein, eine Mannigfaltigkeit als abstraktes Objekt oder als Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n zu betrachten.

1.24. DEFINITION. Eine glatte Abbildung $F: M \rightarrow N$ heißt *Immersion*, wenn $d_pF: T_pM \rightarrow T_pN$ für alle $p \in M$ injektiv ist. Wir nennen F eine *Einbettung*, wenn darüberhinaus M homöomorph auf sein Bild im $F \subset N$ abgebildet wird.

1.25. PROPOSITION. *Eine Abbildung $F: M \rightarrow N$ ist genau dann eine Einbettung, wenn im $F \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit ist und F einen Diffeomorphismus $f: M \rightarrow \text{im } F$ induziert.*

BEWEIS. Die Richtung „ \Leftarrow “ folgt aus den Definitionen. Als Untermannigfaltigkeit ist im F selbst eine Mannigfaltigkeit nach Bemerkung 1.15 (1), und wenn $N \rightarrow \text{im } F$ ein Diffeomorphismus ist, dann ist es insbesondere auch ein Homöomorphismus, und die Verkettung $F: M \rightarrow \text{im } F \rightarrow N$ ist eine Immersion.

Zu „ \Rightarrow “ benutzen wir die Definition der Unterraumtopologie auf $\text{im } F$. Eine Teilmenge $U \subset \text{im } F$ ist genau dann offen, wenn es eine offene Menge $V \subset N$ mit $U = V \cap \text{im } F$ gibt.

Wir zeigen, dass im F eine Untermannigfaltigkeit ist. Dazu beginnen wir mit einem Atlas \mathcal{A}_N von N . Dann wählen wir einen Atlas \mathcal{A}_M von M so, dass für alle Karten $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$ in \mathcal{A}_M eine Karte $\psi: U^\psi \rightarrow V^\psi$ mit $U^\varphi \subset F^{-1}(U^\psi)$ existiert. Dazu beginnen wir mit einem beliebigen Atlas von M und verkleinern die Definitionsbereiche der Karten falls nötig. Da ψ einen Diffeomorphismus zwischen U^ψ und V^ψ induziert, können wir lokal jetzt die Einbettung $\psi \circ F|_{U^\varphi}: U^\varphi \rightarrow V^\psi \subset \mathbb{R}^n$ betrachten. Wenn wir für alle $p \in M$ die Karten φ und ψ entsprechend wählen und zeigen, dass $\text{im}(\psi \circ F|_{U^\varphi})$ Untermannigfaltigkeit von V^ψ ist, dann ist auch im F Untermannigfaltigkeit von N , und man sieht auch, dass f dann ein Diffeomorphismus ist.

Mithilfe des Satzes über implizite Funktionen erhalten wir zu jedem Punkt $p \in U^\varphi$

- eine kleine Umgebung $U \subset U^\varphi$ von p ,
- eine Aufspaltung der Indexmenge $\{1, \dots, n\} = \{j_1, \dots, j_m\} \dot{\cup} \{j_{m+1}, \dots, j_n\}$,
- eine offene Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^m$, und
- eine Abbildung $g: W \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$,

so dass wir $\text{im}(\psi \circ F)$ lokal als Graph von g schreiben können, genauer

$$\text{im}(\psi \circ F) \cap U = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_{j_1}, \dots, x_{j_m}) \in W \text{ und } (x_{j_{m+1}}, \dots, x_{j_n}) = g(x_{j_1}, \dots, x_{j_m}) \}.$$

Es ist nicht schwer, daraus eine Untermannigfaltigkeitskarte für $\text{im}(\psi \circ F|_U)$ als Teilmenge von \mathbb{R}^n zu basteln. Zu zeigen ist, dass das auch eine Untermannigfaltigkeitskarte für ganz $\text{im}(\psi \circ F)$ in V^ψ liefert. Aber dazu schränken wir die soeben erhaltene Untermannigfaltigkeitskarte auf eine offene Teilmenge $V \subset V^\psi$ ein, so dass $V \cap \text{im}(\psi \circ F) = \text{im}(\psi \circ F|_U)$. Also ist $\text{im}(\psi \circ F) \subset V^\psi$ eine Untermannigfaltigkeit, und die Proposition ist bewiesen. \square

1.26. BEISPIEL. Wir geben ein Beispiel, um zu zeigen, warum es wir fordern müssen, dass f ein Homöomorphismus ist. Sei nämlich M die disjunkte Vereinigung eines Kreises $S^1 \subset \mathbb{C}$ und einer Geraden \mathbb{R} und sei $N = \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Für $p \in M$ definieren wir

$$F(p) = \begin{cases} p & \text{falls } p \in S^1 \subset \mathbb{R}^2, \text{ und} \\ (1 + e^p) e^{ip} & \text{falls } p \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dann ist F eine injektive Immersion. Da sich das Bild der Geraden gegen den Kreis häuft, finden wir keine Untermannigfaltigkeitskarten für Punkte $p \in S^1 \subset \text{im} F$. Aber F ist auch kein Homöomorphismus. Etwa ist das Bild der offenen Teilmenge $S^1 \subset M$ nicht offen in $\text{im} F$, da es keine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{C}$ mit $S^1 \subset V$ gibt, die das Bild von \mathbb{R} nicht schneidet.

1.27. BEMERKUNG. Die obige Proposition gilt analog für Mannigfaltigkeiten mit Rand. Der Beweis ist dann etwas komplizierter.

Da es auf Dauer mühsam ist, zu überprüfen, ob eine Abbildung ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist, folgen hier eine nützliche Definition und ein hilfreiches Kriterium.

1.28. DEFINITION. Eine stetige Abbildung $F: X \rightarrow Y$ zwischen Hausdorffräumen heißt *eigentlich*, wenn Urbilder kompakter Mengen wieder kompakt sind.

Die Abbildung F aus Beispiel 1.26 ist nicht eigentlich, denn das Urbild der kompakten Menge $\overline{B_2(0)}$ ist $S^1 \sqcup (-\infty, 0]$, also nicht kompakt.

1.29. BEMERKUNG. Es sei $F: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen Hausdorffräumen.

- (1) Sei $K \subset X$ kompakt, dann ist $F(K) \subset Y$ in der Unterraumtopologie kompakt. Denn sei $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen von Y , die $F(K)$ überdecken, dann überdecken die offenen Mengen $F^{-1}(V_i) \subset X$ die Menge K , und endlich viele reichen aus. Dann überdecken die entsprechenden V_i bereits $F(K)$.
- (2) Wenn X bereits kompakt ist, dann ist F eigentlich. Denn sei $K \subset Y$ kompakt, dann ist K insbesondere abgeschlossen, da Y ein Hausdorff-Raum ist. Wegen Stetigkeit von F ist $F^{-1}(K)$ abgeschlossen, und abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen sind wieder kompakt.

1.30. PROPOSITION. *Es sei $F: M \rightarrow N$ eine injektive eigentliche Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Dann ist F ein Homöomorphismus von M auf $\text{im} F$.*

BEWEIS. Die Abbildung $F: M \rightarrow \text{im} F$ ist bijektiv und stetig, also reicht es, die Stetigkeit der Umkehrabbildung zu überprüfen. Dazu müssen wir nur zeigen, dass Bilder abgeschlossener Teilmengen $A \subset M$ in $\text{im} F$ wieder abgeschlossen sind.

Da N Mannigfaltigkeit ist, ist die Topologie von N *kompakt erzeugt*. Das bedeutet, eine Teilmenge $C \subset N$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $C \cap K$ für alle kompakten Teilmengen $K \subset N$ abgeschlossen ist. Denn sei $q \in N \setminus C$, und sei ψ eine Karte von N um q mit $\psi(q) = 0$. Dann

enthält V^ψ einen abgeschlossenen Ball $\overline{B_R(0)}$, dieser ist kompakt. Wenn $C \cap \psi^{-1}(\overline{B_R(0)})$ abgeschlossen ist, gibt es einen kleineren offenen Ball $B_r(0)$ mit $C \cap \psi^{-1}(B_r(0)) = \emptyset$. Somit ist C abgeschlossen, wenn $C \cap K$ für alle Kompakta K abgeschlossen ist.

Sei jetzt $A \subset M$ abgeschlossen. Um zu zeigen, dass $F(A) \subset N$ abgeschlossen ist, sei $K \subset N$ eine beliebige kompakte Teilmenge. Da F eigentlich ist, ist $F^{-1}(K) \subset M$ auch kompakt. Dann ist $A \cap F^{-1}(K)$ ebenfalls kompakt. Da F stetig ist, ist auch $F(A \cap F^{-1}(K))$ kompakt. Da F injektiv ist, gilt $F(A \cap F^{-1}(K)) = F(A) \cap K$, also ist $F(A) \cap K$ kompakt und daher abgeschlossen, weil N ein Hausdorff-Raum ist. Und weil N kompakt erzeugt ist, ist $F(A)$ selbst ebenfalls abgeschlossen. Damit folgt, dass $F: M \rightarrow \text{im } F$ ein Homöomorphismus ist. \square

1.31. BEMERKUNG. In Proposition 1.30 gilt keine Äquivalenz. Betrachte beispielsweise die Funktion $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sie induziert einen Homöomorphismus von \mathbb{R} auf das Bild $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ist aber nicht eigentlich, denn $\arctan^{-1}([-2, 2]) = \mathbb{R}$ ist nicht kompakt.

Nachdem wir gesehen haben, dass Untermannigfaltigkeiten und Einbettungen eng verwandte Begriffe sind, wollen wir uns die Frage stellen, ob jede abstrakte Mannigfaltigkeit mit Rand in einen euklidischen Raum \mathbb{R}^n eingebettet werden kann, also zu einer Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n diffeomorph ist. Wir betrachten hier nur kompakte Mannigfaltigkeiten ohne Rand. Mit etwas mehr Mühe kann man das analoge Resultat auch für allgemeinere Mannigfaltigkeiten beweisen.

1.32. SATZ (Whitney-Einbettungssatz). *Es sei M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit, dann existiert eine Einbettung $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ falls $n \geq 2m$.*

BEWEIS. Der Satz gilt in der angegebenen Allgemeinheit, wir beweisen ihn hier aber nur für kompakte M und im Fall $n > 2m$. Im ersten Schritt zeigen wir, dass es überhaupt ein endliches n gibt, so dass eine Einbettung $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert. Danach reduzieren wir n schrittweise auf $2m+1$. Man kann sogar $n = 2m$ erreichen, braucht dazu aber einen weiteren Trick.

Es sei \mathcal{A} ein Atlas von M . Wir konstruieren eine Partition der Eins, das heißt, wir suchen Funktionen $\rho_i: M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\rho_i \geq 0$, $\text{supp } \rho_i \subset U^{\varphi_i}$ für ein $\varphi_i \in \mathcal{A}$ und

$$\rho_1 + \dots + \rho_N = 1.$$

Dazu konstruieren wir erst um jeden Punkt $p \in M$ eine Abschneidefunktion σ_p mit $\sigma(p) = 1$, deren Träger ganz in einer Kartenumgebung U^φ mit $\varphi \in \mathcal{A}$ enthalten ist. Da M kompakt ist, reichen endlich viele dieser Funktionen $\sigma_{p_1}, \dots, \sigma_{p_N}$ aus, damit

$$M = \bigcup_{j=1}^{\ell} \sigma_{p_j}^{-1}((0, \infty)).$$

Sei $\varphi_j \in \mathcal{A}$ eine Karte mit $\text{supp } \sigma_{p_j} \subset U^{\varphi_j}$. Es gilt

$$\sum_{j=1}^N \sigma_{p_j}(q) > 0$$

für alle $q \in M$, und wir erhalten unsere Partition der Eins mit

$$\rho_i = \frac{\sigma_{p_i}}{\sigma_{p_1} + \dots + \sigma_{p_N}}: M \rightarrow [0, 1], \quad \text{und} \quad \text{supp } \rho_i \subset U^{\varphi_i}.$$

Wir konstruieren eine Einbettung $F: M \rightarrow \mathbb{R}^{N(m+1)}$ mit

$$F = (\rho_1 \varphi_1^1, \dots, \rho_1 \varphi_1^m, \rho_1; \quad \dots; \quad \rho_N \varphi_N^1, \dots, \rho_N \varphi_N^m, \rho_N)^t,$$

wobei $\rho_i \varphi_i^j$ außerhalb von U^{φ^i} durch 0 fortgesetzt wird. Dann ist F injektiv, denn sei $q = F(p)$, dann ist eine der Komponenten $\rho_i(p) \neq 0$, und wir erhalten die Koordinaten von p in der Karte φ_i , indem wir die Koordinaten $\rho_i \varphi_i^j$ durch ρ_i dividieren. Dadurch ist p eindeutig bestimmt.

Um zu zeigen, dass $dF(p): T_p M \rightarrow \mathbb{R}^{N(m+1)}$ injektiv ist, betrachten wir nur die zur Karte φ_i gehörigen Komponenten von F und erhalten als Ableitung

$$d \begin{pmatrix} \rho_i \varphi_i^1 \\ \vdots \\ \rho_i \varphi_i^m \\ \rho_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\rho_i \cdot \varphi_i^1(p) + \rho_i(p) \cdot d\varphi_i^1 \\ \vdots \\ d\rho_i \cdot \varphi_i^m(p) + \rho_i(p) \cdot d\varphi_i^m \\ d\rho_i \end{pmatrix} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} .$$

Der Rang ändert sich nicht, wenn wir das $\varphi_i^j(p)$ -fache der Ableitung der letzten Komponente von der j -ten abziehen, und es bleibt die injektive Abbildung $\rho_i(p) \cdot d\varphi_i(p)$ in den ersten m Komponenten stehen.

Alternativ betrachten wir in der Karte φ_i einen Ausschnitt aus der Jacobi-Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_i}{\partial \varphi_i^1}(p) \cdot \varphi_i^1(p) + \rho_i(p) \delta_{11} & \cdots & \frac{\partial \rho_i}{\partial \varphi_i^m}(p) \cdot \varphi_i^1(p) + \rho_i(p) \delta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \rho_i}{\partial \varphi_i^1}(p) \cdot \varphi_i^m(p) + \rho_i(p) \delta_{m1} & \cdots & \frac{\partial \rho_i}{\partial \varphi_i^m}(p) \cdot \varphi_i^m(p) + \rho_i(p) \delta_{mm} \\ \frac{\partial \rho_i}{\partial \varphi_i^1}(p) & \cdots & \frac{\partial \rho_i}{\partial \varphi_i^m}(p) \end{pmatrix} \in M_{m+1, m}(\mathbb{R}) .$$

Indem wir das $\varphi_i^j(p)$ -fache der letzten Zeile von der j -ten Zeile abziehen, erhalten wir in den oberen n -Zeilen das ρ_i -fache der Einheitsmatrix, insbesondere hat dieser Ausschnitt aus der Jacobi-Matrix bereits Rang n , und $dF(p)$ ist injektiv.

Somit ist F eine injektive Immersion, und da M kompakt ist, also eine Einbettung nach Proposition 1.30, und $F(M) \subset \mathbb{R}^{N(m+1)}$ ist eine Untermannigfaltigkeit nach Proposition 1.25.

Im zweiten Schritt reduzieren wir die Dimension des Zielraumes. Sei also $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Einbettung, und sei $n > 2m + 1$. Dann bestimmen wir einen Einheitsvektor w und einen $(n-1)$ -dimensionalen Koordinaten-Unterraum $V \cong \mathbb{R}^{n-1}$ und verketten F mit der Projektion $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow V$ längs w .

Die Abbildung $\pi \circ F$ ist injektiv, falls es keine Punkte $p, q \in M$ gibt, so dass

$$\frac{F(q) - F(p)}{\|F(q) - F(p)\|} = w .$$

Sie ist eine Immersion, falls es keinen Tangentialvektor $(p, v) \in TM$ mit $v \neq 0$ gibt, so dass

$$\frac{dF_p(v)}{\|dF_p(v)\|} = w .$$

Man beachte, dass wir beide Brüche bilden dürfen, da F eine injektive Immersion ist, und dass es reicht, nur w auf der rechten Seite zu betrachten, da wir p und q tauschen beziehungsweise (p, v) durch $(p, -v)$ ersetzen dürfen, falls $-w$ herauskommt.

Es bezeichne $\Delta M = \{(p, p) \in M \times M \mid p \in M\}$ die *Diagonale* in $M \times M$ und $M \cong \{(p, 0) \in TM \mid p \in M\}$ den *Nullschnitt* in TM . Dann erhalten wir also zwei glatte Abbildungen

$$(M \times M) \setminus \Delta M \longrightarrow S^{n-1} \quad \text{und} \quad TM \setminus M \longrightarrow S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n ,$$

und wir suchen einen Vektor, der nicht im Bild liegt. Nach dem Lemma von Sard aus dem nächsten Abschnitt existiert solch ein Vektor stets, solange

$$n - 1 = \dim S^{n-1} > 2m = \dim((M \times M) \setminus \Delta M) = \dim(TM \setminus M) ,$$

denn in diesem Fall ist jeder Wert der obigen Abbildungen singulär, und die singulären Werte bilden immer eine Nullmenge. Das erlaubt uns, die Dimension des Zielraumes schrittweise auf $2m + 1$ zu reduzieren. \square

1.33. BEMERKUNG. Zunächst sollten wir festhalten, dass die Abbildung $TM \setminus M \rightarrow S^{n-1}$ im obigen Beweis auf allen positiven Vielfachen eines Vektors v den gleichen Wert wie für v annimmt. Wir könnten also eine Riemannsche Metrik einführen und nur das Einheitsstangentialbündel

$$SM = \{ (p, v) \in TM \mid \|v\| = 1 \}$$

betrachten. Das macht die Sache etwas einfacher, denn $\dim(SM) = 2m - 1$.

In Wirklichkeit können wir die beiden Abbildungen oben zusammenfassen zu einer Abbildung von einer Mannigfaltigkeit \overline{M} mit Rand nach S^{n-1} . Denn wenn eine Folge von Punkten (q_i) „aus Richtung $v \in T_p M$ “ gegen p konvergiert, dann gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F(q_i) - F(p)}{\|F(q_i) - F(p)\|} = \frac{dF_p(v)}{\|dF_p(v)\|}.$$

Die entsprechende Mannigfaltigkeit \overline{M} heißt auch die (reelle) *Aufblasung von $M \times M$ entlang ΔM* . Sie wird zusammen mit einer Abbildung $\pi_{\overline{M}}: \overline{M} \rightarrow M \times M$ definiert, die auf $\pi_{\overline{M}}^{-1}((M \times M) \setminus \Delta M)$ ein Diffeomorphismus ist. Der Rand von \overline{M} wird nach ΔM abgebildet, und das Urbild von jedem Punkt $(p, p) \in \Delta M$ ist eine $(m - 1)$ -Sphäre.

Noch schöner wird es, wenn wir als Zielraum $\mathbb{R}P^{n-1} = S^{n-1}/\pm$ wählen, dann können wir anstelle von \overline{M} eine Mannigfaltigkeit ohne Rand betrachten. Diesmal ist das Urbild eines jeden Punktes $(p, p) \in \Delta M$ diffeomorph zu $\mathbb{R}P^{2m-1}$.

Wenn man statt einer Einbettung nur eine Immersion möchte, also Selbstschnitte und Selbsthäufungen des Bildes zulässt, kann man die Dimension n noch etwas weiter reduzieren. Das folgende Resultat erwähnen wir ohne Beweis.

1.34. SATZ (Whitney-Immersionssatz). *Es sei M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit, dann existiert eine Immersion $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ falls $n \geq 2m - 1$.*

1.4. Das Lemma von Sard

Reguläre Werte spielen immer wieder eine Rolle, zum Beispiel bei der Konstruktion von Untermannigfaltigkeiten, siehe Beispiele 1.1 und 1.12. Das Lemma von Sard besagt, dass jede glatte Abbildung stets ausreichend viele reguläre Werte besitzt. Im Beweis des Satzes von Whitney haben wir es bereits zur Reduktion der Dimension des Zielraums benutzt. Im nächsten Kapitel werden wir es einsetzen, um transversale Abbildungen zu konstruieren.

1.35. DEFINITION. Sei M eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt *Nullmenge*, wenn es zu jedem Punkt $p \in A$ eine Karte $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$ um p gibt, so dass $\varphi(A \cap U^\varphi) \subset V^\varphi$ eine Lebesgue-Nullmenge im \mathbb{R}^n ist.

Man beachte, dass wir dazu kein Maß auf M einführen müssen, da der Begriff „Lebesgue-Nullmenge“ unter Diffeomorphismen invariant ist. Typische Beispiele von Nullmengen sind Untermannigfaltigkeiten kleinerer Dimension, und abzählbare Vereinigungen von Nullmengen.

1.36. SATZ (Lemma von Sard). *Es sei $F: M \rightarrow N$ eine C^∞ -Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Dann bilden die singulären Werte von F eine Nullmenge in N .*

Dieser Satz ist etwas leichter zu zeigen (man braucht nur „Schritt (3)“ im folgenden Beweis), wenn $\dim M < \dim N$ gilt, und diese Version benutzen wir meistens. In diesem Spezialfall hat dF nie Rang n , somit sind die singulären Werte von F gerade das Bild von F . Dennoch geben wir hier

den kompletten Beweis nach Pontryagin, siehe [M]. Der obige Satz gilt bereits, wenn F ausreichend oft differenzierbar ist. Wir sehen unten, dass C^k ausreicht, falls $k > \frac{m}{n}$. Auf der anderen Seite ist er nicht sinnvoll, wenn F nur stetig ist. Tatsächlich gibt es stetige, surjektive Abbildungen vom Einheitsintervall I auf beliebig hoch-dimensionale Würfel I^n .

BEWEIS. Nach Definition 1.35 reicht es, eine Karte $\psi: U^\psi \rightarrow V^\psi$ von N zu fixieren und nur singuläre Werte in U^ψ zu betrachten. Da M abzählbare Basis hat, reicht ein abzählbarer Atlas aus, um M zu überdecken. Dann erhalten wir alle singulären Werte von $\psi \circ F$ als abzählbare Vereinigung über die Karten φ aus dem Atlas von M der singulären Werte von

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U^\varphi \cap F^{-1}(U^\psi)) \rightarrow V^\psi .$$

Wenn wir für jede Karte $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$ zeigen können, dass die singulären Werte von $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ eine Nullmenge bilden, folgt die Behauptung, denn eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge. Daher reicht, es Abbildungen $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ zu betrachten, wobei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen sei.

Es sei $C = \{x \in U \mid \text{rg}(dF(x)) < n\} \subset U$ die Menge der kritischen Punkte von F , so dass $F(C) \subset \mathbb{R}^n$ gerade die singulären Werte beschreibt. Wir definieren

$$C_k = \{x \in C \mid \text{alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung } k \text{ verschwinden bei } x\} .$$

Der Beweis benutzt Induktion über m , wobei der Induktionsanfang $m = 0$ klar sein dürfte: falls $n = 0$ ist der einzige Bildpunkt regulär, falls $n > 0$ ist die Menge $\{F(0)\} \subset \mathbb{R}^n$ der singulären Werte eine Nullmenge. Für $m > 0$ nehmen wir $n > 0$ an und zeigen wir der Reihe nach

- (1) Das Bild von $C \setminus C_1$ ist eine Nullmenge,
- (2) Das Bild von $C_{i+1} \setminus C_i$ ist eine Nullmenge für alle i ,
- (3) Das Bild von C_k ist eine Nullmenge, wenn k ausreichend groß ist.

Schritt (1). Es sei $x \in C \setminus C_1$. Dann hat F mindestens eine nicht verschwindende partielle Ableitung, ohne Einschränkung sei das $\frac{\partial F^1}{\partial x^1}$. Wir finden also eine Umgebung $U' \subset U$ von x , auf der die Abbildung

$$H(x^1, \dots, x^m) = (F^1(x), x^2, \dots, x^m)$$

ein Diffeomorphismus auf ihr Bild $V' = H(U') \subset \mathbb{R}^m$ ist. Dann hat die Abbildung $G = F \circ H^{-1}: V' \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Gestalt

$$G(y, x^2, \dots, x^m) = (y, G^2(y, x^2, \dots, x^m), \dots, G^n(y, x^2, \dots, x^m)) ,$$

insbesondere bildet sie Hyperebenen $\{y\} \times \mathbb{R}^{m-1}$ auf Hyperebenen $\{y\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ ab. Sei G_y die Einschränkung auf eine solche Hyperebene, dann sind die kritischen Werte von G in der Hyperebene $\{y\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ gerade die kritischen Werte von G_y . Nach Induktionsvoraussetzung ist das eine Nullmenge. Aus dem Cavalierischen Prinzip (einer Folgerung aus dem Satz von Fubini), folgt, dass die kritischen Werte von G insgesamt wieder eine Nullmenge in \mathbb{R}^n bilden.

Wir müssen um jeden Punkt $x \in U$ eine Umgebung U' wie oben wählen, gegebenenfalls so, dass eine andere partielle Ableitung von F nicht verschwindet. Aber da \mathbb{R}^m eine abzählbare Basis hat, reichen abzählbar viele Umgebungen vom Typ U' aus, um U zu überdecken. Da eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, ist die Behauptung aus Schritt (1) damit bewiesen.

Schritt (2). Es sei $x \in C_{i+1} \setminus C_i$, dann verschwinden alle i -ten Ableitungen von F im Punkt x , aber es gibt Indizes ℓ und j_1, \dots, j_{i+1} , so dass

$$\frac{\partial^{i+1} F^\ell}{\partial x^{j_0} \dots \partial x^{j_i}}(x) \neq 0 .$$

Ohne Einschränkung sei $j_0 = \ell = 1$, und wir betrachten die Abbildung

$$H(x_1, \dots, x_m) = \left(\frac{\partial^i F^\ell}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_i}}(x_1, \dots, x_m), x_2, \dots, x_m \right).$$

Sie ist in einer Umgebung U' von x ein Diffeomorphismus auf ihr Bild $V' \subset \mathbb{R}^m$. Nach Konstruktion gilt

$$C_i \cap U' \subset H^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}).$$

Wir betrachten wieder $G = F \circ H^{-1}: V' \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sei G_0 die Einschränkung auf die Hyperebene $(\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V'$. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Menge der singulären Werte von G_0 eine Nullmenge. Sie enthält die Menge

$$F(C_i \cap U') = G(H(C_i \cap U')),$$

somit ist diese ebenfalls eine Nullmenge. Da wir $C_i \setminus C_{i+1}$ mit abzählbar vielen Mengen der Form U' überdecken können, beendet dies den Schritt (2).

Schritt (3). Es sei $k > \frac{m}{n} - 1$ und F mindestens von Klasse \mathcal{C}^{k+1} . Es sei $I \subset U$ ein Würfel der Kantenlänge δ . Wir betrachten die Taylor-Entwicklung von F um beliebige Punkte $x \in C_k \cap I$ und finden eine Konstante $c > 0$, die nur von den $(k+1)$ -sten Ableitungen von F abhängt, so dass

$$\|F(y) - F(x)\| \leq c \|y - x\|^{k+1} \quad \text{für alle } x \in C_k \cap I \text{ und alle } y \in I.$$

Jetzt zerlegen wir I in r^m Würfel der Kantenlänge $\frac{\delta}{r}$. Jeder dieser Würfel hat Durchmesser $\sqrt{m} \frac{\delta}{r}$. Falls einer dieser Würfel einen Punkt aus C_k enthält, dann ist sein Bild enthalten in einem Würfel der Kantenlänge $c \left(\sqrt{m} \frac{\delta}{r}\right)^{k+1}$, letzterer hat Volumen

$$c^n \left(\sqrt{m} \frac{\delta}{r}\right)^{n(k+1)}.$$

Da maximal r^m dieser Würfel Punkte aus C_k enthalten können, schätzen wir das äußere Maß von $C_k \cap I$ ab durch

$$\text{vol}(F(C_k \cap I)) \leq \underbrace{c^n \sqrt{m}^n \delta^{n(k+1)}}_{\text{konstant}} r^{m-n(k+1)}.$$

Da $m - n(k+1) < 0$, sehen wir, dass $F(C_k \cap I)$ eine Lebesgue-Nullmenge ist, indem wir r beliebig groß wählen.

Da wieder abzählbar viele Würfel ausreichen, um ganz U zu überdecken, ist das Lemma von Sard bewiesen. \square

1.5. Der Brouwersche Fixpunktsatz

Wir geben eine kurze, aber überraschende Anwendung des Lemmas von Sard. Im folgenden Beweis verwenden wir die Klassifikation der eindimensionalen kompakten Mannigfaltigkeiten mit Rand. Da wir dieses Resultat später noch gelegentlich verwenden wollen, beweisen wir es anschließend.

1.37. SATZ (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Es sei $D^n \subset \mathbb{R}^n$ der abgeschlossene Einheitsball und $F: D^n \rightarrow D^n$ stetig. Dann hat F mindestens einen Fixpunkt.*

BEWEIS. Wir beweisen des Satz indirekt und nehmen an, dass F keinen Fixpunkt hat. Dann werden wir eine Abbildung $R: D^n \rightarrow S^{n-1} = \partial D^n$ konstruieren, so dass $R|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$. Eine solche Abbildung heißt auch *Retraktion* von D^n auf $S^{n-1} \subset D^n$. Im nächsten Satz zeigen wir dann, dass es keine solche Retraktion geben kann.

Um $R(p) \in S^{n-1}$ für $p \in D^n$ zu konstruieren zeichnen wir einen Strahl g von $F(p)$ durch p und definieren $R(p)$ als den Schnittpunkt von g mit S^{n-1} . Man überzeugt sich leicht, dass die

so definierte Abbildung R stetig ist. Für $p \in \partial D^n$ ist p selbst der gesuchte Schnittpunkt, also gilt $R|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$. \square

1.38. SATZ. *Es sei N eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann gibt es keine glatte Retraktion von N auf den Rand ∂N .*

BEWEIS. Wir folgen dem Beweis von Hirsch, siehe [M]. Sei R eine glatte Retraktion. Dann hat R einen regulären Wert $q \in \partial N$ nach dem Lemma 1.36 von Sard. Folglich ist $M = R^{-1}(q) \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit mit Rand der Dimension $\dim M = \dim N - \dim \partial N = 1$ nach dem Satz vom regulären Wert. Das Verhalten im Rand schauen wir uns gleich genauer an. Es folgt außerdem $\partial M \subset \partial N$, da der Satz vom regulären Wert im Inneren von N keine Randpunkte des Urbildes zulässt.

Da $R|_{\partial N} = \text{id}_{\partial N}$, folgt $M \cap \partial N = \{q\}$, und wir wollen zeigen, dass q ein Randpunkt von M ist. Dazu sei $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte um p wie in den Definitionen 1.10 und 1.11 mit $\varphi(q) = 0$. Dann existiert eine Umgebung $U \subset V^\varphi$ von q , so dass $(\varphi \circ R \circ \varphi^{-1})(U) \subset V^\varphi$. Schreibe

$$G = \varphi \circ R \circ \varphi^{-1}|_U: U \rightarrow V^\varphi .$$

Da G bis zum Rand glatt ist, können wir G auf eine Umgebung V von 0 in ganz \mathbb{R}^n fortsetzen. Nach dem Satz vom regulären Wert ist $G^{-1}(0)$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von V , und es gilt

$$\varphi(M) \cap U = G^{-1}(0) \cap \mathbb{R}^n .$$

Aus $R|_{\partial N} = \text{id}_{\partial N}$ folgt $dR_q|_{T_q \partial N} = \text{id}_{T_q \partial N}$, und somit auch

$$dG_0|_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}} = \text{id}_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}} .$$

Da $T_0(G^{-1}(0)) = \ker(dG_0)$, folgt, dass $T_0(G^{-1}(0))$ ein zu $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ komplementärer Unterraum ist. Insbesondere ist 0 regulärer Wert der Funktion $x \mapsto x^1$ auf $G^{-1}(0)$, und somit auch regulärer Wert von $\varphi^1|_M$. Wie in Beispiel 1.12 (2) ist daher M eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = \{q\}$. Alternativ folgt die obige Überlegung auch aus Proposition 2.5 (1).

Als Urbild einer abgeschlossenen Menge $\{q\}$ ist M abgeschlossen in N , also kompakt, da N kompakt ist. Aber nach Satz 1.39 gibt es keine kompakte eindimensionale Mannigfaltigkeit mit einer ungeraden Anzahl von Randpunkten. Damit haben wir die Existenz von R zum Widerspruch geführt. \square

Der Spezialfall $N = D^n$ liefert den Fixpunktsatz von Brouwer. Allerdings hatten wir dort stetige Abbildungen zugelassen. Wir wollen exemplarisch zeigen, wie man mit Hilfe einer stetigen Retraktion eine glatte konstruieren kann. Zunächst einmal ist R als stetige Funktion auf einem Kompaktum gleichmäßig stetig, also finden wir $r > 0$ so, dass $\|R(q) - R(p)\| < \frac{1}{2}$ für alle $p, q \in D^n$ mit $\|q - p\| < r$. Sei $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abschneidefunktion mit $\text{supp } \rho = \overline{B_{r/4}(0)}$. Indem wir ρ durch das Integral von ρ teilen, erhalten wir eine glatte Funktion $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit Integral 1 und demselben Träger.

Wir konstruieren der Reihe nach weitere Abbildungen, zunächst

$$R_1(p) = \int_{D^n} \varphi(\|p - q\|^2) R(q) d^n p .$$

Diese Funktion ist glatt, da der Integral nach p stetig differenzierbar ist. Außerdem ist $R_1(p)$ ein gewichtetes Mittel über Punkte auf S^{n-1} , die von $R(p)$ nach Voraussetzung nicht weiter als $\frac{1}{2}$ entfernt sind. Daraus folgt

$$\|R_1(p)\| > \frac{1}{2} \quad \text{für alle } p \in D^n \quad \text{für alle } p \in D^n .$$

Für $\|p\| > 1 - \frac{r}{2}$ und $\|q - p\| < \frac{r}{2}$ gilt außerdem $\|q - \frac{p}{\|p\|}\| < r$, somit folgt

$$\left\| R_1(p) - \frac{p}{\|p\|} \right\| < \frac{1}{2} \quad \text{für alle } p \in D^n \text{ mit } \|p\| > 1 - \frac{r}{2}.$$

Wir wählen eine weitere Abschneidefunktion σ mit

$$\text{supp } \sigma = \overline{B_{1-\frac{r}{4}}(0)} \quad \text{und} \quad \sigma^{-1}(1) = \overline{B_{1-\frac{r}{2}}(0)}.$$

Dann definieren wir weitere Abbildungen $R_2: D^n \rightarrow D^n$ und $R_3: D^n \rightarrow S^{n-1}$ durch

$$R_2(p) = \sigma(p) R_1(p) + (1 - \sigma(p)) \frac{p}{\|p\|} \quad \text{und} \quad R_3(p) = \frac{R_2(p)}{\|R_2(p)\|}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass R_3 eine glatte Retraktion von D^n auf den Rand S^{n-1} ist.

Wir beenden den Beweis von Satz 1.38 mit der folgenden Klassifikation.

1.39. SATZ. *Es sei M eine kompakte, eindimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist M diffeomorph zu einer disjunkten Vereinigung endlicher vieler kompakter Intervalle und Kreise.*

Wir liefern einen Beweis, der auch für topologische Mannigfaltigkeiten funktioniert. Einen alternativen Beweis findet man im Anhang von [M]. Wir beginnen mit ein paar Vorüberlegungen. Zunächst sei $U \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge und $t \in U$. Dann existieren $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, so dass $t \in (a, b) \subset U$. Wir können a minimal und b maximal mit der obigen Eigenschaft wählen, so dass zusätzlich $a, b \notin U$. Dann nennen wir (a, b) das *maximale offene Intervall* um t in U .

Analog sei jetzt $U \subset (-\infty, 0]$ offen und $t \in U$, dann finden wir wieder ein maximales, in $(-\infty, 0]$ offenes Intervall in U um t . Diesmal hat es entweder die Gestalt (a, b) mit $a < t < b \leq 0$, oder die Gestalt $(a, 0]$.

Sei jetzt $(c, d) \subset (a, b)$ ein Teilintervall. Wir sagen, $(c, d) \subset (a, b)$ ist am unteren (oberen) Ende *bündig*, falls $a = c$ ($b = d$). Wir verwenden diese Begriffe auch für Teilmengen von topologischen Räumen, die zu Intervallen homöomorph sind. Das ist erlaubt, denn das Bild eines Intervalls unter einem Homöomorphismus ist wieder ein Intervall. Insbesondere werden wir später auch homöomorphe Bilder von Intervallen als Intervalle bezeichnen.

1.40. PROPOSITION. *Es seien $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi \subset \mathbb{R}_-$ und $\psi: U^\psi \rightarrow V^\psi \subset \mathbb{R}_-$ Karten einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit, so dass V^φ, V^ψ Intervalle sind. Dann ist jedes maximale Teilintervall von $U^\varphi \cap U^\psi$ an jedem seiner Enden jeweils in U^φ oder in U^ψ bündig.*

BEWEIS. Zunächst sind U^φ, U^ψ homöomorph zu Intervallen, so dass wir ein maximales Intervall $I \subset U^\varphi \cap U^\psi$ betrachten können. Es sei etwa

$$V^\varphi = (a, b) \supset (e, f) = \varphi(I) \quad \text{und} \quad V^\psi = (c, d) \supset (g, h) = \psi(I).$$

Ohne Einschränkung sei $\psi \circ \varphi^{-1}$ auf (e, f) monoton steigend. Wir nehmen an, dass weder $a = e$ noch $c = g$ gilt, somit folgt $e \in (a, b)$ und $g \in (c, d)$. Aus der Hausdorff-Eigenschaft folgt

$$\psi^{-1}(g) = \lim_{t \searrow g} \psi^{-1}(t) = \lim_{s \searrow e} (\psi^{-1} \circ (\psi \circ \varphi^{-1}))(s) = \lim_{s \searrow e} \varphi^{-1}(s) = \varphi^{-1}(e),$$

insbesondere liegt dieser Punkt noch in $U^\varphi \cap U^\psi$, im Widerspruch zur Maximalität von I . Alle anderen Fälle (zum Beispiel, falls V^φ oder V^ψ halboffen mit Obergrenze 0 sind) gehen analog. \square

Die offene Menge $U^\varphi \cap U^\psi$ setzt sich aus Intervallen zusammen, und jedes dieser Teilintervalle ist mit zwei Intervallgrenzen von U^φ und U^ψ bündig. Also kann es maximal zwei solcher Teilintervalle geben, und es gibt nur endlich viele Möglichkeiten, wie diese in den Intervallen U^φ und U^ψ liegen können.

Als nächstes nehmen wir an, dass $I \subset U^\varphi \cap U^\psi$ ein maximales Intervall ist, so dass

$$V^\varphi = (a, b) \supset (e, b) = \varphi(I) \quad \text{und} \quad V^\psi = (c, d) \subset (c, f) = \psi(I).$$

Außerdem sei $\psi \circ \varphi^{-1}$ auf (e, b) streng monoton steigend. Indem wir V^φ verschieben und skalieren, dürfen wir annehmen, dass es einen Punkt $x_0 \in (e, b)$, so dass

$$\psi \circ \varphi^{-1}(x_0) = x_0 \in (c, f) \quad \text{und} \quad (\psi \circ \varphi^{-1})'(x_0) = 1.$$

Wir wählen eine Abschneidefunktion ρ mit Träger $(-\infty, x_0 + \varepsilon)$, die für $x \leq x_0 - \varepsilon$ konstant 1 ist, und definieren eine Kurve $\gamma: (a, d) \rightarrow M$ durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & \text{für } t \leq e, \\ \psi^{-1}(\sigma(t)(\psi \circ \varphi^{-1})(t) + (1 - \sigma(t))t) & \text{für } t \in (e, f), \\ \psi^{-1}(t) & \text{für } t \geq f. \end{cases}$$

Man überlegt sich leicht, dass γ ein lokaler Diffeomorphismus ist, der φ^{-1} und ψ^{-1} „verbindet“. Falls γ injektiv ist, bildet die Umkehrabbildung eine Karte mit Definitionsbereich $U^\varphi \cup U^\psi$.

BEWEIS VON SATZ 1.39. Ohne Einschränkung betrachten wir nur Karten, deren Bildbereich ein Intervall der Form (a, b) beziehungsweise $(a, 0]$ ist. Da M kompakt ist, reichen endlich viele. In den folgenden Schritten werden wir die Anzahl der Karten solange reduzieren, bis keine mehr übrig bleiben.

Falls $\partial M \neq \emptyset$, wähle $p \in \partial M$ und eine Karte $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi = (a, 0]$ mit $\varphi(p) = 0$. Da M kompakt ist, finden wir einen Häufungspunkt $q \in M$ der Folge

$$\left(\varphi^{-1}\left(a + \frac{1}{n}\right) \right)_{n > \frac{1}{a}}.$$

Es sei $\psi: U^\psi: V^\psi$ eine Karte um q . Für ein hinreichend großes n liegt $a + \frac{1}{n} \in \varphi(U^\varphi \cap U^\psi)$. Sei $I \subset \varphi(U^\varphi \cap U^\psi)$ das maximale Intervall um $a + \frac{1}{n}$. Wir unterscheiden folgende Fälle.

- (1) Das Intervall V^ψ ist vom Typ (b, c) . Ohne Einschränkung sei $\psi \circ \varphi^{-1}$ auf I monoton steigend, andernfalls ersetzen wir ψ durch $-\psi$. Da $q \in U^\psi$ gilt, ist das Intervall I am unteren Ende bündig mit V^ψ . Es gilt $I = \varphi(U^\varphi \cap U^\psi)$, denn ein weiteres maximales Intervall im Durchschnitt müsste am oberen Ende zu $(a, 0]$ bündig sein, wäre also halboffen. wäre aber gleichzeitig als offene Teilmenge der in \mathbb{R} offenen Teilmenge $\varphi(U^\varphi \cap U^\psi)$ ein offenes Intervall. Wir dürfen die Karten φ und ψ also zu einer Karte mit neuem Definitionsbereich $U^\varphi \cap U^\psi$ zusammensetzen. Dadurch reduziert sich die Anzahl der Karten.
- (2) Das Intervall V^ψ ist vom Typ $(b, 0]$, und $\psi \circ \varphi^{-1}$ ist auf I monoton steigend. Da I am oberen Ende zu mindestens einer der Mengen U^φ oder U^ψ bündig ist, ist I halboffen. Es folgt $U^\varphi \subset U^\psi$, und wir benötigen die Karte φ nicht mehr.
- (3) Das Intervall V^ψ ist vom Typ $(b, 0]$, und $\psi \circ \varphi^{-1}$ ist auf I monoton fallend. Wie in (1) überlegen wir uns, dass bereits $I = \varphi(U^\varphi \cap U^\psi)$ gilt. In diesem Fall können wir die Karten φ und $-\psi$ zu einem Diffeomorphismus $U^\varphi \cup U^\psi \cong [d, 0]$ zusammensetzen, somit ist $U^\varphi \cup U^\psi$ ein kompaktes Intervall. Da $U^\varphi \cup U^\psi \subset M$ offen, aber als kompakte Menge auch abgeschlossen ist, ist es eine Zusammenhangskomponente von M . Wir lassen sie und alle Karten, die auf ihr definiert sind, weg, und machen weiter mit $M \setminus U^\varphi \cup U^\psi$.

Nach endlichen vielen Schritten verbleibt eine Mannigfaltigkeit M mit leerem Rand. Sei nun $p \in M$ beliebig, und sei $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi = (a, b)$ eine Karte um p , und bestimmen q , ψ und $I \subset \varphi(U^\varphi \cap U^\psi)$ wie oben. Folgende Fälle sind möglich.

- (1) Die Kartengebiete U^φ und U^ψ schneiden sich nur in einem Intervall $\varphi^{-1}(I)$. In diesem Fall gilt entweder $U^\varphi \subset U^\psi$, und wir dürfen die Karte φ streichen und mit ψ weitermachen, oder $\varphi^{-1}(I)$ ist an einem Ende zu U^φ und am anderen zu U^ψ bündig. In diesem Fall können wir φ und ψ zu einer Karte mit Definitionsbereich $U^\varphi \cup U^\psi$ verbinden.

- (2) Die Kartengebiete U^φ und U^ψ schneiden sich in mehr als einem Intervall. Da jedes maximale Teilintervall von $U^\varphi \cap U^\psi$ an jedem Ende zu U^φ oder zu U^ψ bündig sein muss, folgt

$$\varphi(U^\varphi \cup U^\psi) = (a, c) \dot{\cup} (d, b) \subset (a, b) .$$

Wir nehmen an, dass $\psi \circ \varphi^{-1}$ auf (a, c) monoton steigend ist, andernfalls ersetzen wir ψ durch $-\psi$. Dann ist $\varphi^{-1}(a, c)$ am oberen Ende bündig zum oberen Ende von U^ψ , folglich ist (d, b) am unteren Ende bündig zum unteren Ende von U^ψ . Wenn wir wie oben eine Kurve γ mit Bild $U^\varphi \cup U^\psi$ konstruieren, sehen wir, dass diese Kurve zwar ein lokaler Diffeomorphismus ist, aber nicht injektiv. In diesem Fall zeigt man, dass $U^\varphi \cup U^\psi$ diffeomorph zu einem Kreis ist. Wieder ist $U^\varphi \cup U^\psi$ kompakt und offen in M , also eine Zusammenhangskomponente. Wir lassen sie ab sofort weg.

Nach endlich vielen Schritten haben wir M in eine disjunkte Vereinigung von Zusammenhangskomponenten zerlegt, die jeweils entweder zu einem kompakten Intervall oder zu einem Kreis diffeomorph sind. \square

Transversalität, Schnittzahl und Abbildungsgrad

In diesem Kapitel definieren wir einige elementare Invarianten von Abbildungen und von Untermannigfaltigkeiten. Mit ihrer Hilfe können wir beispielsweise den Satz vom Igel, den Brouwerschen Fixpunktsatz oder den Fundamentalsatz der Algebra beweisen. Ein wichtiger Begriff in diesem Zusammenhang ist *Transversalität*.

2.1. Transversalität

Wenn eine Abbildung $F: M \rightarrow N$ transversal zu einer Untermannigfaltigkeit $A \subset N$ ist, dann bildet $F^{-1}(A) \subset M$ wieder eine Untermannigfaltigkeit. Aus dem Lemma von Sard werden wir schließen, dass es immer viele transversale Abbildungen gibt. Das erlaubt uns, neue Untermannigfaltigkeiten zu konstruieren. Wichtiger ist aber, dass wir auf diese Weise später auch Invarianten für Abbildungen konstruieren können. Der Einfachheit halber betrachten wir wieder nur kompakte Mannigfaltigkeiten (mit Rand). Alle Sätze in diesem Abschnitt gelten aber mit kleinen Änderungen auch im nicht-kompakten Fall.

2.1. DEFINITION. Es sei $F: M \rightarrow N$ differenzierbar, $A \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit und $C \subset M$ eine Teilmenge. Dann heißt F *transversal zu A längs C* , kurz $F \pitchfork_C A$, falls für alle $p \in F^{-1}(A) \cap C$ gilt

$$T_{F(p)}N = T_{F(p)}A + \text{im}(dF_p).$$

Falls $C = M$ gilt, heißt F einfach transversal zu A , und wir schreiben $F \pitchfork A$. Falls F die Inklusionsabbildung einer Untermannigfaltigkeit $M \subset N$ ist, schreiben wir stattdessen auch $M \pitchfork_C A$ beziehungsweise $M \pitchfork A$.

Die Menge aller glatten, zu A transversalen Abbildungen von M nach N (längs $C \subset M$) bezeichnen wir mit $\pitchfork(M, N; A)$ (beziehungsweise $\pitchfork_C(M, N; A)$).

Transversalität hängt immer vom umgebenden Raum (hier N) ab, was wir in der Notation aber nicht deutlich machen.

2.2. PROPOSITION. *Es sei $F: M \rightarrow N$ transversal zur Untermannigfaltigkeit $A \subset N$. Dann ist $F^{-1}(A) \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit mit $T_p(F^{-1}(A)) = (d_p F)^{-1}(T_{F(p)}A)$ für alle $p \in F^{-1}(A)$, und es gilt*

$$\dim(F^{-1}(A)) = \dim M + \dim A - \dim N.$$

Insbesondere ist $F^{-1}(A) = \emptyset$ falls $F \pitchfork A$ und $\dim A + \dim M < \dim N$.

BEWEIS. Es sei $p \in F^{-1}(A)$. Wir wählen eine Karte $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$ von M um p und eine Untermannigfaltigkeitskarte $\psi: U^\psi \rightarrow V^\psi$ für $A \subset N$ um $F(p)$ mit $\psi(F(p)) = 0$, so dass

$$A \cap U^\psi = \psi^{-1}(\mathbb{R}^a \times \{0\}) \quad \text{und} \quad U^\varphi \subset F^{-1}(U^\psi).$$

Da Untermannigfaltigkeit zu sein eine lokale Eigenschaft ist, dürfen wir M durch U^φ und N durch U^ψ ersetzen und F für $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ schreiben.

Betrachte die Projektion $\pi: U^\psi \rightarrow \mathbb{R}^{n-a}$ mit

$$\pi(y_1, \dots, y_n) = (y_{a+1}, \dots, y_n),$$

dann übernimmt $\pi^{-1}(0)$ die Rolle von A , und wir betrachten $(\pi \circ F)^{-1}(0)$ anstelle von $F^{-1}(A)$.

Wir müssen also zeigen, dass 0 ein regulärer Wert von $\pi \circ F$ ist. Sei dazu $w \in \mathbb{R}^{n-a}$, dann ist $(0, w) \in \mathbb{R}^n$ ein Urbild von w unter $d\pi_{F(p)} = \pi$. Wegen Transversalität finden wir $u \in \mathbb{R}^a$ und $v \in \mathbb{R}^m$, so dass

$$(u, 0) + dF_p(v) = (0, w) \in T_{F(p)}M.$$

Da $(u, 0) \in \ker d\pi$, folgt

$$d(\pi \circ F)_p(v) = d\pi_{F(p)}((u, 0) + dF_p(v)) = d\pi_{F(p)}((0, w)) = w,$$

und wir haben Surjektivität von $d(\pi \circ F)_p$ gezeigt. Also ist 0 regulärer Wert von $\pi \circ F$, und somit ist $F^{-1}(A) \subset M$ Untermannigfaltigkeit mit

$$T_p(F^{-1}(A)) = \ker(d_p(\pi \circ F)) = (d_p F)^{-1}(\ker(d_{F(p)}\pi)) = (d_p F)^{-1}(T_{F(p)}A).$$

Aus dem Satz vom regulären Wert folgt auch, dass $\dim(F^{-1}(A)) = m - (n - a) = m + a - n$ gilt. Es gilt insbesondere $F^{-1}(A) = \emptyset$, falls $m + a < n$, denn in diesem Fall können $T_{F(p)}A$ und $\text{im}(dF_p)$ zusammen nicht ganz $T_{F(p)}N$ aufspannen. \square

Wir benötigen später auch einen Begriff von Transversalität für Mannigfaltigkeiten mit Rand.

2.3. DEFINITION. Es seien M, N Mannigfaltigkeiten mit Rand, $A \subset N$ sei Untermannigfaltigkeit mit Rand. Sei $F: M \rightarrow N$ glatt und $\partial F = F|_{\partial M}$. Dann heißt F transversal zu A längs $C \subset M$, wenn die folgenden Relationen gelten:

$$F|_{\overset{\circ}{M}} \pitchfork_C \overset{\circ}{A}, \quad F|_{\overset{\circ}{M}} \pitchfork_C \partial A, \quad F|_{\partial M} \pitchfork_C \overset{\circ}{A}, \quad \text{und} \quad F|_{\partial M} \pitchfork_C \partial A.$$

Wir lassen C weg, falls $C = M$.

Man beachte, dass der Rand von N hier keine Rolle spielt. Wenn $\partial M = \partial A = \emptyset$, erhalten wir die obige Definition 2.1 zurück.

2.4. BEMERKUNG. Es sei beispielsweise $p \in F^{-1}(\partial A) \cap \overset{\circ}{M}$, dann impliziert die obige Definition, dass

$$T_{F(p)}N = \text{im}(d_p F) + T_{F(p)}\partial A \subset \text{im}(d_p F) + T_{F(p)}A \subset T_{F(p)}N.$$

Insbesondere ist F bei p nicht nur zu ∂A , sondern auch zu A selbst transversal. Genauso folgt für Punkte $p \in \partial M \cap F^{-1}(A)$, dass nicht nur $F|_{\partial M}$, sondern auch F selbst zu A transversal sind, denn

$$T_{F(p)}N = \text{im}(d_p F|_{T_p \partial M}) + T_{F(p)}A \subset \text{im}(d_p F) + T_{F(p)}A \subset T_{F(p)}N.$$

Insbesondere reicht es an jedem Punkt, die Transversalität zwischen den „kleinsten“ beteiligten (Unter-) Mannigfaltigkeiten zu überprüfen.

2.5. PROPOSITION. *Es sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m, n mit Rand, und F sei transversal zu einer glatten a -dimensionalen Untermannigfaltigkeit $A \subset N$ mit Rand.*

- (1) Falls $\partial A = \emptyset$, ist $F^{-1}(A)$ eine $(a + m - n)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand von M , die transversal in M zu ∂M transversal ist, mit $\partial(F^{-1}(A)) = F^{-1}(A) \cap \partial M$.
- (2) Falls $\partial M = \emptyset$, ist $F^{-1}(A)$ eine $(a + m - n)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand $F^{-1}(\partial A)$ von M .

Wenn wir zulassen würden, dass sowohl M als auch A einen Rand haben, dann hätte $F^{-1}(A)$ nicht nur einen Rand, sondern auch „Kanten“ $F^{-1}(\partial A) \cap \partial M$. Diesen Fall haben wir daher ausgeschlossen.

BEWEIS. Zu (1) brauchen wir nur Randpunkte $p \in \partial M \cap F^{-1}(A)$ zu betrachten, denn für innere Punkte folgt die Aussage bereits aus Proposition 2.2. Aus dieser Proposition folgt ebenfalls, dass $F^{-1}(A)$ im Innern von M keine Randpunkte haben kann.

Sei also $p \in \partial M \cap F^{-1}(A)$, sei $\psi: U^\psi \rightarrow V^\psi \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeitskarte für A um $F(p)$, und sei $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi \subset \mathbb{R}^m$ eine Karte um p mit $U^\varphi \subset F^{-1}(U^\psi)$. Wie im obigen Beweis dürfen ersetzen wir M durch U^φ , N durch U^ψ und schreiben F für $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$. Es sei wieder $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-a}$ die Projektion auf die hinteren $n - a$ Koordinaten.

Zunächst wenden wir die obige Argumentation auf $\partial V^\varphi \subset \{0\} \times \mathbb{R}^n$ an und sehen, dass 0 ein regulärer Wert von $\pi \circ F|_{\partial V^\varphi}$ ist. Also finden wir Indizes $2 \leq k_1 < \dots < k_{n-a}$, so dass die Matrix

$$\left(\frac{\partial F^{a+i}}{\partial x^{k_j}}(q) \right)_{i,j} \in M_{n-a}(\mathbb{R})$$

für alle q in einer Umgebung von p invertierbar ist. Seien $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_{m+a-n}$ die restlichen Indizes, so dass

$$\{1, \dots, m\} = \{1, i_2, \dots, i_{m+a-n}\} \dot{\cup} \{k_1, \dots, k_{n-a}\}.$$

Wie im Satz über implizite Funktionen können wir dann $F^{-1}(A)$ in einer Umgebung von p als Graph über einer kleinen offenen Menge in der $(x_1, x_{i_2}, \dots, x_{i_{m+a-n}})$ -Ebene schreiben. Da $x_1 \leq 0$, erhalten wir also eine Untermannigfaltigkeit mit Rand. Insbesondere enthält $T_p F^{-1}(A)$ einen Vektor mit nicht verschwindender erster Komponente, also ist $F^{-1}(A)$ transversal zu ∂V^φ . Damit ist (1) bewiesen.

Der Beweis von (2) ist etwas einfacher. Wir brauchen nur Punkte $p \in F^{-1}(\partial A)$ zu betrachten. Wie in Definition 1.14 dürfen wir den Rand von N ignorieren. Also ersetzen wir N wieder durch eine Teilmenge V^ψ und nehmen an, dass

$$A = V^\psi \cap (\mathbb{R}^a \times \{0\}) \cap \mathbb{R}^n.$$

Sei $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$ eine Karte um p mit $U^\varphi \subset F^{-1}(U^\psi)$. Wegen Bemerkung 2.4 und Proposition 2.2 ist $F^{-1}(\mathbb{R}^a \times \{0\})$ eine $(m + a - n)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von U^φ . Wir dürfen annehmen, dass φ eine Untermannigfaltigkeitskarte für diese Untermannigfaltigkeit ist. Also ersetzen wir wie oben M durch V^φ und schreiben F für $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$. Es folgt

$$F^{-1}(\mathbb{R}^a \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^{m+a-n} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m.$$

Nach Voraussetzung ist F auch zu $\partial A = \{0\} \times \mathbb{R}^{a-1} \times \{0\}$ transversal. Insbesondere gibt es einen Index $i \leq m + a - n$, so dass

$$\frac{\partial F^1}{\partial x^i} \neq 0.$$

Ohne Einschränkung dürfen wir $i = 1$ und

$$\frac{\partial F^1}{\partial x^1} > 0$$

annehmen. Jetzt können wir in einer kleinen Umgebung von p das Urbild von ∂A als Graph über der Hyperebene mit $x_1 = 0$ in \mathbb{R}^{m+a-n} schreiben, und sehen, dass $F^{-1}(A) \subset \mathbb{R}^{m+a-n}$ lokal der Bereich links dieses Graphen ist. Das erlaubt uns schließlich, die Karte so zu modifizieren, dass

$$F^{-1}(A) \cap V^\varphi = V^\varphi \cap (\mathbb{R}^{m+a-n} \times \{0\}) \cap \mathbb{R}^m.$$

Also ist $F^{-1}(A)$ eine $(m+a-n)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von M mit Rand $F^{-1}(\partial A)$. \square

Wir wollen zeigen, dass es immer ausreichend viele zu $A \subset N$ transversale Abbildungen $M \rightarrow N$ gibt. Dazu folgen wir [GP, §2.3] und betrachten eine zusätzliche Mannigfaltigkeit L . Wenn wir eine Abbildung $F: M \times L \rightarrow N$ transversal zu A finden, dann gibt es immer auch Abbildungen $F_\ell: M \rightarrow N$ transversal zu A , wie der nächste Satz zeigt.

Zur Konstruktion nehmen wir an, dass $N \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit ist. Dann können wir zu einer gegebenen Abbildung $F_0: M \rightarrow N$ kleine „Störungen“ $M \times L \rightarrow \mathbb{R}^k$ hinzuaddieren. Mit Hilfe des Satzes über Röhrenumgebungen projizieren wir die gestörte Abbildung auf N zurück, um eine zu A transversale Abbildung $F: M \times L \rightarrow N$ zu erhalten.

2.6. SATZ. *Es sei $F: M \times L \rightarrow N$ transversal zu einer Untermannigfaltigkeit $A \subset N$. Dann ist die Abbildung $F_\ell: M \rightarrow N$ mit $F_\ell(p) = F(p, \ell)$ für alle $\ell \in L$ außerhalb einer Nullmenge transversal.*

BEWEIS. Es sei $\pi: M \times L \rightarrow L$ die Projektionsabbildung, somit $\pi(p, \ell) = \ell$. Die Einschränkung von π auf die Untermannigfaltigkeit $F^{-1}(A) \subset M \times L$ ist eine glatte Abbildung, also bilden ihre singulären Werte nach dem Lemma von Sard eine Nullmenge in L .

Sei $\ell \in L$ ein regulärer Wert von $\pi|_{F^{-1}(A)}$ und $(p, \ell) \in F^{-1}(A)$ ein Urbild. Sei $q = F(p, \ell) \in N$, und sei $w \in T_q N$. Um die Transversalität von F_ℓ an der Stelle p zu zeigen, suchen wir Vektoren $u \in T_p A$ und $v \in T_p M$, so dass

$$w = u + d_p F_\ell(v) \in T_q N .$$

Da F zu A transversal ist, finden wir $u' \in T_{F(p)} A$ und $(v', x') \in T_{(p, \ell)}(M \times L) \cong T_p M \oplus T_\ell L$ mit

$$w = u' + d_{(p, \ell)} F(v', x') .$$

Außerdem ist ℓ regulärer Wert von $\pi|_{F^{-1}(A)}$, also existiert ein Vektor $(v'', x'') \in T_{(p, \ell)}(F^{-1}(A))$, so dass

$$x' = d_{(p, \ell)} \pi(v'', x'') = x'' .$$

Nach Proposition 2.2 gilt

$$(v'', x'') \in T_{(p, \ell)}(F^{-1}(A)) = (d_{(p, \ell)} F)^{-1}(T_q A) \subset T_p M \oplus T_\ell L .$$

Für die Vektoren $u'' = d_{(p, \ell)} F(v'', x'') \in T_q A$ und $v = v' - v'' \in T_p M$ gilt somit

$$d_p F_\ell(v) = d_{(p, \ell)} F(v, 0) = d_{(p, \ell)} F(v', x') - d_{(p, \ell)} F(v'', x'') = d_{(p, \ell)} F(v', x') - u'' ,$$

mit $u = u' + u''$ folgt also wie gewünscht

$$w = u' + d_{(p, \ell)} F(v', x') = u + d_p F_\ell(v) . \quad \square$$

2.7. FOLGERUNG. *Im obigen Satz seien M, N und A (Unter-) Mannigfaltigkeiten mit Rand. Wenn F im Sinne von Definition 2.3 zu A transversal ist, dann ist die Abbildung F_ℓ für alle $\ell \in L$ außerhalb einer Nullmenge transversal zu A in dem gleichen Sinne.*

BEWEIS. Für jede der vier Bedingungen aus Definition 2.3 wenden wir den obigen Satz einmal an. Dann schließen wir alle ℓ aus der Vereinigung der so erhaltenen Nullmengen aus. Diese Vereinigung ist selbst wieder eine Nullmenge. \square

2.8. DEFINITION. Es seien M, N Mannigfaltigkeiten mit Rand, $C \subset M$ eine Teilmenge, und $F, G: M \rightarrow N$ glatte Abbildungen mit $F|_C = G|_C$. Eine *glatte Homotopie* zwischen F und G relativ zu C ist eine glatte Abbildung $H: M \times [0, 1] \rightarrow N$, so dass

$$\begin{aligned} H_0 = H(\cdot, 0) &= F: M \rightarrow N , & H_1 = H(\cdot, 1) &= G: M \rightarrow N , \\ H(p, s) &= F(p) = G(p) & \text{für alle } p &\in C . \end{aligned}$$

In diesem Fall heißen F und G (*glatt*) *homotop relativ zu C* , kurz $F \sim_C G$. Falls $C = \emptyset$, heißt H einfach eine Homotopie zwischen F und G , und F und G heißen homotop, kurz $F \sim G$.

2.9. BEMERKUNG. Falls M einen Rand hat, ist $M \times [0, 1]$ zwar keine Mannigfaltigkeit mit Rand mehr, denn $M \times [0, 1]$ hat jetzt eine „Kante“ $\partial M \times \{0, 1\}$. Aber jede Karte $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi \subset \mathbb{R}^n$ von M liefert eine Abbildung

$$\varphi \times \text{id}_{[0,1]}: U^\varphi \times [0, 1] \rightarrow V^\varphi \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Mit Hilfe dieser „Karten“ definieren den Begriff „glatte Abbildung“ genau wie in Definition 1.8. Alternativ hätten wir verlangen können, dass sich H glatt auf $M \times (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$ fortsetzen lässt für ein $\varepsilon > 0$.

2.10. DEFINITION. Es sei $A \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit und $\iota: A \rightarrow M$ die Inklusionsabbildung. Dann heißt A (*glatter*) *Retrakt* von M , wenn es eine glatte Abbildung $R: M \rightarrow A$ gibt, so dass $R|_A = \text{id}_A$; diese heißt auch (*glatte*) *Retraktion*.

Wir nennen A einen (*glatten*) *Deformationsretrakt* von M , wenn es eine Retraktion R gibt, so dass $\iota \circ R$ homotop zu id_M ist.

Wir nennen A einen (*glatten*) *starken Deformationsretrakt* von M , wenn R zu $\iota \circ R$ homotop relativ A ist.

Satz 1.38 besagt somit, dass der Rand nie Retrakt einer kompakten Mannigfaltigkeit ist. Wenn A Deformationsretrakt von M ist, sind A und M insbesondere *homotopieäquivalent*, das heißt, es gibt Abbildungen $R: M \rightarrow A$, $\iota: A \rightarrow M$, die bis auf Homotopie zueinander invers sind (es gilt $R \circ \iota \sim \text{id}_A$ und $\iota \circ R \sim \text{id}_M$). Das bedeutet, dass sie viele Eigenschaften gemeinsam haben, obwohl sie beispielsweise unterschiedliche Dimension haben können.

2.11. DEFINITION. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Dann definieren wir das Normalenbündel ν_M von M in \mathbb{R}^n und eine Abbildung $\pi: \nu_M \rightarrow M$ durch

$$\nu_M = \{ (p, v) \in \mathbb{R}^{2n} \mid p \in M \text{ und } v \perp T_p M \} \quad \text{und} \quad \pi(p, v) = p \in M.$$

Somit ist $\nu_M|_p$ das orthogonale Komplement von $T_p M$ in \mathbb{R}^k . Insbesondere hängt das Normalenbündel von der Lage von M in \mathbb{R}^k ab, im Gegensatz zum Tangentialbündel, das wir auch für abstrakte Mannigfaltigkeiten unabhängig von Einbettungen in den \mathbb{R}^n definiert hatten.

2.12. BEMERKUNG. Das Normalenbündel ist selbst eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $M \times \mathbb{R}^n$, also auch von \mathbb{R}^{2n} . Sei etwa $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$ eine Untermannigfaltigkeitskarte von M um einen Punkt $p \in M$, dann erhalten wir an jedem Punkt $q \in U^\varphi$ eine Basis von $T_q M \subset \mathbb{R}^n$, bestehend aus den Vektoren

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^1} \Big|_q = \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial y^1} \Big|_{\varphi(q)}, \quad \dots, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi^m} \Big|_q = \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial y^m} \Big|_{\varphi(q)}.$$

Dann ist $0 \in \mathbb{R}^m$ regulärer Wert der glatten Abbildung

$$F: U^\varphi \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{mit} \quad (q, v) \longmapsto \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^1} \Big|_q, v \right\rangle, \dots, \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^m} \Big|_q, v \right\rangle \right),$$

es gilt $F^{-1}(0) = \nu_M \cap (U^\varphi \times \mathbb{R}^n)$, und daher $\dim \nu_M = (m + n) - m = n$.

2.13. SATZ (Röhrenumgebungen). *Es sei $N \subset \mathbb{R}^k$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit. Dann existiert eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^k$ von N , so dass N starker Deformationsretrakt von U ist.*

BEWEIS. Wir definieren eine Abbildung $F: \nu_N \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$F(p, v) = p + v \quad \text{für alle } (p, v) \in \nu_N.$$

Man sieht leicht, dass diese Abbildung an allen Stellen $(p, 0) \in \nu_N$ invertierbares Differential hat, folglich hat jeder Punkt $(p, 0)$ eine kleine Umgebung $V_p \subset \nu_N$, so dass $F|_{V_p}$ ein Diffeomorphismus ist. Wir bestimmen jetzt eine Umgebung U_p von p in N und $\varepsilon_p > 0$ so, dass $(q, v) \in V_p$ für

alle $q \in U_p$ und alle $v \in \nu_N|_q$ mit $\|v\| < \varepsilon_p$ gilt. Da N kompakt ist, wird N von endlich vielen solchen Menge $U_{p_1}, \dots, U_{p_\ell}$ überdeckt.

Schließlich bestimmen wir ein $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < \varepsilon_{p_i}$ für $i = 1, \dots, \ell$, so dass $F: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv ist, wobei

$$V = \{ (p, v) \mid p \in N \text{ und } \|v\| < \varepsilon \} .$$

Falls es solch ein ε nicht gäbe, gäbe es zwei Folgen $(q_i, v_i), (r_i, w_i) \in \nu_N$ mit

$$r_i \neq q_i, \quad \|v_i\| < \frac{1}{i}, \quad \|w_i\| < \frac{1}{i} \quad \text{und} \quad q_i + v_i = r_i + w_i \quad \text{für alle } i .$$

Da N kompakt ist, könne wir sukzessive zu Teilfolgen übergehen, so dass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} q_i = q \quad \text{und} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} r_i = r .$$

Sei $q \in U_{p_j}$ für ein j . Da $F|_{V_j}$ injektiv ist, folgt $r_i \neq U_{p_j}$ für alle i , insbesondere $r \neq q$. Auf der anderen Seite konvergieren v_i und w_i gegen 0, so dass aus $q_i + v_i = r_i + w_i$ doch $q = r$ folgt, Widerspruch. Somit existiert das gesuchte ε .

Also definieren wir v wie oben und setzen $U = \text{im}(F|_V)$. Schließlich definieren wir $H: U \times [0, 1] \rightarrow U$ für alle $q = p + v \in U$ mit $(q, v) \in V$ durch

$$H(q, t) = q + tv . \quad \square$$

2.14. SATZ (Transversalitätssatz). *Es sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten, $A \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit, und $C \subset M$ eine abgeschlossene Teilmenge, so dass F längs C zu A transversal ist. Dann existiert eine überall zu A transversale Abbildung $G: M \rightarrow N$ mit $G|_C = F|_C$ und eine Homotopie $H: M \times [0, 1] \rightarrow N$ zwischen F und G relativ zu C .*

Aus dem Beweis ergibt sich außerdem, dass die gesamte Homotopie H im Sinne gleichmäßiger Konvergenz (also C^0) „sehr nahe“ an der ursprünglichen Abbildung F gewählt werden kann.

BEWEIS. Transversalität ist eine offene Bedingung, das heißt, wenn $F \pitchfork_{\{p\}} A$ gilt, dann hat p eine kleine Umgebung $U_p \subset M$, so dass $F \pitchfork_{U_p} A$. Denn sei $\psi: U^\psi \rightarrow V^\psi$ eine Untermannigfaltigkeitskarte von A um $F(p)$, und sei $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$ eine Karte von M um p mit $U^\varphi \subset F^{-1}(U^\psi)$. Wie im Beweis von Proposition 2.2 sei $\pi: V^\psi \rightarrow \mathbb{R}^{n-a}$ die Projektion auf die letzten $(n-a)$ Komponenten, wobei $a = \dim A$. Dann hat die zusammengesetzte Abbildung

$$d_{\varphi(p)}(\pi \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1}): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-a}$$

maximalen Rang $n-a$. Da der Rang einer Matrix unterhalbstetig in den Einträgen der Matrix ist und $d_x(\pi \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1})$ stetig von $x \in V^\varphi$ abhängt, gibt es eine kleine Umgebung V_p von $\varphi(p)$, auf der $d_x(\pi \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1})$ immer noch surjektiv ist. Wir setzen $U_p = \varphi^{-1}(V_p)$ und

$$U = \bigcup_{p \in C} U_p \subset M$$

und erhalten eine offene Umgebung U von C in M , so dass $F \pitchfork_U A$.

Es existiert eine glatte Funktion $f: M \rightarrow [0, 1]$, so dass

$$f|_C \equiv 0 \quad \text{und} \quad f_{M \setminus U} \equiv 1 .$$

Wir konstruieren eine Partition der Eins wie im Beweis des Einbettungssatzes 1.32, wobei wir nur Karten zulassen, deren Kartengebiete entweder C nicht treffen oder ganz in U enthalten sind. Anschließend addieren wir alle so erhaltenen Partitionsfunktionen ρ_i auf, deren Träger C nicht trifft.

Schließlich betten wir N mit dem Einbettungssatz in einen ausreichend großen euklidischen Raum \mathbb{R}^n ein und betrachten die Röhrenumgebung U aus Satz 2.13. Wie im Beweis jenes Satzes

sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $p + v \in U$ für alle $(p, v) \in \nu_N$ mit $\|v\| < \varepsilon$. Dann sei $R: U \rightarrow N$ die Retraktion mit $p + v \mapsto p$ für alle $(p, v) \in \nu_M$ wie oben. Es sei $L = B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n$ der n -dimensionale Einheitsball. Wir betrachten die Abbildung

$$M \times L \longrightarrow N \quad \text{mit} \quad (p, w) \mapsto R(F(p) + f(p)w).$$

Sie ist offensichtlich transversal zu A , also ist für alle $w \in L$ außerhalb einer Nullmenge die Abbildung

$$G_w: M \longrightarrow N \quad \text{mit} \quad (p, w) \mapsto R(F(p) + f(p)w)$$

transversal zu A und stimmt nach Konstruktion auf C mit F überein. Wir fixieren w und setzen $G = G_w$. Schließlich definieren wir noch eine Homotopie zwischen F und G durch

$$H: M \times [0, 1] \longrightarrow N \quad \text{mit} \quad H(p, t) = R(F(p) + tf(p)w). \quad \square$$

2.2. Orientierungen

Wir erinnern uns an Orientierungen in der linearen Algebra.

2.15. DEFINITION. Eine *Orientierung* eines endlichdimensionalen reellen Vektorraumes ist eine Äquivalenzklasse von Basen, wobei zwei Basen genau dann äquivalent seien, wenn die Determinante der Basiswechsellmatrix positiv ist. Ein Vektorraum mit Orientierung heißt *orientierter Vektorraum*, die zugehörigen Basen heißen (*positiv*) *orientiert*.

Ein linearer Isomorphismus zwischen orientierten Vektorräumen heißt *orientierungserhaltend* (*-umkehrend*) wenn er positiv orientierte Basen (nicht) auf positiv orientierte Basen abbildet.

2.16. BEMERKUNG. Jeder endlichdimensionale reelle Vektorraum trägt genau zwei Orientierungen. Ist eine Orientierung als Menge positiv orientierter Basen gegeben, so erhält man die andere als ihr Komplement in der Menge aller Basen.

Das geht sogar für den Nullraum 0 , und wir werden diesen Spezialfall häufig brauchen. Der Raum 0 hat nur eine Basis, die leere (\cdot) . Wir nennen $(0, \{\cdot\})$ *positiv orientiert*, und $(0, \emptyset)$ *negativ orientiert*. Eine Abbildung zwischen zwei Nullräumen ist also genau dann orientierungserhaltend, wenn beide Nullräume dasselbe „Vorzeichen“ haben.

Wir legen fest, dass \mathbb{R}^n stets durch seine Standardbasis orientiert ist (der Raum \mathbb{R}^0 ist somit standardmäßig positiv orientiert). Im Falle einer Mannigfaltigkeit M mit Rand liefert eine Karte φ um einen Randpunkt $p \in \partial M$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_p \partial M & \xrightarrow{d_p(\partial\varphi)} & 0 \times \mathbb{R}^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_p M & \xrightarrow{d_p\varphi} & \mathbb{R}^n. \end{array}$$

Wir erhalten eine positiv orientierte Basis von $0 \times \mathbb{R}^{n-1} \cong \mathbb{R}^{n-1}$, indem wir den ersten Vektor der Standardbasis weglassen. Aus der Sicht von \mathbb{R}^n zeigt dieser Vektor „nach außen“.

Um diesen Begriff auf Mannigfaltigkeiten zu übertragen, orientieren wir jeden Tangentialraum einzeln. Wir möchten, dass diese Orientierung „glatt“ vom Punkt abhängt; das kontrollieren wir mit Hilfe von Karten.

2.17. DEFINITION. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine *Orientierung* von M ordnet jedem Punkt $p \in M$ eine Orientierung von $T_p M$ zu, so dass zu jedem Punkt p eine Karte $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$ um p existiert, für die $d_q\varphi: T_q M \rightarrow \mathbb{R}^n$ entweder für alle $q \in U^\varphi$ orientierungserhaltend, oder für alle $q \in U^\varphi$ orientierungsumkehrend ist.

Eine Mannigfaltigkeit mit einer gegebenen Orientierung heißt *orientiert*. Eine Mannigfaltigkeit heißt *orientierbar*, falls sie mit einer Orientierung versehen werden kann.

Ein lokaler Diffeomorphismus $F: M \rightarrow N$ zwischen orientierten Mannigfaltigkeiten M und N heißt *orientierungserhaltend* (-umkehrend) wenn sein Differential $d_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ für alle $p \in M$ orientierungserhaltend (-umkehrend) ist.

Orientierungen lassen sich auch auf topologischen Mannigfaltigkeiten definieren, aber mit einer etwas umständlicheren Methode.

2.18. BEISPIEL. Wir geben einige Beispiele

- (1) Jede 0-dimensionale Mannigfaltigkeit ist orientierbar. Dazu muss man nur jedem Punkt ein Vorzeichen zuordnen, mit dem man $T_p M \cong 0$ orientiert. Umgekehrt sei M orientiert, dann hat jeder Punkt $p \in M$ ein Vorzeichen ± 1 , je nachdem, ob die eindeutige Karte $\{p\} \rightarrow \mathbb{R}^0$ um p orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend ist.
- (2) Betrachte ein Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit Rand. Wir versehen jeden Tangentialraum $T_t I \cong \mathbb{R}$ mit der Standard-Orientierung. Wir betrachten zwei Karten

$$\begin{aligned} \varphi: (a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}_- , & \varphi(t) &= t - b , \\ \psi: [a, b) &\longrightarrow \mathbb{R}_- , & \psi(t) &= a - t . \end{aligned}$$

Dann ist $d_t \varphi$ für alle $t \in U^\varphi$ orientierungserhaltend und $d_t \psi$ ist für alle $t \in U^\psi$ orientierungsumkehrend. Also haben wir eine Orientierung von I definiert. Wir können eine andere Orientierung definieren, indem wir alle $T_t I$ andersherum orientieren. Mehr Möglichkeiten gibt es nicht.

Man beachte, dass wir sowohl positiv als auch negativ orientierte Karten brauchen, da I auf beiden Seiten einen Randpunkt hat.

- (3) Wir sehen in den Übungen, dass S^n für alle n orientierbar ist. Wegen Satz 1.39 sind somit auch alle eindimensionalen kompakten Mannigfaltigkeiten orientierbar.
- (4) Der reell projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ ist genau dann orientierbar, wenn n ungerade ist. Das werden wir im Laufe der Zeit beweisen.

2.19. BEMERKUNG. Es seien zwei Orientierungen auf M gegeben. Dann sind die Teilmengen U und V von M , auf denen beide Orientierungen übereinstimmen beziehungsweise verschieden sind, offen in M . Denn sei etwa $p \in U$, dann gibt es zwei Karten $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$ und $\psi: U^\psi \rightarrow V^\psi$ um p , so dass $d\varphi$ bezüglich der ersten Orientierung auf ganz U^φ orientierungserhaltend oder -umkehrend ist, und $d\psi$ auf ganz U^ψ bezüglich der zweiten. Sei jetzt $W \subset U^\varphi \cap U^\psi$ eine zusammenhängende Umgebung von p , dann hat $\det(d(\psi \circ \varphi^{-1}))$ auf ganz $\varphi(W)$ konstantes Vorzeichen, also ist W Umgebung von p in U . Eine analoge Überlegung gilt für V , somit sind beide Teilmengen offen.

Mit anderen Worten: zwei Orientierungen stimmen entweder auf einer ganzen Zusammenhangskomponente von M überein, oder sie sind auf der gesamten Zusammenhangskomponente verschieden. Noch anders ausgedrückt: wenn M orientierbar ist, legt die Orientierung an einem Punkt bereits die Orientierung auf einer ganzen Zusammenhangskomponente fest.

2.20. PROPOSITION UND DEFINITION. *Es sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann existiert eine Orientierung von ∂M , so dass eine Karte $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi \subset \mathbb{R}_-^n$ genau dann orientierungserhaltend ist, wenn die induzierte Karte*

$$\partial\varphi: \partial U^\varphi \rightarrow \partial V^\varphi \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \cong \mathbb{R}^{n-1}$$

orientierungserhaltend ist.

BEWEIS. Wir betrachten das Diagramm in Bemerkung 2.16. Eine Basis von $T_p(\partial M)$ ist genau dann orientiert, wenn das Voranstellen eines nach außen weisenden Vektors eine positiv orientierte

Basis von $T_p M$ liefert. Diese Beschreibung ist mit der obigen kompatibel und legt die Orientierung auf ∂M fest. \square

Hier wurden zwei Wahlen getroffen: wir stellen einen *nach außen* weisenden Vektor *voran*. Es gibt also insgesamt vier mögliche Konventionen. Voraussichtlich tritt jede in der Literatur irgendwo auf, es ist also Vorsicht geboten beim Lesen von Büchern.

2.21. BEISPIEL. Wir orientieren das Einheitsintervall $I = [0, 1]$ wie in Beispiel 2.18 (2). Am Punkt 0 ist -1 ein nach außen weisender Vektor. Wenn wir ihn der leeren Basis $(\)$ voranstellen, erhalten wir eine negativ orientierte Basis (-1) von $T_0 I$. Also ist $(\)$ keine orientierte Basis, und der Punkt 0 ist negativ orientiert. Am Punkt 1 ist 1 ein nach außen weisender Vektor. Wenn wir ihn der leeren Basis $(\)$ voranstellen, erhalten wir eine positiv orientierte Basis (1) von $T_1 I$. Also ist 1 ein positiv orientierter Randpunkt von I . Man schreibt daher manchmal symbolisch

$$\partial I = \{1\} - \{0\} .$$

2.22. BEMERKUNG. Es sei M eine orientierte eindimensionale kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand. Nach Satz 1.39 und dem obigen Beispiel hat M genausoviele positiv wie negativ orientierte Randkomponenten.

2.3. Der Abbildungsgrad

Wir definieren den Grad einer Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension. Dabei zählen wir, wie oft ein regulärer Wert angenommen wird. Da eine „Falte“ in der Abbildung diesen Wert verfälschen würde, müssen wir entweder modulo 2 rechnen, oder Urbildpunkte so mit Vorzeichen zählen, dass „Falten“ keine Rolle spielen. Beide Möglichkeiten sind wichtig; für die zweite brauchen wir Orientierungen.

Es sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen kompakten, n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, und $q \in N$ sei regulärer Wert. Dann ist $F^{-1}(q)$ eine abgeschlossene, null-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M , also eine Menge endlich vieler Punkte von M . Daher ist die folgende Definition überhaupt erst möglich.

2.23. SATZ UND DEFINITION. *Es sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen kompakten, n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten ohne Rand, und N sei zusammenhängend. Für einen regulären Wert $q \in N$ von F definieren wir den Abbildungsgrad modulo 2 von F als*

$$\deg_2 F = \#F^{-1}(q) \pmod{2} .$$

Dann hängt $\deg_2 F$ nicht von der Wahl des regulären Wertes q ab.

Für einen linearen Isomorphismus L zwischen orientierten Vektorräumen definieren wir da Vorzeichen $\text{sign } L$ als 1 , wenn L die Orientierungen erhält, und als -1 sonst.

2.24. SATZ UND DEFINITION. *Es sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen kompakten, n -dimensionalen, orientierten Mannigfaltigkeiten ohne Rand, und N sei zusammenhängend. Für einen regulären Wert $q \in N$ von F definieren wir den Abbildungsgrad oder auch Brouwer-Grad von F als*

$$\deg F = \sum_{p \in F^{-1}(q)} \text{sign}(d_p F) .$$

Dann hängt $\deg F$ nicht von der Wahl des regulären Wertes q ab.

BEWEIS. Wir beweisen beide Sätze auf einmal, konzentrieren uns aber auf den zweiten. Im Fall $n = 0$ besteht N nur aus einem Punkt, also ist nichts zu zeigen. Sei daher $n \geq 1$.

Es seien q_0, q_1 zwei reguläre Werte von F . Da N zusammenhängend ist, ist N als Mannigfaltigkeit auch wegzusammenhängend. Insbesondere finden wir eine Kurve $\gamma: I = [0, 1] \rightarrow N$

mit $\gamma(i) = q_i$ für $i \in \partial I = \{0, 1\}$. Wir dürfen annehmen, dass γ eine injektive Immersion ist. Da I kompakt ist, ist $A = \text{im}(\gamma)$ eine Untermannigfaltigkeit.

Nach Voraussetzung ist F bereits zu ∂A transversal. Insbesondere hat jeder Punkt $p \in F^{-1}(\partial A)$ eine kleine kompakte Umgebung K_p , auf der F lokaler Diffeomorphismus ist. Dann ist F auf K_p auch zu A transversal. Nach dem Transversalitätssatz 2.14 können wir F durch eine zu F homotope und überall zu A transversale Abbildung G ersetzen, die auf allen K_p mit F übereinstimmt. Dabei können wir entweder darauf achten, dass G und F einander so nahe sind, dass die Abbildung G die Werte q_0 und q_1 nur an den Punkten in $F^{-1}(\partial A)$ annimmt. Dadurch ist sichergestellt, dass

$$\sum_{p \in G^{-1}(q_0)} \text{sign}(d_p G) = \sum_{p \in F^{-1}(q_0)} \text{sign}(d_p F) \quad \text{und} \quad \sum_{p \in G^{-1}(q_1)} \text{sign}(d_p G) = \sum_{p \in F^{-1}(q_1)} \text{sign}(d_p F), \quad (*)$$

analoges gilt im unorientierten Fall modulo 2. Alternativ verweisen wir auf Satz 2.25.

Wir betrachten jetzt die Untermannigfaltigkeit $F^{-1}(A)$ mit Rand. Es handelt sich um eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand $F^{-1}(\partial A)$ nach Proposition 2.5. Da $F^{-1}(A)$ abgeschlossen und M kompakt ist, ist $F^{-1}(A)$ ebenfalls kompakt. Nach Satz 1.39 besteht $F^{-1}(A)$ aus Kreisen und aus Intervallen. Da Kreise keine Randpunkte haben, tragen sie nicht zum Abbildungsgrad bei.

Im unorientierten Fall werden entweder beide Randpunkte eines Intervalls auf denselben regulären Wert abgebildet und tragen nicht zum Abbildungsgrad modulo 2 bei. Oder einer wird auf q_0 , der andere auf q_1 abgebildet. In diesem Fall liefert das Intervall den gleichen Beitrag zu beiden Summen in (*). Es folgt

$$\#F^{-1}(q_1) \equiv \#F^{-1}(q_0) \pmod{2}.$$

Im orientierten Fall schreiben wir eines der abgeschlossenen Intervalle in $F^{-1}(A)$ als Bild einer Kurve $\beta: I \rightarrow M$. Wir können für alle $t \in I$ eine Basis $e_1(t) = \dot{\beta}(t), e_2(t), \dots, e_n(t)$ von $T_{\beta(t)}M$ so wählen, dass e_1, \dots, e_n glatt von t abhängen. Indem wir das Vorzeichen einzelner Basisvektoren oder die Durchlaufrichtung von β ändern, dürfen wir annehmen, dass $B_M(t) = (e_1(t), \dots, e_n(t))$ für alle t eine positiv orientierte Basis von $T_{\beta(t)}M$ ist.

Für jedes t existiert ein Parameter $s \in I$, so dass $(F \circ \beta)(t) = \gamma(s)$. Definiere $f: I \rightarrow I$ so, dass $s = f(t)$, das heißt, es gilt $F \circ \beta = \gamma \circ f$. An den Endpunkten von β ist dF bijektiv nach Voraussetzung, somit gilt $\dot{s}(t) \neq 0$ für $t \in \{0, 1\} = \partial I$. Da wir $F \pitchfork A$ vorausgesetzt haben, und da $d_{\beta(t)}F(\dot{\beta}(t)) = \dot{f}(t) \dot{\gamma}(f(t))$ stets tangential an $A = \text{im} \gamma$ ist, folgt

$$T_{F(\beta(t))}N = T_{F(\beta(t))}A + \text{im}(d_{\beta(t)}F) = T_{F(\beta(t))}A \oplus \langle d_{\beta(t)}F(e_2(t)), \dots, d_{\beta(t)}F(e_n(t)) \rangle.$$

Somit erhalten wir für alle t eine Basis von $T_{F(\beta(t))}N$ der Form

$$B_N(t) = (\dot{\gamma}(f(t)), d_{\beta(t)}F(e_2(t)), \dots, d_{\beta(t)}F(e_n(t))).$$

Diese hängt stetig von t ab und ist somit für alle t gleich orientiert in N .

Wir vergleichen die Orientierung der Basen $dF(B_M)$ und B_N an den Endpunkten von β und erinnern uns dazu, dass $\dot{f} \neq 0$ auf ∂I . Beide Basen unterscheiden sich nur im ersten Eintrag um $\dot{f}(t)$, denn

$$d_{\beta(t)}F(\dot{\beta}(t)) = \frac{\partial}{\partial t}(F \circ \beta) = \frac{\partial}{\partial t}(\gamma \circ f) = \dot{f}(t) \cdot \dot{\gamma}(f(t)).$$

Wir unterscheiden zwei Fälle

- (1) Falls beide Endpunkte von β auf denselben regulären Wert abgebildet werden, gilt $f(0) = f(1)$. Insbesondere haben $\dot{f}(0)$ und $\dot{f}(1)$ unterschiedliche Vorzeichen. Also sind die Basen $dF(B_M)$ und B_N an einer der Stellen $t \in \partial I$ positiv und an der anderen Stelle negativ orientiert. In der Summe tragen beide Endpunkte also nicht zum orientierten Abbildungsgrad bei.

- (2) Falls $F \circ \beta$ verschiedene reguläre Werte verbindet, haben $\dot{f}(0)$ und $\dot{f}(1)$ das gleiche Vorzeichen. Somit tragen die Endpunkte zu den beiden Summen in (*) das gleiche bei.

Durch Summieren der Beiträge aller Intervall in $F^{-1}(A)$ ergibt sich die Behauptung

$$\sum_{p \in F^{-1}(q_0)} \text{sign}(d_p F) = \sum_{p \in F^{-1}(q_1)} \text{sign}(d_p F) . \quad \square$$

2.25. SATZ. Sowohl der Abbildungsgrad modulo 2 als auch der Brouwer-Grad sind homotopieinvariant.

BEWEIS. Dieser Beweis ist dem obigen recht ähnlich. Diesmal betrachten wir eine Homotopie $H: M \times I \rightarrow N$ zwischen den Abbildungen $F_0, F_1: M \rightarrow N$, mit $F_t = H(\cdot, t)$ für $t \in \partial I = \{0, 1\}$. Wir wählen einen regulären Wert q von f_0, f_1 und H . Dann ist $H^{-1}(q)$ nach Proposition 2.5 (1) eine kompakte eindimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand

$$\partial(H^{-1}(q)) = H^{-1}(q) \cap \partial(M \times I) = H^{-1}(q) \cap (M \times \partial I) = F_0^{-1}(q) \dot{\cup} F_1^{-1}(q) ,$$

und $H^{-1}(q)$ ist transversal zu $M \times \partial I$ in $M \times I$.

Nach Satz 1.39 ist $H^{-1}(q)$ eine disjunkte Vereinigung von Kreisen und Intervallen in $M \times I$, und die Intervalle verbinden je zwei Urbilder von q unter F_0 oder F_1 . Da die Anzahl der Randkomponenten gerade ist, schließen wir im unorientierten Fall, dass

$$\#F_0^{-1}(q) \equiv \#F_1^{-1}(q) \pmod{2} .$$

Im orientierten Fall schreiben wir ein solches Intervall als Bild einer injektiv immersierten Kurve $\gamma(t) = (\beta(t), f(t))$ in $M \times I$. Da $H^{-1}(q) \pitchfork M \times \partial I$, folgt $\dot{f}(t) \neq 0$ für $t \in \{0, 1\}$. Wie oben wählen wir eine Familie positiv orientierter Basen von $T_{\gamma(t)}(M \times I)$ der Form

$$(e_1(t), \dots, e_n(t), \dot{\gamma}(t)) , \quad (2.1)$$

wobei wir annehmen dürfen, dass $e_1(t), \dots, e_n(t) \in T_{\beta(t)}M \subset T_{\gamma(t)}(M \times I)$ für $t \in \{0, 1\}$.

Da q ein regulärer Wert von H ist und $e_{n+1}(t) \in \ker(d_{\gamma(t)}H)$ für alle $t \in I$ gilt, bilden die Vektoren $dH_{\gamma(t)}(e_1(t)), \dots, dH_{\gamma(t)}(e_n(t))$ für alle $t \in I$ eine Basis von $T_q N$, und diese ist stets gleich orientiert in N , da sie stetig von t abhängt. Für $t \in \partial I$ ist die Basis $(e_1(t), \dots, e_n(t))$ von $T_{\beta(t)}M$ genau dann positiv orientiert, wenn $\dot{f}(t) > 0$, das heißt, wenn $t = f(t)$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

- Es gilt $f(0) = f(1) \in \partial I$. In diesem Fall gilt $\dot{f}(t) > 0$ an einem Randpunkt und $\dot{f}(t) < 0$ am anderen. Also ist $dF_{\gamma(t)}$ an einem Randpunkt orientierungserhaltend und am anderen orientierungsumkehrend. Insbesondere heben sich die Beiträge zu $\deg F_0$ und $\deg F_1$ beide weg.
- Es gilt $f(0) \neq f(1) \in \partial I$. In diesem Fall haben $\dot{f}(t)$ und $dF_{\gamma(t)}$ an beiden Randpunkten das gleiche Vorzeichen, daher liefert γ den gleichen Beitrag zu $\deg F_0$ wie zu $\deg F_1$.

Durch Summieren der Beiträge aller Intervalle folgt die Behauptung. □

2.26. BEISPIEL. Es folgen einfache Beispiele

- (1) Die Identität id_M hat Abbildungsgrad $\deg \text{id}_M = 1 \in \mathbb{Z}$, falls M orientiert ist, und es gilt immer $\deg_2 \text{id}_M = 1 \in \mathbb{Z}/2$.
- (2) Es sei $\dim M = \dim N \geq 1$, dann haben konstante Abbildungen $F: M \rightarrow N$ Abbildungsgrad 0. Denn da singuläre Werte eine Nullmenge bilden, finden wir einen regulären Wert in $N \setminus \text{im } F$.
- (3) Betrachte $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Die Antipodenabbildung $-\text{id}_{S^n}: S^n \rightarrow S^n, x \mapsto -x$, hat den Abbildungsgrad

$$\deg(-\text{id}_{S^n}) = (-1)^{n+1} .$$

Dazu setzen wir $-\text{id}_{S^n}$ zu $-\text{id}_{D^{n+1}}$ auf D^{n+1} fort und versehen S^n mit der Randorientierung aus Definition 2.20. Für die Abbildung $-\text{id}_{D^{n+1}}$ berechnen wir

$$\text{sign det}(d_0(-\text{id}_{D^{n+1}})) = \text{sign det}(-\text{id}_{D^{n+1}}) = (-1)^{n+1}.$$

Also kehrt $-\text{id}_{D^{n+1}}$ die Orientierung von D^{n+1} genau dann um, wenn n gerade ist. Da S^n die induzierte Orientierung trägt, gilt das gleiche für S^n .

2.27. SATZ. *Es sei W eine $(n+1)$ -dimensionale, kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand $M = \partial W$, und es sei N eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei $F: W \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, und sei $f = F|_M$. Dann gilt $\deg_2 f = 0 \in \mathbb{Z}/2$. Wenn N und W orientiert sind, gilt $\deg f = 0$.*

Sei etwa W das Möbiusband mit Rand $M = \partial W \cong S^1$, und sei $F: W \rightarrow N \cong S^1$ die Deformationsretraktion auf den mittleren Kreis. Dann ist $f = \partial F: S^1 \rightarrow S^1$ eine Abbildung vom Brouwergrad $\deg f = 2$. Das steht nicht im Widerspruch zum obigen Satz, da das Möbiusband W nicht orientierbar ist. Auf der anderen Seite ist $\deg_2 f = 0$, wie behauptet.

BEWEIS. Wir kopieren den Beweis von Satz 2.25. Sei $q \in N$ regulärer Wert sowohl von F als auch von f . Dann ist $F^{-1}(\{q\}) \subset W$ eine kompakte eindimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand $\partial F^{-1}(\{q\}) = f^{-1}(\{q\})$, und es gilt $F^{-1}(\{q\}) \pitchfork M$ in W . Da die Anzahl der Randkomponenten von $F^{-1}(\{q\})$ gerade ist, folgt sofort $\deg_2 f = 0$.

Im orientierten Fall betrachten wir die einzelnen Zusammenhangskomponenten von $F^{-1}(\{q\})$. Wie im obigen Beweis trägt jedes Intervall an seinen beiden Endpunkten mit unterschiedlichem Vorzeichen zu $\deg f$ bei, es folgt $\deg f = 0$. \square

Wir kommen zu einem einfachen Spezialfall des Abbildungsgrades, der Windungszahl. Sei dazu $n \geq 1$, sei M eine $(n-1)$ -dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit und $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung. Nach dem Lemma von Sard ist das Bild von f eine Nullmenge in \mathbb{R}^n . Sei also $x \notin \text{im } f$. Dann betrachten wir die Abbildung

$$u: M \rightarrow S^{n-1} \quad \text{mit} \quad u_x(p) = \frac{f(p) - x}{|f(p) - x|}.$$

2.28. DEFINITION. Es sei $n \geq 2$, M sei eine $(n-1)$ -dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit und $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung. Sei $x \notin \text{im } f$, dann heißt

$$W_2(f, x) = \deg_2 \frac{f(\cdot) - x}{|f(\cdot) - x|}$$

die *Windungs- oder Umlaufzahl modulo 2* von f um x . Wenn M orientiert ist, definieren wir die *Windungs- oder Umlaufzahl* von f um x als

$$W(f, x) = \deg \frac{f(\cdot) - x}{|f(\cdot) - x|}.$$

2.29. BEMERKUNG. Diese Windungszahl entspricht im Fall $n = 2$ genau der Windungszahl aus der Funktionentheorie-Vorlesung. In den Übungen sehen Sie, dass die Windungszahl auf den Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \setminus \text{im } f$ lokal konstant ist.

Sei jetzt $M = \partial W$, und W sei kompakt. Es sei $F: W \rightarrow M$ eine glatte Fortsetzung von f . Solche Fortsetzungen existieren immer, wie wir später möglicherweise noch sehen werden. Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \text{im } f$ ein regulärer Wert von F . Wir definieren Abbildungsgrade an der Stelle x wie in den Definitionen 2.23 und 2.24 als

$$\deg_2(F, x) = \#F^{-1}(x) \pmod{2} \quad \text{und} \quad \deg(F, x) = \sum_{p \in F^{-1}(x)} \text{sign}(d_p F), \quad (2.2)$$

letzteres natürlich nur, wenn W orientiert ist.

2.30. SATZ. Es sei W eine kompakte, n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand $M = \partial W$, es sei $F: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt und $f = F|_M$. Dann gilt für jeden regulären Wert $x \in \mathbb{R}^n \setminus \text{im } f$ von F , dass

$$\deg_2(F, x) = W_2(f, x) \in \mathbb{Z}/2 \quad \text{und} \quad \deg(F, x) = W(f, x) \in \mathbb{Z},$$

letzteres jedoch nur, wenn W orientiert ist und M die Randorientierung trägt.

BEWEIS. Übung. □

2.4. Anwendungen des Abbildungsgrades modulo 2

Sowohl der Abbildungsgrad modulo 2 als auch der Brouwer-Grad haben viele interessante Anwendungen in der Differentialtopologie. Um klar zu machen, welche Version des Abbildungsgrades wofür verwendet werden kann, haben wir die Anwendungen auf zwei Abschnitte aufgeteilt. Im Folgenden behandeln wir den Jordan-Brouwerschen Trennungssatz und den Satz von Borsuk-Ulam.

2.31. SATZ (Jordan-Brouwer-Trennungssatz). Es sei $n \geq 2$, und es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, zusammenhängende, $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann besteht $\mathbb{R}^n \setminus M$ aus genau zwei Zusammenhangskomponenten, von denen eine beschränkt ist, und die andere nicht. Außerdem ist M orientierbar.

BEWEIS. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ von M eine Röhrenumgebung wie in Satz 2.13. Wir wählen $\varepsilon > 0$ so klein, dass alle Punkte der Form $q + w$ mit $(q, w) \in \nu_M$ und $|w| \leq \varepsilon$ in U enthalten sind. Wir fixieren einen Punkt $p \in M$, der $|p|$ unter allen Punkten von M maximiert, und setzen

$$p_0 = \left(1 + \frac{\varepsilon}{|p|}\right)p \quad \text{und} \quad p_1 = \left(1 - \frac{\varepsilon}{|p|}\right)p.$$

Als erstes zeigen wir, dass $\mathbb{R}^n \setminus M$ höchstens zwei Zusammenhangskomponenten besitzt, die p_0 beziehungsweise p_1 enthalten. Seien $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$ und $v \in S^{n-1}$ beliebig, und sei

$$t_0 = \min\{t > 0 \mid x + tv \in M\} \in [0, \infty].$$

Falls $t_0 = \infty$, trifft der Strahl die Untermannigfaltigkeit M nie. Wir laufen auf dem Strahl bis zu einem Punkt mit $|x + tv| = |p_0|$, und dann weiter auf der Sphäre vom Radius $|x + tv|$ bis zum Punkt p_0 . Das geht, da die Abstandssphäre zusammenhängend ist und nach Wahl von p die Untermannigfaltigkeit M nicht trifft. Damit haben wir gezeigt, dass x und p_0 in derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n \setminus M$ liegen.

Andernfalls ist $t_0 < \infty$. Für ein $t < t_0$ gilt $x + tv \in U$, und wir schreiben

$$x + tv = y + w_0 \quad \text{mit} \quad y \in M \quad \text{und} \quad (y, w_0) \in \nu_M.$$

Dabei nehmen wir an, dass $|w_0| = \varepsilon$. Da M zusammenhängend ist, können wir einen glatten Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ von y zum Punkt p wählen. Außerdem finden wir eine glatte Kurve $w: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $w(0) = w_0$ und $|w(t)| = \varepsilon$ für alle t , so dass $(\gamma(t), w(t)) \in \nu_M$ für alle $t \in [0, 1]$. Dadurch ist $|w(t)|$ für alle $t \in [0, 1]$ eindeutig bestimmt. Es folgt

$$\gamma(1) + w(1) = \left(1 \pm \frac{\varepsilon}{|p|}\right)p \in \{p_0, p_1\}.$$

Indem wir also von x dem Strahl in Richtung v bis zum Punkt $x + tv = y + w_0$ und dann der Kurve $\gamma + w$ in der Röhrenumgebung U bis p_0 beziehungsweise p_1 folgen, sehen wir, dass x in der gleichen Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n \setminus M$ liegt wie p_0 oder p_1 . Also gibt es nur diese beiden Zusammenhangskomponenten.

Um zu zeigen, dass es mindestens zwei Zusammenhangskomponenten gibt, überlegen wir uns, dass $W(M, p_i) \equiv [i] \in \mathbb{Z}/2$ gilt. Hierbei sei $W(M, \cdot) = W(\iota, \cdot)$, wobei $\iota: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Inklusionsabbildung bezeichne. Da $W(M, \cdot)$ auf $\mathbb{R}^n \setminus M$ lokal konstant ist, folgt die Behauptung.

Da $|q| < |p_0|$ für alle $q \in M$ gilt, nimmt die Abbildung $u_0: M \rightarrow S^{n-1}$ mit $q \mapsto \frac{q-p_0}{|q-p_0|}$ niemals den Wert $\frac{p_0}{|p_0|} = \frac{p}{|p|} \in S^{n-1}$ an. Also ist dieser Wert regulär, und $\deg_2(u_0) = W_2(\iota, p_0) = 0$. Auf der anderen Seite haben wir p_1 so gewählt, dass die Abbildung $u_1: M \rightarrow S^{n-1}$ mit $q \mapsto \frac{q-p_1}{|q-p_1|}$ den Wert $\frac{p_1}{|p_1|} = \frac{p}{|p|}$ genau einmal annimmt. Man überzeugt sich, dass dieser Wert wieder regulär ist, somit gilt $\deg_2(u_1) = W_2(\iota, p_1) = 1$.

Das obige Argument zeigt auch, dass die Zusammenhangskomponente C von $\mathbb{R}^n \setminus M$, die p_1 enthält, keinen Punkt vom Betrag $> |p|$ enthalten kann und somit beschränkt ist. Die andere Zusammenhangskomponente ist offensichtlich unbeschränkt. Wir dürfen $\overline{C} \subset \mathbb{R}^n$ als Untermannigfaltigkeit mit Rand $\partial\overline{C} = M$ betrachten. Da \mathbb{R}^n orientiert ist, erbt M die Ranorientierung von \overline{C} und ist insbesondere orientierbar. \square

Man beachte, dass wir im Beweis die Windungszahl modulo 2 (als Spezialfall des Abbildungsgrades modulo 2) verwenden mussten, da wir noch nicht wussten, dass M orientierbar ist.

Wenn M einen Rand hat, ist der Satz falsch. Als Beispiel betrachte das Möbiusband, eingebettet in den \mathbb{R}^3 . Im Beweis haben wir die Windungszahl $W(\iota, \cdot)$ benutzt, die für Mannigfaltigkeiten mit Rand nicht wohldefiniert wäre, da sie dann von der Wahl des regulären Wertes in S^{n-1} abhängt.

2.32. BEMERKUNG. Wir schließen sofort, dass sich $\mathbb{R}P^2$ nicht in den \mathbb{R}^3 einbetten lässt, da $\mathbb{R}P^2$ kompakt, aber nicht orientierbar ist. Genausowenig lässt sich die Kleinsche Flasche oder irgendeine andere kompakte, nichtorientierbare Fläche in den \mathbb{R}^3 einbetten.

2.33. SATZ (Borsuk-Ulam). *Betrachte $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Es sei $f: S^n \rightarrow S^n$ eine ungerade Abbildung, das heißt $f(-x) = -f(x)$. Dann gilt $\deg_2 f = 1$.*

Wir geben eine äquivalente Umformulierung.

2.34. FOLGERUNG (Borsuk-Ulam). *Betrachte $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Es sei $g: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt, dann gibt es einen Punkt $x \in S^n$, so dass $g(x) = g(-x)$.*

Anschaulich bedeutet das für $n = 2$, dass es auf der Erde stets zwei antipodale Punkte mit gleicher Temperatur und gleichem Luftdruck gibt. Oder aber, dass bei einem schlaf auf dem Boden liegenden Heißluftballon mindesten zwei antipodale Punkte direkt übereinanderliegen.

Der folgende Beweis benötigt eine glatte Abbildung f . Da aber der Abbildungsgrad homotopieinvariant ist nach Satz 2.25 und sich die Abbildung f zu einer ungeraden, homotopen Abbildung glätten lässt, lassen sich Satz und Folgerung leicht auf stetige Abbildungen verallgemeinern.

BEWEIS. Angenommen, es gilt Satz 2.33, und es gibt eine Funktion $g: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $g(x) \neq g(-x)$ für alle $x \in S^n$. Dann definieren wir eine ungerade Funktion $f: S^n \rightarrow S^{n-1} \subset S^n$ mit

$$f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}.$$

Da f nicht surjektiv ist, folgt $\deg_2 f = 0$ im Widerspruch zum obigen Satz. \square

BEWEIS VON SATZ 2.33. Wir beweisen den Satz durch Induktion über n . Für $n = 0$ ist der Satz offensichtlich.

Sei also $n > 0$, und sei $f: S^n \rightarrow S^n$ gegeben. Es sei $S_+^n \subset S^n$ die obere Hemisphäre und $S^{n-1} = \partial S_+^n$ der Äquator. Bezeichne mit $g = f|_{S^{n-1}}: S^{n-1} \rightarrow S^n$ die Einschränkung von f auf den Äquator. Nach dem Lemma von Sard existiert ein regulärer Wert $v \in S^n$ für f und g , insbesondere folgt $v \notin \text{im } g$. Da f und g ungerade sind, ist $-v$ ebenfalls regulärer Wert.

Es sei $f_+ = f|_{S_+^n}$, dann folgt $g = f_+|_{\partial S_+^n}$. Außerdem sei $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Projektion längs $\langle v \rangle$, insbesondere ist $\pi^{-1}(0) \cap S^n = \{v, -v\}$. Da v und $-v$ reguläre Werte von f sind, ist 0 regulärer

Wert von $\pi \circ f$. Da f ungerade ist,

$$\#f^{-1}(v) = \frac{1}{2}(\#f^{-1}(v) + \#f^{-1}(-v)) = \#f_+^{-1}(v) + \#f_+^{-1}(-v) = \#(\pi \circ f_+)^{-1}(0) \quad (*)$$

und somit

$$\deg_2 f = \deg_2(\pi \circ f_+, 0) = W_2(\pi \circ g, 0)$$

wegen Satz 2.30. Definiere eine ungerade Abbildung

$$h: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1} \quad \text{mit} \quad h(x) = \frac{(\pi \circ g)(x)}{|(\pi \circ g)(x)|}.$$

Nach Definition 2.28 der Windungszahl gilt

$$W_2(\pi \circ g, 0) = \deg_2 h,$$

somit gilt $\deg_2 f = \deg_2 h = 1$ nach Induktionsvoraussetzung. \square

In diesem Beweis sind alle Mannigfaltigkeiten orientierbar, also hätte man theoretisch auch den Brouwer-Grad verwenden können. Der Abbildungsgrad modulo 2 ist zum einen hilfreich, weil der Brouwer-Grad einer ungeraden Abbildung alle ungeraden Werte annehmen kann. Im Schritt (*) taucht für jedes Urbild ein zusätzliches Vorzeichen auf, so dass wir „#“ nicht einfach durch „deg“ ersetzen dürfen. Nur die Parität des Ergebnisses bleibt die gleiche, wenn wir zum Brouwer-Grad übergehen. Somit ist der Abbildungsgrad modulo 2 hier einfacher zu handhaben.

2.35. FOLGERUNG (Schinken-Käse-Sandwich-Satz). *Es seien $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte, messbare Mengen. Dann existiert eine affine Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$, die alle n Teilmengen in je zwei Teilmengen von gleichem Volumen durchschneidet.*

Insbesondere lässt sich ein Schinken-Käse-Sandwich mit einem ebenen Schnitt in zwei gleich große Teile zerteilen, so dass beide Teile je gleich viel Schinken, Käse und Toast enthalten. Dieser Satz wurde erstmals von Steinhaus formuliert, später von Banach mit dem Satz von Borsuk-Ulam für $n = 3$ bewiesen. Die Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen stammt von Stone und Tukey.

BEWEIS. Es sei $v \in S^{n-1}$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert $t \in \mathbb{R}$ so, dass die Hyperebene

$$H_v = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v \rangle = t \}$$

das Gesamtvolumen aller n Teilmengen in zwei gleich große Teile teilt. Wir definieren $f: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ so, dass $f^i(v)$ für $1 \leq i \leq n-1$ das Volumen von A_i auf der v zugewandten Seite von H_v beschreibt.

Dann sind die Funktionen f_i stetig (sogar Lipschitz-stetig), und aus Folgerung 2.34 für stetige Abbildungen folgt, dass es ein $v \in S^{n-1}$ mit $f_i(v) = f_i(-v)$ für $i = 1, \dots, n-1$ gibt. Somit werden $n-1$ der vorgegebenen Mengen bereits in je zwei Teile von gleichem Volumen geteilt. Da nach Wahl von H_v auch das Gesamtvolumen in zwei gleich große Teile geteilt wird, folgt die Behauptung auch für die letzte Menge A_n . \square

2.5. Anwendungen des Brouwer-Abbildungsgrades

Wir beweisen einige weitere bekannte Sätze, unter anderem den Satz vom Igel und den Fundamentalsatz der Algebra.

2.36. SATZ (vom Igel). *Es gibt genau dann ein glattes Vektorfeld ohne Nullstellen auf S^n , wenn n ungerade ist.*

BEWEIS. Zu „ \implies “ sei X ein glattes Vektorfeld ohne Nullstellen auf S^n , das heißt,

$$X: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \quad \text{with} \quad \langle X(x), x \rangle = 0 \quad \text{für alle } x \in S^n .$$

Indem wir X durch $\frac{X}{\|X\|}$ ersetzen, dürfen wir annehmen, dass X ebenfalls Werte in S^n annimmt. Jetzt definieren eine Homotopie $H: S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n$ zwischen id_{S^n} und der Antipodenabbildung $-\text{id}_{S^n}$ durch

$$H(x, t) = x \cdot \cos(\pi t) + X(x) \cdot \sin(\pi t) .$$

Man überprüft leicht, dass $\|H(x, t)\| = 1$ da $\langle X(x), x \rangle = 0$. Da aber id_{S^n} und $-\text{id}_{S^n}$ nach Beispiel 2.26 (1) und (3) nur für ungerade n den gleichen Abbildungsgrad haben, folgt aus Satz 2.25, dass es X nur geben kann, wenn n ungerade ist.

Zu „ \impliedby “ sei n ungerade. Wir identifizieren \mathbb{R}^{n+1} mit $\mathbb{C}^{\frac{n+1}{2}}$ und definieren X durch

$$X(x) = i \cdot x . \quad \square$$

Dieser Beweis funktioniert nicht mit dem Abbildungsgrad modulo 2, da $\text{deg}_2(-\text{id}_{S^n}) = 1 \in \mathbb{Z}/2$ für alle n .

2.37. SATZ (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht-konstante komplexe Polynom hat eine komplexe Nullstelle.*

BEWEIS. Es sei $n > 0$ und

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

ein komplexes Polynom. Jedes nicht-konstante Polynom lässt sich auf diese Form bringen, indem man durch den Leitkoeffizienten teilt. Dabei bleibt die Menge der Nullstellen gleich.

Für hinreichend große $R > 0$ gilt

$$\left| \frac{a_1}{z^1} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right| < 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq R .$$

Betrachte den Kreis $S_R^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$. Wir können eine Homotopie $H: S_R^1 \times [0, 1]$ vom Polynom z^n zum Polynom P angeben mit

$$H(z, t) = z^n \left(1 + t \left(\frac{a_1}{z^1} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right) \right) .$$

Wegen der obigen Abschätzung hat H keine Nullstellen. Daraus folgt

$$W(P, 0) = W(z^n, 0) = n .$$

Sei $D_R^2 \subset \mathbb{C}$ die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius R mit $\partial D^2 = S_R^1$. Wenn 0 regulärer Wert von P ist, gilt nach Satz 2.30, dass

$$\text{deg}(P|_{D_R^2}, 0) = W(P, 0) = n \neq 0 .$$

Wenn P keine Nullstellen hätte, wäre 0 regulärer Wert, und somit $\text{deg}(P|_{D_R^2}, 0) = 0$. □

Hier benötigen wir den Brouwer-Grad für den Fall, dass P geraden Grad hat.

2.6. Schnitzzahl und Verschlingungszahl

Wir verallgemeinern den Begriff des Abbildungsgrades, indem wir nicht mehr nur Urbilder regulärer Werte betrachten, sondern ganzer Untermannigfaltigkeiten.

Es seien M und N Mannigfaltigkeiten, M sei kompakt, und es sei $A \subset N$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit. Es gelte $\dim N = \dim M + \dim A$, und es sei eine zu A transversale Abbildung $F: M \rightarrow N$ gegeben, so dass $F^{-1}(A) \subset M$ eine kompakte, null-dimensionale Untermannigfaltigkeit, also eine endliche Menge von Punkten ist, an denen im F die Untermannigfaltigkeit A „schneidet“.

Wenn wir annehmen, dass M , N und A orientiert sind, dann können wir jedem „Schnittpunkt“ $p \in F^{-1}(A)$ ein Vorzeichen $\text{sign}(d_p F) \in \{1, -1\}$ zuordnen. Falls $\dim A \geq 1$ und $\dim M \geq 1$ gilt, ist es genau dann 1, wenn positiv orientierte Basen (e_1, \dots, e_m) von $T_p M$ und (f_1, \dots, f_a) von $T_{F(p)} A$ eine positiv orientierte Basis

$$(d_p F(e_1), \dots, d_p F(e_m), f_1, \dots, f_a)$$

von $T_{F(p)} N$ liefern. Falls eine der beteiligten Mannigfaltigkeiten M und A nulldimensional ist, überlegen wir uns eine passende Definition.

2.38. DEFINITION. Es seien M , N , $A \subset N$ und $F: M \rightarrow N$ wie oben, dann definieren wir die *Schnitzzahl modulo 2* durch

$$\#_2(F, A; N) = \#F^{-1}(A) \pmod{2} \in \mathbb{Z}/2.$$

Wenn M , N und A orientiert sind, definieren wir die *Schnitzzahl* durch

$$\#(F, A; N) = \sum_{p \in F^{-1}(A)} \text{sign}(d_p F).$$

Wenn $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit und $\iota: M \rightarrow N$ die Inklusionsabbildung ist, definieren wir analog

$$\#_2(M, A; N) = \#_2(\iota, A; N) \quad \text{und gegebenenfalls} \quad \#(M, A; N) = \#(\iota, A; N).$$

Falls $A = \{q\}$ gilt, ist F genau dann transversal, wenn q regulärer Wert von F ist. Falls N kompakt und zusammenhängend ist, gilt $\#_2(F, A; N) = \deg_2(F)$, beziehungsweise $\#(F, A; N) = \deg(F)$ im orientierten Fall.

Tatsächlich können wir $\#(F, A; N)$ etwas allgemeiner definieren, indem wir annehmen, dass nur M und das sogenannte „Normalenbündel“ von A in N orientiert sind. Da wir noch keine Normalenbündel von Untermannigfaltigkeiten definiert haben, verschieben wir diesen Aspekt auf später.

Wir beweisen Analoga einiger Sätze aus Abschnitt 2.3.

2.39. SATZ. *Die Schnitzzahl und die Schnitzzahl modulo 2 sind homotopieinvariant.*

BEWEIS. Es seien $F_0, F_1: M \rightarrow N$ transversal zu A , und $H: M \times I \rightarrow N$ sei eine Homotopie zwischen ihnen. Dann gilt $H \pitchfork_{M \times \partial I} A$, und nach dem Transversalitätssatz 2.14 können wir H durch eine Homotopie zwischen F_0 und F_1 ersetzen, die zu A transversal ist.

Dann ist $H^{-1}(A) \subset M \times I$ eine kompakte, eindimensionale Untermannigfaltigkeit von $M \times I$ mit Rand

$$\partial(H^{-1}(A)) = H^{-1}(A) \cap (M \times \partial I) = F_0^{-1}(A) \dot{\cup} F_1^{-1}(A),$$

und es gilt $H^{-1}(A) \pitchfork (M \times \partial I)$ in $M \times I$. Die Gleichheit der Schnitzzahlen modulo 2 folgt, da die Anzahl der Randpunkte von $H^{-1}(A)$ gerade ist.

Wie immer tragen die kreisförmigen Komponenten von $H^{-1}(A)$ nicht zum Vergleich der orientierten Schnitzzahlen bei. Wir parametrisieren eine der Intervallkomponenten durch eine glatte

Kurve $\gamma = (\beta, f): I \rightarrow M \times I$. Entlang von γ wählen wir positiv orientierte Basen der Form (2.1) von $T_{\gamma(t)}(M \times I) \cong T_{\beta(t)}M \oplus \mathbb{R}$. An den Randpunkten $t = 0, 1$ ist $(e_1(t), \dots, e_m(t))$ genau dann positiv orientierte Basis von $T_{\beta(t)}M$, wenn $\dot{f}(t) > 0$. Zusätzlich wählen wir positive Basen $(v_1(t), \dots, v_a(t))$ von $T_{H(\gamma(t))}A$. Dann ist

$$(d_{\gamma(t)}H(e_1(t)), \dots, d_{\gamma(t)}H(e_m(t)), v_1(t), \dots, v_a(t))$$

für alle t eine Basis von $T_{H(\gamma(t))}N$, und somit stets gleich orientiert. Wir fahren fort wie im Beweis von Satz 2.25. \square

Dieser Satz erlaubt es uns jetzt, die Schnittzahl $\#(F, A; N)$ für alle Abbildungen $F: M \rightarrow N$ zu definieren, indem wir F mit Hilfe des Satzes 2.14 durch eine zu A transversale und zu F homotope Abbildung ersetzen.

2.40. SATZ. *Es seien $M, A \subset N$ und $F: M \rightarrow N$ wie oben.*

- (1) *Es sei W kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial W = M$. Wenn sich F auf W fortsetzen lässt, gilt $\#_2(F, A; N) = 0$. Wenn W, N und A orientiert sind, gilt auch $\#(F, A; N) = 0$.*
- (2) *Es sei $B \subset N$ kompakte Untermannigfaltigkeit mit Rand $\partial B = A$. Dann gilt $\#_2(F, A; N) = 0$. Wenn M, N und B orientiert sind, gilt auch $\#(F, A; N) = 0$.*

BEWEIS. Teil (1) beweist man so wie Satz 2.27, Teil (2) wie die Sätze 2.23 und 2.24, jeweils mit den zusätzlichen Überlegungen aus dem obigen Beweis. \square

Man sagt auch, Schnittzahlen seien Bordismus-invariant. Diese Eigenschaft ist etwas allgemeiner als Homotopieinvarianz. Um das zu sehen, betrachten wir zwei homotope Abbildungen gemeinsam als Abbildung $F_0 \dot{\cup} F_1: M \dot{\cup} M \rightarrow N$, wobei wir gegebenenfalls auf einer Kopie von M die Orientierung umkehren. Dann gilt $M \dot{\cup} M = \partial(M \times I)$, und Satz 2.39 folgt aus 2.40 (1).

2.41. PROPOSITION (Graduierte Symmetrie). *Es seien $A, B \subset M$ kompakte Untermannigfaltigkeiten der Dimensionen a, b mit $a + b = \dim M$. Dann gilt*

$$\#_2(B, A; M) = \#_2(A, B; M) .$$

Falls M, A und B orientiert sind, gilt

$$\#(B, A; M) = (-1)^{ab} \#(A, B; M) .$$

Vorzeichenfaktoren wie in der zweiten Gleichung sind gang und gäbe, wenn man mit \mathbb{Z} -wertigen Invarianten arbeitet. Wie Sie im Beweis sehen werden, kommen sie daher, dass man Objekte der Dimensionen a und b miteinander vertauscht. Wir nennen Invarianten mit dieser Eigenschaft *graduiert symmetrisch*.

BEWEIS. Übung. \square

Wir verallgemeinern jetzt den Begriff der Windungszahl zur Verschlingungszahl einer Abbildung und einer Untermannigfaltigkeit. Es sei M eine m -dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit, und es sei $N \subset \mathbb{R}^{m+n+1}$ eine n -dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit. Zu einer zu N transversalen glatten Abbildung $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{m+n+1}$, das heißt, zu einer glatten Abbildung f mit $\emptyset = f^{-1}(N) \subset M$ definieren wir eine Abbildung $u: M \times N \rightarrow S^{m+n}$ durch

$$u(p, q) = \frac{f(p) - q}{|f(p) - q|} . \tag{2.3}$$

2.42. DEFINITION. Es sei M eine kompakte m -dimensionale Mannigfaltigkeit und $N \subset \mathbb{R}^{m+n+1}$ eine kompakte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Es $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{m+n+1}$ eine zu N transversale glatte Abbildung, und sei $u: M \times N \rightarrow S^{m+n}$ wie oben definiert. Dann heißt

$$L_2(f, N) = \deg_2(u) \in \mathbb{Z}/2$$

die *Verschlingungszahl modulo 2* von f mit N . Wenn M und N orientiert sind, definieren die *Verschlingungszahl* von f mit N als

$$L(f, N) = (-1)^n \deg(u) \in \mathbb{Z} .$$

Falls f die Inklusionsabbildung einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^{m+n+1}$ ist, schreiben wir auch $L_2(M, N) = L_2(f, N)$ beziehungsweise $L(M, N) = L(f, N)$ im orientierten Fall.

Wir haben das Vorzeichen $(-1)^n$ eingeführt, um das Minuszeichen vor q in (2.3) zu kompensieren. Wie bei der Windungszahl und der Schnittzahl spielt auch bei der Verschlingungszahl der umgebende Raum (hier \mathbb{R}^{m+n+1}) eine große Rolle. Im Spezialfall $N = \{x\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ gilt $L_2(f, N) = W_2(f, x)$ und $L(f, N) = W(f, x)$.

2.43. PROPOSITION (Graduierte Symmetrie). *Es seien $M, N \subset \mathbb{R}^{m+n+1}$ kompakte Untermannigfaltigkeiten der Dimensionen m beziehungsweise n . Dann gilt*

$$L_2(N, M) = L_2(M, N) .$$

Im orientierten Falle gilt

$$L(N, M) + (-1)^{mn} L(M, N) = 0 .$$

Hier ist der Vorzeichenfaktor nicht ganz so einfach formal zu erklären. Das liegt daran, dass die Verschlingungszahl in gewissem Sinne eine *sekundäre Invariante* zur Schnittzahl ist, siehe auch Satz 2.44 unten.

BEWEIS. Übung. □

Wir verallgemeinern jetzt Satz 2.30. Dazu nehmen wir an, dass $M = \partial W$ für eine kompakte, gegebenenfalls orientierte Mannigfaltigkeit W . Es sei F eine zu N transversale Fortsetzung von f , dann definieren wir $\#_2(F, N; \mathbb{R}^{m+n+1}) \in \mathbb{Z}/2$ und gegebenenfalls $\#(F, N; \mathbb{R}^{m+n+1}) \in \mathbb{Z}$ wie in Definition 2.38. Tatsächlich sind diese Schnittzahlen homotopieinvariant relativ zu M , das heißt, wir dürfen F durch eine zu F relativ N homotope Abbildung ersetzen, ohne den Wert zu verändern.

2.44. SATZ. *Es sei W eine kompakte, $(m+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand $M = \partial W$, es sei $N \subset \mathbb{R}^{m+n+1}$ eine kompakte, n -dimensionale Mannigfaltigkeit, und es sei $F: W \rightarrow \mathbb{R}^{m+n+1}$ zu N transversal, so dass auch $f = F|_M$ zu N transversal ist. Dann gilt*

$$L_2(f, N) = \#_2(F, N; \mathbb{R}^{m+n+1}) \quad \text{und} \quad L(f, N) = (-1)^n \#(F, N; \mathbb{R}^{m+n+1}) ,$$

letzteres jedoch nur, wenn N und W orientiert sind und M die Randorientierung trägt.

Als Beispiel betrachte man zwei verschlungene Kreise im \mathbb{R}^3 (Übung).

BEWEIS. Wir führen den Beweis etwas anders als bei Satz 2.30. Wir beschränken uns im Wesentlichen auf den orientierten Fall; der unorientierte Fall ergibt sich durch Vergessen der Orientierungen.

Es sei v ein regulärer Wert der obigen Abbildung u , und es sei $(p, q) \in u^{-1}(v)$. Nach Konstruktion (2.3) von u ist der Vektor $f(p) - q$ ein positives Vielfaches von v . Da W und N kompakt sind, ist $|F(p) - q|$ auf $W \times N$ beschränkt, und wir wählen R größer als das Maximum dieses Ausdrucks. Dann betrachten wir die Abbildung

$$g: [0, R] \times M \times N \rightarrow \mathbb{R}^{m+n+1} \quad \text{mit} \quad g(t, p, q) = f(p) - q - tv .$$

Es gilt $(t, p, q) \in g^{-1}(0)$ genau dann, wenn $(p, q) \in u^{-1}(v)$ und $t = |f(p) - q|$ gilt. Da $f^{-1}(N) = \emptyset$ folgt $g^{-1}(0) \subset (0, R) \times M \times N$.

Im orientierten Fall sei $(t, p, q) \in g^{-1}(0)$, und (e_1, \dots, e_m) und (f_1, \dots, f_n) seien orientierte Basen von $T_p M$ beziehungsweise $T_q N$, dann ist $(e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_n)$ eine orientierte Basis von $T_{(p,q)}(M \times N)$. Es gilt

$$\begin{aligned} d_{(p,q)}u(e_i) &= \frac{d_p f(e_i)}{|f(p) - q|} + d_p \left(\frac{1}{|f(\cdot) - q|} \right) (e_i) \cdot (f(p) - q), \\ d_{(p,q)}u(f_j) &= -\frac{e_j}{|f(p) - q|} + d_p q \left(\frac{1}{|f(p) - \cdot|} \right) (f_j) \cdot (f(p) - q), \end{aligned}$$

dabei ist $t = |f(p) - q| > 0$, und der zweite Summand ist jeweils ein Vielfaches von v . Somit ist $(d_{(p,q)}u(e_1), \dots, d_{(p,q)}u(f_n))$ genau dann eine positiv orientierte Basis von $T_v S^{m+n}$, wenn

$$(v, d_p f(e_1), \dots, d_p f(e_m), -f_1, \dots, -f_n) \quad (2.4)$$

eine positiv orientierte Basis des \mathbb{R}^{m+n+1} ist.

Jetzt setzen wir die Abbildung g zu einer Abbildung

$$G: [0, R] \times W \times N \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n+1} \quad \text{mit} \quad G(t, p, q) = F(p) - q - tv$$

fort. Der Definitionsbereich ist eine Mannigfaltigkeit mit Ecken, wobei $G^{-1}(0)$ nach Konstruktion die „Kanten“ $\{0, R\} \times M \times N$ nicht trifft. Wenn nötig, approximieren wir G mit Satz 2.14 durch eine zu N transversale Abbildung, wobei wir G in einer Umgebung der Randkomponenten $\{0, R\} \times W \times N \cup [0, R] \times M \times N$ festhalten. Somit ist $G^{-1}(0)$ eine kompakte, eindimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand, und die Randpunkte sind entweder von der Form $(t, p, q) \in g^{-1}(0)$ oder von der Form $(0, p, q)$ mit $F(p) = q$. Hieraus folgt bereits

$$L_2(f, N) = \#_2(F, N).$$

Im orientierten Fall betrachten wir Intervalle in $G^{-1}(0)$. Mit ähnlichen Überlegungen wie unten kann man zeigen, dass Intervalle, die zwei Punkte von $g^{-1}(0)$ miteinander verbinden genausowenig zu $L(f, N)$ und $\#(F, N)$ beitragen wie solche, die zwei Punkte der Form $(0, p, q)$ mit $q = F(p)$ miteinander verbinden. Also betrachten wir jetzt eine Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow G^{-1}(0)$ mit

$$\gamma(0) = (0, p_0, q_0) \quad \text{und} \quad \gamma(1) = (t_1, p_1, q_1) \in g^{-1}(0).$$

Wir immer gilt $\gamma \pitchfork \partial([0, R] \times W \times N)$, und γ trifft die „Kanten“ $\{0, R\} \times M \times N$ nicht.

Wir beginnen im Punkt $\gamma(0)$. Es sei M als Rand von W orientiert, und wir wählen Produktorientierungen auf $[0, R] \times W \times N$, auf $[0, R] \times M \times N$ und auf $\{0, R\} \times W \times N$. Insbesondere sind die letzteren nicht als Ränder von $[0, R] \times W \times N$ orientiert. Seien (e_0, \dots, e_m) , (f_1, \dots, f_n) positiv orientierte Basen von $T_{p_0} W$ beziehungsweise $T_{q_0} N$. Da $\dot{\gamma}(0)$ einwärts, also in Richtung von $\frac{\partial}{\partial t}$ weist, ist

$$\left(\dot{\gamma}(0), e_0, \dots, e_m, f_1, \dots, f_n \right)$$

eine positiv orientierte Basis von $T_{\gamma(0)}([0, R] \times W \times N)$. Wir wenden $d_{\gamma(0)}G$ auf die hinteren $(m + n + 1)$ -Vektoren an. Da $F \pitchfork N$, erhalten wir eine Basis

$$(d_{p_0}F(e_0), \dots, d_{p_0}F(e_m), -f_1, \dots, -f_n) \quad (2.5)$$

von $T_q \mathbb{R}^{m+n+1}$. Sei $\varepsilon \in \{1, -1\}$ ihr Vorzeichen, dann trägt $\gamma(0)$ mit $(-1)^n \varepsilon$ zu $\#(F, N; \mathbb{R}^{m+n+1})$ bei.

Wir betrachten jetzt den Punkt $\gamma(1)$. Seien (e_1, \dots, e_m) , (f_1, \dots, f_n) positiv orientierte Basen von $T_{p_1} M$ beziehungsweise $T_{q_1} N$. Da der Vektor $\dot{\gamma}(1)$ auswärts weist, sind die Basen

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}, \dot{\gamma}(1), e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_n \right) \quad \text{und} \quad \left(\dot{\gamma}(1), -\frac{\partial}{\partial t}, e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_n \right)$$

von $T_{\gamma(1)}([0, R] \times W \times N)$ positiv orientiert. Insbesondere können wir die gegebenen Basen bei $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ durch eine Familie positiv orientierter Basen längs γ verbinden, so dass $\dot{\gamma}(t)$ stets an erster Stelle steht.

Indem wir $d_{\gamma(1)}g$ auf die hinteren $(m+n+1)$ Vektoren anwenden, erhalten wir wieder die Basis

$$(v, d_{p_1}f(e_1), \dots, d_{p_1}f(e_m), -f_1, \dots, -f_n)$$

von \mathbb{R}^{m+n+1} aus (2.4), die somit genau wie die Basis (2.5) orientiert ist, also mit Vorzeichen ε . Somit trägt $\gamma(1)$ mit Vorzeichen $(-1)^n\varepsilon$ zu $L(f, N)$ bei. Durch Summation über alle Intervalle in $G^{-1}(0)$ folgt die Behauptung. \square

2.45. FOLGERUNG. *Die Verschlingungszahlen $L_2(f, N)$ beziehungsweise $L(f, N)$ sind invariant unter Homotopien von f , die N nicht treffen.*

BEWEIS. Wir fassen $W = M \times [0, 1]$ als Mannigfaltigkeit mit Rand $\{0, 1\} \times M$ auf, wobei gegebenenfalls beide Kopien von M entgegengesetzt orientiert sind. Eine Homotopie zwischen f_0 und $f_1: M \rightarrow \mathbb{R}^{m+n+1}$ ist somit eine Abbildung $H: W \rightarrow \mathbb{R}^{m+n+1}$. Wenn H die Untermannigfaltigkeit F nicht trifft, erhalten wir im orientierten Fall

$$0 = \#(H, N; \mathbb{R}^{m+n+1}) = L(H|_{\partial W}, N) = L(f_1, N) - L(f_0, N). \quad \square$$

Völlig analog zu Satz 2.44 gilt auch

2.46. SATZ. *Es seien $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{m+n+1}$ und $N \subset \mathbb{R}^{m+n+1}$ wie oben, und es gelte $N = \partial W$ für eine kompakte Untermannigfaltigkeit W mit Rand. Dann gilt*

$$L_2(f, N) = \#_2(f, W) \quad \text{beziehungsweise} \quad L(f, N) = (-1)^{m+1} \#(f, W).$$

BEWEIS. Der Beweis im Allgemeinen verläuft ähnlich wie oben. Wir betrachten hier nur den Spezialfall, dass $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{m+n+1}$ eine Inklusionsabbildung ist. In diesem Fall folgt aus den Propositionen 2.41, 2.43 und Satz 2.44, dass

$$\begin{aligned} L(f, N) &= L(M, N) = (-1)^{mn+1} L(N, M) = (-1)^{mn+1} \#(W, M) \\ &= (-1)^{mn+1+m(n+1)} \#(M, W) = (-1)^{m+1} \#(f, W). \end{aligned} \quad \square$$

2.7. Die Eulercharakteristik

Zum Schluss dieses Kapitels betrachten wir einen Spezialfall der Schnittzahl, die Eulercharakteristik oder Eulerzahl. Als erstes überlegen wir uns, dass das Tangentialbündel einer glatten Mannigfaltigkeit eine natürliche Orientierung trägt.

2.47. SATZ. *Man kann die Tangentialbündel aller glatten Mannigfaltigkeiten so orientieren, dass jeder lokale Diffeomorphismus $F: M \rightarrow N$ einen orientierungserhaltenden lokalen Diffeomorphismus $dF: TM \rightarrow TN$ induziert.*

Wir nennen die unten konstruierte Konstruierung die *natürliche Orientierung* von TM . Sie hängt von gewissen Konventionen ab, die wir hiermit ein für allemal festlegen — ähnlich wie die Randorientierung.

BEWEIS. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, dann orientieren wir $TU = U \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ durch die Standardorientierung des \mathbb{R}^{2n} . Sei $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokaler Diffeomorphismus, dann ist dF ebenfalls ein Diffeomorphismus, denn

$$d_{(p,v)}dF = \begin{pmatrix} d_p F & 0 \\ 0 & d_p F \end{pmatrix} : \mathbb{R}^{2n} = T_{(p,v)}T\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2n} = T_{(F(p), d_p F(v))}T\mathbb{R}^{2n}.$$

Bezüglich der gewählten Orientierungen erhalten wir

$$\text{sign}(d_{(p,v)}dF) = \text{sign}(\det(d_pF)^2) = 1 .$$

Sei jetzt TM eine Mannigfaltigkeit und $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte, dann orientieren wir TU so, dass $d\varphi: TU \rightarrow TV = V \times \mathbb{R}^n$ orientierungserhaltend ist. Wegen der obigen Vorüberlegung liefern Kartenwechsel $\psi \circ \varphi^{-1}$ orientierungserhaltende Kartenwechsel $d\psi \circ (d\varphi)^{-1}$. Somit haben wir TM orientiert.

Sei jetzt $F: M \rightarrow N$ ein lokaler Diffeomorphismus. Wir stellen dF in Karten dar wie oben. Dann zeigt unsere Vorüberlegung, dass dF orientierungserhaltend ist. \square

Wir identifizieren $p \in M$ mit dem Nullvektor $0 \in T_pM$ und betrachten $M \subset TM$ als Untermannigfaltigkeit. Dann möchten wir $e(M) = \#(M, M; TM)$ definieren. Dabei haben wir zwei Probleme. Zum einen ist M in TM natürlich nicht transversal zu sich selbst. Dieses Problem können wir mit dem Transversalitätssatz 2.14 beheben, indem wir die Inklusionsabbildung $M \hookrightarrow TM$ zu einer zu $M \subset TM$ transversalen Abbildung f deformieren und $e(M) = \#(f, M; TM)$ betrachten. Das zweite Problem ist, dass M selbst nicht orientiert, eventuell nicht einmal orientierbar ist. Dieses Problem lösen wir so, dass wir M lokal orientieren, und dafür sorgen, dass sich die zwei Kopien von M nur in Punkten $q = f(p) \in TM$ schneiden, für die $p = q$ gilt. Dazu ersetzen wir die Inklusionsabbildung durch ein Vektorfeld. Wir erinnern uns an die Definition 1.21 des Tangentialbündels.

2.48. DEFINITION. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Tangentialbündel $\pi: TM \rightarrow M$. Ein *Vektorfeld* auf M ist eine glatte Abbildung $X: M \rightarrow TM$, so dass $\pi \circ X = \text{id}_M$. Der Raum aller Vektorfelder wird mit $\mathfrak{X}(M)$ bezeichnet. Das Vektorfeld, das für alle $p \in M$ den Wert $0 \in T_pM$ annimmt, heißt auch der *Nullschnitt* von M und wird mit 0 oder $Z \in \mathfrak{X}(M)$ bezeichnet.

Man überlegt sich leicht, dass die Vektorfelder einen unendlich-dimensionalen reellen Vektorraum bilden. Der Nullpunkt ist der Nullschnitt, den wir mit 0 bezeichnen, wenn wir diesen Aspekt hervorheben wollen, und mit Z , wenn es uns um die Abbildung $Z: M \rightarrow TM$ geht.

2.49. DEFINITION. Es sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld. Eine *Nullstelle* von X ist ein Punkt $p \in M$ mit $X(p) = 0 \in T_pM$. Die Menge aller Nullstellen von X bezeichnen wir mit $X^{-1}(0)$. Eine Nullstelle $p \in M$ heißt *nicht entartet*, wenn $X \pitchfork_{\{p\}} M$ gilt. Wir nennen X *nicht entartet*, wenn X keine entarteten Nullstellen besitzt.

2.50. BEMERKUNG. Wir können Vektorfelder als Ableitungsvorschriften für Funktionen auffassen wie in Definition 1.18 (1). Im \mathbb{R}^n besteht ein Vektorfeld aus n Komponentenfunktionen, die Ableitung eines Vektorfeldes nach einem Vektorfeld liefert also wieder ein Vektorfeld. Auf Mannigfaltigkeiten ist diese Form der Ableitung nicht unter Kartenwechseln invariant, ist also nicht wohldefiniert. Stattdessen braucht man einen Zusammenhang, um ein Vektorfeld nach einem anderen abzuleiten.

An einer Nullstelle p von $X \in \mathfrak{X}(M)$ haben wir jedoch eine wohldefinierte Ableitung. Da $T_pM = \pi^{-1}(p)$ ein Vektorraum ist, können wir T_vT_pM für alle $v \in T_pM$ mit $\ker(d_{(p,v)}\pi) \subset T_{(p,v)}TM$ identifizieren. Dann betrachten wir die Ableitung

$$D_pX = d_pX - d_pZ: T_pM \rightarrow \ker(d_{(p,0)}\pi) = T_pM ,$$

wobei Z wieder den Nullschnitt bezeichne. Es gilt

$$d_{(p,0)}\pi(d_pX(v) - d_pZ(v)) = d_p(\pi \circ X)(v) - d_p(\pi \circ Z)(v) = v - v = 0 ,$$

da $\pi \circ X = \pi \circ Z = \text{id}_M$.

Eine Nullstelle $p \in X^{-1}(0) \subset M$ ist genau dann nicht entartet, wenn

$$T_{(p,0)}TM = \text{im}(d_pX) + \text{im}(d_pZ) = \text{im}(D_pX) + \text{im}(d_pZ) . \quad (2.6)$$

Nach dem Homomorphiesatz, angewendet auf $d_{(p,0)}\pi$, gilt $T_pM \cong T_{(p,0)}TM / \ker(d_{(p,0)}\pi)$. Da $\pi \circ Z = \text{id}_M$, gilt (2.6) genau dann, wenn $D_pX: T_pM \rightarrow \ker(d_{(p,0)}\pi) = T_pM$ surjektiv, also invertierbar ist. Indem wir eine beliebige Basis (e_1, \dots, e_m) von T_pM wählen, erhalten wir in diesem Fall eine Basis

$$(d_pZ(e_1), \dots, d_pZ(e_m), D_pX(e_1), \dots, D_p(e_m))$$

von TM . Sie ist genau dann positiv orientiert in der natürlichen Orientierung von TM aus dem Beweis von Satz 2.47, wenn $\det(D_pX) > 0$.

2.51. SATZ UND DEFINITION. *Es sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand, und $X \in \mathfrak{X}(M)$ sei ein nicht entartetes Vektorfeld mit $X^{-1}(0) \cap \partial M = \emptyset$. Dann definieren wir*

$$\chi(X) = \sum_{p \in X^{-1}(0)} \text{sign det}(D_pX) .$$

Falls $X|_{\partial M}$ ein auswärts weisendes Vektorfeld ist, definieren wir die absolute Eulercharakteristik von M als $\chi(M) = \chi(X)$. Falls $X|_{\partial M}$ ein einwärts weisendes Vektorfeld ist, definieren wir die relative Eulercharakteristik von M als $\chi(M, \partial M) = \chi(X)$. Falls $\partial M = \emptyset$, heißt $\chi(M) = \chi(X)$ einfach die Eulercharakteristik oder Eulerzahl von M . Diese Größen hängen nicht von der Wahl von X ab.

Falls M orientiert ist, gilt $\chi(M) = \#(M, M; TM)$ unabhängig von der gewählten Orientierung von M , und der Satz folgt aus Satz 2.39.

BEWEIS. Es seien $X_0, X_1 \in \mathfrak{X}(M)$ nicht entartet, dann können wir die Abbildung $H: M \times [0, 1] \rightarrow TM$ mit

$$H(p, t) = (1 - t)X_0(p) + tX_1(p)$$

durch eine zu $M \subset TM$ transversale Abbildung ersetzen, die für t nahe 0 und 1 und für p nahe ∂M mit der obigen übereinstimmt. Dabei können wir mit dem Satz über implizite Funktionen sogar erreichen, dass $H(p, t) \in T_pM$ für alle $(p, t) \in M \times [0, 1]$ gilt. Wenn $X_0|_{\partial M}$ und $X_1|_{\partial M}$ beide auswärts (beziehungsweise einwärts) weisen, gilt dies auch für $H|_{\partial M \times [0, 1]}$.

Von hier an verläuft der Beweis des Satzes genau wie der von Satz 2.39. Dabei beachten wir, dass $H^{-1}(0)$ nach Konstruktion den Rand der Mannigfaltigkeit $M \times [0, 1]$ mit Kanten $\partial M \times \{0, 1\}$ nur in $M \times \{0, 1\}$ trifft. \square

2.52. BEISPIEL. Wir betrachten einige einfache Mannigfaltigkeiten.

- (1) Auf der Kreisscheibe $D^n \subset \mathbb{R}^n$ ist $X = \text{id}$ ein auswärts weisendes Vektorfeld mit einer einzigen, nicht entarteten Nullstelle 0. Es gilt $D_0X = \text{id}$, somit folgt $\chi(D^n) = 1$.
- (2) Das Vektorfeld $Y = -\text{id}$ ist ein einwärts weisendes Vektorfeld auf $D^n \subset \mathbb{R}^n$. Es gilt $D_0Y = -\text{id}$, und somit $\chi(D^n, S^{n-1}) = (-1)^n$.
- (3) Ungerade Sphären tragen Vektorfelder ohne Nullstellen. Es folgt $\chi(S^{2n-1}) = 0$. Auf der gerade-dimensionalen Sphäre $S^{2n} \subset \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{R}$ betrachten wir das Vektorfeld X mit

$$X(z, t) = (iz, 0) .$$

Es hat Nullstellen an den „Polen“ $p_{\pm} = (0, \pm 1)$ mit Tangentialraum $T_{p_{\pm}}S^{2n} = \mathbb{C}^n \oplus \{0\}$ und Ableitung $D_{p_{\pm}}X = i \text{id}_{\mathbb{C}^n}$. Die reelle Determinante ist jeweils 1, somit folgt jetzt insgesamt

$$\chi(S^m) = 1 + (-1)^m = \begin{cases} 2 & \text{für gerade } m, \text{ und} \\ 0 & \text{für ungerade } m. \end{cases}$$

Wir erhalten einen weiteren Beweis für den Satz 2.36 vom Igel.

2.53. FOLGERUNG. *Es sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit. Wenn M ein Vektorfeld ohne Nullstellen trägt, dann folgt $\chi(M) = 0$.*

2.54. BEMERKUNG. Hier gilt auch die Umkehrung, falls M zusammenhängend ist. In diesem Fall können wir eine Karte finden, die alle Nullstellen eines gegebenen Vektorfeldes X enthält. Falls $\chi(X) = 0$ gilt, kann man X auf dem Kartengebiet so abändern, dass es hinterher keine Nullstellen mehr hat.

2.55. SATZ. *Es sei M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand.*

- (1) *Wenn m gerade ist, gilt $\chi(M) = \chi(M, \partial M)$.*
- (2) *Wenn m ungerade ist, gilt*

$$\chi(M) = -\chi(M, \partial M) = \frac{1}{2}\chi(\partial M) .$$

Insbesondere haben ungerade-dimensionale Mannigfaltigkeiten ohne Rand Eulerzahl 0. Und wenn eine gerade-dimensionale Mannigfaltigkeit M Rand einer ungerade-dimensionalen Mannigfaltigkeit W ist, dann ist $\chi(M)$ gerade.

BEWEIS. Es sei X ein nicht entartetes Vektorfeld, so dass $X|_{\partial M}$ auswärts weist. Dann ist $Y = -X$ ein nicht entartetes Vektorfeld, so dass $Y|_{\partial M}$ einwärts weist. Sei p eine Nullstelle, dann folgt

$$\text{sign det}(D_p Y) = \text{sign det}(-D_p X) = (-1)^m \text{sign det}(D_p X) .$$

Aufsummieren über $X^{-1}(0) = Y^{-1}(0)$ liefert

$$\chi(M, \partial M) = (-1)^m \chi(M) .$$

Jetzt sei m ungerade. Wir finden eine „Kragenumgebung“ $U = \partial M \times [-1, 0] \subset M$ von $\partial M = M \times \{0\}$. Es sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein auswärts weisendes Vektorfeld. Wir dürfen annehmen, dass $X|_U = \frac{\partial}{\partial t}$. Wir wählen ein nicht entartetes Vektorfeld $Y \in \mathfrak{X}(\partial M)$. Auf der Kragenumgebung ersetzen wir $X|_U$ jetzt durch das Vektorfeld mit

$$X'(p, t) = -\cos(\pi t) \frac{\partial}{\partial t} + \sin(-\pi t) Y(t) .$$

Es stimmt entlang von $\partial M \times \{-1\}$ mit X überein, und weist entlang von $\partial M \times \{0\}$ nach innen. Es hat zusätzliche Nullstellen bei $(p, t) \in U$ genau dann, wenn $p \in Y^{-1}(0)$ und $t = \frac{1}{2}$. Da $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, hat es an diesen Stellen eine Ableitung der Form

$$D_{(p, \frac{1}{2})} X' = \begin{pmatrix} D_p Y & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix} : T_p(\partial M) \oplus \mathbb{R} \longrightarrow T_p(\partial M) \oplus \mathbb{R} ,$$

und somit das entgegengesetzte Vorzeichen wie Y bei p . Hieraus folgt

$$\chi(M) = -\chi(M, \partial M) = -\chi(X') = \chi(Y) - \chi(X) = \chi(\partial M) - \chi(M) . \quad \square$$

De Rham-Kohomologie

Homologie und Kohomologie sind abstrakte Begriffe aus der algebraischen Topologie. Sie bezeichnen Funktoren, die einer geeigneten Kategorie von Räumen Elemente einer abelschen Kategorie zuordnen, typischerweise abelsche Gruppen. Außerdem erfüllen diese Funktoren stets die sogenannten „Eilenberg-Steenrod“-Axiome, die es ermöglichen, Homologie- und Kohomologiegruppen besonders einfacher Räume (etwa von Sphären) ohne weitere Rechnungen direkt anzugeben.

Sobald man eine (Ko-) Homologietheorie mit gewissen Eigenschaften zur Verfügung hat, kann man einige der Begriffe und Sätze aus den vorangegangenen Kapiteln neu beschreiben. Beispielsweise gibt es eine kohomologische Definition des Abbildungsgrades und der Eulercharakteristik, und neue Beweise für den Brouwerschen Fixpunktsatzes oder den Satz vom Igel. Tatsächlich liegt den Überlegungen des letzten Abschnittes bereits versteckt eine verallgemeinerte Kohomologietheorie zugrunde, die „Kobordismustheorie“.

In diesem Kapitel lernen wir eine andere Kohomologietheorie kennen, die sich besonders leicht geometrisch beschreiben lässt. Wir kennen Differentialformen bereits aus der Analysis im Zusammenhang mit Kurvenintegralen und mit dem Satz von Stokes. Hier wollen wir Differentialformen und de Rham-Kohomologie systematischer betrachten. Später können wir sie zum Beispiel benutzen, um charakteristische Klassen von Vektorbündeln zu definieren.

3.1. Vektorfelder und die Lie-Klammer

Wir erinnern uns an den Begriff eines Vektorfeldes aus Definition 2.48. Im Zusammenhang mit Differentialformen wollen wir Vektorfelder auf M als Derivationen auf dem Raum der Funktionen $\mathcal{C}^\infty(M)$ verstehen.

3.1. DEFINITION. Eine *Derivation* auf einer \mathbb{k} -Algebra \mathbb{k} ist eine \mathbb{k} -lineare Abbildung

$$\mathcal{D}: A \rightarrow A$$

die eine Produktregel erfüllt:

$$\mathcal{D}(f \cdot g) = \mathcal{D}f \cdot g + f \cdot \mathcal{D}g \quad \text{für alle } f, g \in A .$$

Die Summe zweier Derivationen ist wieder eine Derivation, und man kann Derivationen mit Funktionen multiplizieren: sei \mathcal{D} Derivation und $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ eine Funktion, dann ist $g\mathcal{D}$ eine Derivation mit

$$(g\mathcal{D})(f) = g \cdot \mathcal{D}(f) .$$

Also bilden die Derivationen einen Modul über der Algebra der glatten Funktionen $\mathcal{C}^\infty(M)$.

3.2. BEMERKUNG. Man kann Funktionen nach Vektorfeldern ableiten und erhält eine Ableitung $d: \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ mit

$$df(X) := X(f) , \quad \text{mit} \quad d_p f(X) = X_p(f) \in \mathbb{R}$$

für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und alle $p \in M$. Da für Richtungsableitungen die Produktregel gilt, können wir X als Derivation $f \mapsto df(X)$ auf $\mathcal{C}^\infty(M)$ auffassen.

Sei umgekehrt $\mathcal{D}: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ eine Derivation, dann gilt

$$(\mathcal{D}(f \cdot g))(p) = (\mathcal{D}f)(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot (\mathcal{D}g)(p),$$

somit ist $\mathcal{D}_p = \mathcal{D}(\cdot)(p)$ ein (algebraischer) Tangentialvektor am Punkt p . Also entsprechen die Derivationen von $\mathcal{C}^\infty(M)$ genau den Vektorfeldern auf M , wir erhalten also eine „algebraische“ Beschreibung von Vektorfeldern.

Wir wollen jetzt eine Lie-Algebren-Struktur auf $\mathfrak{X}^\infty(M)$ einführen. Die Lie-Klammer kann uns beim Verständnis der äußeren Ableitung helfen, und wir brauchen sie später, um die Krümmung eines Zusammenhangs zu definieren.

3.3. DEFINITION. Eine *Lie-Klammer* auf einem \mathbb{k} -Vektorraum V ist eine Abbildung

$$[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$$

mit den Eigenschaften

- (1) *Linearität*: $[au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w]$ für alle $a, b \in K$ und $u, v, w \in V$;
- (2) *Antisymmetrie*: $[u, v] = -[v, u]$ für alle $v, w \in V$;
- (3) *Jacobi-Identität*: für alle $u, v, w \in V$ gilt

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0.$$

Das Paar $(V, [\cdot, \cdot])$ heißt dann eine *Lie-Algebra*.

Aus (1) und (2) folgt Bilinearität. Auf den Raum $M_n(K)$ der $n \times n$ -Matrizen über einem Körper \mathbb{k} ist beispielsweise eine Lie-Klammer definiert durch

$$[A, B] = AB - BA.$$

Die Jacobi-Identität folgt aus der Assoziativität des Matrixproduktes. Eine analoge Definition funktioniert auf jeder assoziativen Algebra.

Wir beginnen mit einer „algebraischen“ Beschreibung der Lie-Klammer auf Vektorfeldern. Sei M eine glatte (also \mathcal{C}^∞ -) Mannigfaltigkeit, und seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Wir definieren den Operator

$$[X, Y]: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \quad \text{durch} \quad [X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad (3.1)$$

für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Aus der Produktregel in Definition 3.1 folgt

$$\begin{aligned} [X, Y](f \cdot g) &= \dots \\ &= ([X, Y](f)) \cdot g + f \cdot ([X, Y](g)). \end{aligned}$$

Nach Bemerkung 3.2 ist $[X, Y]$ wieder eine Derivation auf M , also ein Vektorfeld.

3.4. DEFINITION. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Die *Lie-Klammer* $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ auf $\mathfrak{X}(M)$ ist definiert durch (3.1).

In Karten geben wir dieses Vektorfeld unten an. Wir wollen nun eine allgemeinere Beschreibung der Lie-Klammer auf Mannigfaltigkeiten geben. Wenn X ein Vektorfeld auf M ist, und $F: M \rightarrow N$ differenzierbar, dann ist $dF(X)$ eine Abbildung $M \rightarrow TN$, aber kein Vektorfeld auf N . Daher folgende Definition.

3.5. DEFINITION. Sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Zwei Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(N)$ heißen *F-verwandt*, wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{dF} & TN \\ X \uparrow & & \uparrow Y \\ M & \xrightarrow{F} & N, \end{array}$$

kommutiert, d.h., wenn $d_p F(X_p) = Y_{F(p)}$ für alle $p \in M$ gilt.

3.6. BEMERKUNG. Sei M eine Mannigfaltigkeit, sei φ eine Karte von M , und sei $X \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ ein Vektorfeld auf M , dann erhalten wir eine Abbildung $X_\varphi: V^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass

$$d\varphi_p(X_p) = X_\varphi(\varphi(p)) \in \mathbb{R}^n = T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n.$$

Wir fassen X_φ als Vektorfeld auf V^φ auf. Dann sind die Vektorfelder $X|_{U^\varphi}$ auf U^φ und X_φ auf V^φ φ -verwandt. Oder noch etwas schöner: Die Vektorfelder X_φ und X sind φ^{-1} -verwandt.

3.7. PROPOSITION. *Die Lie-Klammer auf Mannigfaltigkeiten hat folgenden Eigenschaften.*

(1) Sei $M = \mathbb{R}^n$ und seien $X, Y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Vektorfelder auf \mathbb{R}^n , dann gilt

$$[X, Y] = X(Y) - Y(X): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

wobei $X(Y) = dY(X)$ die komponentenweise Ableitung von Y nach X bezeichne.

(2) Natürlichkeit. Sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ seien F -verwandt zu $V, W \in \mathfrak{X}(N)$, dann ist $[X, Y]$ auch F -verwandt zu $[V, W]$.

(3) Jacobi-Identität. Für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \in \mathfrak{X}(M).$$

(4) Produktregel. Für alle $f \in C^\infty(M)$ und alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X \quad \text{und} \quad [X, fY] = X(f)Y + f[X, Y].$$

BEWEIS. Übung. □

Aus (1), (2) erhalten wir auch eine explizite Formel für die Lie-Klammer in Karten. Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, sei $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$ eine Karte, und seien X_φ, Y_φ verwandt zu X, Y wie in Bemerkung 3.6. Dann ist $[X, Y]|_{U^\varphi}$ verwandt zum Vektorfeld $X_\varphi(Y_\varphi) - Y_\varphi(X_\varphi)$ auf V^φ .

3.8. BEMERKUNG. Sei φ eine Karte von M . Die Koordinatenvektorfelder $\frac{\partial}{\partial \varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^n}$ sind φ -verwandt mit den Standardbasisfeldern e_1, \dots, e_n auf $V^\varphi \subset \mathbb{R}^n$, nach der Konstruktion der $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ im Beweis von Satz 1.20. Da $[e_i, e_j] = 0$, folgt mit Proposition 3.7 (1) und (2), dass

$$\left[\frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right] = 0 \in \mathfrak{X}(U^\varphi).$$

Insbesondere können wir zweite Ableitungen bezüglich einer festen Karte φ für alle f auf M definieren durch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j} := \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \frac{\partial f}{\partial \varphi^j} = \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \frac{\partial f}{\partial \varphi^i} = \frac{\partial^2 (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i \partial x^j} \circ \varphi.$$

Mit anderen Worten: die Ableitungen nach Koordinatenvektorfeldern zu einer festen Karte vertauschen. In diesem Sinne gilt ein „Satz von Schwarz“ auch auf Mannigfaltigkeiten.

Umgekehrt kann man zeigen: Seien X_1, \dots, X_n Vektorfelder auf M , deren Lie-Klammern auf einer Umgebung U von $p \in M$ verschwinden, so dass $X_{1,p}, \dots, X_{n,p}$ eine Basis von $T_p M$ bilden, dann existiert eine Karte φ mit $U^\varphi \subset U$, so dass $X_i|_{U^\varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$.

3.2. Differentialformen

Wir können jetzt mit der Konstruktion der de Rham-Kohomologie beginnen. Als erstes erinnern wir uns an das Differential df einer Funktion $f \in C^\infty(M)$. Wir können es wie in Definition 3.1 als eine $C^\infty(M)$ -lineare Abbildung $df: \mathfrak{X}(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ auffassen mit $X \mapsto df(X)$.

Im Folgenden verwenden wir gern die Notation $a_1, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_n$. Sie bedeutet, dass wir in der Aufzählung das Element mit der Nummer i weglassen, somit hätten wir auch $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ schreiben können.

3.9. DEFINITION. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine *Differentialform* auf M vom Grad k (kurz: k -Form) ist eine Abbildung $\alpha: \mathfrak{X}(M)^k \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ mit den Eigenschaften

- (1) *Multilinearität*: für alle $1 \leq i \leq k$ und alle $X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ ist die Abbildung $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $X_i \mapsto \alpha(X_1, \dots, X_k)$ linear über $\mathcal{C}^\infty(M)$.
- (2) *Alternierend*: Wenn $X_i = X_j$ gilt, dann folgt $\alpha(X_1, \dots, X_k) = 0$.

Die Menge aller Differentialformen vom Grad k auf M wird mit $\Omega^k(M)$ bezeichnet, und wir setzen $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$.

Wir kennen die obigen Eigenschaften im Zusammenhang mit Determinanten aus der linearen Algebra. Eigenschaft (1) bedeutet, dass wir Summen und Funktionen aus jedem einzelnen Argument von α herausziehen dürfen. Eigenschaft (2) bedeutet, dass sich das Vorzeichen ändert, wenn wir zwei Argumente vertauschen:

$$\begin{aligned} \alpha(X_1, \dots, \underbrace{X_j}_{i\text{-te Stelle}}, \dots, \underbrace{X_i}_{j\text{-te Stelle}}, \dots, X_k) \\ &= \alpha(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_k) + \alpha(X_1, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_k) \\ &= \alpha(X_1, \dots, X_i + X_j, \dots, X_i, \dots, X_k) - \alpha(X_1, \dots, X_i + X_j, \dots, X_i + X_j, \dots, X_k) \\ &= \alpha(X_1, \dots, X_i + X_j, \dots, -X_j, \dots, X_k) + \alpha(X_1, \dots, -X_j, \dots, -X_j, \dots, X_k) \\ &= \alpha(X_1, \dots, X_i, \dots, -X_j, \dots, X_k) = -\alpha(X_1, \dots, X_k). \end{aligned}$$

Es reicht, Eigenschaft (2) für je zwei benachbarte Indizes, also i und $j = i + 1$, zu fordern. Zusammen mit (1) folgt: wenn die Vektorfelder X_1, \dots, X_k über $\mathcal{C}^\infty(M)$ linear abhängig sind, dann gilt $\alpha(X_1, \dots, X_k) = 0$. Insbesondere gibt es auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit keine Differentialformen (außer 0) vom Grad größer als n .

Man überzeugt sich leicht, dass die Summe zweier Differentialformen wieder eine Differentialform ist, und dass wir Differentialformen punktweise mit Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ multiplizieren können, so dass

$$(f\alpha)(X_1, \dots, X_k) = f \cdot \alpha(X_1, \dots, X_k) \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Also bildet $\Omega^k(M)$ ein $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Modul. Bevor wir Differentialformen in Koordinaten darstellen können, brauchen wir ein Produkt für Differentialformen.

3.10. DEFINITION. Das *äußere* oder auch *Dachprodukt* zweier Differentialformen $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^\ell(M)$ ist die Differentialform $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+\ell}(M)$ mit

$$\alpha \wedge \beta(X_1, \dots, X_{k+\ell}) = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_\ell \\ \{1, \dots, k+\ell\} = \{i_1, \dots, i_k\} \cup \{j_1, \dots, j_\ell\}}} \text{sign}(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_\ell) \alpha(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \beta(X_{j_1}, \dots, X_{j_\ell}).$$

Hierbei bezeichnet $\text{sign}(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_\ell)$ das Vorzeichen der Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & k+\ell \\ i_1 & \dots & i_k & j_1 & \dots & j_\ell \end{pmatrix}.$$

Das Wesentliche an der obigen Formel ist, dass wir für jede mögliche Aufteilung der $k + \ell$ Argumente in Gruppen von k beziehungsweise ℓ Elementen genau einen Summanden erhalten. Der Einfachheit halber haben wir die Einträge in jeder Gruppe nach Größe der Indizes sortiert. Falls $k = 0$ ist, entspricht das äußere Produkt gerade der punktweisen Multiplikation mit Funktionen $\alpha = f \in \mathcal{C}^\infty(M) = \Omega^0(M)$.

3.11. PROPOSITION. *Das äußere Produkt von Differentialformen ist wohldefiniert und hat die folgenden Eigenschaften.*

(1) Linearität. Für alle $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega^k(M)$ und $\beta \in \Omega^\ell(M)$ gilt

$$(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2) \wedge \beta = f_1 \cdot (\alpha_1 \wedge \beta) + f_2 \cdot (\alpha_2 \wedge \beta) .$$

(2) Assoziativität. Für alle $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^\ell(M)$, $\gamma \in \Omega^p(M)$ gilt

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma .$$

(3) Graduierte Kommutativität. Für alle $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^\ell(M)$ gilt

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{k\ell} \alpha \wedge \beta .$$

Wegen (1) und (3) gilt Linearität auch im zweiten Argument. Man beachte, dass wir in (3) den gleichen Vorzeichenfaktor haben wie in Proposition 2.41.

BEWEIS. Zur Wohldefiniertheit ist zu zeigen, dass $\alpha \wedge \beta$ multilinear und alternierend ist. Multilinearität dürfte klar sein. Falls $X_p = X_q$ für $1 \leq p < q \leq k + \ell$ gilt, haben wir drei Typen von Summanden. Der Einfachheit nehmen wir an, dass $q = p + 1$, denn hieraus folgt bereits der allgemeine Fall.

- (1) Falls $p, q \in \{i_1, \dots, i_k\}$, setzen wir zwei gleiche Vektoren in α ein, daher verschwindet der entsprechende Summand.
- (2) Falls $p, q \in \{j_1, \dots, j_\ell\}$, gilt das entsprechende für β .
- (3) Falls etwa $p = i_a \in \{i_1, \dots, i_k\}$ und $p + 1 = j_b \in \{j_1, \dots, j_\ell\}$, gibt es einen weiteren Summanden, bei dem alle Indizes gleich sind bis auf $i_a = p + 1$ und $j_b = p$. Die zugehörigen Summanden unterscheiden sich bis auf das Vorzeichen der jeweiligen Permutation und heben sich daher weg.

Den restlichen Beweis lassen wir als Übung. □

3.12. BEMERKUNG. Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, dann erhalten wir 1-Formen $dx^1, \dots, dx^n \in \Omega^1(V)$, so dass dx^i jedem Vektorfeld $X: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ seine i -te Komponentenfunktion zuordnet, also $dx^i(X) = X^i: V \rightarrow \mathbb{R}$. Für die Standardbasisfelder e_1, \dots, e_n gilt somit

$$dx^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Es sei jetzt $\alpha \in \Omega^k(V)$ eine k -Form, dann definieren wir für jedes Indextupel (i_1, \dots, i_k) mit $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ eine Funktion $\alpha_{i_1, \dots, i_k}: V \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\alpha_{i_1, \dots, i_k} = \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) .$$

Seien jetzt $X_1, \dots, X_k: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ Vektorfelder mit Koordinatenfunktionen $X_i^j = dx^j(X_i): V \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass

$$X_i = \sum_{j=1}^n X_i^j \cdot e_j .$$

Es sei S_k die k -te symmetrische Gruppe, also die Gruppe der Permutationen der Menge $\{1, \dots, k\}$. Da α multilinear und alternierend ist, gilt

$$\begin{aligned}
\alpha(X_1, \dots, X_k) &= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \alpha(X_1^{i_1} \cdot e_{i_1}, \dots, X_k^{i_k} \cdot e_{i_k}) \\
&= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n X_1^{i_1} \cdots X_k^{i_k} \cdot \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\sigma \in S_k} X_1^{i_{\sigma(1)}} \cdots X_k^{i_{\sigma(k)}} \cdot \alpha(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(k)}}) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) X_1^{i_{\sigma(1)}} \cdots X_k^{i_{\sigma(k)}} \cdot \alpha_{i_1, \dots, i_k} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k} \sum_{\tau \in S_k} \text{sign}(\tau) X_{\tau(1)}^{i_1} \cdots X_{\tau(k)}^{i_k} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k} \sum_{\tau \in S_k} \text{sign}(\tau) dx^{i_1}(X_{\tau(1)}) \cdots dx^{i_k}(X_{\tau(k)}) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k} \cdot (dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})(X_1, \dots, X_k) .
\end{aligned}$$

Im dritten Schritt haben wir die Indizes nach Größe sortiert, im vierten Schritt haben wir ausgenutzt, dass α alternierend ist. Im fünften Schritt ist $\tau = \sigma^{-1}$. Insgesamt folgt also

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

Wir sehen, dass wir jede k -Form auf V als Linearkombination von äußeren Produkten der Koordinaten-1-Formen dx^i schreiben können.

3.13. BEMERKUNG. Es sei $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$ eine Karte einer Mannigfaltigkeit M , und $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ seien die Koordinatenfelder auf U^φ aus dem Beweis von Satz 1.20, siehe Bemerkung 3.8. Da sich jedes Vektorfeld auf U^φ eindeutig als $C^\infty(U^\varphi)$ -Linearkombination dieser Vektorfelder schreiben lässt, erhalten wir Koordinaten-1-Formen $d\varphi^1, \dots, d\varphi^n \in \Omega^1(U^\varphi)$, so dass

$$d\varphi^i \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) = \delta_{ij} .$$

Sei ein Vektorfeld gegeben durch

$$X|_{U^\varphi} = \sum_{i=1}^n f^i \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^i} ,$$

dann folgt

$$d\varphi^j(X|_{U^\varphi}) = \sum_{i=1}^n f^i \cdot d\varphi^j \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) = f^j ,$$

also hängt $d\varphi^j(X)(p) = f^j(p)$ nur vom Vektor $X_p \in T_p M$ ab.

3.14. PROPOSITION. *Es sei $\alpha \in \Omega^k(M)$ und X_1, \dots, X_k seien Vektorfelder. Dann hängt der Wert von $\alpha(X_1, \dots, X_k)$ an der Stelle $p \in M$ nur von den Vektoren $X_1(p), \dots, X_k(p) \in T_p M$ ab.*

Sei $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte, dann existieren Funktionen $\alpha_{i_1, \dots, i_k}^\varphi: U^\varphi \rightarrow \mathbb{R}$ für alle Indizes $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, so dass

$$\alpha|_{U^\varphi} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k}^\varphi d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_k}. \quad (1)$$

BEWEIS. Es sei $p \in M$ und $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$ eine Karte um p . Wir wählen eine Abschneidefunktion wie in Beispiel 1.17 mit $\text{supp}(\rho) \subset U^\varphi$, so dass $\rho \equiv 1$ auf einer kleinen Umgebung von p gilt. Es folgt

$$\alpha(X_1, \dots, X_k)(p) = (\rho^k \cdot \alpha(X_1, \dots, X_k))(p) = \alpha(\rho X_1, \dots, \rho X_k)(p).$$

Insbesondere hängt der Wert nicht von dem Verhalten der k -Form α und der Vektorfelder X_i außerhalb von U^φ ab.

Da U^φ zu $V^\varphi \subset \mathbb{R}^n$ isomorph ist, können wir in Bemerkung 3.12 argumentieren. Für $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ definieren wir Funktionen $\alpha_{i_1, \dots, i_k}^\varphi: U^\varphi \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\alpha_{i_1, \dots, i_k}^\varphi(p) = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_k}}\right)(p).$$

Es seien $d\varphi^1, \dots, d\varphi^n \in \Omega^1(U^\varphi)$ die Koordinaten-1-Formen aus Bemerkung 3.13. Wie in Bemerkung 3.12 folgt

$$\alpha|_{U^\varphi} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k}^\varphi d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_k}.$$

Insbesondere hängt $\alpha(X_1, \dots, X_k)$ nur von den Vektoren $X_1(p), \dots, X_k(p) \in T_p M$ ab, da das nach Bemerkung 3.13 für die 1-Formen $d\varphi^j(X_i)$ gilt. \square

Für die Einschränkung einer k -Form α auf $(T_p M)^k$ dürfen wir also

$$\alpha_p = \alpha|_{(T_p M)^k}: (T_p M)^k \rightarrow \mathbb{R}$$

schreiben.

3.15. DEFINITION. Es sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Dann definieren wir die mit F zurückgeholte Differentialform $F^*: \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ für alle $k \geq 0$, $\alpha \in \Omega^k(N)$ und $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ durch

$$(F^* \alpha)_p(X_1, \dots, X_k) = \alpha_{F(p)}(d_p F(X_1(p)), \dots, d_p F(X_k(p))).$$

3.16. BEMERKUNG. Man überprüft leicht, dass $F^* \alpha$ eine Differentialform auf M ist. Außerdem gilt

$$(F \circ G)^* \alpha = G^*(F^* \alpha) \in \Omega^k(L), \quad (1)$$

wenn $G: L \rightarrow M$ ebenfalls glatt ist, und

$$\text{id}_M^* \alpha = \alpha.$$

Das bedeutet, dass Ω^k ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der \mathbb{R} -Vektorräume ist.

Außerdem überprüft man, dass

$$F^*(\alpha \wedge \beta) = F^* \alpha \wedge F^* \beta. \quad (2)$$

Wir schreiben $\Omega^\bullet(M) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$. Mit dem Wedge-Produkt wird $\Omega^\bullet(M)$ zu einer Algebra über $\mathcal{C}^\infty(M)$, der äußeren Algebra von M . Wir können Ω^\bullet als kontravarianten Funktor von der Kategorie der Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der \mathbb{R} -Algebren auffassen. Alternativ können wir M das Paar $(\mathcal{C}^\infty(M), \Omega^\bullet(M))$ aus einem Ring und einem Modul darüber zuordnen, und erhalten ebenfalls einen kontravarianten Funktor.

3.3. Das äußere Differential

Wir definieren das äußere Differential und die de Rham-Kohomologie einer Mannigfaltigkeit. Dabei erinnern wir uns an das Differential einer Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $d_p f: T_p M \rightarrow T_p \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$. Für die Koordinatenfunktionen x^i auf \mathbb{R}^n ist dx^i gerade die 1-Form aus Bemerkung 3.12. Analog ist das Differential der i -ten Komponentenfunktion $\varphi^i: U^\varphi \rightarrow \mathbb{R}$ einer Karte $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$ gerade die 1-Form $d\varphi^i$ aus Bemerkung 3.13.

3.17. SATZ UND DEFINITION. *Es gibt genau eine Familie natürlicher Transformationen*

$$d^k: \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}$$

mit folgenden Eigenschaften.

- (1) Für alle Funktionen $f \in \Omega^0(M)$ gilt $d^0 f = df$.
- (2) Leibnizregel. Für $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^\ell(M)$ gilt

$$d^{k+\ell}(\alpha \wedge \beta) = (d^k \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d^\ell \beta .$$

- (3) Es gilt $d^{k+1} \circ d^k = 0$.
- (4) Natürlichkeit. Für alle $F: M \rightarrow N$ und alle $\beta \in \Omega^k(N)$ gilt

$$F^*(d^k \alpha) = d^k(F^* \alpha) .$$

Wir geben einige Beispiele im \mathbb{R}^n mit den Koordinaten x, y, z, \dots . Wegen Eigenschaft (4) brauchen wir n nicht anzugeben.

$$\begin{aligned} d(f(x) dy) &= f'(x) dx \wedge dy + f(x) d^1(dy) = f'(x) dx \wedge dy , \\ d(f(y) dx) &= f'(y) dy \wedge dx = -f'(y) dx \wedge dy , \\ d(f(x) dx) &= f'(x) dx \wedge dx = 0 , \\ d(g(x, y) dy \wedge dz) &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) dy \right) \wedge dy \wedge dz = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dx \wedge dy \wedge dz . \end{aligned}$$

BEWEIS. Wir können jede k -Form auf einer Kartenumgebung U^φ als Summe von Ausdrücken der Form $f d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_k}$ schreiben. Für solche Formen folgt die Eindeutigkeit aus (1)–(3). Allgemeiner betrachten wir

$$\alpha = f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_k$$

für beliebige Funktionen f_0, \dots, f_k auf U^φ , dann gilt

$$\begin{aligned} d^k(f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_k) &= d^0 f_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k + f_0 d^1(d^0 f_1) \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_k \\ &\quad \mp \dots + (-1)^{k-1} f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_{k-1} \wedge d^1(d^0 f_k) = df_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Da Differentialformen nach Proposition 3.14 durch ihre Einschränkung auf Kartenumgebungen eindeutig bestimmt sind, folgt mit (4) für die Inklusionsabbildung $\iota: U^\varphi \rightarrow M$ die Eindeutigkeit global, da

$$(d^k \alpha)|_{U^\varphi} = \iota^*(d^k \alpha) = d^k(\iota^* \alpha) = d^k(\alpha|_{U^\varphi}) ,$$

und der letzte Ausdruck wird durch die obige Rechnung für die einzelnen Summanden in Proposition 3.14 (1) festgelegt.

Wir zeigen, dass die äußere Ableitung aus (3.2) die Eigenschaften (1)–(4) auf Teilmengen $V \subset \mathbb{R}^n$ erfüllt. Daraus folgern wir am Ende auch, dass d^k global existiert. Eigenschaft (1) ist offensichtlich. Zu (2) überlegen wir uns, dass

$$\begin{aligned}
& d((f_0 df_1 \wedge \cdots \wedge df_k) \wedge (g_0 dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_\ell)) \\
&= d((f_0 g_0) df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_\ell) \\
&= df_0 \cdot g_0 \cdot df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_\ell + f_0 dg_0 \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_\ell \\
&= df_0 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge g_0 dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_\ell + (-1)^k f_0 df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge dg_0 \wedge \cdots \wedge dg_\ell \\
&= (d(f_0 df_1 \wedge \cdots \wedge df_k)) \wedge (g_0 dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_\ell) \\
&\quad + (-1)^k (f_0 df_1 \wedge \cdots \wedge df_k) \wedge d(g_0 dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_\ell) .
\end{aligned}$$

Mit dem Distributivgesetz und der Darstellung aus Proposition 3.14 (1) erhalten wir (2) allgemein.

Zu (3) berechnen wir zunächst

$$d^1(df) = d^1(1 \cdot df) = d1 \wedge df = 0 ,$$

da 1 eine konstante Funktion ist. Wenn wir jetzt d^{k+1} auf den Ausdruck (3.2) anwenden, erhalten wir mit (2) eine Summe von Termen, bei denen d^1 auf je einen der Faktoren df_i angewandt wird. Da $d^1(df_i) = 0$, verschwindet $d^{k+1} \circ d^k$ auf all diesen Ausdrücken. Damit ist (3) ebenfalls gezeigt.

Seien schließlich $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen, und sei $F: V \rightarrow W$ eine glatte Abbildung. Sei zunächst $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ glatt, sei $p \in V$ und $v \in T_p V = \mathbb{R}^n$ ein Tangentialvektor. Nach der Definition des Differentials d und der Abbildung F^* gilt

$$(F^*(d^0 f))_p(v) = df_{F(p)}(d^p F(v)) = (d^p F(v))(f) = v(f \circ F) = v(F^* f) = d^0(F^* f)_p(v) ,$$

somit $d^0 \circ F^* = F^* \circ d^0$. Da Zurückholen nach Bemerkung 3.16 mit dem äußeren Produkt verträglich ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
F^*(d(f_0 df_1 \wedge \cdots \wedge df_k)) &= F^*(df_0 \wedge \cdots \wedge df_k) = F^* df_0 \wedge \cdots \wedge F^* df_k \\
&= d(f_0 \circ F) \wedge \cdots \wedge d(f_k \circ F) = d((f_0 \circ F) \cdot d(f_1 \circ F) \wedge \cdots \wedge d(f_k \circ F)) \\
&= d(F^* f_0 \cdot F^* df_1 \wedge \cdots \wedge F^* df_k) = d(F^*(f_0 df_1 \wedge \cdots \wedge df_k)) ,
\end{aligned}$$

somit gilt (4) für Abbildungen $F: V \rightarrow W$.

Es sei jetzt $\alpha \in \Omega^k(M)$. Für jede Karte $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$ stellen wir die Form $(\varphi^{-1})^* \alpha \in \Omega^k(V^\varphi)$ wie in Bemerkung 3.12 dar und legen das äußere Differential $d^k((\varphi^{-1})^* \alpha) \in \Omega^k(V^\varphi)$ durch (3.2) fest. Eigenschaft (4) gilt für Kartenwechsel $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U^\varphi \cap U^\psi) \rightarrow \psi(U^\varphi \cap U^\psi)$, also gilt

$$\begin{aligned}
\varphi^*(d^k((\varphi^{-1})^* \alpha))|_{U^\varphi \cap U^\psi} &= \varphi^*((\psi \circ \varphi^{-1})^* \circ d^k \circ (\varphi \circ \psi^{-1})^*)(\psi^{-1})^* \alpha)|_{U^\varphi \cap U^\psi} \\
&= \psi^*(d^k((\psi^{-1})^* \alpha))|_{U^\varphi \cap U^\psi} .
\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass wir $(d^k \alpha)_p$ in einer beliebigen Karte um den Punkt $p \in M$ berechnen dürfen und stets das gleiche Ergebnis erhalten. Dadurch ist $d^k \alpha$ auf M wohldefiniert. Die Eigenschaften (1)–(4) gelten auf Kartengebieten, also gelten sie auch global, und der Satz ist bewiesen. \square

Nach Eigenschaft (3) erhalten wir eine Familie von \mathbb{R} -Vektorräumen $\Omega^k(M)$ und Abbildungen $(d_M^k)_{k \in \mathbb{Z}}$,

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{d^{-1}} \Omega^0(M) \xrightarrow{d^0} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} \Omega^n(M) \xrightarrow{d^n} 0 \longrightarrow \cdots$$

mit $d^k \circ d^{k-1} = 0$ für alle k . Dabei setzen wir $\Omega^k(M) = 0$ und $d^k = 0$ für $k < 0$ und $k > n = \dim M$. Aus $d^k \circ d^{k-1} = 0$ folgt im $d^{k-1} \subset \ker d^k$ für alle k , insbesondere können wir den Quotienten $\ker d^k / \text{im } d^{k-1}$ bilden. Die folgende Definition funktioniert allgemein für Moduln über Ringen und lineare Abbildungen.

3.18. DEFINITION. Ein (*Koketten-*) *Komplex* (V^\bullet, d^\bullet) von \mathbb{k} -Vektorräumen besteht aus einer Familie $(V^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ von \mathbb{k} -Vektorräumen und einer Familie \mathbb{k} -linearer Abbildungen $d^k: V^k \rightarrow V^{k+1}$ mit $d^{k+1} \circ d^k = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Eine *Koketten-Abbildung* $f^\bullet: (V^\bullet, d^\bullet) \rightarrow (W^\bullet, e^\bullet)$ zwischen Komplexen (V^\bullet, d^\bullet) und (W^\bullet, e^\bullet) ist eine Familie \mathbb{k} -linearer Abbildungen $f^k: V^k \rightarrow W^k$ mit $f^{k+1} \circ d^k = e^k \circ f^k$.

Ein Element $\alpha \in V^k$ heißt *geschlossen*, wenn $d^k \alpha = 0$, und *exakt*, wenn es ein $\beta \in V^{k-1}$ mit $d^{k-1} \beta = \alpha$ gibt.

Die *Kohomologie* $H^\bullet(V^\bullet, d^\bullet)$ eines Komplexes (V^\bullet, d^\bullet) ist die Familie der \mathbb{k} -Vektorräume

$$H^k(V^\bullet, d^\bullet) = \ker d^k / \operatorname{im} d^{k-1} .$$

Die Äquivalenzklasse $[\alpha] \in H^k(V^\bullet, d^\bullet)$ von $\alpha \in \ker d^k$ heißt auch die *Kohomologieklass*e von α .

3.19. BEMERKUNG. Wir sammeln einige elementare Eigenschaften dieser Konstruktion.

- (1) Die \mathbb{k} -Koketten-Komplexe bilden eine Kategorie mit den Koketten-Abbildungen als Morphismen, denn die Verkettung zweier Koketten-Abbildungen

$$f^\bullet: (V^\bullet, d^\bullet) \rightarrow (W^\bullet, e^\bullet) \quad \text{und} \quad g^\bullet: (U^\bullet, c^\bullet) \rightarrow (V^\bullet, d^\bullet)$$

ist wieder eine Koketten-Abbildung, da

$$f^{k+1} \circ g^{k+1} \circ c^k = f^{k+1} \circ d^k \circ g^k = e^k \circ f^k \circ g^k .$$

- (2) Jede Koketten-Abbildung $f^\bullet: (V^\bullet, d^\bullet) \rightarrow (W^\bullet, e^\bullet)$ induziert eine Familie linearer Abbildungen $Hf^k: H^k(V^\bullet, d^\bullet) \rightarrow H^k(W^\bullet, e^\bullet)$ mit

$$Hf^k[\alpha] = [f^k \alpha] .$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert (Übung).

- (3) Die Kohomologie ist ein kovarianter Funktor von der Kategorie der Koketten-Komplexe in sich, der einem Komplex (V^\bullet, d^\bullet) den Komplex $(H^\bullet(V^\bullet, d^\bullet), 0)$ zuordnet, und jeder Koketten-Abbildung die induzierte Abbildung aus (1). Funktorialität folgt, denn für Kokettenabbildungen f^\bullet, g^\bullet wie oben und $\alpha \in \ker c^k$ gilt

$$H(f \circ g)^k[\alpha] = [f^k(g^k(\alpha))] = Hf^k[g^k(\alpha)] = (Hf^k \circ Hg^k)[\alpha] ,$$

und natürlich induziert die Identität auf V^\bullet wieder die Identität auf $H^\bullet(V^\bullet, d^\bullet)$.

3.20. DEFINITION. Der Komplex $(\Omega^\bullet(M), d^\bullet)$ heißt *de Rham-Komplex*, und seine Kohomologie $H_{\text{dR}}^\bullet(M) = H^\bullet(\Omega^\bullet(M), d^\bullet)$ die *de Rham-Kohomologie* von M .

3.21. BEMERKUNG. (1) Wir erhalten einen Funktor $(\Omega^\bullet, d^\bullet)$ von der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten und glatten Abbildungen aus Bemerkung 1.9 in die Kategorie der Koketten-Komplexe, denn nach Satz 3.17 ist $(\Omega^\bullet(M), d^\bullet)$ ein Kokettenkomplex und das Zurückholen F^* längs $F: M \rightarrow N$ eine Kokettenabbildung. Nach Bemerkung 3.16 (2) können wir den Funktor noch um das Dachprodukt erweitern. Ein Tripel der Form $(\Omega^\bullet(M), d^\bullet, \wedge)$ mit den Eigenschaften aus Proposition 3.11 und Satz 3.17 heißt auch eine (*super-*) *kommutative differentielle graduierte Algebra*.

- (2) Wenn wir noch den Funktor „Kohomologie“ aus Bemerkung 3.19 (3) nachschalten, erhalten wir den kontravarianten Funktor H_{dR}^\bullet , der jeder glatten Mannigfaltigkeit M ihre de Rham-Kohomologie und jeder C^∞ -Abbildung $F: N \rightarrow M$ die induzierte Abbildung $F^* = H(F^\bullet)^\bullet: H_{\text{dR}}^\bullet(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^\bullet(N)$ mit

$$F^*[\alpha] = [F^* \alpha]$$

zuordnet.

- (3) Nach Satz 3.17 (2) erhalten wir auch eine Familie von Dachprodukten $\wedge: H_{\text{dR}}^k(M) \times H_{\text{dR}}^\ell(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^{k+\ell}(M)$. Dieses Produkt ist wohldefiniert (Übung) und immer noch assoziativ und graduiert kommutativ wie in Proposition 3.11.

Wir geben jetzt eine koordinatenunabhängige Beschreibung der äußeren Ableitung.

3.22. SATZ (Cartan-Formel). Sei $\alpha \in \Omega^k(M)$ und $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, dann gilt

$$d\alpha(X_0, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i \left(\alpha(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k) \right) + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k).$$

3.23. BEISPIEL. Normalerweise wird man die de Rham-Kohomologie nicht mit Hilfe von Definition 3.20 ausrechnen. Wir schauen uns hier zwei Beispiele an, in denen das möglich ist.

- (1) Wir betrachten $M = \mathbb{R}$ mit der Identität als Karte. Dann gilt

$$\Omega^0(\mathbb{R}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \quad \Omega^1(\mathbb{R}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) dx \quad \text{und} \quad d_0 f = df = f' dx.$$

Da $d_{-1} = 0$, gilt $H_{\text{dR}}^0(\mathbb{R}) = \ker d_0$, und $f' = 0$ gilt genau dann, wenn f konstant ist. Also enthält $H_{\text{dR}}^0(\mathbb{R})$ genau die konstanten Funktionen.

Da $d_1 = 0$, gilt $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{R}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) dx / \text{im } d_0$. Sei $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, und sei F eine Stammfunktion, das heißt, es gelte $F' = f$. Dann folgt $dF = f dx$, somit $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) dx = \text{im } d_0$. Insgesamt also

$$H_{\text{dR}}^k(\mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } k = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (2) Wir betrachten $S^1 = \{ e^{it} \mid t \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{C}$. Für jedes offene Intervall (a, b) der Länge $b - a < \pi$ liefert das Invertieren der Abbildung $t \mapsto e^{it}$ eine Karte mit Werten in (a, b) . Alle Kartenwechsel verschieben ein Teilintervall um ein Vielfaches von 2π . Wir können Funktionen und 1-Formen mit der invertierten Karte $t \mapsto e^{it}$ auf die Intervalle (a, b) zurückholen und zu Funktionen beziehungsweise 1-Formen auf \mathbb{R} zusammensetzen, die 2π -periodisch sind, also

$$\begin{aligned} \Omega^0(S^1) &\cong \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid f(t + 2\pi k) = f(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \}, \\ \Omega^1(S^1) &\cong \{ f dt \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid f(t + 2\pi k) = f(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \}, \end{aligned}$$

und $df = f' dt$ wie oben. Da $f' = 0$ genau dann gilt, wenn f konstant ist, und konstante Funktionen periodisch sind, enthält $H^0(S^1)$ wieder genau die konstanten Funktionen.

Sei jetzt f periodisch und F eine Stammfunktion von f , so dass $dF = f dt$. Dann ist F genau dann periodisch, wenn

$$0 = F(t + 2\pi) - F(t) = \int_t^{t+2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

Im letzten Schritt nutzen wir aus, dass f periodisch ist, um das Integrationsintervall an einem Vielfachen von 2π zu zerschneiden, beide Stücke um Vielfache von 2π in das Intervall $[0, 2\pi]$ zu verschieben, und wieder zusammenzusetzen, ohne den Wert des Integrals zu verändern. Somit gilt

$$f dt \in \text{im}(d_0) \iff \int_0^{2\pi} f(x) dx = 0.$$

Sobald wir also von einer gegebenen Form $f dt$ ihren „Mittelwert“ abziehen, erhalten wir eine exakte Form. Als Repräsentant von Kohomologieklassen in $H_{\text{dR}}^1(S^1)$ können wir konstante Formen $c dt$ wählen. Wir erhalten

$$H_{\text{dR}}^k(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } k = 0, 1 \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (3) Die Abbildung $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ mit $x \mapsto e^{ix}$ liefert eine Abbildung $\pi^*: \Omega^\bullet(S^1) \rightarrow \Omega^\bullet(\mathbb{R})$. Die induzierte Abbildung auf der de Rham-Kohomologie ist ein Isomorphismus auf H_{dR}^0 . Auf H_{dR}^1 ist es die Nullabbildung, da ihr Ziel der Nullvektorraum ist.

Für beide Mannigfaltigkeiten sind zwar die Räume $\Omega^k(M)$ für $k = 0, 1$ sehr groß, die tatsächlichen Kohomologie-Vektorräume aber endlich-dimensional. Wir können die de Rham-Kohomologie benutzen, um \mathbb{R} und S^1 voneinander zu unterscheiden, denn $H^1 \text{dR}(S^1) \not\cong H_{\text{dR}}^1(\mathbb{R})$.

3.4. Homotopie-Invarianz

Wir wollen zeigen, dass de Rham-Kohomologie die Eilenberg-Steenrod-Axiome einer Kohomologietheorie erfüllt. Ein besserer Term wäre „Kohomologiefunktor“, aber der Begriff „Kohomologietheorie“ hat sich eingebürgert. Mit Hilfe dieser Axiome kann man viele Berechnungen wesentlich leichter durchführen als mit der Definition 3.20. Aus den Axiomen kann man auch schließen, dass de Rham-Kohomologietheorie auf der Kategorie aller Mannigfaltigkeiten, die zu endlichen CW-Komplexen isomorph sind, mit jeder anderen Kohomologietheorie mit \mathbb{R} -Koeffizienten übereinstimmt.

Wir beginnen mit Homotopieinvarianz. Dazu benötigen wir einige Vorüberlegungen.

3.24. PROPOSITION UND DEFINITION. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann gibt es genau einen $C^\infty(M)$ -bilinearen Operator $\iota: \mathfrak{X}(M) \times \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$ mit folgenden Eigenschaften.*

$$(\iota_X \alpha)(X_2, \dots, X_k) = \alpha(X, X_2, \dots, X_k) \quad \text{falls } k \geq 1, \quad (1)$$

$$\iota_X(\alpha \wedge \beta) = (\iota_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \iota_X \beta, \quad (2)$$

$$\iota_X^2 \alpha = 0 \quad (3)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, $X, X_2, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^\bullet(M)$. Dieser Operator heißt Einsetzung.

Man beachte, dass ι_X wegen (2) und (3) ganz ähnliche Eigenschaften wie die äußere Ableitung hat, obwohl hier gar nicht abgeleitet wird.

BEWEISSKIZZE. Wir definieren ι durch (1) ($\iota_X f = 0$ gilt, da $\Omega^{-1}(M) = 0$), folgern (2) aus der Definition 3.10 des Dachprodukts und (3) daraus, dass α alternierend ist. \square

3.25. DEFINITION. Wir definieren die *Lie-Ableitung* $\mathcal{L}: \mathfrak{X}(M) \times \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$ auf Differentialformen über einer glatten Mannigfaltigkeit M durch

$$\mathcal{L}_X \alpha = d(\iota_X \alpha) + \iota_X(d\alpha).$$

Das ist nicht die übliche Definition. Tatsächlich definiert man die Lie-Ableitung üblicherweise durch die Formel (1) unten. Mit einer analogen Formel erhält man eine Lie-Ableitung für beliebige Räume von Tensorfeldern. Das besondere an der Lie-Ableitung \mathcal{L}_X ist, dass das Vektorfeld X immer mit abgeleitet wird, siehe Eigenschaft (4) unten.

3.26. PROPOSITION. *Die Lie-Ableitung hat die folgenden Eigenschaften.*

$$X(\alpha(X_1, \dots, X_k)) = (\mathcal{L}_X \alpha)(X_1, \dots, X_k) + \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \alpha \left([X, X_i], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k \right) \quad (1)$$

$$\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X \beta \quad (2)$$

$$\mathcal{L}_{[X, Y]} \alpha = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y \alpha) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X \alpha) \quad (3)$$

$$\mathcal{L}_{fX} \alpha = f cL_X \alpha + df \wedge \iota_X \alpha \quad (4)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, $X, Y, X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^\bullet(M)$.

Die Eigenschaften (1) und (2) lassen sich als Produktregeln verstehen, und Eigenschaft (3) als eine Art Jacobi-Identität oder als Darstellungseigenschaft.

BEWEIS. Für (1) benutzen wir die Cartan-Formel aus Satz (3.22). Sei $\alpha \in \Omega^k(M)$, $X = X_0$ und $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{X_0} \alpha)(X_1, \dots, X_k) &= ((d \circ \iota_{X_0} + \iota_{X_0} \circ d)\alpha)(X_1, \dots, X_k) \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} X_i \left(\alpha(X_0, X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k) \right) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \alpha \left(X_0, [X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k \right) \\ &\quad + \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i \left(\alpha(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k) \right) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \alpha \left([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k \right) \\ &= X_0 \left(\alpha(X_1, \dots, X_k) \right) + \sum_{j=1}^k (-1)^j \alpha \left([X_0, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k \right). \end{aligned}$$

Der Beweis von (2) ist rein formal und beruht auf den Produktregeln für ι_X und d . Für $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^\bullet(M)$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) &= (d \circ \iota_X + \iota_X \circ d)(\alpha \wedge \beta) \\ &= d((\iota_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \iota_X \beta) + \iota_X((d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta) \\ &= d(\iota_X \alpha) + (-1)^{k-1} (\iota_X \alpha) \wedge d\beta + (-1)^k (d\alpha) \wedge \iota_X \beta + \alpha \wedge d(\iota_X \beta) \\ &\quad + \iota_X(d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{k+1} (d\alpha) \wedge \iota_X \beta + (-1)^k (\iota_X \alpha) \wedge d\beta + \alpha \wedge \iota_X(d\beta) \\ &= (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X \beta. \end{aligned}$$

Mit einem entsprechenden Argument können wir eine Produktregel für den Operator $\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X$ beweisen. Dann reicht es, Eigenschaft (3) für Formen vom Typ f und df für $f \in C^\infty(M)$ zu überprüfen (Übung).

Schließlich folgt (4), da

$$\mathcal{L}_{fX} \alpha = \iota_{fX}(d\alpha) + d(\iota_{fX} \alpha) = f \iota_X(d\alpha) + d(f \iota_X \alpha) = f \mathcal{L}_X \alpha + df \wedge \iota_X \alpha. \quad \square$$

3.27. DEFINITION. Es seien (V^\bullet, d^\bullet) und (W^\bullet, e^\bullet) Kokettenkomplexe über \mathbb{k} und $f^\bullet, g^\bullet: V^\bullet \rightarrow W^\bullet$ Kokettenabbildungen. Eine *Koketten-Homotopie* zwischen f^\bullet und g^\bullet ist eine Familie \mathbb{k} -linearer Abbildungen $h^k: V^k \rightarrow W^{k-1}$, so dass für alle k gilt

$$e^{k-1} \circ h^k + h^{k+1} \circ d^k = g^k - f^k.$$

3.28. BEMERKUNG. Sei h^\bullet eine Koketten-Homotopie zwischen $f^\bullet, g^\bullet: V^\bullet \rightarrow W^\bullet$. Dann induzieren f^\bullet und g^\bullet die gleiche Abbildung zwischen den Kohomologiegruppen der obigen Kokettenkomplexe. Denn sei $\alpha \in V^k$ geschlossen, dann ist

$$g^k(\alpha) - f^k(\alpha) = e^{k-1}(h^k(\alpha)) + h^{k+1}(\underbrace{d^k \alpha}_{=0})$$

exakt, somit folgt $[f^k \alpha] = [g^k \alpha]$.

Wir hatten den Begriff der Homotopie von Abbildungen $f, g: M \rightarrow N$ in Definition 2.8 eingeführt. Wir schreiben im Folgenden I für das Einheitsintervall $[0, 1]$. Es sei t Koordinate von I in $M \times I$ und $\frac{\partial}{\partial t}$ das zugehörige Koordinatenvektorfeld auf $M \times I$.

3.29. LEMMA. *Es sei $H: M \times I \rightarrow N$ eine Homotopie zwischen den Abbildungen $F, G: M \rightarrow N$. Dann existiert eine Koketten-Homotopie h^\bullet zwischen F^* und G^* , die für $\alpha \in \Omega^\bullet(N)$ gegeben wird durch*

$$\int_0^1 \iota_{\frac{\partial}{\partial t}}(H^* \alpha) dt.$$

BEWEIS. Um das Integral zu beschreiben, sei $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$ eine Karte von M , dann ist $\varphi \times \text{id}: U^\varphi \times [0, 1] \rightarrow V^\varphi \times [0, 1]$ eine Karte von $M \times [0, 1]$. Wir stellen $\iota_{\frac{\partial}{\partial t}}(H^* \alpha)$ bezüglich dieser Karte dar, integrieren die Koeffizientenfunktionen aus Proposition 3.14 (1) und erhalten Koeffizientenfunktionen auf U^φ . Man überprüft, dass diese zu einer wohldefinierten Form $h^k \alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ gehören. Dabei wollen wir uns wieder nicht daran stören, dass $V^\varphi \times [0, 1]$ ein Gebiet mit „Kanten“ ist, falls $\partial M \neq \emptyset$.

Für die Koordinatenvektorfelder $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ gilt insbesondere

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right] = 0.$$

Aus Proposition 3.26 (1) folgt

$$\left(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}}(H^* \alpha) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_k}} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(H^* \alpha \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_k}} \right) \right).$$

Da I kompakt ist und alle Formen glatt sind, vertauschen Ableitungen in Richtung von M mit Integration über I . Nach der Cartan-Formel enthält $(d\beta)\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_k}}\right)$ nur Ableitungen in Richtung von M , also gilt

$$\int_0^1 \left(d\left(\iota_{\frac{\partial}{\partial t}}(H^* \alpha)\right) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_k}} \right) dt = \left(d \int_0^1 \iota_{\frac{\partial}{\partial t}}(H^* \alpha) dt \right) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_k}} \right).$$

Damit folgt das Lemma aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und Definition 3.25, denn

$$\begin{aligned}
(G^* \alpha - F^* \alpha) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_k}} \right) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left((H^* \alpha) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_k}} \right) \right) dt \\
&= \int_0^1 (\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} (H^* \alpha)) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_k}} \right) dt \\
&= \int_0^1 \left((d \circ \iota_{\frac{\partial}{\partial t}} + \iota_{\frac{\partial}{\partial t}} \circ d) (H^* \alpha) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_k}} \right) dt \\
&= \left(d \int_0^1 \iota_{\frac{\partial}{\partial t}} (H^* \alpha) dt + \int_0^1 \iota_{\frac{\partial}{\partial t}} (H^* (d\alpha)) dt \right) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_k}} \right) \\
&= \left(d_M^{k-1} (h^k \alpha) + h^{k+1} (d_N^k \alpha) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_k}} \right). \quad \square
\end{aligned}$$

Aus diesem technischen Lemma können wir einige interessante Schlussfolgerungen ziehen.

3.30. DEFINITION. Eine glatte Abbildung $F: M \rightarrow N$ heißt *Homotopieäquivalenz*, wenn es eine glatte Abbildung $G: N \rightarrow M$ gibt, so dass $G \circ F$ zu id_M und $F \circ G$ zu id_N homotop ist. In diesem Falle heißt G eine *Homotopieinverse* von F , und M und N heißen *homotopieäquivalent*. Eine Mannigfaltigkeit, die homotopieäquivalent zu einem Punkt ist, heißt *zusammenziehbar*.

3.31. FOLGERUNG (Homotopie-Invarianz). *Homotope Abbildungen induzieren die gleichen Abbildungen in der de Rham-Kohomologie. Homotopieäquivalenzen induzieren Isomorphismen der de Rham-Kohomologien.*

BEWEIS. Die erste Aussage folgt aus Bemerkung 3.28. Sei jetzt $F: M \rightarrow N$ eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinverse $K: N \rightarrow M$. Wegen der ersten Aussage gilt

$$F^* \circ K^* = (K \circ F)^* = \text{id}_{\Omega^\bullet(M)} \quad \text{und} \quad K^* \circ F^* = (F \circ K)^* = \text{id}_{\Omega^\bullet(N)}. \quad \square$$

Damit können wir jetzt Beispiel 3.23 (1) verallgemeinern. Der de Rham-Komplex eines Punktes enthält nur einen nichttrivialen Vektorraum $\Omega^0(\text{pt}) \cong \mathbb{R}$. Daher verschwindet das Differential d_{pt}^k für alle k , und es folgt $H_{\text{dR}}^\bullet(\text{pt}) \cong \Omega^\bullet(\text{pt})$.

3.32. FOLGERUNG (Poincaré-Lemma). *Es sei M zusammenziehbar, dann gilt*

$$H_{\text{dR}}^k(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } k = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3.5. Relative De Rham-Kohomologie

Wir werden sehen, dass es nicht ausreicht, die de Rham-Kohomologie einzelner Mannigfaltigkeiten zu betrachten. Einige der Eilenberg-Steenrod-Axiome sind für Paare formuliert, die wir daher jetzt betrachten wollen.

3.33. DEFINITION. Es sei $A \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit, dann nennen wir (M, A) ein *Paar von Mannigfaltigkeiten*. Eine *Abbildung von Paaren* $F: (M, A) \rightarrow (N, B)$ ist eine glatte Abbildung $F: M \rightarrow N$, so dass $F(A) \subset B$.

Eine Homotopie von Abbildungen von Paaren $F, G: (M, A) \rightarrow (N, B)$ ist eine Homotopie $H: M \times I \rightarrow N$ zwischen F und $G: M \rightarrow N$ mit der Eigenschaft, dass $H(A \times I) \subset B$.

Man überlegt sich, dass Paare von Mannigfaltigkeiten wieder eine Kategorie bilden. Wir identifizieren das Paar (M, \emptyset) mit der Mannigfaltigkeit M und erhalten natürliche Abbildungen

$$A \xrightarrow{\iota} M = (M, \emptyset) \xrightarrow{q} (M, A).$$

3.34. DEFINITION. Wir definieren den *relativen de Rham-Komplex* $(\Omega^\bullet(M, A), d^\bullet)$ des Paares (M, A) mit Inklusionsabbildung $\iota: A \rightarrow M$ durch

$$\Omega^k(M, A) = \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(A) \quad \text{und} \quad d^k = \begin{pmatrix} d^k & 0 \\ \iota^* & -d^{k-1} \end{pmatrix}$$

und nennen $H_{\text{dR}}^\bullet(M, A) = H^\bullet(\Omega^\bullet(M, A), d^\bullet)$ die *relative de Rham-Kohomologie* des Paares (M, A)

3.35. BEMERKUNG. Wir überzeugen uns, dass $(\Omega^\bullet(M, A), d^\bullet)$ ein Komplex ist, und sammeln einige Eigenschaften. Tatsächlich ist die relative de-Rham-Kohomologie eines Paares (M, A) ein „algebraischer Ersatz“ für die (reduzierte) Kohomologie des Quotientenraumes M/A , bei dem ganz A auf einen Punkt zusammengezogen wird. Dieser Raum ist aber nur äußerst selten eine Mannigfaltigkeit (er erfüllt noch nicht einmal das erste Trennungsaxiom, falls $A \subset M$ nicht abgeschlossen ist), weshalb die obige Konstruktion nötig ist.

(1) Der relative de Rham-Komplex ist ein Koketten-Komplex, denn

$$\begin{pmatrix} d^{k+1} & 0 \\ \iota^* & -d^{k-1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} d^k & 0 \\ \iota^* & -d^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{k+1} \circ d^k & 0 \\ \iota^* \circ d^k - d^{k-1} \circ \iota^* & d^k \circ d^{k-1} \end{pmatrix} = 0.$$

Eine relative k -Form $(\alpha, \beta) \in \Omega^k(M, A)$ ist geschlossen, wenn $d^k \alpha = 0$ auf M gilt, und wenn $\alpha|_A = \iota^* \alpha = d^{k-1} \beta$ exakt ist. Das bedeutet salopp gesagt zum einen, dass die Kohomologieklassse $[\alpha]$ nach Einschränken auf A verschwindet, zum anderen wissen wir dank β auch, warum. Es ist wichtig, dass wir uns β merken — eine andere Form $\gamma \neq \beta$ mit $d\gamma = \alpha$ liefert uns eine andere geschlossene relative Form $(\alpha, \gamma) \neq (\alpha, \beta)$.

(2) Eine Abbildung $F: (M, A) \rightarrow (N, B)$ von Paaren induziert durch Zurückziehen eine Koketten-Abbildung $F^*: \Omega^\bullet(N, B) \rightarrow \Omega^\bullet(M, A)$ und daher auch eine Abbildung zwischen den relativen de Rham-Kohomologien, denn

$$\begin{pmatrix} d^k & 0 \\ \iota_A^* & -d^{k-1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} F^* & 0 \\ 0 & (F|_A)^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^* & 0 \\ 0 & (F|_A)^* \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} d^k & 0 \\ \iota_B^* & -d^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Also erhalten wir auch eine zugehörige Abbildung

$$F^*: \Omega^\bullet(N, B) \longrightarrow \Omega^\bullet(M, A).$$

(3) Wir hatten (M, \emptyset) mit M identifiziert. Da $\Omega^\bullet(\emptyset) = 0$, können wir auch $\Omega^\bullet(M, \emptyset) = \Omega^\bullet(M) \oplus 0$ mit $\Omega^\bullet(M)$ identifizieren. Insbesondere erhalten wir mit (2) eine Koketten-Abbildung

$$q^*: (\Omega^\bullet(M, A), d^\bullet) \rightarrow (\Omega^\bullet(M, \emptyset), d^\bullet) = (\Omega^\bullet(M), d^\bullet).$$

(4) Die Inklusionsabbildung $\delta: (\Omega^{\bullet-1}(A), -d^{\bullet-1}) \rightarrow (\Omega^\bullet(M, A), d^\bullet)$ ist ebenfalls eine Koketten-Abbildung, denn

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \text{id} \end{pmatrix} \circ (-d^{k-1}) = \begin{pmatrix} d^k & 0 \\ \iota_B^* & -d^{k-1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ \text{id} \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten eine *kurze exakte Sequenz* von Koketten-Komplexen

$$0 \longrightarrow \Omega^{\bullet-1}(A) \xrightarrow{\delta} \Omega^\bullet(M, A) \xrightarrow{q^*} \Omega^\bullet(M) \longrightarrow 0.$$

Das bedeutet, die Abbildung δ ist injektiv, die Abbildung q^* surjektiv, und $\ker(q^*) = \text{im}(\delta)$.

Man überzeugt sich leicht, dass für ein Abbildung $F: (M, A) \rightarrow (N, B)$ von Paaren das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^{k-1}(B) & \xrightarrow{\delta} & \Omega^k(N, B) & \xrightarrow{q^*} & \Omega^k(N) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow F^* & & \downarrow F^* & & \downarrow F^* \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^{k-1}(A) & \xrightarrow{\delta} & \Omega^k(M, A) & \xrightarrow{q^*} & \Omega^k(A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

kommutiert. Insgesamt erhalten wir einen Funktor von der Kategorie der Paare in die Kategorie der kurzen exakten Sequenzen von Kokettenabbildungen wie in (2).

Der Begriff der exakten Sequenz ist ebenfalls wichtig für Kohomologie. Man kann ihn in jeder abelschen Kategorie formulieren; diesen Begriff wiederum wollen wir hier nicht einführen.

3.36. DEFINITION. Eine Sequenz von linearen Abbildungen $(f_k: V_k \rightarrow V_{k+1})_{k \in \mathbb{Z}}$ heißt *exakt*, wenn $\ker(f_{k+1}) = \operatorname{im}(f_k)$ für alle k gilt. Eine Sequenz von Koketten-Abbildungen heißt *exakt*, wenn die zugrundeliegende Sequenz von Moduln oder Vektorräumen exakt ist. Eine *kurze exakte Sequenz* ist eine Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow V' \xrightarrow{j} V \xrightarrow{q} V'' \longrightarrow 0.$$

Also ist eine exakte Sequenz das gleiche wie ein Kokettenkomplex mit verschwindender Kohomologie (azyklischer Komplex). Eine kurze exakte Sequenz hat links und rechts außen jeweils die Nullabbildung, daher gilt

$$0 = \ker j, \quad \operatorname{im} j = \ker q, \quad \text{und} \quad \operatorname{im} q = V''.$$

Insbesondere ist j injektiv und q surjektiv, genau wie in (4) oben. Oft betrachtet man exakte Sequenzen von Kokettenkomplexen und von Kohomologiegruppen, wie im folgenden Lemma.

3.37. LEMMA (Schlangenlemma). *Zu kurzen exakten Sequenzen*

$$0 \longrightarrow (V'^{\bullet}, d') \xrightarrow{f^{\bullet}} (V^{\bullet}, d) \xrightarrow{g^{\bullet}} (V''^{\bullet}, d'') \longrightarrow 0$$

lassen sich in natürlicher Weise lineare Abbildungen $v^k: H^k(V''^{\bullet}, d'') \rightarrow H^{k+1}(V'^{\bullet}, d')$ konstruieren, so dass die Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^k(V'^{\bullet}, d') & \xrightarrow{Hf^k} & H^k(V^{\bullet}, d) & \xrightarrow{Hg^k} & H^k(V''^{\bullet}, d'') \xrightarrow{v^k} \\ & & \xrightarrow{v^k} & H^{k+1}(V'^{\bullet}, d') & \xrightarrow{Hf^{k+1}} & H^{k+1}(V^{\bullet}, d) & \xrightarrow{Hg^{k+1}} & H^{k+1}(V''^{\bullet}, d'') \longrightarrow \dots \end{array}$$

exakt sind.

Die Abbildungen v^k heißen auch *Verbindungshomomorphismen*. „Natürlich“ bedeutet, dass man aus einem kommutativen Diagramm von Kokettenkomplexen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (V'^{\bullet}, d') & \longrightarrow & (V^{\bullet}, d) & \longrightarrow & (V''^{\bullet}, d'') \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (W'^{\bullet}, d') & \longrightarrow & (W^{\bullet}, d) & \longrightarrow & (W''^{\bullet}, d'') \longrightarrow 0 \end{array}$$

ein entsprechendes kommutatives Diagramm von Kohomologiegruppen erhält:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^k(V''^{\bullet}, d'') & \xrightarrow{v^k} & H^{k+1}(V'^{\bullet}, d') & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H^k(W''^{\bullet}, d'') & \xrightarrow{v^k} & H^{k+1}(W'^{\bullet}, d') & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

BEWEISSKIZZE. Zur Konstruktion von v^k betrachten wir einen Ausschnitt aus der kurzen exakten Sequenz von Komplexen

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & V'^k & \xrightarrow{f^k} & V^k & \xrightarrow{g^k} & V''^k \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow d'^k & & \downarrow d^k & & \downarrow d''^k \\
0 & \longrightarrow & V'^{k+1} & \xrightarrow{f^{k+1}} & V^{k+1} & \xrightarrow{g^{k+1}} & V''^{k+1} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow
\end{array}$$

Es sei $v'' \in \ker d''^k \subset V''^k$. Da g^k surjektiv ist, existiert $v \in V^k$ mit $g^k(v) = v''$. Aus Kommutativität folgt $g^{k+1}(d^k v) = d''^k(g^k v) = 0$, also $d^k v \in \ker(g^{k+1}) = \text{im}(f^{k+1})$. Da f^{k+1} injektiv ist, existiert ein eindeutiges $v' \in V'^{k+1}$ mit $f^{k+1}(v') = d^k v$. Mit ähnlichen Argumenten zeigt man, dass $d''^{k+1}v' = 0$, und dass die Kohomologieklassen $[v']$ nur von der Kohomologieklassen $[v'']$, aber nicht von v'' und v abhängt. Dann definiert man $v^k[v''] = [v']$.

Es bleibt zu zeigen, dass die resultierende Kohomologiesequenz exakt ist, und dass die Konstruktion von v^k natürlich ist. Dazu sind viele einzelne Beweisschnitte nötig, die aber nicht schwieriger sind als die obige Konstruktion. \square

3.38. FOLGERUNG (Exakte Sequenz eines Paares). *De Rham-Kohomologie liefert einen Funktor von der Kategorie der Paare von Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der langen exakten Sequenzen, der Form*

$$\dots \longrightarrow H_{\text{dR}}^{k-1}(A) \xrightarrow{\delta^{k-1}} H_{\text{dR}}^k(M, A) \xrightarrow{q^*} H_{\text{dR}}^k(M) \xrightarrow{\iota^*} H_{\text{dR}}^k(A) \longrightarrow \dots$$

Die Abbildungen q^* und δ kennen wir bereits aus Bemerkung 3.35 (4). Tatsächlich ist die Abbildung ι^* hier der Verbindungshomomorphismus v aus dem Schlangenlemma. Man beachte, dass im Komplex $(\Omega^\bullet(A), -d_A^\bullet)$ das Differential das falsche Vorzeichen trägt. Das ändert aber nichts an der Kohomologie, und auch nichts an der Natürlichkeit der obigen Sequenz.

BEWEIS. Wir wenden das Schlangenlemma 3.37 auf die kurze exakte Sequenz von Kokettenkomplexen aus Bemerkung 3.35 (4) an. Um den Verbindungshomomorphismus v^k zu bestimmen, sei $[\alpha] \in H^k \text{dR}(M)$, insbesondere ist $\alpha \in \Omega^k(M)$ geschlossen. Wir dürfen ein beliebiges Urbild unter q^* wählen und nehmen $(\alpha, 0) \in \Omega^k(M, A)$. Es gilt $d^k(\alpha, 0) = (d^k \alpha, \alpha|_A) = (0, \alpha|_A)$, da $d^k \alpha = 0$. Als Urbild in $\Omega^{k-1}(A)$ erhalten wir $\alpha|_A$, also gilt $v^k[\alpha] = [\iota^* \alpha] = \iota^*[\alpha]$ wie behauptet.

Die Abbildungen ι^* , q^* und δ^k sind alle natürlich unter Abbildungen von Paaren $F: (M, A) \rightarrow (N, B)$. Denn da F eine Abbildung von Paaren ist, gilt $\iota_B \circ F = F \circ \iota_A$, also

$$\iota_A^* \circ F^* = F^* \circ \iota_B^*$$

nach Bemerkung 3.16 (1). Da q^* mit Hilfe der Abbildung $(M, \emptyset) \rightarrow (M, A)$ definiert wurde, folgt analog auch

$$q_M^* \circ F^* = F^* \circ q_N^* .$$

Die Natürlichkeit von δ^k ergibt sich ebenfalls direkt aus der Konstruktion in Bemerkung 3.35 (4). Diese drei Aussagen zusammen zeigen, dass die lange exakte Kohomologiesequenz tatsächlich ein Funktor auf der Kategorie der Paare ist. \square

Folgerung 3.38 ist eines der Eilenberg-Steenrod-Axiome. Ein weiteres betrifft die Homotopieinvarianz der relativen de Rham-Kohomologie. Eine Homotopie zwischen Abbildungen von Paaren ist selbst eine Abbildung von Paaren $H: (M \times I, A \times I) \rightarrow (N, B)$.

3.39. PROPOSITION. *Homotope Abbildungen von Paaren induzieren gleiche Abbildungen in der relativen de Rham-Kohomologie.*

BEWEIS. Es sei $H: (M \times I, A \times I) \rightarrow (N, B)$ eine Homotopie zwischen $F: (M, A) \rightarrow (N, B)$. Wir konstruieren Abbildungen $h^k: \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ und $j^k: \Omega^k(B) \rightarrow \Omega^{k-1}(A)$ wie in Lemma (3.29) durch

$$h^k \alpha = \int_0^1 \iota_{\frac{\partial}{\partial t}}(H^* \alpha) dt \quad \text{und} \quad j^k \beta = \int_0^1 \iota_{\frac{\partial}{\partial t}}((H|_{A \times I})^* \alpha) dt$$

für $\alpha \in \Omega^k(N)$ und $\beta \in \Omega^k(B)$. Seien $\iota_A: A \rightarrow M$ und $\iota_B: B \rightarrow N$ die Inklusionsabbildungen, dann gilt

$$\iota_A^* \circ h^k = j^k \circ \iota_B^* .$$

Wir definieren jetzt eine Koketten-Homotopie zwischen den relativen Abbildungen F^* und G^* aus Bemerkung 3.35 (2) durch

$$\begin{pmatrix} h^k & 0 \\ 0 & -j^{k-1} \end{pmatrix} : \Omega^k(N, B) \longrightarrow \Omega^{k-1}(N, A) .$$

In Analogie zu Lemma 3.29 gilt

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} d_M^{k-1} & 0 \\ \iota_A^* & -d_A^{k-2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} h^k & 0 \\ 0 & -j^{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h^{k+1} & 0 \\ 0 & -j^k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} d_N^k & 0 \\ \iota_B^* & d_B^{k-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_M^{k-1} \circ h^k + h^{k+1} \circ d_N^k & 0 \\ \iota_A^* \circ h^k - j^k \circ \iota_B^* & d_A^{k-2} \circ j^{k-1} + j^k \circ d_B^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^* & 0 \\ 0 & (G|_A)^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F^* & 0 \\ 0 & (F|_A)^* \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Hieraus folgt wie im Beweis von Folgerung 3.31 die Behauptung. \square

3.40. SATZ (Ausschneidung). *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, und $A, B \subset M$ seien offene Teilmengen, so dass $M = A \cup B$. Dann induziert die relative Inklusionsabbildung $(B, A \cap B) \rightarrow (M, A)$ einen Isomorphismus*

$$H_{\text{dR}}^\bullet(M, A) \cong H_{\text{dR}}^\bullet(B, A \cap B) .$$

BEWEIS. Wie im Beweis des Transversalitätssatzes 2.14 konstruieren wir zunächst eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{supp}(f) \subset B$ und $\text{supp}(1-f) \subset A$. Anschließend definieren wir eine Abbildung $\Omega^\bullet(B, A \cap B) \rightarrow \Omega^\bullet(M, A)$ durch

$$\begin{pmatrix} f & df \\ 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \cdot \alpha + df \wedge \beta \\ f \cdot \beta \end{pmatrix}$$

wobei das Ergebnis auf $M \subset B$ durch 0 fortgesetzt wird. Es handelt sich um eine Koketten-Abbildung, denn

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ \iota_A^* & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & df \\ 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df \wedge \alpha + f d\alpha - df \wedge d\beta \\ f \cdot \alpha|_A - f d\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & df \\ 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 0 \\ \iota_A^* & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Um zu zeigen, dass die obige Abbildung $\begin{pmatrix} f & df \\ 0 & f \end{pmatrix}$ die Umkehrung der Einschränkungabbildung in der relativen de Rham-Kohomologie liefert, konstruieren wir eine Koketten-Homotopie

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \Omega^\bullet(M) \longrightarrow \Omega^{\bullet-1}(M) .$$

Dabei nutzen wir $\text{supp}(1-f) \subset A$ aus, um $(1-f)\beta$ von A auf ganz M durch 0 fortzusetzen. Es bezeichnen $\iota_B: B \hookrightarrow M$ und $\iota_{A \cap B}: A \cap B \hookrightarrow A$ die Inklusionsabbildungen, dann gilt

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} d_M & 0 \\ \iota_A^* & -d_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1-f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1-f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_M & 0 \\ \iota_A^* & -d_A \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_M((1-f)\beta) + (1-f)(\iota_A^*\alpha - d_A\beta) \\ (1-f)\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-f)\alpha - df \wedge \beta \\ (1-f)\beta \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f & df \\ 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \iota_B^* & 0 \\ 0 & \iota_{A \cap B}^* \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Indem wir $\begin{pmatrix} 0 & 1-f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ auf $\Omega^\bullet(B, A \cap B)$ einschränken, erhalten wir analog eine Koketten-Homotopie zwischen der umgekehrten Verkettung

$$\begin{pmatrix} \iota_B^* & 0 \\ 0 & \iota_{A \cap B}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & df \\ 0 & f \end{pmatrix} : \Omega^\bullet(B, A \cap B) \longrightarrow \Omega^\bullet(B, A \cap B)$$

und der Identität auf $\Omega^\bullet(B, A \cap B)$. Unsere Behauptungen folgen aus Bemerkung 3.28. \square

3.41. FOLGERUNG (Mayer-Vietoris-Sequenz). *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, und $A, B \subset M$ seien offene Teilmengen, so dass $M = A \cup B$, und es seien $j_A: A \cap B \rightarrow A$ und $j_B: A \cap B \rightarrow B$ die Inklusionsabbildungen. Dann gibt es eine natürliche exakte Sequenz der Form*

$$\cdots \longrightarrow H_{\text{dR}}^k(M) \xrightarrow{(\iota_A^*, \iota_B^*)} H_{\text{dR}}^k(A) \oplus H_{\text{dR}}^k(B) \xrightarrow{j_A^* - j_B^*} H_{\text{dR}}^k(A \cap B) \longrightarrow H_{\text{dR}}^{k+1}(M) \longrightarrow \cdots$$

BEWEIS. Diese Proposition folgt rein algebraisch aus dem Ausschneidungssatz 3.40. Dazu betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{\text{dR}}^k(M, A) & \xrightarrow{q^*} & H_{\text{dR}}^k(M) & \xrightarrow{\iota_A^*} & H_{\text{dR}}^k(A) & \xrightarrow{\delta} & H_{\text{dR}}^{k+1}(M, A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \cong \downarrow & & \downarrow \iota_B^* & & \downarrow j_A^* & & \downarrow \cong & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{\text{dR}}^k(B, A \cap B) & \xrightarrow{q^*} & H_{\text{dR}}^k(B) & \xrightarrow{j_B^*} & H_{\text{dR}}^k(A \cap B) & \xrightarrow{\delta} & H_{\text{dR}}^{k+1}(B, A \cap B) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Wir erhalten den Verbindungshomomorphismus als Verkettung der Abbildungen

$$H_{\text{dR}}^k(A \cap B) \xrightarrow{\delta} H_{\text{dR}}^{k+1}(B, A \cap B) \xleftarrow{\cong} H_{\text{dR}}^{k+1}(M, A) \xrightarrow{q^*} H_{\text{dR}}^{k+1}(M).$$

Der Rest ist Übung. \square

3.6. Die Eilenberg-Steenrod-Axiome

Wir geben hier eine Fassung der Eilenberg-Steenrod-Axiome an, die gut zu unserer Situation passt. Anschließend zeigen wir exemplarisch, was man mit diesen Axiomen anfangen kann.

3.42. BEMERKUNG. Im folgenden meinen wir mit einer „Kategorie topologischer Räume“ eine Kategorie, deren Objekte topologische Räume sind, und deren Morphismen stetige Abbildungen sind. Außerdem sollten alle Konstruktionen, die wir bislang verwendet haben und eventuell noch benötigen, in dieser Kategorie möglich sein. Wir denken hier vor allem an glatte Mannigfaltigkeiten und glatte Abbildungen. Wir wollen wieder darüber hinwegsehen, dass $M \times I$ eine Mannigfaltigkeit Rand ist, und sogar mit Kanten, wenn $\partial M \neq \emptyset$ (notfalls könnten wir Homotopien definieren, indem wir I durch ein offenes Intervall ersetzen, dass I enthält).

Den Begriff „abelsche Kategorie“ möchten wir nicht einführen. Wir denken an die Kategorie der Vektorräume, und an die „Koeffizienten“ $C = \mathbb{R}$, siehe unten. Andere abelsche Kategorien

sind die Kategorie der Moduln über einem festen Ring R und die abelschen Gruppen (Moduln über \mathbb{Z}). Wichtig ist wiederum, dass wir alle Konstruktionen, die wir brauchen, in der Kategorie \mathcal{A} durchführen können. Insbesondere muss der Begriff „exakte Sequenz“ aus Definition 3.36 eine Bedeutung haben.

Es sei also \mathcal{C} in diesem Sinne eine Kategorie topologischer Räume, es sei \mathcal{A} sei eine abelsche Kategorie und C ein Objekt von \mathcal{A} . Eine (*unreduzierte*) *Kohomologie-Theorie* auf \mathcal{C} mit Werten in \mathcal{A} und Koeffizienten C besteht aus einer Familie kontravarianter Funktoren H^k von den Paaren in \mathcal{C} mit Werten in \mathcal{A} und einer Familie natürlicher Transformationen

$$\delta^k : H^k(A, \emptyset) \longrightarrow H^{k+1}(M, A) ,$$

mit folgenden Eigenschaften.

- (1) *Homotopie-Invarianz*. Homotope Abbildungen von Paaren induzieren den gleichen Morphismus in \mathcal{A} .
- (2) *Kohomologie-Sequenz*. Für jedes Paar (M, A) ist die folgende Sequenz in \mathcal{A} exakt:

$$\dots \longrightarrow H^k(M, A) \xrightarrow{q^*} H^k(M, \emptyset) \xrightarrow{\iota^*} H^k(A, \emptyset) \xrightarrow{\delta^k} H^{k+1}(M, A) \longrightarrow \dots$$

- (3) *Ausschneidung*. Es seien $A, B \subset M$ offene Teilmengen mit $M = A \cup B$, dann induziert die Inklusionsabbildung $(B, A \cap B) \hookrightarrow (M, A)$ einen Isomorphismus

$$H^\bullet(M, A) \xrightarrow{\cong} H^\bullet(B, A \cap B) .$$

- (4) *Dimensionsaxiom*. Für den einpunktigen Raum gilt

$$H^k(\text{pt}) \cong \begin{cases} C & \text{falls } k = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere ist die de Rham-Kohomologie eine Kohomologietheorie, denn es gilt Homotopieinvarianz nach Folgerung 3.31 und Proposition 3.39, die Kohomologiesequenz ist exakt nach Folgerung 3.38, Ausschneidung gilt nach Satz 3.40, und das Dimensionsaxiom haben in Zusammenhang mit dem Poincaré-Lemma 3.32 überprüft.

Diese Axiome beschreiben Kohomologie bis auf Isomorphie eindeutig für alle Räume, die zu sogenannten „endlichen CW-Komplexen“ homotopieäquivalent sind. Den Beweis dazu lernt man in einer algebraischen Topologie-Vorlesung. Ohne Beweis bemerken wir, dass alle kompakten glatten Mannigfaltigkeiten sogar zu endlichen CW-Komplexen homöomorph sind. Gelegentlich fügt man weitere Axiome hinzu, etwa eine Summenaxiom oder ein Axiom für Invarianz unter schwachen Äquivalenzen, um Kohomologie noch genauer zu charakterisieren; davon sehen wir hier ab. Auf der anderen Seite erhalten wir eine Vielfalt anderer interessanter Kohomologietheorien, indem wir nur auf das Dimensionsaxiom verzichten.

Wir haben bereits das Poincaré-Lemma 3.32 und die Mayer-Vietoris-Sequenz 3.41 aus den Axiomen hergeleitet. Wir wollen jetzt noch die de Rham-Kohomologie einiger einfacher Räume und Paare bestimmen und daraus neue Beweise für bekannte Sätze ableiten.

3.43. BEISPIEL. Wir wollen zeigen, dass

$$H_{\text{dR}}^k(D^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } k = n \geq 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$H_{\text{dR}}^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{falls } k = n = 0, \\ \mathbb{R} & \text{falls } n > 0 \text{ und } k \in \{0, n\}, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und benutzen dazu nur die Eilenberg-Steenrod-Axiome.

- (1) Für das leere Paar (\emptyset, \emptyset) sind die Abbildungen q und ι die Identität. Mit Funktorialität erhalten wir die lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow H_{\text{dR}}^k(\emptyset, \emptyset) \xrightarrow[\text{id}]{q^*} H_{\text{dR}}^k(\emptyset, \emptyset) \xrightarrow[\text{id}]{\iota^*} H_{\text{dR}}^k(\emptyset, \emptyset) \longrightarrow \cdots$$

Für alle k folgt

$$H_{\text{dR}}^k(\emptyset, \emptyset) = \text{im}(q^*) = \text{ker}(\iota^*) = 0.$$

- (2) Die Sphäre $S^0 \subset \mathbb{R}^1$ besteht aus zwei Punkten $\pm e_0$. Seien $S_{\pm}^0 = \{\pm e_0\}$ einpunktige Räume, so dass $S^0 = S_+^0 \cup S_-^0$ und $S_+^0 \cap S_-^0 = \emptyset$. Mit (1) und der Mayer-Vietoris-Sequenz erhalten wir

$$\cdots \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^{-1}(\emptyset)}_{=0} \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^0(S^0)}_{\cong \mathbb{R}^2} \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^0(S_+^0) \oplus H_{\text{dR}}^0(S_-^0)}_{\cong \mathbb{R}^2} \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^0(\emptyset)}_{=0} \longrightarrow \cdots,$$

wobei wir die neue Information $H_{\text{dR}}^0(S^0) \cong \mathbb{R}^2$ unterstrichen haben. Für $k \neq 0$ gilt mit dem gleichen Argument $H_{\text{dR}}^k(S^0) = 0$.

- (3) Es gilt $S^0 = \partial D^1$. Als erstes betrachten wir die Inklusion $\iota: S^{n-1} \rightarrow D^n$ und die konstante Abbildung $c: D^n \rightarrow \{e_{n-1}\} \subset S^{n-1}$. Dann ist $\iota \circ c$ homotop zur Identität, also gilt $c^* \circ \iota^* = \text{id}$, und wir erhalten eine injektive Abbildung

$$\iota^*: H_{\text{dR}}^0(S^{n-1}) \hookrightarrow H_{\text{dR}}^0(D^n). \quad (3.3)$$

Wir betrachten die lange exakte Sequenz

$$\underbrace{H_{\text{dR}}^{-1}(S^0)}_{=0} \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^0(D^1, S^0)}_{\cong \mathbb{R}} \xrightarrow{q^*} \underbrace{H_{\text{dR}}^0(D^1)}_{\cong \mathbb{R}} \xrightarrow{\iota^*} \underbrace{H_{\text{dR}}^0(S^0)}_{\cong \mathbb{R}^2} \xrightarrow{\delta} \underbrace{H_{\text{dR}}^1(D^1, S^0)}_{\cong \mathbb{R}} \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^1(D^1)}_{=0}.$$

Da ι^* nach (3.3) injektiv ist, folgt $\text{ker } \iota^* = \text{im } q^* = 0$, also $q^* = 0$ und $H_{\text{dR}}^0(D^1, S^0) = 0$. Außerdem gilt $\text{ker } \delta = \text{im } \iota^* \cong \mathbb{R}$, somit $H_{\text{dR}}^1(D^1, S^0) \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$. Mit entsprechenden Argumenten folgt $H_{\text{dR}}^k(D^1, S^0) = 0$ für $k \neq 0, 1$.

- (4) Wir können jetzt die de Rham-Kohomologie von S^n und (D^n, S^{n-1}) induktiv bestimmen. Es sei S_+^n die abgeschlossene obere Halbkugel aus Beispiel 1.12 (2). Wir betrachten homotopieäquivalente Paare und eine Inklusionsabbildung

$$(D^n, S^{n-1}) \simeq (S^n \setminus \{e_n\}, S^n \setminus \{\pm e_n\}) \hookrightarrow (S^n, S^n \setminus \{-e_n\}) \simeq (S^n, S_+^n).$$

Wegen Ausschneidung gilt

$$H_{\text{dR}}^k(S^n, S_+^n) \cong H_{\text{dR}}^k(D^n, S^{n-1}). \quad (3.4)$$

Außerdem betrachten wir die Inklusion $\iota: S_+^n \rightarrow S^n$ und die konstante Abbildung $r: S^n \rightarrow \{e_n\} \subset S_+^n$. Dann ist $r \circ \iota$ homotop zur Identität, also gilt $\iota^* \circ r^* = \text{id}$ und daher

$$\iota^*: H_{\text{dR}}^0(S^n) \twoheadrightarrow H_{\text{dR}}^0(S_+^n). \quad (3.5)$$

Wir nehmen an, dass wir $H_{\text{dR}}^\bullet(D^n, S^{n-1}) \cong H_{\text{dR}}^\bullet(S^n, S_+^n)$ für ein $n \geq 1$ bereits bestimmt haben und betrachten die lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^0(S^n, S_+^n)}_{=0} \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^0(S^n)}_{\cong \mathbb{R}} \xrightarrow{\iota^*} \underbrace{H_{\text{dR}}^0(S_+^n)}_{\cong \mathbb{R}} \xrightarrow{\delta} \cdots \\ \cdots \xrightarrow{\delta} \underbrace{H_{\text{dR}}^n(S^n, S_+^n)}_{\cong \mathbb{R}} \xrightarrow{q^*} \underbrace{H_{\text{dR}}^n(S^n)}_{\cong \mathbb{R}} \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^n(S_+^n)}_{=0} \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Die Abbildung ι^* in Grad 0 ist injektiv da $\ker \iota^* = \text{im } q^* = 0$, also ein Isomorphismus wegen (3.5). Wegen Exaktheit gilt $\delta = 0$ in allen Graden. Daher ist q^* in Grad n wieder ein Isomorphismus. Mit dem Rest dieser Sequenz folgt $H_{\text{dR}}^k(S^n) = 0$ für alle $k \neq 0, n$. Im Fall $n = 1$ erhalten wir das gleiche Ergebnis wie in Beispiel 3.23 (2).

- (5) Um $H^\bullet(D^n, S^{n-1})$ für $n \geq 2$ zu bestimmen, nehmen wir an, dass wir $H^\bullet(S^{n-1})$ bereits kennen. Wir betrachten die exakte Sequenz

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^{-1}(S^{n-1})}_{=0} \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^0(D^n, S^{n-1})}_{=0} \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^0(D^n)}_{\cong \mathbb{R}} \xrightarrow{\iota^*} \underbrace{H_{\text{dR}}^0(S^{n-1})}_{\cong \mathbb{R}} \xrightarrow{\delta} \\ \xrightarrow{\delta} \underbrace{H_{\text{dR}}^1(D^n, S^{n-1})}_{=0} \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^1(D^n)}_{=0} \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^{n-1}(D^n)}_{=0} \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^{n-1}(S^{n-1})}_{\cong \mathbb{R}} \xrightarrow{\delta} \underbrace{H_{\text{dR}}^n(D^n, S^{n-1})}_{\cong \mathbb{R}} \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^n(D^n)}_{=0} \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Da ι^* nach (3.5) injektiv ist, ist ι^* ein Isomorphismus in Grad 0. Wegen Exaktheit folgt $H_{\text{dR}}^k(D^n, S^{n-1}) = 0$ für $k = 0, 1$. Außerdem gilt $H_{\text{dR}}^n(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbb{R}$. Mit dem Rest dieser Sequenz folgt $H_{\text{dR}}^k(D^n, S^{n-1}) = 0$ für alle $k \neq 0, 1, n$.

Da wir nur die Eilenberg-Steenrod-Axiome benutzt haben, gilt ein analoges Resultat auch für alle anderen Kohomologietheorien. Dazu müssen wir nur \mathbb{R} durch die „Koeffizienten“ C aus Axiom 3.42 (4) ersetzen.

3.44. BEMERKUNG. In den Übungen haben wir einen neuen Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes 1.37 kennengelernt. Wir hatten gesehen, dass S^1 kein Retrakt von D^2 sein kann, da $H^1(S^1) \not\subset H^1(D^2)$. Mit der obigen Berechnung lässt sich dieser Beweis auf alle Dimensionen übertragen, denn $H^{n-1}(S^{n-1}) \not\subset H^{n-1}(D^n)$ für alle $n \geq 2$.

Mit den gleichen Methoden können wir die de Rham-Kohomologie etlicher anderer Räume bestimmen. Wir geben hier nur einige der einfacheren Beispiele.

3.45. BEISPIEL. Sei $\mathbb{C}P^n$ der komplex projektive Raum. Mit ähnlichen Methoden wie oben kann man zeigen (Übung), dass

$$H_{\text{dR}}^k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } k \text{ gerade ist und } 0 \leq k \leq 2n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analog dazu gilt für den quaternionische projektiven Raum $\mathbb{H}P^n$, dass

$$H_{\text{dR}}^k(\mathbb{H}P^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } 4 \mid k \text{ und } 0 \leq k \leq 4n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der reell projektiven Raum ist Quotient der S^n . Nach einer Übung folgt $H_{\text{dR}}^\bullet(\mathbb{R}P^n) \subset H_{\text{dR}}^\bullet(S^n)$. Tatsächlich gilt (ohne Beweis), dass

$$H_{\text{dR}}^k(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } k = 0, \text{ oder falls } k = n \text{ ungerade ist, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3.7. Integration und der Satz von Stokes

In diesem Abschnitt definieren wir das Integral kompakt getragener Differentialformen über orientierte Mannigfaltigkeiten. Anschließend beweisen wir den Satz von Stokes und geben ein paar Anwendungen.

Wir haben in Proposition 3.14 gesehen, dass wir Differentialformen $\alpha \in \Omega^k(M)$ an einzelnen Punkten von M betrachten können. Insbesondere können wir wie in Abschnitt 1.2 den Träger einer Differentialform α definieren durch

$$\text{supp}(\alpha) := \overline{\{q \in M \mid \alpha_q \neq 0\}}.$$

Wenn p nicht im Träger $\text{supp}(\alpha)$ liegt, dann verschwindet α auf einer Umgebung von p . Das gleiche gilt dann auch für $d\alpha$, und es folgt

$$\text{supp}(d\alpha) \subset \text{supp}(\alpha).$$

Insbesondere bilden die Differentialformen mit kompaktem Träger einen Unterkomplex des de Rham-Komplexes $(\Omega^\bullet(M), d)$.

3.46. DEFINITION. Der Raum der *Differentialformen mit kompaktem Träger* wird bezeichnet mit

$$\Omega_0^\bullet(M) = \{ \alpha \in \Omega^\bullet(M) \mid \text{supp}(\alpha) \text{ ist kompakt} \}.$$

Seine Kohomologie $H_{\text{dR},0}^\bullet(M)$ heißt die *de Rham-Kohomologie mit kompaktem Träger* von M .

3.47. BEMERKUNG. Die de Rham-Kohomologie mit kompaktem Träger stimmt offensichtlich für alle kompakten Mannigfaltigkeiten M mit der „gewöhnlichen“ de Rham-Kohomologie überein, da dann alle Differentialformen abgeschlossen sind, und somit kompakten Träger in M haben.

Für nicht kompakte Mannigfaltigkeiten gibt es hingegen deutliche Unterschiede. Wir werden einige Eigenschaften im Folgenden und in den Übungen kennenlernen.

3.48. BEMERKUNG. Das äußere Produkt $\alpha \wedge \beta$ zweier Differentialformen hat kompakten Träger, wenn eine der beiden Formen α und β kompakten Träger haben. Somit erhalten wir auch ein Produkt

$$\wedge: H_{\text{dR}}^\bullet(M) \times H_{\text{dR},0}^\bullet(M) \longrightarrow H_{\text{dR},0}^\bullet(M).$$

Es erfüllt sicherlich Linearität und Assoziativität aus Bemerkung 3.11 (1) und (2), und die Klasse [1] der konstanten Funktion $1 \in \Omega^0(M)$ wirkt als Identität. Dadurch wird die Kohomologie mit kompakten Träger zu einem Modul über der gewöhnlichen Kohomologie.

Als nächstes wollen wir Differentialformen mit kompaktem Träger integrieren. Wir beginnen mit offenen Teilmengen V des Halbraums \mathbb{R}_+^n . Es sei $\alpha \in \Omega_0^n(V)$, dann setzen wir α zu $\bar{\alpha} \in \Omega^n(\mathbb{R}_+^n)$ auf ganz \mathbb{R}_+^n fort durch

$$\bar{\alpha}_p = \begin{cases} \alpha_p & \text{falls } p \in V, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } p \notin V. \end{cases}$$

Man beachte, dass $\text{supp}(\alpha)$ auch als Teilmenge von \mathbb{R}_+^n kompakt und daher abgeschlossen ist. Sei also $p \notin V$, dann besitzt p eine Umgebung, die $\text{supp}(\alpha)$ nicht trifft. Insbesondere ist die Fortsetzung $\bar{\alpha}$ stetig und sogar glatt. Anschließend definieren wir

$$\int_V \alpha = \int_{\mathbb{R}_+^n} \bar{\alpha} = \int_{\mathbb{R}_+^n} \alpha_x(e_1, \dots, e_n) \, d\text{vol}(x) = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_x(e_1, \dots, e_n) \, dx_n \cdots dx_1.$$

Dabei können wir die rechte Seite wahlweise als Lebesgue-Integral oder als iteriertes Riemann-Integral auffassen. Die formale Ähnlichkeit des letzten Integranden zum letzten Ausdruck in Bemerkung 3.12 ist dabei kein Zufall. Völlig analog verfahren wir, falls $V \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, indem wir $\bar{\alpha}$ auf ganz \mathbb{R}^n definieren und dann integrieren.

Als nächstes wollen wir über orientierte Mannigfaltigkeiten integrieren. Dazu wählen wir einen orientierten Atlas \mathcal{A} von M , und eine Partition der Eins $(\rho_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{A}}$, so dass $\text{supp}(\rho_\varphi) \in U^\varphi$ für alle Karten $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$ aus \mathcal{A} . Außerdem verlangen wir, dass jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung U

besitzt, auf der fast alle ρ_φ verschwinden. Dann ist die folgende Summe lokal endlich, und wir verlangen, dass

$$\sum_{\varphi \in \mathcal{A}} \rho_\varphi = 1 .$$

Sei $n = \dim M$, dann können wir $\alpha \in \Omega^n(M)$ zerlegen und über einzelne Kartengebiete integrieren:

$$\int_M \alpha = \sum_{\varphi \in \mathcal{A}} \int_{V_\varphi} (\varphi^{-1})^* (\rho_\varphi \alpha) .$$

3.49. PROPOSITION UND DEFINITION. *Das obige Integral ist wohldefiniert und liefert für jede orientierte n -dimensionale Mannigfaltigkeit eine \mathbb{R} -lineare Abbildung*

$$\int_M : \Omega^n(M) \longrightarrow \mathbb{R} .$$

Wir setzen fort auf $\Omega^\bullet(M)$, indem wir k -Formen für $k \neq n$ auf 0 abbilden. Dann ist das Integral natürlich unter Orientierungserhaltenden Diffeomorphismen $F: M \rightarrow N$, das heißt, für alle $\alpha \in \Omega^\bullet(N)$ gilt

$$\int_M F^* \alpha = \int_N \alpha .$$

BEWEIS. Wir werden zeigen, dass das Integral von n -Formen mit kompaktem Träger über $V \subset \mathbb{R}^n$ invariant unter Diffeomorphism ist, das heißt, sei $F: V \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ ein Orientierungserhaltender Diffeomorphismus von offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n und $\alpha \in \Omega_0^n(W)$, dann gilt

$$\int_V F^* \alpha = \int_W \alpha . \quad (3.6)$$

Um zu zeigen, dass das obige Integral wohldefiniert ist, betrachten wir zunächst $\alpha \in \Omega^n(M)$ mit $\text{supp}(\alpha) \subset U^\varphi \cap U^\psi$ für zwei gleich orientierte Karten φ, ψ . Dann folgt

$$\int_{V_\varphi} (\varphi^{-1})^* \alpha = \int_{V_\psi} (\varphi \circ \psi^{-1})^* ((\varphi^{-1})^* \alpha) = \int_{V_\psi} ((\psi^{-1})^* \circ \varphi^* \circ (\varphi^{-1})^*) (\alpha) = \int_{V_\psi} (\psi^{-1})^* \alpha .$$

Sei jetzt α beliebig, seien \mathcal{A} und \mathcal{A}' zwei gleich orientierte Atlanten und $(\rho_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{A}}, (\sigma_\psi)_{\psi \in \mathcal{A}'}$ dazu passende Partitionen der Eins. Dann rechnen wir

$$\begin{aligned} \sum_{\varphi \in \mathcal{A}} \int_{V_\varphi} (\varphi^{-1})^* (\rho_\varphi \alpha) &= \sum_{\varphi \in \mathcal{A}} \sum_{\psi \in \mathcal{A}'} \int_{V_\varphi} (\varphi^{-1})^* (\rho_\varphi \sigma_\psi \alpha) \\ &= \sum_{\varphi \in \mathcal{A}} \sum_{\psi \in \mathcal{A}'} \int_{V_\psi} (\psi^{-1})^* (\rho_\varphi \sigma_\psi \alpha) = \sum_{\psi \in \mathcal{A}'} \int_{V_\psi} (\psi^{-1})^* (\sigma_\psi \alpha) . \end{aligned}$$

Genauso beweist man auch die Natürlichkeit unter Diffeomorphismen.

Es bleibt die Aussage (3.6) zu beweisen. Sei $x \in V$, dann gilt nach Definition

$$(F^* \alpha)_x(e_1, \dots, e_n) = \alpha_{F(x)}(dF_x(e_1), \dots, dF_x(e_n)) .$$

Nun ist dF_x ein linearer Isomorphismus, wenn F ein Diffeomorphismus ist. Da $\alpha_{F(x)}$ eine Volumenform im Sinne der linearen Algebra ist, folgt

$$(F^* \alpha)_x(e_1, \dots, e_n) = \det(dF_x) \cdot \alpha_{F(x)}(e_1, \dots, e_n) .$$

Jetzt erhalten wir die Aussage aus der Integraltransformationsformel. Dabei ist wichtig, dass F orientierungserhaltend ist, da dann $\det(dF_x) = |\det(dF_x)|$ für alle $x \in V$ gilt. Wir berechnen also

$$\begin{aligned} \int_V F^* \alpha &= \int_V \det(dF_x) \cdot \alpha_{F(x)}(e_1, \dots, e_n) \, d\text{vol}(x) \\ &= \int_V |\det(dF_x)| \cdot \alpha_{F(x)}(e_1, \dots, e_n) \, d\text{vol}(x) = \int_W \alpha_y(e_1, \dots, e_n) \, d\text{vol}(y). \quad \square \end{aligned}$$

Um den Zusammenhang zur de Rham-Kohomologie herzustellen, beweisen wir als nächstes eine Analogon des Gaußschen Integralsatzes aus der Analysis. Wenn M eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand ist, trage ∂M die Randorientierung aus Definition 2.20. Wir bezeichnen mit $\iota: \partial M \rightarrow M$ die Inklusionsabbildung.

3.50. SATZ (Stokes). *Es sei M eine orientierte, n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann gilt für alle $\alpha \in \Omega_0^{n-1}(M)$, dass*

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \iota^* \alpha.$$

BEWEIS. Wir führen eine Partition $(\rho_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{A}}$ der Eins auf M zu einem orientierten Atlas \mathcal{A} ein. Dann liefert Einschränken auf ∂M eine Partition der Eins auf ∂M zum Randatlas aus Bemerkung 1.15 (3). Damit können wir beide Seiten der obigen Gleichung als Summe von Integralen über Kartengebiete darstellen. Dabei beachten wir, dass

$$\sum_{\varphi \in \mathcal{A}} \varphi = 1 \quad \implies \quad \sum_{\varphi \in \mathcal{A}} d\varphi = d1 = 0.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_M d\alpha &= \sum_{\varphi \in \mathcal{A}} \int_{V_\varphi} (\varphi^{-1})^*(\rho_\varphi d\alpha) + \sum_{\varphi \in \mathcal{A}} \int_M d\varphi \wedge \alpha \\ &= \sum_{\varphi \in \mathcal{A}} \int_{V_\varphi} (\varphi^{-1})^* d(\rho_\varphi \alpha) = \sum_{\varphi \in \mathcal{A}} \int_{V_\varphi} d((\varphi^{-1})^*(\rho_\varphi \alpha)). \end{aligned}$$

Daher reicht es, für $\beta = (\varphi^{-1})^*(\rho_\varphi \alpha)$ zu zeigen, dass

$$\int_{V_\varphi} d\beta = \int_{\partial V_\varphi} \iota^* \beta.$$

Nach der Cartan-Formel aus Satz 3.22 gilt

$$(d\beta)_{(x^1, \dots, x^n)}(e_1, \dots, e_n) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \frac{\partial}{\partial x^i} \beta_{(x^1, \dots, x^n)}(e_1, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_n),$$

da $[e_i, e_j] = 0$ für alle i, j . Der veränderte Vorzeichenfaktor rührt daher, dass Indizes hier mit 1 statt mit 0 anfangen. Da β kompakten Träger in \mathbb{R}_-^n hat, folgt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x^i} \beta_{(x^1, \dots, x^n)}(e_1, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_n) \, dx^i \\ = \lim_{x^i \rightarrow \infty} \beta_{(x^1, \dots, x^n)}(e_1, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_n) - \lim_{x^i \rightarrow -\infty} \beta_{(x^1, \dots, x^n)}(e_1, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_n) = 0 \end{aligned}$$

für alle $i \geq 2$ mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Für $i = 1$ hingegen erhalten wir stattdessen

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\partial}{\partial x^1} \beta_{(x^1, \dots, x^n)}(e_2, \dots, e_n) \, dx^1 = \beta_{(0, x^2, \dots, x^n)}(e_2, \dots, e_n).$$

Indem wir über die restlichen Variablen integrieren und summieren, sehen wir, dass

$$\int_{V^\varphi} d\beta = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \beta_{(0,x^2,\dots,x^n)}(e_2, \dots, e_n) dx^2 \cdots dx^n = \int_{\partial V^\varphi} \iota^* \beta . \quad \square$$

Für die erste Folgerung definieren wir den relativen de Rham-Komplex mit kompaktem Träger analog zu den Definitionen 3.34 und 3.46 durch

$$\Omega_0^\bullet(M, A) = \Omega_0^\bullet(M) \oplus \Omega_0^\bullet(A) \quad \text{und} \quad d^k = \begin{pmatrix} d^k & 0 \\ \iota^* & -d^{k-1} \end{pmatrix} .$$

Seine Kohomologie bezeichnen wir mit $H_{\text{dR},0}^\bullet(M, A)$.

3.51. FOLGERUNG. *Es sei M eine orientierte, n -dimensionale Mannigfaltigkeit.*

(1) *Falls $\partial M = \emptyset$, existiert eine wohldefinierte, surjektive Abbildung*

$$\int_M : H_{\text{dR},0}^n(M) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \alpha \mapsto \int_M \alpha .$$

(2) *Es existiert eine wohldefinierte, surjektive Abbildung*

$$\int_{(M,\partial M)} : H_{\text{dR},0}^n(M, \partial M) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad (\alpha, \beta) \mapsto \int_M \alpha - \int_{\partial M} \beta .$$

In der algebraischen Topologie nennt man die obige Abbildung „Auswertung an der Fundamentalklasse“. Insbesondere gilt also $H_{\text{dR},0}^n(M) \neq 0$ beziehungsweise $H_{\text{dR},0}^n(M, \partial M) \neq 0$. Am Beispiel $M = \mathbb{R}^n$ sehen wir, dass das Poincaré-Lemma 3.32 für die Rham-Kohomologie mit kompaktem Träger nicht gilt.

BEWEIS. Zur Wohldefiniertheit in (1) sei $\partial M = \emptyset$ und $\gamma \in \Omega_0^{n-1}(M)$. Dann gilt

$$\int_M d\gamma = \int_{\partial M} \iota^* \gamma = \int_{\emptyset} \iota^* \gamma = 0 .$$

Zu (2) sei stattdessen $(\gamma, \varepsilon) \in \Omega_0^{n-1}(M, A)$. Da $\partial \partial M = \emptyset$, gilt

$$\int_{(M,\partial M)} d^{n-1}(\gamma, \varepsilon) = \int_{(M,\partial M)} (d^{n-1}\gamma, \iota^* \gamma - d^{n-2}\varepsilon) = \int_M d^{n-1}\gamma - \int_{\partial M} (\iota^* \gamma - d^{n-2}\varepsilon) = \int_{\partial \partial M} \varepsilon = 0 .$$

Zur Surjektivität sei φ eine Karte. Wie in Beispiel 1.17 konstruieren wir eine Abschneidefunktion $\rho: V^\varphi \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger $\text{supp}(\rho) \subset \overset{\circ}{V}^\varphi$. Es sei

$$c = \int_{V^\varphi} \rho(x) d\text{vol}(x) ,$$

dann definieren wir eine Form $\alpha \in \Omega_0^n(M)$ mit $\text{supp}(\alpha) \subset \overset{\circ}{M}$ durch

$$\alpha_p = \begin{cases} \frac{1}{c} (\varphi^* \rho dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)_p & \text{falls } p \in U^\varphi, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann sind $\alpha \in \Omega_0^n(M)$ und $(\alpha, 0) \in \Omega_0^n(M, \partial M)$ aus Dimensionsgründen geschlossen, und es folgt

$$\int_{(M,\partial M)} (\alpha, 0) = \int_M \alpha = \frac{1}{c} \int_{V^\varphi} \rho dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = 1 . \quad \square$$

Der Satz von Stokes stellt einen Zusammenhang her zwischen einigen Überlegungen aus dem letzten Kapitel und der Rham-Kohomologie. Eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand heißt auch

geschlossen. Dieser Begriff ist in gewissem Sinne dual zu dem einer geschlossenen Form aus Definition 3.18. Sei M geschlossen und orientiert, dann heißt eine glatte Abbildung $F: M \rightarrow N$ auch ein *Zykel* in N . Mit Folgerung 3.51 erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung

$$\int_M F^*: H^\bullet(N) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \alpha \mapsto \int_M F^* \alpha .$$

In diesem Sinne kann also beliebige de Rham-Kohomologieklassen von N an Zykeln auswerten. Dazu muss N übrigens nicht orientierbar sein.

3.52. FOLGERUNG. *Es sei M geschlossen und orientiert und $F: M \rightarrow N$ glatt. Wenn sich es eine kompakte Mannigfaltigkeit W mit $\partial W = M$ gibt, so dass sich F zu einer glatten Abbildung $G: W \rightarrow N$ fortsetzen lässt, dann gilt für alle $\alpha \in H^\bullet(M)$, dass*

$$\int_M F^* \alpha = 0 .$$

Aus der Homotopieinvarianz 3.31 der de Rham-Kohomologie und Folgerung 3.51 folgt bereits, dass das obige Integral nicht von der Homotopieklasse von F abhängt.

BEWEIS. Aus dem Satz von Stokes folgt sofort

$$\int_M F^* \alpha = \int_{\partial W} \iota^*(G^* \alpha) = \int_W d(G^* \alpha) = \int_W G^* d\alpha = 0 . \quad \square$$

Wir dürfen hier gewöhnliche de Rham-Kohomologie verwenden, da wir M und W als kompakt vorausgesetzt haben. Wir können auch mit beliebigen M arbeiten. Dann müssen wir zum einen anderen de Rham-Kohomologie $H_{\text{dR},0}^\bullet(N)$ mit kompaktem Träger betrachten und zum anderen fordern, dass $F: M \rightarrow N$ und $G: W \rightarrow N$ *eigentliche Abbildungen* sind, das heißt, Urbilder kompakter Teilmengen von N sind wieder kompakt in M beziehungsweise W .

Zu guter letzt geben wir eine alternative Beschreibung des Abbildungsgrades aus Definition 2.24 an.

3.53. FOLGERUNG. *Es sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen kompakten, n -dimensionalen, orientierten Mannigfaltigkeiten ohne Rand, und N sei zusammenhängend. Für alle $\alpha \in \Omega^n(N)$ gilt*

$$\int_M F^* \alpha = \text{deg } F \cdot \int_N \alpha .$$

BEWEIS. Die Menge $S \subset M$ der singulären Punkte von F ist abgeschlossen, und es gilt $(F^* \alpha)_p = 0$ für alle $p \in S$. Da M kompakt ist, ist dann auch S kompakt, und somit ist die Menge der singulären Werte $F(S) \subset N$ ebenfalls kompakt. Nach dem Lemma 1.36 von Sard hat $F(S)$ Lebesgue-Maß 0 in N . Wir dürfen uns im Folgenden also auf die Mengen $M \setminus S$ und $N \setminus F(S)$ der regulären Punkte und Werte einschränken. Die Formen α und $F^* \alpha$ sind auf ganz N beziehungsweise M glatt, und M und N sind kompakt. Wenn wir Integrierbarkeit wie beim Lebesgue-Integral definieren, sind α und $F^* \alpha$ über $N \setminus F(S)$ beziehungsweise $M \setminus S$ integrierbar, obwohl ihre Träger in $N \setminus F(S)$ beziehungsweise $M \setminus S$ nicht kompakt zu sein brauchen.

Sei jetzt $q \in N$ ein regulärer Wert von F . Da M kompakt ist, ist die Menge der Urbilder von q endlich, etwa $F^{-1} = \{p_1, \dots, p_\ell\}$. Da M kompakt ist, finden wir eine kleine zusammenhängende Umgebung $V \subset N$ von q , so dass $F^{-1}(V)$ eine disjunkte Vereinigung von offenen Umgebungen $U_i \subset M$ der p_i ist, für die $F|_{U_i}: U_i \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist. Für eine Form α mit kompaktem Träger $\text{supp } \alpha \subset V$ folgt

$$\int_M F^* \alpha = \sum_{i=1}^{\ell} \int_{U_i} (F|_{U_i})^* \alpha = \sum_{i=1}^{\ell} \text{sign}(d_{p_i} F) \int_V \alpha = \text{deg } F \cdot \int_N \alpha .$$

Dabei haben wir benutzt, dass sich das Vorzeichen in (3.6) umdreht, falls $F|_{U_i}$ orientierungsumkehrend ist, da dann $\det(d_q F) = -|\det(d_q F)|$ für alle $q \in U_i$.

Wir können $N \setminus F(S)$ mit offenen Mengen $(V_i)_{i \in I}$ wie oben überdecken, und wählen eine zugehörige Partition $(\rho_i)_{i \in I}$ der Eins. Damit zerlegen wir

$$\alpha|_{N \setminus F(S)} = \sum_{i \in I} \rho_i \cdot \alpha.$$

Da α keinen kompakten Träger hat, ist diese Summe im Allgemeinen nicht endlich, sondern nur lokal endlich. Aber für jede endliche Teilmenge $I_0 \subset I$ gilt

$$\int_M F^* \left(\sum_{i \in I_0} \rho_i \cdot \alpha \right) = \sum_{i \in I_0} \int_M F^*(\rho_i \cdot \alpha) = \deg F \cdot \sum_{i \in I_0} \int_N \rho_i \cdot \alpha.$$

Da α und $G^* \alpha$ integrierbar sind, können wir beide Seiten der behaupteten Gleichung beliebig gut approximieren, indem wir für I_0 hinreichend große endliche Teilmengen wählen. \square

Einen einfacheren Beweis erhalten wir, wenn wir zeigen, dass $H^n(M)$, $H^n(N)$ jeweils eindimensional sind. Dann können wir eine Form wie im Beweis von Folgerung 3.51 wählen, um die Behauptung zu zeigen. Mehr dazu im nächsten Abschnitt.

3.8. Poincaré-Dualität

Wir wollen zeigen, dass auf einer orientierten Mannigfaltigkeit ohne Rand die gewöhnliche de Rham-Kohomologie dual zur kompakt getragenen ist. Diese Dualität wird durch das Integral vermittelt:

$$\Omega_{\text{dR}}^k(M) \times \Omega_{\text{dR},0}^{n-k}(M) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad (\alpha, \beta) \longmapsto \int_M \alpha \wedge \beta. \quad (3.7)$$

Um diese Aussage zu beweisen, müssen wir Kohomologie noch etwas besser verstehen.

3.54. BEMERKUNG. Kohomologie mit kompaktem Träger verhält anders bezüglich glatter Abbildungen als gewöhnliche Kohomologie.

- (1) Sei $F: M \rightarrow N$ glatt und $\alpha \in \Omega_0^\bullet(N)$. Dann hat $F^* \alpha$ im allgemeinen keinen kompakten Träger mehr. Wir nennen F *eigentlich*, wenn Urbilder kompakter Teilmengen von N unter F wieder kompakt sind (das gilt insbesondere immer, wenn M selbst kompakt ist). Für eigentliche Abbildung erhalten wir eine induzierte Abbildung $F^*: \Omega_0^\bullet(N) \rightarrow \Omega_0^\bullet(M)$.
- (2) Es sei jetzt $U \subset M$ eine offene Teilmenge und $\iota: U \rightarrow M$ die Inklusionsabbildung. Wir können Formen $\alpha \in \Omega_0^\bullet(M)$ mit kompaktem Träger auf ganz M fortsetzen und erhalten eine Abbildung $\iota_*: \Omega_0^\bullet(U) \rightarrow \Omega_0^\bullet(M)$.

Beide Abbildungen sind mit der äußeren Ableitung verträglich, folglich induzieren sie Abbildungen der de Rham-Kohomologien mit kompaktem Träger, die wir mit den gleichen Symbolen bezeichnen wollen.

Es seien $U, V \subset M$ offene Teilmengen einer Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann könne wir wieder die Inklusionsabbildungen $\iota_U: U \rightarrow U \cup V$, $\iota_V: V \rightarrow U \cup V$, $j_U: U \cap V \rightarrow U$ und $j_V: U \cap V \rightarrow V$ betrachten.

3.55. SATZ (Mayer-Vietoris-Sequenz). *Es seien $U, V \subset M$ offene Teilmengen einer Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann erhalten wir eine lange exakte Sequenz*

$$\cdots \longrightarrow H_{\text{dR},0}^k(U \cap V) \xrightarrow{(j_U^!, -j_V^!)} H_{\text{dR},0}^k(U) \oplus H_{\text{dR},0}^k(V) \xrightarrow{\iota_U^! + \iota_V^!} H_{\text{dR},0}^k(U \cup V) \xrightarrow{\partial} H_{\text{dR},0}^{k+1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots$$

Man beachte die veränderte Reihenfolge der Teilmengen im Vergleich zur Mayer-Vietoris-Sequenz 3.41 für gewöhnliche Kohomologie.

BEWEIS. Zunächst zeigt man, dass die kurze Sequenz von Kokettenkomplexen

$$0 \longrightarrow \Omega_0^\bullet(U \cap V) \xrightarrow{(j_{U!}, -j_{V!})} \Omega_0^\bullet(U) \oplus \Omega_0^\bullet(V) \xrightarrow{\iota_{U!} + \iota_{V!}} \Omega_0^\bullet(U \cup V) \longrightarrow 0$$

exakt ist. Dann folgt die Aussage aus dem Schlangenlemma. Die Injektivität von $(j_{U!}, -j_{V!})$ ist klar, denn eine durch 0 fortgesetzte Differentialform verschwindet nur, wenn sie vor dem Fortsetzen bereits 0 war.

Man sieht auch, dass $(\iota_{U!} + \iota_{V!}) \circ (j_{U!}, -j_{V!}) = 0$. Seien $\beta \in \Omega_0^\bullet(U)$ und $\gamma \in \Omega_0^\bullet(V)$ gegeben, so dass $\iota_{U!}(\beta) + \iota_{V!}(\gamma) = 0$. Dann haben β und γ beide Träger in $U \cap V$, und es gilt $\beta = -\gamma$, somit liegt (β, γ) im Bild von $(j_{U!}, -j_{V!})$.

Für den letzten Schritt wählen wir eine „Partition der Eins“ für die Überdeckung von $U \cup V$ durch U und V der Gestalt $\rho, 1 - \rho$ mit

$$\text{supp}(\rho) \subset U \quad \text{und} \quad \text{supp}(1 - \rho) \subset V .$$

Zur Surjektivität von $\iota_{U!} + \iota_{V!}$ schreiben wir $\alpha \in \Omega_0^\bullet(U \cup V)$ als

$$\alpha = \iota_{U!}(\rho\alpha) + \iota_{V!}((1 - \rho)\alpha) . \quad \square$$

Der Verbindungshomomorphismus ∂ hat eine besonders einfache Gestalt. Für alle geschlossenen Formen $\alpha \in \Omega_0^k(U \cup V)$ gilt

$$\partial[\alpha] = [d\rho \wedge \alpha] . \quad (3.8)$$

Das folgt aus dem obigen Beweis, indem man die einzelnen Schritte der Konstruktion des Verbindungshomomorphismus im Schlangenlemma 3.37 zurückverfolgt.

3.56. PROPOSITION. *Es sei*

$$\cdots \longrightarrow V_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} V_k \xrightarrow{f_k} V_{k+1} \longrightarrow \cdots$$

eine lange exakte Sequenz von Vektorräumen. Dann ist die induzierte Sequenz von Dualräumen

$$\cdots \longleftarrow V_{k-1}^* \xleftarrow{f_{k-1}^*} V_k^* \xleftarrow{f_k^*} V_{k+1}^* \longleftarrow \cdots$$

ebenfalls exakt.

BEWEIS. Man sieht leicht, dass $f_{k-1}^* \circ f_k^* = 0$. Um $\ker(f_{k-1}^*) \subset \text{im}(f_k^*)$ zu zeigen, benötigen wir die Steinitzchen Basissätze für eventuell unendlich-dimensionale Vektorräume.

Wir wählen zunächst eine Basis von $\text{im } f_{k-1}$ der Form $(f_{k-1}(u_i))_{i \in I}$. Wir ergänzen die linear unabhängigen Vektoren $f_{k-1}(u_i) \in V_k$ durch Vektoren $(v_j)_{j \in J}$ zu einer Basis von V_k . Wegen Exaktheit der oberen Sequenz bilden die Vektoren $f_k(v_j)$ eine Basis von $\text{im}(f_k)$, die wir durch Vektoren $(w_k)_{k \in K}$ zu einer Basis von V_{k+1} fortsetzen. Sei jetzt $\alpha \in \ker(f_{k-1}^*) \subset V_k^*$, dann folgt $\alpha(f_{k-1}(u_i)) = 0$ für alle $i \in I$. Wir definieren $\beta \in V_{k+1}^*$ auf den obigen Basiselementen durch $\beta(f_k(v_j)) = \alpha(v_j)$ für alle $j \in J$ und $\beta(w_k)$ beliebig, beispielsweise $\beta(w_k) = 0$ für alle $k \in K$. Für alle $i \in I$ und alle $j \in J$ gilt

$$(f_k^* \beta)(f_{k-1}(u_i)) = \beta(f_k(f_{k-1}(u_i))) = 0 = \alpha(f_{k-1}(u_i)) \quad \text{und}$$

Somit $\alpha = f_k^* \beta$, und es folgt Exaktheit bei V_k^* . Da wir Basissätze benutzt haben, funktioniert dieser Beweis nicht für Sequenzen in anderen Kategorien. In der Tat ist die obige Aussage für abelsche Gruppen oder Moduln über Ringen im Allgemeinen falsch. \square

3.57. BEMERKUNG. Wir beginnen den Beweis der Poincaré-Dualität mit einem einfachen Beispiel. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ konvex, dann ist U insbesondere diffeomorph zum offenen Ball $B^n = \overset{\circ}{D}^n$. In den Übungen sehen wir, dass

$$H_{\text{dR},0}^k(U) \cong H_{\text{dR},0}^k(B^n) \cong H_{\text{dR}}^k(D^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } k = n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Inbesondere vermittelt (3.7) einen Isomorphismus

$$H_{\text{dR}}^k(U) \xrightarrow{\cong} H_{\text{dR},0}^{n-k}(U)^* .$$

Wir wollen jetzt Poincare-Dualität induktiv für endliche Vereinigungen von je n konvexen, offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n beweisen. Gleichzeitig wollen wir noch zeigen, dass die beteiligten Kohomologievektorräume endlichdimensional sind. Seien dazu U und U_1, \dots, U_n konvex und offen. Dann sind $V = U_1 \cup \dots \cup U_n$ und

$$U \cap V = (U \cap U_1) \cup \dots \cup (U \cap U_n)$$

Vereinigungen von je n offenen, konvexen Mengen. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_{\text{dR}}^{k-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\delta} & H_{\text{dR}}^k(U \cup V) & \longrightarrow & H_{\text{dR}}^k(U) \oplus H_{\text{dR}}^k(V) & \longrightarrow & H_{\text{dR}}^k(U \cap V) & \longrightarrow & \dots \\ & & \cong \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \cong \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H_{\text{dR},0}^{n-k+1}(U \cap V)^* & \xrightarrow{\partial^*} & H_{\text{dR},0}^{n-k}(U \cup V)^* & \longrightarrow & H_{\text{dR},0}^{n-k}(U)^* \oplus H_{\text{dR},0}^{n-k}(V)^* & \longrightarrow & H_{\text{dR},0}^{n-k}(U \cap V)^* & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Oben steht die gewöhnlich Mayer-Vietoris-Sequenz 3.41, unten die duale Sequenz zur neuen Mayer-Vietoris-Sequenz aus 3.55, die nach Proposition 3.56 ebenfalls exakt ist. Nach Induktionsvoraussetzung stehen $H_{\text{dR}}^k(U \cup V)$ und $H_{\text{dR},0}^{n-k}(U \cup V)^*$ jeweils zwischen zwei endlich-dimensionalen Vektorräumen und sind daher wegen Exaktheit selbst endlich-dimensional.

Auf zwei senkrechte Pfeile, die Isomorphismen sind, folgt stets einer, von dem wir das erst zeigen möchten. Wenn das Diagramm kommutiert, folgt aus dem Fünfer-Lemma 3.58 unten, dass auch die restlichen senkrechten Pfeile Isomorphismen sind. Die Kommutativität der rechten zwei Quadrate ist leicht einzusehen — der Wert eines Integrals verändert sich nicht, wenn man eine kompakt getragene Form durch 0 fortsetzt. Für das rechte Quadrat ist der untere Pfeil dual zur Formel aus (3.8). Analog kann man auch zeigen, dass in der Mayer-Vietoris-Sequenz 3.41 der Verbindungshomomorphismus die gleiche Gestalt hat. Sei jetzt $\alpha \in H_{\text{dR}}^{k-1}(U \cap V)$ und $\beta \in H_{\text{dR},0}^{n-k}(U \cup V)^*$. Wir bilden α auf zwei Weisen nach $H_{\text{dR},0}^{n-k}(U \cup V)^*$ ab, werten an β aus, und erhalten

$$\int_{U \cup V} (\delta \alpha) \wedge \beta = \int_{U \cup V} d\rho \wedge \alpha \wedge \beta \quad \text{und} \quad \int_{U \cup V} \alpha \wedge (\partial \beta) = \int_{U \cap V} \alpha \wedge d\rho \wedge \beta .$$

Beide Terme stimmen bis auf das Vorzeichen überein. Das heißt, wir ersetzen gegebenenfalls ∂^* durch $-\partial^*$, damit das obige Diagramm kommutiert.

3.58. LEMMA (Fünfer-Lemma). *Gegeben sei ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{k} & E \\ a \downarrow \cong & & b \downarrow \cong & & c \downarrow & & d \downarrow \cong & & e \downarrow \cong \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{k'} & E' . \end{array}$$

mit exakten Zeilen. Wenn a, b, d und e Isomorphismen sind, dann auch c .

Man käme hier mit etwas schwächeren Voraussetzungen aus (Vierer-Lemma). Aber für viele Anwendungen reicht die obige Fassung völlig aus.

BEWEIS. Der Beweis erfolgt wieder durch Diagrammjagd. Zur Injektivität von c sei $x \in \ker(c) \subset C$. Dann gilt $d(h(x)) = h'(c(x)) = 0$, wegen Injektivität von d also $h(x) = 0$. Folglich existiert $u \in B$ mit $x = g(u)$, und es gilt $g'(b(u)) = c(g(u)) = 0$. Somit existiert $v \in A'$ mit $f'(v) = b(u)$. Da a surjektiv ist, finden wir $w \in A$ mit $a(w) = v$, also $b(f(w)) = f'(a(w)) = f'(v) = b(u)$. Da b injektiv ist, gilt $f(w) = u$, somit $x = g(u) = g(f(w)) = 0$.

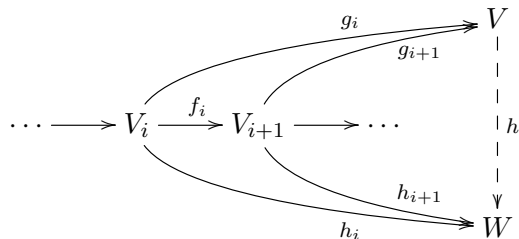
Zur Surjektivität sei jetzt $y \in C$ gegeben. Zunächst liefert Surjektivität von d ein Element $z \in D$ mit $d(z) = h'(y)$. Es folgt $e(k(z)) = k'(d(z)) = k'(h'(y)) = 0$, wegen Injektivität von e also $k(z) = 0$. Also existiert ein Element $x \in C$ mit $h(x) = z$ und somit $h'(y - c(x)) = d(z - h(x)) = 0$. Also existiert ein $u \in B'$ mit $g'(u) = y - c(x)$. Da b surjektiv ist, finden wir ein v mit $b(v) = u$. Dann gilt $c(x + g(v)) = c(x) + g'(u) = y$. \square

Wir benötigen für den Beweis der Poincaré-Dualität direkte und inverse Limiten.

3.59. DEFINITION. Es sei $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Objekten in einer Kategorie \mathcal{C} mit Morphismen $f_i: V_i \rightarrow V_{i+1}$. Ein *direkter Limes* oder *Colimes* dieser Folge ist ein Objekt V zusammen mit einer Folge von Morphismen $g_i: V_i \rightarrow V$ mit $g_i = g_{i+1} \circ f_i$ für alle i , so dass zu jedem anderen Objekt W und jeder anderen Folge von Morphismen $h_i: V_i \rightarrow W$ mit $h_i = h_{i+1} \circ f_i$ genau ein Morphismus $h: V \rightarrow W$ mit $h_i = h \circ g_i$ für alle i existiert.

Es sei $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Objekten in einer Kategorie \mathcal{C} mit Morphismen $f_i: V_{i+1} \rightarrow V_i$. Ein (*inverser*) Limes dieser Folge ist ein Objekt V zusammen mit einer Folge von Morphismen $g_i: V \rightarrow V_i$ mit $g_i = f_i \circ g_{i+1}$ für alle i , so dass zu jedem anderen Objekt W und jeder anderen Folge von Morphismen $h_i: W \rightarrow V_i$ mit $h_i = f_i \circ h_{i+1}$ genau ein Morphismus $h: W \rightarrow V$ mit $h_i = g_i \circ h$ für alle i existiert.

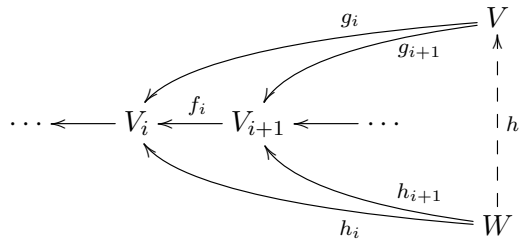
3.60. BEMERKUNG. Die obigen universelle Eigenschaft des Colimes lässt sich im folgenden Diagramm veranschaulichen.



Aufgrund der universellen Eigenschaft gibt es zwischen zwei Colimiten genau einen Isomorphismus, der mit den gegebenen Abbildungen verträglich ist. Somit ist der Colimes bis auf eindeutige Isomorphismen eindeutig. Wenn die Abbildungen f_i klar sind, schreiben wir

$$V = \varinjlim V_i .$$

Für den inversen Limes drehen wir alle Pfeile um und erhalten wir das Diagramm



Es gilt ebenfalls Eindeutigkeit bis auf eindeutige Isomorphismen. Wenn die Abbildungen f_i klar sind, schreiben wir

$$V = \varprojlim V_i .$$

In der Kategorie der Vektorräume lassen sich direkter und inverser Limes konstruieren.

- (1) Es sei (V_i) eine Folge von \mathbb{k} -Vektorräumen mit linearen Abbildungen $f_i: V_i \rightarrow V_{i+1}$. Aus den universellen Eigenschaften der direkten Summe und des Quotienten folgt

$$\lim_{\rightarrow} V_i \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} V_i / \langle (v_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid j \in \mathbb{N}, v_j \in V_j, v_{j+1} = -f_j(v_j) \text{ und } v_i = 0 \text{ falls } i \notin \{j, j+1\} \rangle.$$

Beachte, dass Elemente $(v_i)_i$ der direkten Summe *endlich* sind, das heißt, für fast alle i ist $v_i = 0$. Die Abbildung g_j bildet $v \in V_j$ ab auf die Folge $(v_i)_i$ mit $v_j = v$ und $v_i = 0$ für $i \neq j$.

- (2) Es sei (V_i) eine Folge von \mathbb{k} -Vektorräumen mit linearen Abbildungen $f_i: V_{i+1} \rightarrow V_i$. Dann ist der inverse Limes ein Unterraum im direkten Produkt,

$$\lim_{\leftarrow} V_i \cong \left\{ (v_i)_i \in \prod_{i \in \mathbb{N}} V_i \mid v_i = f_{i+1}(v_{i+1}) \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Beachte, dass bei Elementen $(v_i)_i$ des direkten Produkts alle Einträge von 0 verschieden sein dürfen. Die Abbildungen g_i sind gegeben durch $g_j((v_i)_i) = v_j$.

- (3) Es sei (V_i) eine Folge von \mathbb{k} -Vektorräumen mit linearen Abbildungen $f_i: V_i \rightarrow V_{i+1}$ wie in (1). Dann gilt

$$\left(\lim_{\rightarrow} V_i \right)^* = \lim_{\leftarrow} (V_i^*),$$

wobei der inverse Limes mit den dualen Abbildungen $f_i^*: V_{i+1}^* \rightarrow V_i^*$ gebildet wird. Dazu benutzen wir, dass der Dualraum einer direkten Summe das direkte Produkt der Dualräume ist, und dass der Dualraum eines Quotienten V/W der Unterraum der Elemente von V^* ist, die auf W verschwinden.

3.61. BEMERKUNG. Wir kommen zum nächsten Schritt im Beweis der Poincaré-Dualität. Es sei $U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset M$ eine aufsteigende Folge offener Teilmengen von M und

$$U = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i.$$

Für $1 \leq i$ betrachten wir die Inklusionsabbildungen

$$j_i: U_i \rightarrow U_{i+1} \quad \text{und} \quad \iota_i: U_i \rightarrow U.$$

- (1) Sei $\alpha \in \Omega_0^\bullet(M)$. Da die U_i eine offene Überdeckung der kompakten Menge $\text{supp}(\alpha)$ bilden, existiert ein i , so dass $\text{supp}(\alpha) \subset U_i$, somit $\alpha \in \text{im}(\iota_{i,!})$. Folglich existiert zu jeder Kohomologieklass $a = [\alpha] \in H_{\text{dR},0}^\bullet(M)$ ein i mit $a \in \text{im}(\iota_{i,!})$. Falls $\iota_{i!}(a) = 0 \in H_{\text{dR},0}^\bullet(M)$ gilt, existiert ein $\beta \in \Omega_0^\bullet(M)$, folglich existiert ein $k \geq i$, so dass bereits $(j_{k-1,!} \circ \dots \circ j_{i,!})(\beta) = 0$. Insgesamt induzieren die $\iota_{i,!}$ einen natürlichen Isomorphismus

$$\lim_{\rightarrow} H_{\text{dR},0}^\bullet(U_i) \xrightarrow{\cong} H_{\text{dR},0}^\bullet(M).$$

- (2) Es bezeichnen $\iota_{i,!}^*: H_{\text{dR},0}^\bullet(M)^* \rightarrow H_{\text{dR},0}^\bullet(U_i)^*$ und $j_{i,!}^*: H_{\text{dR},0}^\bullet(U_{i+1})^* \rightarrow H_{\text{dR},0}^\bullet(U_i)^*$ die dualen Abbildungen, dann erhalten wir eine natürliche Abbildung

$$H_{\text{dR},0}^\bullet(M)^* \longrightarrow \lim_{\leftarrow} H_{\text{dR},0}^\bullet(U_i)^*.$$

Nach Bemerkung 3.60 (3) ist das ein Isomorphismus.

- (3) Analog erhalten wir auch eine natürliche Abbildung

$$H_{\text{dR}}^\bullet(M) \longrightarrow \lim_{\leftarrow} H_{\text{dR}}^\bullet(U_i).$$

Abbildungen dieser Art sind im Allgemeinen keine Isomorphismen, stattdessen erhalten wir in Proposition 3.63 unten eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \varprojlim^1 H_{\mathrm{dR}}^{k-1}(U_i) \longrightarrow H_{\mathrm{dR}}^k(U) \xrightarrow{(\iota_i)_i} \varprojlim H_{\mathrm{dR}}^k(U_i) \longrightarrow 0$$

Wenn wir zeigen können, dass der linke Term in unserer Situation verschwindet, dann erhalten wir zusammen mit (2) für alle offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$ den gesuchten Isomorphismus

$$H_{\mathrm{dR}}^k(U) \xrightarrow{\cong} \varprojlim H_{\mathrm{dR}}^k(U_i) \cong \varprojlim H_{\mathrm{dR},0}^{n-k}(U_i)^* \xleftarrow{\cong} H_{\mathrm{dR},0}^{n-k}(U)^* .$$

3.62. DEFINITION. Es sei (V_i) eine Folge von \mathbb{k} -Vektorräumen und $f_i: V_{i+1} \rightarrow V_i$ seien lineare Abbildungen. Wir definieren den *abgeleiteten (inversen) Limes* durch

$$\varprojlim^1 V_i = \mathrm{coker}(D) ,$$

wobei

$$D: \prod_{i=0}^{\infty} V_i \longrightarrow \prod_{i=0}^{\infty} V_i \quad \text{gegeben sei durch} \quad D((v_i)_i) = (f_i(v_{i+1}) - v_i)_i .$$

3.63. PROPOSITION. *Es sei $U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset M$ eine aufsteigende Folge offener Teilmengen von M mit den Inklusionsabbildungen $j_i: U_i \rightarrow U_{i+1}$ und*

$$U = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i .$$

Dann gibt es eine natürliche kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \varprojlim^1 H_{\mathrm{dR}}^{k-1}(U_i) \longrightarrow H_{\mathrm{dR}}^k(U) \xrightarrow{(\iota_i)_i} \varprojlim H_{\mathrm{dR}}^k(U_i) \longrightarrow 0$$

BEWEIS. Wir betrachten eine Vereinigung offener Teilmengen

$$X = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i \times (0, 2^{-i}) \subset M \times (0, 1) .$$

Dann ist X Deformationsretrakt von $U \times (0, 1)$, und die Projektion auf den ersten Faktor liefert eine Homotopieäquivalenz $X \rightarrow U$. Wir betrachten offene Teilmengen

$$V = X \setminus \bigcup_{i=0}^n U_{2i} \times \{2^{-2i-1}\} \quad \text{und} \quad W = X \setminus \bigcup_{i=0}^n U_{2i+1} \times \{2^{-2i-2}\} ,$$

so dass $X = V \cup W$. Dann bestehen V und W aus Zusammenhangskomponenten der Form

$$(U_{i-1} \times (2^{-i-1}, 2^{-i+1})) \cup (U_i \times (2^{-i-1}, 2^{-i})) \xrightarrow{\simeq} U_i ,$$

die jeweils zu U_i homotopieäquivalent sind, und für gerade i zu V und für ungerade i zu W gehören. Insgesamt erhalten wir Homotopieäquivalenzen

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\simeq} \prod_{i=0}^{\infty} U_{2i} , & W &\xrightarrow{\simeq} \prod_{i=0}^{\infty} U_{2i+1} , \\ V \cap W &\xrightarrow{\simeq} \prod_{i=0}^{\infty} U_i & \text{und} & X = V \cup W \xrightarrow{\simeq} U , \end{aligned}$$

dabei bezeichnet \prod die disjunkte Vereinigung, und alle Abbildungen sind Projektionen auf den jeweils ersten Faktor.

Die zugehörige Mayer-Vietoris-Sequenz 3.41 hat daher die Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{\text{dR}}^k(X) & \xrightarrow{(\iota_V^*, \iota_W^*)} & H_{\text{dR}}^k(V) \oplus H_{\text{dR}}^k(W) & \xrightarrow{j_V^* - j_W^*} & H_{\text{dR}}^k(V \cap W) & \xrightarrow{\delta} & H_{\text{dR}}^{k+1}(X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{\text{dR}}^k(U) & \xrightarrow{(\iota_i^*)_i} & \prod_{i=0}^{\infty} H_{\text{dR}}^k(U_i) & \longrightarrow & \prod_{i=0}^{\infty} H_{\text{dR}}^k(U_i) & \longrightarrow & H_{\text{dR}}^{k+1}(U) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Um die Abbildung $j_V^* - j_W^*$ zu bestimmen, betrachten wir die obigen Homotopieäquivalenzen und Inklusionen, und erhalten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{dR}}^k(U_{i-1} \times (2^{-i}, 2^{-i+1})) & \xleftarrow{\cong} & H_{\text{dR}}^k(U_{i-1}) \\ \uparrow & & \uparrow j_{i-1}^* \\ H_{\text{dR}}^k\left(\left(U_{i-1} \times (2^{-i-1}, 2^{-i+1})\right) \cup \left(U_i \times (2^{-i-1}, 2^{-i})\right)\right) & \xleftarrow{\cong} & H_{\text{dR}}^k(U_i) \\ \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ H_{\text{dR}}^k(U_i \times (2^{-i-1}, 2^{-i})) & \xleftarrow{\cong} & H_{\text{dR}}^k(U_i) \end{array}$$

Von den beiden sekrechten Pfeilen links gehört einer zu $j_V^*: H_{\text{dR}}^k(V) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(V \cap W)$, der andere zu $j_W^*: H_{\text{dR}}^k(W) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(V \cap W)$. Also wird die Abbildung $j_V^* - j_W^*$ gegeben durch

$$(j_V^* - j_W^*)((a_i)_i) = ((-1)^i(a_i - j_i^* a_{i+1}))_i.$$

Sie stimmt gliedweise bis aufs Vorzeichen mit der Abbildung D^k aus Definition 3.62 überein und hat daher den gleichen Kern und den gleichen Kokern. Aus der Exaktheit der Mayer-Vietoris-Sequenz erhalten wir die gesuchte kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{coker}(D^{k-1}) \longrightarrow H_{\text{dR}}^k(U) \xrightarrow{(\iota_i^*)_i} \ker(D^k) \longrightarrow 0. \quad \square$$

Wegen Bemerkung 3.61 (3) benötigen wir ein Kriterium dafür, dass \varprojlim^1 verschwindet.

3.64. PROPOSITION (Mittag-Leffler-Bedingung). *Es sei (V_i) eine Folge von \mathbb{k} -Vektorräumen und $f_i: V_{i+1} \rightarrow V_i$ seien lineare Abbildungen. Wenn für jedes i die absteigende Folge*

$$V_i \supset \text{im}(f_i) \supset \text{im}(f_i \circ f_{i+1}) \supset \cdots$$

stationär wird, gilt

$$\varprojlim^1 V_i = 0.$$

BEWEIS. Wir betrachten eine neue Folge $(V'_i, f'_i)_i$ mit

$$V'_i = \bigcap_{j \geq i} \text{im}(f_i \circ \cdots \circ f_j) \subset V_i \quad \text{und} \quad f'_i = f_i|_{V'_{i+1}}: V'_{i+1} \longrightarrow V'_i.$$

In der Tat folgt aus der Konstruktion der V'_i , dass $\text{im}(f_i|_{V'_{i+1}}) \subset V'_i$ gilt. Sei $V''_i = V_i/V'_i$, dann induzieren die Abbildungen f_i Morphismen $f''_i: V''_{i+1} \rightarrow V''_i$, und wir erhalten eine kurze exakte

Sequenz von Folgen von Abbildungen der Form

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & V'_{i+1} & \xrightarrow{j_{i+1}} & V_{i+1} & \xrightarrow{q_{i+1}} & V''_{i+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow f'_i & & \uparrow f_i & & \uparrow f''_i \\
 0 & \longrightarrow & V'_i & \xrightarrow{j_i} & V_i & \xrightarrow{q_i} & V''_i \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

In den Übungen zeigen wir $\lim_{\longleftarrow}^1 V'_i = \lim_{\longleftarrow}^1 V''_i = 0$ mit der Mittag-Leffler-Bedingung für (V_i, f_i) . Daraus folgern wir dann, dass $\lim_{\longleftarrow}^1 V_i = 0$. \square

3.65. SATZ (Poincaré-Dualität). *Es sei M eine orientierte, glatte n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann induziert Integration über M für alle $0 \leq k \leq n$ einen Isomorphismus*

$$H_{\text{dR}}^k(M) \longrightarrow H_{\text{dR},0}^{n-k}(M)^* .$$

BEWEIS. Der Beweis hat drei Schritte. Der erste Schritt ist Bemerkung 3.57. Für endliche Vereinigungen konvexer Teilmengen des \mathbb{R}^n hatten wir dort Poincaré-Dualität bewiesen und zusätzlich gezeigt, dass die Räume $H_{\text{dR}}^k(U)$ und $H_{\text{dR},0}^{n-k}(U)$ endlich-dimensional sind.

Für den zweiten Schritt sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wie in Bemerkung 3.61 schreiben wir U als aufsteigende Vereinigung einer Folge offener Teilmengen U_i . Dabei dürfen wir annehmen, dass U_i Vereinigung von i konvexen Mengen ist. Beispielsweise können wir U als abzählbare Vereinigung metrischer Bälle schreiben.

Es bezeichne $j_i: U_i \rightarrow U_{i+1}$ die Inklusionsabbildung. Die Folge $(H_{\text{dR}}^k(U_i), j_i^*)$ erfüllt die Mittag-Leffler-Bedingung aus Proposition 3.64, denn da die Räume $H_{\text{dR}}^k(U_i)$ endlich-dimensional sind, wird jede absteigende Folge von Unterräumen irgendwann stationär. Insbesondere gilt

$$\lim_{\longleftarrow}^1 H_{\text{dR}}^k(U_i) = 0 .$$

Aus Bemerkung 3.61 (3) folgt Poincaré-Dualität für U und somit für alle offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n .

Für den letzten Schritt wählen wir einen endlichen Atlas von M . Man beachte, dass wir im zweiten Schritt nicht gefordert haben, dass U zusammenhängend ist. Folglich müssen die Kartengebiete unseres Atlanten nicht zusammenhängend sein. Aus allgemeinen topologischen Erwägungen folgt, dass $n+1$ Karten ausreichen. Mit dem Mayer-Vietoris-Argument aus dem ersten Schritt zeigen wir dann induktiv Poincaré-Dualität für Mannigfaltigkeiten, die von m Karten überdeckt werden. \square

Der obige Beweis ist dadurch so kompliziert, dass wir den abgeleiteten Limes verwendet haben. Wir hätten das umgehen können entweder, indem wir uns von vornherein auf kompakte Mannigfaltigkeiten beschränken und noch mehr Anleihen aus der Topologie von Mannigfaltigkeiten machen, oder indem wir *Homologie* $H_{\bullet}(M; A)$ einführen und einen Isomorphismus zwischen $H_{\text{dR},0}^k(M)$ und $H_k(M; \mathbb{R})$ konstruieren. Tatsächlich ist letzteres die schönere Fassung, da sie für alle Koeffizienten der Kohomologie funktioniert, nicht nur für \mathbb{R} . Im Gegensatz dazu gilt der obige Satz

allgemeiner nur für Koeffizienten in \mathbb{k} -Vektorräumen. Andernfalls erhielte man nur eine kurze exakte *universelle Koeffizienten-Sequenz* ähnlich wie in Proposition (3.63) mit einem zusätzlichen Ext-Term anstelle des abgeleiteten Limes.

Wenn M kompakt ist, kann man zeigen, dass $H_{\text{dR}}^k(M)$ für alle k endlich-dimensional ist. Sei insbesondere $n = 2k$ gerade, dann erhalten wir einen Isomorphismus

$$H_{\text{dR}}^k(M) \xrightarrow{\cong} H_{\text{dR},0}^{n-k}(M)^* \cong H_{\text{dR}}^k(M)^* ,$$

mit anderen Worten, eine nicht ausgeartete Bilinearform

$$B: H_{\text{dR}}^k(M) \times H_{\text{dR}}^k(M) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad B([\alpha], [\beta]) = \int_M \alpha \wedge \beta .$$

Falls $4|n$ ist k gerade und B somit symmetrisch nach Proposition 3.11 (3). Andernfalls ist B alternierend.

Wenn wir annehmen, dass $4|n$, dann sagt uns der Trägheitssatz von Sylvester, dass B bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt durch die Zahlen $n_+(B)$, $n_-(B)$ und $n_0(B) \in \mathbb{N}_0$. Dabei bezeichnet n_{\pm} die maximale Dimension eines Unterraums auf dem B positiv beziehungsweise negativ definit ist, und $n_0(B)$ ist die Dimension des Kerns von B . Es gilt stets $\dim H_{\text{dR}}^k(M) = n_+(B) + n_-(B) + n_0(B)$, und da B nicht ausgeartet ist, ist $n_0(B) = 0$.

3.66. DEFINITION. Es sei M eine orientierte kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 2k$. Dann heißt die Bilinearform $B: H_{\text{dR}}^k(M) \times H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$B([\alpha], [\beta]) = \int_M \alpha \wedge \beta$$

die *Schnittform* von M .

Falls k gerade ist, das heißt, falls $4|n$, heißt die Zahl $n_+(B) - n_-(B) \in \mathbb{Z}$ die *Signatur* von M , kurz $\text{sign}(M) = n_+(B) - n_-(B)$.

Die Signatur ist ähnlich wie die Eulerzahl aus Satz 2.51 eine grundlegende Invariante kompakter Mannigfaltigkeiten.

3.67. BEISPIEL. Die Sphäre $S^{4\ell}$ hat $H_{\text{dR}}^{2\ell}(S^{4\ell}) = 0$ und somit Signatur 0. Der komplex projektive Raum $\mathbb{C}P^{2\ell}$ mit der Standard-Orientierung hat Signatur $\text{sign}(\mathbb{C}P^{2\ell}) = 1$; das folgt aus den Übungen. Wenn wir die Orientierung auf $\mathbb{C}P^{2\ell}$ umkehren, erhalten wir stattdessen Signatur -1 .

3.68. BEMERKUNG. In den Übungen haben wir gesehen, dass $H_{\text{dR}}^0(M) \cong \mathbb{R}$, wenn M zusammenhängend ist. Wenn M überdies kompakt und orientiert ist mit $\dim M = n$, folgt $H_{\text{dR}}^n(M) \cong \mathbb{R}$ aus Poincaré-Dualität. Wir sehen, dass $H_{\text{dR}}^n(M)$ von den Formen aus dem Beweis von Folgerung 3.51 erzeugt wird. Insbesondere können wir jetzt den Beweis von Folgerung 3.53 vereinfachen, indem wir nur Formen mit Träger in einer ausreichend kleinen Umgebung eines regulären Werts von F betrachten.

Vektorbündel und charakteristische Klassen

Wir führen Vektorbündel und Zusammenhänge ein. Schnitte von Vektorbündeln verallgemeinern Funktionen, Vektorfelder und Differentialformen. Ein Zusammenhang auf einem Vektorbündel ermöglicht es, Richtungsableitungen zu definieren. Die Krümmung gibt dann an, inwieweit der Satz von Schwarz Gültigkeit behält. Aus der Krümmung lassen sich charakteristische de Rham-Kohomologieklassen extrahieren, die über die globale Struktur des Bündels Auskunft geben.

4.1. Vektorbündel

Wir definieren Vektorbündel auf Mannigfaltigkeiten und geben elementare Konstruktionen an. Im Folgenden sei stets $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} , und wir schreiben $\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k})$ für glatte, \mathbb{k} -wertige Funktionen. Alle Mannigfaltigkeiten seien glatt und können einen Rand haben, auch wenn das nicht explizit mit angegeben ist.

Wir erinnern uns an das Tangentialbündel aus Abschnitt 1.2. Es handelt sich um eine Mannigfaltigkeit TM zusammen mit einer glatten Abbildung $\pi: TM \rightarrow M$, so dass alle Fasern die Struktur eines \mathbb{R} -Vektorraums tragen. Darüber hinaus haben wir Karten der Form

$$d\varphi: \pi^{-1}(U^\varphi) \longrightarrow V^\varphi \times \mathbb{R}^n,$$

wobei $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$ eine Karte von M sei. Anstelle von $d\varphi$ könnten wir auch die Abbildung

$$\pi \times (\text{pr}_{\mathbb{R}^n} \circ d\varphi): \pi^{-1}(U^\varphi) \longrightarrow U^\varphi \times \mathbb{R}^n$$

betrachten. Man sieht, dass $\pi^{-1}(U^\varphi)$ isomorph ist zum Produkt $U^\varphi \times \mathbb{R}^n$, wobei zum einen Basispunkte in U^φ und zum anderen die Vektorraumstruktur auf den Fasern erhalten bleiben.

4.1. DEFINITION. Ein *glattes \mathbb{k} -Vektorbündel* über einer Mannigfaltigkeit M vom *Rang k* besteht aus einer Mannigfaltigkeit V , einer Abbildung $\pi: V \rightarrow M$ und einer \mathbb{k} -Vektorraumstruktur $(V_p, +, \cdot)$ auf $V_p = \pi^{-1}(p)$ für alle $p \in M$, so dass zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung U von p in M und eine glatte Abbildung $\psi: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{k}^k$ existiert, die für alle $q \in U$ einen \mathbb{k} -linearen Isomorphismus $\psi_q: V_q \rightarrow \mathbb{k}^k$ induziert, und so, dass $\pi|_U \times \psi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{k}^k$ ein Diffeomorphismus ist. Wir nennen V den *Totalraum*, π die *Fußpunktprojektion*, V_p die *Fasern*, die Abbildungen $\psi: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{k}^k$ *lokale Trivialisierungen*, und \mathbb{k}^k die *typische Faser* des Bündels. Wir schreiben kurz $\pi: V \rightarrow M$ oder nur V für das Bündel, wenn alle weiteren Strukturen klar sind.

Ein *glatter Schnitt* eines Vektorbündels $\pi: V \rightarrow M$ ist eine glatte Abbildung $s: M \rightarrow V$ mit $\pi \circ s = \text{id}_M$. Der Raum aller Schnitte von V wird mit $\Gamma(V)$ bezeichnet.

Seien $\pi: V \rightarrow M$ und $\rho: W \rightarrow M$ Vektorbündel, dann ist ein *Bündelhomomorphismus* eine glatte Abbildung $F: V \rightarrow W$ mit $\rho = F \circ \pi$, so dass für alle $p \in M$ die Abbildung $F_p: V_p \rightarrow W_p$ linear ist.

4.2. BEISPIEL. Wir kennen bereits

- (1) das *triviale Bündel* $\underline{\mathbb{R}} = M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ mit Schnitten $\Gamma(M \times \mathbb{R}) = \mathcal{C}^\infty(M)$, oder allgemeiner $\underline{\mathbb{k}^n} = M \times \mathbb{k}^n \rightarrow M$, und
- (2) das *Tangentialbündel* $TM \rightarrow M$ mit Schnitten $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$, siehe Proposition 1.21.

4.3. BEMERKUNG. Es sei $V \rightarrow M$ ein \mathbb{k} -Vektorbündel. Dann bilden der Raum der Schnitte $\Gamma(V)$ ein $\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k})$ -Modul.

4.4. BEISPIEL. Es sei $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} , $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{k}P^n = (\mathbb{k}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{k}^\times$ der projektive Raum. Wir definieren das *tautologische Bündel* $\pi: \tau \rightarrow \mathbb{k}P^n$ durch

$$\tau = \{ (v, [x]) \in \mathbb{k}^{n+1} \times \mathbb{k}P^n \mid v \in [x] \cup \{0\} \} \quad \text{mit} \quad \pi(v, [x]) = [x] .$$

Somit ist die Faser $\tau_{[x]}$ gerade der Unterraum $\mathbb{k} \cdot x \subset \mathbb{k}^{n+1}$. Um zu überprüfen, dass τ tatsächlich ein Vektorbündel ist, betrachten wir affine Koordinaten

$$\varphi_i: U_i = \{ [x_0: \dots: x_n] \mid x_i \neq 0 \} \rightarrow \mathbb{k}^n \quad \text{mit} \quad [x_0: \dots: x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) .$$

Dazu konstruieren wir lokale Trivialisierungen

$$\psi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{k} \quad \text{mit} \quad \tau_{[x]} \ni (v, [x]) \mapsto v_i ,$$

die den Unterraum $\mathbb{k} \cdot x$ isomorph auf $\{\varphi_i(x)\} \times \mathbb{k}$ abbilden.

Auf $U_i \cap U_j$ erhalten wir eine *Übergangsfunktion* $g_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{k}^\times = Gl_1(\mathbb{k})$ mit

$$g_{ij}([x]) = \frac{x_i}{x_j} ,$$

so dass $\psi_i|_{\pi^{-1}(U_i \cap U_j)} = g_{ij} \cdot \psi_j|_{\pi^{-1}(U_i \cap U_j)}$.

4.5. BEMERKUNG. Es sei $\pi: V \rightarrow M$ ein Vektorbündel vom Rang ℓ .

(1) Seien $\psi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{k}^\ell$ lokale Trivialisierungen, dann sind die Abbildungen

$$g_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow Gl_\ell(\mathbb{k}) \quad \text{mit} \quad g_{ij}(p) = \psi_i \circ (\psi_j|_{V_p})^{-1}: \mathbb{k}^\ell \rightarrow \mathbb{k}^\ell$$

glatt und erfüllen die sogenannte *Kozykelbedingung*

$$(g_{jk} \cdot g_{ik}^{-1} \cdot g_{ij})(p) = E_\ell$$

für alle $i, j, k \in I$ und alle $p \in U_i \cap U_j \cap U_k$.

(2) Sei $s \in \Gamma(V)$ ein Schnitt, dann erfüllen die Abbildungen

$$s_i = \psi_i \circ s: U_i \rightarrow \mathbb{k}^\ell$$

die Bedingung

$$s_i(p) = g_{ij}(p) \cdot s_j(p)$$

für alle $i, j \in I$ und $p \in U_i \cap U_j$. Seien umgekehrt $s_i: U_i \rightarrow \mathbb{k}^\ell$ glatte Abbildungen, die dieser Bedingung genügen, dann existiert ein Schnitt $s \in \Gamma(V)$ mit $s_i = \psi_i \circ s$ für alle $i \in I$.

4.6. PROPOSITION. *Es sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von M , $\ell \in \mathbb{N}$, und für alle $i, j \in I$ sei $g_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow Gl_\ell(\mathbb{k})$ glatt, so dass für alle $i, j, k \in I$ die Kozykelbedingung*

$$(g_{jk} \circ g_{ik}^{-1} \circ g_{ij})(p) = E_\ell \quad \text{für alle} \quad p \in U_i \cap U_j \cap U_k$$

erfüllt ist. Dann existiert ein Vektorbündel $\pi: V \rightarrow M$ vom Rang ℓ mit lokalen Trivialisierungen $\psi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{k}^\ell$, so dass $\psi_i|_p = g_{ij}(p) \cdot \psi_j|_p: V_p \rightarrow \mathbb{k}^\ell$ für alle $p \in U_i \cap U_j$ gilt.

Schnitte von V werden gegeben durch glatte Abbildungen $s_i: U_i \rightarrow \mathbb{k}^\ell$ für alle $i \in I$, so dass

$$s_i(p) = g_{ij}(p) \cdot s_j(p)$$

für alle $i, j \in I$ und alle $p \in U_i \cap U_j$ gilt.

BEWEIS. Zur Konstruktion von V definiere eine Relation \sim auf $\bigcup_{i \in I} U_i \times \mathbb{k}^\ell$, so dass $(p, v) \sim (q, w)$ für $p \in U_i, q \in U_j$ genau dann gilt, wenn $p = q \in M$ und $v = g_{ij}(p) \cdot w \in \mathbb{k}^\ell$. Aufgrund der Kozykelbedingung handelt es sich um eine Äquivalenzrelation: Für $i = j = k$ folgt $g_{ii}(p) = E_\ell$ für alle $p \in U_i$, also ist \sim reflexiv. Für $i = k \neq j$ folgt $g_{ji}(p) = g_{ij}(p)^{-1}$, also ist \sim symmetrisch. Für beliebige i, j, k erhalten wir schließlich Transitivität.

Wir setzen

$$V = \bigcup_{i \in I} U_i \times \mathbb{k}^\ell / \sim .$$

Für $(p, v), (q, w) \in U_i \times \mathbb{k}^\ell$ gilt $(p, v) \sim (q, w)$ genau dann, wenn $p = q$ und $v = w$, also enthält V die einzelnen Mengen $U_i \times \mathbb{k}^\ell$ als Teilmengen. Eine Teilmenge $U \subset V$ sei offen genau dann, wenn $U \cap U_i \times \mathbb{k}^\ell$ für alle $i \in I$ bezüglich der Produkttopologie offen ist. Man kann überprüfen, dass V dadurch zu einem Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis wird. Seien Karten $\varphi_i: U_i \rightarrow X_i \subset \mathbb{R}^n$ von M gegeben, dann erhalten wir Karten $\varphi_i \times id_{\mathbb{k}^\ell}: U_i \times \mathbb{k}^\ell \rightarrow X_i \times \mathbb{k}^\ell$ von V , und man überzeugt sich, dass alle Kartenwechsel glatt sind.

Schließlich induziert die Vektorraumstruktur auf der typischen Faser \mathbb{k}^ℓ eine Vektorraumstruktur auf allen Fasern V_p , passend zu den lokalen Trivialisierungen $\psi_i = U_i \times \mathbb{k}^\ell \rightarrow \mathbb{k}^\ell$ mit $\psi_i(p, v) = v$. Also ist $\pi: V \rightarrow M$ ein Vektorbündel.

Schnitte von V werden wie in Bemerkung 4.5 (2) beschrieben. \square

4.7. BEMERKUNG. (1) Eine *direkte Summe* von A und B ist ein R -Modul C mit zwei R -linearen Abbildungen $p_A: C \rightarrow A$ und $p_B: C \rightarrow B$, so dass zu jedem R -Modul D mit R -linearen Abbildungen $f: D \rightarrow A$ und $g: D \rightarrow B$ existiert genau eine Abbildung $h: D \rightarrow C$, so dass die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ & \nearrow & \downarrow p_A \\ D & \xrightarrow{f} & A \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} & C & \\ & \nearrow & \downarrow p_B \\ D & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

kommutieren. Direkte Summen sind bis auf eindeutige R -Modul-Isomorphismen eindeutig bestimmt und werden realisiert durch das kartesische Produkt

$$A \oplus B = A \times B \quad \text{mit} \quad p_A(a, b) = a \quad \text{und} \quad p_B(a, b) = b .$$

(2) Ein *Tensorprodukt* von A und B über R ist ein R -Modul C mit einer R -bilinearen Abbildung $t: A \times B \rightarrow C$, so dass zu jedem R -Modul D und jeder R -bilinearen Abbildung $f: A \times B \rightarrow D$ genau eine R -lineare Abbildung $h: C \rightarrow D$ existiert, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ & \uparrow t & \searrow \\ A \times B & \xrightarrow{f} & D \end{array}$$

kommutiert. Tensorprodukte sind bis auf eindeutige R -Modul-Isomorphismen eindeutig bestimmt und werden realisiert durch

$$A \otimes_R B = \left\langle A \times B \mid \begin{array}{l} (a_1 + a_2, b) = (a_1, b) + (a_2, b), \\ (a, b_1 + b_2) = (a, b_1) + (a, b_2), \\ (ar, b) = (a, rb) = r(a, b) \end{array} \right\rangle .$$

(3) Das duale Modul $A^* = \text{Hom}_R(A, R) = \Lambda_R^1 A$ und die äußeren Potenzen $\Lambda_R^k A$ werden analog zu Definition 3.9 erklärt.

4.8. PROPOSITION UND DEFINITION. *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} , und $V, W \rightarrow M$ zwei glatte \mathbb{k} -Vektorbündel. Dann existieren bis auf eindeutige Vektorbündelisomorphismen eindeutige Vektorbündel $V \oplus W$ (die Whitney-Summe), $V \otimes_{\mathbb{k}} W$ (das Whitney-Produkt), V^* (das duale Bündel), $\Lambda_{\mathbb{k}}^k V$ (die k -te äußere Potenz), $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$ (das Homomorphismenbündel), so dass*

$$\Gamma(V \oplus W) \cong \Gamma(V) \oplus \Gamma(W), \quad (1)$$

$$\Gamma(V \otimes_{\mathbb{k}} W) \cong \Gamma(V) \otimes_{\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k})} \Gamma(W), \quad (2)$$

$$\Gamma(V^*) \cong \Gamma(V)^*, \quad (3)$$

$$\Gamma(\Lambda_{\mathbb{k}}^k V) \cong \Lambda_{\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k})}^k \Gamma(V) \quad (4)$$

$$\text{und } \Gamma(\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k})}(\Gamma(V), \Gamma(W)). \quad (5)$$

BEWEIS. Zunächst seien $V \cong M \times \mathbb{k}^r$ und $W \cong M \times \mathbb{k}^s \rightarrow M$ trivial. Dann existieren Basen (v_1, \dots, v_r) von $\Gamma(V)$ und (w_1, \dots, w_s) von $\Gamma(W)$ über $\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k})$ aus konstanten Schnitten. Wir definieren die duale Basis (v^1, \dots, v^r) durch

$$v^i \left(\sum_{j=1}^r f^j v_j \right) = f^i \in \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k}).$$

Dann betrachten wir triviale Bündel

$$V \oplus W \cong M \times \mathbb{k}^{r+s} \quad \text{mit Basis } (v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s),$$

$$V \otimes_{\mathbb{k}} W \cong M \times \mathbb{k}^{rs} \quad \text{mit Basis } (v_i \otimes w_j)_{i,j},$$

$$V^* \cong M \times \mathbb{k}^r \quad \text{mit Basis } (v^i)_i$$

$$\Lambda_{\mathbb{k}}^k V \cong M \times \mathbb{k}^{\binom{r}{k}} \quad \text{mit Basis wie in Proposition 3.14 (1),}$$

$$\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W) \cong M \times \mathbb{k}^{rs} \quad \text{mit Basis } (v^i \otimes w_j)_{i,j}.$$

Man überzeugt sich, dass die Bedingungen (1)–(5) erfüllt sind. Betrachte beispielsweise zu (2) die natürliche bilineare Abbildung $\otimes: \Gamma(V) \times \Gamma(W) \rightarrow \Gamma(V \otimes_{\mathbb{k}} W)$. Sei D ein $\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k})$ -Modul und $h: \Gamma(V) \times \Gamma(W) \rightarrow D$ eine $\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k})$ -bilineare Abbildung wie in Bemerkung 4.7 (2), dann definiere $\bar{h}: \Gamma(V \otimes_{\mathbb{k}} W) \rightarrow D$ durch

$$\bar{h}(v_i \otimes w_j) = h(v_i, w_j).$$

Dadurch ist \bar{h} bereits eindeutig bestimmt, und es folgt

$$\begin{aligned} h \left(\sum_{a=1}^r f^a v_a, \sum_{b=1}^s g^b w_b \right) &= \sum_{a=1}^r \sum_{b=1}^s f^a g^b h(v_a, w_b) \\ &= \sum_{a=1}^r \sum_{b=1}^s f^a g^b \bar{h}(v_a \otimes w_b) = \bar{h} \left(\left(\sum_{a=1}^r f^a v_a \right) \otimes \left(\sum_{b=1}^s g^b w_b \right) \right). \end{aligned}$$

Seien jetzt zwei offene Überdeckungen von M gegeben, so dass V eingeschränkt auf die Mengen der ersten und W auf den Mengen der zweiten Überdeckung trivial ist. Dann sind beide Bündel eingeschränkt auf den Durchschnitt je einer Menge der ersten und einer der zweiten Überdeckung trivial. Also existiert eine Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$, so dass $V|_{U_i}$ und $W|_{U_i}$ für alle $i \in I$ trivial sind. Wir wählen lokale Trivialisierungen ψ_i von V und ρ_i von W und erhalten Basen $(v_1^{(i)}, \dots, v_r^{(i)})$ von $\Gamma(V|_{U_i})$ und $(w_1^{(i)}, \dots, w_s^{(i)})$ von $\Gamma(W|_{U_i})$ wie oben, so dass $\psi_i(v_a^{(i)}) = e_a \in \mathbb{k}^r$ und $\rho_i(w_b^{(i)}) =$

$e_b \in \mathbb{k}^s$. Wir erhalten $g_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow Gl_r(\mathbb{k})$ und $h_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow Gl_s(\mathbb{k})$ wie in Bemerkung 4.5 (1), und auf $U_i \cap U_j$ gilt

$$\begin{aligned} v_a^{(i)}|_p &= (\psi_j|_p)^{-1}e_a = (\psi_i|_p)^{-1}(\psi_i|_p \circ (\psi_j|_p)^{-1})e_a \\ &= (\psi_i|_p)^{-1} \sum_{b=1}^r (g_{ij}(p))_{ba}e_b = \sum_{b=1}^r (g_{ij}(p))_{ba}v_b^{(i)}|_p . \end{aligned}$$

Wenn wir analog die obigen, von den lokalen Trivialisierungen auf U_j abgeleiteten Basen von $\Gamma(V \oplus W|_{U_i \cap U_j})$ etc. durch die entsprechend von den lokalen Trivialisierungen auf U_i abgeleiteten Basen darstellen, erhalten wir die Übergangsmatrizen

$$\begin{aligned} &g_{ij}(p) \oplus h_{ij}(p) && \text{für } V \oplus W , \\ &g_{ij}(p) \otimes h_{ij}(p) && \text{für } V \otimes_{\mathbb{k}} W \\ \text{und } &(g_{ij}(p)^t)^{-1} && \text{für } V^* , \end{aligned}$$

wobei die *direkte Summe* und das *Kroneckerprodukt* zweier Matrizen gegeben sind durch

$$G \oplus H = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (G \otimes H)_{a+r(c-1), b+r(d-1)} = g_{ab} \cdot h_{cd} .$$

Für die direkte Summe und das Tensorprodukt überprüft man leicht, dass die Übergangsmatrizen entsprechend gegeben sind.

Es bezeichne $(v_1^{(i)}, \dots, v_r^{(i)})$ die zu $(v_1^{(j)}, \dots, v_r^{(j)})$ duale Basis. Dann folgt

$$\begin{aligned} v_{(j)}^a \left(\sum_{b=1}^r f^b v_b^{(i)} \right) &= v_{(j)}^a \left(\sum_{b,c=1}^r f^b \cdot (g_{ij})_{cb} v_c^{(j)} \right) \\ &= \sum_{b=1}^r f^b \cdot (g_{ij}^{-1})_{ab} = \left(\sum_{a,c=1}^r (g_{ij}^{-1})_{ac} v_c^{(i)} \right) \left(\sum_{b=1}^r f^b v_b^{(i)} \right) , \end{aligned}$$

somit sind $(g_{ij}^{-1})^t = (g_{ij}^t)^{-1}: U_i \cap U_j \rightarrow Gl_r(\mathbb{k})$ die Übergangsmatrizen für V^* .

Für $\Lambda_{\mathbb{k}}^k V$ finden wir analoge Übergangsmatrizen, indem wir Basiswechselmatrizen für die Basen aus Proposition 3.14 (1) bestimmen. Da wir die Übergangsmatrizen als Basiswechselmatrizen bestimmt haben, ist die Kozykelbedingung in allen Fällen automatisch erfüllt. Also erhalten wir Vektorbündel $V \oplus W$, $V \otimes_{\mathbb{k}} W$, V^* und $\Lambda_{\mathbb{k}}^k V$ mit Hilfe von Proposition 4.6. Außerdem setzen wir

$$\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W) = V^* \otimes_{\mathbb{k}} W .$$

Damit haben wir die Bündel konstruiert und müssen jetzt die Eigenschaften (1) – (5) prüfen. Für die direkte Summe sehen wir, dass $\Gamma(V) \times \Gamma(W) \cong \Gamma(V \oplus W)$. Dabei werden $\sigma \in \Gamma(V)$, $\tau \in \Gamma(W)$ abgebildet auf $\sigma \oplus \tau$ mit

$$\sigma \oplus \tau|_{U_i} = (\sigma|_{U_i}, \tau|_{U_i}) \in \Gamma(V \oplus W|_{U_i})$$

Mit Bemerkung 4.7 (1) folgt (1).

Als nächstes definieren wir eine $\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k})$ -bilineare Abbildung $\otimes: \Gamma(V) \times \Gamma(W) \rightarrow \Gamma(V \otimes_{\mathbb{k}} W)$ durch

$$\sigma \otimes \tau|_{U_i} = (\sigma|_{U_i}) \otimes (\tau|_{U_i}) \in \Gamma(V|_{U_i}) \otimes_{\mathcal{C}^\infty(U_i, \mathbb{k})} \Gamma(W|_{U_i}) = \Gamma(V \otimes W|_{U_i}) .$$

Sei wieder D ein $\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k})$ -Modul und $h: \Gamma(V) \times \Gamma(W) \rightarrow D$ eine $\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k})$ -bilineare Abbildung. Dann müssen wir nach Bemerkung 4.7 (2) zeigen, dass es genau eine lineare Abbildung $\bar{h}: \Gamma(V \otimes W) \rightarrow D$ mit $\bar{h} \circ \otimes = h$ gibt.

Dazu benutzen wir, dass es stets eine endliche Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ gibt, so dass $V|_{U_i}$ und $W|_{U_i}$ für alle $i \in I$ trivial sind (es reichen $\dim M + 1$ Mengen). Sei $(\rho_i)_{i \in I}$ eine untergeordnete Partition der Eins, und seien $\vartheta_i: M \rightarrow [0, 1]$ glatte Funktionen mit

$$\text{supp } \vartheta_i \subset U_i \quad \text{und} \quad \vartheta_i|_{\text{supp } \rho_i} \equiv 1 .$$

Dann definieren wir $h_i: \Gamma(V|_{U_i}) \times \Gamma(W|_{U_i})$ durch

$$h_i(\sigma_i, \tau_i) = \rho_i h(\vartheta_i \sigma_i, \vartheta_i \tau_i)$$

für $\sigma_i \in \Gamma(V|_{U_i})$, $\tau_i \in \Gamma(W|_{U_i})$, indem wir $\vartheta_i \sigma_i$ und $\vartheta_i \tau_i$ als Schnitte auf ganz M auffassen. Wir haben oben bereits gesehen, dass es eine eindeutige Abbildung

$$\bar{h}_i: \Gamma(V \otimes_{\mathbb{k}} W|_{U_i}) \rightarrow D \quad \text{mit} \quad \bar{h}_i \circ \otimes = h_i$$

gibt. Einschränken liefert eine $\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k})$ -lineare Abbildung

$$\bar{h}_i: \Gamma(V \otimes_{\mathbb{k}} W) \rightarrow \Gamma(V \otimes W|_{U_i}) \rightarrow D .$$

Für $\sigma \in \Gamma(V)$, $\tau \in \Gamma(W)$ ist $\bar{h}(v \otimes w)^{\in D}$ jetzt eindeutig festgelegt als die endliche Summe

$$\bar{h}(\sigma \otimes \tau) = h(\sigma, \tau) = \sum_{i \in I} \rho_i h(\sigma, \tau) = \sum_{i \in I} h_i(\sigma, \tau) = \sum_{i \in I} \bar{h}_i(\sigma \otimes \tau) .$$

Also erfüllt $\otimes: \Gamma(V) \times \Gamma(W) \rightarrow \Gamma(V \otimes_{\mathbb{k}} W)$ die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes, und es folgt (2).

Um (3)–(5) zu zeigen, überlegt man sich wie in Proposition 3.14, dass für $\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k})$ -(multi-)lineare Abbildungen $\alpha: \Gamma(V)^k \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k})$ und $F: \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(W)$ die Werte $\alpha(\sigma_1, \dots, \sigma_k)_p \in \mathbb{k}$ und $F(\sigma)_p \in W_p$ nur von $\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p)$ beziehungsweise von $\sigma(p)$ abhängen. Dann folgt leicht, dass α und F eindeutig durch Schnitte von $\Lambda^k V$ beziehungsweise von $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$ repräsentiert werden. Umgekehrt liefert jeder solche Schnitt eine entsprechende $\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k})$ -(multi-)lineare Abbildung. \square

Die Argumente im Beweis der obigen Proposition, insbesondere in Verbindung mit Proposition 3.14 legen nahe, grundsätzlich alle geometrischen Objekte, die an jedem Punkt einer Mannigfaltigkeit definiert werden können, als Schnitte in Vektorbündeln aufzufassen. Und jede (multi-)lineare Operation mit solchen Objekten, die punktweise durchgeführt werden kann, sollte einem Schnitt in einem Formen- oder Homomorphismenbündel entsprechen.

4.9. BEISPIEL. (1) Es gilt $TS^2 \cong TCP^1 \cong (\tau \otimes_{\mathbb{C}} \tau)_{\mathbb{R}}$ (Übung).

(2) Nach (4) gilt $\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k TM)$.

(3) Wir können eine Riemannsche Metrik g und ihren Krümmungstensor auffassen als

$$g \in \Gamma((TM \otimes TM)^*) = \Gamma(T^*M \otimes T^*M) \quad \text{und} \quad R \in \Gamma(\Lambda^2 TM \otimes \text{Hom}_{\mathbb{R}}(TM, TM)) \\ \subset \Gamma(\text{Hom}_{\mathbb{R}}(TM \otimes TM \otimes TM, TM))$$

4.10. PROPOSITION UND DEFINITION. *Es sei $F: N \rightarrow M$ glatt und $\pi: V \rightarrow M$ ein Vektorbündel, dann ist*

$$F^*V = \{(q, v) \in N \times V \mid F(q) = \pi(V)\} \rightarrow N \quad \text{mit} \quad (q, v) \mapsto q$$

ein Vektorbündel über N mit $(F^*V)_q \cong V_{F(q)}$ via $(q, v) \mapsto v$, das zurückgezogene Vektorbündel.

BEWEIS. (Übung) \square

4.11. BEMERKUNG. Ein Schnitt $\sigma \in \Gamma(F^*V)$ ist nichts anderes als eine Abbildung $\sigma: N \rightarrow V$ mit $\pi \circ \sigma = F$. Also sind Vektorfelder längs einer Abbildung F Schnitte in F^*TM , und es folgt $\mathfrak{X}(F) = \Gamma(F^*TM)$.

4.2. Metriken und Zusammenhänge

Um Geometrie mit Vektorbündeln zu betreiben, führen wir Metriken und Zusammenhänge auf Vektorbündeln ein. Das Vorgehen ist analog wie in der Riemannschen Geometrie. Im Gegensatz zum Levi-Civita-Zusammenhang gibt es auf beliebigen Vektorbündeln in der Regel keinen ausgezeichneten Zusammenhang.

4.12. DEFINITION. Es sei $V \rightarrow M$ ein reelles (komplexes) Vektorbündel. Eine *Metrik* g auf V ordnet jedem $p \in M$ ein (hermitesches) Skalarprodukt g_p auf V_p zu, so dass für alle $\sigma, \tau \in \Gamma(V)$ die Funktion $p \mapsto g_p(\sigma(p), \tau(p))$ auf M glatt ist.

4.13. BEMERKUNG. Es sei g eine Metrik auf $V \rightarrow M$.

(1) Falls $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ist, können wir g auffassen als

$$g \in \Gamma(V \otimes_{\mathbb{R}} V)^* \cong \Gamma((V \otimes_{\mathbb{R}} V)^*) \cong \Gamma(V^* \otimes_{\mathbb{R}} V^*) \cong \Gamma(\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V^*)) .$$

Da g positiv definit, also insbesondere nicht ausgeartet ist, ist g invertierbar. Also liefert g einen Isomorphismus $V \cong V^*$. Da g symmetrisch ist, ist die Abbildung $g: V \rightarrow V^*$ selbstadjungiert.

(2) Falls $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ ist, definieren wir $\bar{V} \rightarrow M$ als Vektorbündel mit Totalraum $\bar{V} = V$ und Vektorraumstruktur $(z, v) \mapsto \bar{z}v$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $v \in \bar{V}$. Analog zum obigen erhalten wir

$$g \in \Gamma(\bar{V}^* \otimes_{\mathbb{C}} V^*) \cong \Gamma(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\bar{V}, V^*)) \cong \Gamma(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \bar{V}^*)) ,$$

also liefert g zueinander adjungierte \mathbb{C} -lineare Isomorphismen $g: \bar{V} \rightarrow V^*$ und $g^*: V \rightarrow \bar{V}^*$, so dass für $\sigma \in \Gamma(V)$, $\tau \in \Gamma(\bar{V})$ gilt

$$(g(\tau))(\sigma) = g(\tau, \sigma) = (g^*(\sigma))(\tau) .$$

(3) Mit dem Gram-Schmidt-Verfahren können wir lokale Trivialisierung $\psi_i: V|_{U_i} \rightarrow \mathbb{k}^r$ stets so wählen, dass $\psi_i|_p: (V_p, g_p) \rightarrow (\mathbb{k}^r, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ für alle $p \in U_i$ eine lineare Isometrie ist. In diesem Fall nehmen die Übergangsfunktionen g_{ij} aus Bemerkung 4.5 Werte in $O(r)$ beziehungsweise $U(r)$ an. Wir sagen auch, V habe eine $O(n)$ - beziehungsweise $U(n)$ -Struktur. Insbesondere gilt

$$\bar{g}_{ij} = (g_{ij}^t)^{-1} ,$$

das heißt, \bar{V} und V^* (und analog V und \bar{V}^*) haben dieselben Übergangsfunktionen.

4.14. DEFINITION. Es sei $V \rightarrow M$ ein \mathbb{k} -Vektorbündel. Ein *Zusammenhang* auf V ist eine Abbildung $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(V)$, die $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linear in $\mathfrak{X}(M)$ und \mathbb{k} -linear in $\Gamma(V)$ ist, und für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k})$ und $\sigma \in \Gamma(V)$ die Produktregel

$$\nabla_X(f \cdot \sigma) = X(f) \cdot \sigma + f \cdot \nabla_X \sigma$$

erfüllt. Sei g eine Metrik auf V , dann heißt ∇ *metrisch* bezüglich g , wenn für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ und alle $\sigma, \tau \in \Gamma(V)$ die folgende Produktregel gilt:

$$X(g(\sigma, \tau)) = g(\nabla_X \sigma, \tau) + g(\sigma, \nabla_X \tau) .$$

4.15. BEMERKUNG. Es sei $V \rightarrow M$ ein Vektorbündel, $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M mit lokalen Trivialisierungen $\psi_i: V|_{U_i} \rightarrow \mathbb{k}^r$, und $(\rho_i)_{i \in I}$ eine Partition der Eins zu \mathcal{U} .

(1) Dann definiert

$$g(\sigma, \tau) = \sum_{i \in I} \rho_i \sum_{a=1}^r \overline{(\psi_i^a \circ \sigma)} \cdot (\psi_i^a \circ \tau)$$

für alle $\sigma, \tau \in \Gamma(V)$ eine Metrik auf V , denn g ist glatt, sesquilinear, alle Summanden sind positiv semidefinit, und für alle $p \in M$ existiert ein $i \in I$ mit $\rho_i(p) > 0$, so dass der entsprechende Summand der ersten Summe auf V_p positiv definit ist.

In den Übungen sehen wir, dass alle Metriken isomorph sind, so dass die Auswahl einer Metrik auf V allein die Geometrie noch nicht festlegt — auf TM und davon abgeleiteten Bündeln gilt das nicht, da Elemente von $TM, \Lambda^k TM$ etc. bereits eine geometrische Bedeutung haben, so dass hier die Metrik doch eine Rolle spielt.

- (2) Wir identifizieren Schnitte von $V|_{U_i}$ mit \mathbb{k}^r -wertigen Funktionen und erhalten einen (trivialen) Zusammenhang ∇^i auf $V|_{U_i}$ mit

$$\psi_i \circ (\nabla_X^i \sigma) = X(\sigma \circ \psi_i) .$$

Wir konstruieren einen Zusammenhang ∇ auf $V \rightarrow M$ für $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\sigma \in \Gamma(V)$ durch

$$\nabla_X \sigma = \sum_{i \in I} \rho_i \cdot \nabla_X^i \sigma .$$

Für $f \in \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k})$ folgt dann

$$\begin{aligned} \nabla_X(f\sigma)|_p &= \sum_{i \in I} \rho_i(p) (\psi_i|_p)^{-1} (X(f \cdot (\psi \circ \sigma))) \\ &= \sum_{i \in I} \rho_i(p) (\psi_i|_p)^{-1} (X(f) \cdot (\psi \circ \sigma) + f \cdot X(\psi \circ \sigma)) \\ &= X(f) \cdot \sigma + f \cdot \nabla_X \sigma . \end{aligned}$$

- (3) Wenn wir in (2) mit lokalen Trivialisierungen durch Orthonormalbasen wie in Bemerkung 4.13 (3) starten, erhalten wir einen metrischen Zusammenhang, denn die Zusammenhänge ∇^i auf $V|_{U_i}$ sind dann metrisch, und für $\sigma, \tau \in \Gamma(V)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ folgt

$$\begin{aligned} g(\nabla_X \sigma, \tau) + g(\sigma, \nabla_X \tau) &= \sum_{i \in I} \rho_i (g(\nabla_X^i \sigma, \tau) + g(\sigma, \nabla_X^i \tau)) \\ &= \sum_{i \in I} \rho_i \cdot X(g(\sigma, \tau)) = X(g(\sigma, \tau)) . \end{aligned}$$

4.16. DEFINITION. Es sei $V \rightarrow M$ ein \mathbb{k} -Vektorbündel, dann heißt $\Lambda^k TM \otimes_{\mathbb{R}} V \rightarrow M$ das \mathbb{k} -Vektorbündel der V -wertigen k -Formen auf M , und wir schreiben

$$\Omega^k(M; V) = \Gamma(\Lambda^k TM \otimes_{\mathbb{R}} V) .$$

Sei $W \rightarrow M$ ein weiteres \mathbb{k} -Vektorbündel, dann definieren wir ein Produkt

$$\begin{aligned} \wedge : \Omega^k(M; \text{Hom}(V, W)) \times \Omega^\ell(M; V) &\longrightarrow \Omega^{k+\ell}(M; W) \\ \text{durch } ((\alpha \otimes F), (\beta \otimes \sigma)) &\longmapsto (\alpha \wedge \beta) \otimes (F(\sigma)) \end{aligned}$$

für alle $\alpha \in \Omega^k(M), \beta \in \Omega^\ell(M), F \in \Gamma(\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)), \sigma \in \Gamma(V)$.

Analog definieren wir Produkte wie zum Beispiel $\Omega^k(M) \times \Omega^\ell(M; V) \rightarrow \Omega^{k+\ell}(M; V)$ und $\Omega^k(M; \text{End } V) \times \Omega^\ell(M; \text{End } V) \rightarrow \Omega^{k+\ell}(M; \text{End } V)$. Das Symbol “ \wedge “ lassen wir mitunter weg.

4.17. PROPOSITION UND DEFINITION. *Es sei $V \rightarrow M$ ein Vektorbündel.*

- (1) *Zu jedem Zusammenhang ∇ auf V existieren Abbildungen $\nabla : \Omega^k(M; V) \rightarrow \Omega^{k+1}(M; V)$, so dass*

$$\begin{aligned} (\nabla \sigma)(X) &= \nabla_X \sigma \in \Gamma(V) \\ \nabla(\alpha \otimes \sigma) &= d\alpha \otimes \sigma + (-1)^k \alpha \wedge \nabla \sigma \end{aligned}$$

für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\sigma \in \Gamma(V)$ und $\alpha \in \Omega^k(M)$. Insbesondere gilt für $\beta \in \Omega^\ell(M; V)$, dass

$$\nabla(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \nabla\beta$$

und

$$\begin{aligned} (\nabla\beta)(X_0, \dots, X_\ell) &= \sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i \nabla_{X_i}(\beta(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_\ell)) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq \ell} (-1)^{i+j} \beta([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_\ell). \end{aligned}$$

- (2) Seien ∇, ∇' zwei Zusammenhänge auf V , dann operiert $\nabla' - \nabla$ durch Multiplikation mit einer End V -wertigen 1-Form $\nabla' - \nabla \in \Omega^1(M; \text{End } V)$. Falls ∇ und ∇' metrisch bezüglich einer Metrik g^V auf V sind, nimmt $\nabla' - \nabla$ Werte in den schief-adjungierten Endomorphismen an: für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$, und $\sigma, \tau \in \Gamma(V)$ gilt

$$g^V((\nabla' - \nabla)_X \sigma, \tau) + g^V(\sigma, (\nabla' - \nabla)_X \tau) = 0,$$

schreibe $\nabla' - \nabla \in \Omega^1(M; \mathfrak{so}(V))$ für $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ und $\nabla' - \nabla \in \Omega^1(M; \mathfrak{u}(V))$ für $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.

- (3) Das Quadrat ∇^2 operiert durch Multiplikation mit einer End V -wertigen 2-Form $F = \nabla^2 \in \Omega^2(M; \text{End } V)$, der Krümmung von ∇ , mit

$$F_{X,Y}\sigma = F(X, Y)(\sigma) = \nabla_X \nabla_Y \sigma - \nabla_Y \nabla_X \sigma - \nabla_{[X,Y]}\sigma.$$

Falls ∇ metrisch ist, gilt $F \in \Omega^2(M; \mathfrak{so}(V))$ beziehungsweise $F \in \Omega^2(M; \mathfrak{u}(V))$. Für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $\sigma, \tau \in \Gamma(V)$ gilt also

$$g^V(F_{X,Y}\sigma, \tau) + g^V(\sigma, F_{X,Y}\tau) = 0.$$

- (4) Für ∇, F wie oben gilt die zweite Bianchi-Identität

$$\nabla \circ F - F \circ \nabla = 0: \Omega^k(M; V) \rightarrow \Omega^{k+3}(M; V).$$

Als typische Anwendung von (2) sei ∇ ein Zusammenhang auf V , $\psi: V|_U \rightarrow \mathbb{k}^r$ eine lokale Trivialisierung und $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ die zugehörige Basis von $\Gamma(V|_U)$. Insbesondere gilt $d\sigma_i = 0$ für den von ψ induzierten trivialen Zusammenhang d . Dann existieren Formen $\omega_{ij} \in \Omega^1(U)$, so dass

$$\nabla\sigma_j = (\nabla - d)\sigma_j = \sum_{i=1}^r \omega_{ij} \otimes \sigma_i.$$

Die Form $\omega \in \Omega^1(U; M, (\mathbb{k}))$ heißt *Zusammenhangsform* von ∇ bezüglich ψ ; ihre Komponenten entsprechen den Christoffel-Symbolen der Riemannschen Geometrie.

Die Krümmung F verallgemeinert den Riemannschen Krümmungstensor R . In lokalen Trivialisierungen wird F durch 2-Formen Ω_{ij} beschrieben, so dass

$$F(\sigma_j) = \sum_{i=1}^r \Omega_{ij} \otimes \sigma_i, \quad \text{wobei} \quad \Omega_{ij} = d\omega_{ij} + \sum_{k=1}^r \omega_{ik} \wedge \omega_{kj},$$

kurz $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$. Die zweite Bianchi-Identität gilt daher auch für ∇^{TM} und R . Eine erste Bianchi-Identität ist für allgemeine Zusammenhänge nicht sinnvoll.

Man beachte, dass F nur den alternierenden Anteil der zweiten Ableitung eines Schnitts σ sieht. Dieser alternierende Anteil hängt nur vom Zusammenhang auf V ab und ist tensoriell in σ , hängt also nicht von den Ableitungen von σ ab. Die gesamte zweite Ableitung

$$\nabla_X^V \nabla_Y^V \sigma - \nabla_{\nabla_X^{TM} Y}^V \sigma$$

benötigt zusätzlich einen Zusammenhang ∇^{TM} auf TM , beispielsweise den Levi-Civita-Zusammenhang zu einer Riemannschen Metrik auf M . Die eigentliche Ableitungsinformation ist im symmetrischen Teil dieser zweiten Ableitung enthalten. Beispielsweise hängt die Konstruktion eines Laplace-Operators auf $\Gamma(V)$ vom symmetrischen Anteil der zweiten Ableitung ab, und von einer Riemannschen Metrik auf M .

BEWEIS. Wir müssen zunächst zeigen, dass $\nabla: \Omega^k(M; V) \rightarrow \Omega^{k+1}(M; V)$ wohldefiniert, also mit den Relationen aus Bemerkung 4.7 (2) verträglich ist. Sei dazu $f \in \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k})$, dann gilt

$$\begin{aligned} d(f\alpha) \wedge \sigma + (-1)^k \alpha \wedge \nabla \sigma &= df \wedge \alpha \wedge \sigma + f \cdot d\alpha \wedge \sigma + (-1)^k \alpha \wedge \nabla \sigma \\ &= d\alpha \wedge (f\sigma) + (-1)^k \alpha \wedge (df \wedge \sigma + f \cdot \nabla \sigma) \\ &= d\alpha \wedge (f\sigma) + (-1)^k \alpha \wedge \nabla(f\sigma). \end{aligned}$$

Analog beweist man die Produktregel.

Um die Cartan-Formel zu verallgemeinern, seien $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\nabla(\alpha \otimes \sigma))(X_0, \dots, X_k) &= d\alpha(X_0, \dots, X_k) \cdot \sigma + (-1)^k (d \wedge \nabla \sigma)(X_0, \dots, X_k) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i (X_i(\alpha(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k)) \cdot \sigma \\ &\quad + \alpha(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k) \cdot \nabla_{X_i} \sigma) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k) \otimes \sigma \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \nabla_{X_i} ((\alpha \otimes \sigma)(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k)) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} (\alpha \otimes \sigma)([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k). \end{aligned}$$

Zu (2) folgt auf Definition 4.14, dass $(\nabla' - \nabla)_X \sigma$ in beiden Argumenten $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linear ist. Somit gilt $\nabla' - \nabla \in \Omega^1(M; \text{End } V)$. Für $\alpha \otimes \sigma \in \Omega^k(M; V)$ folgt aus der Produktregel in (1), dass

$$(\nabla' - \nabla)(\alpha \otimes \sigma) = (-1)^k \alpha \wedge ((\nabla' - \nabla) \wedge \sigma) = (\nabla' - \nabla) \wedge (\alpha \otimes \sigma).$$

Seien ∇ und ∇' metrisch, dann gilt außerdem

$$0 = X(g(\sigma, \tau)) - X(g(\sigma, \tau)) = g(\nabla'_X \sigma - \nabla_X \sigma, \tau) + g(\sigma, \nabla'_X \tau - \nabla_X \tau).$$

Um (3) zu zeigen, benutzen wir die Cartan-Formel aus (1). Für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $\sigma \in \Gamma(V)$ gilt

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \sigma)(X, Y) &= \nabla_X((\nabla \sigma)(Y)) - \nabla_Y((\nabla \sigma)(X)) - (\nabla \sigma)([X, Y]) \\ &= \nabla_X \nabla_Y \sigma - \nabla_Y \nabla_X \sigma - \nabla_{[X, Y]} \sigma = F \sigma. \end{aligned}$$

Für $\beta = \alpha \otimes \sigma \in \Omega^k(M, V)$ folgt $\nabla(\nabla \beta) = F \wedge \beta$ aus der obigen Formel und der Produktregel:

$$\begin{aligned} \nabla^2(\alpha \otimes \sigma) &= \nabla((\nabla \alpha) \otimes \sigma + (-1)^k \alpha \wedge \nabla \sigma) \\ &= (d^2 \alpha) \otimes \sigma + (-1)^{k+1} (d\alpha) \wedge (\nabla \sigma) + (-1)^k (d\alpha) \wedge (\nabla \sigma) + \alpha \wedge (\nabla^2 \sigma) \\ &= \alpha \wedge (F \sigma) = F(\alpha \otimes \sigma). \end{aligned}$$

Sei ∇ metrisch, dann ist $F_{X, Y}$ schiefadjungiert.

Schließlich ergibt sich (4) unmittelbar aus (3), denn

$$\nabla \circ F - F \circ \nabla = \nabla \circ \nabla \circ \nabla - \nabla \circ \nabla \circ \nabla = 0. \quad \square$$

4.18. BEMERKUNG. (1) Um einen Zusammenhang in einer lokalen Trivialisierung zu beschreiben, vergleichen wir ihn über U mit dem trivialen Zusammenhang aus Bemerkung 4.15 (2). Nach Proposition 4.17 (2) ist die Differenz ein Element $\omega \in \Omega^1(U; \text{End } \underline{\mathbb{k}}^r)$, die *Zusammenhangs-1-Form*. Für ein Vektorfeld X schreiben wir also

$$\psi \circ (\nabla_X s) = X(\psi \circ s) + \omega(X) \cdot (\psi \circ s) ,$$

beziehungsweise kurz $\psi_i \circ \nabla = (d + \omega_i) \circ \psi_i$. Da $\text{End } \mathbb{k}^r = M_r(\mathbb{k})$ gilt, können wir ω_i als eine Matrix auffassen, deren Einträge 1-Formen sind.

Wenn V eine Metrik g trägt, wählen wir lokale Trivialisierungen so, dass $g(s, t) = \langle \psi \circ s, \psi \circ t \rangle$ gilt. In diesem Fall nimmt ω Werte in $\mathfrak{o}(r) = \mathfrak{so}(r)$ beziehungsweise $\mathfrak{u}(r)$ an, denn

$$\begin{aligned} \langle (d + \omega)(\psi \circ s), \psi \circ t \rangle + \langle \psi \circ s, (d + \omega)(\psi \circ t) \rangle &= \psi \circ (g(\nabla s, t) + g(s, \nabla t)) \\ &= d(\langle \psi \circ s, \psi \circ t \rangle) = \langle d(\psi \circ s), \psi \circ t \rangle + \langle \psi \circ s, d(\psi \circ t) \rangle , \end{aligned}$$

und somit $0 = \langle \omega \cdot \psi, \psi \rangle + \langle \psi, \omega \cdot \psi \rangle$.

(2) Um die Zusammenhangs-1-Formen zu verschiedenen Trivialisierungen zu vergleichen, benutzen wir die Übergangsfunktionen $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_r(\mathbb{k})$ mit $\psi_i = g_{ij} \cdot \psi_j$ über $U_i \cap U_j$. Wir berechnen $\psi_i \circ \nabla$ auf zwei Arten und erhalten

$$\psi_i \circ \nabla = g_{ij} \cdot \psi_j \circ \nabla = g_{ij} \cdot (d + \omega_j) \circ \psi_j$$

$$\text{und } \psi_i \circ \nabla = (d + \omega_i) \circ \psi_i = (d + \omega_i) \circ g_{ij} \cdot \psi_j = g_{ij} \cdot d \circ \psi_j + (dg_{ij} + \omega_i \cdot g_{ij}) \cdot \psi_j .$$

Wir vergleichen die Koordinaten-1-Formen und erhalten

$$\omega_j = g_{ij}^{-1} \cdot (dg_{ij} + \omega_i \cdot g_{ij}) \in \Omega^1(U_i \cap U_j; M_r(\mathbb{k})) .$$

(3) Wir berechnen die Krümmung in der Trivialisierung ψ_i und erhalten

$$\psi_i \circ \nabla \circ \nabla = (d + \omega_i) \circ (d + \omega_i) \circ \psi_i = (d\omega_i + \omega_i \wedge \omega_i) \circ \psi_i .$$

Hierbei bedeutet $\omega_i \wedge \omega_i$, dass wir die Matrix ω_i quadrieren und dabei die einzelnen 1-Formen in den Einträgen mit dem Dachprodukt multiplizieren. Wir definieren die *Krümmungsmatrix*

$$\Omega_i = d\omega_i + \omega_i \wedge \omega_i .$$

(4) Ähnlich wie in (2) kann man nachrechnen, dass

$$\Omega_j = g_{ij}^{-1} \cdot \Omega_i \cdot g_{ij} \in \Omega^2(U_i \cap U_j; M_r(\mathbb{k})) .$$

Wenn man die Matrizen ω_i und Ω_i noch in Karten darstellt, kommen zu den Formeln (2) und (4) noch die Transformationsformeln für Differentialformen zwischen den Karten hinzu.

4.19. BEMERKUNG. Ein Zusammenhang ∇^V heißt *flach*, wenn $\nabla^2 = 0$. In diesem Fall erhalten wir den getwisteten de Rham-Komplex

$$\dots \rightarrow \Omega^{k-1}(M; V) \xrightarrow{\nabla^V} \Omega^k(M; V) \rightarrow \Omega^{k+1}(M; V) \rightarrow \dots$$

Das Paar (V, ∇^V) heißt *flaches Vektorbündel*, und

$$H_{\text{dR}}^\bullet(M; V, \nabla^V) = H^\bullet(\Omega^\bullet(M, V); \nabla^V)$$

heißt die *getwistete de Rham-Kohomologie mit Koeffizienten in (V, ∇^V)* . Ein Beispiel ist die mit dem Orientierungsbündel $\circ(TM)$ getwistete de Rham-Kohomologie $H_{\text{dR}}^\bullet(M; \circ(TM))$.

Als nächstes konstruieren wir induzierte Metriken und Zusammenhänge auf den Vektorbündeln aus Proposition 4.8.

4.20. PROPOSITION UND DEFINITION. *Es seien $V, W \rightarrow M$ Vektorbündel.*

- (1) Seien g^V und g^W Metriken auf V und W , dann existieren eindeutige Metriken auf $V \oplus W$, $V \otimes_{\mathbb{k}} W$, $\Lambda^k V$ und $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$, so dass

$$\begin{aligned} g^{V \oplus W}(\sigma_1 \oplus \tau_1, \sigma_2 \oplus \tau_2) &= g^V(\sigma_1, \sigma_2) + g^W(\tau_1, \tau_2), \\ g^{V \otimes_{\mathbb{k}} W}(\sigma_1 \otimes \tau_1, \sigma_2 \otimes \tau_2) &= g^V(\sigma_1, \sigma_2) \cdot g^W(\tau_1, \tau_2), \\ g^{\Lambda^k V}(\alpha, \beta)|_U &= \sum_{1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq r} \overline{\alpha(e_{a_1}, \dots, e_{a_k})} \cdot \beta(e_{a_1}, \dots, e_{a_k}) \end{aligned}$$

$$\text{und } g^{\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)}(F, G) = \sum_{a=1}^r g^W(F(e_a), G(e_a)),$$

wobei $U \subset (e_1, \dots, e_n)$ eine Orthonormalbasis von $\Gamma(V|_U)$ sei.

- (2) Seien ∇^V und ∇^W Zusammenhänge auf V und W , dann existieren eindeutige Zusammenhänge auf $V \oplus W$, $V \otimes_{\mathbb{k}} W$, V^* , $\Lambda^k V$ und $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$, so dass

$$\begin{aligned} \nabla_X^{V \oplus W}(\sigma \oplus \tau) &= (\nabla_X^V \sigma) \oplus (\nabla_X^W \tau), \\ \nabla_X^{V \otimes_{\mathbb{k}} W}(\sigma \otimes \tau) &= (\nabla_X^V \sigma) \otimes \tau + \sigma \otimes (\nabla_X^W \tau), \\ X(\alpha(\sigma_1, \dots, \sigma_k)) &= \left(\nabla_X^{\Lambda^k V} \alpha \right)(\sigma_1, \dots, \sigma_k) + \sum_{j=1}^k \alpha(\sigma_1, \dots, \sigma_j, \dots, \nabla_X^V \sigma_j, \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_k) \\ \nabla_X^{\Lambda^{k+\ell} V}(\alpha \wedge \beta) &= \left(\nabla_X^{\Lambda^k V} \alpha \right) \wedge \beta + \alpha \wedge \left(\nabla_X^{\Lambda^\ell V} \beta \right), \\ \nabla_X^W(f(\sigma)) &= \left(\nabla_X^{\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)} f \right)(\sigma) + f(\nabla_X^V \sigma). \end{aligned}$$

- (3) Die Krümmungen der Zusammenhänge aus (2) werden gegeben durch

$$\begin{aligned} F_{X,Y}^{V \oplus W}(\sigma \oplus \tau) &= (F_{X,Y}^V \sigma) \oplus (F_{X,Y}^W \tau), \\ F_{X,Y}^{V \otimes_{\mathbb{k}} W}(\sigma \otimes \tau) &= (F_{X,Y}^V \sigma) \otimes \tau + \sigma \otimes (F_{X,Y}^W \tau), \\ \left(F_{X,Y}^{\Lambda^k V} \alpha \right)(\sigma_1, \dots, \sigma_k) &= \sum_{i=1}^k (-1)^i \alpha(F_{X,Y}^V \sigma_i, \sigma_1, \dots, \hat{\sigma}_i, \dots, \sigma_k), \\ F_{X,Y}^{\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)} f &= F_{X,Y}^W \circ f - f \circ F_{X,Y}^V. \end{aligned}$$

- (4) Falls die Zusammenhänge ∇^V und ∇^W bezüglich g^V beziehungsweise g^W metrisch sind, dann sind die in (2) konstruierten Zusammenhänge bezüglich der entsprechenden in (1) konstruierten Metriken metrisch.

BEWEISSKIZZE. In (1) ist $g^{V \oplus W}$ offensichtlich eine Metrik.

Um zu zeigen, dass $g^{V \otimes_{\mathbb{k}} W}$ wohldefiniert ist, überlegen wir uns zunächst, dass die Abbildung von $\Gamma(V) \times \Gamma(W)$ nach $\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k})$ mit

$$(\sigma_2, \tau_2) \mapsto g^V(\sigma_1, \sigma_2) \cdot g^W(\tau_1, \tau_2)$$

bilinear ist, und sich daher ausdehnt zu einer Abbildung von $\Gamma(V \otimes W)$ nach $\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k})$. Genauso ist die Abbildung $\Gamma(\bar{V}) \times \Gamma(\bar{W}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{k})$ mit

$$(\sigma_1, \tau_1) \mapsto \sum_{i=1}^N g^V(\sigma_1, \sigma_2^i) \cdot g^W(\tau_1, \tau_2^i)$$

für alle $\sum_{i=1}^N \sigma_2^i \otimes \tau_2^i \in \Gamma(V \otimes_{\mathbb{k}} W) \cong \Gamma(V) \otimes_{\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k})} \Gamma(W)$ bilinear, und wir erhalten eine bilineare Abbildung

$$g^{V \otimes W} : \Gamma(\bar{V} \otimes_{\mathbb{k}} \bar{W}) \times \Gamma(V \otimes_{\mathbb{k}} W) \cong \Gamma(\overline{V \otimes_{\mathbb{k}} W}) \times \Gamma(V \otimes_{\mathbb{k}} W) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k}),$$

also eine sesquilineare Abbildung

$$g^{V \otimes W} : \Gamma(V \otimes_{\mathbb{k}} W) \times \Gamma(V \otimes_{\mathbb{k}} W) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k}).$$

Seien e_1, \dots, e_n und f_1, \dots, f_m lokale Orthonormalbasen von $\Gamma(V|_U)$ und $\Gamma(W|_U)$, dann bildet die Basis $e_1 \otimes f_1, \dots, e_n \otimes f_m$ aus der Konstruktion des Tensorproduktes in Proposition 4.8 (2) eine $g^{V \otimes W}$ -Orthonormalbasis von $\Gamma(V \otimes W|_U)$, denn

$$g^{V \otimes W}(e_i \otimes f_j, e_k \otimes f_\ell) = g^V(e_i, e_k) \cdot g^W(f_j, f_\ell) = \delta_{ik} \delta_{j\ell}.$$

Insbesondere ist $g^{V \otimes W}$ ein (Hermitesches) Skalarprodukt.

Analog überlegt man sich, dass g^{V^*} und $g^{\Lambda_k^k V}$ wohldefinierte Skalarprodukte sind, und zwar unabhängig von der Orthonormalbasis e_1, \dots, e_n von $\Gamma(V|_U)$. Die Basen $(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k})$ mit $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ aus Proposition 3.14 bilden für alle k Orthonormalbasen von $\Gamma(\Lambda_k^k V|_U)$.

Schließlich gilt $g^{\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)} = g^{V^* \otimes_{\mathbb{k}} W}$, und daher ist auch $g^{\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)}$ wieder eine Metrik. Damit ist (1) gezeigt.

Wir betrachten jetzt die induzierten Zusammenhänge. Die Konstruktion von $\nabla^{V \oplus W}$ liefert offensichtlich einen Zusammenhang.

Als nächstes überlegen wir uns, dass $\nabla^{V \otimes_{\mathbb{k}} W}$ mit den Relationen aus Bemerkung 4.7 (2) und mit den Axiomen aus Definition 4.14 verträglich ist. Die Additivität des Ausdrucks

$$(\nabla_X^V \sigma) \otimes \tau + \sigma \otimes (\nabla_X^W \tau)$$

in X , in σ und in τ ist klar, genauso die $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Linearität in X . Wir überprüfen die Verträglichkeit der Relation $(f\sigma) \otimes \tau = f(\sigma \otimes \tau)$: es gilt

$$\begin{aligned} \nabla_X^{V \otimes_{\mathbb{k}} W}((f\sigma) \otimes \tau) &= (X(f) \cdot \sigma + f \cdot \nabla_X^V \sigma) \otimes \tau + f \cdot \sigma \otimes (\nabla_X^W \tau) \\ &= X(f) \cdot (\sigma \otimes \tau) + f \cdot \nabla_X^{V \otimes_{\mathbb{k}} W}(\sigma \otimes \tau) \\ &= \nabla_X^{V \otimes_{\mathbb{k}} W}(f(\sigma \otimes \tau)) \end{aligned}$$

und analog für $\sigma \otimes (f\tau)$. Somit ist $\nabla_X^{V \otimes_{\mathbb{k}} W}$ auf $\Gamma(V) \otimes_{\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k})} \Gamma(W)$ wohldefiniert und ein Zusammenhang.

Analog prüfen wir für $\nabla^{V^*} = \nabla^{\Lambda_k^1 V}$, dass

$$\begin{aligned} (\nabla_X^{V^*} \alpha)(f \cdot \sigma) &= X(f \cdot \alpha(\sigma)) - \alpha(X(f) \cdot \sigma + f \cdot \nabla_X^V \sigma) \\ &= f \cdot X(\alpha(\sigma)) - f \cdot \alpha(\nabla_X^V \sigma) \\ &= f \cdot (\nabla_X^{V^*} \alpha)(\sigma), \end{aligned}$$

somit ist $(\nabla_X^{V^*} \alpha) \in \Gamma(V^*) = \text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k})}(\Gamma(V), \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{k}))$. Außerdem erfüllt ∇^{V^*} die Leibnizregel, denn

$$\begin{aligned} (\nabla_X^{V^*} (f \cdot \alpha))(\sigma) &= X(f \cdot \alpha(\sigma)) - f \cdot \alpha(\nabla_X^V \sigma) \\ &= X(f) \cdot \alpha(\sigma) + f \cdot (X(\alpha(\sigma)) - \alpha(\nabla_X^V \sigma)) \\ &= (X(f) \cdot \alpha + f \cdot \nabla_X^{V^*} \alpha)(\sigma). \end{aligned}$$

Somit ist auch ∇^{V^*} ein Zusammenhang.

Analog überprüfen wir, dass auch $\nabla^{\Lambda_k^k V}$ und $\nabla^{\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)} = \nabla^{V^* \otimes_{\mathbb{k}} W}$ wohldefiniert sind und die Zusammenhangsaxiome erfüllen, und haben (2) gezeigt.

Für das Tensorprodukt gilt nach (2) und Proposition 4.17 (3), dass

$$\begin{aligned}
F_{X,Y}^{V \otimes_k W}(\sigma \otimes \tau) &= \nabla_X^{V \otimes_k W}((\nabla_Y^V \sigma) \otimes \tau + \sigma \otimes (\nabla_Y^W \tau)) \\
&\quad - \nabla_Y^{V \otimes_k W}((\nabla_X^V \sigma) \otimes \tau + \sigma \otimes (\nabla_X^W \tau)) \\
&\quad - ((\nabla_{[X,Y]}^V \sigma) \otimes \tau + \sigma \otimes (\nabla_{[X,Y]}^W \tau)) \\
&= (\nabla_X^V \nabla_Y^V \sigma) \otimes \tau + (\nabla_X^V \sigma) \otimes (\nabla_Y^W \tau) + (\nabla_Y^V \sigma) \otimes (\nabla_X^W \tau) + \sigma \otimes (\nabla_X^W \nabla_Y^W \tau) \\
&\quad - (\nabla_Y^V \nabla_X^V \sigma) \otimes \tau - (\nabla_Y^V \sigma) \otimes (\nabla_X^W \tau) - (\nabla_X^V \sigma) \otimes (\nabla_Y^W \tau) - \sigma \otimes (\nabla_Y^W \nabla_X^W \tau) \\
&\quad - (\nabla_{[X,Y]}^V \sigma) \otimes \tau - \sigma \otimes (\nabla_{[X,Y]}^W \tau) \\
&= (F_{X,Y}^V \sigma) \otimes \tau + \sigma \otimes (F_{X,Y}^W \tau)
\end{aligned}$$

Für das duale Bündel überprüfen wir (3) ebenfalls. Analog zum obigen gilt

$$\begin{aligned}
0 &= X(Y(\alpha(\sigma))) - Y(X(\alpha(\sigma))) - [X, Y](\alpha(\sigma)) \\
&= (F_{X,Y}^{V*} \alpha)(\sigma) + \alpha(F_{X,Y}^V \sigma).
\end{aligned}$$

Wir überprüfen (4) für das Tensorprodukt. Es gilt

$$\begin{aligned}
X(g^{V \otimes_k W}(\sigma_1 \otimes \tau_1, \sigma_2 \otimes \tau_2)) &= (X(g^V(\sigma_1, \sigma_2))) \cdot g^W(\tau_1, \tau_2) + g^V(\sigma_1, \sigma_2) \cdot (X(g^W(\tau_1, \tau_2))) \\
&= \left(g^V(\nabla_X^V \sigma_1, \sigma_2) + g^V(\sigma_1, \nabla_X^V \sigma_2) \right) \cdot g^W(\tau_1, \tau_2) \\
&\quad + g^V(\sigma_1, \sigma_2) \cdot \left(g^W(\nabla_X^W \tau_1, \tau_2) + g^W(\tau_1, \nabla_X^W \tau_2) \right) \\
&= g^{V \otimes_k W} \left(\nabla_X^{V \otimes_k W}(\sigma_1 \otimes \tau_1), \sigma_2 \otimes \tau_2 \right) \\
&\quad + g^{V \otimes_k W} \left(\sigma_1 \otimes \tau_1, \nabla_X^{V \otimes_k W}(\sigma_2 \otimes \tau_2) \right).
\end{aligned}$$

Sei jetzt wieder e_1, \dots, e_n eine Orthonormalbasis von $\Gamma(V|_U)$, dann gilt

$$0 = X(g^V(e_a, e_b)) = g^V(e_a, \nabla_X e_b) + \overline{g^V(e_b, \nabla_X e_a)}.$$

Durch Nachrechnen ergibt sich

$$\begin{aligned}
X(g^{V*}(\alpha, \beta)) &= \sum_{a=1}^N (X(\overline{\alpha(e_a)}) \cdot \beta(e_a) + \overline{\alpha(e_a)} \cdot X(\beta(e_a))) \\
&= \sum_{a=1}^N (\overline{(\nabla_X^{V*} \alpha)(e_a)} \cdot \beta(e_a) + \overline{\alpha(e_a)} \cdot (\nabla_X^{V*} \beta)(e_a)) \\
&\quad + \sum_{a,b=1}^N (\langle e_b, \nabla_X^V e_a \rangle + \langle e_a, \nabla_X^V e_b \rangle) \overline{\alpha(e_b)} \cdot \beta(e_a) \\
&= g^{V*}(\nabla_X^{V*} \alpha, \beta) + g^{V*}(\alpha, \nabla_X^{V*} \beta).
\end{aligned}$$

Die anderen Fälle werden ähnlich behandelt. \square

Insbesondere ist $\text{End}_{\mathbb{R}} v = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, V) \rightarrow M$ das Bündel der Endomorphismen. Für $X \in \mathfrak{X}(M)$, $F \in \Gamma(\text{End}_{\mathbb{k}} V)$ und $\sigma \in \Gamma(V)$ folgt,

$$\left(\nabla_X^{\text{End}_{\mathbb{k}} V} F \right)(\sigma) = \left(\nabla_X^{\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, V)} F \right)(\sigma) = \nabla_X^V(F(\sigma)) - F(\nabla_X^V \sigma),$$

also schreiben wir auch suggestiv

$$\left(\nabla_X^{\text{End}_{\mathbb{k}} V} F \right) = [\nabla_X^V, F].$$

4.21. PROPOSITION UND DEFINITION. *Es sei $V \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇^V und $F: N \rightarrow M$ eine glatte Abbildung. Dann existiert genau ein Zusammenhang $\nabla^{F^*V} = F^*\nabla^V$ auf F^*V , der zurückgeholte Zusammenhang, so dass für alle $\sigma \in \Gamma(V)$ und alle $Y \in \mathfrak{X}(N)$ gilt*

$$\nabla_Y^{F^*V}(\sigma \circ F)_q = \nabla_{dF_q(Y_q)}^V \sigma \in (F^*V)_q \cong V_{F(q)}. \quad (1)$$

Für die Krümmung gilt

$$(\nabla^{F^*V})_{X,Y}^2(\sigma \circ F)_q = (\nabla^V)_{dF_q(X_q), dF_q(Y_q)}^2 \sigma_{F(q)}. \quad (2)$$

Für die rechte Seite von (2) schreiben wir auch kurz $F^*(\nabla^V)_{X,Y}^2(\sigma \circ F)$, also gilt $(\nabla^{F^*V})^2 = F^*(\nabla^V)^2$.

BEWEIS. Hierzu stellt man Schnitte von F^*V lokal dar als $C^\infty(M)$ -Linearkombinationen von Schnitten der Form $\sigma \circ F$. \square

4.22. BEISPIEL. Wir betrachten das tautologische Bündel $\tau \rightarrow \mathbb{K}P^n$ aus Beispiel 4.4. Nach Konstruktion können wir es als Unterbündel des trivialen Bündels $\mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}P^n$ auffassen. Wir versehen \mathbb{K}^{n+1} mit der Standardmetrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und dem trivialen Zusammenhang $\nabla^0 = d$, das heißt, für konstante Schnitte e_i für $i = 0, \dots, n$ gilt

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \nabla^0 e_i = 0.$$

Um einen Zusammenhang ∇^τ auf τ zu definieren, betrachten wir einen Schnitt $s \in \Gamma(\tau)$ als Schnitt von \mathbb{K}^{n+1} , leiten ihn ab, und projizieren ihn dann zurück in das Bündel τ mit Hilfe der Metrik.

Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst die zurückgeholten Bündel

$$q^*\tau = \{ (z, v) \in (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{K}^{n+1} \mid v \in \mathbb{K} \cdot z \} \subset q^*\mathbb{K}^{n+1} = \mathbb{K}^{n+1}$$

Der zurückgeholte triviale Zusammenhang auf \mathbb{K}^{n+1} ist wieder der triviale Zusammenhang. Auch die orthogonale/unitäre Projektion auf τ ist mit Zurückholen verträglich, folglich hat der zurückgeholte Zusammenhang die Gestalt

$$\nabla s|_z = \frac{\langle z, ds \rangle}{\|z\|^2} z$$

für alle $s \in \Gamma(q^*\tau)$ und alle $z \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$. Auf der anderen Seite ist das Bündel $q^*\tau$ trivial, wobei die Trivialisierung $\psi: q^*\tau \rightarrow \mathbb{K}$ so gewählt wird, dass $v = \psi(z, v) \cdot z$ für alle $(z, v) \in q^*\tau$ wie oben. Wir leiten den Schnitt $z \mapsto z$ ab und erhalten

$$\nabla z|_z = \frac{\langle z, dz \rangle}{\|z\|^2} z =: \omega \cdot z \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{\langle z, dz \rangle}{\|z\|^2} \in \Omega^1(\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}).$$

Wir bestimmen die Krümmung mit Bemerkung 4.18 (3). Da $\omega \wedge \omega = 0$, erhalten wir

$$\begin{aligned} \Omega &= d\omega + \omega \wedge \omega = d \frac{\langle z, dz \rangle}{\|z\|^2} \\ &= \frac{\langle dz, dz \rangle}{\|z\|^2} - \frac{(\langle dz, z \rangle + \langle z, dz \rangle) \wedge \langle z, dz \rangle}{\|z\|^4} \\ &= \frac{\|z\|^2 \langle dz, dz \rangle - \langle dz, z \rangle \wedge \langle z, dz \rangle}{\|z\|^4}. \end{aligned}$$

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt $\Omega = 0$, da das Dachprodukt alternierend ist. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ hingegen schreiben wir $dz = dx + idy$ und benutzen die Konvention, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ im ersten Argument antilinear ist. Zerlegt man $dz = \partial z + \bar{\partial} z$ in einen linearen und einen antilinearen Anteil, dann erhält man

$$\Omega = \frac{\|z\|^2 \langle \bar{\partial} z, \partial z \rangle - \langle \bar{\partial} z, z \rangle \wedge \langle z, \partial z \rangle}{\|z\|^4} = \bar{\partial} \partial \log \|z\|^2.$$

Somit stimmt die Krümmung bis auf einen Vorfaktor mit dem Imaginärteil der Fubini-Study-Metrik auf $\mathbb{C}P^n$ überein.

4.3. Chern-Weil-Theorie

In diesem Abschnitt wollen wir jedem Vektorbündel $V \rightarrow M$ mit Zusammenhang ∇^V gewisse Differentialformen $P(V, \nabla^V)$ zuordnen, die stets geschlossen sind, und deren Kohomologieklassen nur von V , aber nicht von ∇^V abhängen. Diese Klassen $P(V) = [P(V, \nabla^V)] \in H_{\text{dR}}^\bullet(M)$ heißen charakteristische Klassen von V . Mehr dazu finden sich im Buch [Z] von Zhang, Kapitel 1.

Im folgenden sei $G \subset M_n(\mathbb{k})$ stets eine *Matrix-Lie-Gruppe*, also eine Untermannigfaltigkeit von $M_n(\mathbb{k}) \cong \mathbb{k}^{n^2}$, die zugleich bezüglich Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet. Wichtigste Beispiele sind

$$Gl_n(\mathbb{k}) = \{g \in M_n(\mathbb{k}) \mid \det g \neq 0\}$$

und $SO(n) = \{g \in M_n(\mathbb{k}) \mid \det g = 1 \text{ und } g^t g = e\}$;

hierbei ist e die Einheitsmatrix und g^t die transponierte Matrix zu g . Für alle $g \in G$ ist die Abbildung

$$\text{int}_g: G \rightarrow G \text{ mit } h \mapsto ghg^{-1}$$

ein Gruppenautomorphismus, der *innere Automorphismus* zu g .

Der Tangentialraum $\mathfrak{g} = T_e G$ heißt auch die *Lie-Algebra* von G . Sei $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ eine Kurve mit $\gamma(0) = e$ und $\dot{\gamma}(0) = X \in \mathfrak{g}$, dann ist auch $\text{int}_g \circ \gamma$ eine Kurve in G mit $\text{int}_g \gamma(0) = e$. Das Differential

$$X \mapsto \text{Ad}_g X = d(\text{int}_g)_e(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g \cdot \dot{\gamma}(0) \cdot g^{-1} = g \cdot X \cdot g^{-1} \in \mathfrak{g} \subset M_n(\mathbb{k})$$

heißt die *adjungierte Wirkung* $\text{Ad}_g: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ von $g \in G$ auf \mathfrak{g} . Für $Y \in \mathfrak{g}$ liefert Ableiten von $\text{Ad}_g Y \in \mathfrak{g}$ nach g bei e die *Lie-Klammer*

$$(X, Y) \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\gamma(t)} Y = \dot{\gamma}(t) \cdot Y - Y \cdot \dot{\gamma}(t) = [X, Y] \in \mathfrak{g} .$$

4.23. DEFINITION. Ein Polynom $P \in \mathbb{k}[g]$ oder allgemeiner eine Potenzreihe $P \in \mathbb{k}[[g]]$ in den Matrixeinträgen heißt *G-invariant*, wenn $P(\text{Ad}_g X) = P(X)$ für alle $g \in G$ und alle $X \in \mathfrak{g}$ gilt.

4.24. BEISPIEL. Wir betrachten vor allem die folgenden Polynome und Potenzreihen.

- (1) Es sei $c(X) = \det_{\mathbb{k}}(E_n - X)$ für $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}) = M_n(\mathbb{k})$ wie in der Definition des charakteristischen Polynoms, dann ist c invariant.
- (2) Die Spur $\text{tr}_{\mathbb{k}}(X)$ einer Matrix ist ebenfalls $Gl_n(\mathbb{k})$ -invariant. Wir betrachten speziell

$$\text{ch}(X) = \text{tr}_{\mathbb{k}}(e^{-X}) .$$

- (3) Für schiefsymmetrische Matrizen $X \in \mathfrak{so}(2n)$ betrachten wir die alternierende 2-Form $\alpha \in \Lambda^2 \mathbb{R}^{2n}$ mit

$$\alpha(v, w) = \langle v, Xw \rangle .$$

Für eine orientierte Orthonormalbasis e_1, \dots, e_{2n} von \mathbb{R}^{2n} setzen wir

$$\text{Pf}(X) = (\alpha \wedge \dots \wedge \alpha)(e_1, \dots, e_{2n}) = 2^{-n} \sum_{\sigma \in S(n)} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n X_{\sigma(2i-1), \sigma(2i)} ,$$

und erhalten die $SO(2n)$ -invariante *Pfaffsche Determinante* von X . Es gilt $\text{Pf}(X)^2 = \det(X)$, und das Vorzeichen wird durch die Orientierung festgelegt.

Mit Hilfe der Hauptachsentransformation für schiefssymmetrische Matrizen können wir X bezüglich einer orientierten Orthonormalbasis auf die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & & \\ -a_1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & a_n & \\ & & & -a_n & 0 & \end{pmatrix}$$

bringen. In diesem Fall ist einfach $\text{Pf}(X) = a_1 \cdots a_n$.

4.25. BEMERKUNG. Invariante Polynome und Potenzreihen haben folgende Eigenschaften.

(1) Es seien $X, Y \in \mathfrak{g}$ und $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ mit $\dot{\gamma}(0) = X$ wie oben, dann gilt

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (P(\text{Ad}_{\gamma(t)} Y)) = dP_Y \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\gamma(t)} Y \right) = dP_Y([X, Y]).$$

(2) Da der Ring $(\Lambda^{2\bullet} T_p M, \wedge)$ kommutativ ist, können wir \mathfrak{g} -wertige Formen in P einsetzen. Für ein \mathbb{k} -Vektorbündel V mit Zusammenhang ∇^V gilt $F^V \in \Omega^2(M, \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}))$ bezüglich einer lokalen Trivialisierung, und wir setzen

$$P(V, \nabla^V) = P(F^V) \in \Omega^{2\bullet}(M; \mathbb{k})$$

Da die Matrixeinträge von F^V in $\Lambda^2 T M$ liegen, verschwinden Produkte von mehr als $\frac{\dim M}{2}$ Faktoren. Insbesondere dürfen wir F^V auch in invariante Potenzreihen einsetzen, ohne auf den Konvergenzradius Rücksicht zu nehmen. Wenn P invariant ist, hängt diese Form nicht von der Trivialisierung ab, denn sei $g: U \rightarrow GL_n(\mathbb{k})$ eine Basiswechselmatrix, so erhalten wir $gF^V g^{-1}$ als Krümmung bezüglich der neuen Trivialisierung, aber

$$P(gF^V g^{-1}) = P(\text{Ad}_g F^V) = P(F^V).$$

(3) Sei $V \rightarrow M$ ein orientierbares \mathbb{R} -Vektorbündel vom Rang k mit Metrik und metrischem Zusammenhang ∇^V , dann folgt $F^V \in \Omega^2(M; \mathfrak{so}(V))$ nach Proposition 4.17 (3). Für ein $SO(k)$ -invariantes Polynom P_k betrachten wir analog

$$P(V, \nabla^V) = P\left(\frac{F^V}{2\pi i}\right) \in \Omega^{2\bullet}(M).$$

(4) Sei $\omega \in \Omega^1(M; \mathfrak{g})$. Da Elemente aus $\Lambda^1 T_p M$ mit allen Elementen des Rings $(\Lambda^{2\bullet} T_p M, \wedge)$ kommutieren, ergibt sich aus (1) auch

$$dP_{F^V}([\omega^V, F^V]) = 0.$$

4.26. SATZ UND DEFINITION (Chern-Weil). Sei $V \rightarrow M$ ein \mathbb{k} -Vektorbündel vom Rang r mit lokalen Trivialisierungen, so dass die Übergangsfunktionen Werte in einer Lie-Gruppe $G \subset GL_r(\mathbb{k})$ annehmen. Sei ∇^V ein Zusammenhang ∇^V mit Zusammenhangs-1-Formen mit Werten in \mathfrak{g} bezüglich dieser lokalen Trivialisierungen. Sei F^V die Krümmung von ∇^V , und sei $P \in \mathbb{k}[\mathfrak{g}]$ ein invariantes Polynom. Dann ist die Form $P(V, \nabla^V) = P(F^V) \in \Omega^{\text{even}}(M; \mathbb{k})$ geschlossen und definiert eine de Rham-Kohomologieklass $P(V) \in H_{\text{dR}}^{\text{even}}(M; \mathbb{k})$ unabhängig vom Zusammenhang ∇^V . Sei schließlich $f: N \rightarrow M$ glatt, dann gilt $P(f^*V, \nabla^{f^*V}) = f^*P(V, \nabla^V)$ und insbesondere $P(f^*V) = f^*P(V)$.

Auf diese Weise konstruierte Differentialformen und Kohomologieklassen heißen *Chern-Weil-Formen* beziehungsweise *Chern-Weil-Klassen* von Vektorbündeln. Allgemeiner nennt man Kohomologieklassen zu Vektorbündeln, die sich unter Zurückholen natürlich verhalten, auch *charakteristische Klassen*.

Wir haben in den Übungen gesehen, dass je zwei Metriken auf einem Vektorbündel isomorph sind. Insbesondere hängt $e(V)$ also auch nicht von der Metrik ab.

BEWEIS. Die Wohldefiniertheit der Formen $P(V, \nabla^V) \in \Omega^{2\bullet}(M; \mathbb{k})$ haben wir bereits in Bemerkung 4.25 geklärt.

Um zu zeigen, dass $P(V, \nabla^V)$ geschlossen ist, wählen wir eine Trivialisierung $\psi: V|_U \rightarrow \mathbb{k}^k$. Auf $U \times \mathbb{k}^k$ schreiben wir den gegebenen Zusammenhang als $\nabla = d + \omega$ mit $\omega \in \Omega^1(U; \mathfrak{g})$. Aus der Kettenregel folgt zunächst

$$d(P(V, \nabla^V)) = dP_{F^V}(dF^V) = dP_{F^V}([d, F^V])$$

und wir schreiben $dF^V = d \circ F^V - F^V \circ d = [d, F^V]: \Omega^\bullet(U; \mathbb{k}^k) \rightarrow \Omega^{\bullet+1}(U; \mathbb{k}^k)$.

Nach Bemerkung 4.25 (4) gilt auch

$$dP_{F^V}([\omega, F^V]) = 0$$

wegen der G -Invarianz. Insgesamt folgt

$$d(P(V, \nabla^V)) = dP_{F^V}([d + \omega, F^V]) = dP_{F^V}([\nabla, F^V]) = 0$$

aufgrund der zweiten Bianchi-Identität aus Proposition 4.17 (4). Also ist $P(V, \nabla^V)$ tatsächlich geschlossen.

Als nächstes folgt $P(f^*V, \nabla^{f^*V}) = f^*P(V, \nabla^V)$ aus Proposition 4.21. Diese „Natürlichkeit“ von $P(V, \nabla^V)$ benötigen wir im folgenden Schritt.

Es seien ∇^0 und ∇^1 zwei Zusammenhänge auf $V \rightarrow M$. Wir betrachten das zurückgeholte Bündel

$$\tilde{V} = p^*V \rightarrow \tilde{M} = M \times [0, 1],$$

wobei $p: \tilde{M} \rightarrow M$ die Projektion sei. Auf $\tilde{V}|_{M \times [0,1]}$ betrachten wir $p^*\nabla^0$, auf $\tilde{V}|_{M \times (0,1]}$ den Zusammenhang $p^*\nabla^1$. Wie in Bemerkung 4.15 (2) interpolieren wir und erhalten einen Zusammenhang $\nabla^{\tilde{V}}$, der bei $M \times \{0\}$ mit $p^*\nabla^0$ und bei $M \times \{1\}$ mit $p^*\nabla^1$ übereinstimmt. Außerdem ist $\nabla^{\tilde{V}}$ nach 4.15 (3) metrisch bezüglich der zurückgeholten Metrik p^*g^V auf V , wenn ∇^0, ∇^1 metrisch bezüglich g^V sind.

Wir betrachten Einbettungen $i_t: M \rightarrow \tilde{M}$ mit $i_t(p) = (p, t)$ für $t \in [0, 1]$, dann folgt aus der obigen Natürlichkeit, dass

$$i_0^*P(\tilde{V}, \nabla^{\tilde{V}}) = P(V, \nabla^0) \quad \text{und} \quad i_1^*P(\tilde{V}, \nabla^{\tilde{V}}) = P(V, \nabla^1).$$

Aus der Homotopieformel aus Lemma 3.29 folgt, dass

$$P(V, \nabla^1) - P(V, \nabla^0) = d \int_{[0,1]} P(\tilde{V}, \nabla^{\tilde{V}}),$$

insbesondere folgt $[P(V, \nabla^1)] = [P(V, \nabla^0)] = H_{\text{dR}}^{2\bullet}(M; \mathbb{k})$, also ist $P(V)$ unabhängig vom Zusammenhang. \square

Es folgt ein kleiner Exkurs über die topologische und geometrische Bedeutung der soeben konstruierten Chern-Weil-Formen und charakteristischen Klassen. Dabei setzen wir ab sofort $\frac{F^V}{2\pi i}$ anstelle von F^V in P ein. Das ändert freilich nichts an den Argumenten im Beweis von Satz 4.26.

4.27. BEMERKUNG. Es sei $V \rightarrow M$ ein komplexes Vektorbündel mit Zusammenhang ∇^V . Die k -te Chern-Form $c_k(V, \nabla^V) = c(V, \nabla^V)^{[2k]} \in \Omega^{2k}(M)$ ist die homogene Komponente von $c(V, \nabla^V) \in \Omega^{2\bullet}(M; \mathbb{C})$ vom Grad $2k$. Insbesondere gilt $c_0(V, \nabla^V) = 1$ und

$$\det\left(e - z \frac{F^V}{2\pi i}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k c_k(V, \nabla^V) \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Die k -te Chern-Klasse ist definiert als $c_k(V) = [c_k(V, \nabla^V)] \in H_{\text{dR}}^{2k}(M)$. Die Chern-Klassen haben folgende Eigenschaften.

- (1) Chern-Klassen sind natürlich.
- (2) Wegen der Formel für die Determinante von Block-Diagonalmatrizen gilt

$$c(V \oplus W, \nabla^{V \oplus W}) = \det \begin{pmatrix} e^{-\frac{F^V}{2\pi i}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{F^W}{2\pi i}} \end{pmatrix} = c(V, \nabla^V) \wedge c(W, \nabla^W).$$

Für die einzelnen Chern-Klassen gilt also

$$c_k(V \oplus W) = \sum_{j=0}^k c_j(V) \wedge c_{k-j}(W).$$

- (3) Sei $L \rightarrow M$ ein Geradenbündel, also ein \mathbb{C} -Vektorbündel vom Rang 1 mit Zusammenhang ∇^L , dann ist $F^L \in \Omega^2(M; \text{End}_{\mathbb{C}} L) \cong \Omega^2(M; \mathbb{C})$ eine komplexwertige 2-Form unabhängig von der Wahl der Trivialisierung. Wir nehmen an, dass ∇^L metrisch ist bezüglich einer Metrik auf L , dann ist $F^L = i\alpha$ imaginärwertig nach Proposition 4.17 (3). Wir können L dann als orientiertes, reelles Vektorbündel $L_{\mathbb{R}}$ vom Rang 2 mit metrischem Zusammenhang $\nabla^{L_{\mathbb{R}}}$ und Krümmung

$$F^{L_{\mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \in \Omega^2(M; \mathfrak{so}(2))$$

auffassen. Es folgt

$$c(L, \nabla^L) = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} = 1 + \text{Pf} \left(\frac{F^{L_{\mathbb{R}}}}{2\pi} \right) = 1 + e(L, \nabla^L).$$

Wenn man die Eulerklasse $e(L)$ bereits definiert hat, sind die Chern-Klassen durch (1) — (3) bereits eindeutig festgelegt. Dabei darf man sich sogar aussuchen, in welcher Kohomologietheorie man $e(L)$ definieren möchte. Am besten eignet sich $e_{\mathbb{Z}}(L) \in H^2(M; \mathbb{Z})$, und man erhält Klassen $c_{k, \mathbb{Z}}(V) \in H^{2k}(M; \mathbb{Z})$. Chern-Weil-Theorie liefert allerdings nur $c_k(V) \in H_{\text{dR}}^{2k}(M) \cong H^{2k}(M; \mathbb{R})$.

4.28. BEMERKUNG. Zusätzlich zu den Axiomen aus der letzten Bemerkung haben Chern-Klassen noch folgende Eigenschaften:

- (1) Es seien s_0, \dots, s_n die elementarsymmetrischen Polynome

$$s_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k},$$

und es sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\det(e - zA) = \sum_{k=0}^n (-z)^k s_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =: \sum_{k=0}^n (-z)^k(A).$$

Man kann zeigen, dass jedes $Gl_n(\mathbb{C})$ -invariante Polynom auf $M_n(\mathbb{C})$ auf eindeutige Weise als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen s_1, \dots, s_n geschrieben werden kann. Da diagonalisierbare Matrizen in $M_n(\mathbb{C})$ dicht liegen und Polynome stetig sind, reicht es dazu, nur diagonalisierbare Matrizen zu betrachten. Daraus folgt: jede Chern-Weil-Klasse komplexer Vektorbündel ist ein Polynom in den Chern-Klassen. Zum Beispiel gilt

$$\text{ch}(V) = \text{rk } V + c_1(V) + \frac{c_1(V)^2 - 2c_2(V)}{2} + \frac{c_1(V)^3 - 3c_1(V)c_2(V) + 3c_3(V)}{6} + \dots$$

- (2) Die Menge der komplexen Geradenbündel $L \rightarrow M$ bis auf Isomorphie bildet eine abelsche Gruppe $\text{Pic}(M)$ mit dem Tensorprodukt, und die erste Chern-Klasse liefert einen Gruppenhomomorphismus, da

$$c_1(V \otimes W) = c_1(V) + c_1(W) \in H_{\text{dR}}^2(M).$$

Im allgemeinen ist c_1 weder injektiv noch surjektiv. Geht man allerdings zu ganzzahligen Chern-Klassen über, so erhält man einen Isomorphismus

$$c_{1,\mathbb{Z}}: \text{Pic}(M) \rightarrow H^2(M; \mathbb{Z}).$$

Bündel von höherem Rang lassen sich im allgemeinen nicht so einfach klassifizieren.

4.29. BEMERKUNG. Wir möchten für reelle Vektorbündel ähnliche „fundamentale“ charakteristische Klassen angeben wie in Bemerkung 4.28 (1) für komplexe Vektorbündel.

- (1) Sei zunächst P ein $GL_n(\mathbb{R})$ -invariantes Polynom mit reellen Koeffizienten. Es sei $V \rightarrow M$ ein reelles Vektorbündel, dann betrachten wir das komplexifizierte Vektorbündel $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ mit $V_{\mathbb{C}} \cong \bar{V}_{\mathbb{C}}$. Sei ∇^V ein Zusammenhang auf V , dann induziert ∇^V Zusammenhänge auf $V_{\mathbb{C}}$ und $\bar{V}_{\mathbb{C}}$ mit $F^{V_{\mathbb{C}}} = F^V \otimes \text{id}_{\mathbb{C}} = F^{\bar{V}_{\mathbb{C}}}$. Es folgt

$$P\left(\frac{1}{2\pi i} F^V\right) = P(V_{\mathbb{C}}, \nabla^{V_{\mathbb{C}}}) = P(V, \nabla^V) = P(\bar{V}_{\mathbb{C}}, \nabla^{\bar{V}_{\mathbb{C}}}) = \overline{P\left(\frac{1}{2\pi i} F^{V_{\mathbb{C}}}\right)} = P\left(-\frac{1}{2\pi i} F^V\right),$$

insbesondere tragen nur Potenzen von $(F^V)^2$ zu $P(V, \nabla^V)$ bei.

Wir definieren daher die *Pontrijagin-Formen* $p_k(V, \nabla^V) \in \Omega^{4k}(M)$ durch

$$\det\left(e - \frac{t}{2\pi} F^V\right) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k} p_k(V, \nabla^V) = \sum_{j=0}^{\infty} (it)^j c_j(V, \nabla^V);$$

insbesondere gilt $p_k = (-1)^k c_{2k}$.

Die Pontrijagin-Formen erzeugen alle Chern-Weil-theoretischen Klassen reeller Vektorbündel: jedes $GL_n(\mathbb{R})$ -invariante Polynom kann auf eindeutige Weise als Polynom in $p_1, \dots, p_{[\frac{n}{2}]}$ geschrieben werden. Zum Beispiel gilt

$$\hat{A}(V) = 1 - \frac{p_1(V)}{24} + \frac{7p_1(V)^2 - 4p_2(V)}{5760} \mp \dots$$

- (2) Für orientierte reelle Vektorbündel ist die Situation etwas komplizierter. Jedes $SL_{2n+1}(\mathbb{R})$ -invariante Polynom kann auf eindeutige Weise als Polynom in den Pontrijagin-Klasse p_1, \dots, p_n geschrieben werden. Für Vektorbündel von geradem Rang $2n$ wählen wir zunächst eine Metrik und einen metrischen Zusammenhang, so dass wir nur noch $SO(2n)$ -invariante Polynome auf $\mathfrak{so}(2n)$ betrachten müssen. Jedes solche Polynom kann als Polynom in p_1, \dots, p_{n-1} und e geschrieben werden. Dabei gilt

$$e(V, \nabla^V)^2 = \text{Pf}\left(\frac{F^V}{2\pi}\right)^2 = \det\left(\frac{F^V}{2\pi}\right) = p_n(V, \nabla^V).$$

- (3) Außerdem gibt es für reelle Vektorbündel sogenannte *Stiefel-Whitney-Klassen* $w_k(V) \in H^k(M; \mathbb{Z}/2R)$. Sie verhalten sich ähnlich wie Chern-Klassen, insbesondere klassifiziert w_1 reelle Geradenbündel.

4.4. Thom-Klasse und Euler-Klasse

In diesem Abschnitt wollen wir die Methoden aus den Kapiteln 2 und 3 in Verbindung bringen. Unter anderem haben wir folgende Ziele.

- (1) Sei L eine orientierte, k -dimensionale Mannigfaltigkeit und $F: L \rightarrow N$ glatt. Es sei L *geschlossen* im Sinne von Folgerung 3.52, das heißt, L sei kompakt und ohne Rand. Sei $[\alpha] \in H_{\text{dR}}^k(N)$. Nach Folgerung 3.52 können wir das Integral

$$\int_L F^* \alpha \in \mathbb{R}$$

bilden. Falls sich F auf eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit W mit $L = \partial W$ fortsetzen lässt, verschwindet es.

Analog dazu sei $M \subset N$ eine $(n-k)$ -dimensionale geschlossene Untermannigfaltigkeit. Wenn M und N orientiert sind, können wir die Schnittzahl $\#(F, M; N)$ betrachten. Falls sich F auf eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit W mit $L = \partial W$ fortsetzen lässt, verschwindet sie.

Noch etwas allgemeiner sei $M \subset N$ eine geschlossene $(n+\ell-k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $[\beta] \in H_{\text{dR}}^\ell(M)$. Wenn M und N orientiert sind und F zu M transversal ist, ist $F^{-1}(M) \subset L$ eine ℓ -dimensionale kompakte, orientierte Untermannigfaltigkeit. Sei $f = F|_{F^{-1}(M)}$, dann können wir das Integral

$$\int_{F^{-1}(M)} f^* \beta \in \mathbb{R}$$

betrachten. Falls sich F zu \bar{F} auf eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit W mit $L = \partial W$ fortsetzen lässt, können wir \bar{F} transversal zu M wählen. Wie oben folgt wieder, dass das Integral verschwindet.

Wir möchten daher gern der geschlossenen ℓ -Form β auf M eine k -Form $\alpha = \iota_! \beta$ auf N zuordnen, so dass

$$\int_L F^* \alpha = \int_{F^{-1}(M)} f^* \beta$$

für alle $F: L \rightarrow N$ wie oben gilt. Insbesondere wollen wir für $\beta = 1$ eine Form $\alpha = \iota_! 1$ erhalten mit

$$\int_L F^* \alpha = \#(F, M; N).$$

- (2) Sei $G: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen orientierten, m - beziehungsweise n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Poincaré-Dualität liefert eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{dR},0}^k(M)^* & \xrightarrow{\cong} & H_{\text{dR}}^{m-k}(M) \\ \uparrow & & \uparrow G^* \\ H_{\text{dR},0}^{k+n-m}(N)^* & \xrightarrow{\cong} & H_{\text{dR}}^{m-k}(N). \end{array}$$

Wir suchen eine Abbildung $G_! : H_{\text{dR},0}^k(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^{m-k}(N)$, so dass die obige Abbildung gerade die dazu duale Abbildung $G_!^*$ ist.

Wir betrachten dazu den Graphen von G und zerlegen G in eine Verkettung aus einer Inklusionsabbildung $\gamma: M \rightarrow \text{graph}(G) \subset M \times N$ mit $\gamma(p) = (p, G(p))$ und einer Projektion $\text{pr}_2: (M \times N) \rightarrow N$ und erhalten

$$G_! : H_{\text{dR},0}^k(M) \xrightarrow{\gamma_!} H_{\text{dR},0}^{k+n}(M \times N) \xrightarrow{\text{pr}_2!} H_{\text{dR},0}^{k+n-m}(N).$$

Die zweite Abbildung $\text{pr}_{2!}$ wird durch Integration über den Faktor M gegeben. Anstelle der ersten betrachten wir eine beliebige Inklusion $\iota: M \rightarrow N$ wie in (1), und verwenden die dort konstruierte Abbildung.

- (3) Wir werden unten zeigen, dass $M \subset N$ eine offene Umgebung U besitzt, die diffeomorph zum Totalraum des Normalenbündel $\nu \rightarrow M$ von M in N ist. Es sei $j: U \rightarrow N$ die Inklusion und $j_!$ die Fortsetzung durch 0 wie in Bemerkung 3.54 (2). Wir zerlegen die Abbildung $\iota_!$ aus (1) weiter in

$$\iota_!: H_{\text{dR},0}^k(M) \xrightarrow{\cong} H_{\text{dR},0}^{k+N-m}(\nu) \cong H_{\text{dR},0}^{k+N-m}(U) \xrightarrow{j_!} \cong H_{\text{dR},0}^{k+N-m}(N).$$

Die erste Abbildung heißt *Thom-Isomorphismus*, ihre Umkehrabbildung ist Integration über die Fasern ähnlich wie die Abbildung $\text{pr}_{2!}$ in (2) oben. Wir werden sie auf Formen-Niveau konstruieren. Falls M kompakt ist, heißt das Bild der konstanten Form 1 in $H_{\text{dR},0}^{k+N-m}(\nu)$ *Thom-Klasse*.

- (4) Da jedes reelle Vektorbündel $V \rightarrow M$ als Normalenbündel einer Untermannigfaltigkeit auftreten kann, beispielsweise als Normalenbündel des Nullschnitts $M \hookrightarrow V$, konstruieren wir Thom-Formen für alle orientierten, Euklidischen Vektorbündel $V \rightarrow M$. Die Thom-Form $\vartheta = \vartheta(V, \nabla^V, g^V)$ ist eng mit der Euler-Klasse $e(V, \nabla^V) = \text{Pf}\left(\frac{F\nu}{2\pi}\right)$ verwandt, denn für jeden Schnitt $s \in \Gamma(V)$ ist $[s^*\vartheta] = e(V) \in H_{\text{dR}}^r(M)$. Auf diese Weise können wir eine Verbindung zur Definition der Euler-Charakteristik in Satz 2.51 herstellen, indem wir s transversal zum Nullschnitt wählen.

Wir beginnen mit (3) und verallgemeinern dazu den Satz 2.13.

4.30. DEFINITION. Es sei $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit. Das *Normalenbündel* $\nu \rightarrow M$ von M in N ist definiert als Quotientenbündel $\nu = TN|_M/TM$.

4.31. SATZ (Röhrenumgebungen, Teil 2). *Es sei $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit mit Normalenbündel $\nu \rightarrow M$. Dann existiert eine Umgebung $U \subset N$ und ein Diffeomorphismus $\nu \cong U$.*

BEWEIS. Wir betrachten $N \subset \mathbb{R}^\ell$ als Untermannigfaltigkeit nach dem Satz 1.32 von Whitney. Es seien $V \subset \mathbb{R}^\ell$ die Umgebung und $r: V \rightarrow N$ die Retraktionsabbildung aus Satz 2.13. Wir identifizieren ν mit dem Unterbündel

$$\nu \cong TM^\perp \cap TN = \{ (p, v) \mid p \in M \text{ und } v \in T_p N \text{ mit } v \perp T_p M \}.$$

Wir können eine Funktion $\varepsilon: M \rightarrow (0, \infty)$ so wählen, dass $p+v \in V$ für alle $(p, v) \in \nu$, also erhalten wir eine Abbildung

$$\{ (p, v) \in \nu \mid \|v\| < \varepsilon(p) \} \longrightarrow N \quad \text{mit} \quad (p, v) \mapsto r(p+v).$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Abbildung entlang des Nullschnittes von ν bijektives Differential hat. Indem wir ε nach Bedarf verkleinern, wird aus der obigen Abbildung ein Diffeomorphismus mit Bild $U \subset N$. Schließlich erhalten wir auch einen Diffeomorphismus

$$\{ (p, v) \in \nu \mid \|v\| < \varepsilon(p) \} \longrightarrow \nu \quad \text{mit} \quad (p, v) \mapsto \left(p, \frac{v}{\varepsilon^2 - \|v\|^2} \right).$$

Die Verkettung dieser Abbildung liefert den gesuchten Diffeomorphismus $\nu \cong U$. □

Als nächstes konstruieren wir die in Punkt (3) erwähnte Integrationsabbildung. Man kann die gleiche Konstruktion für beliebige Submersionen $F: N \rightarrow M$ durchführen, sofern $F|_{\text{supp}(\alpha)}$ eigentlich ist. Diese Bedingung bedeutet, dass für alle kompakten Untermannigfaltigkeiten $K \subset M$ mit Rand die Form $\alpha|_{F^{-1}(K)}$ kompakten Träger hat.

4.32. SATZ UND DEFINITION (Integration über die Faser). *Es sei $\pi: V \rightarrow M$ ein orientiertes reelles Vektorbündel vom Rang r . Dann gibt es eindeutige Abbildungen*

$$\int_{V/M} : \{ \alpha \in \Omega^{k+r}(V) \mid \pi|_{\text{supp}(\alpha)} \text{ ist eigentlich} \} \rightarrow \Omega^k(M)$$

für alle k , so dass

$$\int_{V/M} d\alpha = (-1)^r d \int_{V/M} \alpha, \quad (1)$$

$$\int_{V/M} \alpha \wedge \pi^* \beta = \left(\int_{V/M} \alpha \right) \wedge \beta, \quad (2)$$

$$\int_{F^*V/N} \bar{F}^* \alpha = F^* \int_{V/M} \alpha, \quad (3)$$

$$\int_M \int_{V/M} \alpha = \int_V \alpha. \quad (4)$$

Dabei sei $F: N \rightarrow M$ in (3) glatt, und $\bar{F}: F^*V \rightarrow V$ sei die induzierte Abbildung auf den Totalräumen. Aufgrund von Bedingung (1) induziert diese Abbildung auch eine Abbildung

$$\pi!: H_{\text{dR},0}^{k+r}(V) \longrightarrow H_{\text{dR},0}^k(M)$$

Die Abbildung $\pi!$ ist in Wirklichkeit etwas allgemeiner definiert auf der *Kohomologie mit eigentlichem Träger* bezüglich der Abbildung π , das heißt, auf dem Komplex der oben betrachteten Differentialformen.

BEWEIS. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Aufgrund der Natürlichkeit (3) dürfen wir V auf eine Trivialisierende Umgebung $U \subset M$ einschränken und annehmen, dass $U = \mathbb{R}^m$ und $V|_U = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m$. Dann können wir α darstellen als

$$\alpha = \sum_{I \subset \{1, \dots, m\}} \alpha_I \wedge dy^I,$$

so dass α_I verschwindet, sobald man einen horizontalen Vektor einsetzt, also einen Vektor aus \mathbb{R}^m . Die Formen α_I erfüllen die gleiche Träger-Bedingung wie α . Aus (2) folgt dann

$$\int_{\mathbb{R}^{r+m}/\mathbb{R}^m} \alpha = \sum_{I \subset \{1, \dots, m\}} \left(\int_{\mathbb{R}^{r+m}/\mathbb{R}^m} \alpha_I \right) \wedge dy^I.$$

Schließlich können wir die Integrale an jedem Punkt mit Hilfe von (3) und (4) ausrechnen. Insgesamt erhalten wir dadurch die Formel

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{r+m}/\mathbb{R}^m} \alpha \right)_p = \int_{\mathbb{R}^r} \alpha(e_1, \dots, e_r, \dots) dx^1 \cdots dx^r \in \Lambda^\bullet(\mathbb{R}^m)^*,$$

das heißt, wir integrieren komponentenweise im Vektorraum $\Lambda^\bullet(\mathbb{R}^m)^*$ für jeden Punkt $p \in \mathbb{R}^m$.

Zur Existenz müssen wir Wohldefiniertheit prüfen und zeigen, dass die Eigenschaften (1)–(4) gelten. Zur Wohldefiniertheit merken wir an, dass ein Trivialisierungswechsel F dazu führt, dass eine vertikale k -Form α_p durch eine Form $(F^*\alpha)_p = F_p^* \alpha_p + \beta$ ersetzt wird. Dabei hat β auch Grad k , aber β verschwindet, wenn man alle vertikalen Vektoren e^1, \dots, e^r einsetzt, und trägt in der obigen Formel daher nicht bei. Analog zeigt man Natürlichkeit (3).

Zu Eigenschaft (1) merken wir an, dass $d = d_{\mathbb{R}^r} + d_{\mathbb{R}^m}$ auf \mathbb{R}^{r+m} . Die Ableitung $d_{\mathbb{R}^r}$ liefert faserweise exakte Formen, die daher nicht zum Integral beitragen, während wir $d_{\mathbb{R}^m}$ vor das Integral ziehen können. Der Vorzeichenfaktor rührt daher, dass wir in die ersten r Argumente von α ja bereits vertikale Vektoren einsetzen müssen. \square

Wir wollen eine Thom-Form $\vartheta \in \Omega^r(V)$ auf einem reellen, orientierten Vektorbündel $\pi: V \rightarrow M$ vom Rang r konstruieren. Bis auf exakte Formen mit eigentlichem Träger können wir Thom-Formen axiomatisch beschreiben.

4.33. DEFINITION. Es sei $\pi: V \rightarrow M$ ein orientiertes, Euklidisches Vektorbündel vom Rang r mit Nullschnitt $\iota: M \rightarrow V$. Eine *Thom-Form* für V ist eine geschlossene Form $\vartheta \in \Omega^r(V)$, so dass $\pi|_{\text{supp}(\vartheta)}$ eigentlich ist, und so dass für alle $p \in M$ gilt

$$\int_{V_p} \vartheta = 1 .$$

Der *Thom-Isomorphismus* ist dann die Abbildung

$$\iota!: H_{\text{dR},0}^{\bullet}(M) \longrightarrow H_{\text{dR},0}^{\bullet+r}(V) \quad \text{mit} \quad \iota![\alpha] = [\vartheta \wedge \pi^*\alpha] .$$

Man beachte, dass $\text{supp}(\vartheta \wedge \pi^*\alpha) \subset \text{supp}(\vartheta) \cap \pi^{-1}(\text{supp}(\alpha))$ kompakt ist, wenn α kompakten Träger hat. Zum jetzigen Zeitpunkt wissen wir freilich noch nicht, dass $\iota!$ ein Isomorphismus ist; das lernen wir erst in Satz 4.35. Wenn das Bündel $V \rightarrow M$ trivial ist, und $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^r$ eine Trivialisierung, können wir einfach eine Form $\vartheta_0 \in \Omega_0^r(\mathbb{R}^r)$ wählen, so dass

$$\int_{\mathbb{R}^r} \vartheta_0 = 1 .$$

Dann ist $\psi^*\vartheta_0$ eine Thom-Form. Im allgemeinen setzen sich die für einzelne Trivialisierungen derart konstruierten Formen jedoch nicht global zusammen. Das heißt, man braucht weitere „Korrekturterme“. Zu zeigen ist, dass man insgesamt eine wohldefinierte und geschlossene Form konstruieren kann.

Um das zu ermöglichen, wählen wir einen metrischen Zusammenhang ∇^V auf V . Wir betrachten nur metrische Trivialisierungen von V über $U \subset M$ und erhalten die zugehörige Zusammenhangs-1-Form $\omega \in \Omega^1(U; \mathfrak{so}(r))$ und die Krümmungsform $\Omega \in \Omega^2(U; \mathfrak{so}(r))$ wie in Bemerkung 4.18.

Im Gegensatz zum letzten Abschnitt arbeiten wir jetzt aber nicht mehr auf $U \subset M$, sondern auf ganz $U \times \mathbb{R}^r \cong \pi^{-1}(U) \subset V$. Wir betrachten das Vektorbündel

$$\hat{\pi}: \hat{V} = \pi^*V \longrightarrow V .$$

Dieses Vektorbündel hat einen tautologischen Schnitt, den wir mit Y bezeichnen wollen. Es gilt also $Y(p, v) = v \in V_p \cong \hat{V}_{(p,v)}$. Indem wir Y mit dem zurückgeholten Zusammenhang $\nabla^{\hat{V}} = \nabla^{\pi^*V}$ ableiten, erhalten wir ein Element

$$\nabla^{\hat{V}}Y \in \Omega^1(V; \hat{V}) .$$

Einschränkung auf die Faser liefert die Identität, das heißt $\nabla_v^{\hat{V}}Y = v$ für alle $v \in Y$. In einer lokalen Trivialisierung ψ ist Y einfach die Projektion $\text{pr}_1: \mathbb{R}^r \times U \rightarrow \mathbb{R}^r$, und

$$\nabla^{\hat{V}}Y = (d + \omega)Y .$$

Aufgrund dieser Beschreibung müssen wir uns über Unabhängigkeit von der Trivialisierung keine Gedanken mehr machen.

Wir folgen [Z]. Die sogenannte Mathai-Quillen-Thom-Form auf V wird durch die Formel

$$\eta = (2\pi)^{-\frac{r}{2}} \text{Pf}(\Omega) e^{-\|Y\|^2 - \langle (d+\omega)Y, \Omega^{-1}(d+\omega)Y \rangle} \quad (4.1)$$

gegeben, der wir aber erst noch einen Sinn geben müssen. Außerdem hat η noch zu großen Träger, aber da η exponentiell abfällt, lässt es sich leicht auf das Scheibenbündel von V zurückziehen und zu einer glatten Form mit eigentlichem Träger fortsetzen.

Wir betrachten zunächst nur eine Matrix $A \in \mathfrak{so}(r)$ anstelle von Ω . Außerdem nehmen wir für den Moment an, dass $r = 2n$ gerade und A invertierbar ist. Wir schreiben wieder

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & & \\ -a_1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & a_n & \\ & & & -a_n & 0 & \end{pmatrix}$$

bezüglich einer orientierten Orthonormalbasis. Dann ist $\text{Pf}(A) = a_1 \cdots a_n$. Es sei $v \in \Omega^1(U; \mathbb{R}^{2n})$, dann gilt $v^i \wedge v^i = 0$ für alle $i = 1, \dots, 2n$. Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{Pf}(A) e^{-\langle v, A^{-1}v \rangle} &= a_1 \cdots a_n e^{\frac{2}{a_1} v^1 \wedge v^2 + \cdots + \frac{2}{a_n} v^{2n-1} \wedge v^{2n}} \\ &= (a_1 + 2v^1 \wedge v^2) \wedge \cdots \wedge (a_n + 2v^{2n-1} \wedge v^{2n}), \end{aligned}$$

und diese Form lässt sich auch definieren, wenn A nicht invertierbar ist. Damit haben wir η für den Fall definiert, dass r gerade ist.

Im Fall, dass r ungerade ist, konstruieren wir η zunächst auf $V \oplus \mathbb{R}$. Anschließend integrieren wir über die Faser \mathbb{R} mit Satz 4.32 und erhalten nun auch eine Thom-Form für V .

Sei schließlich $\varepsilon: M \rightarrow (0, \infty)$ eine Funktion wie in Satz 4.31. Dann definieren wir

$$\Phi_\varepsilon: \{ (p, v) \in V \mid \|v\| < \varepsilon \} \rightarrow V \quad \text{durch} \quad (p, v) \mapsto \left(p, \frac{v}{\varepsilon(p)^2 - \|v\|^2} \right).$$

Wegen des Termes $e^{-\|Y\|^2}$ in (4.1) fallen alle Ableitungen von $\Phi_\varepsilon^* \eta$ im Grenzübergang $\|v\| \rightarrow \varepsilon(p)$ rapide ab. Daher lässt sich die Form $\Phi_\varepsilon^* \eta$ durch 0 zu einer glatten Form ϑ auf V fortsetzen, so dass $\pi: \text{supp}(\vartheta) \rightarrow M$ eigentlich ist.

4.34. SATZ (Mathai-Quillen). *Die obige Form ϑ ist eine Thom-Form.*

BEWEIS. Nach Konstruktion ist ϑ geschlossen, wenn η geschlossen ist. Um das zu zeigen, berechnen wir rein formal

$$\begin{aligned} d(\|Y\|^2 + \langle (d + \omega)Y, \Omega^{-1}(d + \omega)Y \rangle) \\ &= 2\langle Y, (d + \omega)Y \rangle + \langle \Omega Y, \Omega^{-1}(d + \omega)Y \rangle \\ &\quad + \langle (d + \omega)Y, \Omega^{-1}[(d + \omega), \Omega] \Omega^{-1}(d + \omega)Y \rangle - \langle (d + \omega)Y, \Omega^{-1} \Omega Y \rangle \\ &= 2\langle Y, (d + \omega)Y \rangle - 2\langle Y, (d + \omega)Y \rangle = 0. \end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass $d + \omega = \nabla^{\hat{V}}$ ein metrischer Zusammenhang ist, dass Ω schiefssymmetrisch ist, und dass die zweite Bianchi-Identität $[(d + \omega), \Omega] = 0$ gilt. Für einen ausführlicheren Beweis dieser Tatsache verweisen wir auf [Z].

Der vertikale Anteil der Form η an der Stelle (p, v) wird nach der obigen Herleitung gerade gegeben durch

$$(2\pi)^{-\frac{r}{2}} e^{-\|v\|^2} 2^{\frac{r}{2}} dv^1 \cdots dv^r.$$

Das Integral über \mathbb{R}^r ist somit ein Gaußsches Integral mit Wert 1. Das gleiche gilt wegen der Integraltransformationsformel auch für ϑ . Außerdem ist $\pi: \text{supp}(\vartheta) \rightarrow M$ eigentlich, also ist ϑ eine Thom-Form nach Definition 4.33. \square

4.35. SATZ (Thom-Isomorphismus). *Es sei $\pi: V \rightarrow M$ ein orientiertes, reelles Vektorbündel vom Rang r , und $\vartheta \in \Omega^r(V)$ sei eine Thom-Form, dann erhalten wir einen Isomorphismus*

$$\iota: H_{\text{dR},0}^k(M) \longrightarrow H_{\text{dR},0}^{k+r}(V) \quad \text{mit} \quad [\alpha] \mapsto [\vartheta \wedge \pi^* \alpha].$$

BEWEIS. Es sei $\vartheta \in \Omega^r(V)$ eine Thom-Form. Dann ist das Integral von ϑ über die Faser von $V \rightarrow M$ eine Funktion. Wegen Definition 4.33 handelt es sich um die konstante Funktion 1. Aus Satz 4.32 (2) und (4) ergibt sich

$$\int_{V/M} \iota_!(\alpha) = \int_{V/M} \vartheta \wedge \pi^* \alpha = \left(\int_{V/M} \vartheta \right) \wedge \alpha = \alpha .$$

Somit ist $\iota_!$ rechtsinvers zur Integration über die Faser. Es reicht also zu zeigen, dass Integration über die Faser ein Isomorphismus ist.

Seien dazu $a = [\alpha] \in H_{\text{dR},0}^{k+r}(V)$ und $b = [\beta] \in H_{\text{dR},0}^{n-k}(M)$. Dann gilt

$$\int_V \alpha \wedge \pi^* \beta = \int_M \left(\int_{V/M} \alpha \right) \wedge \beta$$

nach Satz 4.32 (2), (4). Wegen Homotopieinvarianz 3.31 ist $\pi^*: H_{\text{dR},0}^{n-k}(M) \rightarrow H_{\text{dR},0}^{n-k}(V)$ ein Isomorphismus. Außerdem gilt $H_{\text{dR},0}^k(M)^* \cong H_{\text{dR},0}^{n-k}(M)$ und $H_{\text{dR},0}^{k+r}(V) \cong H_{\text{dR},0}^{n-k}(V)$ wegen Poincaré-Dualität 3.65. Hieraus liest man leicht mit der obigen Gleichung leicht ab, dass Integration über die Faser ebenfalls ein Isomorphismus ist. \square

4.36. BEMERKUNG. Im obigen Beweis haben wir einen möglicherweise nicht so bekannten Sachverhalt aus der linearen Algebra benutzt: ist $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung und $f^*: W^* \rightarrow V^*$ ein Isomorphismus, dann ist auch f ein Isomorphismus. Zur Injektivität sei $f(v) = 0$, dann existiert für jedes $\alpha \in V^*$ ein $\beta \in W^*$ mit $\alpha = F^* \beta$, und es folgt

$$\alpha(v) = (f^* \beta)(v) = \beta(f(v)) = 0 .$$

Wäre $v \neq 0$, so könnte man v zu einer Basis von V erweitern und ein Element $\alpha \in V^*$ konstruieren, das auf allen Basiselementen außer v verschwindet, mit $\alpha(v) = 1$, im Widerspruch zur obigen Rechnung. Zur Surjektivität nehmen wir an, dass im $f \subset W$ ein echter Unterraum ist. Indem wir eine Basis von $im f$ wählen und zu einer Basis von W ergänzen, finden wir ein Element $0 \neq \beta W^*$, das auf ganz $im f$ verschwindet. Im Widerspruch zur Injektivität von F^* gilt dann $f^* \beta = 0$, da für alle $v \in V$ gilt

$$(f^* \beta)(v) = \beta(f(v)) = 0 .$$

Man beachte, dass dieses Argument den Basisergänzungssatz benutzt und daher nur für Vektorräume funktioniert, nicht aber für abelsche Gruppen oder Moduln über Ringen.

Analog zeigen wir: wenn für lineare Abbildungen $f, g: V \rightarrow W$ gilt, dass $f^* = g^*$, dann gilt auch $f = g$. Zum Beweis nehmen wir $g^* - f^* = 0$ an, und wollen $g - f = 0$ zeigen. Sei also $v \in V$ und $w = g(v) - f(v)$. Wäre $w \neq 0$, so könnte man w zu einer Basis von W erweitern und ein Element $\beta \in W^*$ konstruieren, das auf allen Basiselementen außer w verschwindet, mit $\beta(w) = 1$. Das liefert einen Widerspruch, denn

$$1 = \beta(w) = \beta(g(v)) - \beta(f(v)) = (g^* \beta)(v) - (f^* \beta)(v) = (g^* - f^*)(\beta)(v) = 0 .$$

Hieraus folgt beispielsweise: wenn $f: V \rightarrow W$, $g: U \rightarrow V$ und $h: U \rightarrow W$ linear sind und $h^* = g^* \circ f^* = (f \circ g)^*$ gilt, dann ist $h = f \circ g$.

4.37. FOLGERUNG. *Es sei $\pi: V \rightarrow M$ ein reelles, orientiertes Vektorbündel vom Rang r . Dann ist der Thom-Isomorphismus $\iota_!: H_{\text{dR},0}^\bullet(M) \rightarrow H_{\text{dR},0}^{\bullet+r}(V)$ die eindeutige Abbildung mit den Eigenschaften*

$$\iota_!(a \wedge b) = (\iota_! a) \wedge \pi^* b, \quad \iota_! F^* a = \bar{F}^* \iota_! a \quad \text{und} \quad \int_V \iota_! a = \int_M a$$

für alle $a \in H_{\text{dR},0}^\bullet(M)$, $b \in H_{\text{dR}}^\bullet(M)$, und alle glatten Abbildungen $F: N \rightarrow M$, wobei $\bar{F}: F^ V \rightarrow V$ die induzierte Abbildung sei.*

Wenn M kompakt ist, ist insbesondere die Thom-Klasse $[\vartheta] = \iota_! 1 \in H_{\text{dR},0}^r(V)$ eindeutig bestimmt und natürlich. Außerdem gilt

$$\iota^* \iota_! 1 = e(V) \in H^r(M).$$

BEWEIS. Diese Eigenschaften ergeben sich aus Satz 4.32, da $\iota_!$ invers zur Integration $\pi_!$ über die Faser ist. Sie charakterisieren $\iota_!$ eindeutig, denn die letzte Eigenschaft zusammen mit Satz 4.32 impliziert umgekehrt, dass $\iota_!$ zu $\pi_!$ invers, und somit eindeutig bestimmt ist.

Die Thom-Klasse $\iota_! 1$ hat kompakten Träger in V , wenn M kompakt ist, und sie ist eindeutig bestimmt. Falls $F: N \rightarrow M$ eine glatte Abbildung zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten ist, ergibt sich

$$\bar{F}^* \iota_! 1 = \iota_! 1 \in H_{\text{dR},0}^r(F^*V),$$

also ist die Thom-Klasse natürlich. Für die spezielle Wahl von $\vartheta = \Phi_\varepsilon^* \eta$ mit η wie in (4.1) folgt

$$\iota^* \vartheta = \iota^* \eta = (2\pi)^{-\frac{r}{2}} \text{Pf}(\Omega) = e(V). \quad \square$$

Die letzte Formel oben gilt tatsächlich auch, wenn M nicht kompakt ist. Dazu wählen wir eine beliebige Euklidische Metrik auf V und betrachten das *Scheiben-* und das *Sphärenbündel*

$$DV = \{v \in V \mid \|v\| \leq 1\} \quad \text{und} \quad SV = \{v \in V \mid \|v\| = 1\}.$$

Wenn wir Φ_ε mit $\varepsilon < 1$ konstruiert haben, erhalten wir $(\vartheta, 0) \in \Omega^r(DV, SV)$ und definieren den Thom-Isomorphismus als Abbildung

$$H_{\text{dR}}^\bullet(M) \xrightarrow{\cong} H_{\text{dR}}^{\bullet+r}(DV, SV).$$

In diesem Zusammenhang gilt dann nach wie vor $\iota^* \iota_! 1 = e(V)$.

4.38. BEMERKUNG. Mit der Formel $\iota^* \iota_! 1$ haben wir bereits Punkt (4) am Anfang des Abschnitts erklärt. Diese Formel ist tatsächlich überraschend. Anhand unserer Herleitung können wir sie uns erst einmal wie folgt erklären. Wir wollten ϑ so definieren, dass $\int_{V_p} \vartheta = 1$ für alle $p \in M$ gilt, und haben gesehen, dass der naive Ansatz $\psi^* \vartheta_0$ mit lokalen Trivialisierungen ψ keine global wohldefinierte Form liefert. Daher haben wir die Form $\nabla^{\hat{V}} Y \in \Omega^1(V; \hat{V})$ mit $\nabla_v^{\hat{V}} Y = v$ für alle vertikalen Vektoren v eingeführt, die aber auch noch horizontale Anteile enthält (lokal dargestellt als $\omega \cdot Y$). Um insgesamt einen wohldefinierten und geschlossenen Ausdruck zu erhalten, mussten wir auch die Krümmung F^V ins Spiel bringen, denn beim Ableiten von Ausdrücken in $\nabla^{\hat{V}} Y$ erhalten wir automatisch auch Terme der Form $F^{\hat{V}} Y$. So lässt sich technisch erklären, dass wir am Ende eine nicht-triviale charakteristische Klasse des Bündels V erhalten.

Wir versuchen jetzt, die Punkte (1)–(3) am Anfang des Abschnitts zu erklären.

4.39. BEMERKUNG. Wir hatten in (2)–(3) eine beliebige glatte Abbildung $F: M \rightarrow N$ zwischen orientierten Mannigfaltigkeiten in eine Hintereinanderschaltung

$$F: M \xrightarrow{\iota} U \xrightarrow{j} M \times N \xrightarrow{\text{pr}_2} N$$

von drei Typen von Abbildungen zerlegt. Dabei ist U eine Röhrenumgebung des Graphen von F in $M \times N$ wie in Satz 4.31, und ι und j sind die zugehörigen Inklusionsabbildungen. Die letzte Abbildung ist die Projektion auf den zweiten Faktor. Dann konstruieren wir $F_!$ als

$$F_!: H_{\text{dR},0}^k(M) \xrightarrow{\iota} H_{\text{dR},0}^{k+n}(U) \xrightarrow{j} H_{\text{dR},0}^{k+n}(M \times N) \xrightarrow{\text{pr}_2!} H_{\text{dR},0}^{k+n-m}(N).$$

Für jede dieser Abbildungen, nennen wir sie f , wollen wir jetzt zeigen, dass $f_!^* = f^*$ bezüglich Poincaré-Dualität 3.65 gilt. Denn dadurch sind die Abbildungen $\iota_!$, $j_!$ und $\text{pr}_2!$ wegen Bemerkung 4.36 unabhängig von ihrer Konstruktion eindeutig beschrieben. Es folgt weiter, dass

$$F^* = \iota_!^* \circ j_!^* \circ \text{pr}_2!^*.$$

Daher ist F^* dual zur Verkettung

$$F_! = \text{pr}_{2!} \circ j_! \circ \iota_! .$$

Man kann auch Funktorialität zeigen, das heißt, sei $G: L \rightarrow M$ eine weitere glatte Abbildung zwischen orientierten Mannigfaltigkeiten, dann gilt

$$(F \circ G)_!^* = (F \circ G)^* = G^* \circ F^* = G_!^* \circ F_!^* \quad \text{und daher} \quad (F \circ G)_! = F_! \circ G_! .$$

- (1) Wir beginnen mit der Abbildung pr_2 . Formal definieren wir $\text{pr}_{2!}$ durch

$$(\text{pr}_{2!}\alpha)_p(w_1, \dots, w_k) = \int_{M \times \{p\}} \alpha(\dots, w_1, \dots, w_k) .$$

Aus dem Satz von Fubini folgt zunächst für Kartengebiete und dann global für alle $\alpha \in \Omega_0^\bullet(M \times N)$ und alle $\beta \in \Omega^\bullet(N)$, dass

$$\int_{M \times N} \alpha \wedge \text{pr}_2^* \beta = \int_N \left(\int_M \alpha \wedge \text{pr}_2^* \beta \right) = \int_N \left(\int_M \alpha \right) \wedge \beta = \int_N (\text{pr}_{2!}\alpha) \wedge \beta ,$$

somit ist pr_2^* dual zu $\text{pr}_{2!}$.

- (2) Wir betrachten jetzt die Fortsetzung $j_!$ durch 0 für offene Inklusionsabbildungen j , hier für die Abbildung $j: U \rightarrow M \times N$. Bereits in Abschnitt 3.8 haben wir ausgenutzt, dass j^* dual zu $j_!$ ist, das heißt hier, dass für alle $\alpha \in \Omega_0^\bullet(U)$ und alle $\beta \in \Omega^\bullet(M \times N)$ gilt

$$\int_U \alpha \wedge j^* \beta = \int_{M \times N} j_! \alpha \wedge \beta .$$

- (3) Zu guter Letzt sei $\pi: \nu \rightarrow M$ das Normalenbündel von $M \cong \text{graph}(F)$ in $M \times N$ vom Rang n mit Nullschnitt $\iota: M \rightarrow \nu$, und sei $\nu \cong U \subset M \times N$ eine Röhrenumgebung wie in Satz 4.31. Wegen Homotopieinvarianz gilt $\pi^* \iota^* = \text{id}$ auf $H^\bullet(\nu)$, für eine geschlossene Form $\beta \in \Omega^\bullet(\nu)$ existiert daher $\gamma \in \Omega^{\bullet-1}(\nu)$ mit

$$\pi^* \iota^* \beta = \beta + d\gamma .$$

Für alle $\alpha \in \Omega_0^k(M)$ mit $d\alpha = 0$ gilt

$$\begin{aligned} \int_M \alpha \wedge \iota^* \beta &= \int_V \vartheta \wedge \pi^* \alpha \wedge (\pi^* \iota^* \beta) = \int_V \iota_! \alpha \wedge \beta + (-1)^{k+n} \int_V d(\iota_! \alpha \wedge \gamma) \\ &= \int_V \iota_! \alpha \wedge \beta + (-1)^k d \int_V \iota_! \alpha \wedge \gamma . \end{aligned}$$

Also ist ι^* zu $\iota_!$ in der de Rham-Kohomologie dual.

4.40. BEMERKUNG. Zum Schluss kommen wir zu Punkt (1), das heißt, wir interpretieren die Schnittzahl in der de Rham-Kohomologie. Allgemeiner sei L eine geschlossene Mannigfaltigkeit, $F: L \rightarrow N$ glatt und $M \subset N$ eine geschlossene Untermannigfaltigkeit. Wir nehmen an, dass F zu M transversal ist, und bezeichnen die Einschränkung von F auf das Urbild von M mit $f = F|_{F^{-1}(M)}: F^{-1}(M) \rightarrow M$. Aus

$$T_{F(p)}M + \text{im}(dF_p) = T_{F(p)}N$$

für alle $p \in F^{-1}M$ folgt mit dem Homomorphiesatz der linearen Algebra, dass

$$T_{F(p)}N/T_{F(p)}M \cong \text{im}(dF_p)/(\text{im}(dF_p) \cap T_{F(p)}M) \cong T_pL/T_p(F^{-1}(M)) ,$$

wobei der letzte Isomorphismus von $dF_p: T_pL \rightarrow T_{F(p)}N$ induziert wird. Seien ν_M und $\nu_{F^{-1}(M)}$ die Normalenbündel von M in N und von $F^{-1}(M)$ in L , dann folgt

$$\nu_{F^{-1}(M)} \cong f^* \nu_M .$$

Man kann Röhrenumgebungen $U \cong \nu_M$ und $V \cong \nu_{F^{-1}(M)}$ so konstruieren, dass man ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccccccc} F^{-1}(M) & \xrightarrow{\iota_{F^{-1}(M)}} & \nu_{F^{-1}(M)} & \xrightarrow{\cong} & V & \xrightarrow{j_V} & L \\ f \downarrow & & dF \downarrow & & \downarrow F & & \downarrow F \\ M & \xrightarrow{\iota_M} & \nu_M & \xrightarrow{\cong} & U & \xrightarrow{j_U} & N \end{array}$$

erhält. Wir schreiben $\iota_M = j_U \circ \iota_{\nu_M}$ und $\iota_{F^{-1}(M)} = j_V \circ \iota_{\nu_{F^{-1}(M)}}$.

Da L kompakt ist, ist die Abbildung $F|_V: V \rightarrow U$ eigentlich: sei $K \subset U$ kompakt, dann ist $K \subset N$ abgeschlossen, wegen Stetigkeit von F also auch $F^{-1}(K) \subset L$. Aber dann ist $F^{-1}(K)$ auch kompakt. Auf kompakten Mannigfaltigkeiten ersetzen wir $H_{\text{dR},0}^\bullet$ durch H_{dR}^\bullet . Wir dürfen daher das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} H_{\text{dR}}^k(F^{-1}(M)) & \xrightarrow{\iota_{F^{-1}(M)}!} & H_{\text{dR},0}^{k+n-m}(\nu_{F^{-1}(M)}) & \xrightarrow{\cong} & H_{\text{dR},0}^{k+n-m}(V) & \xrightarrow{j_V!} & H_{\text{dR}}^{k+n-m}(L) \\ f \uparrow & & dF \uparrow & & \uparrow F & & \uparrow F \\ H_{\text{dR}}^k(M) & \xrightarrow{\iota_M!} & H_{\text{dR},0}^{k+n-m}(\nu_M) & \xrightarrow{\cong} & H_{\text{dR},0}^{k+n-m}(U) & \xrightarrow{j_U!} & H_{\text{dR}}^{k+n-m}(N) \end{array}$$

betrachten, und wollen zeigen, dass es kommutiert. Das rechte Quadrat kommutiert aufgrund der Konstruktion der Fortsetzung durch 0 in Bemerkung 3.54 (2).

Für das linke Quadrat wählen wir dazu eine Metrik und einen metrischen Zusammenhang auf $\nu_M \rightarrow M$, und verwenden auf $\nu_{F^{-1}(M)} \cong f^*\nu_M \rightarrow F^{-1}(M)$ die zurückgeholte Metrik und den zurückgeholten Zusammenhang. Außerdem konstruieren wir Φ_ε mit einer ausreichend kleinen Konstante ε für beide Bündel. Die Abbildung $dF: \nu_{F^{-1}(M)} \rightarrow \nu_M$ entspricht der induzierten Abbildung $\bar{f}: f^*\nu_M \rightarrow \nu_M$ aus Folgerung 4.37, in der wir auch gesehen haben, dass das linke Quadrat kommutiert. Insgesamt folgt

$$F^* \circ \iota_M! = \iota_{F^{-1}(M)}! \circ f^* .$$

Jetzt können wir die Behauptungen in Punkt (1) am Anfang des Abschnitts überprüfen. Wir nehmen zunächst an, dass $\dim L = k$ und $m = \dim M = n - k$ gilt. Sei $p \in F^{-1}(M)$, dann trägt $T_p L = \nu_{F^{-1}(M)}|_p \cong f^*\nu_M$ zum einen die Orientierung von L und zum anderen die zurückgeholte Orientierung von ν_M . Wenn diese Orientierungen gleich sind, ist $\{p\}$ positiv orientiert, ansonsten negativ. Daher gilt

$$\#(F, M; N) = \sum_{p \in F^{-1}(M)} \text{sign}(d_p F) = \int_{F^{-1}(M)} 1 = \int_L \iota_{F^{-1}(M)}! f^* 1 = \int_L F^* \iota_M! 1 .$$

Wir können also der Untermannigfaltigkeit M die Form $\iota_M! 1$ zuordnen, um die Schnittzahl mit M in der de Rham-Kohomologie auszurechnen.

Allgemeiner sei $\beta \in \Omega^{k+m-n}(M)$ geschlossen. Für die Form $\iota_M! \beta \in \Omega^k(N)$ gilt dann

$$\int_L F^* \iota_M! \beta = \int_L \iota_{F^{-1}(M)}! F^* \beta = \int_{F^{-1}(M)} f^* \beta .$$

Literatur

- [BT] R. Bott, L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Springer, New York, 1982.
- [GP] V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974.
- [Hi] M. W. Hirsch, *Differential Topology*, fourth corr. printing, Springer, New York, 1991.
- [L] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [M] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, The Univ. Press of Virginia, Charlottesville, 1965.
- [MS] J. W. Milnor, J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1974.
- [Z] W. Zhang, *Lectures on Chern-Weil theory and Witten deformations*, Nankai Tracts in Math., 4. World Scientific Publishing, River Edge, 2001.