

# Elementare Differentialgeometrie



## Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Euklidische und andere Geometrien	1
1.1. Axiome der Euklidischen Ebene	1
1.2. Das Kartesische Modell der Euklidischen Geometrie	6
1.3. Sphärische und Projektive Geometrie	9
1.4. Hyperbolische Geometrie	15
Kapitel 2. Kurven	25
2.1. Die Bogenlänge	25
2.2. Reguläre Kurven im $\mathbb{R}^n$	35
2.3. Ebene Kurven	42
2.4. Kurven im $\mathbb{R}^3$	51
Kapitel 3. Die äußere Geometrie der Flächen	55
3.1. Parametrisierte Flächenstücke	55
3.2. Tangentialvektoren und Erste Fundamentalform	58
3.3. Normalenfelder und Krümmungen	66
3.4. Der Levi-Civita-Zusammenhang	75
3.5. Die Sätze von Gauß und Codazzi-Mainardi	82
Kapitel 4. Innere Geometrie der Flächen	89
4.1. Geodätische	89
4.2. Der lokale Satz von Gauß-Bonnet	95
4.3. Kompakte Flächen und der globale Satz von Gauß-Bonnet	101
Literatur	105



## KAPITEL 1

# Euklidische und andere Geometrien

In der Vorlesung werden wir die folgenden Themen behandeln.

- (1) **Euklidische und andere Geometrien.** Hier lernen wir die Grundlagen der klassischen Geometrie kennen. Die Euklidische Geometrie ist für uns wichtig, da wir uns lange Zeit mit Objekten wie Kurven und Flächen im  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  beschäftigen wollen. Die sphärische Geometrie gibt eine sehr grobe Näherung für die Geometrie auf unserer Erde. Manche Sätze der sphärischen Geometrie haben gewisse Ähnlichkeit zur Euklidischen Geometrie, manche sind völlig anders. Schließlich lernen wir auch hyperbolische Geometrie als sogenannte *nicht-euklidische Geometrie* kennen. Spätestens hier stoßen unsere elementaren Methoden an ihre Grenzen. Im Zusammenhang mit Riemannscher Geometrie werden wir noch etwas mehr über sphärische und hyperbolische Geometrie lernen.
- (2) **Kurven.** Wir lernen die Länge, die Krümmung und andere Eigenschaften von Kurven im euklidischen Raum kennen. Zum einen lernen wir interessante Sätze wie den Vierecksatz kennen, zum anderen werden wir später Kurven auf gekrümmten Flächen studieren.
- (3) **Eingebettete Flächen.** Wir betrachten die „äußere Geometrie“ von gekrümmten Flächen im  $\mathbb{R}^3$ . Beispielsweise lernen wir die Fundamentalförmungen einer Fläche und verschiedene Krümmungsbegriffe kennen. Wir diskutieren spezielle Typen von Flächen wie etwa Rotationsflächen, abwickelbare Flächen, Minimalflächen.
- (4) **Innere Geometrie der Flächen.** Wir untersuchen gekrümmte Flächen aus der Sicht zweidimensionaler Wesen, die sich nur auf diesen Flächen bewegen. Manche (aber nicht alle) Größen der äußeren Geometrie lassen sich in der inneren Geometrie wiedererkennen. Unsere Flächen müssen nicht mehr eingebettet sein, was uns zum Beispiel ermöglicht, die hyperbolische Geometrie weiterzuentwickeln.

### 1.1. Axiome der Euklidischen Ebene

Wir versuchen, Eigenschaften der Euklidischen Geometrie festzuhalten, mit denen wir bereits einige Sätze beweisen können. Da wir diesen Ansatz nicht allzusehr vertiefen wollen, verfahren wir eher informell. Unsere Geometrien sind dabei rein kombinatorische Objekte; wir versuchen hier nicht, Längen oder Winkel zu messen oder zu vergleichen. Literatur: [B].

Wir betrachten Mengen  $\mathcal{P}$  von Punkten und  $\mathcal{G}$  von Geraden. Wenn ein Punkt  $p \in \mathcal{P}$  auf einer Geraden  $L \in \mathcal{G}$  liegt, schreiben wir  $p \in L$ , und betrachten fortan Tripel  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ . Mit dem Symbol „ $\in$ “ ist hier jedoch nicht das Enthaltensein in einer Menge gemeint. Wenn ein Punkt  $p$  auf zwei Geraden  $L, M \in \mathcal{G}$  liegt, schreiben wir auch  $p \in L \cap M$ .

Wir fordern die folgenden *Inzidenzaxiome*.

- I1. Durch je zwei Punkte geht eine Gerade.
- I2. Durch je zwei verschiedene Punkte geht höchstens eine Gerade.
- I3. Jede Gerade enthält mindestens zwei verschiedene Punkte.
- I4. Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Die Axiome I1 und I2 besagen, dass durch je zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade geht; wir nennen diese  $L(p, q)$ . Das Axiom I4 sagt, dass unsere Geometrie mindestens zweidimensional ist.

ÜBUNG. Seien  $\mathcal{P}$  die Punkte und  $\mathcal{G}$  die Geraden in der Euklidischen Ebene. Beweisen Sie, dass die Axiome I1–I4 gelten.

ÜBUNG. Seien jetzt  $\mathcal{P}$  die Geraden und  $\mathcal{G}$  die Punkte der Euklidischen Ebene, und es gelte  $L \in p$  in dieser Geometrie genau dann, wenn der (euklidische) Punkt  $p \in \mathcal{G}$  auf der Geraden  $L \in \mathcal{P}$  liegt. Welche der Axiome I1–I4 gelten jetzt?

Als nächstes wollen wir eine „Zwischen-Relation“ einführen, mit der wir die Anordnung verschiedener Punkte auf einer Geraden angeben. Wir schreiben  $[p, q, r]$  für die Aussage, dass  $q$  zwischen  $p$  und  $r$  liegt, und betrachten jetzt Quadrupel  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, [ , , ])$ . Die Menge aller Punkte  $q$  zwischen  $p$  und  $r$  nennen wir die *Strecke*  $\overline{pr}$  zwischen  $p$  und  $r$ .

Wir fordern die folgenden *Anordnungsaxiome*.

- A1. Falls  $q$  zwischen  $p$  und  $r$  liegt, sind  $p, q$  und  $r$  paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden.
- A2. Falls  $q$  zwischen  $p$  und  $r$  liegt, liegt  $q$  auch zwischen  $r$  und  $p$ .
- A3. Zu je zwei verschiedenen Punkten  $p, q$  gibt es einen Punkt  $r$ , so dass  $q$  zwischen  $p$  und  $r$  liegt.
- A4. Von drei Punkten liegt höchstens einer zwischen den beiden anderen.
- A5. Seien  $p, q, r$  drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, und sei  $L$  eine Gerade, die keinen dieser Punkte enthält. Falls  $L$  die Strecke  $\overline{pq}$  schneidet, dann schneidet  $L$  auch genau eine der beiden Strecken  $\overline{pr}, \overline{qr}$ .

Die Axiome A1, A2, A4 sagen, dass die Zwischenrelation tatsächlich etwas über die Anordnung von Punkten auf einer Gerade aussagt. Axiom A3 sagt, dass sich jede Strecke über jeden ihrer Endpunkte hinaus verlängern lässt. Unter Axiom A5 stellen wir uns vor, dass unsere Geometrie höchstens zweidimensional ist, mit I4 zusammen also genau zweidimensional.

ÜBUNG. Überlegen Sie sich, dass diese Axiome in der Euklidischen Ebene gelten.

Wir haben nicht gefordert, dass für drei paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden einer zwischen den beiden anderen liegt, aber auch das lässt sich beweisen. Wir haben auch nicht gefordert, dass zwischen zwei Punkten ein weiterer Punkt liegt, aber man kann das beweisen.

1.1. SATZ. *Zwischen je zwei verschiedenen Punkten liegt ein weiterer.*

BEWEIS. Siehe [B]. □

1.2. DEFINITION. Sei  $L$  eine Gerade und  $p$  ein Punkt auf  $L$ . Seien  $q, r$  zwei weitere Punkte auf  $L$ , dann liegen  $q$  und  $r$  auf der gleichen Seite von  $p$  (auf  $L$ ), wenn  $p$  nicht zwischen  $q$  und  $r$  liegt.

Sei  $L$  eine Gerade, und seien  $p, q$  Punkte, die nicht auf  $L$  liegen. Dann liegen  $p$  und  $q$  auf derselben Seite von  $L$ , wenn  $L$  die Strecke  $\overline{pq}$  nicht schneidet.

Man kann jetzt zeigen, dass beide Relationen Äquivalenzrelationen mit genau zwei Äquivalenzklassen sind.

1.3. DEFINITION. Ein *Winkel* ist eine Äquivalenzklasse von Tripeln von Punkten  $p, q, r$ , die nicht auf einer Geraden liegen, wobei die Winkel  $\sphericalangle(p, q, r)$  und  $\sphericalangle(p', q', r')$  gleich sind, falls  $q = q'$  und entweder  $p' \in L(q, p)$  auf der gleichen Seite von  $q$  wie  $p$  und  $r' \in L(q, r)$  auf der gleichen Seite von  $q$  wie  $r$  liegen, oder  $p' \in L(q, r)$  auf der gleichen Seite von  $q$  wie  $r$  und  $r' \in L(q, p)$  auf der gleichen Seite von  $q$  wie  $p$  liegen.

Als nächstes wollen wir Kongruenzrelationen  $\equiv$  auf Strecken  $\overline{pq}$  und auf Winkeln  $\sphericalangle(p, q, r)$  einführen, und betrachten jetzt also Quintupel  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, [, ], \equiv)$ .

Wir fordern die folgenden *Kongruenzaxiome*.

- K1. Sei  $\overline{pq}$  eine Strecke,  $L$  eine Gerade und  $r, s$  zwei verschiedene Punkte auf  $L$ . Dann gibt es einen Punkt  $t \in L$  auf derselben Seite von  $r$  wie  $s$ , so dass  $\overline{pq} \equiv \overline{rt}$ .
- K2. Sind  $\overline{rs}$  und  $\overline{tu}$  beide zu  $\overline{pq}$  kongruent, so ist auch  $\overline{rs}$  zu  $\overline{tu}$  kongruent.
- K3. Es liege  $q$  zwischen  $p$  und  $r$  und  $q'$  zwischen  $p'$  und  $r'$ . Wenn  $\overline{pq}$  zu  $\overline{p'q'}$  und  $\overline{qr}$  und  $\overline{q'r'}$  kongruent sind, dann ist auch  $\overline{pr}$  zu  $\overline{p'r'}$  kongruent.
- K4. Die Kongruenz von Winkeln ist eine Äquivalenzrelation.
- K5. Seien  $p, q, r$  Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, und seien  $p', q', s'$  ebenfalls Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, dann existiert genau ein zu  $\sphericalangle(p, q, r)$  kongruenter Winkel  $\sphericalangle(p', q', r')$ , so dass  $r'$  auf derselben Seite von  $L(p', q')$  wie  $s'$  liegt.
- K6. Seien  $p, q, r$  und  $p', q', r'$  zwei Tripel von Punkten, die jeweils nicht auf einer Geraden liegen, und es gelte
 
$$\overline{pq} \equiv \overline{p'q'}, \quad \overline{pr} \equiv \overline{p'r'} \quad \text{und} \quad \sphericalangle(q, p, r) \equiv \sphericalangle(q', p', r'),$$
 dann gilt auch  $\sphericalangle(p, q, r) \equiv \sphericalangle(p', q', r')$ .

Die Axiome K2 und K4 besagen, dass beide Kongruenzrelationen Äquivalenzrelationen sind. Die Axiome K1 und K5 sagen, dass wir Strecken und Winkel „abtragen“ können. Axiom K3 besagt, dass wir Strecken addieren dürfen. Axiom K6 stellt eine Verbindung zwischen Kongruenz von Winkeln und Kongruenz von Seiten her. Es ist der erste Schritt zur Eindeutigkeit der Dreieckskonstruktion „Seite Winkel Seite“.

ÜBUNG. Überlegen Sie sich, dass diese Axiome in der Euklidischen Ebene gelten.

1.4. SATZ. *In Axiom K6 gilt außerdem*

$$\sphericalangle(q, r, p) \equiv \sphericalangle(q', r', p') \quad \text{und} \quad \overline{qr} \equiv \overline{q'r'} .$$

In diesem Fall sagen wir, dass die Dreiecke aus den Punkten  $p, q, r$  und  $p', q', r'$  kongruent sind, und schreiben

$$\Delta pqr \equiv \Delta p'q'r' .$$

BEWEISSKIZZE. Winkel: klar. Fehlende Seite: Konstruiere Punkt  $s' \in L(q', r')$  auf der selben Seite von  $q'$  wie  $r'$  mit  $\overline{q's'} \equiv \overline{qr}$ . Dann folgt aus K6 und K5 das  $s' = r'$ .  $\square$

1.5. SATZ. *Es liege  $q$  zwischen  $p$  und  $r$  auf einer Geraden  $L$ , und  $s$  liege nicht auf  $L$ . Genauso liege  $q'$  zwischen  $p'$  und  $r'$  auf  $L'$ , und  $s'$  liege nicht auf  $L'$ . Dann folgt  $\sphericalangle(r, q, s) \equiv \sphericalangle(r', q', s')$  aus  $\sphericalangle(p, q, s) \equiv \sphericalangle(p', q', s')$ .*

BEWEIS. O.B.d.A. gelte

$$\overline{pq} \equiv \overline{p'q'} , \quad \overline{qr} \equiv \overline{q'r'} \quad \text{und} \quad \overline{qs} \equiv \overline{q's'} ,$$

dann folgt  $\overline{pr} \equiv \overline{p'r'}$  aus Axiom K3. Wende jetzt Satz 1.4 dreimal an und zeige der Reihe nach

$$\Delta pqs \equiv \Delta p'q's' , \quad \Delta prs \equiv \Delta p'r's' \quad \text{und} \quad \Delta qrs \equiv \Delta q'r's' .$$

Insbesondere gilt dann auch  $\sphericalangle(r, q, s) \equiv \sphericalangle(r', q', s')$ .  $\square$

Wir können jetzt beweisen, dass es zu jeder Geraden  $L$  durch jeden Punkt  $p \notin L$  mindestens eine Parallel gibt. Die folgende Definition geschieht unter Annahme des Axioms A5, d.h., sie gilt nur in der Ebene, also nur in einer zweidimensionalen Geometrie.

1.6. DEFINITION. Zwei Geraden in der Ebene, die sich nicht schneiden, heißen *parallel*.

1.7. SATZ. *Sei  $L$  eine Gerade und  $p \notin L$  ein Punkt. Dann existiert eine Parallel zu  $p$  durch  $L$ .*

BEWEIS. Wähle  $q, r \in L$ . Konstruiere jetzt einen Punkt  $s$ , der auf der anderen Seite von  $L(p, q)$  als  $r$  liegt, so dass

$$\sphericalangle(p, q, r) \equiv \sphericalangle(q, p, s) .$$



Wir beweisen durch Widerspruch, dass  $L$  und  $L' = L(p, s)$  parallel sind.

Sei etwa  $t$  ein Schnittpunkt. Wir dürfen annehmen, dass  $t$  auf der gleichen Seite von  $L(p, q)$  wie  $r$  liegt, andernfalls vertauschen wir die Rollen von  $p$  und  $q$  sowie von  $r$  und  $s$ . Betrachte das Dreieck  $\Delta pqt$ . Konstruiere einen Punkt  $u$  auf  $L'$  auf derselben Seite von  $p$  wie  $s$  mit  $\overline{pu} \equiv \overline{qt}$ . Nach Satz 1.4 gilt  $\Delta pqt \equiv \Delta qpu$ . Aus Satz 1.5 und Axiom K5 folgt jetzt, dass  $u \in L$ . Somit haben  $L$  und  $L'$  mehr als einen Schnittpunkt, also gilt  $L = L'$ , also  $p \in L$  entgegen unserer Annahme.  $\square$

Wir werden bald sehen, dass sich die Eindeutigkeit der Parallelen nicht beweisen lässt. Wir brauchen daher ein weiteres Inzidenz-Axiom

P. Zu jeder Gerade  $L$  und jedem Punkt  $p \notin L$  existiert höchstens eine Parallele zu  $L$  durch  $p$ .

Wir können jetzt beweisen, dass die Winkelsumme im Dreieck genau  $\pi$  (bzw.  $180^\circ$ ) beträgt. Da wir aber keine Winkel messen können, müssen wir das etwas umständlicher formulieren.

1.8. SATZ. Seien  $p, q, r$  drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Seien  $s, t$  zwei Punkte. Konstruiert man  $u, v, w$ , so dass

$$\sphericalangle pqr \equiv \sphericalangle tsu, \quad \sphericalangle qpr \equiv \sphericalangle usv \quad \text{und} \quad \sphericalangle prq \equiv \sphericalangle vsw,$$

so dass  $v$  auf der anderen Seite von  $L(s, u)$  als  $t$  und  $w$  auf der anderen Seite von  $L(s, v)$  als  $u$  liegt. Dann liegt  $s$  zwischen  $t$  und  $w$ .

BEWEIS. Wir führen den Beweis für  $s = p$  vor. Mit etwas zusätzlichem Aufwand folgt die allgemeine Version. Konstruiere dazu Parallelen zu  $L(p, r)$  durch  $q$  wie im Beweis von Satz 1.7. Aus Axiom P folgt, dass beide Parallelen gleich sind, und es ergibt sich die Behauptung.  $\square$

Mit Hilfe dieser Axiome können wir jetzt endlich zeigen, dass unsere Geometrie zu einem angeordneten Körper  $K$  der Charakteristik 0 gehört, und über diesem Körper genauso aussieht wie die Euklidische Geometrie über  $\mathbb{R}^2$ , die wir aus der Schule kennen. Mit Hilfe zweier weiterer Axiome stellen wir sicher, dass unser Körper genau  $\mathbb{R}$  ist. Wir schreiben  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, [, ], \equiv, \equiv)$  für unsere Geometrien, dabei taucht das Symbol „ $\equiv$ “ zweimal auf, nämlich für Kongruenz von Strecken und von Winkeln.

1.9. DEFINITION. Eine Geometrie  $(\mathcal{P}', \mathcal{G}', \in', [, ]', \equiv', \equiv')$  heißt *Erweiterung* einer anderen Geometrie  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, [, ], \equiv, \equiv)$ , wenn  $\mathcal{P}' \supset \mathcal{P}$ ,  $\mathcal{G}' \supset \mathcal{G}$ , und wenn die Einschränkungen von  $\in', [, ]', \equiv'$  auf Objekte von  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, [, ], \equiv, \equiv)$  mit  $\in, [, ]$  und  $\equiv$  übereinstimmen.

Wir können jetzt die zwei Vollständigkeitsaxiome einführen.

- V1. *Archimedisches Axiom.* Seien  $p, q, r$  drei paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden  $L$ , so dass  $p$  nicht zwischen  $q$  und  $r$  liegt. Konstruiert man Punkte  $q_1 = q, q_2, \dots$  auf  $L$  mit  $\overline{q_i, q_{i+1}} \equiv \overline{pq}$  und  $q_i$  zwischen  $p$  und  $q_{i+1}$  für alle  $i \geq 1$ , dann erhält man nach endlich vielen Schritten einen Punkt  $q_k$ , so dass  $r$  zwischen  $p$  und  $q_k$  liegt.
- V2. *Vollständigkeitsaxiom* Die Geometrie  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in, [, ], \equiv, \equiv)$  hat keine echte Erweiterung, die den Axiomen I1–I4, A1–A5, K1–K6 und V1 genügt.

Während Axiom V1 besagt, dass es keine „unendlich“ kleinen oder großen Zahlen in  $K$  gibt, sagt Axiom V2 unter anderem, dass  $K$  vollständig ist. Aber das wollen wir hier nicht vertiefen.

## 1.2. Das Kartesische Modell der Euklidischen Geometrie

Während der axiomatische Zugang hilfreich ist, um die der Geometrie zugrunde liegenden Konzepte zu entdecken und zu verstehen, ist er in der Praxis oft sehr mühsam. Beispielsweise müssen wir einige Axiome weglassen und andere hinzunehmen, um dreidimensionale Geometrie zu beschreiben. Wir können daher nicht einfach Argumente angeben, die in vielen Dimensionen gleichermaßen funktionieren.

Wir geben jetzt ein Modell der  $n$ -dimensionalen Euklidischen Geometrie an, mit dem wir fortan rechnen wollen, und das wir auch schon aus der Schule kennen.

Sei dazu

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathbb{R}^n, \\ \mathcal{G} &= \{ L(p, q) \mid p, q \in \mathcal{P}, p \neq q \} \\ \text{mit } L(p, q) &= \{ (1-s)p + sq \mid s \in \mathbb{R} \}. \end{aligned}$$

Als „ $\in$ “ wählen wir die mengentheoretische Enthaltenseinsrelation.

Die Zwischenbeziehung lässt sich am einfachsten definieren über

$$\overline{pq} = \{ r \mid r \in \mathcal{P}, [p, r, q] \} = \{ (1-s)p + sq \mid 0 < s < 1 \}.$$

Um Kongruenz zu definieren, betrachten wir die *Euklidische Bewegungsgruppe*. Sei

$$O(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = E_n \}$$

die Gruppe der orthogonalen Matrizen, dann definiere

$$E(n) = O(n) \times \mathbb{R}^n = (O(n) \times \mathbb{R}^n, \circ, (E, 0))$$

$$\text{mit } (A, v) \circ (B, w) = (AB, v + Aw).$$

Sie wirkt auf  $\mathcal{P}$  durch

$$(A, v)(p) = Ap + v;$$

dies ist eine Gruppenoperation, da

$$(E, 0)(p) = p \quad \text{und} \quad ((A, v) \circ (B, w))(p) = (A, v)((B, w)(p))$$

für alle  $(A, v), (B, w) \in E(n)$  und alle  $p \in \mathcal{P}$ . Außerdem werden Geraden in Geraden überführt und die Zwischenbeziehung bleibt erhalten, da

$$\begin{aligned} (1-s)((A, v)(p)) + s((A, v)(q)) &= (1-s)(Ap + v) + s(Aq + v) \\ &= (A, v)((1-s)p + sq) . \end{aligned}$$

1.10. DEFINITION. Zwei Strecken  $\overline{pq}$  und  $\overline{p'q'}$  heißen *kongruent*, wenn es ein Element  $g \in E(n)$  gibt mit  $g(p) = p'$  und  $g(q) = q'$ .

Zwei Winkel  $\sphericalangle(p, q, r)$  und  $\sphericalangle(p', q', r')$  heißen *kongruent*, wenn es ein Element  $g \in E(n)$  gibt mit  $\sphericalangle(p', q', r') = \sphericalangle(g(p), g(q), g(r))$ .

Das erste Vollständigkeitsaxiom folgt unmittelbar aus dem Archimedischen Axiom für die reellen Zahlen. Das zweite Vollständigkeitsaxiom ist etwas schwieriger zu beweisen.

1.11. SATZ. Für die Euklidische Ebene  $\mathbb{R}^2$  gelten die Axiome I1-I4, A1-A5, K1-K6, P, V1 und V2.

BEWEIS. Übung, siehe [B]. □

Mit Hilfe eines Skalarproduktes können wir jetzt Längen und Winkel sogar messen. Sei also  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  fortan das Standard-Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  mit

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i .$$

Wir schreiben

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle} .$$

Mit  $\arccos$  bezeichnen wir den Zweig  $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  der Arcuscossinus-Function. Insbesondere werden wir Winkel also stets in Bogenmaß messen. Zur Erinnerung:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} .$$

1.12. DEFINITION. (1) Seien  $p, q \in \mathbb{R}^n$ , dann hat die Strecke  $\overline{pq}$  die *Länge*

$$|\overline{pq}| = |q - p| .$$

(2) Seien  $p, q, r \in \mathbb{R}^n$  Punkte mit  $p \neq q \neq r$ , dann hat der Winkel  $\sphericalangle(p, q, r)$  den *Betrag*

$$|\sphericalangle(p, q, r)| = \arccos \frac{\langle p - q, r - q \rangle}{|\overline{pq}| |\overline{rq}|} .$$

Diese Definitionen sind sogar etwas allgemeiner als nötig: Wir können etwa auch  $|\overline{pp}| = 0$  und  $|\sphericalangle(p, q, p)| = 0$  definieren.

1.13. SATZ. (1) Zwei Strecken im  $\mathbb{R}^n$  sind genau dann kongruent, wenn sie gleich lang sind.

(2) Zwei Winkel im  $\mathbb{R}^n$  sind genau dann kongruent, wenn sie den gleichen Betrag haben.

BEWEIS. Sei  $g = (A, v) \in E(n)$ . Zunächst überlegen wir uns für Punkte  $p, q, r, s \in \mathbb{R}^n$ , dass

$$\begin{aligned} \langle g(p) - g(q), g(r) - g(s) \rangle &= \langle Ap + v - Aq - v, Ar + v - As - v \rangle \\ &= \langle A(p - q), A(r - s) \rangle = \langle A^t A(p - q), r - s \rangle = \langle p - q, r - s \rangle \end{aligned}$$

gilt. Hieraus folgen die Richtungen „ $\Rightarrow$ “ in (1) und (2).

Zu (1) reicht es zu zeigen dass  $\overline{pq}$  für alle  $p, q \in \mathbb{R}^n$  mit  $p \neq q$  kongruent ist zur Strecke

$$\overline{0r} \quad \text{mit} \quad r = |\overline{pq}| \cdot e_1 ,$$

wobei  $e_1, \dots, e_n$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$  bezeichne. Denn es gilt ja

$$|\overline{0r}| = ||\overline{pq}| \cdot e_1| = |\overline{pq}| ,$$

und Kongruenz ist als Äquivalenzrelation ja transitiv. Dazu ergänzen wir zunächst

$$v_1 = \frac{q - p}{|\overline{pq}|}$$

zu einer Orthonormalbasis  $v_1, \dots, v_n$  des  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $A$  die Matrix mit den Spalten  $v_1, \dots, v_n$ , dann folgt  $A \in O(n)$ . Betrachte jetzt  $g = (A, p) \in E(n)$ , dann folgt

$$g(0) = p \quad \text{und} \quad g(r) = A \cdot |\overline{pq}| \cdot e_1 + p = |\overline{pq}| \cdot \frac{q - p}{|\overline{pq}|} + p = q .$$

Betrachte zu (2) nur den Fall  $n \geq 2$ , der Fall  $n = 1$  ist trivial. Seien  $p, q, r \in \mathbb{R}^n$  drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, vgl. Definition 1.3. Betrachte die Punkte

$$s = |\overline{pq}| \cdot e_1 \quad \text{und} \quad t = |\overline{qr}| \cdot (\cos |\sphericalangle(p, q, r)| \cdot e_1 + \sin |\sphericalangle(p, q, r)| \cdot e_2) .$$

Wie oben reicht es, eine Isometrie  $g \in E(n)$  mit  $g(0) = q, g(s) = p$  und  $g(t) = q$  zu konstruieren. Setze dazu

$$v_1 = \frac{p - q}{|\overline{pq}|} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{(r - q) - \langle r - q, v_1 \rangle \cdot v_1}{|(r - q) - \langle r - q, v_1 \rangle \cdot v_1|} ,$$

dann folgt  $|v_1| = |v_2| = 1$  und  $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ , und wir können  $v_1, v_2$  zu einer Orthonormalbasis  $(v_1, \dots, v_n)$  fortsetzen. Dann liegt  $r - q$  in der von  $v_1$  und  $v_2$  aufgespannten Ebene, und es gilt

$$|\overline{rq}| \cos |\sphericalangle(p, q, r)| = \langle r - q, v_1 \rangle \quad \text{und} \quad |\overline{rq}| \sin |\sphericalangle(p, q, r)| = \langle r - q, v_2 \rangle .$$

Sei wieder  $A \in O(n)$  die Matrix mit den Spalten  $v_1, \dots, v_n$ , und sei  $g = (A, q) \in E(n)$ . Dann folgt wie oben  $g(0) = q, g(s) = p$  und

$$\begin{aligned} g(t) &= |\overline{qr}| \cdot (\cos |\sphericalangle(p, q, r)| \cdot v_1 + \sin |\sphericalangle(p, q, r)| \cdot v_2) + q \\ &= (\langle r - q, v_1 \rangle \cdot v_1 + \langle r - q, v_2 \rangle \cdot v_2) + q = r . \end{aligned} \quad \square$$

Wir beenden diesen Abschnitt, indem wir uns an die wichtigsten Winkelsätze im Dreieck erinnern. Seien  $p, q, r \in \mathbb{R}^2$  drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, dann setze

$$a = |\overline{qr}|, \quad b = |\overline{pr}|, \quad c = |\overline{pq}|$$

und  $\alpha = |\sphericalangle(q, p, r)|, \quad \beta = |\sphericalangle(p, q, r)|, \quad \gamma = |\sphericalangle(p, r, q)|.$

1.14. SATZ. *In der Euklidischen Geometrie gelten die folgenden Winkelsätze.*

- (1) Cosinussatz:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$
- (2) Sinussatz:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$
- (3) Winkelsumme:  $\alpha + \beta + \gamma = \pi.$

BEWEIS. Der Cosinussatz folgt leicht aus Definition 1.12 (2). Für den Sinussatz nehmen wir an, dass

$$p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad q = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann hat  $r$  die  $y$ -Koordinate  $a \sin \beta = b \sin \alpha$ . Schließlich haben wir (3) in Satz 1.8 hergeleitet.  $\square$

1.15. BEMERKUNG. Die oben angegebenen Winkelsätze reichen aus, um die klassischen Dreiecks-Konstruktionsaufgaben rechnerisch zu lösen.

- SSS Gegeben sind die Seiten  $a, b, c$ , so dass alle drei Dreiecksungleichungen gelten. Mit Hilfe von (1) und (3) lassen sich die drei Winkel berechnen.
- SSW Gegeben sind die Seiten  $a, b$  mit  $a \geq b$  und der Winkel  $\alpha$ . Wegen  $\beta \leq \alpha$  liefert (2) eine eindeutige Lösung für den Winkel  $\beta \leq \frac{\pi}{2}$ . Aus (3) erhalten wir  $\gamma$ , und aus (2) schließlich die Seite  $c$ .
- SWS Gegeben sind die Seiten  $a, b$  und der Winkel  $\gamma$ . Aus (1) erhalten wir die Seite  $c$ , und aus (1) und (3) die restlichen Winkel.
- SWW Gegeben die Seite  $a$  und zwei Winkel. Den dritten Winkel liefert (3), und (2) die fehlenden Seiten.

1.16. SATZ (Dreiecksungleichung). *Seien  $p, q, r \in \mathbb{R}^n$  paarweise verschieden, dann gilt*

$$|\overline{pr}| \leq |\overline{pq}| + |\overline{qr}|,$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn  $q$  zwischen  $p$  und  $r$  liegt.  $\square$

### 1.3. Sphärische und Projektive Geometrie

Wir betrachten jetzt die sphärische „Geometrie“. Obwohl sie nur einen kleinen Teil der Axiome aus Abschnitt I.1.1 erfüllt, gelten in ihr ähnliche Sätze wie für die Euklidische Ebene in Abschnitt I.1.2.

Betrachte

$$\mathcal{P} = S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \},$$

$$\mathcal{G} = \{ L(p, v) \mid p, v \in S^n, p \perp v \text{ in } \mathbb{R}^{n+1} \}$$

$$\text{mit } L(p, v) = \{ \cos t \cdot p + \sin t \cdot v \mid t \in \mathbb{R} \}.$$

Die „Geraden“ sind also genau die Großkreise der Sphäre. Für „ $\in$ “ wählen wir wieder die mengentheoretische Enthaltenseinsrelation.

1.17. PROPOSITION. *Durch zwei Punkte  $p, q \in S^n$  mit  $p \neq \pm q$  geht genau eine Gerade*

$$L(p, q) = \left\{ \frac{\sin(\varphi - s)}{\sin \varphi} p + \frac{\sin s}{\sin \varphi} q \mid s \in \mathbb{R} \right\},$$

wobei  $\varphi = \arccos \langle p, q \rangle = \sphericalangle(p, 0, q)$ , gemessen in  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

BEWEIS. Großkreise sind gerade die Durchschnitte von zweidimensionalen Unterräumen mit  $S^n$ . Aus  $\|p\| = \|q\| = 1$  und  $p \neq \pm q$  folgt, dass die Vektoren  $p, q \in \mathbb{R}^{n+1}$  linear unabhängig sind. Also liegen  $p, q$  in genau einem zweidimensionalen Unterraum in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , also auf genau einem Großkreis.

Ergänze  $p$  durch

$$v = \frac{q - \langle p, q \rangle p}{\|q - \langle p, q \rangle p\|} = -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} p + \frac{1}{\sin \varphi} q$$

zu einer Orthonormalbasis der von  $p, q$  aufgespannten Ebene. Dann haben die Punkte von  $L(p, v)$  die Gestalt

$$\begin{aligned} \cos s \cdot p + \sin s \cdot v &= \frac{\cos s \sin \varphi - \sin s \cos \varphi}{\sin \varphi} p + \frac{\sin s}{\sin \varphi} q \\ &= \frac{\sin(\varphi - s)}{\sin \varphi} p + \frac{\sin s}{\sin \varphi} q. \end{aligned} \quad \square$$

Die Zwischenbeziehung wollen wir wieder über den Begriff der Strecke definieren, dieses sei der „kürzere“ Abschnitt des Großkreises durch  $p$  und  $q$ , falls dieser eindeutig ist.

1.18. DEFINITION. Seien  $p, q \in S^n$  mit  $p \neq \pm q$ , dann definiere die Strecke

$$\overline{pq} = \left\{ \frac{\sin(\varphi - s)}{\sin \varphi} p + \frac{\sin s}{\sin \varphi} q \mid 0 < s < \varphi \right\},$$

wobei  $\varphi = \arccos \langle p, q \rangle$ , ansonsten sei  $\overline{pq} = \emptyset$ . Es gelte  $[p, q, r]$  genau dann, wenn  $q \in \overline{pr}$  gilt.

Seien  $p, q, r$  drei Punkte auf einem Großkreis  $L$  mit  $q \neq p \neq r$ , dann sagen wir, dass  $q, r$  auf der gleichen Seite von  $p$  auf  $L$  liegen, wenn entweder  $q = r$  oder  $q \in \overline{pr}$  oder  $r \in \overline{pq}$  gilt.

Die beiden „Seiten“ von  $L$  sind also die beiden offenen Halbkreise in  $L \setminus \{p, -p\}$ . Damit können wir wieder Winkel  $\sphericalangle(p, q, r)$  auf  $S^n$  wie in Definition 1.3 definieren als Winkel zwischen zwei Halbkreisen, die in  $q$  beginnen und  $p$  bzw.  $r$

enthalten. Dazu dürfen  $p, q, r$  nicht auf einem Großkreis liegen, woraus insbesondere  $p \neq \pm q$  usw. folgt.

Um Kongruenz zu definieren, betrachten wir die Gruppe  $O(n+1)$ , die ja  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  auf sich selbst abbildet.

- 1.19. DEFINITION. (1) Zwei Strecken  $\overline{pq}$  und  $\overline{p'q'}$  heißen *kongruent*, wenn es ein Element  $g \in O(n+1)$  gibt mit  $g(p) = p'$  und  $g(q) = q'$ .
- (2) Es mögen  $p, q, r$  und  $p', q', r'$  jeweils nicht auf einem Großkreis liegen. Dann heißen die Winkel  $\sphericalangle(p, q, r)$  und  $\sphericalangle(p', q', r')$  *kongruent*, wenn es ein Element  $g \in O(n+1)$  mit  $\sphericalangle(p', q', r') = \sphericalangle(g(p), g(q), g(r))$  gibt.

Wie in der Euklidischen Geometrie können wir auch in der sphärischen Geometrie Längen von Strecken und Beträge von Winkeln messen. Dabei wundert es nicht, dass die Längen von Strecken selbst wieder durch Winkel im  $\mathbb{R}^{n+1}$  angegeben werden.

- 1.20. DEFINITION. (1) Seien  $p \neq \pm q \in S^n$ , dann hat die Strecke  $\overline{pq}$  die *Länge*

$$|\overline{pq}| = |\sphericalangle(p, 0, q)| = \arccos \langle p, q \rangle .$$

- (2) Seien  $p, q, r \in S^n$  Punkte, die nicht auf einem Großkreis liegen, dann hat der Winkel  $\sphericalangle(p, q, r)$  den *Betrag*

$$|\sphericalangle(p, q, r)| = \arccos \frac{\cos |\overline{pr}| - \cos |\overline{pq}| \cos |\overline{qr}|}{\sin |\overline{pq}| \sin |\overline{qr}|} .$$

Die obigen Formeln sind etwas allgemeiner gültig und liefern beispielsweise

$$|\overline{pp}| = 0, \quad |\overline{p, -p}| = \pi \quad \text{und} \quad |\sphericalangle(p, q, r)| \in \{0, \pi\},$$

falls die Punkte  $p, q, r$  auf einem Großkreis liegen mit  $\pm p \neq q \neq \pm r$ . Der Erdäquator ist ca. 40 000 km lang. Hieraus ergibt sich näherungsweise

$$1\text{m} = \frac{\pi}{20\,000\,000} .$$

Wir wollen die Formel für den Winkel erläutern. Der Winkel  $\sphericalangle(p, q, r)$  ist der Winkel der Unterräume durch  $p$  und  $q$  und durch  $q$  und  $r$  zueinander. Dazu bestimmen wir Vektoren senkrecht zu  $q$  auf beiden Unterräumen, und bilden den Winkel zwischen ihnen im  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Das ergibt

$$\begin{aligned} |\sphericalangle(p, q, r)| &= \left| \sphericalangle \left( \frac{p - \langle p, q \rangle q}{\|p - \langle p, q \rangle q\|}, 0, \frac{r - \langle q, r \rangle q}{\|p - \langle q, r \rangle q\|} \right) \right| \\ &= \arccos \frac{\langle p, r \rangle - \langle p, q \rangle \langle q, r \rangle}{\sin |\overline{pq}| \sin |\overline{qr}|} = \arccos \frac{\cos |\overline{pr}| - \cos |\overline{pq}| \cos |\overline{qr}|}{\sin |\overline{pq}| \sin |\overline{qr}|} . \end{aligned}$$

- 1.21. SATZ. (1) *Zwei Strecken auf  $S^n$  sind genau dann kongruent, wenn sie gleich lang sind.*
- (2) *Zwei Winkel auf  $S^n$  sind genau dann kongruent, wenn sie den gleichen Betrag haben.*

BEWEIS. Übung. Die Beweisidee ist die gleiche wie bei Satz 1.13. □

Bevor wir Winkelsätze auf  $S^2$  formulieren und beweisen, wollen wir ein nützliches Konzept einführen.

1.22. DEFINITION. Seien  $p, q, r \in S^2$  Punkte, die nicht auf einem Großkreis liegen. Dann seien  $p', q'$  und  $r' \in S^2$  definiert durch

$$p' \perp q, r, \quad q' \perp p, r, \quad r' \perp p, q$$

und  $\langle p, p' \rangle > 0, \quad \langle q, q' \rangle > 0, \quad \langle r, r' \rangle > 0.$

Dann heißt  $\Delta p'q'r'$  das zu  $\Delta pqr$  *duale (polare) sphärische Dreieck*.

1.23. PROPOSITION. Sei  $\Delta p'q'r'$  das zu  $\Delta pqr$  *duale sphärische Dreieck*. Dann ist auch  $\Delta pqr$  das zu  $\Delta p'q'r'$  *duale sphärische Dreieck*, und es gilt

$$\begin{aligned} |\sphericalangle(p', q', r')| &= \pi - |\overline{pr}|, & |\overline{p'r'}| &= \pi - |\sphericalangle(p, q, r)|, \\ |\sphericalangle(q', p', r')| &= \pi - |\overline{qr}|, & |\overline{q'r'}| &= \pi - |\sphericalangle(q, p, r)|, \\ |\sphericalangle(p', r', q')| &= \pi - |\overline{pq}| \quad \text{und} \quad |\overline{p'q'}| &= \pi - |\sphericalangle(p, r, q)|. \end{aligned}$$

Somit liefert uns jeder Winkelsatz für  $\Delta p'q'r'$  automatisch einen neuen Winkelsatz für  $\Delta pqr$ , in dem die Rollen von Seiten und Winkeln vertauscht sind, den *dualen Winkelsatz*.

BEWEIS. Die Bedingungen in Definition 1.22 sind symmetrisch in den Eckpunkten von  $\Delta pqr$  und  $\Delta p'q'r'$ , daraus folgt die erste Behauptung. Für die zweite sei o.B.d.A.  $q = e_3$ . Wenn wir  $q$  durch  $v$  bzw.  $w$  zu einer Orthonormalbasis der Ebenen durch  $0$ ,  $q$  und  $p$  bzw.  $r$  ergänzen, liegen  $v, w, p'$  und  $r'$  in der zu  $q$  senkrechten Ebene  $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$  und nach Definition gilt  $p' \perp w$  und  $r' \perp v$ . Hieraus folgt  $|\overline{p'r'}| = \pi - |\sphericalangle(p, q, r)|$ , die anderen Behauptungen folgen ebenso, wobei wir  $p'' = p$  etc. ausnutzen können.  $\square$

Seien  $p, q, r \in S^2$  drei Punkte, die nicht auf einem Großkreis liegen, dann setze

$$a = |\overline{qr}|, \quad b = |\overline{pr}|, \quad c = |\overline{pq}|$$

und  $\alpha = |\sphericalangle(q, p, r)|, \quad \beta = |\sphericalangle(p, q, r)|, \quad \gamma = |\sphericalangle(p, r, q)|.$

1.24. SATZ. In der sphärischen Geometrie gelten die folgenden Winkelsätze.

- (1) Seitencosinussatz:  $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma,$
- (2) Sinussatz:  $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma},$
- (3) Winkelcosinussatz:  $\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c.$

BEWEIS. Der Seitencosinussatz folgt unmittelbar aus Definition 1.20 (2). Dualisieren liefert den Winkelcosinussatz:

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \cos(\pi - c') = -\cos c' \\ &= -\cos a' \cos b' - \sin a' \sin b' \cos \gamma' \\ &= -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c. \end{aligned}$$



Um den Sinussatz zu beweisen, gehen wir wie im Beweis von Satz 1.14 vor und nehmen an, dass

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} \cos c \\ \sin c \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r = \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \cos \alpha \\ \sin b \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Sei  $g$  die Drehung um den Winkel  $-c$  um die  $z$ -Achse, dann folgt

$$g(p) = \begin{pmatrix} \cos c \\ -\sin c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g(q) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(r) = \begin{pmatrix} \cos a \\ -\sin a \cos \beta \\ \sin a \sin \beta \end{pmatrix}.$$

Zurückdrehen liefert

$$r = \begin{pmatrix} \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta \\ \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos \beta \\ \sin a \sin \beta \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Koeffizientenvergleich liefert in der ersten Komponente den Seitencosinussatz und in der letzten Komponente den Sinussatz. In der zweiten Komponente erhält man den sogenannten Sinuscosinussatz.  $\square$

1.25. FOLGERUNG. Für  $p, q, r \in S^2$  mit  $\pm p \neq \pm q \neq \pm r \neq \pm p$  gilt

$$|\overline{pr}| \leq |\overline{pq}| + |\overline{qr}|,$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn  $[p, q, r]$ .

BEWEIS. Das folgt aus dem Seitencosinussatz 1.24 (1).  $\square$

1.26. BEMERKUNG. Die oben angegebenen Winkelsätze reichen nicht ganz, um die klassischen Dreiecks-Konstruktionsaufgaben der sphärischen Trigonometrie rechnerisch zu lösen.

SSS Gegeben sind die Seiten  $a, b, c > 0$  mit  $a + b + c < 2\pi$ , so dass alle Dreiecksungleichungen gelten. Mit Hilfe von (1) lassen sich die drei Winkel berechnen.

SSW Gegeben sind die Seiten  $a, b \in (0, \pi)$  und der Winkel  $\alpha \in (0, \pi)$ . Der Sinussatz (2) liefert maximal zwei Lösungen für den Winkel  $\beta$ . Weiter: Übung. Insgesamt gibt es keine, genau eine, genau zwei oder unendlich viele Lösungen.

SWS Gegeben sind die Seiten  $a, b \in (0, \pi)$  und der Winkel  $\gamma \in (0, \pi)$ . Aus (1) erhalten wir die Seite  $c$  und die restlichen Winkel.

SWW Gegeben die Seite  $a$  und die Winkel  $\alpha, \beta$  mit  $\alpha \leq \beta$ . Dann berechnet man die Seite  $b$  mit (2) (maximal zwei Lösungen) und fährt fort wie im Fall SSW.

WSW Gegeben die Seite  $c$  und die Winkel  $\alpha, \beta$ . Bestimme  $\gamma, a$  und  $b$  mit dem Winkelcosinussatz (3).

WWW Gegeben sind die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  mit  $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ , so dass die dualen Dreiecksungleichungen gelten (Übung). Aus (3) erhalten wir die drei Seitenlängen.

Beachte, dass die letzten drei Aufgaben zu den ersten drei dual sind.

1.27. BEMERKUNG. Die drei Winkelsätze in Satz 1.24 entsprechen genau den drei Winkelsätzen in Satz 1.14. In (1) und (2) multiplizieren wir die Seitenlängen mit  $t$  und lassen  $t$  gegen 0 gehen. Seien  $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t$  die zugehörigen Winkel. Im Grenzfall  $t \rightarrow 0$  sollte unser Dreieck wie ein sehr kleines Euklidisches Dreieck aussehen. Die Taylorentwicklung liefert jetzt für den Seitencosinussatz

$$1 - \frac{1}{2}t^2c^2 + O(t^3) = \left(1 - \frac{1}{2}t^2a^2\right) \left(1 - \frac{1}{2}t^2b^2\right) + ab \cos \gamma_t + O(t^3) .$$

Die Koeffizienten von  $t^0$  und  $t^1$  stimmen überein. Vergleich der Koeffizienten von  $t^2$  liefert die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma_t = \gamma_0 ,$$

wobei  $\gamma_0$  nach dem Euklidischen Cosinussatz der Winkel im Euklidischen Dreieck mit den Seiten  $a, b, c$  ist. **Fazit:** „Sehr kleine sphärische Dreiecke verhalten sich fast wie Euklidische Dreiecke.“

Für den Sinussatz  $\sin a \sin \beta = \sin b \sin \alpha$  erhalten wir analog

$$a \sin \beta_t + O(t^2) = b \sin \alpha_t + O(t^2) ,$$

was zu der obigen Beobachtung passt.

Schließlich vergleichen wir den Winkelcosinussatz mit dem Satz über die Winkelsumme im Euklidischen:

$$\cos \gamma = \cos(\pi - \alpha - \beta) = -\cos(\alpha + \beta) = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta .$$

Da der Sinus positiv und  $\cos c < 1$ , folgern wir dass  $\cos \gamma$  im sphärischen Fall kleiner ist als im Euklidischen. Mit anderen Worten ist die Winkelsumme im Sphärischen Dreieck größer als  $\pi$ .

Den folgenden Satz können wir erst beweisen, wenn wir den Flächeninhalt  $|\Delta pqr|$  definieren und berechnen können. Eine heuristische „Herleitung“ können wir in den Übungen aber vornehmen.

1.28. SATZ. *Im sphärischen Dreieck gilt*

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = |\Delta pqr| .$$

BEWEIS. Siehe Folgerung 4.16. In den Übungen geben wir eine heuristische Herleitung dieser Formel.  $\square$

1.29. BEMERKUNG. Wir führen nur kurz den projektiven Raum ein. Betrachte dazu

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathbb{R}P^n = S^n / \pm 1 = \{ [p] \mid p \in S^n \} & \text{mit} & & [p] = \{ p, -p \} , \\ \mathcal{G} &= \{ L / \pm 1 \mid L \text{ Gerade in } S^n \} & \text{mit} & & L / \pm 1 = \{ [p] \mid p \in L \} . \end{aligned}$$

Wieder sei „ $\in$ “ die mengentheoretische Enthaltenseinsrelation. Dann schneiden sich je zwei verschiedene Geraden in  $\mathbb{R}P^2$  in genau einem Punkt. Insbesondere gelten die Axiome I1–I4 und P. Genauer gesagt, gelten die Axiome der projektiven Ebene, wie auch in jeder anderen projektiven Ebene über einem beliebigen Körper (z.B.  $F_2$  oder  $\mathbb{C}$ ).

Die Zwischenrelation  $[\cdot, \cdot]$  lässt sich definieren, macht aber weitaus mehr Probleme als auf  $S^n$ , und es gelten auf keinen Fall alle Axiome A1–A5. Hat man eine gute Definition von Winkeln, so definiert man Kongruenz wie auf  $S^n$ , dabei nutzt man aus, dass  $O(n+1)$  Punktepaare  $(p, -p)$  wieder auf solche Punktepaare abbildet.

Für  $p, q \in S^n$  definieren wir

$$|[p][q]| = \min(|pq|, |(-p)q|) .$$

Seien  $p, q, r \in S^n$  paarweise verschieden mit  $|pq|, |qr| < \frac{\pi}{2}$ , dann definieren wir

$$|\sphericalangle([p], [q], [r])| = |\sphericalangle(p, q, r)| .$$

Es gibt jedoch Probleme mit Dreieckssätzen auf  $\mathbb{R}P^2$ . Während kleine Dreiecke wie auf  $S^2$  aussehen, kann es größere Dreiecke geben, die nicht von Dreiecken auf der Sphäre kommen. Für solche Dreiecke gelten die Winkelsätze nicht mehr.

### 1.4. Hyperbolische Geometrie

Für die hyperbolische Geometrie geben wir zwei Modelle an. Zunächst sei  $\langle\langle, \rangle\rangle$  das Lorentz-Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^{n+1}$  mit

$$\langle\langle v, w \rangle\rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i - v_{n+1} w_{n+1} , \quad \text{und sei} \quad |||v|||^2 = \langle\langle v, v \rangle\rangle .$$

Man schreibt auch kurz  $\mathbb{R}^{n,1} = (\mathbb{R}^{n+1}, \langle\langle, \rangle\rangle)$ . Wir wollen  $|||v||| = \sqrt{|||v|||^2}$  selbst nur definieren, wenn  $|||v|||^2 \geq 0$ . Beachte, dass  $|||\cdot|||$  keine Norm ist. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathbb{H}^n = \{ p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |||p|||^2 = -1 \text{ und } p_{n+1} > 0 \} \\ \mathcal{G} &= \{ E \cap \mathbb{H}^n \mid E \text{ Ebene in } \mathbb{R}^{n+1} \text{ durch } 0 \text{ mit } E \cap \mathbb{H}^n \neq \emptyset \} . \end{aligned}$$

Wieder sei „ $\in$ “ die mengentheoretische Enthaltenseinsrelation.

- 1.30. PROPOSITION. (1) Für alle  $p, q \in \mathbb{H}^n$  gilt  $\langle\langle p, q \rangle\rangle \leq -1$  mit Gleichheit falls  $p = q$ .  
 (2) Für alle  $p, q \in \mathbb{H}^n$  gilt  $|||q - p|||^2 \geq 0$  mit Gleichheit falls  $p = q$ .  
 (3) Sei  $p \in \mathbb{H}^n$  und  $q \in \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $|||q|||^2 = -1$ , dann gilt  $q \in \mathbb{H}^n$  genau dann, wenn  $\langle\langle p, q \rangle\rangle < 0$ .  
 (4) Sei  $p \in \mathbb{H}^n$ , dann definiert  $\langle\langle, \rangle\rangle$  auf  $p^\perp = \{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle\langle p, v \rangle\rangle = 0 \}$  ein (positiv definites) Skalarprodukt.

BEWEIS. Für  $p \in \mathbb{H}^n$  gilt

$$p_{n+1} = \sqrt{p_1^2 + \cdots + p_n^2 + 1} \tag{1.3}$$

Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für die Euklidischen Vektoren

$$v = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\sqrt{(p_1^2 + \cdots + p_n^2 + 1)(q_1^2 + \cdots + q_n^2 + 1)} \geq p_1 q_1 + \cdots + p_n q_n + 1, \quad (1.4)$$

und das liefert (1), da

$$\langle\langle p, q \rangle\rangle = p_1 q_1 + \cdots + p_n q_n - \sqrt{(p_1^2 + \cdots + p_n^2 + 1)(q_1^2 + \cdots + q_n^2 + 1)} \leq -1.$$

Gleichheit impliziert Gleichheit in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (1.4). Dann sind  $v, w$  linear abhängig, und es folgt  $p_1 = q_1, \dots, p_n = q_n$ , da  $v_{n+1} = w_{n+1} = 1$ . Aus (1.3) folgt dann auch  $p_{n+1} = q_{n+1}$ .

Wir erhalten (2), da

$$\| \|q - p\| \|^2 = \| \|p\| \|^2 + \| \|q\| \|^2 - 2 \langle\langle p, q \rangle\rangle = -2 - 2 \langle\langle p, q \rangle\rangle \geq 0.$$

Gleichheit impliziert  $p = q$  wegen (1).

Zu (3) sei  $\| \|q\| \|^2 = -1$ , dann folgt  $|q_{n+1}| \geq 1$ , denn sonst wäre  $\| \|q\| \|^2 > -1$ . Somit gilt entweder  $q \in \mathbb{H}^n$  oder  $-q \in \mathbb{H}^n$ , und wegen (1) reicht es, das Vorzeichen von  $\langle\langle p, q \rangle\rangle$  zu bestimmen.

Behauptung (4) folgt aus dem Trägheitssatz von Sylvester. Hätte nämlich  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle|_{p^\perp}$  einen Kern oder Signatur  $(r, s)$  mit  $s \geq 1$ , so hätte  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  selbst auch einen Kern bzw. Signatur  $(r, s+1)$  mit  $s \geq 1$ .  $\square$

1.31. BEMERKUNG. Wir erinnern uns an die Hyperbelfunktionen  $\cosh, \sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\cosh s = \frac{e^s + e^{-s}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh s = \frac{e^s - e^{-s}}{2}.$$

Außerdem betrachten wir

$$\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1) \quad \text{und} \quad \coth = \frac{\cosh}{\sinh}.$$

Es gelten die einfachen Formeln

$$\cosh(-s) = \cosh s \quad \text{und} \quad \sinh(-s) = -\sinh(s)$$

und die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cosh(s+t) &= \cosh s \cosh t + \sinh s \sinh t \\ \text{und} \quad \sinh(s+t) &= \cosh s \sinh t + \sinh s \cosh t. \end{aligned}$$

Es gilt ein „hyperbolischer Satz des Pythagoras“

$$\cosh^2 s - \sinh^2 s = \cosh(s-s) = 1,$$

insbesondere parametrisiert  $\begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix}$  einen Ast der Hyperbel  $y^2 = x^2 + 1$ .

Der Sinus Hyperbolicus ist streng monoton steigend und surjektiv, also invertierbar, die Umkehrfunktion heißt  $\operatorname{arsinh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Der Cosinus Hyperbolicus ist auf der positiven reellen Achse invertierbar mit Umkehrfunktion  $\operatorname{arcosh}: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ . Die Namen „area cosinus hyperbolicus“ und „area sinus hyperbolicus“ der Umkehrfunktionen kommen daher, dass der Parameter  $s$  der Hyperbelfunktionen die (doppelte) Fläche eines „Hyperbelsektors“ angibt.

1.32. SATZ. *Durch zwei Punkte  $p, q \in \mathbb{H}^n$  mit  $p \neq q$  geht genau eine hyperbolische Gerade*

$$L = \left\{ \frac{\sinh(l-s)}{\sinh l} \cdot p + \frac{\sinh s}{\sinh l} \cdot q \mid s \in \mathbb{R} \right\},$$

wobei  $l = \operatorname{arcosh}(-\langle\langle p, q \rangle\rangle)$ .

BEWEIS. Zunächst folgt aus Proposition 1.30 (1) und Bemerkung 1.31, dass  $l \geq 0$  wohldefiniert ist.

Sei jetzt  $E$  die von  $p, q \in \mathbb{R}^{n+1}$  aufgespannte Ebene. Nach 1.30 gilt

$$\begin{aligned} \||q + \langle\langle p, q \rangle\rangle p\||^2 &= \||q\||^2 + \langle\langle p, q \rangle\rangle^2 > 0 \\ \text{und} \quad \||q + \langle\langle p, q \rangle\rangle p\|| &= \sqrt{\cosh^2 l - 1} = \sinh l, \end{aligned}$$

und wir können

$$v = \frac{q + \langle\langle p, q \rangle\rangle p}{\||q + \langle\langle p, q \rangle\rangle p\||} = \frac{q - \cosh l \cdot p}{\sinh l}$$

definieren. Es folgt  $\||v\||^2 = 1$  und

$$\langle\langle p, v \rangle\rangle = \frac{\langle\langle p, q \rangle\rangle + \langle\langle p, q \rangle\rangle \||p\||^2}{\||q + \langle\langle p, q \rangle\rangle p\||} = 0,$$

somit bilden  $p, v$  eine normierte Basis von  $E$  bezüglich der Einschränkung von  $\langle\langle, \rangle\rangle$  auf  $E$ .

Sei  $L = E \cap \mathbb{H}^n$ , und sei  $r \in L$ . Wir schreiben

$$r = ap + bv \quad \text{mit} \quad a = -\langle\langle r, p \rangle\rangle > 0 \quad \text{und} \quad b = \langle\langle r, v \rangle\rangle$$

und schließen

$$-1 = \||r\||^2 = a^2 \||p\||^2 + 2ab \langle\langle p, v \rangle\rangle + b^2 \||v\||^2 = b^2 - a^2.$$

Setze  $s = \operatorname{arsinh} b = \operatorname{arsinh} \langle\langle r, v \rangle\rangle$ . Aus  $a > 0$  und  $a^2 = b^2 + 1$  folgt  $a = \cosh s$ . Somit hat jeder Punkt auf  $L$  die Gestalt

$$r = \cosh s \cdot p + \sinh s \cdot v,$$

und umgekehrt erfüllt jeder Punkt dieser Gestalt  $\||r\||^2 = -1$  wegen Bemerkung 1.31 und  $\langle\langle r, p \rangle\rangle = -\cosh s < 0$ , und liegt somit auf  $\mathbb{H}^n$  wegen Proposition 1.30 (3).

Schließlich ersetzen wir  $v$  durch die Definition und erhalten

$$\begin{aligned} r &= \frac{(\sinh l \cosh s - \cosh l \sinh s) \cdot p + \sinh s \cdot q}{\sinh l} \\ &= \frac{\sinh(l-s) \cdot p + \sinh s \cdot q}{\sinh l}. \end{aligned}$$

□

1.33. DEFINITION. Seien  $p, q \in \mathbb{H}^n$ , dann definiere die Strecke zwischen  $p$  und  $q$  durch

$$\overline{pq} = \left\{ \frac{\sinh(l-s)}{\sinh l} \cdot p + \frac{\sinh s}{\sinh l} \cdot q \mid s \in (0, l) \right\}$$

mit  $l = \operatorname{ar} \cosh(-\langle\langle p, q \rangle\rangle)$ . Wir definieren die Zwischenbeziehung so, dass  $[p, q, r]$  genau dann, wenn  $q \in \overline{pr}$ .

Wir werden die Inzidenz- und Anordnungsaxiome später im Kleinschen Ballmodell beweisen. Als nächstes können wir auch Winkel genauso wie in Abschnitt 1, Definition 1.3 definieren. Um Kongruenz zu erklären, erinnern wir uns an die Gruppen

$$\begin{aligned} O(n, 1) &= \left\{ A \in GL(n+1, \mathbb{R}) \mid \langle\langle Av, Aw \rangle\rangle = \langle\langle v, w \rangle\rangle \text{ für alle } v, w \in \mathbb{R}^{n+1} \right\} \\ &= \left\{ A \in M_{n+1}(\mathbb{R}) \mid A^t \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$O^+(n, 1) = \left\{ A \in O(n, 1) \mid a_{n+1, n+1} > 0 \right\}.$$

Zur Erklärung: eine Matrix  $A$  liegt in  $O(n, 1)$  genau dann, wenn ihre Spalten  $Ae_1, \dots, Ae_{n+1}$  eine normierte Basis von  $\mathbb{R}^{n+1}$  bilden, d.h., wenn sie bezüglich  $\langle\langle, \rangle\rangle$  paarweise senkrecht aufeinander stehen mit

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n+1,1} \end{pmatrix} \right\|^2 &= \dots = \left\| \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n+1,n} \end{pmatrix} \right\|^2 = 1 \\ \text{und} \quad \left\| \begin{pmatrix} a_{1, n+1} \\ \vdots \\ a_{n+1, n+1} \end{pmatrix} \right\|^2 &= -1. \end{aligned}$$

Somit liegt eine Matrix  $A \in O(n, 1)$  genau dann in  $O^+(n, 1)$ , wenn  $Ae_{n+1} \in \mathbb{H}^n$ .

Es folgt, dass  $A$  dann  $\mathbb{H}^n$  auf  $\mathbb{H}^n$  abbildet, denn sei  $q \in \mathbb{H}^n$  und  $A \in O^+(n, 1)$ , dann gilt

$$\langle\langle Aq, \underbrace{Ae_{n+1}}_{\in \mathbb{H}^n} \rangle\rangle = \langle\langle q, e_{n+1} \rangle\rangle = -q_{n+1} < 0,$$

also  $Aq \in \mathbb{H}^n$  nach Proposition 1.30 (3). Daran kann man auch sehen, dass die Lorentzgruppe  $O^+(n, 1) \subset O(n, 1)$  tatsächlich eine Untergruppe ist, denn für  $A, B \in O^+(n, 1)$  folgt  $(AB)e_{n+1} = A(Be_{n+1})$  aus dem obigen, da  $Be_{n+1} \in \mathbb{H}^n$ . Also ist die Lorentzgruppe  $O^+(n, 1)$  die Untergruppe derjenigen Elemente

von  $O(n, 1)$ , die die obere Halbschale  $\mathbb{H}^n$  des zweischaligen Hyperboloids als Menge auf sich selbst abbildet.

1.34. DEFINITION. Zwei Strecken  $\overline{pq}$  und  $\overline{p'q'}$  in  $\mathbb{H}^n$  heißen *kongruent*, wenn es ein Element  $g \in O^+(n, 1)$  gibt mit  $g(p) = p'$  und  $g(q) = q'$ .

Es mögen  $p, q, r$  und  $p', q', r'$  jeweils nicht auf einer hyperbolischen Geraden liegen. Dann heißen die Winkel  $\sphericalangle(p, q, r)$  und  $\sphericalangle(p', q', r')$  *kongruent*, wenn es ein Element  $g \in O^+(n, 1)$  mit  $\sphericalangle(p', q', r') = \sphericalangle(g(p), g(q), g(r))$  gibt.

Wir benutzen das Lorentz-Produkt  $\langle\langle, \rangle\rangle$ , um Längen und Winkel zu messen.

1.35. DEFINITION. (1) Seien  $p, q \in \mathbb{H}^n$ , Dann hat die Strecke  $\overline{pq}$  die *Länge*

$$|\overline{pq}| = \operatorname{ar} \cosh(-\langle\langle p, q \rangle\rangle) .$$

(2) Seien  $p, q, r \in \mathbb{R}^n$  Punkte mit  $p \neq q \neq r$ , dann hat der Winkel  $\sphericalangle(p, q, r)$  den *Betrag*

$$|\sphericalangle(p, q, r)| = \arccos \frac{\cosh |\overline{pq}| \cosh |\overline{qr}| - \cosh |\overline{pr}|}{\sinh |\overline{pq}| \sinh |\overline{qr}|} .$$

Wir erklären wieder die Formel für den Winkel. Zunächst ergänze  $q$  zu normierten Basen der Ebenen durch  $q$  und  $p$  bzw.  $r$  durch die Vektoren

$$v = \frac{p + \langle\langle q, p \rangle\rangle q}{\|p + \langle\langle q, p \rangle\rangle q\|} = \frac{p - \cosh |\overline{pq}| \cdot q}{\sinh |\overline{pq}|} \quad \text{und} \quad w = \frac{r - \cosh |\overline{qr}| \cdot q}{\sinh |\overline{qr}|} \in q^\perp .$$

Wegen Proposition 1.30 (4) definiert  $\langle\langle, \rangle\rangle$  auf der von  $v, w$  aufgespannten Ebene eine euklidische Geometrie, und wir können den „Winkel“ zwischen unseren Ebenen in dieser Ebene messen. Das liefert

$$\begin{aligned} |\sphericalangle(p, q, r)| &= \arccos \langle\langle v, w \rangle\rangle = \arccos \left\langle\left\langle \frac{p - \cosh |\overline{pq}| \cdot q}{\sinh |\overline{pq}|}, \frac{r - \cosh |\overline{qr}| \cdot q}{\sinh |\overline{qr}|} \right\rangle\right\rangle \\ &= \arccos \frac{\cosh |\overline{pq}| \cosh |\overline{qr}| - \cosh |\overline{pr}|}{\sinh |\overline{pq}| \sinh |\overline{qr}|} ; \end{aligned}$$

insbesondere liegt das Argument des Arcuscossinus in  $[-1, 1]$ .

1.36. SATZ. (1) *Zwei Strecken in  $\mathbb{H}^n$  sind genau dann kongruent, wenn sie gleich lang sind.*

(2) *Zwei Winkel in  $\mathbb{H}^n$  sind genau dann kongruent, wenn sie den gleichen Betrag haben.*

BEWEIS. Analog zu Satz 1.21. □

Wir kommen zu den Winkelsätzen im hyperbolischen Dreieck. Seien  $p, q, r \in \mathbb{H}^2$  drei Punkte, die nicht auf einer hyperbolischen Geraden liegen, dann setze wie immer

$$\begin{aligned} a &= |\overline{qr}| , & b &= |\overline{pr}| , & c &= |\overline{pq}| \\ \text{und} \quad \alpha &= |\sphericalangle(q, p, r)| , & \beta &= |\sphericalangle(p, q, r)| , & \gamma &= |\sphericalangle(p, r, q)| . \end{aligned}$$

Wenn wir versuchen, wie in Abschnitt 1.3 ein duales (bzw. polares) Dreieck zu konstruieren, dann erhalten wir Vektoren  $p', q', r'$  mit  $|||p'|\|^2 = |||q'|\|^2 = |||r'|\|^2 = 1$ , d.h., das duale Dreieck liegt nicht in  $\mathbb{H}^2$ . Das bedeutet, dass wir den Winkelcosinussatz „zu Fuß“ beweisen müssen.

1.37. SATZ. *In der hyperbolischen Geometrie gelten die folgenden Winkelsätze.*

- (1) Seitencosinussatz:  $\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$ ,
- (2) Sinussatz:  $\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$ ,
- (3) Winkelcosinussatz:  $\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cosh c$ .

BEWEIS. Der Seitencosinussatz folgt unmittelbar aus Definition 1.35 (2). Wir beweisen den Sinussatz wie im Beweis von 1.24 (2) (Übung).

Wir führen den Winkelcosinussatz rein algebraisch auf die anderen Sätze zurück.

$\sin \alpha \sin \beta \cosh c$

$$\begin{aligned}
 &\stackrel{(2)}{=} \frac{\sinh a \sinh b \cosh c}{\sinh^2 c} \cdot \sin^2 \gamma = \frac{\sinh a \sinh b \cosh c}{\sinh^2 c} \cdot (1 - \cos^2 \gamma) \\
 &\stackrel{(1)}{=} \frac{\sinh a \sinh b \cosh c (\sinh^2 a \sinh^2 b - (\cosh a \cosh b - \cosh c)^2)}{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c} \\
 &= \frac{\cosh c ((\cosh^2 a - 1)(\cosh^2 b - 1) - (\cosh a \cosh b - \cosh c)^2)}{\sinh a \sinh b \sinh^2 c} \\
 &= \frac{\cosh c (1 - \cosh^2 a - \cosh^2 b + 2 \cosh a \cosh b \cosh c - \cosh^2 c)}{\sinh a \sinh b \sinh^2 c} \\
 &= \frac{(\cosh a \cosh b - \cosh c) \sinh^2 c}{\sinh a \sinh b \sinh^2 c} \\
 &\quad + \frac{(\cosh b \cosh c - \cosh a)(\cosh a \cosh c - \cosh b)}{\sinh a \sinh b \sinh^2 c} \\
 &\stackrel{(1)}{=} \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta. \quad \square
 \end{aligned}$$

1.38. FOLGERUNG. *Seien  $p, q, r \in \mathbb{H}^n$  paarweise verschieden, dann gilt*

$$|\overline{pr}| \leq |\overline{pq}| + |\overline{qr}|,$$

*und Gleichheit gilt genau dann, wenn  $[p, q, r]$  gilt.*

BEWEIS. Folgt aus dem hyperbolischen Seitencosinussatz. □

1.39. BEMERKUNG. Die oben angegebenen Winkelsätze reichen nicht ganz, um die klassischen Dreiecks-Konstruktionsaufgaben der hyperbolischen Trigonometrie rechnerisch zu lösen.

SSS Gegeben sind die Seiten  $a, b, c$ , so dass alle Dreiecksungleichungen gelten. Mit Hilfe von (1) lassen sich die drei Winkel berechnen.



- SSW Gegeben sind die Seiten  $a, b$  mit  $a \geq b$  und der Winkel  $\alpha$ . Wegen  $\beta \leq \alpha$  liefert (2) eine eindeutige Lösung für den Winkel  $\beta$ . Weiter: Übung.
- SWS Gegeben sind die Seiten  $a, b$  und der Winkel  $\gamma$ . Aus (1) erhalten wir die Seite  $c$ , und aus (2) und (3) die restlichen Winkel.
- SWW Gegeben die Seite  $a$  und die Winkel  $\alpha, \beta$ . Dann berechnet man die Seite  $b$  mit (2) und fährt fort wie im Fall SSW.
- WSW Gegeben die Seite  $c$  und die Winkel  $\alpha, \beta$ . Bestimme  $\gamma$  mit dem Winkelcosinussatz und fahre fort mit dem Sinussatz.
- WWW Gegeben sind die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  mit  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ . Aus (3) erhalten wir die drei Seitenlängen.

Hier sind die Fälle SSW und SWW nicht mehr dual zueinander. Insbesondere hat der Fall SWW immer genau eine Lösung.

1.40. FOLGERUNG. *In der hyperbolischen Ebene gelten die Kongruenzaxiome K1–K6.*

BEWEISSKIZZE. Da wir Kongruenz über die Wirkung der Lorenzgruppe  $O^+(n, 1)$  definiert haben, ist Kongruenz eine Äquivalenzrelation, und es folgen K2 und K4. Genauso können wir  $O^+(n, 1)$  benutzen, um eine vorgegebene Strecke oder einen vorgegebenen Winkel an einen bestimmten Platz zu drehen, und erhalten die Axiome K1 und K5 über das Abtragen von Strecken und Winkeln. Axiom K3 über die Addition von Strecken ergibt sich leicht aus Satz 1.36 und Folgerung 1.38. Zu guter Letzt ergibt sich das Axiom K6 unmittelbar aus unserer Konstruktionsvorschrift für die Dreiecksaufgabe SWS.  $\square$

1.41. BEMERKUNG. Die drei Winkelsätze in Satz 1.37 entsprechen genau den drei Winkelsätzen in den Sätzen 1.14 und 1.24. Sei dazu ein hyperbolisches Dreieck mit den Seiten  $a, b, c$  und den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  gegeben. In (1) und (2) multiplizieren wir wieder die Seitenlängen mit  $t$  und lassen  $t$  gegen 0 gehen. Seien  $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t$  die zugehörigen Winkel. Im Grenzfall  $t \rightarrow 0$  sollte unser Dreieck wie ein sehr kleines Euklidisches Dreieck aussehen. Die Taylorentwicklung liefert jetzt für den Seitencosinussatz

$$1 + \frac{1}{2}t^2c^2 + O(t^3) = \left(1 + \frac{1}{2}t^2a^2\right) \left(1 + \frac{1}{2}t^2b^2\right) - ab \cos \gamma_t + O(t^3).$$

Die Koeffizienten von  $t^0$  und  $t^1$  stimmen überein. Vergleich der Koeffizienten von  $t^2$  liefert die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma_t = \gamma_0,$$

wobei  $\gamma_0$  nach dem Euklidischen Cosinussatz der Winkel im Euklidischen Dreieck mit den Seiten  $a, b, c$  ist. **Fazit:** „Sehr kleine hyperbolische Dreiecke verhalten sich fast wie Euklidische Dreiecke.“

Für Sinussatz und Winkelcosinussatz verfahren wir wie in Bemerkung 1.26.

Alternativ dazu können wir in obiger Rechnung imaginäre Werte von  $t$  einsetzen und ausnutzen, dass

$$\cosh it = \cos t \quad \text{und} \quad \sinh it = i \sin t$$

gilt. Auf diese Weise werden aus den hyperbolischen Winkelsätzen sphärische Winkelsätze — aber das ist nur eine Analogie ohne exakte geometrische Begründung. In der Physik nennt man dieses Vorgehen „Wick-Rotation“.

Den folgenden Satz können wir erst beweisen, wenn wir den Flächeninhalt  $|\Delta pqr|$  definieren und berechnen können.

1.42. SATZ. *Im hyperbolischen Dreieck gilt*

$$\pi - \alpha - \beta - \gamma = |\Delta pqr| .$$

BEWEIS. Siehe Folgerung 4.16. □

Also ist die Winkelsumme im Dreieck nur in der Euklidischen Geometrie genau  $\pi$ . In der sphärischen Geometrie ist sie größer, in der hyperbolischen kleiner, und zwar jeweils um den Flächeninhalt des betreffenden Dreiecks.

Wir wollen jetzt die Inzidenz- und Anordnungsaxiome nachprüfen und uns vergewissern, dass das Parallelenaxiom in der hyperbolischen Geometrie tatsächlich verletzt ist. Am einfachsten sieht man das mit Hilfe des Kleinschen Ballmodells. Zu jedem Punkt  $p \in \mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  betrachten wir die Euklidische Gerade durch den Nullpunkt und  $p$ . Diese trifft die affine Hyperebene  $\mathbb{R}^n \times \{1\}$  in einem Punkt

$$\frac{p}{p_{n+1}} = \begin{pmatrix} p'_1 \\ \vdots \\ p'_n \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad p'_i = \frac{p_i}{p_{n+1}}$$

für  $i = 1, \dots, n$ . Aus  $\|p\|^2 = -1$  folgt insbesondere  $p_{n+1}^2 > p_1^2 + \dots + p_n^2$ , also  $1 > p_1'^2 + \dots + p_n'^2$ .

Wir ordnen dem Punkt  $p \in \mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  also den Punkt  $p' = \Psi(p) \in B_1^n(0) \subset \mathbb{R}^n$  zu. Sei umgekehrt  $q' \in B_1^n(0)$ , dann trifft die Gerade durch den Nullpunkt und den Punkt  $\begin{pmatrix} q' \\ 1 \end{pmatrix}$  im  $\mathbb{R}^{n+1}$  das Hyperboloid  $\mathbb{H}^n$  genau im Punkt

$$q = \Psi^{-1}(q') = \frac{1}{\sqrt{1 - \|q'\|^2}} \begin{pmatrix} q' \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Wir identifizieren auf diese Weise die Punktmenge  $\mathcal{P} = \mathbb{H}^n$  und  $\mathcal{P}' = B_1^n(0)$ .

Nach Konstruktion sind die hyperbolischen Geraden in  $\mathbb{H}^n$  genau die nicht-leeren Schnittmengen von Ebenen durch den Nullpunkt im  $\mathbb{R}^{n+1}$  mit  $\mathbb{H}^n$ . Jede solche Ebene schneidet die Hyperebene  $\mathbb{R}^n \times \{1\}$  in einer affinen Geraden, die  $B_1^n(0) \times \{1\}$  trifft. Umgekehrt liefert jede solche affine Gerade in  $\mathbb{R}^n \times \{1\}$  wieder eine hyperbolische Gerade in  $\mathbb{H}^n$ . Also identifizieren wir die Geradenmenge  $\mathcal{G}$  mit der Menge

$$\mathcal{G}' = \{ G \cap B_1^n(0) \mid G \text{ affine Gerade mit } G \cap B_1^n(0) \neq \emptyset \} .$$

Als Inzidenzrelation „ $\in'$ “ erhalten wir wieder die mengentheoretische Enthaltenseinsrelation.

Genauso übertragen wir die Zwischenrelation, die Kongruenzrelation und die Längen- und Winkelmessung von  $\mathbb{H}^n$  auf  $B_1^n(0)$ . Die Formeln, die wir erhalten, sind weniger elementar zu verstehen als für  $\mathbb{H}^3$ ; siehe dazu die Aktion der Lorenzgruppe  $O^+(n, 1)$  auf  $B_1^n(0)$  und die Formel für den hyperbolischen Abstand im Kleinschen Ballmodell. Insbesondere sind Strecken und Winkel im Kleinschen Modell eben nicht genau dann kongruent, wenn sie in der Euklidischen Ebene kongruent sind, und die hyperbolische Länge und der hyperbolische Winkel im Kleinschen Ballmodell sind nicht identisch mit der Euklidischen Länge und dem Euklidischen Winkel.

Die Zwischenrelation ist hingegen für  $B_1^n(0)$  einfacher als für  $\mathbb{H}^n$ : sie ist die Einschränkung der Euklidischen Zwischenrelation auf  $B_1^n(0)$ . Seien etwa  $p, q, r \in \mathbb{H}^n$ , und seien  $p', q', r' \in B_1^n(0)$  die Bildpunkte unter  $\Psi$ , dann gilt

$$\underbrace{[p', q', r']'}_{\text{in } B_1^n(0)} \iff \underbrace{[p, q, r]}_{\text{in } \mathbb{H}^n} \iff \underbrace{[p', q', r']}_{\text{in } \mathbb{R}^n}.$$

Das überlegt man sich mit Hilfe der Definition 1.33.

1.43. BEMERKUNG. Wir können die hyperbolischen Geraden im Klein-Modell  $B_1^n(0)$  also mit Euklidischen Strecken  $\overline{xy} \subset \mathbb{R}^n$  mit  $x \neq y \in S^{n-1}$  identifizieren. Aus Sicht der hyperbolischen Geometrie bezeichnet man  $S^{n-1}$  als den „Rand im Unendlichen“  $\partial_\infty B_1^n(0)$ , und die Punkte  $x, y \in S^{n-1}$  als die „Endpunkte im Unendlichen“ der hyperbolischen Geraden  $\overline{xy} \subset B_1^n(0)$ . Diese Begriffe lassen sich unabhängig vom gewählten Modell der hyperbolischen Geometrie definieren — im Kleinschen Ballmodell erhalten sie eine anschauliche Bedeutung. Zu je zwei verschiedenen Punkten  $x, y \in S^{n-1}$  gibt es also genau eine hyperbolische Gerade mit Endpunkten  $x, y$  im Unendlichen. Man sagt, der hyperbolische Raum sei ein „Sichtbarkeitsraum“, da man von jedem Punkt  $x \in S^{n-1} = \partial_\infty B_1^n(0)$  den gesamten restlichen Rand  $S^{n-1} \setminus \{x\}$  entlang von hyperbolischen Geraden „sehen“ kann.

Im Gegensatz dazu verbindet eine Euklidische Gerade durch  $p \in \mathbb{R}^n$  mit Richtung  $v \in S^{n-1}$  immer die Punkte  $v$  und  $-v \in S^{n-1} = \partial_\infty \mathbb{R}^n$ . Von  $v \in S^{n-1}$  „sieht“ man also nur den Punkt  $-v \in S^{n-1}$ , und es gibt unendlich viele Euklidische Geraden von  $v$  nach  $-v$ . Also ist der Euklidische Raum kein Sichtbarkeitsraum. Da die Sphäre kompakt ist, ist  $\partial_\infty S^n = \emptyset$ , wir haben also gar keinen Rand im Unendlichen.

1.44. SATZ. *In der hyperbolischen Geometrie gelten die Axiome I1–I4, A1–A5 und V1, V2.*

BEWEIS. Im Kleinschen Ballmodell  $B_1^2(0) \subset \mathbb{R}^2$  sind hyperbolische Geraden zugleich Strecken in der umgebenden Euklidischen Ebene. Wir können I1 – I3 daher auf die Euklidische Geometrie zurückführen, und drei Punkte wie in I4 lassen sich ebenfalls finden.

Die Axiome A1, A2 und A4 folgen ebenfalls, da sie für die Euklidische Geometrie gelten. Für A3 nutzen wir aus, dass  $B_1^2(0)$  offen ist, und für A5, dass  $B_1^2(0)$  konvex ist, denn mit  $p, q, r$  liegen auch die Strecken  $\overline{pq}, \overline{pr}, \overline{qr}$

in  $B_1^2(0)$ . Also haben wir jetzt alle Inzidenz- und Anordnungsaxiome auf den Euklidischen Fall zurückgeführt.

Wir können V1 und V2 wie im Euklidischen beweisen, siehe Satz 1.11 und [B]. Dabei nutzen wir aus, dass wir das Parallelenaxiom für V2 nicht benutzt haben.  $\square$

Allgemeiner kann man zeigen, dass jede offene, konvexe, nicht leere Teilmenge  $U$  der Euklidischen Ebene die Axiome I1–I4 und A1–A5 erfüllt. In den meisten Fällen kann aber keine Kongruenzrelationen für Strecken und Winkel in  $U$  so definieren, dass auch K1–K6 gelten.

1.45. BEMERKUNG. Wir sehen jetzt, dass die hyperbolische Ebene das Parallelenaxiom verletzt. Sei nämlich  $\overline{xy} \in \mathcal{G}'$  eine hyperbolische Gerade mit  $x \neq y \in S^1$ , und sei  $p \in B_1^2(0) \setminus \overline{xy}$ . Dann liegen zwischen der Geraden durch  $p$  und  $x$  und der Geraden durch  $p$  und  $y$  noch unendlich viele weitere hyperbolische Geraden durch  $p$ , die die Gerade  $\overline{xy}$  nicht treffen. Schnittpunkte der zugehörigen affinen Geraden im  $\mathbb{R}^2$  außerhalb  $B_1^2(0)$  sind ja in der hyperbolischen Ebene selbst nicht zu sehen.

Wir haben also eine Geometrie gefunden, die zwar die Axiome I1 - I4, A1 - A5, K1 - K6 und V1, V2 erfüllt, aber nicht das Parallelenaxiom. Wenn wir davon ausgehen, dass die Euklidische Geometrie widerspruchsfrei ist (das lässt sich nicht beweisen), bedeutet das, dass man das Parallelenaxiom nicht aus den anderen Axiomen ableiten kann. Mit der Konstruktion der hyperbolischen Geometrie hat man im 19. Jahrhundert endlich diese aus der Antike stammende Frage geklärt.

1.46. BEMERKUNG. Für das Verständnis der Newtonschen Mechanik reicht es, die Euklidische Geometrie des  $\mathbb{R}^n$  zu kennen. Sowohl Gegenwart als auch Zukunft zur Zeit  $t$  bilden einen euklidischen  $\mathbb{R}^3$ .

In der speziellen Relativitätstheorie gibt es zwar keine „Gegenwart“ für einen Beobachter an einem festen Ort zu fester Zeit, wohl aber eine Zukunft. Die Menge aller Punkte, die man bei gleichförmiger Bewegung in der Zeit 1 erreichen kann, liegen genau auf dem Hyperboloid  $\mathbb{H}^3$ ; Punkte, die man durch ungleichförmige Bewegung in dieser Zeit erreichen kann, liegen „darüber“. Eine physikalisch sinnvolle Metrik auf dem Raum  $\mathbb{H}^3$  sollte invariant unter der Lorentz-Gruppe  $O^+(n, 1)$  sein, und man kann dann zeigen, dass sie (bis auf Reskalierung) die hyperbolische Metrik sein muss. Analog hierzu tritt der hyperbolische Raum auch bei der Behandlung der relativistischen Wellengleichung auf, diese wiederum spielt eine Rolle in der relativistischen Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie.

## KAPITEL 2

### Kurven

Wir beginnen jetzt mit der Theorie der Kurven, dem ersten *differential-geometrischen* Kapitel der Vorlesung. Als erstes behandeln wir die Länge von Kurven in metrischen Räumen und die allgemeine Theorie von Kurven im  $\mathbb{R}^n$ . In späteren Abschnitten konzentrieren wir uns dann auf Kurven in der Ebene und im dreidimensionalen Raum.

#### 2.1. Die Bogenlänge

Im letzten Kapitel haben wir Längen von „Strecken“ in der Euklidischen, sphärischen und hyperbolischen Geometrie definiert. Im folgenden Abschnitt zeigen wir, wie man von einem Abstandsbegriff wie der Streckenlänge zur Längenmessung von Kurven kommt.

Wir erinnern uns: ein *metrischer Raum* ist ein Paar  $(M, d)$  aus einer Menge  $M$  und einer *Metrik*  $d: M \times M \rightarrow [0, \infty]$  mit folgenden Eigenschaften:

- M1. *Positivität*: Für  $x, y \in M$  gilt  $d(x, y) = 0$  genau dann, wenn  $x = y$ .
- M2. *Symmetrie*: Für alle  $x, y \in M$  gilt  $d(y, x) = d(x, y)$ .
- M3. *Dreiecksungleichung*: Für alle  $x, y, z \in M$  gilt  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Man sagt, die Punkte  $x, y \in M$  haben den *Abstand*  $d(x, y)$ .

In der Euklidischen, sphärischen und hyperbolischen Geometrie setzen wir jeweils  $d(p, q) = |\overline{pq}|$  wie in den Definitionen 1.12, 1.20 und 1.35. Die Symmetrie M2 ist in allen Fällen klar. Die Positivität M1 folgt in der sphärischen Geometrie aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und in der hyperbolischen aus Proposition 1.30 (1). Die Dreiecksungleichung M3 haben wir in Satz 1.16 und den Folgerungen 1.25, 1.38 hergeleitet.

Zur Erinnerung: ein *Intervall* ist eine zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Typische Intervalle sind

$$(a, b), [a, b], (a, b], (-\infty, b), [a, \infty) \text{ etc.},$$

mit  $a, b$  reell. Wir schreiben  $\overline{\mathbb{R}}$  für  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ .

**2.1. DEFINITION.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Eine *parametrisierte Kurve* in  $M$  ist eine stetige Abbildung  $\gamma: I \rightarrow M$  von einem Intervall  $I$  nach  $M$ ; schreibe  $\gamma \in \mathcal{C}^0(I, M)$ .

Um die Definition der Länge einer Kurve zu verstehen, stellen wir uns folgendes vor. Wir wollen von Freiburg nach Tübingen fahren. Auf der Landkarte können wir leicht die Luftlinien-Entfernung ablesen, sie beträgt ungefähr 110 km. Wenn wir mit dem Auto fahren, folgen wir einer Kurve  $\gamma$ . Um die Wegstrecke, die wir tatsächlich durchfahren, ungefähr anzunähern, merken wir uns einige Punkte auf dem Weg, vermessen die Luftlinienentfernung von jedem dieser Punkte zum nächsten, und addieren diese Strecken. Sei etwa  $I \subset \mathbb{R}$  das Zeitintervall von der Abfahrt bis zur Ankunft und  $t_0 < \dots < t_N \in I$ , dann erhalten wir als Näherung

$$\sum_{i=1}^N d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) .$$

Hierbei können  $t_0$  und  $t_n$  Start- und Endzeit sein, müssen aber nicht. Nehmen wir weitere Punkte hinzu, so wird die Näherung hoffentlich genauer. Auf jeden Fall wird sie nicht kürzer, denn seien  $t'_0 < \dots < t'_{N'} \in I$  mit  $\{t_0, \dots, t_N\} \subset \{t'_0, \dots, t'_{N'}\}$ , dann folgt

$$\sum_{i=1}^N d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \leq \sum_{j=1}^{N'} d(\gamma(t'_{j-1}), \gamma(t'_j))$$

aus der Dreiecksungleichung, und da am Anfang und am Ende zusätzliche Strecken hinzukommen, falls  $t'_0 < t_0$  bzw.  $t'_{N'} > t_N$ . Es erscheint also sinnvoll, als Länge von  $\gamma$  das Supremum all dieser Näherungen anzusetzen. In unserem Beispiel erhalten wir knapp 170 km für die übliche Strecke über B31 und A81.

2.2. DEFINITION. Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum,  $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $\gamma: I \rightarrow M$  eine parametrisierte Kurve. Dann heißt

$$L(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^N d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \mid N \in \mathbb{N} \text{ und } t_0 < \dots < t_N \in I \right\} \\ \in [0, \infty] = [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

die *Bogenlänge* von  $\gamma$ . Falls  $I = \emptyset$ , setzen wir  $L(\gamma) = 0$ . Wenn  $L(\gamma) < \infty$ , so heißt  $\gamma$  *rektifizierbar*.

Wir haben  $I = \emptyset$  extra behandelt, um zu verhindern, dass wir  $-\infty$  als Supremum über die leere Menge erhalten.

Wir sammeln einige elementare Eigenschaften dieser Definition. Dazu erinnern wir uns auch an den Umkehrsatz für stetige Funktionen zwischen Intervallen. Seien  $I, J \subset \mathbb{R}$  Intervalle. Eine stetige Funktion  $\varphi: J \rightarrow I$  besitzt genau dann eine stetige Umkehrfunktion  $\varphi^{-1}: I \rightarrow J$ , wenn  $\varphi$  auf ganz  $J$  streng monoton steigt oder streng monoton fällt. In diesem Fall heißt  $\varphi: J \rightarrow I$  ein *Homöomorphismus*.

2.3. PROPOSITION. Sei  $\gamma: I \rightarrow M$  eine parametrisierte Kurve.

(1) Es seien  $s_0 < \dots < s_n \in I$  beliebig, dann gilt

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{I \cap (-\infty, s_0]}) + \sum_{i=1}^n L(\gamma|_{[s_{i-1}, s_i]}) + L(\gamma|_{I \cap [s_n, \infty)}) .$$

(2) Es seien  $a < b \in \bar{\mathbb{R}}$  Zahlen mit  $(a, b) \subset I \subset [a, b]$ , dann gilt

$$L(\gamma) = \sup \{ L(\gamma|_{[s, t]}) \mid a < s < t < b \} .$$

(3) Es sei  $\varphi: J \rightarrow I$  ein Homöomorphismus, dann ist  $\gamma \circ \varphi: J \rightarrow M$  ebenfalls eine parametrisierte Kurve, und es gilt

$$L(\gamma \circ \varphi) = L(\gamma) .$$

BEWEIS. Der Einfachheit halber führen wir folgende Notation ein. Sei  $A \subset I$  eine endliche Teilmenge, dann existiert  $N = \#A \in \mathbb{N}$  und  $t_1 < \dots < t_n \in I$ , so dass  $A = \{t_1, \dots, t_N\}$ . Wir schreiben

$$\ell(\gamma|_A) = \sum_{i=2}^N d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) .$$

Gemäß unserer Vorüberlegung gilt also

$$A \subset B \subset I \implies \ell(\gamma|_A) \leq \ell(\gamma|_B) . \quad (*)$$

Um (1) zu beweisen, überlegen wir uns zunächst, dass wir nur endliche Teilmengen  $A \subset I$  mit  $\{s_0, \dots, s_n\} \subset A$  zu betrachten haben, denn es gilt

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \sup \{ \ell(\gamma|_A) \mid A \subset I \text{ mit } \#A < \infty \} \\ &\geq \sup \{ \ell(\gamma|_A) \mid \{s_0, \dots, s_n\} \subset A \subset I \text{ mit } \#A < \infty \} \\ &= \sup \{ \ell(\gamma|_{A \cup \{s_0, \dots, s_n\}}) \mid A \subset I \text{ mit } \#A < \infty \} \\ &\geq \sup \{ \ell(\gamma|_A) \mid A \subset I \text{ mit } \# < \infty \} = L(\gamma) . \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung „ $\geq$ “ kommt daher, dass wir über weniger erlaubte  $A$  das Supremum bilden, die zweite Ungleichung ergibt sich aus (\*).

Wir folgern (1), denn jetzt gilt

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \sup \{ \ell(\gamma|_A) \mid \{s_0, \dots, s_n\} \subset A \subset I \text{ mit } \#A < \infty \} \\ &= \sup \{ \ell(\gamma|_{A \cap (-\infty, s_0]}) + \ell(\gamma|_{A \cap [s_0, s_1]}) + \dots + \ell(\gamma|_{A \cap [s_n, \infty)}) \\ &\quad \mid \{s_0, \dots, s_n\} \subset A \subset I \text{ mit } \#A < \infty \} \\ &= \sup \{ \ell(\gamma|_{B_0}) \mid s_0 \in B_0 \subset I \cap (-\infty, s_0] \text{ mit } \#B_0 < \infty \} \\ &\quad + \sup \{ \ell(\gamma|_{B_1}) \mid s_0, s_1 \in B_1 \subset [s_0, s_1] \text{ mit } \#B_1 < \infty \} \\ &\quad + \dots + \sup \{ \ell(\gamma|_{B_{n+1}}) \mid s_n \in B_{n+1} \subset I \cap [s_n, \infty) \text{ mit } \#B_{n+1} < \infty \} \\ &= L(\gamma|_{I \cap (-\infty, s_0]}) + L(\gamma|_{[s_0, s_1]}) + \dots + L(\gamma|_{I \cap [s_n, \infty)}) . \end{aligned}$$

Zu (2) überlegen wir zunächst, dass

$$\begin{aligned} L(\gamma) &\geq \sup \{ \ell(\gamma|_A) \mid A \subset (a, b) \text{ mit } \#A < \infty \} \\ &= \sup \{ L(\gamma|_{[s, t]}) \mid a < s < t < b \} . \end{aligned}$$

Falls  $I = (a, b)$  gilt, erhalten wir sogar Gleichheit. Sei etwa  $I = [a, b)$ , dann existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit

$$d(\gamma(a), \gamma(s)) < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad s \in (a, a + \delta) \cap I.$$

Gemäß unserer Vorüberlegung gilt also

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \sup\{ \ell(\gamma|_{\{a\} \cup A}) \mid A \subset (a, b) \text{ mit } \#A < \infty \} \\ &= \sup\{ \ell(\gamma|_{\{a, s\} \cup A}) \mid s \in (a, a + \delta), A \subset (a, b) \text{ mit } \#A < \infty \} \\ &\leq \varepsilon + \sup\{ \ell(\gamma|_{\{s\} \cup A}) \mid s \in (a, a + \delta), A \subset (a, b) \text{ mit } \#A < \infty \} \\ &\leq \varepsilon + \sup\{ L(\gamma|_{(s, t)}) \mid a < s < t < b \}. \end{aligned}$$

Behauptung (2) folgt, da das für alle  $\varepsilon > 0$  gilt.

In der Begründung von (3) nutzen wir aus, dass der Homöomorphismus  $\varphi: J \rightarrow I$  streng monoton steigt oder fällt. Im ersten Fall folgt für  $A = \{t_0, \dots, t_n\} \subset J$  mit  $t_0 < \dots < t_n$ , dass  $\varphi(t_0) < \dots < \varphi(t_n)$ , also gilt

$$\ell(\gamma \circ \varphi|_A) = \sum_{i=1}^n d(\gamma(\varphi(t_{i-1})), \gamma(\varphi(t_i))) = \ell(\gamma|_{\varphi(A)}).$$

Falls  $\varphi$  streng monoton fällt, gilt  $\varphi(t_n) < \dots < \varphi(t_0)$ , und die Behauptung folgt ebenfalls. Wir erhalten (3), da

$$\begin{aligned} L(\gamma \circ \varphi) &= \sup\{ \ell(\gamma|_{\varphi(A)}) \mid A \subset J \text{ mit } \#A < \infty \} \\ &= \sup\{ \ell(\gamma|_B) \mid B \subset I \text{ mit } \#B < \infty \} \\ &= L(\gamma). \quad \square \end{aligned}$$

Wir kommen zu unserer Vorüberlegung zurück. Anstatt die Entfernung zwischen Freiburg und Tübingen als Luftlinienentfernung anzugeben, wäre es sinnvoller, die Länge des kürzesten (befahrbaren) Weges von Freiburg nach Tübingen als Entfernung zu benutzen (oder sogar die tatsächliche Fahrzeit in Stunden). Wenn es keine Einbahnstraßen gäbe, könnten wir mit dieser Idee eine neue Metrik auf der Erdkugel definieren.

**2.4. DEFINITION.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Wir definieren die *Wegemetrik* oder auch *innere Metrik*  $d_{\text{Weg}}: M \times M \rightarrow [0, \infty]$  durch

$$d_{\text{Weg}}(p, q) = \inf\{ L(\gamma) \mid a < b \in \mathbb{R}, \gamma: [a, b] \rightarrow M \text{ Kurve mit} \\ \gamma(a) = p, \gamma(b) = q \}.$$

Falls  $d_{\text{Weg}} = d$  gilt, heißt  $(M, d)$  ein *innerer metrischer Raum* oder auch *Längenraum*. Eine Kurve  $\gamma: I \rightarrow M$  heißt *kürzeste*, wenn  $d_{\text{Weg}}(\gamma(a), \gamma(b)) = L(\gamma|_{[a, b]})$  für alle  $a < b \in I$  gilt. Eine Kurve  $\gamma: I \rightarrow M$  heißt *Geodätische*, wenn es zu jedem inneren Punkt  $t \in I$  Zahlen  $a < t < b \in I$  gibt, so dass  $\gamma|_{[a, b]}$  kürzeste Kurve von  $\gamma(a)$  nach  $\gamma(b)$  ist.



Falls es keinen Weg von  $p$  nach  $q$  in  $M$  gibt, ist  $d_{\text{Weg}}(p, q) = \infty$  als Infimum über die leere Menge. Das passiert etwa im Fall  $M = \mathbb{Q}^n$  mit  $d(p, q) = \|p - q\|$ , wann immer  $p \neq q$ .

Wir kommen zu einigen elementaren Eigenschaften dieser Begriffe.

2.5. LEMMA. *Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $d_{\text{Weg}}: M \times M \rightarrow [0, \infty]$  seine innere Metrik. Dann gilt*

- (1) *Für alle  $p, q \in M$  gilt  $d_{\text{Weg}}(p, q) \geq d(p, q)$ .*
- (2) *Die innere Metrik  $d_{\text{Weg}}$  ist eine Metrik.*
- (3) *Der Raum  $(M, d_{\text{Weg}})$  ist ein innerer metrischer Raum.*

BEWEIS. Beweis: Übung. □

2.6. BEMERKUNG. Falls  $L(\gamma) = d_{\text{Weg}}(\gamma(a), \gamma(b))$  für eine Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  gilt, ist  $M$  bereits kürzeste. Denn falls nicht, so gäbe es  $r < s \in [a, b]$  mit  $L(\gamma|_{[r,s]}) = d_{\text{Weg}}(\gamma(r), \gamma(s))$ . Dann existierte eine Kurve  $\delta: [r, s] \rightarrow M$  mit  $\delta(r) = \gamma(r)$  und  $\delta(s) = \gamma(s)$ , aber  $L(\delta) < L(\gamma|_{[r,s]})$ . Dabei haben wir Proposition 2.3 (3) benutzt, um  $\delta$  auch auf dem Intervall  $[r, s]$  zu definieren. Wir betrachten jetzt die Kurve  $\gamma_1: [a, b] \rightarrow M$  mit

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{falls } t \in [a, b] \setminus (r, s), \text{ und} \\ \delta(t) & \text{falls } t \in [r, s]. \end{cases}$$

Aus Proposition 2.3 (1) ergibt sich der Widerspruch

$$L(\gamma_1) = L(\gamma) - L(\gamma|_{[r,s]}) + L(\delta) < L(\gamma) = d_{\text{Weg}}(\gamma(a), \gamma(b)) \leq L(\gamma_1).$$

Also ist  $\gamma$  bereits kürzeste.

Falls es einen Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  von  $p = \gamma(a)$  nach  $q = \gamma(b)$  mit  $L(\gamma) = d(p, q)$  gibt, dann gilt Gleichheit in Lemma 2.5 (1), denn

$$d(p, q) \leq d_{\text{Weg}}(p, q) \leq L(\gamma) = d(p, q).$$

2.7. BEISPIEL. Als Beispiel betrachten wir in der Euklidischen Geometrie die Gerade  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\gamma(t) = (1 - t)p + tq.$$

Für beliebige Zahlen  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq 1$  folgt aus Satz 1.16 durch Induktion über  $n$ , dass

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) &= d(\gamma(t_0), \gamma(t_{n-1})) + d(\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)) \\ &= d(\gamma(t_0), \gamma(t_n)), \end{aligned}$$

somit  $\ell(\gamma|_A) \leq d(p, q)$  für alle endlichen Teilmengen  $A \subset [0, 1]$ , also  $L(\gamma) = d(p, q)$ . Hieraus folgt

- (1) Der metrische Raum  $(\mathbb{R}^n, d)$  mit  $d(p, q) = |\overline{pq}|$  ist ein innerer metrischer Raum.
- (2) Jede Gerade ist eine kürzeste Geodätische.

2.8. BEISPIEL. Genauso kann man zeigen, dass die sphärische Metrik auf  $S^n$  und die hyperbolische Metrik auf  $\mathbb{H}^n$  innere Metriken sind. Hyperbolische Geraden sind kürzeste Geodätische, Großkreise jedoch nur Geodätische.

Bisher haben wir uns ganz in der Kategorie der metrischen Räume aufgehalten und noch keine richtige Differentialgeometrie betrieben. Wenn wir aber die Länge einer Kurve  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  effizient bestimmen möchten, ist die Definition 2.2 zu umständlich. Wir führen also den Begriff der stückweise differenzierbaren Kurven ein und geben eine analytische Formel für ihre Länge an.

2.9. DEFINITION. Es seien  $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$  und  $(a, b) \subset I \subset [a, b]$  ein reelles Intervall. Eine *stetig differenzierbar* ( $\mathcal{C}^k$ -, *glatt*) *parametrisierte Kurve* im  $\mathbb{R}^n$  ist eine parametrisierte Kurve  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\gamma|_{(a,b)} \in \mathcal{C}^1((a,b), \mathbb{R}^n)$  (bzw.  $\mathcal{C}^k((a,b), \mathbb{R}^n)$ ) bzw.  $\mathcal{C}^\infty((a,b), \mathbb{R}^n)$ .

Eine *stückweise stetig differenzierbar* ( $\mathcal{C}^k$ -, *glatte*) *parametrisierte Kurve* im  $\mathbb{R}^n$  ist eine parametrisierte Kurve  $\gamma \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$  zusammen mit Zahlen  $s_0 < \dots < s_n$  in  $I$ , so dass  $\gamma|_{(-\infty, s_0] \cap I}$ ,  $\gamma|_{[s_0, s_1]}$ ,  $\dots$ ,  $\gamma|_{I \cap [s_n, \infty)}$  jeweils differenzierbar ( $\mathcal{C}^k$ -, *glatt*) parametrisiert sind.

Wir schreiben  $\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt}$  für die Ableitung von  $\gamma$  nach dem „Zeitparameter“  $t$ .

2.10. SATZ. Sei  $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $(a, b) \subset I \subset [a, b]$  ein reelles Intervall und  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stückweise  $\mathcal{C}^1$ -parametrisierte Kurve. Dann gilt

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \in [0, \infty].$$

Beachte: da  $\dot{\gamma}(t)$  unter Umständen an endlich vielen Stellen in  $I$  nicht definiert ist, ist das obige Integral uneigentlich. Insbesondere ist  $\infty$  als Wert möglich.

BEWEIS. Als erstes nehmen wir an, dass  $\dot{\gamma}$  auf ganz  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  definiert und stetig ist. Dann ist  $\dot{\gamma}_j$  gleichmäßig stetig für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert also  $\delta > 0$ , so dass  $|\dot{\gamma}_j(s) - \dot{\gamma}_j(t)| < \varepsilon$  für alle  $s, t \in [a, b]$  mit  $|s - t| < \delta$ . Sei jetzt  $A \subset [a, b]$  eine endliche Teilmenge mit  $|L(\gamma) - \ell(\gamma|_A)| < \varepsilon$ . Nach unserer Vorüberlegung dürfen wir weitere Punkte zu  $A$  hinzunehmen; dadurch wird  $|L(\gamma) - \ell(\gamma|_A)|$  nicht größer. Es gelte also  $A = \{t_0, \dots, t_N\}$  mit  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$  und  $t_i - t_{i-1} < \delta$  für  $i = 1, \dots, N$ .

Für ein festes  $i \in \{1, \dots, N\}$  wähle Zwischenstellen  $\tau_j \in (t_{i-1}, t_i)$  für  $j = 1, \dots, n$ , so dass

$$(t_i - t_{i-1})\dot{\gamma}_j(\tau_j) = \gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{i-1}).$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung und unserer Wahl von  $\delta$  folgt für alle  $t \in [t_i, t_{i-1}]$ , dass

$$\begin{aligned} \left\| \dot{\gamma}(t) - \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\| &\leq \sum_{j=1}^n \left\| \left( \dot{\gamma}_j(t) - \frac{\gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right) \cdot e_j \right\| \\ &= \sum_{j=1}^n |\dot{\gamma}_j(t) - \dot{\gamma}_j(\tau_j)| < n\varepsilon, \end{aligned}$$

da  $|t - \tau_j| < \delta$  für alle  $j$ . Integrieren liefert

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\| dt - \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \right| &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \|\dot{\gamma}(t)\| - \frac{\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|}{t_i - t_{i-1}} \right| dt \\ &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\| \dot{\gamma}(t) - \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\| dt < n\varepsilon \cdot (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Aufsummieren über  $i$  ergibt schließlich

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt - \ell(\gamma|_A) \right| &\leq \sum_{i=1}^N \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\| dt - \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \right| < n\varepsilon(b-a) \end{aligned}$$

Zusammen mit unserer ersten Annahme an  $A$  folgt

$$\left| \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt - L(\gamma) \right| < \varepsilon(n(b-a) + 1).$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt unsere Behauptung.

Im nächsten Schritt nehmen wir an, dass  $(a, b) \subset I \subset [a, b]$ , und dass  $\gamma|_{(a,b)} \in \mathcal{C}^1((a, b); \mathbb{R}^n)$ . Aus Proposition 2.3 (2) folgt

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \sup \{ L(\gamma|_{[a', b']}) \mid a < a' < b' < b \} \\ &= \sup \left\{ \int_{a'}^{b'} \|\dot{\gamma}(t)\| dt \mid a < a' < b' < b \right\} = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \in [0, \infty], \end{aligned}$$

da wir ein uneigentliches Integral mit nicht-negativem Integranden betrachten.

Im letzten Schritt seien  $s_0 < \dots < s_m \in I$  Zwischenstellen wie in Definition 2.9. Aus Proposition 2.3 (1) folgt

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= L(\gamma|_{I \cap (-\infty, s_0]}) + L(\gamma|_{[s_0, s_1]}) + \dots + L(\gamma|_{I \cap [s_m, \infty)}) \\ &= \int_a^{s_0} \|\dot{\gamma}(t)\| dt + \int_{s_0}^{s_1} \|\dot{\gamma}(t)\| dt + \dots + \int_{s_m}^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \end{aligned}$$

nach Definition des uneigentlichen Integrals mit Unstetigkeitsstellen im Inneren.  $\square$

2.11. BEMERKUNG. Analog dazu gilt in der sphärischen Geometrie für Kurven  $\gamma: I \rightarrow S^n$  mit  $I$  wie oben, so dass  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  von der Klasse  $\mathcal{C}^k$  mit  $k \geq 1$  ist, dass

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt ,$$

hier ist  $\|\cdot\|$  die Euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^n$ . In der hyperbolischen Geometrie gilt für  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  von der Klasse  $\mathcal{C}^k$ , dass

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt .$$

Wenn man eine Kurve wie in Proposition 2.3 (3) umparametrisiert, ändert sich nichts daran, welche Punkte durchlaufen werden oder wie oft das geschieht, wohl aber an der Geschwindigkeit. Die Länge der Kurve bleibt dabei aber gleich. In der Praxis ist es oft nützlich, Kurven so zu parametrisieren, dass man relevante geometrische Information leicht ablesen kann. Die Bogenlängenparametrisierung ist ein Beispiel dafür.

2.12. DEFINITION. Sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine (stückweise)  $(\mathcal{C}^k, \text{glatt})$  parametrisierte Kurve. Eine *Parametertransformation* für  $\gamma$  ist ein Homöomorphismus (bzw. (stückweiser)  $\mathcal{C}^k$ - bzw. (stückweiser)  $\mathcal{C}^\infty$ -Diffeomorphismus)  $\varphi: J \rightarrow I$ , wobei  $J \subset \mathbb{R}$  ein Intervall ist. Die Kurve  $\gamma \circ \varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt eine  $(\mathcal{C}^k, \text{glatte})$  *Umparametrisierung* von  $\gamma$ .

Eine  $((\text{stückweise}) \mathcal{C}^k, \text{glatte})$  *Kurve* ist eine Äquivalenzklasse  $((\text{stückweise}) \mathcal{C}^k$ - bzw. *glatt*) parametrisierter Kurven bis auf Umparametrisierung. Die einzelnen Elemente einer solchen Äquivalenzklasse heißen (stetige, (stückweise)  $\mathcal{C}^k$ - bzw. *glatte*) *Parametrisierungen* der Kurve. Eine (stetige, (stückweise)  $\mathcal{C}^k$ -, *glatte*) *gerichtete Kurve* ist eine Äquivalenzklasse  $((\text{stückweise}) \mathcal{C}^k$ - bzw. *glatt*) parametrisierter Kurven bis auf Umparametrisierung mit streng monoton steigenden Parametertransformationen.

Die *Spur* einer Kurve ist die Menge ihrer Bildpunkte.

Die Unterscheidung zwischen Kurven und Parametrisierungen wirkt etwas künstlich, und der Unterschied zwischen einer Kurve und ihrer Spur ist auf den ersten Blick auch unklar. Das Ziel der Kurventheorie ist es, parameterunabhängige Größen zu finden, die die Geometrie der Kurve beschreiben.

2.13. BEISPIEL. Um den Unterschied zwischen einer Kurve und der Menge ihrer Bildpunkte zu verstehen, betrachte für  $k \in \mathbb{N}$  die Kurven mit Parametrisierungen

$$\gamma_k: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \gamma_k(t) = e^{ikt} .$$

All diese Kurven haben für  $k \neq 0$  die gleiche Spur, nämlich  $S^1 \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ . Aber die Kurven haben unterschiedliche Länge, nämlich

$$L(\gamma_k) = \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}_k(t)\| dt = \int_0^{2\pi} |ik e^{ikt}| dt = 2\pi k .$$

2.14. BEMERKUNG. Zur Erläuterung:

- (1) Die Relation „ist Umparametrisierung von“ ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation:

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma \circ \text{id}, & \gamma_2 &= \gamma_1 \circ \varphi & \iff & \gamma_1 &= \gamma_2 \circ \varphi^{-1}, \\ (\gamma_2 &= \gamma_1 \circ \varphi \text{ und } \gamma_3 &= \gamma_2 \circ \psi) & \implies & \gamma_3 &= \gamma_1 \circ (\varphi \circ \psi). \end{aligned}$$

- (2) Die parametrisierten Kurven  $\gamma_1, \gamma_2: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad \text{und} \quad \gamma_2(t) = (t^3, 0)$$

beschreiben zwar die gleiche stetige Kurve, aber verschiedene  $\mathcal{C}^1$ -Kurven, da die Parametertransformation  $\varphi(t) = t^3$  zwar stetig invertierbar, aber nicht  $\mathcal{C}^1$ -invertierbar ist.

- (3) Sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $\mathcal{C}^k$ -parametrisierte Kurve, und sei  $\varphi: J \rightarrow I$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Umparametrisierung. Dann gilt

$$(\gamma \circ \varphi)'(t) = (\dot{\gamma} \circ \varphi)(t) \cdot \dot{\varphi}(t).$$

Insbesondere verschwindet  $(\gamma \circ \varphi)'(t)$  genau dann, wenn  $\dot{\gamma}(\varphi(t)) = 0$ .

Wir wollen ab sofort Zusätze wie  $\mathcal{C}^k$  oder glatt weglassen, wenn klar ist, in welcher Differenzierbarkeitsordnung wir arbeiten.

2.15. DEFINITION. Eine  $\mathcal{C}^k$ -Kurve im  $\mathbb{R}^n$  mit  $k \geq 1$  heißt *regulär*, wenn für eine Parametrisierung  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  der Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\gamma}(t)$  für kein  $t \in I$  verschwindet.

Eine parametrisierte Kurve  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *nach Bogenlänge parametrisiert*, wenn  $L(\gamma|_{[a,b]}) = b - a$  für alle  $a < b \in I$ .

Aufgrund von Bemerkung 2.14 (3) ist es für die Definition von „regulär“ egal, welche Parametrisierung der Kurve betrachtet wird.

- 2.16. BEMERKUNG. Betrachte die Kurve  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\gamma(t) = \begin{cases} \left( e^{\frac{1}{t}}, 0 \right) & \text{für } t < 0, \\ (0, 0) & \text{für } t = 0, \\ \left( 0, e^{-\frac{1}{t}} \right) & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

Man überprüft leicht, dass  $\gamma$  glatt, aber nicht regulär ist, da  $\dot{\gamma}(0) = 0$ .

- 2.17. PROPOSITION. (1) Eine  $\mathcal{C}^k$ -parametrisierte Kurve  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $k \geq 1$  ist genau dann nach Bogenlänge parametrisiert, wenn für alle  $t \in I$  gilt, dass  $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ .
- (2) Jede reguläre Kurve im  $\mathbb{R}^n$  besitzt eine Parametrisierung nach Bogenlänge;
- (3) diese ist eindeutig bestimmt bis auf Parametertransformationen der Gestalt  $\varphi(t) = c \pm t$  mit  $c \in \mathbb{R}$ .

BEWEIS. Behauptung (1) folgt aus Satz 2.10 und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Sei etwa  $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$  für alle  $t \in I$ , dann folgt

$$L(\gamma|_{[a,b]}) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = b - a .$$

Sei umgekehrt  $\gamma$  nach Bogenlänge parametrisiert, dann folgt für  $a \leq t \in I$ , dass

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \frac{d}{dt} \int_a^t \|\dot{\gamma}(s)\| ds = \frac{d}{dt}(t - a) = 1 .$$

Sei jetzt  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Parametrisierung einer regulären  $\mathcal{C}^k$ -Kurve. Um eine  $\mathcal{C}^k$ -Parametrisierung nach Bogenlänge zu erhalten, wähle eine Stammfunktion der Funktion  $t \mapsto \|\dot{\gamma}(t)\|$ . Die Funktionen  $\dot{\gamma}$  und  $\|\dot{\gamma}\|$  sind von der Klasse  $\mathcal{C}^{k-1}$ ; letzteres, da 0 nicht angenommen wird. Also ist  $\psi$  von Klasse  $\mathcal{C}^k$ . Sei  $J$  das Bild von  $\psi$ . Nach Voraussetzung gilt

$$\dot{\psi}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| > 0 ,$$

also ist  $\psi$  eine  $\mathcal{C}^k$ -invertierbare Funktion.

Sei  $\varphi: J \rightarrow I$  die Umkehrfunktion, dann ist  $\varphi$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Parametertransformation. Aus Bemerkung 2.14 (3) folgt

$$\|(\gamma \circ \varphi)'(s)\| = \underbrace{\|\dot{\gamma}(\varphi(s))\|}_{=\dot{\psi}(\varphi(s))} \cdot \underbrace{|\varphi'(s)|}_{>0} = \dot{\psi}(\varphi(s)) \cdot \frac{1}{\dot{\psi}(\varphi(s))} = 1$$

nach der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen. Nach (1) ist  $\gamma \circ \varphi$  also nach Bogenlänge parametrisiert; es folgt (2).

Zu (3) nehmen wir an, dass  $\gamma$  und  $\gamma \circ \varphi$  nach Bogenlänge parametrisiert sind. Aus Bemerkung 2.14 (3) folgt

$$\|(\gamma \circ \varphi)'(t)\| = \|\dot{\gamma}(\varphi(t))\| \cdot |\dot{\varphi}(t)| .$$

Je nachdem, ob  $\varphi$  streng monoton steigt oder fällt, gilt

$$\dot{\varphi}(t) = \pm \frac{\|(\gamma \circ \varphi)'(t)\|}{\|\dot{\gamma}(\varphi(t))\|} = \pm 1 ,$$

woraus (3) sofort folgt. □

2.18. BEISPIEL. Ein Punkt auf dem Rand eines Kreises vom Radius 1, der auf der  $x$ -Achse abrollt, beschreibt eine *Zykloide*  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , etwa

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} .$$

Wir wollen  $\gamma|_{(0,2\pi)}$  nach Bogenlänge parametrisieren. Es gilt

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} .$$

Aus den Additionstheoremen für  $t = \frac{t}{2} + \frac{t}{2}$  folgt

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{2 - 2 \cos t} = \sqrt{2 - 2 \cos^2 \frac{t}{2} + 2 \sin^2 \frac{t}{2}} = 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| \neq 0$$

für  $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ . Auf  $(0, 2\pi)$  ist  $\sin \frac{t}{2} > 0$ , und wir erhalten

$$\psi(t) = L(\gamma|_{[0,t]}) = \int_0^t 2 \sin \frac{\tau}{2} d\tau = 4 \left( 1 - \cos \frac{t}{2} \right).$$

Die Umkehrfunktion davon ist  $\varphi: (0, 8) \rightarrow (0, 2\pi)$  mit

$$\varphi(s) = 2 \arccos \left( 1 - \frac{s}{4} \right),$$

wobei wir den Bogenlängenparameter — wie in vielen Büchern üblich — mit  $s$  bezeichnen. Es gilt

$$\begin{aligned} \cos \frac{\varphi(s)}{2} &= 1 - \frac{s}{4} \\ \sin \frac{\varphi(s)}{2} &= \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\varphi(s)}{2}} = \frac{1}{4} \sqrt{s(8-s)} \\ \cos \varphi(s) &= \cos^2 \frac{\varphi(s)}{2} - \sin^2 \frac{\varphi(s)}{2} = 1 - s + \frac{s^2}{8} \\ \sin \varphi(s) &= 2 \cos \frac{\varphi(s)}{2} \sin \frac{\varphi(s)}{2} = \frac{1}{8} (4-s) \cdot \sqrt{s(8-s)}, \end{aligned}$$

also erhalten wir die Bogenlängenparametrisierung der Zykloide

$$\gamma(\varphi(s)) = \begin{pmatrix} 2 \arccos \left( 1 - \frac{s}{4} \right) - \frac{1}{8} (4-s) \cdot \sqrt{s(8-s)} \\ \frac{1}{8} s(8-s) \end{pmatrix}.$$

## 2.2. Reguläre Kurven im $\mathbb{R}^n$

Unsere Überlegungen zur Bogenlänge lassen sich zum Teil auf Kurven in beliebigen metrischen Räumen übertragen, etwa auf Kurven in  $S^n$  oder  $\mathbb{H}^n$ . Es folgen einige konkrete Überlegungen zu Kurven im  $\mathbb{R}^n$ .

Zur Erinnerung: eine  $m$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  ist eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$ , so dass zu jedem  $p \in M$  eine Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$  von  $p$ , eine Umgebung  $V \subset \mathbb{R}^n$  von 0 und ein  $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus  $\Phi: U \rightarrow V$  mit

$$\Phi(M \cap U) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap V$$

existiert. Diese Abbildungen  $\Phi$  heißen auch *Untermannigfaltigkeitskarten* um  $p$ . Der folgende Satz besagt, dass reguläre Kurven und eindimensionale Untermannigfaltigkeiten zumindest lokal dasselbe sind.

- 2.19. SATZ. (1) Sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  Parametrisierung einer regulären  $\mathcal{C}^k$ -Kurve, und sei  $t \in I$  ein Punkt im Inneren von  $I$ . Dann existiert ein offenes Teilintervall  $J \subset I$  mit  $t \in J$ , so dass die Spur von  $\gamma|_J$  eine eindimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  ist.
- (2) Sei  $M$  eine eindimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ , dann existiert zu jedem  $p \in M$  eine Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$  von  $p$ , so dass  $M \cap U$  Spur einer  $\mathcal{C}^k$ -regulären Kurve ist.

BEWEIS. Seien  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $t \in I$  wie in (1) gegeben. Schreibe

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(t) \end{pmatrix} \neq 0,$$

dann folgt  $\dot{\gamma}_i(t) \neq 0$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ , da  $\gamma$  regulär ist. Ohne Einschränkung sei  $i = 1$ . Da  $\dot{\gamma}_1$  stetig ist, folgt  $\dot{\gamma}_1 \neq 0$  auf einem ganzen Teilintervall  $J \ni t$ . Somit ist  $\gamma_1: J \rightarrow K = \gamma_1(J)$  invertierbar. Setze  $U = V = K \times \mathbb{R}^{n-1}$  und betrachte die Abbildung  $\Phi: U \rightarrow V$  mit

$$\Phi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - \gamma_2(\gamma_1^{-1}(x_1)) \\ \vdots \\ x_n - \gamma_n(\gamma_1^{-1}(x_1)) \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $\Phi$  ein  $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus. Behauptung (1) folgt, da

$$\gamma(J) = \Phi^{-1}(K \cap \mathbb{R} \times \{0\}).$$

Sei umgekehrt  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine eindimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit. Zu  $p \in M$  wähle eine Untermannigfaltigkeitskarte  $\Phi: U \rightarrow V$  um  $p$ . Nach Verkleinern von  $U$  und  $V$  existiert ein Intervall  $I$  mit  $0 \in I$ , so dass  $V \cap \mathbb{R} \times \{0\} = I \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ . Die gesuchte  $\mathcal{C}^k$ -reguläre Kurve ist die Abbildung  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\gamma(t) = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Für die nächste Konstruktion benötigen wir das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren. Zur Erinnerung: sei  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Basis des  $\mathbb{R}^n$ , dann konstruieren wir induktiv Vektoren  $e_1, \dots, e_n$  durch

$$e_i = \frac{v_i - \langle v_i, e_1 \rangle e_1 - \dots - \langle v_i, e_{i-1} \rangle e_{i-1}}{\|v_i - \langle v_i, e_1 \rangle e_1 - \dots - \langle v_i, e_{i-1} \rangle e_{i-1}\|}.$$

Dieses Verfahren hat die folgenden Eigenschaften.

- (1) Die Vektoren  $(e_1, \dots, e_n)$  bilden eine Orthonormalbasis.
- (2) Für alle  $i = 1, \dots, n$  hängt  $e_j$  glatt ( $\mathcal{C}^\infty$ ) von den Vektoren  $(v_1, \dots, v_j)$  ab (solange diese linear unabhängig sind, was auf einer offenen und dichten Teilmenge des  $(\mathbb{R}^n)^j$  gilt).
- (3) Für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt  $\text{span}\{e_1, \dots, e_i\} = \text{span}\{v_1, \dots, v_i\}$ .
- (4) Für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt  $\langle e_i, v_i \rangle > 0$ .

Umgekehrt wird  $(e_1, \dots, e_n)$  durch (1), (3) und (4) bereits festgelegt. Wir nennen  $(e_1, \dots, e_n)$  die *Gram-Schmidt-Basis* zu  $(v_1, \dots, v_n)$ .



Aus (3) und (4) folgt, dass die Basiswechselmatrizen  $A = (a_{jk})$ ,  $B = (b_{jk}) \in M_i(\mathbb{R})$  mit

$$e_k = \sum_{j=1}^i a_{jk} v_j \quad \text{und} \quad v_k = \sum_{j=1}^i b_{jk} e_j$$

jeweils obere Dreiecksmatrizen mit positiven Diagonaleinträgen sind.

Sei  $(w_1, \dots, w_n)$  eine Basis mit

$$w_i = \begin{pmatrix} w_i^1 \\ \vdots \\ w_i^n \end{pmatrix},$$

dann heißt  $(w_1, \dots, w_n)$  *positiv orientiert*, wenn  $\det((w_i^j)_{i,j}) > 0$ . Sei  $(v_1, \dots, v_{n-1})$  ein Tupel linear unabhängiger Vektoren, dann konstruieren wir  $e_1, \dots, e_{n-1}$  induktiv wie oben. Anschließend gibt es nur noch genau einen Vektor  $e_n$ , so dass  $(e_1, \dots, e_n)$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis bilden. Sei  $E_i$  die Matrix aus den Koordinaten der Vektoren  $e_1, \dots, e_{n-1}$  ohne die  $i$ -te Zeile, dann hat  $e_n$  als  $i$ -te Koordinate die Zahl  $(-1)^{n-i} \det E_i$ . Im  $\mathbb{R}^2$  sieht das so aus:

$$e_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies e_2 = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix},$$

und im  $\mathbb{R}^3$  berechnen wir  $e_3$  mit dem Kreuzprodukt:

$$e_3 = e_1 \times e_2.$$

Wir nennen  $(e_1, \dots, e_n)$  die *positiv orientierte Gram-Schmidt-Basis* zu den Vektoren  $(v_1, \dots, v_{n-1})$ . Dieses Verfahren hat folgende Eigenschaften:

- (1) Die Vektoren  $(e_1, \dots, e_n)$  bilden eine positiv orientierte Orthonormalbasis.
- (2) Es gilt (2) oben für  $i = 1, \dots, n - 1$ ; der Vektor  $e_n$  hängt glatt von  $(v_1, \dots, v_{n-1})$  ab (solange diese linear unabhängig sind, siehe oben).
- (3) Es gilt (3) oben für  $i = 1, \dots, n - 1$ .
- (4) Es gilt (4) oben für  $i = 1, \dots, n - 1$ .

Und wieder ist  $(e_1, \dots, e_n)$  durch (1), (3) und (4) eindeutig festgelegt.

Wir schreiben  $\gamma^{(k)} = \frac{d^k \gamma(t)}{dt^k}$ .

**2.20. DEFINITION.** Eine *Frenet-Kurve* im  $\mathbb{R}^n$  ist eine gerichtete  $\mathcal{C}^k$ -Kurve mit  $k \geq n$ , die eine Parametrisierung  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  besitzt, so dass  $\gamma^{(1)}(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)$  für alle  $t \in I$  ein linear unabhängiges Tupel von Vektoren bilden. Sei  $(e_1(t), \dots, e_n(t))$  die positiv orientierte Gram-Schmidt-Basis zu  $(\gamma^{(1)}(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t))$ , dann heißt  $e_i: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  der  *$i$ -te Frenet-Vektor* zu  $\gamma$ . Man nennt  $(e_1, \dots, e_n)$  das *begleitende* oder *Frenet- $n$ -Bein* zu  $\gamma$  (oder auch die *begleitende* oder *Frenet-Basis*).

**2.21. BEMERKUNG.** (1) Eine Kurve in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  ist genau dann eine Frenet-Kurve, wenn sie von der Klasse  $\mathcal{C}^2$  und regulär ist.

- (2) Für eine feste  $\mathcal{C}^k$ -Parametrisierung  $\gamma$  sind die Ableitungen  $\gamma^{(i)}$  jeweils von der Klasse  $\mathcal{C}^{k-i}$ . Es folgt, dass  $e_i$  ebenfalls von der Klasse  $\mathcal{C}^{k-i}$  ist für  $i = 1, \dots, n-1$ . Der Vektor  $e_n$  hängt glatt von  $e_1, \dots, e_{n-1}$  ab und ist daher von der Klasse  $\mathcal{C}^{k-n+1}$ , genau wie  $e_{n-1}$ .
- (3) Die Eigenschaft, dass  $(\gamma^{(1)}(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t))$  linear unabhängig sind, hängt nicht von der (gerichteten) Parametrisierung ab. Sei  $\varphi$  eine monoton steigende Parametertransformation, und sei  $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n): I \rightarrow \mathbb{R}^n$  das Frenet- $n$ -Bein von  $\gamma \circ \varphi$ , dann gilt sogar  $\bar{e}_i = e_i \circ \varphi$  für  $i = 1, \dots, n$ .

Dazu zeigen wir induktiv, dass es Funktionen  $f_{ij}: I \rightarrow \mathbb{R}$  für  $j < i$  gibt, so dass

$$(\gamma \circ \varphi)^{(i)} = \sum_{j=1}^{i-1} f_{ij}(t) (\gamma^{(j)} \circ \varphi)(t) + \dot{\varphi}(t)^i (\gamma^{(i)} \circ \varphi)(t).$$

Für  $i = 1$  ist das klar, für größere  $i$  gilt induktiv

$$\begin{aligned} (\gamma \circ \varphi)^{(i)}(t) &= \frac{d}{dt} (\gamma \circ \varphi)^{(i-1)}(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^{i-2} f_{i-1,j}(t) (\gamma^{(j)} \circ \varphi)(t) + \dot{\varphi}(t)^{i-1} (\gamma^{(i-1)} \circ \varphi)(t) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{i-2} (\dot{f}_{i-1,j}(t) (\gamma^{(j)} \circ \varphi)(t) + f_{i-1,j}(t) \dot{\varphi}(t) (\gamma^{(j+1)} \circ \varphi)(t)) \\ &\quad + \frac{d}{dt} (\dot{\varphi}(t)^{i-1}) (\gamma^{(i-1)} \circ \varphi)(t) + \dot{\varphi}(t)^i (\gamma^{(i)} \circ \varphi)(t), \end{aligned}$$

und das ist von der gewünschten Form. Hieraus folgt insbesondere die lineare Unabhängigkeit der ersten  $(n-1)$  Ableitungen.

Es ist jetzt leicht zu sehen, dass

$$\begin{aligned} \text{span}\{e_1(\varphi(t)), \dots, e_i(\varphi(t))\} &= \text{span}\{\gamma^{(1)}(\varphi(t)), \dots, \gamma^{(i)}(\varphi(t))\} \\ &= \text{span}\{(\gamma \circ \varphi)^{(1)}(t), \dots, (\gamma \circ \varphi)^{(i)}(t)\} \end{aligned}$$

für  $i = 1, \dots, n-1$ . Da  $\dot{\varphi}(t) > 0$  für alle  $t$ , gilt für diese  $i$  auch

$$\langle e_i(\varphi(t)), (\gamma \circ \varphi)^{(i)}(t) \rangle = \dot{\varphi}(t)^i \langle e_i(\varphi(t)), \gamma^{(i)}(\varphi(t)) \rangle > 0.$$

Also folgt  $\bar{e}_i = e_i \circ \varphi$  wie behauptet, da beide Basen die obigen Eigenschaften (1), (3) und (4) erfüllen.

**2.22. SATZ (Frenet).** Sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine (gerichtete) Bogenlängenparametrisierung einer  $\mathcal{C}^k$ -Frenet-Kurve, dann existieren Funktionen  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2}: I \rightarrow (0, \infty)$  und  $\kappa_{n-1}: I \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass das begleitende Frenet- $n$ -Bein die Frenet-Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \kappa_1 e_2, \\ \dot{e}_i &= \kappa_i e_{i+1} - \kappa_{i-1} e_{i-1} \quad \text{für } i = 2, \dots, n-1, \text{ und} \\ \dot{e}_n &= -\kappa_{n-1} e_{n-1} \end{aligned}$$

erfüllt. Dabei ist  $\kappa_i$  von der Klasse  $\mathcal{C}^{k-i-1}$ .

BEWEIS. Nach Konstruktion ist  $e_i$  von der Klasse  $\mathcal{C}^{k-i}$  für  $i < n$ , und  $e_n$  von der Klasse  $\mathcal{C}^{k-n+1}$ . Wegen  $k \geq n$  sind insbesondere alle  $e_i$  mindestens von der Klasse  $\mathcal{C}^1$ . Da das Frenet  $n$ -Bein eine Orthonormalbasis ist, gilt

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^n \langle \dot{e}_i, e_j \rangle e_j$$

für alle  $i = 1, \dots, n$ .

Sei jetzt  $1 \leq i \leq n-2$ , dann ist  $e_i$  nach Konstruktion eine Linearkombination

$$e_i(t) = \sum_{j=1}^i a_{ji}(t) \gamma^{(j)}(t)$$

mit  $a_{ii} > 0$  für  $i = 1, \dots, n-1$ . Ableiten liefert

$$\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^i (\dot{a}_{ji}(t) \gamma^{(j)}(t) + a_{ji}(t) \gamma^{(j+1)}(t)), \quad (2.1)$$

es folgt

$$\dot{e}_i(t) \in \text{span}\{\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(i+1)}\} = \text{span}\{e_1(t), \dots, e_{i+1}(t)\},$$

und diese Aussage gilt analog auch für  $\dot{e}_{n-1}$  und  $\dot{e}_n$ . Also gilt

$$\langle \dot{e}_i(t), e_j(t) \rangle = 0 \quad \text{für } j \geq i+2. \quad (2.2)$$

Außerdem wissen wir, dass der Koeffizient  $a_{ii}$  von  $\gamma^{(i+1)}$  in (2.1) wegen Eigenschaft (4) der orientierten Gram-Schmidt-Basis positiv ist, für  $i+1 \leq n-1$  folgt also

$$\kappa_i(t) := \langle \dot{e}_i(t), e_{i+1}(t) \rangle > 0.$$

Für  $i = n-1$  gilt das nicht mehr, da ja  $e_1, \dots, e_{n-1}$  den Vektor  $e_n$  unabhängig von  $\gamma^{(n)}$  bestimmen. Für alle  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  ist aber  $\kappa_i \in \mathcal{C}^{k-i-1}(I)$ .

Da  $\langle e_i(t), e_j(t) \rangle = \delta_{ij}$  unabhängig von  $t$ , folgt mit (2.2) noch

$$\begin{aligned} \langle \dot{e}_i, e_i \rangle &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle e_i, e_i \rangle = 0, \\ \langle \dot{e}_i, e_{i-1} \rangle &= \frac{d}{dt} \langle e_i, e_{i-1} \rangle - \langle e_i, \dot{e}_{i-1} \rangle = -\kappa_{i-1}, \\ \langle \dot{e}_i, e_j \rangle &= \frac{d}{dt} \langle e_i, e_j \rangle - \langle e_i, \dot{e}_j \rangle = 0 \quad \text{für alle } j \leq i-2. \quad \square \end{aligned}$$

2.23. DEFINITION. Die Funktionen  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$  heißen die *Frenet-Krümmungen* von  $\gamma$ , falls  $\gamma$  nach Bogenlänge parametrisiert ist. Für gerichtete Umparametrisierungen  $\bar{\gamma} = \gamma \circ \varphi$  setzen wir  $\bar{\kappa}_i = \kappa_i \circ \varphi$ .

2.24. BEMERKUNG. Die Frenet-Krümmungen sind geometrische Invarianten, das heißt, sie sind unabhängig von der Parametrisierung der (gerichteten) Kurve. Da wir gerichtete Bogenlängenparametrisierungen zur Definition benutzt haben, reicht es, Parametertransformationen der Form  $t \mapsto c+t$  für  $c \in \mathbb{R}$

zu betrachten. Sei also  $\gamma$  nach Bogenlänge parametrisiert, und sei  $\bar{\gamma}(t) = \gamma(c+t)$ , dann sieht man leicht, dass für die zugehörigen Frenet-Krümmungen

$$\bar{\kappa}(t) = \kappa(c+t)$$

gilt. Wir sehen bald, dass die Frenet-Krümmungen in einem gewissen Sinn ein vollständiges Invariantensystem für Frenet-Kurven bilden, d.h., dass sie die Frenet-Kurven bereits bis auf Isometrie festlegen.

- 2.25. BEISPIEL. (1) Ein Kreis vom Radius  $r$  in der Ebene  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  wird gegeben durch  $t \mapsto r e^{it}$ . Im zweidimensionalen Fall gibt es nur eine Frenet-Krümmung. Um sie zu berechnen, betrachten wir die Bogenlängenparametrisierung

$$\gamma(t) = r e^{\frac{it}{r}}.$$

Wir berechnen also

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \dot{\gamma}(t) = i e^{\frac{it}{r}}, \\ e_2(t) &= i e_1(t) = -e^{\frac{it}{r}}, \\ \dot{e}_1(t) &= -\frac{1}{r} e^{\frac{it}{r}} = \kappa_1(t) e_2(t), \\ \dot{e}_2(t) &= -\frac{i}{r} e^{\frac{it}{r}} = -\kappa_1(t) e_1(t), \end{aligned}$$

die (Frenet-) Krümmung ist demnach  $\kappa = \kappa_1(t) = \frac{1}{r}$  für alle  $t$  — je größer der Kreis, desto kleiner seine Krümmung.

- (2) Eine Schraubenlinie im  $\mathbb{R}^3$  mit Radius  $r$  und Steigung  $\alpha$  wird gegeben durch

$$t \mapsto \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ rt \tan \alpha \end{pmatrix}.$$

Die Berechnung der Frenet-Basis und der Frenet-Krümmungen  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  ist eine Übung.

2.26. SATZ (Hauptsatz der Kurventheorie). Sei  $k \geq n$ , seien Funktionen  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2}: I \rightarrow (0, \infty)$  und  $\kappa_{n-1}: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\kappa_i \in \mathcal{C}^{k-i-1}(I)$ , eine orientierte Orthonormalbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  von  $\mathbb{R}^n$ ,  $p \in \mathbb{R}^n$  und  $t_0 \in I$  gegeben, dann existiert genau eine  $\mathcal{C}^k$ -Frenet-Kurve mit Bogenlängenparametrisierung  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\gamma(t_0) = p$ , deren Frenet-Krümmungen gerade  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$  und deren Frenet- $n$ -Bein an der Stelle  $t_0$  genau  $(e_1, \dots, e_n)$  ist.

BEWEIS. Zur Existenz von  $\gamma$  benutzen wir, dass die Frenet-Differentialgleichungen ein lineares Differentialgleichungssystem in  $n^2$  Veränderlichen mit  $\mathcal{C}^{k-n}$ -Koeffizienten bilden. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert genau eine  $\mathcal{C}^{k-n+1}$ -Lösung  $(e_1, \dots, e_n): I \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  mit den gegebenen Anfangswerten. Durch Induktion über  $j$  folgern wir aus den Frenet-Gleichungen, dass  $e_i \in \mathcal{C}^{k-n+j}(I, \mathbb{R}^n)$  für  $i \leq n-j$ .

Als nächstes überlegen wir uns, dass

$$\frac{d}{dt} \langle e_i, e_j \rangle = \langle \dot{e}_i, e_j \rangle + \langle e_i, \dot{e}_j \rangle = 0,$$

so dass  $(e_1(t), \dots, e_n(t))$  für alle  $t \in I$  eine Orthonormalbasis ist, und aus Stetigkeitsgründen auch positiv orientiert.

Wir konstruieren jetzt die Kurve

$$\gamma(t) := p + \int_{t_0}^t e_1(s) ds,$$

so dass  $\dot{\gamma}(t) = e_1(t)$  für alle  $t \in I$ . Insbesondere ist  $\gamma \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$  nach Bogenlänge parametrisiert. Aus den Frenet-Gleichungen folgt induktiv, dass

$$\gamma^{(i)} = e_1^{(i-1)} \in \text{span}\{e_1, \dots, e_i\} \quad \text{und} \quad \langle \gamma^{(i)}, e_i \rangle > 0$$

für  $i = 1, \dots, n-1$ . Somit ist  $(e_1(t), \dots, e_n(t))$  das begleitende  $n$ -Bein von  $\gamma$ , und  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$  sind (wie gefordert) die Frenet-Krümmungen von  $\gamma$ .

Nun zur Eindeutigkeit. Seien  $\gamma_1, \gamma_2: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  zwei Bogenlängenparametrisierungen von Frenet-Kurven mit den vorgegebenen Frenet-Krümmungen und Anfangswerten für  $\gamma$  und das Frenet- $n$ -Bein an der Stelle  $t_0$ . Da die beiden Frenet- $n$ -Beine dieselben Differentialgleichungen erfüllen, stimmen sie auf ganz  $I$  überein. Aus  $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$  folgt, dass dann auch die Parametrisierungen und damit insbesondere die zugehörigen Frenet-Kurven übereinstimmen.  $\square$

**2.27. FOLGERUNG.** *Seien  $\gamma, \bar{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  zwei nach Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurven, deren Frenet-Krümmungen übereinstimmen. Dann existiert eine orientierungserhaltende Euklidische Isometrie  $g \in E(n)$ , so dass  $\bar{\gamma} = g \circ \gamma$ .*

**BEWEIS.** Seien  $(e_1, \dots, e_n)$  und  $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n): I \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  die Frenet- $n$ -Beine der zwei Kurven. Sei  $t \in I$ , dann gibt es eine orthogonale Matrix  $A \in SO(n)$ , so dass  $\bar{e}_i(t) = A \cdot e_i(t)$  für  $i = 1, \dots, n$ . Setze  $v = \bar{\gamma}(t) - A \cdot \gamma(t)$  und  $g = (A, v) \in SO(n) \times \mathbb{R}^n$ , dann haben  $g \circ \gamma$  und  $\bar{\gamma}$  bei  $t$  den gleichen Wert und das gleiche Frenet- $n$ -Bein. Aus Satz 2.26 folgt  $\bar{\gamma} = g \circ \gamma$ .  $\square$

**2.28. BEMERKUNG.** In der Konstruktion von  $\gamma$  im Beweis von Satz 2.26 wurde nicht benutzt, dass  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2}$  positiv sind. In der Tat lässt sich  $\gamma$  für beliebige hinreichend oft differenzierbare Vorgaben von  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}: I \rightarrow \mathbb{R}$  eindeutig konstruieren. Die  $\kappa_i$  sind nun aber keine geometrischen Invarianten mehr. Sei etwa  $\kappa_i = 0$  auf einem Teilintervall  $J \subset I$  für eine Kurve  $\gamma$ , wobei  $i \leq n-2$ . Dann lässt sich der Vektor  $e_{i+1}$  in Satz 2.22 auf dem Inneren von  $J$  nicht mehr eindeutig bestimmen. Als Resultat hängen die Vektoren  $e_{i+2}, \dots, e_n$  und die höheren Krümmungen  $\kappa_j$  für  $j > i$  auf dem Inneren von  $J$  nicht mehr nur von  $\gamma$ , sondern auch von der Wahl von  $e_{i+1}|_J$  ab.

### 2.3. Ebene Kurven

Wir betrachten in diesem Kapitel Kurven in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ , die wir nach Bedarf gern mit den komplexen Zahlen identifizieren wollen. Nach Bemerkung 2.21 ist ein reguläre  $C^2$ -Kurve in der Ebene bereits eine Frenet-Kurve, und nach Folgerung 2.27 ist eine solche Kurve durch Angabe ihrer Krümmung  $\kappa = \kappa_1$  in Abhängigkeit von einem Bogenlängenparameter bereits bis auf orientierungserhaltende Isometrie eindeutig bestimmt. Wir wollen also die Krümmung einer ebenen Kurve besser verstehen, und dazu führen wir die Begriffe „Schmiegekreis“, „Brennpunkt“ und „Evolute“ ein.

2.29. PROPOSITION. Sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine nach Bogenlänge parametrisierte reguläre  $C^2$ -Kurve mit Frenet- $n$ -Bein  $e_1, e_2: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  und Krümmung  $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$ , und sei  $s_0 \in I$ .

(1) Die Tangente

$$T = \{ \gamma(s_0) + t \dot{\gamma}(s_0) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

berührt  $\gamma$  bei  $s_0$  von erster Ordnung, und von zweiter Ordnung genau dann, wenn  $\kappa(s_0) = 0$ .

(2) Falls  $\kappa(s_0) \neq 0$ , so existiert genau ein Kreis, der  $\gamma$  bei  $s_0$  von zweiter Ordnung berührt, dieser hat Mittelpunkt  $\gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} e_2(s_0)$  und Radius  $\frac{1}{|\kappa(s_0)|}$ .

BEWEIS. Zu (1) betrachte den (gerichteten) Abstand von  $\gamma(s)$  zu  $T$ , dieser wird gegeben durch

$$d(s) = d(\gamma(s), T) = \langle \gamma(s) - \gamma(s_0), e_2(s_0) \rangle,$$

er verschwindet insbesondere für  $s = s_0$ . Die Kurve  $\gamma$  berührt  $T$  von erster Ordnung genau dann, wenn  $d(s_0) = \dot{d}(s_0) = 0$ , und von zweiter Ordnung genau dann, wenn außerdem  $\ddot{d}(s_0) \neq 0$ . Wir berechnen

$$\dot{d}(s) = \langle e_1(s), e_2(s_0) \rangle \quad \text{und} \quad \ddot{d}(s) = \langle \kappa(s) e_2(s), e_2(s_0) \rangle.$$

Wir haben also eine Berührung erster Ordnung mit der Tangente für jede Kurve, und eine Berührung zweiter Ordnung genau dann, wenn  $\kappa(s_0) = 0$ .

Zu (2) sei ein Kreis  $K$  mit Mittelpunkt  $p$  und Radius  $r$  gegeben, dann wird der (gerichtete) Abstand von  $\gamma(s)$  zu diesem Kreis gegeben durch

$$d(s) = d(\gamma(s), p) - r.$$

Es gilt  $d(s_0) = 0$  genau dann, wenn  $d(\gamma(s_0), p) = r$ . Wir berechnen die ersten zwei Ableitungen

$$\begin{aligned} \dot{d}(s) &= \frac{d}{ds} \sqrt{\langle \gamma(s) - p, \gamma(s) - p \rangle} = \frac{\langle \dot{\gamma}(s), \gamma(s) - p \rangle}{d(s) + r} = \frac{\langle e_1(s), \gamma(s) - p \rangle}{d(s) + r}, \\ \ddot{d}(s) &= \frac{\|e_1(s)\|^2 + \langle \dot{e}_1(s), \gamma(s) - p \rangle}{d(s) + r} - \frac{\langle e_1(s), \gamma(s) - p \rangle^2}{(d(s) + r)^3} \\ &= \frac{1 - \kappa(s) \langle e_2(s), p - \gamma(s) \rangle}{d(s) + r} - \frac{\langle e_1(s), \gamma(s) - p \rangle^2}{(d(s) + r)^3}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir eine Berührung erster Ordnung bei  $s_0$ , wenn  $p = \gamma(s_0) \pm r e_2(s_0)$  gilt. Dann verschwindet der letzte Term im Ausdruck für  $\ddot{d}(s_0)$ , und wir erhalten eine Berührung zweiter Ordnung genau dann, wenn  $p = \gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} e_2(s_0)$  und  $r = \frac{1}{|\kappa(s_0)|}$ .  $\square$

2.30. DEFINITION. Sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Bogenlängenparametrisierung einer regulären  $\mathcal{C}^2$ -Kurve mit  $\kappa(s_0) \neq 0$ , dann heißt der in Proposition 2.29 konstruierte Kreis der *Schmiegekreis* an  $\gamma$  in  $s_0$ , sein Mittelpunkt heißt der *Brennpunkt*. Wenn  $\kappa \neq 0$  auf ganz  $I$  gilt, heißt die Kurve der Brennpunkte die *Evolute* von  $\gamma$ .

Beachte: die Brennpunkte einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel sind nicht die Brennpunkte im üblichen Sinn. Die physikalisch richtige Anschauung zum obigen Begriff ist folgende: Wenn die Kurve in senkrechter Richtung Energie abstrahlt, dann wird diese entlang der Brennpunkte gebündelt.

2.31. BEMERKUNG. Da das Frenet-2-Bein und die Krümmung geometrische Invarianten gerichteter Kurven sind, sind Schmiegekreis, Brennpunkt und Evolute ebenfalls geometrische Invarianten gerichteter Kurven. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass diese Invarianten (im Gegensatz zu Krümmung und Frenet-Zweibein) nicht von der Richtung (Orientierung) der Kurve abhängen. Man beachte, dass die Evolute einer regulären  $\mathcal{C}^k$ -Kurve im allgemeinen zwar  $\mathcal{C}^{k-2}$ , aber nicht regulär sein wird, beispielsweise ist die Evolute eines Kreises eine konstante Kurve.

2.32. BEISPIEL. Die *Schleppkurve* oder *Traktrix*  $\gamma$  kommt dadurch zustande, dass man einen schweren Gegenstand an einem Seil der Länge 1 zieht, wobei man selbst entlang der  $x$ -Achse in Richtung  $\infty$  läuft. Man beginnt bei  $s = 0$  im Punkt  $\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Wenn man  $\gamma$  nach Bogenlänge parametrisiert, erhält man also

$$\gamma(s) + \dot{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Seien  $x, y$  die Koordinaten von  $\gamma$ , dann folgt insbesondere  $\dot{y}(s) = -y(s)$ , also  $y(s) = e^{-s}$ . Aus  $\|\dot{\gamma}\| = 1$  folgt  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$ , also

$$x(s) = \int_0^s \dot{x}(t) dt = \int_0^s \sqrt{1 - e^{-2t}} dt.$$

Substitution  $t = -\log \sin \alpha$  mit  $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  und  $\alpha(t) = \pi - \arcsin e^{-t}$  liefert

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha(s)} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \left( -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) d\alpha \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha(s)} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} d\alpha = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha(s)} \left( \frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) d\alpha \\ &= \log \tan \frac{\alpha(s)}{2} + \cos(\alpha(s)) = -s - \log(1 - \sqrt{1 - e^{-2s}}) - \sqrt{1 - e^{-2s}}, \end{aligned}$$

denn es gilt

$$\begin{aligned}\log \tan \frac{\alpha(s)}{2} &= \log \frac{2 \cos \frac{\alpha(s)}{2} \sin \frac{\alpha(s)}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha(s)}{2}} = \log \frac{\sin \alpha(s)}{1 + \cos \alpha(s)} \\ &= -s - \log(1 - \sqrt{1 - e^{-2s}}), \\ \frac{d}{d\alpha} \log \tan \frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin \alpha}.\end{aligned}$$

Als Kurve in  $\alpha$  lässt sich die Traktrix glatt auf  $(0, \pi)$  fortsetzen, ist jedoch bei  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  nicht regulär.

Wir berechnen jetzt die Evolute von  $\gamma$ . Zunächst erhalten wir

$$\begin{aligned}e_1(s) &= \begin{pmatrix} \sqrt{1 - e^{-2s}} \\ -e^{-s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha(s) \\ -\sin \alpha(s) \end{pmatrix}, \\ e_2(s) &= \begin{pmatrix} e^{-s} \\ \sqrt{1 - e^{-2s}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \alpha(s) \\ -\cos \alpha(s) \end{pmatrix}, \\ \dot{e}_1(s) &= \begin{pmatrix} \frac{e^{-2s}}{\sqrt{1 - e^{-2s}}} \\ e^{-s} \end{pmatrix} = \frac{e^{-s}}{\sqrt{1 - e^{-2s}}} e_2(s) = -\tan \alpha(s) e_2(s).\end{aligned}$$

Die Evolute ist also die Kurve  $\beta: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\beta(s) = \begin{pmatrix} \log \tan \frac{\alpha(s)}{2} + \cos \alpha(s) \\ \sin \alpha(s) \end{pmatrix} - \frac{1}{\tan \alpha(s)} \begin{pmatrix} \sin \alpha(s) \\ -\cos \alpha(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log \tan \frac{\alpha(s)}{2} \\ \frac{1}{\sin \alpha(s)} \end{pmatrix}$$

Für den nächsten Schritt benutze

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \left( \tan \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} \right) = \cosh \left( \log \tan \frac{\alpha}{2} \right).$$

Wir substituieren also  $t = \log \tan \frac{\alpha(s)}{2}$  und erhalten die Umparametrisierung

$$\bar{\beta}(t) = \beta(2 \arctan e^{\alpha(s)}) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh t \end{pmatrix}.$$

Diese Kurve heißt *Kettenlinie*, da sie die Form einer hängenden Kette beschreibt. Sowohl die Traktrix als auch die Kettenlinie erzeugen interessante Rotationsflächen, wie wir später sehen werden.

**2.33. BEMERKUNG.** Sei  $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  nach Bogenlänge parametrisiert. Ein Punkt auf einer Tangente, die entlang  $\beta$  abrollt, beschreibt eine Kurve

$$\gamma(s) = \beta(s) - (s - s_0) \dot{\beta}(s),$$

die *Evolute* an  $\gamma$  mit Startpunkt  $s_0$ . Die Evolute ist eng mit der Evolute verwandt (Übung):

- (1) jede Kurve ist eine Evolute ihrer Evolute (sofern wohldefiniert);
- (2) jede Kurve ist Evolute ihrer Evoluten (sofern wohldefiniert);

Man beachte, dass die Evolute und die Evoluten einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve im allgemeinen nicht nach Bogenlänge parametrisiert sind.



Wir wollen jetzt geschlossene Kurven betrachten.

2.34. DEFINITION. Eine  $\mathcal{C}^k$ -parametrisierte Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt  $\mathcal{C}^k$ -geschlossen, wenn  $\gamma(a) = \gamma(b)$  und  $\gamma^{(j)}(a) = \gamma^{(j)}(b)$  für alle  $1 \leq j \leq k$ . Die Kurve  $\gamma$  heißt *einfach  $\mathcal{C}^k$ -geschlossen*, wenn sie geschlossen ist und  $\gamma(t) \neq \gamma(t')$  für alle  $t, t' \in [a, b]$  mit  $t \neq t'$ .

Eine Kurve heißt (*einfach*) *geschlossen*, wenn sie eine (einfach) geschlossene Parametrisierung besitzt. Die *Länge* einer geschlossenen parametrisierten Kurve  $\gamma$  mit Periode  $T$  ist  $L(\gamma) := L(\gamma|_{[a, b]})$ .

Eine parametrisierte Kurve  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *periodisch*, wenn es  $T > 0$  mit  $\gamma(t + T) = \gamma(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  gibt; in diesem Fall heißt  $T$  eine *Periode* der Parametrisierung  $\gamma$ .

2.35. BEMERKUNG. Wenn  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  periodisch mit Periode  $T$  ist, sind auch  $2T, 3T$  usw. Perioden von  $\gamma$ . Wenn  $\gamma$  periodisch und nicht konstant ist, existiert immer eine minimale Periode; das kann man beispielsweise mit dem Euklidischen Algorithmus beweisen.

Wenn  $T$  eine Periode von  $\gamma$  ist, dann ist die Einschränkung  $\gamma|_{[a, a+T]}$  eine  $\mathcal{C}^k$ -geschlossene Kurve. Umgekehrt lässt sich jede  $\mathcal{C}^k$ -geschlossene Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  zu einer periodischen Kurve  $\bar{\gamma}$  mit Periode  $T = b - a$  fortsetzen, wobei

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(t - kT) \quad \text{falls } t \in [a + kT, a + (k + 1)T].$$

Eine geschlossene Kurve ist *einfach geschlossen*, wenn sie keine Selbstschnitte besitzt. In diesem Fall ist  $b - a$  die minimale Periode von  $\gamma$ . Umgekehrt kann aber eine periodische Kurve auch Selbstschnitte haben.

2.36. DEFINITION. Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine  $\mathcal{C}^2$ -geschlossene Bogenlängenparametrisierung einer gerichteten Kurve, dann heißt

$$n_\gamma := \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa(s) ds.$$

die *Umlaufszahl* der Kurve.

2.37. BEMERKUNG. Die Umlaufzahl ist eine geometrische Invariante, denn sei  $\bar{\gamma}(t) = \gamma(c + t)$  eine gerichtete Umparametrisierung nach Bogenlänge, dann folgt

$$n_{\bar{\gamma}} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \bar{\kappa}(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa(c + s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{a+c}^{b+c} \kappa(s) ds = n_\gamma.$$

Sei  $g \in E(2)$  eine orientierungserhaltende Isometrie, dann ist  $\kappa$  auch die Krümmung der Kurve  $g \circ \gamma$ , siehe Folgerung 2.27, also hat  $g \circ \gamma$  die gleiche Umlaufzahl wie  $\gamma$ .

Wenn wir die Richtung umkehren oder  $g \in E(2)$  orientierungsumkehrend wählen, ändert die Krümmung ihr Vorzeichen (Übung), und damit auch die Umlaufzahl.

2.38. SATZ (Hopfscher Umlaufsatz). *Für jede  $\mathcal{C}^2$ -geschlossene reguläre Kurve  $\gamma$  gilt  $n_\gamma \in \mathbb{Z}$ . Falls  $\gamma$  einfach geschlossen ist, gilt  $n_\gamma = \pm 1$ .*

BEWEIS. Wir identifizieren wieder  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ . Die Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei nach Bogenlänge parametrisiert. Dann existiert eine reelle Zahl  $\alpha_0$ , so dass  $\dot{\gamma}(a) = e^{i\alpha_0}$ . Sei  $e_1, e_2: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  das Frenet-Zweibein von  $\gamma$ . Setze

$$\alpha(s) = \alpha_0 + \int_a^s \kappa(t) dt ,$$

dann gilt  $\dot{\gamma}(s) = e^{i\alpha(s)}$  für alle  $s \in [a, b]$ , denn

$$\frac{d}{ds} \frac{\dot{\gamma}(s)}{e^{i\alpha(s)}} = \frac{\kappa(s) e_2(s) - i\dot{\alpha}(s) e_1(s)}{e^{i\alpha(s)}} = \frac{\kappa(s) - \kappa(s)}{e^{i\alpha(s)}} e_2(s) = 0 .$$

Eine solche Funktion  $\alpha$  heißt auch *Winkel* zur Abbildung  $e_1: [a, b] \rightarrow S^1$ , da sie den gerichteten Winkel zwischen der  $x$ -Achse und  $e_1$  angibt. Insbesondere folgt  $\alpha(b) = \alpha(a) + 2\pi n_\gamma$  mit  $n_\gamma \in \mathbb{Z}$ .

Sei jetzt  $\gamma$  einfach geschlossen, dann ergänzen wir  $\gamma$  zu einer periodischen Kurve  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit Periode  $T = L(\gamma) = b - a$  wie in Bemerkung 2.35. Da  $[0, T]$  kompakt ist, nimmt der Imaginärteil von  $\gamma$  für  $c \in [0, T]$  sein Minimum an, insbesondere gilt  $\dot{\gamma}(c) = \pm 1 \in \mathbb{C}$ . Für eine geeignete Umparametrisierung  $\bar{\gamma}(s) = \gamma(c \pm s)$  erreichen wir, dass das für  $s = 0$  passiert, und dass  $\dot{\bar{\gamma}}(0) = 1$ . Eine solche Parametertransformation ändert nach Bemerkung 2.37 im schlimmsten Fall das Vorzeichen von  $n_\gamma$ .

Setze

$$\Omega := \{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s \leq t \leq T \}$$

und definiere  $e: \Omega \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$  durch

$$e(s, t) = \begin{cases} \frac{\bar{\gamma}(t) - \bar{\gamma}(s)}{\|\bar{\gamma}(t) - \bar{\gamma}(s)\|} & \text{für } s < t \text{ und } (s, t) \neq (0, T), \\ \dot{\bar{\gamma}}(s) & \text{für } s = t, \text{ und} \\ -\dot{\bar{\gamma}}(0) = -1 & \text{für } s = 0, t = T, \end{cases}$$

dann ist  $e$  auf ganz  $\Omega$  stetig, und im Innern sogar zweimal stetig differenzierbar. Die obige Definition ist jedoch nur möglich, wenn  $\bar{\gamma}$  einfach geschlossen ist, also keine Selbstschnitte hat. Analog zur obigen Definition der Winkelfunktion  $\alpha$  wählen wir  $\alpha(0, 0) = 0$  (da  $\dot{\bar{\gamma}}(0) = 1$ ) und setzen

$$\alpha(s, t) = \int_0^t \frac{1}{ie(0, y)} \frac{\partial e(0, y)}{\partial y} dy + \int_0^s \frac{1}{ie(x, t)} \frac{\partial e(x, t)}{\partial x} dx .$$

Wie oben folgt  $e(s, t) = e^{i\alpha(s, t)}$ , denn

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{e(s, t)}{e^{i\alpha(s, t)}} = \frac{1}{e^{i\alpha(s, t)}} \left( \frac{\partial e(s, t)}{\partial s} - ie(s, t) \frac{\partial \alpha(s, t)}{\partial s} \right) = 0 ,$$

und entsprechend für die Ableitung nach  $t$ . Insbesondere ist  $\alpha(s) = \alpha(s, s)$  ein Winkel für  $e$  wie oben.

Nach Wahl der Parametrisierung gilt  $\text{Im } e(0, t) \geq 0$  und  $\text{Im } e(s, T) \leq 0$  für alle  $s, t \in [0, T]$ . Es folgt  $\alpha(0, t) \in [0, \pi]$ ,  $\alpha(0, T) = \pi$  und  $\alpha(s, T) \in [\pi, 2\pi]$  für alle  $s, t \in [0, T]$ , daher gilt  $\alpha(T, T) = 2\pi$ . Wir schließen also, dass

$$n_{\bar{\gamma}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \frac{1}{i\dot{\bar{\gamma}}(s)} \frac{d\dot{\bar{\gamma}}(s)}{ds} ds = \frac{1}{2\pi} (\alpha(T, T) - \alpha(0, 0)) = 1 .$$

Für die ursprüngliche Kurve gilt also  $n_\gamma = \pm 1$ . □

2.39. BEISPIEL. Betrachte die folgenden drei Kurven:

- (1) eine Ellipse,
- (2) eine liegende Acht,
- (3) eine Kurve, die zweimal 0 umläuft.

Die erste Kurve hat Umlaufzahl 1, die zweite 0, die dritte 2, und die letzten beiden sind nicht einfach geschlossen.

Wir lernen jetzt konvexe Kurven kennen. Jede einfach geschlossene Kurve berandet ein Gebiet im  $\mathbb{R}^2$ . Das folgt aus dem Jordanschen Kurvensatz der algebraischen Topologie, den wir hier aber nicht beweisen wollen.

2.40. DEFINITION. Eine einfach  $\mathcal{C}^1$ -geschlossene gerichtete Kurve heißt *konvex* (*konkav*), wenn für eine Bogenlängenparametrisierung  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit Frenet-Zweibein  $(e_1, e_2)$  und alle  $s, t \in [a, b]$  gilt, dass

$$\langle \gamma(s) - \gamma(t), e_2(t) \rangle \geq 0 \quad (\text{bzw. } \leq 0).$$

Mit anderen Worten verläuft eine konvexe oder konkave Kurve immer im abgeschlossenen Halbraum auf der einen Seite jeder ihrer Tangenten. Man kann zeigen, dass eine konvexe Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  das Gebiet

$$\begin{aligned} \Omega &= \{ p \in \mathbb{R}^2 \mid \langle p - \gamma(s), e_2(s) \rangle > 0 \text{ für alle } s \in [a, b] \} \\ &= \bigcap_{s \in [a, b]} \{ p \in \mathbb{R}^2 \mid \langle p - \gamma(s), e_2(s) \rangle > 0 \} \end{aligned}$$

umläuft. Als Durchschnitt konvexer Halbräume ist  $\Omega$  selbst ebenfalls konvex. Ist umgekehrt eine einfach geschlossene  $\mathcal{C}^1$ -Kurve  $\gamma$  Rand eines konvexen Gebiets, so ist  $\gamma$  ebenfalls konvex oder konkav, je nachdem, ob  $n_\gamma = 1$  oder  $n_\gamma = -1$ . Das wollen wir hier nicht beweisen. Stattdessen stellen wir eine Beziehung zwischen Konvexität und dem Vorzeichen der Krümmung her — ähnlich zur Beziehung zwischen Konvexität und dem Vorzeichen der zweiten Ableitung aus der Analysis.

2.41. SATZ. *Eine einfach  $\mathcal{C}^2$ -geschlossene, ebene Kurve ist genau dann konvex (konkav), wenn ihre Krümmung überall nicht-negativ (nicht-positiv) ist.*

BEWEIS. Wir betrachten den Fall einer konvexen Kurve; für konkave Kurven verläuft der Beweis analog. Es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Bogenlängenparametrisierung der gegebenen Kurve, die wir bei Bedarf periodisch auf  $\mathbb{R}$  fortsetzen mit Periode  $T = L(\gamma) = b - a$ .

Zu „ $\implies$ “ überlegen wir uns, dass für festes  $t$  die Funktion  $d: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$d(s) = \langle \gamma(s) - \gamma(t), e_2(t) \rangle$$

bei  $s = t$  ein Minimum hat. Mit der Berechnung von  $\ddot{d}(s)$  im Beweis von Proposition 2.29 (1) folgt

$$\kappa(t) = \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=t} \langle \gamma(s) - \gamma(t), e_2(t) \rangle \geq 0.$$

Wir beweisen „ $\Leftarrow$ “ indirekt. Es gelte also  $\kappa \geq 0$ , aber  $\gamma$  sei nicht konvex. Dann existiert ein  $t \in [a, b]$ , so dass die obige Funktion  $d$  negative Werte annimmt. Auf der anderen Seite nimmt sie wegen  $\kappa \geq 0$  auch positive Werte an. Denn wir finden ein  $s > t$ , so dass  $d(s) \neq 0$  und  $\langle e_2(r), e_2(t) \rangle > 0$  für alle  $r \in [t, s]$  wegen der Stetigkeit von  $e_2$ , und da  $e_2$  auf jedem Intervall konstant ist, auf dem  $d$  identisch verschwindet. Wegen  $d(t) = \dot{d}(t) = 0$  liefert zweimaliges Anwenden des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass

$$d(s) = \dot{d}(s_1) \cdot (s - t) = \ddot{d}(s_2) \cdot (s_1 - t) \cdot (s - t) > 0$$

mit  $t < s_2 < s_1 < s$ , da  $s - t > 0$ ,  $s_1 - t > 0$ ,  $d(s) \neq 0$  und

$$\ddot{d}(s_2) = \langle \ddot{\gamma}(s_2), e_2(t) \rangle = \kappa(s_2) \langle e_2(s_2), e_2(t) \rangle \geq 0 .$$

Wir können also  $t'$ ,  $t''$  so wählen, dass  $d$  bei  $t'$  das Minimum und bei  $t''$  das Maximum annimmt. Es folgt

$$\langle \dot{\gamma}(t'), e_2(t) \rangle = \dot{d}(t') = 0 = \dot{d}(t'') = \langle \dot{\gamma}(t''), e_2(t) \rangle .$$

Also gilt  $\dot{\gamma}(t) = \pm \dot{\gamma}(t') = \pm \dot{\gamma}(t'')$ . An mindestens zwei dieser drei Stellen  $t$ ,  $t'$ ,  $t''$  hat also  $\gamma$  das gleiche Frenet-Zweibein, nennen wir sie  $v$ ,  $w$  mit  $a \leq v < w < b$ . Es gilt

$$\langle \gamma(v) - \gamma(w), e_2(v) \rangle = \pm(d(v) - d(w)) \neq 0 .$$

Sei jetzt  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Winkelfunktion für  $e_1 = \dot{\gamma}$  wie im Beweis des Hopfschen Umlaufsatzes 2.38. Dann steigt  $\alpha$  monoton, da

$$\dot{\alpha}(s) = \kappa(s) \geq 0 .$$

Es folgt  $\alpha(v) \leq \alpha(w) \leq \alpha(v + T)$ . Wäre  $\alpha(v) = \alpha(w)$ , so wäre  $\alpha|_{[v, w]}$  als monotone Funktion konstant. Es folgte  $\dot{\gamma}(t) = e_1(v)$  für alle  $t \in [v, w]$ , also

$$\langle \gamma(v) - \gamma(w), e_2(v) \rangle = \int_v^w \langle \dot{\gamma}(t), e_2(v) \rangle dt = \int_v^w \langle e_1(v), e_2(v) \rangle dt = 0 ,$$

im Widerspruch zum obigen. Also gilt  $\alpha(v) < \alpha(w)$ , und aus dem gleichen Grund auch  $\alpha(w) < \alpha(v + T)$ .

Da  $\dot{\gamma}(v) = \dot{\gamma}(w)$ , folgt  $\alpha(w) = \alpha(v) + 2\pi k$  und  $\alpha(v + T) = \alpha(w) + 2\pi l$  mit  $k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , also  $2\pi n_\gamma = \alpha(v + T) - \alpha(v) \geq 4\pi$  im Widerspruch zum Hopfschen Umlaufsatz, wonach  $n_\gamma = \pm 1$ . Also folgt die Konvexität von  $\gamma$ .  $\square$

Wir wollen jetzt die isoperimetrische Ungleichung im  $\mathbb{R}^2$  formulieren und beweisen.

2.42. DEFINITION. Sei  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Gebiet, und seien  $x, y$  die Standardkoordinaten des  $\mathbb{R}^2$ , dann definieren wir die *Fläche* von  $\Omega$  als

$$A(\Omega) = \int_{\Omega} dx dy .$$

2.43. PROPOSITION. Sei  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  ein Gebiet, das von einer einfach geschlossenen gerichteten regulären Kurve mit Umlaufzahl 1 berandet wird, und sei

$$t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

eine Parametrisierung dieser Kurve mit Periode  $T$ , dann gilt

$$A(\Omega) = \int_0^T x(t) \dot{y}(t) dt = - \int_0^T \dot{x}(t) y(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T (x(t) \dot{y}(t) - \dot{x}(t) y(t)) dt .$$

Wir führen die Proposition auf den Satz von Stokes zurück. Ein anderer Beweis findet sich zum Beispiel im Buch [C] oder im Analysis II-Skript unter Beispiel 6.111.

BEWEIS. Wir verwenden den Satz von Stokes. Betrachte dazu die Differentialform  $\alpha = x dy$ , dann gilt  $d\alpha = dx dy$ , also

$$A(\Omega) = \int_{\Omega} d\alpha = \int_{\partial\Omega} \alpha .$$

Um die rechte Seite zu berechnen, benötigen wir eine Orientierung (Richtung) von  $\gamma$ , so dass Voranstellen der äußeren Normale eine positive Basis des  $\mathbb{R}^2$  liefert. In diesem Fall zeigt der zweite Frenet-Vektor  $e_2$  ins Innere von  $\Omega$ , und das entspricht gerade der Orientierung mit Umlaufzahl 1.

Nun ergibt sich das Integral als

$$\int_{\partial\Omega} \alpha = \int_0^T \alpha(\dot{\gamma}(t)) dt = \int_0^T x(t) \dot{y}(t) dt .$$

Die zweite Integraldarstellung ergibt sich daraus durch partielle Integration, die dritte durch Mittelung aus den ersten beiden.  $\square$

2.44. BEISPIEL. Es sei  $\gamma(t) = r e^{it}$  eine Parametrisierung eines Kreises vom Radius  $r$  mit Periode  $T = 2\pi$ , und  $\Omega = r D^2$  sei das umschlossene Gebiet. Wir erhalten

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r , \\ A(\Omega) &= \int_0^{2\pi} x(t) \dot{y}(t) dt = \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} r^2 \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \pi r^2 . \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also

$$A(\Omega) = \frac{1}{4\pi} L(\gamma)^2 .$$

Wir werden bald sehen, dass diese Gleichung nur für Kreise richtig ist.

2.45. SATZ (Isoperimetrische Ungleichung). Sei  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  ein Gebiet, das von einer einfach geschlossenen regulären  $C^1$ -Kurve  $\gamma$  berandet wird, dann gilt

$$A(\Omega) \leq \frac{1}{4\pi} L(\gamma)^2 ,$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\gamma$  einen Kreis beschreibt.

BEWEIS. Es sei wieder  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  nach Bogenlänge parametrisiert mit  $n_\gamma = 1$ , Periode  $L = L(\gamma)$  und

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}.$$

Setze  $x_+ = \max_{s \in \mathbb{R}} x(s) = x(s_+)$ ,  $x_- = \min_{s \in \mathbb{R}} x(s) = x(s_-)$  und  $x_0 = \frac{x_+ + x_-}{2}$ . Nach einer Verschiebung in  $x$ -Richtung gelte  $x_0 = 0$ , und nach Umparametrisierung sei  $s_+ = 0$  und  $0 < s_- < L$ . Setze  $r = x_+ - x_0 = x_0 - x_-$ . Wir parametrisieren den Kreis um 0 mit Radius  $r$  durch

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \bar{x}(t) = x(t)$$

und 
$$\bar{y}(t) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x(t)^2} & \text{für } t \in [0, s_-], \text{ und} \\ -\sqrt{r^2 - x(t)^2} & \text{für } t \in [s_-, L]. \end{cases}$$

Wir beobachten:

- (1) die Parametrisierung  $\alpha$  ist stetig und von der Klasse  $\mathcal{C}^1$ , eventuell mit Ausnahme der Stellen, wo  $\alpha$  die  $x$ -Achse trifft;
- (2) die Kurve  $\alpha$  kann vor- und zurücklaufen;
- (3) dennoch gilt

$$\pi r^2 = A(rD^2) = - \int_0^L \dot{x}(t) \bar{y}(t) dt,$$

da die mehrfach durchlaufenen Teile der Kurve nichts zum Integral beitragen.

Mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung finden wir

$$\begin{aligned} A(\Omega) + \pi r^2 &= \int_0^L (x(t) \dot{y}(t) - \dot{x}(t) \bar{y}(t)) dt = \int_0^L \left\langle \begin{pmatrix} x(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &\leq \int_0^L \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix} \right\|}_{=r} \cdot \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix} \right\|}_{=1} dt = Lr. \end{aligned}$$

Nun ist das geometrische Mittel zweier positiver Zahlen höchstens so groß wie das arithmetische, und Gleichheit gilt nur bei Gleichheit der Zahlen. Es folgt

$$\sqrt{A(\Omega) \pi r^2} \leq \frac{A(\Omega) + \pi r^2}{2} \leq \frac{L(\gamma) r}{2},$$

woraus sich durch Quadrieren die isoperimetrische Ungleichung ergibt.

Im Falle der Gleichheit folgt  $A(\Omega) = \pi r^2$ , und daher  $L(\gamma) = 2\pi r$ . Außerdem gilt Gleichheit in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für alle  $t$ , und es folgt

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix} = \left\| \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix} \right\| \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

nach Konstruktion, insbesondere  $x(t) = r \dot{y}(t)$ . Wir rotieren die gesamte Situation um  $\frac{\pi}{2}$  und wiederholen unsere Überlegungen. Da nach wie vor Gleichheit

in der isoperimetrischen Ungleichung gilt, erhalten wir (nach einer weiteren Verschiebung) analog  $y(t) = -r \dot{x}(t)$  mit  $r = \frac{L(\gamma)}{2\pi}$  wie oben. Insbesondere folgt

$$\|\gamma(t)\|^2 = x(t)^2 + y(t)^2 = r^2 (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2) = r^2 ,$$

und  $\gamma$  beschreibt einen Kreis.  $\square$

## 2.4. Kurven im $\mathbb{R}^3$

Eine reguläre Kurve  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist genau dann eine Frenet-Kurve, wenn sie von der Klasse  $\mathcal{C}^3$  ist und die Krümmung  $\kappa_1$  nirgends verschwindet, d.h., wenn  $\ddot{\gamma}$  stets von  $\dot{\gamma}$  linear unabhängig ist.

2.46. DEFINITION. Sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte reguläre  $\mathcal{C}^2$ -Kurve, dann heißt  $\kappa = \|\ddot{\gamma}\|: I \rightarrow (0, \infty)$  die *Krümmung* von  $\gamma$ .

Sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Frenet-Kurve, dann heißt  $\tau = \kappa_2: I \rightarrow \mathbb{R}$  die *Windung* (*Torsion*) von  $\gamma$ .

2.47. BEMERKUNG. Man beachte, dass die Krümmung nun stets positiv gemessen wird. Sei etwa  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , und sei  $\kappa_{\mathbb{R}^k}$  die Krümmung von  $\gamma$  als Kurve im  $\mathbb{R}^k$ , dann gilt

$$\kappa_{\mathbb{R}^3} = |\kappa_{\mathbb{R}^2}| .$$

Falls  $\gamma$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve mit begleitendem Dreibein  $(e_1, e_2, e_3)$  ist, gilt  $\ddot{\gamma} = \dot{e}_1 = \kappa_1 \cdot e_2$ , also stimmen  $\kappa$  und  $\kappa_1$  für Frenet-Kurven überein. Der folgenden Satz gilt aber bereits für reguläre  $\mathcal{C}^2$ -Kurven.

2.48. SATZ (Fenchel). Sei  $n \geq 3$ , und sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine geschlossene, nach Bogenlänge parametrisierte  $\mathcal{C}^2$ -Kurve der Periode  $T$ , dann gilt

$$\int_a^b \kappa(s) ds \geq 2\pi ,$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\gamma$  in einem zweidimensionalen Unterraum verläuft und dort konvex ist.

BEWEIS. Wir behandeln hier zunächst den Fall von Raumkurven, also  $n = 3$ . Der folgende Beweis lässt sich mit geringen Modifikationen auf den allgemeinen Fall übertragen.

Da  $\gamma$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, gilt  $\|\dot{\gamma}\| = 1$ , und wir erhalten eine geschlossene Kurve  $\hat{\gamma}: [a, b] \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Es folgt

$$L(\hat{\gamma}) = \int_a^b \|\ddot{\gamma}(s)\| ds = \int_a^b \kappa(s) ds .$$

Zu zeigen ist also, dass  $L(\hat{\gamma}) \geq 2\pi$ , und dass Gleichheit nur gilt, wenn  $\gamma$  in einer Ebene verläuft und konvex ist. Man beachte aber, dass  $\hat{\gamma}$  im allgemeinen nicht regulär und schon gar nicht nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Als nächstes sei  $v \in S^2$  ein Einheitsvektor, dann folgt

$$\int_a^b \langle v, \dot{\gamma}(s) \rangle ds = \langle v, \gamma \rangle \Big|_a^b = 0 .$$

Folglich schneidet  $\dot{\gamma}$  den Großkreis  $v^\perp \cap S^2$ . Falls  $\dot{\gamma}$  ganz in einer Hemisphäre verläuft, falls also  $\langle v, \dot{\gamma} \rangle$  das Vorzeichen nicht wechselt, verläuft  $\dot{\gamma}$  bereits ganz auf diesem Großkreis. In diesem Fall liegt das Bild von  $\gamma$  in dem affinen Unterraum  $\gamma(0) + v^\perp \subset \mathbb{R}^3$ .

Wir bezeichnen den sphärischen Abstand aus Definition 1.20 mit  $d$ , also

$$d(p, q) = \arccos \langle p, q \rangle \quad \text{für alle } p, q \in S^2 .$$

Es folgt

$$d(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(t)) \leq L(\dot{\gamma}|_{[s,t]})$$

für alle  $s < t$ , und Gleichheit gilt nur, wenn  $\dot{\gamma}$  einen Großkreisbogen der Länge  $\leq \pi$  parametrisiert (Übung).

Betrachte jetzt zwei Punkte  $p = \dot{\gamma}(a)$  und  $q = \dot{\gamma}(t)$  mit  $a < t < b$ , so dass

$$L(\dot{\gamma}|_{[a,t]}) = L(\dot{\gamma}|_{[t,b]}) = \frac{1}{2} L(\dot{\gamma}) .$$

Falls  $p = -q$  gilt, folgt

$$L(\dot{\gamma}) = L(\dot{\gamma}|_{[a,t]}) + L(\dot{\gamma}|_{[t,b]}) \geq 2d(p, q) = 2\pi .$$

Falls Gleichheit gilt, besteht  $\dot{\gamma}$  aus zwei Großkreisbögen. Diese müssen einander gegenüberliegen, weil es ansonsten einen Vektor  $v \in S^2$  mit  $\langle v, \dot{\gamma} \rangle \geq 0$ , aber nicht überall  $\langle v, \dot{\gamma} \rangle = 0$  gäbe. Also verläuft  $\dot{\gamma}$  in einer Ebene  $E \subset \mathbb{R}^3$ , und somit  $\gamma$  in der affinen Ebene  $\gamma(0) + E \subset \mathbb{R}^3$ . Da sich  $\dot{\gamma}$  auf dem Großkreis  $E \cap S^2$  nicht vor und zurück bewegen kann, hat  $\kappa$  keinen Vorzeichenwechsel. Man kann sogar zeigen, dass  $\gamma$  einfach geschlossen ist, also ist  $\gamma$  nach Satz 2.41 konvex.

Es gelte also  $p \neq -q$ . In diesem Fall setze

$$v = \frac{p + q}{\|p + q\|} ,$$

dann liegen  $p$  und  $q$  auf der gleichen Seite des Großkreises  $K = v^\perp \cap S^2$  und sind gleich weit von ihm entfernt. Das „Spiegelbild“ von  $q$  an  $K$  ist dann der Punkt  $-p$ . Nach obiger Beobachtung trifft  $\dot{\gamma}$  den Großkreis  $K$  in einem Punkt  $r = \dot{\gamma}(u)$ , und es folgt

$$d(p, r) + d(q, r) = d(p, r) + d(-p, r) = \pi .$$

Wir nehmen an, dass  $0 < u < t$ , der andere Fall geht entsprechend, und schließen

$$\frac{1}{2} L(\dot{\gamma}) = L(\dot{\gamma}|_{[0,u]}) + L(\dot{\gamma}|_{[u,t]}) \geq d(p, r) + d(q, r) = \pi . \quad (2.3)$$

Nun zur Gleichheitsdiskussion (Beachte Fehler in [**K**]). Da für jeden Punkt  $r$  auf  $K$  die Ungleichung (2.3) gilt, sieht man leicht, dass  $\dot{\gamma}$  ganz in einer Hemisphäre von  $K$  verlaufen muss, wenn  $\frac{1}{2} L(\dot{\gamma}) = \pi$  gilt, aber im Widerspruch zu obiger Beobachtung liegen die Punkte  $p, q$  nicht auf  $K$ , im Fall  $p \neq -q$  kann also keine Gleichheit auftreten.



Nun zu  $n \geq 4$ . Der obige Beweis lässt sich auf diesen Fall übertragen, dabei wird aus dem Großkreis  $K$  allerdings eine  $(n-2)$ -dimensionale „Hypersphäre“. Bei der Gleichheitsdiskussion muss man jetzt allerdings alle Hypersphären mit den dazugehörigen Hemisphären zu Hilfe nehmen, die einen der beiden Großkreisbögen enthalten, um zu sehen, dass  $\dot{\gamma}$  in einer Ebene verläuft.  $\square$

2.49. BEMERKUNG. Wenn die Kurve  $\gamma$  einen echten Knoten im  $\mathbb{R}^3$  beschreibt, d.h., wenn man  $\gamma$  zusammen mit dem umgebenden Raum nicht in einen Kreis deformieren kann, gilt sogar

$$\int_0^T \kappa(s) ds \geq 4\pi .$$

Ein Beweis dazu findet sich im Buch [B].



## KAPITEL 3

### Die äußere Geometrie der Flächen

In diesem Kapitel betrachten wir Flächenstücke im Raum, also zweidimensionale Objekte in einem umgebenden  $\mathbb{R}^3$ . Alle geometrischen Größen in diesem Kapitel werden mit Hilfe des umgebenden Raumes definiert, daher die Bezeichnung „äußere Geometrie“. Im Gegensatz dazu betrachten wir im letzten Kapitel Flächen als selbständige zweidimensionale Objekte, und zeigen, wie sich manche der geometrischen Konzepte, die wir in diesem Kapitel entwickeln, einzig aus dem Begriff einer „Metrik“ auf der Fläche selbst ableiten lassen.

#### 3.1. Parametrisierte Flächenstücke

Wir haben uns in Abschnitt 2.2 an Untermannigfaltigkeiten erinnert und in Satz 2.19 gesehen, dass reguläre Kurven im  $\mathbb{R}^n$  lokal gerade eindimensionale Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  sind. Wir wollen später Flächen als zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^3$  auffassen. Für den Anfang ist es jedoch einfacher, sich Flächen wie Kurven als Bilder von Parametrisierungen vorzustellen. Das gibt uns außerdem die Möglichkeit, Flächen mit Selbstschnitten zu definieren.

Zur Motivation erinnern wir uns an den Begriff einer Untermannigfaltigkeit.

**3.1. DEFINITION.** Sei  $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ,  $m \leq n \in \mathbb{N}_0$ . Eine *m-dimensionale* ( $\mathcal{C}^k$ -) *Untermannigfaltigkeit* des  $\mathbb{R}^n$  ist eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$ , so dass zu jedem  $p \in M$  eine Umgebung  $U^\Phi \subset \mathbb{R}^n$  von  $p$ , eine offene Menge  $V^\Phi \subset \mathbb{R}^n$  und ein glatter (bzw.  $\mathcal{C}^k$ )-Diffeomorphismus  $\Phi: U^\Phi \rightarrow V^\Phi$  mit

$$M \cap U^\Phi = \Phi^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$$

existiert. Die Abbildung  $\Phi$  heißt auch *Untermannigfaltigkeitskarte* von  $M$  um  $p$ , und ihre Einschränkung

$$\varphi = \Phi|_{U^\Phi \cap M}: U^\varphi = U^\Phi \cap M \rightarrow V^\Phi \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) = V^\varphi$$

heißt *Karte* von  $M$  um  $p$ .

Es hilft, sich diese Definitionen mit Bildern oder kommutativen Diagrammen zu veranschaulichen, also

$$\begin{array}{ccccc} M & \supset & U^\varphi = U^\Phi \cap M & \subset & U^\Phi \subset \mathbb{R}^n \\ & & \varphi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \mathbb{R}^m & \supset & V^\varphi = V^\Phi \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) & \subset & V^\Phi \subset \mathbb{R}^n. \end{array}$$

- 3.2. BEISPIEL. (1) Offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  sind  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$ .  
 (2) Affine  $m$ -dimensionale Unterräume wie zum Beispiel  $\mathbb{R}^m \times \{0\}$  sind  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$ .  
 (3) Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, dann ist der Graph

$$\left\{ \left( \begin{array}{c} x \\ y \\ f(x, y) \end{array} \right) \middle| \left( \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) \in U \right\}$$

genau dann eine  $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit, wenn  $f$  von der Klasse  $\mathcal{C}^k$  ist (Übung).

- (4) Der Kegel

$$\left\{ x \mid x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right\}$$

ist keine  $\mathcal{C}^1$ -Untermannigfaltigkeit, da die Funktion  $(x, y) \mapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  bei 0 nicht differenzierbar ist.

Flächen im  $\mathbb{R}^3$  lassen sich oft als Urbilder regulärer Werte von differenzierbaren Funktionen darstellen.

3.3. SATZ (vom regulären Wert). Sei  $U \subset \mathbb{R}^3$  offen,  $h: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Funktion mit  $k \geq 1$ , und sei  $a \in \mathbb{R}$  regulärer Wert von  $h$ , d.h., es gilt  $dh(x) \neq 0$  für alle  $x \in h^{-1}(a)$ , dann ist  $h^{-1}(a)$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Fläche im  $\mathbb{R}^3$ .

BEWEIS. Das ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Umkehrsatz aus der Analysis. Sei nämlich  $p \in M = h^{-1}(a) \subset U$ , dann ist eine Komponente von  $dh(p)$  ungleich 0, o.B.d.A. die dritte. Wir erweitern  $h$  zu einer Funktion  $H: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch

$$H(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ h(x) - a \end{pmatrix}.$$

Dann existiert eine Umgebung  $W \subset U$  von  $p$ , so dass  $H: W \rightarrow H(W)$  ein  $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus wird. Da  $H(x) \in \mathbb{R}^2 \times 0$  genau dann, wenn  $h(x) = a$ , ist  $H$  eine Untermannigfaltigkeitskarte.  $\square$

Wir erinnern uns an den Begriff einer Immersion: sei  $U \subset \mathbb{R}^m$  offen, dann heißt eine Abbildung  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  *Immersion*, wenn das Differential  $df_p \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = M_{n,m}(\mathbb{R})$  für alle  $p \in U$  injektiv ist. Beispielsweise ist eine parametrisierte Kurve genau dann eine Immersion, wenn sie regulär ist.

3.4. DEFINITION. Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei  $W \subset \mathbb{R}^m$  offen, dann heißt eine Immersion  $f: W \rightarrow M$  eine *Parametrisierung* von  $M$ .

Allgemeiner sei  $W \subset \mathbb{R}^m$  offen und  $f \in \mathcal{C}^k(W; \mathbb{R}^n)$  eine Immersion, dann nennen wir im  $f$  eine *immersierte  $m$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit* des  $\mathbb{R}^n$ . Ein *parametrisiertes  $\mathcal{C}^k$ -Flächenstück im Raum* ist eine immersierte zweidimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ .

- 3.5. BEMERKUNG. (1) Sei  $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$  eine Untermannigfaltigkeitskarte von  $M$ , dann ist die Umkehrabbildung  $f = \varphi^{-1}: V^\varphi \rightarrow U^\varphi$  eine Parametrisierung von  $M$ .
- (2) Sei jetzt umgekehrt  $W \in \mathbb{R}^m$  offen und  $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Immersion mit  $k \geq 1$ . Sei  $y_0 \in W$ . Nach dem Basisergänzungssatz finden sich  $n-m$  Basisvektoren  $e_{j_{m+1}}, \dots, e_{j_n}$  mit  $1 \leq j_{m+1} < \dots < j_n \leq n$ , so dass

$$(df_{y_0}(e_1), \dots, df_{y_0}(e_m), e_{j_{m+1}}, \dots, e_{j_n})$$

eine Basis des  $\mathbb{R}^n$  bilden. Wir erweitern  $f$  zu einer Abbildung  $F: W \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$F(y_1, \dots, y_n) = f(y_1, \dots, y_m) + y_{m+1}e_{j_{m+1}} + \dots + y_n e_{j_n}.$$

An der Stelle  $y_0$  ist die Ableitung  $dF_{(y_0,0)}$  invertierbar. Nach dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit existiert eine Umgebung  $U$  von  $f(y_0) = F(y_0, 0)$  und eine Abbildung  $\Phi: U \rightarrow V \subset W \times \mathbb{R}^{n-m}$ , die zu  $F|_V$  invers ist. Also ist  $\Phi$  eine Untermannigfaltigkeitskarte zum Bild von  $f|_{V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})}$ . Somit parametrisiert jede Immersion lokal eine Untermannigfaltigkeit.

- (3) Sei  $\Psi: U^\Psi \rightarrow V^\Psi$  Untermannigfaltigkeitskarte einer Untermannigfaltigkeit  $M$ , und sei  $f: W \rightarrow U^\psi = U^\Psi \cap M$  eine Parametrisierung. Wir konstruieren eine Untermannigfaltigkeitskarte  $\Phi: U^\Phi \rightarrow V^\Phi$  mit

$$\varphi = \Phi|_{U^\varphi} = f^{-1}: U^\varphi = U^\Phi \cap M \rightarrow W$$

wie in (2). Dann ist  $\Psi \circ \Phi^{-1}: V^\Phi \rightarrow \Psi(U^\Phi)$  ein Diffeomorphismus, also auch

$$\vartheta = \psi \circ f: W \rightarrow \psi(U^\varphi) \subset U^\psi.$$

Sei  $g = \psi^{-1}$  die Parametrisierung zu  $\psi$ , dann folgt  $f = g \circ \vartheta$ , somit ist  $\vartheta$  eine Umparametrisierung analog zur Definition 2.12 für Kurven. Für die Karten gilt analog  $\psi|_{U^\varphi} = \vartheta \circ \varphi$ .

$$\begin{array}{ccc} U^\varphi & \subset & U^\psi \\ \varphi \updownarrow f & & \psi \updownarrow g \\ V^\varphi & \xrightarrow{\vartheta} & V^\psi \end{array}$$

Genauso existiert zu zwei Parametrisierungen  $f, g$  eine solche Umparametrisierung, falls  $f$  und  $g$  (gegebenenfalls nach Einschränkung auf kleine offene Teilmengen ihrer Definitionsbereiche) die gleiche Untermannigfaltigkeit parametrisieren.

- (4) Im allgemeinen ist eine parametrisierte Untermannigfaltigkeit keine Untermannigfaltigkeit. Als Beispiel betrachte die Immersion  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Sie beschreibt eine liegende Acht und hat Periode  $2\pi$ . Sowohl  $\frac{\pi}{2}$  als auch  $-\frac{\pi}{2}$  werden auf den Nullpunkt abgebildet, aber mit linear unabhängigen Geschwindigkeitsvektoren  $\dot{\gamma}(\pm\frac{\pi}{2})$ . Daher kann im  $\gamma$  keine eindimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^2$  sein.

Aber nach (2) haben sowohl  $\frac{\pi}{2}$  als auch  $-\frac{\pi}{2}$  Umgebungen, deren Bilder unter  $\gamma$  Untermannigfaltigkeiten sind.

Wir interessieren uns ab sofort nur noch für parametrisierte Flächenstücke im  $\mathbb{R}^3$ .

3.6. BEISPIEL. (1) In Abschnitt 1.3 haben wir uns bereits eingehend mit der Geometrie der Sphäre auseinandergesetzt. Da

$$S^2 = h^{-1}(1), \quad \text{wobei} \quad h(x) = \|x\|^2$$

glatt ist und 1 als regulären Wert besitzt, ist  $S^2$  eine Fläche.

Wir können  $S^2 \setminus \{e_3, -e_3\}$  durch „Kugelkoordinaten“ wie folgt parametrisieren:

$$f: \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{mit} \quad f \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}.$$

Diese Parametrisierung ist in  $\varphi$  periodisch mit minimaler Periode  $2\pi$ . Die Einschränkung  $f|_{(-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$  parametrisiert  $S^2$  injektiv bis auf Nord- und Südpol  $\pm e_3$  und einen Meridian.

(2) Seien  $0 < r < R$  gegeben, dann betrachten wir die Funktion

$$h: \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad h(x) = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R\right)^2 + x_3^2$$

und definieren den *Rotationstorus* mit Radien  $r, R$  durch

$$T_{r,R}^2 = h^{-1}(r^2).$$

Also besteht  $T_{r,R}^2$  genau aus denjenigen Punkten, die Abstand  $r$  zum Kreis mit Radius  $R$  in der  $x$ - $y$ -Ebene haben.

Ein Rotationstorus entsteht auch dadurch, dass ein Kreis mit Radius  $r$  um den Punkt  $(R, 0)$  in der  $x$ - $z$ -Ebene um die  $z$ -Achse rotiert. Das liefert eine Parametrisierung  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$f \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R+r \cos \psi) \cos \varphi \\ (R+r \cos \psi) \sin \varphi \\ r \sin \psi \end{pmatrix}.$$

Diese Parametrisierung ist in  $\varphi$  und  $\psi$  periodisch mit minimaler Periode  $2\pi$ . Also ist  $T_{r,R}^2 = f([-\pi, \pi]^2)$ , und  $f|_{(-\pi, \pi)^2}$  parametrisiert  $T_{r,R}^2$  injektiv bis auf die Vereinigung zweier Kreise.

### 3.2. Tangentialvektoren und Erste Fundamentalform

In diesem Abschnitt wollen wir Längen, Winkel und Flächeninhalte auf Flächen definieren. Dazu benötigen wir den Begriff des Tangentialvektors und die erste Fundamentalform.

Ein Tangentialvektor an eine Fläche  $M$  im  $\mathbb{R}^3$  in einem Punkt  $p \in M$  ist ein Vektor im  $\mathbb{R}^3$ , der im Punkt  $p$  salopp gesagt eine Richtung entlang  $M$

beschreibt. Für das Differential einer differenzierbaren Abbildung  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  an der Stelle  $p \in \mathbb{R}^k$  schreiben wir

$$dF_p \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong M_{m,n}(\mathbb{R}).$$

**3.7. DEFINITION.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit mit  $k \geq 1$ , sei  $p \in M$ , und sei  $\Phi: U^\Phi \rightarrow V^\Phi$  eine Untermannigfaltigkeitskarte von  $M$  um  $p$ . Der *Tangentialraum*  $T_p M$  an  $M$  im Punkt  $p$  ist definiert als

$$T_p M = (d\Phi_p)^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\}) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid d\Phi_p(v) \in \mathbb{R}^m \times \{0\}\}.$$

Elemente von  $T_p M$  heißen *Tangentialvektoren* an  $M$  im Punkt  $p$ .

Sei  $v \in T_p M$  und  $\Phi$  wie oben, dann heißt

$$v^\varphi := d\Phi_p(v) \in \mathbb{R}^m$$

die *Darstellung* von  $v$  in der Karte  $\varphi = \Phi|_{U^\Phi \cap M}$ .

Das *Tangentialbündel* an  $M$  ist definiert als

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M = \{ (p, v) \mid p \in M, v \in T_p M \}.$$

**3.8. BEISPIEL.** Wir betrachten als einfachsten und zugleich sehr wichtigen Spezialfall  $M = \mathbb{R}^n$  als Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ . Als Karte wählen wir die Identität. Für alle  $p \in M$  folgt wegen  $did_p = \text{id}$ , dass

$$T_p \mathbb{R}^n = \{v \in \mathbb{R}^n \mid did_p(v) \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}^n.$$

- 3.9. BEMERKUNG.** (1) Da  $d\Phi_p$  ein linearer Isomorphismus ist, ist der Tangentialraum  $T_p M = (d\Phi_p)^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$  ein  $m$ -dimensionaler Untervektorraum des  $\mathbb{R}^n$ . Wir werden  $T_p M$  jedoch oft als affinen Unterraum durch  $p$  zeichnen. Außerdem ist die Abbildung  $d\varphi_p$  mit  $v \mapsto v^\varphi$  offensichtlich ein linearer Isomorphismus.
- (2) Sei  $\Psi$  eine weitere Untermannigfaltigkeitskarte von  $M$  um  $p$ , dann existiert ein Diffeomorphismus

$$\Theta = \Psi \circ \Phi^{-1}: \Phi(U^\Phi \cap U^\Psi) \rightarrow \Psi(U^\Phi \cap U^\Psi),$$

der  $\varphi(U^\varphi \cap U^\psi)$  diffeomorph auf  $\psi(U^\varphi \cap U^\psi)$  abbildet. Also gilt

$$\begin{aligned} (d\Psi_p)^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\}) &= (d(\Theta \circ \Phi)_p)^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\}) \\ &= ((d\Psi_p)^{-1} \circ (d\Theta_{\Phi(p)})^{-1})(\mathbb{R}^m \times \{0\}) \\ &= (d\Psi_p)^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\}), \end{aligned}$$

und die Wahl der Untermannigfaltigkeitskarte in Definition 3.7 spielt keine Rolle.

- (3) Da Untermannigfaltigkeitskarten Diffeomorphismen sind, können wir Vektoren auch durch Parametrisierungen darstellen: es gilt

$$T_p M = d(\Phi^{-1})_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^m \times \{0\}) = d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^m) = df_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^n,$$

wobei wir  $f = \varphi^{-1}$  setzen wie in Bemerkung 3.5 (1). Dabei gilt offenbar

$$v = df_{\varphi(p)}(v^\varphi).$$

Wir können durch diese Formel also auch Tangentialvektoren an parametrisierte Flächenstücke definieren, denn nach Bemerkung 3.5 (2) ist jede Parametrisierung lokal von diesem Typ. Die speziellen Vektoren

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_x = df_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_x = df_x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in T_{f(x)}M$$

heißen die *Koordinatenvektoren* von  $f$  am Punkt  $f(x)$ .

- (4) Wir können Tangentialvektoren als Richtungsableitungen auffassen. Sei dazu  $v \in T_pM \subset \mathbb{R}^n$  und  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, dann setzen wir

$$v(h) = dh_p(v) = \partial_v h(p)$$

als Richtungsableitung von  $h$  in Richtung  $v \in T_pM$  an der Stelle  $p \in M$ . Die Notation ist so zu verstehen, dass wir für einen Vektor in  $T_pM$  automatisch an der Stelle  $p$  ableiten.

Aus der Kettenregel folgt, dass wir nur  $h|_M$  zu kennen brauchen, denn für eine Parametrisierung  $f = \varphi^{-1}$  gilt

$$v(h) = dh_p(v) = d(h \circ \Phi^{-1})_{\varphi(p)} \left( \underbrace{d\Phi_p(v)}_{\in \mathbb{R}^m \times \{0\}} \right) = d(h \circ f)_{\varphi(p)}(v^\varphi),$$

und  $h \circ f$  hängt nur von  $h|_M$  ab.

$$\begin{array}{ccc} M & \supset & U^\varphi \xrightarrow{h|_M} \mathbb{R} \\ & & \varphi \updownarrow f \\ & & V^\varphi \end{array}$$

Die Richtungsableitung erfüllt eine Produktregel

$$d(hk)_p(v) = dh_p(v) \cdot k(p) + h(p) \cdot dk_p(v).$$

- (5) Wir erhalten Tangentialvektoren auch als Geschwindigkeitsvektoren von Kurven, die auf  $M$  verlaufen. Sei etwa  $\gamma: I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$  eine Kurve und  $\Phi: U^\Phi \rightarrow V^\Phi$  eine Untermannigfaltigkeitskarte mit  $t \in I$  und  $p = \gamma(t) \in U^\varphi = U^\Phi \cap M$ . Nach Einschränken von  $\gamma$  gelte im  $\gamma \subset U^\varphi$ , und wir setzen

$$\gamma^\varphi = \varphi \circ \gamma: I \rightarrow V^\varphi.$$

Aus der Kettenregel folgt

$$d\Phi_p(\dot{\gamma}(t)) = \frac{d(\Phi \circ \gamma)}{dt} = \dot{\gamma}^\varphi(t) \in \mathbb{R}^m \times \{0\},$$

also  $\dot{\gamma}(t) \in T_pM$ .

Um Längen, Winkel und Flächeninhalte zu messen, werden wir jetzt auf jedem Tangentialraum eine Metrik einführen. Alle geometrischen Größen, die nur in Termen der Metrik definiert werden können, heißen „Größen der inneren Geometrie.“ Wir werden uns im nächsten Kapitel näher mit ihnen auseinandersetzen.



3.10. DEFINITION. Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit mit  $k \geq 1$ , und sei  $p \in M$ . Die *erste Fundamentalform*  $g_p$  ist die Einschränkung des euklidischen Standard-Skalarproduktes des  $\mathbb{R}^n$  auf  $T_p M \subset \mathbb{R}^n$ . Sei  $f: V \rightarrow M$  eine Parametrisierung und  $x \in V$  mit  $f(x) = p$ , dann heißt

$$g_x^f = (f^*g)_x = g_p(df_x(\cdot), df_x(\cdot)) = \langle df_x(\cdot), df_x(\cdot) \rangle$$

die *Darstellung* von  $g$  bezüglich der Parametrisierung  $f$ . Ist  $f = \varphi^{-1}$  für eine Karte  $\varphi$ , dann schreiben wir auch  $g_x^\varphi$  anstelle von  $g_x^f$ .

Seien  $v, w \in T_p M$ , dann heißt

$$\|v\|_p = \sqrt{g_p(v, v)}$$

die *Länge* von  $v$ , und falls  $v, w \neq 0$ , heißt

$$\angle_p(v, w) = \arccos \frac{g_p(v, w)}{\|v\|_p \|w\|_p}$$

der *Winkel* zwischen  $v$  und  $w$ . Für  $v, w \in \mathbb{R}^m$  schreiben wir

$$\|v\|_x^f = \|v\|_x^\varphi = \|df_x(v)\|_p$$

und  $\angle_x^f(v, w) = \angle_x^\varphi(v, w) = \angle_p(df_x(v), df_x(w))$ .

In der Literatur wird auch manchmal  $I$  für die erste Fundamentalform geschrieben. Da wir sowohl mit Karten als auch mit Parametrisierungen arbeiten werden, haben wir hier je zwei Bezeichnungen (z.B.  $g_x^f$  und  $g_x^\varphi$ ) eingeführt. Beachte, dass  $g_x$  für  $x \in \mathbb{R}^m$  das Euklidische Standard-Skalarprodukt bezeichnet, während  $g_x^f$  oben definiert wurde; im allgemeinen stimmen also die Euklidischen Größen auf  $\mathbb{R}^2$  nicht mit den von  $f$  induzierten überein:

$$g_x^f \neq g_x, \quad \|\cdot\|_x^f \neq \|\cdot\|_x, \quad \angle_x^f(\cdot, \cdot) \neq \angle_x(\cdot, \cdot).$$

Falls doch  $\angle_x^f(\cdot, \cdot) = \angle_x(\cdot, \cdot)$  gilt, heißt  $f$  *winkeltreu* oder *winkelerhaltend*.

3.11. BEMERKUNG. (1) Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  Untermannigfaltigkeit mit Parametrisierung  $f: V \rightarrow U$  und  $f(x) = p$ . In Matrixschreibweise gilt dann

$$g_x^f(v, w) = \langle df_x(v), df_x(w) \rangle = v^t df_x^t \cdot df_x w$$

für alle  $v, w \in \mathbb{R}^m$ , insbesondere folgt

$$g_x^f = df_x^t df_x = \left( \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x, \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_x \right\rangle \right)_{i,j}.$$

Wenn  $f$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Abbildung ist, sind  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}^{k-1}(V; \mathbb{R}^n)$ , und wir erhalten eine  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Abbildung  $g^f$  von  $V^\varphi$  in den Vektorraum der symmetrischen  $m \times m$ -Matrizen.

(2) Seien  $\varphi_1, \varphi_2$  zwei Karten von  $M$  um  $p$ , und seien  $f_1, f_2$  die zugehörigen Parametrisierungen mit  $p = f_1(x) = f_2(y)$  und sei  $\vartheta$  eine Umparametrisierung mit  $f_1 = f_2 \circ \vartheta$ . Aus (1) folgt leicht, dass

$$g_x^{f_1} = df_1|_{\varphi_1(p)}^t df_1|_{\varphi_1(p)} = (df_2|_y d\vartheta_x)^t df_2|_y d\vartheta_x = d\vartheta_x^t g_y^{f_2} d\vartheta_x.$$

- (3) Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  eine parametrisierte Kurve auf einer Untermannigfaltigkeit. Falls es eine Parametrisierung  $f$  und eine parametrisierte Kurve  $\gamma^f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $\gamma = f \circ \gamma^f$  gibt, gilt

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)} dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}^f(t)\|_{\gamma^f(t)}^f dt .$$

3.12. BEISPIEL. Es mögen  $p, q, r \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$  nicht auf einem Großkreis liegen, und es seien  $a, b, c$  die Seitenlängen und  $\alpha, \beta, \gamma$  die Winkel im sphärischen Dreieck  $\Delta pqr$ . Die Seiten  $\overline{qr}$ ,  $\overline{pr}$  werden laut Proposition 1.17 — und zwar nach Bogenlänge (Übung) — parametrisiert durch

$$\varphi(t) = \frac{\sin t}{\sin a} q + \frac{\sin(a-t)}{\sin a} r \quad \text{und} \quad \psi(t) = \frac{\sin t}{\sin b} p + \frac{\sin(b-t)}{\sin b} r .$$

Aus den Übungen wissen wir, dass  $a = L(\varphi) = \arccos\langle q, r \rangle$  und  $b = L(\psi) = \arccos\langle p, r \rangle$ .

Um den Winkel  $\gamma$  bei  $r$  zu berechnen, betrachten wir die Einheitsvektoren

$$\dot{\varphi}(0) = \frac{1}{\sin a} q - \frac{\cos a}{\sin a} r \quad \text{und} \quad \dot{\psi}(0) = \frac{1}{\sin b} p - \frac{\cos b}{\sin b} r \in T_r S^2 .$$

Aus  $\langle q, r \rangle = \cos a$ ,  $\langle p, r \rangle = \cos b$ ,  $\langle p, q \rangle = \cos c$  und  $\|p\|^2 = \|q\|^2 = \|r\|^2 = 1$  folgt

$$\gamma = \angle_r(\dot{\varphi}(0), \dot{\psi}(0)) = \arccos\langle \dot{\varphi}(0), \dot{\psi}(0) \rangle = \arccos \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$$

genau wie in Definition 1.20 und im Seitencosinussatz 1.24 (1). Somit sind unsere Überlegungen aus Abschnitt 1.3 mit den hiesigen verträglich.

Wir kommen nun wieder zurück zu Flächen. Falls wir das Lebesgue-Integral kennen, können wir damit arbeiten; falls nicht, benutzen wir ersatzweise folgende Konstruktion. Um eine nichtnegative Funktion über  $\mathbb{R}^2$  zu integrieren, schreiben wir

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, x_2) dx_2}_{: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]} dx_1 .$$

Dabei können wir auf der rechten Seite das uneigentliche Riemann- oder Regel-Integral in jeder Komponente benutzen. Sollte ein kompaktes Intervall unendlich viele Punkte  $x_1$  enthalten, an denen das innere Integral nicht definiert ist, so können wir auch das Gesamtintegral nicht definieren. Im folgenden soll eine Funktion  $h$  „integrierbar“ heißen, wenn sie sich als Differenz  $h^+ - h^-$  nichtnegativer Funktionen mit endlichem Integral schreiben lässt.

Sei jetzt  $V \subset \mathbb{R}^2$  eine Teilmenge, dann definiere eine Funktion  $\mathbf{1}_V$  durch

$$\mathbf{1}_V(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in V, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir nennen eine Funktion über  $V$  integrierbar, falls das Integral

$$\int_V f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}^2} (1_V \cdot f)(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

existiert. Falls wir das Lebesgue-Integral kennen, so sehen wir, dass der obige Ausdruck mit dem Lebesgue-Integral übereinstimmt, sofern er definiert ist.

3.13. DEFINITION. Sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine Fläche, sei  $f: V \rightarrow M$  eine injektive Parametrisierung, und sei  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Falls  $h \circ f: V^\varphi \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar ist, definieren wir das (*Flächen-*) *Integral* von  $h$  über  $\text{im } f$  als

$$\int_{\text{im } f} h dA = \int_V (h \circ f) dA^f = \int_V h(f(x)) \sqrt{\det(g_x^f)} dx_1 dx_2 .$$

Dabei heißt  $dA^f = \sqrt{\det(g_x^f)} dx_1 dx_2$  das *Flächenelement* der Parametrisierung  $f$ .

Wir definieren den *Flächeninhalt* einer Teilmenge  $U \subset \text{im } f$  als

$$A(U) = \int_U dA = \int_{f^{-1}(U)} dA^f .$$

Analog würden wir auch Integrale über höherdimensionale Untermannigfaltigkeiten und deren Volumeninhalte definieren. Für das Beispiel  $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$  mit  $\text{id}_{\mathbb{R}^2}$  als Karte erhalten wir das gewöhnliche zweidimensionale Integral zurück. Im allgemeinen beschreibt der Faktor  $\sqrt{\det(g_x^f)}$  gerade das Volumen eines Parallelogrammes mit den Seiten  $df_x\left(\frac{1}{0}\right)$  und  $df_x\left(\frac{0}{1}\right)$ ; dieser Faktor ist nötig, um die Volumenverzerrung der Parametrisierung  $f$  auszugleichen.

3.14. BEMERKUNG. Viele klassische Integralsätze lassen sich unmittelbar auf das obige Flächenintegral übertragen. Beispielsweise ist das Integral offenbar  $\mathbb{R}$ -linear und monoton im Integranden  $h$ . Zur Berechnung des Integrals über  $V^\varphi$  dürfen wir den Satz von Fubini verwenden, und es gilt der Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz etc.

Im nächsten Schritt wollen wir das Integral über ganz  $M$  definieren. Dazu ist zunächst zu zeigen, dass die obige Definition nicht von der Wahl der Karte abhängt. Dazu benutzen wir die Integral-Transformationsformel aus der Analysis.

3.15. PROPOSITION. Seien  $\varphi_1, \varphi_2$  zwei Karten von  $M$  und  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit  $h|_{M \setminus (U^{\varphi_1} \cup U^{\varphi_2})} = 0$ , dann gilt

$$\int_{U^{\varphi_1}} h dA = \int_{U^{\varphi_2}} h dA .$$

BEWEIS. Nach Verkleinern gelte o.B.d.A.  $U^{\varphi_1} = U^{\varphi_2}$ ; dieses Verkleinern ändert nach Voraussetzung nichts am Flächenintegral. Dann ist der Kartenwechsel  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: V^{\varphi_1} \rightarrow V^{\varphi_2}$  ein Diffeomorphismus. Nach Bemerkung 3.11 (2) gilt für  $x = \varphi_1(p)$ ,  $y = \varphi_2(p)$ , dass

$$\det(g_x^{f_1}) = \det(d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})_x)^2 \det(g_y^{f_2}) .$$

Aus der Integraltransmutationsformel folgt jetzt

$$\begin{aligned}
 \int_{U\varphi_2} h \, dA &= \int_{V\varphi_2} (h \circ \varphi_2^{-1})(y) \sqrt{\det(g_y^{f_2})} \, dy_1 \, dy_2 \\
 &= \int_{V\varphi_1} (h \circ \varphi_2^{-1})((\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x)) |\det(d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})_x)| \\
 &\quad \sqrt{\det(g_{(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x)}^{f_2})} \, dx_1 \, dx_2 \\
 &= \int_{V\varphi_1} (h \circ \varphi_1^{-1})(x) \sqrt{\det(g_x^{f_1})} \, dx_1 \, dx_2 = \int_{U\varphi_1} h \, dA. \quad \square
 \end{aligned}$$

3.16. DEFINITION. Sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine Fläche. Eine Funktion  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *integrierbar*, wenn es Karten  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  von  $M$  und Funktionen  $h_1, \dots, h_k$  auf  $M$  mit  $h = h_1 + \dots + h_k$  gibt, so dass für alle  $i$  die Funktion  $h_i$  außerhalb  $U\varphi_i$  verschwindet und  $h_i \circ f_i$  integrierbar ist. In diesem Fall definieren wir das (*Flächen-*) *Integral* von  $h$  über  $M$  als

$$\int_M h \, dA = \sum_{i=1}^k \int_{U\varphi_i} h_i \, dA.$$

Falls die konstante Funktion 1 auf  $M$  integrierbar ist, definieren wir den *Flächeninhalt*

$$A(M) = \int_M dA,$$

ansonsten setzen wir  $A(M) = \infty$ .

3.17. BEMERKUNG. (1) Man kann zeigen, dass jede Fläche durch höchstens drei (nicht unbedingt zusammenhängende) Karten  $\varphi, \psi, \rho$  überdeckt werden kann. Dann zerlegt man beispielsweise

$$h = h|_{U\varphi} + h|_{U\psi \setminus U\varphi} + h|_{U\rho \setminus (U\varphi \cup U\psi)},$$

um die Integration durchzuführen.

Falls  $M \setminus U\varphi$  als eine endliche Vereinigung von Punkten und differenzierbaren Kurven geschrieben werden kann, verschwinden die Integrale über die letzten beiden Funktionen, und wir erhalten

$$\int_M h \, dA = \int_{U\varphi} h \, dA.$$

Ein Beispiel dafür sind Kugelkoordinaten auf der Sphäre; hier besteht  $S^2 \setminus U\varphi$  genau aus Nord- und Südpol und einem Meridian.

Mit anderen Worten reicht uns zum Integrieren eine injektive Parametrisierung, die alle Punkte von  $M$  bis auf eine endliche Vereinigung von Punkten und differenzierbaren Kurven trifft. Wir können also auch über parametrisierte Flächenstücke integrieren.

(2) Wir zeigen, dass das Integral nicht von der Wahl der Karten und von der obigen Zerlegung abhängt. Zunächst können wir die zwei endlichen Mengen von Karten vereinigen und brauchen nur verschiedene Zerlegungen zu einer festen Auswahl von Karten zu betrachten.

Sei also  $h = h_1 + \dots + h_k$  eine solche Zerlegung. Nach Proposition 3.15 dürfen wir ähnlich wie in (1) vorgehen:

$$\begin{aligned} \int_M h \, dA &= \sum_{i=1}^k \int_{U^{\varphi_i} \setminus (U^{\varphi_1} \cup \dots \cup U^{\varphi_{i-1}})} h \, dA \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \int_{(U^{\varphi_i} \cap U^{\varphi_j}) \setminus (U^{\varphi_1} \cup \dots \cup U^{\varphi_{i-1}})} h_j \, dA \\ &= \sum_{j=1}^k \int_{U^{\varphi_j}} h_j \, dA, \end{aligned}$$

dabei haben wir ausgenutzt, dass wir das Integral von  $h_j$  über  $(U^{\varphi_i} \cap U^{\varphi_j}) \setminus (U^{\varphi_1} \cup \dots \cup U^{\varphi_{i-1}})$  sowohl mit Hilfe der Karte  $\varphi_i$  als auch mit  $\varphi_j$  ausrechnen können. Es folgt die Unabhängigkeit von der Zerlegung.

- (3) Mit etwas Mühe kann man in obiger Definition abzählbare Summen zulassen, aber dazu müssen wir wieder  $h_i$  als Differenz  $h_i = h_i^+ - h_i^-$  positiver Funktionen schreiben, und verlangen, dass beide Summen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{U^{\varphi_i}} h_i^+ \, dA \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \int_{U^{\varphi_i}} h_i^- \, dA$$

einzeln konvergieren.

3.18. BEISPIEL. Wir betrachten den Mantel  $M$  eines Kegels der Höhe  $h$  über einem Kreis vom Radius  $r$ , allerdings ohne Kegelspitze; siehe Beispiel 3.2 (4). Eine Parametrisierung dieser Fläche ist

$$f: (0, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f(s, t) = s \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ h \end{pmatrix}.$$

Wir schränken  $f$  ein auf  $V = (0, 1) \times (0, 2\pi)$ , dann ist das Bild  $U \subset M$  der Kegelmantel bis auf eine Strecke.

Es gilt

$$\begin{aligned} df_{(s,t)} &= \begin{pmatrix} r \cos t & -rs \sin t \\ r \sin t & rs \cos t \\ h & 0 \end{pmatrix}, \\ g_{(s,t)}^f &= df_{(s,t)}^t df_{(s,t)} = \begin{pmatrix} r^2 + h^2 & 0 \\ 0 & r^2 s^2 \end{pmatrix}, \\ dA^f &= \sqrt{\det(g_{(s,t)}^f)} \, ds \, dt = rs \sqrt{r^2 + h^2} \, ds \, dt. \end{aligned}$$

Nach Bemerkung 3.17 (1) folgt

$$\begin{aligned} A(M) &= \int_M dA = \int_U dA = \int_V dA^f \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 rs \sqrt{r^2 + h^2} \, ds \, dt = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}. \end{aligned}$$

### 3.3. Normalenfelder und Krümmungen

Wir definieren jetzt Normalenfelder an Flächen. Indem wir die zweiten Ableitungen einer Parametrisierung betrachten, erhalten wir einen Begriff für die „Krümmung“ der Fläche im umgebenden Raum. Diese Krümmung ist eine „Größe der äußeren Geometrie,“ da sie von der Einbettung der Fläche in den  $\mathbb{R}^3$  abhängt. Wir werden später sehen, dass gewisse Krümmungsgrößen aber auch aus der inneren Geometrie der Fläche berechnet werden können.

3.19. DEFINITION. Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit. Das orthogonale Komplement

$$N_p M = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ für alle } w \in T_p M \}$$

zu  $T_p M$  in  $\mathbb{R}^n$  heißt *Normalraum* zu  $M$  am Punkt  $p$ , und das *Normalenbündel* ist definiert als

$$NM = \bigcup_{p \in M} N_p M = \{ (p, \nu) \mid p \in M, \nu \in N_p M \}.$$

Elemente von  $N_p M$  heißen Normalenvektoren im Punkt  $p$ .

Es sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine Fläche, dann ist  $T_M \subset \mathbb{R}^3$  für alle  $p \in M$  ein zweidimensionaler Unterraum. Also ist das orthogonale Komplement  $N_p M$  stets eindimensional. Insbesondere gibt es für jeden Punkt  $p \in M$  nur zwei Vektoren  $v \in N_p M$  der Länge  $\|v\| = 1$ .

3.20. DEFINITION. Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit. Ein  $C^k$ -Vektorfeld längs  $M$  ist eine Abbildung  $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass  $X \circ f \in C^k(V, \mathbb{R}^n)$  für alle Parametrisierungen  $f: V \rightarrow M$  von  $M$ . Ein Vektorfeld  $X$  längs  $M$  heißt *tangential an  $M$* , wenn  $X_p \in T_p M$ , und *Normalenfeld*, wenn  $X_p \in N_p M$  für alle  $p \in M$ . Ein Vektor- (*Normalen-*)feld von konstanter euklidischer Norm 1 heißt *Einheitsvektorfeld* (bzw. *Einheitsnormalenfeld*).

Sei  $f: V \rightarrow U \subset M$  eine Parametrisierung, dann ist ein *Vektorfeld längs  $f$*  eine Abbildung  $X: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Ein Vektorfeld  $X$  längs  $f$  heißt *tangential* (bzw. *normal*), wenn  $X(x) \in T_{f(x)} M$  (bzw.  $X(x) \in N_{f(x)} M$ ) für alle  $x \in V$ .

Wir erinnern uns an das Kreuzprodukt auf dem  $\mathbb{R}^3$ . Es ist definiert durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

und wird eindeutig charakterisiert durch die Eigenschaft

$$\langle x \times y, z \rangle = \langle x, y \times z \rangle = \det(x|y|z)$$

für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ , wobei  $(x|y|z)$  hier für die Matrix mit den Spalten  $x, y$  und  $z$  steht.

Wir erinnern uns auch an den Begriff einer Orientierung auf einem  $r$ -dimensionalen reellen Vektorraum  $X$ . Zwei Basen von  $X$  heißen *gleich orientiert*, wenn die Basiswechselmatrix positive Determinante hat. Eine *Orientierung* von  $X$  ist eine Teilmenge  $o \subset X^r$  der Menge aller Basen von  $X$ , so dass

von je zwei verschieden orientierten Basen von  $X$  genau eine in  $o$  liegt. Dann trägt jeder endlich-dimensionale reelle Vektorraum genau zwei Orientierungen.

3.21. BEMERKUNG. Die Wahl einer Orientierung und die Wahl eines Einheitsnormalenvektors hängen miteinander zusammen.

- (1) Jeder Normalenvektor  $\nu \in N_p M$  legt eine Orientierung

$$o = \{ (v_1, v_2) \in (T_p M)^2 \mid \det(v_1 | v_2 | \nu) > 0 \}$$

auf  $T_p M$  so fest, dass eine Basis  $(v_1, v_2)$  von  $T_p M$  genau dann positiv orientiert ist, wenn die Basis  $(v_1, v_2, \nu)$  des  $\mathbb{R}^3$  positiv orientiert ist. Den zwei Einheitsnormalenvektoren  $\nu \in N_p M$  mit  $\|\nu\| = 1$  entsprechen genau die zwei möglichen Orientierungen von  $T_p M$ .

- (2) Sei umgekehrt eine Orientierung auf  $T_p M$  gegeben, und sei eine positiv orientierte Basis  $(v_1, v_2)$  von  $T_p M$ , dann erhalten wir den zugehörigen Einheitsnormalenvektor aus (1) als

$$\nu = \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|} \in N_p M,$$

denn es gilt

$$\det(v_1 | v_2 | \nu) = \langle v_1 \times v_2, \nu \rangle = \|v_1 \times v_2\| > 0.$$

- (3) Sei  $f: V \rightarrow M$  eine Parametrisierung, dann sind die Koordinatenfelder

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = df \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = df \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tangentiale Vektorfelder längs  $f$ , die für alle  $x \in V$  linear unabhängig im  $\mathbb{R}^3$  sind, da  $f$  eine Immersion ist. Folglich ist

$$\nu^f = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1} \times \frac{\partial f}{\partial x_2}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \times \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

ein Einheitsnormalenfeld längs  $f$ ; beachte, dass  $\|\cdot\|$  hier die Euklidische Norm des  $\mathbb{R}^3$  bezeichnet. Wenn  $f$  eine  $C^k$ -Parametrisierung ist, dann ist das Einheitsnormalenfeld  $\nu^f$  also von der Klasse  $C^{k-1}$ .

- (4) Sei  $\nu'^f$  ein weiteres Einheitsnormalenfeld längs  $f$ , dann existiert eine stetige Funktion  $\varepsilon: U \rightarrow \{1, -1\}$  mit  $\nu'^f = \varepsilon \cdot \nu^f$ , insbesondere ist  $\varepsilon$  lokal konstant. Wenn  $U$  zusammenhängend ist, gibt es also nur zwei Einheitsnormalenfelder  $\nu^f$  und  $-\nu^f$  längs  $f$ .

Wir benutzen die obige Bemerkung, um eine einfache Definition des Orientierungsbegriffs für Flächen zu geben. In der inneren Geometrie würden wir statt dessen für jeden Punkt  $p$  eine Orientierung von  $T_p M$  so festlegen, dass diese Orientierungen für nah benachbarte Punkte „zusammenpassen“.

Wir fassen alle Einheitsvektoren als Elemente der  $S^2$  auf, dann wird aus einem Einheitsnormalenfeld  $\nu$  eine Abbildung  $\nu: M \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ .

3.22. DEFINITION. Eine *orientierte Fläche*  $(M, \nu)$  ist ein Fläche  $M \subset \mathbb{R}^3$  mit einem Einheitsnormalenfeld  $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Die Abbildung  $\nu: M \rightarrow S^2$  heißt auch die *Gauß-Abbildung* der orientierten Fläche. Eine Parametrisierung einer orientierten Fläche  $(M, \nu)$  heißt *positiv orientiert*, wenn  $\nu^f = \nu \circ f$ . Eine Fläche  $M$  heißt *orientierbar*, wenn ein solches Einheitsnormalenfeld existiert.

Leider ist nicht jede Fläche orientierbar; das Möbiusband ist ein Gegenbeispiel (Übung).

Wir betrachten das Einheitsnormalenfeld  $\nu$  als Abbildung  $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Nach Bemerkung 3.9 (4) dürfen wir  $\nu$  komponentenweise nach Vektoren  $v \in T_p M$  ableiten und erhalten  $v(\nu) \in \mathbb{R}^3$ . Aus der Produktregel für die gewöhnliche Richtungsableitung im  $\mathbb{R}^3$  folgt

$$\langle v(\nu), \nu(p) \rangle = \sum_{i=1}^3 dv_i|_p(v) \cdot \nu_i(p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 d(\nu_i^2)_p(v) = v \underbrace{\langle \nu, \nu \rangle}_{=1} = 0.$$

Also gilt  $v(\nu) \in T_p M$ . Wir erhalten demnach eine Abbildung  $dv_p: T_p M \rightarrow T_p M$  mit  $dv_p(v) = v(\nu)$ .

3.23. DEFINITION. Sei  $(M, \nu)$  eine orientierte  $\mathcal{C}^2$ -Fläche. Dann heißt die Abbildung  $S_p = -dv_p \in \text{End } T_p M$  der *Form-Operator* oder *Weingarten-Operator* von  $(M, \nu)$  im Punkt  $p$ . Die Bilinearform  $h_p = g_p(S_p(\cdot), \cdot)$  auf  $T_p M$  heißt *zweite Fundamentalform* von  $(M, \nu)$  im Punkt  $p$ .

3.24. BEISPIEL. Es folgen zwei sehr einfache Beispiele.

- (1) Wir betrachten die Ebene  $E = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ . Da das Normalenfeld  $\nu = e_3 \in \mathbb{R}^3$  konstant ist, folgt  $dv_p = 0$  für alle  $p \in E$ , und somit gilt

$$S = h = 0.$$

- (2) Wir betrachten die Kugel  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , dann gilt  $T_p S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, v \rangle = 0\}$  für alle  $p$ . Wir wählen das nach innen weisende Einheitsnormalenfeld, also  $\nu_p = -p$ . Damit erhalten wir

$$S_p = -dv_p = -d(-\text{id})_p = \text{id}_{T_p M} \quad \text{und} \quad h_p = g_p(S_p(\cdot), \cdot) = g_p.$$

3.25. BEMERKUNG. Sei  $f: V \rightarrow M$  eine orientierte Parametrisierung von  $M$ , dann wird das Einheitsnormalenfeld von  $M$  durch  $\nu^f = \nu \circ f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  wie in Bemerkung 3.21 (3) und Definition 3.22 dargestellt. Nach der Kettenregel gilt

$$S_{f(x)}(df_x(v)) = -dv_{f(x)}(df_x(v)) = -d\nu_x^f(v) \in \mathbb{R}^3,$$

also können wir den Weingarten-Operator darstellen durch

$$S_x^f = (df_x)^{-1} \circ S_{f(x)} \circ df_x \in M_2(\mathbb{R})$$

mit

$$S_x^f(v) = -(df_x)^{-1}(d\nu_x^f(v)).$$

Die zweite Fundamentalform stellen wir bezüglich  $f$  dar durch

$$h_x^f = h_{f(x)}(df_x(\cdot), df_x(\cdot))$$



mit

$$h_x^f(v, w) = -\langle d\nu_x^f(v), df_x(w) \rangle = -g_x^f((df_x)^{-1}(d\nu_x^f(v)), w).$$

Da  $\nu^f \in \mathcal{C}^{k-1}(U; \mathbb{R}^3)$  falls  $f \in \mathcal{C}^k(U; \mathbb{R}^3)$  folgt  $S^f, h^f \in \mathcal{C}^{k-2}(U; M_2(\mathbb{R}))$ . Man beachte: obwohl Weingarten-Operator und zweite Fundamentalform über die erste Fundamentalform, also die Einschränkung des Standardskalarprodukts im  $\mathbb{R}^3$  miteinander zusammenhängen, werden sie bezüglich einer Parametrisierung  $f$  durch unterschiedliche Matrizen dargestellt.

Die zweite Ableitung einer Funktion auf dem  $\mathbb{R}^n$  im Punkt  $x$  ist nach dem Satz von Schwarz eine symmetrische Bilinearform, die *Hesse-Form*  $\text{hess}_x f = d_x^2 f = f''(x)$ . Bezüglich einer Basis wird sie durch eine symmetrische  $n \times n$ -Matrix, die *Hesse-Matrix* dargestellt. Die zweite Ableitung einer  $\mathbb{R}^m$ -wertigen Funktion ist also eine symmetrische Bilinearform auf  $\mathbb{R}^n$  mit Werten im  $\mathbb{R}^m$  (bilde Ableitungen komponentenweise).

**3.26. PROPOSITION.** *Sei  $(M, \nu)$  eine orientierte  $\mathcal{C}^k$ -Fläche im  $\mathbb{R}^3$  mit  $k \geq 2$ , und sei  $f: V \rightarrow M$  eine orientierte Parametrisierung von  $M$ , dann gilt*

$$h_x^f(v, w) = \langle d(df \cdot (v))_x(w), \nu_x^f \rangle, \quad h_x^f = \left( \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \nu_x^f \right\rangle \right)_{i,j}.$$

*Insbesondere ist die zweite Fundamentalform  $h_p$  symmetrisch, und der Weingarten-Operator  $S_p$  ist selbstadjungiert bezüglich der ersten Fundamentalform  $g_p$  für alle  $p \in M$ .*

**BEWEIS.** Seien  $v, w \in \mathbb{R}^2$  Vektoren und  $x \in V$ . Die Richtungsableitung  $df_y(v) \in \mathbb{R}^3$  steht für alle  $y \in V$  senkrecht auf  $\nu_y^f$ . Wir leiten nach  $y$  in Richtung von  $w$  ab und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= d\langle df \cdot (v), \nu^f \rangle_x(w) = \langle d(df \cdot (v))_x(w), \nu_x^f \rangle + \langle df_x(v), d(\nu^f)_x(w) \rangle \\ &= \langle d(df \cdot (v))_x(w), \nu_x^f \rangle - g_x^f(v, S_x^f(w)) = \langle d(df \cdot (v))_x(w), \nu_x^f \rangle - h_x^f(w, v). \end{aligned}$$

Also ist die zweite Fundamentalform  $h^f$  der Normalenteil der zweiten Ableitung von  $f$ .

Da zweite Ableitungen von  $\mathcal{C}^2$ -Funktionen stets symmetrisch sind, ist  $h^f$  eine symmetrische Bilinearform für alle  $f$ . Da  $h^f$  die Darstellung von  $h$  in der Parametrisierung ist, ist dann auch  $h$  symmetrisch, und entsprechend ist  $S$  selbstadjungiert, da

$$g_p(S_p(v), w) = h_p(v, w) = h_p(w, v) = g_p(v, S_p(w)). \quad \square$$

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass selbstadjungierte Abbildungen stets diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten sind. Für alle  $p \in M$  existieren also Zahlen  $\kappa_1(p) \leq \kappa_2(p)$  und Vektoren  $v_1, v_2 \in T_p M \setminus \{0\}$  mit

$$S_p(v_1) = \kappa_1(p) v_1 \quad \text{und} \quad S_p(v_2) = \kappa_2(p) v_2.$$

Falls  $\kappa_1 \neq \kappa_2$ , folgt  $v_1 \perp v_2$ .

3.27. DEFINITION. Sei  $(M, \nu)$  eine orientierte  $C^k$ -Fläche mit  $k \geq 2$ , und sei  $S_p$  ihr Weingarten-Operator im Punkt  $p \in M$ . Die Eigenwerte  $\kappa_1(p) \leq \kappa_2(p)$  von  $S_p$  heißen die *Hauptkrümmungen* von  $M$  im Punkt  $p$ , und die zugehörigen Eigenräume heißen *Hauptkrümmungsrichtungen* von  $M$  im Punkt  $p$ .

Man nennt  $H(p) = \frac{\kappa_1(p) + \kappa_2(p)}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(S_p) \in \mathbb{R}$  die *mittlere Krümmung* und  $K(p) = \kappa_1(p) \cdot \kappa_2(p) = \det(S_p) \in \mathbb{R}$  die *Gaußkrümmung* von  $M$  im Punkt  $p$ . Wir nennen  $H(p) \nu_p$  den *mittleren Krümmungsvektor* und das Vektorfeld  $H\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  das *mittlere Krümmungsfeld*.

Sei  $f$  eine Parametrisierung, dann werden die obigen Größen bezüglich  $f$  dargestellt durch

$$\kappa_1^f = \kappa_1 \circ f, \quad \kappa_2^f = \kappa_2 \circ f, \quad H^f = H \circ f \quad \text{und} \quad K^f = K \circ f.$$

Die Hauptkrümmungen und die mittlere Krümmung sind typische Größen der äußeren Geometrie von  $M \subset \mathbb{R}^3$ . Wir sehen später, dass die Gaußkrümmung aus der ersten Fundamentalform und ihren Ableitungen entlang der Fläche gewonnen werden kann; sie ist somit eine Größe der inneren Geometrie.

- 3.28. BEMERKUNG. (1) Nach dem Satz über die Hauptachsentransformation stehen die Hauptkrümmungsrichtungen aufeinander senkrecht, falls  $\kappa_1 \neq \kappa_2$ .
- (2) Alle Krümmungsgrößen hängen auf den ersten Blick von der Wahl eines Einheitsnormalenfeldes  $\nu$  ab. Falls  $M$  nicht orientierbar ist, können wir  $\nu$  immer noch auf kleinen offenen Mengen definieren, beispielsweise auf einzelnen Kartengebieten, um zumindest lokal über die Krümmung von  $M$  sprechen zu können.
- (3) Aus der mittleren Krümmung und der Gauß-Krümmung erhalten wir die Hauptkrümmungen zurück als Nullstellen der quadratischen Gleichung

$$0 = (X - \kappa_1(p)) \cdot (X - \kappa_2(p)) = X^2 - 2H(p)X + K(p).$$

Da diese Gleichungen immer reelle Lösungen besitzt, folgt insbesondere

$$H^2(p) \geq K(p).$$

3.29. BEISPIEL. Wir betrachten die Beispiele aus 3.24.

- (1) Für die Ebene  $E = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$  gilt  $S = h = \kappa_1 = \kappa_2 = H = K = 0$ .
- (2) Auf der Sphäre gilt  $S_p = \operatorname{id}_{T_p S^2}$ , also  $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) = H_p = K_p = 1$ . Außerdem ist jede Richtung in  $T_p S^2$  eine Hauptkrümmungsrichtung.

Wir wollen die „Krümmung“ einer Fläche  $M \subset \mathbb{R}^3$  zur Krümmung von Raumkurven  $\gamma$  auf dieser Fläche à la Satz 2.22 in Verbindung bringen.

Dazu ersetzen wir das begleitende Dreibein aus Definition 2.20 durch ein an Kurve und Fläche angepasstes Dreibein. Sei etwa  $\gamma$  nach Bogenlänge parametrisiert, dann bilden

$$e_1(t) = \dot{\gamma}(t) \quad \text{und} \quad e_2(t) = \nu_{\gamma(t)} \times \dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)} M$$

eine positiv orientierte Orthonormalbasis von  $T_{\gamma(t)}M$ . Denn sei  $e_3(t) = \nu_{\gamma(t)}$ , dann ist wie in Bemerkung 3.21 (2) die Orthonormalbasis  $(e_1(t), e_2(t), e_3(t))$  von  $\mathbb{R}^3$  positiv orientiert, da

$$(e_3(t), e_1(t), e_2(t)) = (e_3(t), e_1(t), e_3(t) \times e_1(t))$$

positiv orientiert ist. Also folgt  $e_3(t) = e_1(t) \times e_2(t)$ , und  $(e_1(t), e_2(t))$  ist positiv orientierte Orthonormalbasis von  $T_{\gamma(t)}M$ .

**3.30. SATZ (Satz von Meusnier).** *Sei  $(M, \nu)$  eine orientierte  $\mathcal{C}^k$ -Fläche, und sei  $\gamma: I \rightarrow M$  eine nach Bogenlänge parametrisierte  $\mathcal{C}^k$ -Kurve auf  $M$ , wobei  $k \geq 2$ . Dann existiert eine  $\mathcal{C}^{k-2}$ -Funktion  $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass*

$$\ddot{\gamma}(t) = \kappa(t) \nu_{\gamma(t)} \times \dot{\gamma}(t) + h_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) \nu_{\gamma(t)} .$$

*Insbesondere hängt die Normalkomponente von  $\ddot{\gamma}(t)$  nur von  $\dot{\gamma}(t)$  und  $h$  ab.*

**BEWEIS.** Wir stellen  $\ddot{\gamma}$  in der obigen Orthonormalbasis  $(e_1, e_2, e_3)$  des  $\mathbb{R}^3$  dar. Da  $\gamma$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, folgt

$$\langle \ddot{\gamma}(t), e_1(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0 .$$

Der tangentielle Anteil von  $\ddot{\gamma}$  hat dann die Gestalt

$$\langle \ddot{\gamma}(t), e_2(t) \rangle e_2(t) =: \kappa(t) e_2(t) = \kappa(t) \nu_{\gamma(t)} \times \dot{\gamma}(t) .$$

Es bleibt der normale Anteil zu berechnen. Wir gehen vor wie im Beweis von Proposition 3.26 und erhalten

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}(t), \nu_{\gamma(t)} \rangle = \langle \ddot{\gamma}(t), \nu_{\gamma(t)} \rangle - \langle \dot{\gamma}(t), \mathcal{S}_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \rangle ,$$

somit folgt

$$\langle \ddot{\gamma}(t), \nu_{\gamma(t)} \rangle = \langle \dot{\gamma}(t), \mathcal{S}_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \rangle = h_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) .$$

□

**3.31. DEFINITION.** Die obige Funktion  $\kappa$  heißt die *geodätische Krümmung* der Kurve  $\gamma$  in  $M$ .

**3.32. BEMERKUNG.** Die geodätische Krümmung spielt für Kurven auf Flächen die gleiche Rolle wie die „gewöhnliche Krümmung“ für ebene Kurven in Abschnitt 2.3. Beispielsweise kann man zeigen, dass es zu vorgegebenem Startpunkt und -vektor und vorgegebener Krümmungsfunktion lokal genau und global höchstens eine Kurve geben kann (genau eine, falls sichergestellt ist, dass die Kurve nicht „aus der Fläche hinausläuft“). Allerdings stimmt der Hopfsche Umlaufsatz nicht mehr; an seine Stelle tritt später der (lokale) Satz von Gauß-Bonnet, bei dem die Gauß-Krümmung der Fläche zusätzlich eine Rolle spielen wird.

Man erhält die (Frenet-) Krümmung der Raumkurve  $\gamma$  aus Satz 3.30 wie folgt zurück:

$$\kappa_{\text{Frenet}} = \|\ddot{\gamma}\| = \sqrt{\kappa^2 + h(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})^2} .$$

Wir wollen die zweite Fundamentalform dazu benutzen, die lokale Geometrie der Fläche besser zu verstehen. Insbesondere werden wir sehen, dass jede Fläche als Graph über ihrer Tangentialebene geschrieben werden kann.

**3.33. SATZ.** *Sei  $(M, \nu)$  eine orientierbare  $C^l$ -Fläche mit  $l \geq 2$ , sei  $p \in M$ , und sei  $(v_1, v_2)$  eine Orthonormalbasis von  $T_p M$ . Dann existiert eine Umgebung  $V \subset \mathbb{R}^2$  von 0 und eine  $C^{l-2}$ -Funktion  $k: V \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass die Abbildung  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit*

$$f(x) = p + x_1 v_1 + x_2 v_2 + k(x) \nu_p$$

eine Parametrisierung von  $M$  ist. Für diese Parametrisierung gilt

$$\begin{aligned} f(0) = p, \quad g_0^f &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (dg^f)_0 = 0, \\ k(0) = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial x_i} \Big|_0 &= 0, \quad \text{und} \quad h_0^f(e_i, e_j) = \frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_0. \end{aligned}$$

Wie in Bemerkung 3.28 (2) gesagt, gilt dieser Satz auch für nicht-orientierbare Flächen nach Wahl eines lokalen Einheitsnormalenfeldes.

**BEWEIS.** Nach einer Verschiebung dürfen wir annehmen, dass  $p = 0 \in \mathbb{R}^3$ . Nach einer Drehung des  $\mathbb{R}^3$  dürfen wir annehmen, dass  $(v_1, v_2, \nu_p) = (e_1, e_2, e_3)$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$  ist. Sei nun  $\psi: V' \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$  eine beliebige Parametrisierung von  $M$  mit  $\psi(x) = p = 0$ . Wir betrachten die Abbildung

$$a = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}: V' \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Da  $\psi$  eine Immersion ist und  $T_p M = \text{im}(d\psi_x) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ , ist  $da_x$  invertierbar. Nach dem Umkehrsatz existiert also eine Umkehrabbildung  $a^{-1}: V \rightarrow V' \subset V$ . Wir erhalten die gesuchte Parametrisierung  $f: V \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$  als  $f = \psi \circ a^{-1}$ . Aus  $f \circ a = \psi$  folgt

$$f \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \end{pmatrix}.$$

Mit  $k = f_3$  gilt also

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ k(x) \end{pmatrix} = p + x_1 v_1 + x_2 v_2 + k(x) \nu_p.$$

Aus  $f(0) = p$  folgt  $k(0) = 0$ , und aus  $T_p M = \text{im}(df_p) = \text{span}(v_1, v_2)$ , folgt  $dk_0 = 0$ .

Wir überprüfen unsere Behauptungen zur ersten Fundamentalform und ihrer ersten Ableitung an der Stelle  $p$ . Es gilt

$$g_0^f = df_0^t df_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seien jetzt  $i, j, k \in \{1, 2\}$ , dann folgt

$$\begin{aligned} (dg^f)_0(e_k)(e_i, e_j) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_0 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \Big|_0, \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_0 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \Big|_0 \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_k} \Big|_0, \nu_p, \nu_j \right\rangle + \left\langle v_i, \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_k} \Big|_0, \nu_p \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Als letztes berechnen wir die zweite Fundamentalform. Nach 3.26 gilt

$$h_0^f(e_i, e_j) = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_0, \nu_p \right\rangle = \frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_j}.$$

□

Wir benutzen diesen Satz, um uns die Bedeutung der Hauptkrümmungen besser vorzustellen. In den Übungen sehen wir, dass die Gaußkrümmung und das Verschwinden der mittleren Krümmung nicht von der Orientierung der Fläche abhängen.

**3.34. DEFINITION.** Sei  $M$  eine  $C^k$ -Fläche mit  $k \geq 2$ . Ein Punkt  $p \in M$  heißt *elliptisch*, *hyperbolisch*, *parabolisch* oder *Flachpunkt*, wenn  $K_p > 0$ ,  $K_p < 0$  oder  $K_p = 0$  und  $H \neq 0$  bzw.  $H = 0$ . Eine Fläche mit  $H_p = 0$  für alle  $p \in M$  heißt *Minimalfläche*.

**3.35. BEMERKUNG.** Wir geben einige Bemerkungen und Beispiele zu den Fällen  $K_p > 0$ ,  $K_p < 0$  und  $K_p = 0$ . Wir wenden dazu Satz 3.33 an, und nehmen an, dass  $v_1, v_2$  Hauptkrümmungsrichtungen, also Eigenvektoren zu  $\kappa_1, \kappa_2$  von  $S_p$  sind.

- (1) Sei  $p$  elliptischer Punkt. Wir behaupten, dass in einer kleinen Umgebung  $U$  von  $p$  die Fläche  $M$  die affine Tangentialebene  $p + T_p M \subset \mathbb{R}^3$  nur im Punkt  $p$  berührt und ansonsten nicht trifft.

Wegen  $K > 0$  gilt entweder  $0 < \kappa_1 < \kappa_2$  oder  $\kappa_1 < \kappa_2 < 0$ . Wir nehmen ersteres an, dann ist  $h^f$  positiv definit. Aus Satz 3.33 folgt, dass ggf. nach Verkleinerung von  $V$  die Funktion  $k$  auf  $V \setminus \{0\}$  positiv ist, und es folgt die Behauptung.

- (2) Sei  $p$  jetzt hyperbolischer Punkt. Wir behaupten, dass in jeder kleinen Umgebung  $U$  von  $p$  die Fläche  $M$  beide Seiten der affinen Tangentialebene trifft.

Aus  $K < 0$  folgt nämlich  $\kappa_1 < 0 < \kappa_2$ , so dass die Kurve  $t \mapsto f(t e_1)$  nahe  $t = 0$  auf der anderen Seite von  $p + T_p M$  als  $t \mapsto f(t e_2)$ .

Man kann sogar zeigen, dass  $M$  die affine Tangentialebene in zwei Kurven schneidet, die sich in  $p$  schneiden.

- (3) Sei  $p$  parabolisch, etwa  $0 = \kappa_1 < \kappa_2$ , dann liegt die Kurve  $t \mapsto f(t e_2)$  ganz auf einer Seite von  $p + T_p M$ , während  $t \mapsto f(t e_1)$  die affine Tangentialebene von mindestens zweiter Ordnung berührt; darüberhinaus lassen sich keine Aussagen machen.

- (4) An einem Flachpunkt schließlich lassen sich keine Aussagen machen, außer dass ganz  $M$  die affine Tangentialebene von zweiter oder höherer Ordnung berührt.

Ein Beispiel ist der „Affensattel“, gegeben als Graph der Funktion  $k(x, y) = x^3 - 3xy^2$ . Es gilt  $k(x, y) = 0$  falls  $x = 0$  oder falls  $x = \pm\sqrt{3}y$ .

Schließlich wollen wir noch auf den Begriff Minimalfläche eingehen. Dazu sei zunächst  $M$  orientierbar vorgegeben mit Einheitsnormalenfeld  $\nu$ . Sei  $f: V \rightarrow M$  eine (lokale) Parametrisierung, und sei  $\ell: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine vorgegebene  $\mathcal{C}^2$ -Funktion mit kompaktem Träger in  $\text{im } f$ , das heißt, die Teilmenge

$$\text{supp}(\ell)\overline{M \setminus \ell^{-1}(\{0\})} \subset \text{im } f$$

ist kompakt. Insbesondere sind  $\ell$  und  $d\ell$  beschränkt.

Für  $r \in \mathbb{R}$  nahe 0 betrachten wir  $f_r: V \rightarrow U_r\mathbb{R}^3$  mit

$$f_r(x) = f(x) + r\ell(f(x))\nu^f(x).$$

Für  $|r|$  klein genug ist  $f_r$  wieder eine Immersion, parametrisiert also lokal eine Fläche, vergleiche dazu Übung 3 von Blatt 9. Man kann zeigen, dass für ein hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  alle Parametrisierungen  $f': V \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\|f(x) - f'(x)\| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \|df_x - df'_x\| < \varepsilon$$

Flächen liefern, die sich (ggf. nach Verkleinern von  $V$ ) auch durch eine Parametrisierung  $f_r$  vom obigen Typ darstellen lassen.

3.36. LEMMA. *Es seien  $M$ ,  $f$ ,  $\ell$  und  $f_r$  wie oben definiert, dann gilt*

$$\left. \frac{d}{dr} \right|_0 A(\text{im } f_r) = - \int_U 2\ell \cdot H \, dA.$$

Insbesondere lässt sich der Flächeninhalt von  $M$  durch eine kleine Deformation in Richtung von  $H\nu$  verkleinern, falls  $H_p \neq 0$  für ein  $p \in U$  und somit  $H \neq 0$  auf einer hinreichend kleinen Umgebung von  $p$  in  $U$  gilt. Wenn ein Flächenstück — etwa bei vorgegebenem Rand — den Flächeninhalt minimiert, dann muss im Innern der Fläche also  $H = 0$  gelten. Nicht alle Flächen mit  $H = 0$  minimieren tatsächlich den Flächeninhalt (Übung). Minimalflächen sind also nur kritische Punkte des Flächeninhalts, nicht notwendig lokale Minima.

BEWEIS. Wir setzen  $\ell^f = \ell \circ f$  und definieren eine Abbildung  $F: V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch

$$F(x, r) = f_r(x) = f(x) + r\ell^f(x)\nu^f(x).$$

Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned} \left\langle \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_0 df_r|_x(e_i), df_r|_x(e_j) \right\rangle &= \left\langle \left. \frac{\partial^2 F}{\partial e_i \partial r} \right|_0, df_x(e_j) \right\rangle \\ &= \left\langle dl_x(e_i)\nu^f(x) - \ell^f(x)S_{f(x)}(df_x(e_i)), df_x(e_j) \right\rangle \\ &= -\ell^f(x)h_x^f(e_i, e_j), \end{aligned}$$

es folgt

$$\frac{\partial}{\partial r} \Big|_0 g_x^{f_r} = -2\ell^f(x) h_x^f.$$

Als nächstes berechnen wir die Ableitung einer  $2 \times 2$ -Determinante. Es gilt

$$\begin{aligned} \left( \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)' &= a'd - b'c - c'b + d'a = \operatorname{tr} \left( \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \operatorname{tr} \left( \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \right), \end{aligned}$$

also kurz  $(\det A)' = \det A \operatorname{tr}(A' A^{-1})$ . Diese Formel gilt übrigens für invertierbare quadratische Matrizen beliebiger Größe.

Aus dem obigen folgt sofort

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \Big|_{r=0} \det(g_x^{f_r}) &= \det(g_x^f) \operatorname{tr}(-2\ell^f(x) h_x^f (g_x^f)^{-1}) \\ &= -2\ell^f(x) \det(g_x^f) \operatorname{tr}(S_x^f) = -4\ell^f(x) \det(g_x^f) H^f(x). \end{aligned}$$

Da das Flächenelement  $A^{f_r}$  in  $r$  stetig differenzierbar ist und die beschränkt ist, da  $\ell^f$  kompakten Träger in  $V$  hat, dürfen wir Differentiation und Integration vertauschen, und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \Big|_0 A(\operatorname{im} f_r) &= \int_V \frac{\partial}{\partial r} \Big|_0 \sqrt{\det(df_r|_x^t \cdot df_r|_x)} dx_1 dx_2 \\ &= - \int_V \frac{4\ell^f(x) \det(g_x^f) H^f(x)}{2 \sqrt{\det(df_r|_x^t \cdot df_r|_x)}} dx_1 dx_2 \\ &= - \int_V 2\ell^f(x) \cdot H^f(x) \sqrt{\det(df_r|_x^t \cdot df_r|_x)} dx_1 dx_2 \\ &= - \int_U 2\ell H dA. \quad \square \end{aligned}$$

### 3.4. Der Levi-Civita-Zusammenhang

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst einen „Zusammenhang“ definieren, d.h., eine Konstruktion für die Ableitung von tangentialen Vektorfeldern nach tangentialen Vektorfeldern. Die naive Ableitung im  $\mathbb{R}^3$  liefert leider keine Tangentialvektoren, so dass wir nachträglich wieder auf  $TM$  projizieren müssen. In Karten erhalten wir einen erstaunlich komplizierten Ausdruck für diese Ableitung, der aber nur noch von der ersten Fundamentalform und ihren Ableitungen abhängt, also ein Objekt der „inneren Geometrie“ darstellt. Leider kommutieren unter diesem Zusammenhang die Richtungsableitungen nicht mehr, statt dessen erhalten wir als Fehlerterm die Gaußsche Krümmung, die somit ebenfalls eine Größe der inneren Geometrie darstellt. Schließlich untersuchen wir noch die Ableitung der zweiten Fundamentalform und erhalten den Satz von Codazzi-Mainardi.

Zur Erinnerung: Ein  $\mathcal{C}^k$ -Vektorfeld  $X$  auf  $\mathbb{R}^n$  ist eine Abbildung  $X \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ . Es seien

$$X_p = \sum_{i=1}^n X_i(p) e_i \quad \text{und} \quad Y_p = \sum_{j=1}^n Y_j(p) e_j .$$

Wir können  $X$  nach  $Y$  ableiten, dafür schreiben wir

$$dX_p(Y_p) = Y_p(X) = \sum_{i,j=1}^n Y_j(p) \left. \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right|_p e_i \in \mathbb{R}^n .$$

Die Richtungsableitungen bilden dann wieder die Komponenten eines Vektorfeld  $Y(X)$  auf  $\mathbb{R}^n$ .

3.37. DEFINITION. Seien  $X, Y$  Vektorfelder im  $\mathbb{R}^n$ , dann heißt das Vektorfeld  $[X, Y]$  mit

$$[X, Y]_p = X_p(Y) - Y_p(X)$$

die *Lie-Klammer* von  $X$  und  $Y$ .

3.38. BEMERKUNG. Wir wissen aus der Analysis, dass Richtungsableitungen (nach konstanten Vektorfeldern) kommutieren. Für Vektorfelder  $X, Y: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  gilt jedoch

$$\begin{aligned} X_p(Y(h)) - Y_p(X(h)) &= \sum_{i,j=1}^n \left( X_i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \left( Y_j \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - Y_j(p) \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \left( X_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left( X_i(p) \left. \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \right|_p \left. \frac{\partial h}{\partial x_j} \right|_p + X_i(p) Y_j(p) \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} \right. \\ &\quad \left. - Y_j(p) \left. \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right|_p \left. \frac{\partial h}{\partial x_i} \right|_p - Y_j(p) X_i(p) \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i} \right) \\ &= dh_p(X_p(Y) - Y_p(X)) = [X, Y]_p(h) . \end{aligned}$$

Somit kommutieren zwar Richtungsableitungen nach nicht-konstanten Vektorfeldern nicht mehr, allerdings nur bis auf die erste Ableitung nach ihrer Lie-Klammer.

Sei jetzt  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine Fläche, und seien  $X, Y: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  tangentielle Vektorfelder wie in Definition 3.19. Das Differential  $dX_p(Y_p) = Y_p(X)$  aus Bemerkung 3.9 (4) liefert wiederum ein Vektorfeld  $Y(X): M \rightarrow \mathbb{R}^3$  längs  $M$ , das aber nicht mehr tangential sein muss. Man vergleiche dies damit, dass die Richtungsableitung des Geschwindigkeitsvektors einer parametrisierten Kurve im allgemeinen nicht tangential an die Kurve ist, es sei denn, die erste Frenet-Krümmung der Kurve verschwindet.

Es sei  $(v_1, v_2)$  eine Orthonormalbasis von  $T_p M$  und  $\nu \in N_p M$  ein Einheitsnormalenvektor. Dann ist für alle  $w \in \mathbb{R}^3$  offensichtlich der Vektor

$$w - \langle w, \nu \rangle \nu = \langle w, v_1 \rangle v_1 + \langle w, v_2 \rangle v_2 \in T_p M$$

unabhängig von  $v_1, v_2$  und  $\nu$ .



3.39. DEFINITION. Sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine Fläche, sei  $p \in M$ , sei  $\nu_p \in N_p M$  ein Einheitsnormalenvektor im Punkt  $p$ , und sei  $v \in \mathbb{R}^3$ , dann heißt

$$v^\top = v - \langle v, \nu \rangle \nu \in T_p M$$

der *tangentiale Anteil* von  $v$  im Punkt  $p$ .

Seien  $X, Y: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  zwei tangentielle Vektorfelder längs  $M$ , dann heißt das Vektorfeld  $\nabla_Y X$  (sprich „nabla Y X“) mit

$$(\nabla_Y X)(p) = dX_p(Y_p)^\top = Y_p(X)^\top$$

die *kovariante Ableitung* von  $X$  nach  $Y$ , und die Ableitungsvorschrift  $\nabla$ , die zwei tangentialen Vektorfeldern längs  $M$  ein weiteres zuordnet, heißt der *Levi-Civita-Zusammenhang* von  $M$ .

3.40. BEMERKUNG. Im Satz 3.30 von Meusnier ist uns der Levi-Civita-Zusammenhang implizit bereits begegnet. Sei nämlich  $\gamma: I \rightarrow M$  nach Bogenlänge parametrisiert, dann setzen wir das Vektorfeld  $\dot{\gamma}$  längs  $\gamma$  zu einem Vektorfeld längs  $M$  fort (das geht, denn in einer Karte von  $M$  ist  $\gamma$  lokal eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^2$  nach Satz 2.19). Wir folgern, dass

$$\kappa \cdot \nu \times \dot{\gamma} = \ddot{\gamma}^\top = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}.$$

Insbesondere verschwindet die geodätische Krümmung  $\kappa(s)$  von  $\gamma$  genau dann, wenn  $\nabla_{\dot{\gamma}(s)} \dot{\gamma} = 0$ . Kurven, bei denen das auf dem gesamten Definitionsbereich gilt, nennt man *geodätische Linien* oder kurz *Geodätische*.

Diese kovariante Ableitung hat zahlreiche wichtige Eigenschaften, die wir nun zusammenfassen wollen.

3.41. PROPOSITION. *Es sei  $\nabla$  der Levi-Civita-Zusammenhang auf einer  $\mathcal{C}^k$ -Fläche  $M \subset \mathbb{R}^3$  mit  $k \geq 2$ , es seien  $X, Y, Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  tangentielle Vektorfelder, und es seien  $f \in \mathcal{C}^0(M)$ ,  $g \in \mathcal{C}^1(M)$ .*

(1) *Die Ableitung  $\nabla_Y X$  ist  $\mathcal{C}^0(M)$ -linear in  $Y$ , das heißt*

$$\nabla_{fY+gZ} X = f \nabla_Y X + g \nabla_Z X.$$

(2) *Die Ableitung  $\nabla_Y X$  ist  $\mathbb{R}$ -linear in  $X$ , das heißt für  $r, s \in \mathbb{R}$  gilt*

$$\nabla_Y (rX + sZ) = r \nabla_Y X + s \nabla_Y Z.$$

(3) *Die Ableitung  $\nabla_Y X$  ist derivativ in  $X$ , das heißt, es gilt die Leibniz-Regel*

$$\nabla_Y (fX) = Y(f) \cdot X + f \cdot \nabla_X Y.$$

*Die Eigenschaften (1)–(3) fasst man gern zusammen, indem man sagt: „ $\nabla$  ist ein Zusammenhang.“*

(4) *Sei  $\nu$  lokales Einheitsnormalenfeld, dann gilt*

$$Y(X) = \nabla_Y X + h(X, Y) \cdot \nu.$$

(5) Der Levi-Civita-Zusammenhang ist torsionsfrei, das heißt, es gilt

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Insbesondere ist die Lie-Klammer tangentialer Vektorfelder längs  $M$  wohldefiniert und tangential an  $M$ .

(6) Der Levi-Civita-Zusammenhang ist metrisch oder auch Riemannsch, das heißt, es gilt eine weitere Leibniz-Regel

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Der Beweis ist nicht schwer, hilft aber hoffentlich, zumindest die Aussagen (3)–(6) besser zu verstehen. In (1) würde man auf den ersten Blick  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Linearität erwarten, da das die natürliche Differenzierbarkeitsordnung eines Vektorfeldes auf einer  $\mathcal{C}^k$ -Fläche ist. Da der Raum der  $\mathcal{C}^0$ -Funktionen aber den Raum der  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Funktionen umfasst, ist  $\mathcal{C}^0$ -Linearität die stärkere Aussage.

BEWEIS. Wir leiten Vektorfelder wieder komponentenweise mit Hilfe von Bemerkung 3.9 (4) ab.

Die Aussagen (1) und (2) folgen unmittelbar aus der Linearität der Differentials, und zu (3) beachte, dass

$$\begin{aligned} \nabla_Y(fX)_p &= Y_p(fX)^\top = (Y_p(f) X_p + f(p) Y_p(X))^\top \\ &= Y_p(f) X_p + f(p) (\nabla_Y X)_p. \end{aligned}$$

Sei nun  $\nu$  ein Einheitsnormalenfeld, dann gilt ähnlich wie im Beweis von Proposition 3.26, dass

$$0 = Y_p \langle X, \nu \rangle = \langle Y_p(X), \nu_p \rangle - \langle X_p, S_p(Y_p) \rangle,$$

also

$$Y_p(X) = Y_p(X)^\top + \langle Y_p(X), \nu_p \rangle \nu_p = \nabla_{Y_p} X + h_p(X, Y) \nu_p.$$

Für den nächsten Schritt setzen wir  $X$  und  $Y$  auf eine kleine Umgebung  $U$  von  $p$  im  $\mathbb{R}^3$  fort. Sei etwa  $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Untermannigfaltigkeitskarte, und  $q \in U$  nahe  $p$ , dann definieren wir  $q' \in M$  durch

$$\Phi(q') = \begin{pmatrix} \Phi_1(q) \\ \Phi_2(q) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und setzen  $X(q) = X(q')$ .

Wir folgern (5) aus (4), der Symmetrie der zweiten Fundamentalform, und Definition 3.37, denn es gilt

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = X(Y)^\top - Y(X)^\top = X(Y) - Y(X) = [X, Y].$$

Aus der Konstruktion von  $\nabla$  folgt (6), denn da  $Y$  und  $Z$  tangentiale Vektorfelder sind, gilt

$$g(\nabla_X Y, Z) = \langle X(Y)^\top, Z \rangle = \langle X(Y), Z \rangle,$$

somit nach der klassischen Produktregel aus der Analysis, komponentenweise angewandt,

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle X(Y), Z \rangle + \langle Y, X(Z) \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle. \quad \square$$

Wir wollen jetzt den Levi-Civita-Zusammenhang mit Hilfe einer Parametrisierung  $f$  beschreiben. Dazu nehmen wir an, dass  $f = \varphi^{-1}$  für eine Karte  $\varphi: U \rightarrow V$  von  $M$ . Wir benutzen die Koordinatenvektorfelder  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  und  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$  aus Bemerkung 3.21 (3), um auf  $U$  Basisfelder  $\frac{\partial}{\partial \varphi_1}$  und  $\frac{\partial}{\partial \varphi_2}$  mit

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_p = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(p)) \in T_p M$$

zu definieren. Für die Richtungsableitungen einer Funktion  $h$  nach diesen Feldern schreiben wir dann

$$d_p h \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right) = \frac{\partial h}{\partial \varphi_i},$$

das heißt, wir betrachten  $h$  gewissermaßen als Funktion der Koordinaten  $\varphi_1, \varphi_2$  von  $M \subset \mathbb{R}^3$ . Da  $\frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_p$  bezüglich der Karte  $\varphi$  durch den Standardbasisvektor  $e_i$  dargestellt wird, gilt

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_i}(h) = \frac{\partial(h \circ f)}{\partial x_i}.$$

3.42. DEFINITION. Die Koeffizienten  $\Gamma_{ij}^k: U \rightarrow \mathbb{R}$  in

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_p} \frac{\partial}{\partial \varphi_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(p) \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \Big|_p$$

für  $i, j \in \{1, 2\}$  heißen *Christoffel-Symbole erster Art* bezüglich  $f$ , und die Koeffizienten

$$\Gamma_{ijk}(p) = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_p} \frac{\partial}{\partial \varphi_j}, \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \Big|_p \right\rangle$$

für  $i, j, k \in \{1, 2\}$  heißen *Christoffel-Symbole zweiter Art* bezüglich  $f$ .

Nach Bemerkung 3.11 (1) gilt

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_{f(x)}, \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \Big|_{f(x)} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x, \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_x \right\rangle = (g_x^f)_{ij}.$$

Wir schreiben in Zukunft kurz  $g_{ij}(x) = (g_x^f)_{ij}$  und  $g^{ij}(x) = ((g_x^f)^{-1})_{ij}$  für die dazu inverse Matrix. Außerdem schreiben wir  $g_{ij}^\varphi(p)$  und  $g_\varphi^{ij}(p)$  für  $g_{ij}(\varphi(p))$  bzw.  $g^{ij}(\varphi(p))$ .

3.43. BEMERKUNG. Wir sammeln ein paar wichtige Eigenschaften der Christoffel-Symbole.

- (1) Die Christoffel-Symbole erster Art und zweiter Art hängen zusammen durch die Gleichungen

$$\Gamma_{ijk} = \sum_{l=1}^2 g_{kl}^\varphi \Gamma_{ij}^l \quad \text{und} \quad \Gamma_{ij}^k = \sum_{l=1}^2 g_\varphi^{kl} \Gamma_{ijl}.$$

- (2) Es seien  $X$  und  $Y$  zwei beliebige tangentielle Vektorfelder an  $M$ , dann existieren Funktionen  $X_1^\varphi, X_2^\varphi, Y_1^\varphi, Y_2^\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$X|_U = \sum_{i=1}^2 X_i^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \quad \text{und} \quad Y|_U = \sum_{j=1}^2 Y_j^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi_j},$$

da die Koordinatenfelder  $\frac{\partial}{\partial \varphi_1}$  und  $\frac{\partial}{\partial \varphi_2}$  an jedem Punkt  $p \in \text{im } f$  eine Basis von  $T_p M$  bilden. Wir folgern aus Proposition 3.41 (1)–(3), dass

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_{i,j=1}^2 X_i^\varphi \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi_i}} \left( Y_j^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 X_i^\varphi \left( \frac{\partial Y_j^\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \varphi_j} + Y_j^\varphi \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \right) \\ &= \sum_{i,k=1}^2 X_i^\varphi \left( \frac{\partial Y_k^\varphi}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^2 Y_j^\varphi \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial \varphi_k}. \end{aligned}$$

Wir wollen uns überlegen, dass die Lie-Klammer der Koordinatenvektorfelder verschwindet. Zunächst einmal wird

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)} = df_{\varphi(p)}(e_i)$$

in der Karte  $\varphi$  dargestellt durch den Einheitsvektor  $e_i$ . Komponentenweises Ableiten wie in Bemerkung 3.9 (4) liefert also

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_p \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \right) = d \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \circ f \right)_{\varphi(p)}(e_i) = d \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_{\varphi(p)}(e_i) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\varphi(p)}.$$

Somit ergibt sich aus dem Satz von Schwarz, dass

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \right]_p = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\varphi(p)} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \Big|_{\varphi(p)} = 0.$$

Wir können jetzt die Christoffel-Symbole bezüglich  $f$  allein mit Hilfe der ersten Fundamentalform und ihrer ersten Ableitung bestimmen.

**3.44. PROPOSITION.** *Sei  $f: V \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$  eine Parametrisierung einer Fläche, und seien  $i, j, k \in \{1, 2\}$ , dann gelten für die Christoffelsymbole folgende Beziehungen:*

- (1) Symmetrie:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad \text{und} \quad \Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}.$$

- (2) Metrizität:

$$\frac{\partial g_{ij}^\varphi}{\partial \varphi_k} = \Gamma_{kij} + \Gamma_{kji}.$$

(3) Koszul-Formeln:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}^\varphi}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial g_{ik}^\varphi}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial g_{ij}^\varphi}{\partial \varphi_k} \right)$$

und

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 g_\varphi^{kl} \left( \frac{\partial g_{jl}^\varphi}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial g_{il}^\varphi}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial g_{ij}^\varphi}{\partial \varphi_l} \right).$$

BEWEIS. Symmetrie folgt aus Proposition 3.41 (5), denn

$$\sum_{k=1}^2 (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \frac{\partial}{\partial \varphi_k} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi_i}} \frac{\partial}{\partial \varphi_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi_j}} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} = \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \right] = 0.$$

Genauso folgern wir die Metrizität, diesmal aber aus 3.41 (6), denn es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}^\varphi}{\partial \varphi_k} &= \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi_k}} \frac{\partial}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi_i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi_k}} \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \right\rangle = \Gamma_{kij} + \Gamma_{kji}. \end{aligned}$$

Um die Koszul-Formel (3) zu erhalten, addieren wir drei Versionen von (2) und wenden dann (1) an.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \varphi_k} \right) &= \frac{\Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj}}{2} + \frac{\Gamma_{jik} + \Gamma_{jki}}{2} - \frac{\Gamma_{kij} + \Gamma_{kji}}{2} \\ &= \frac{\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}}{2} = \Gamma_{ijk}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die erste Gleichung in (3). Die zweite ergibt sich daraus aus Bemerkung 3.43 (1).  $\square$

Da  $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}$  in der Karte  $\varphi$  durch  $e_i$  dargestellt wird, gilt  $\frac{\partial g_{jk}^\varphi}{\partial \varphi_i} \circ f = \frac{\partial g_{jk}^f}{\partial x_i}$ . Die Funktionen  $\Gamma_{ijk} \circ f$  und  $\Gamma_{ij}^k \circ f: V \rightarrow \mathbb{R}$  werden also gegeben durch

$$\Gamma_{ijk} \circ f = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}^f}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}^f}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}^f}{\partial x_k} \right)$$

und

$$\Gamma_{ij}^k \circ f = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 g_f^{kl} \left( \frac{\partial g_{jl}^f}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}^f}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}^f}{\partial x_l} \right).$$

Wir ziehen daraus zwei einfache Schlussfolgerungen.

- 3.45. FOLGERUNG. (1) *Der Levi-Civita-Zusammenhang ist eine Größe der inneren Geometrie, d.h., er hängt nur von der ersten Fundamentalform ab, aber nicht von der Lage der Fläche im umgebenden Raum  $\mathbb{R}^3$ .*
- (2) *Für die Parametrisierung  $f$  von  $M$  um  $p = f(0)$  aus Satz 3.33 gilt  $\Gamma_{ij}^k(p) = \Gamma_{ijk}(p) = 0$ .*

BEWEIS. Aussage (1) ist wegen Proposition 3.44 (3) offensichtlich. Aussage (2) folgt, da für die genannte Parametrisierung ja

$$\left. \frac{\partial g_{ij}^\varphi}{\partial \varphi_k} \right|_p = \left. \frac{\partial g_{ij}^f}{\partial x_k} \right|_0 = 0. \quad \square$$

### 3.5. Die Sätze von Gauß und Codazzi-Mainardi

Man könnte jetzt vermuten, dass eine noch geschicktere Wahl der Parametrisierung  $f = \varphi^{-1}: V \rightarrow U \subset M$  uns  $\Gamma_{ij}^k = 0$  auf ganz  $U$  liefert. In diesem Fall entspräche also der Levi-Civita-Zusammenhang nichts anderem als der gewöhnlichen Richtungsableitung auf  $V$ . Wir werden bald sehen, dass das nicht gehen kann. Dazu wollen wir unsere Betrachtungen zur zweiten Ableitung am Anfang dieses Abschnitts auf Flächen übertragen. Wir werden dabei nicht nur sehen, dass zweite Ableitungen nach Vektorfeldern nicht immer symmetrisch sein müssen, sondern auch, dass bei der zweiten kovarianten Ableitung von Vektorfeldern nicht einmal Bemerkung 3.38 gilt.

3.46. DEFINITION. Sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine Fläche mit Levi-Civita-Zusammenhang  $\nabla$ , sei  $k$  eine Funktion auf  $M$ , und seien  $X, Y, Z$  Vektorfelder auf  $M$ . Die *Hesse-Form* von  $k$  ist definiert durch

$$d^2k(X, Y) = X(Y(k)) - (\nabla_X Y)(k).$$

Die *zweite kovariante Ableitung* von  $Z$  nach  $X$  und  $Y$  ist definiert durch

$$\nabla_{X,Y}^2 Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_{\nabla_X Y} Z.$$

Der *Riemannsche Krümmungstensor* ist definiert durch

$$R_{X,Y} Z = \nabla_{X,Y}^2 Z - \nabla_{Y,X}^2 Z.$$

3.47. BEMERKUNG. Wir betrachten diese Konstruktionen im Euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$  für die „gewöhnliche“ Richtungsableitung von Vektorfeldern vom Anfang dieses Abschnitts. Seien also Vektorfelder  $X, Y$  im  $\mathbb{R}^n$  mit

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \cdot e_i \quad \text{und} \quad Y = \sum_{j=1}^n Y_j \cdot e_j$$

gegeben, wobei die  $X_i, Y_j$  wieder glatte Funktionen seien, und sei  $p \in \mathbb{R}^n$ . Dann folgt aus der Produktregel, dass

$$\begin{aligned} d^2 f_p(X, Y) &= X(Y(k))_p - (X(Y))(k)_p \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left( X_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( Y_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) (p) - X_i(p) \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} (p) \frac{\partial k}{\partial x_j} (p) \right) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n X_i(p) Y_j(p) \frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_j} (p). \end{aligned}$$

Also ist die Hesseform an der Stelle  $p$  das gleiche wie die zweite Ableitung nach zwei konstanten Vektorfeldern

$$\sum_{i=1}^n X_i(p) \cdot e_i \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^n Y_j(p) \cdot e_j .$$

Insbesondere gehen die Ableitungen von  $Y$  nicht ein.

Analoges gilt dann auch für die zweite kovariante Ableitung von Vektorfeldern, da wir Vektorfelder im  $\mathbb{R}^n$  ja komponentenweise genauso ableiten wie Funktionen. Wir können nun entweder Bemerkung 3.38 oder die obige Formel benutzen, um zu zeigen, dass im  $\mathbb{R}^n$  stets  $R_{X,Y}Z = 0$  gilt, unabhängig von  $X, Y, Z$ . Auf Flächen wird das anders sein, wie wir bald sehen werden.

3.48. PROPOSITION. *Sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine  $\mathcal{C}^l$ -Fläche mit  $l \geq 3$ , und sei  $\nabla$  der Levi-Civita-Zusammenhang. Dann gilt:*

- (1) *Die Hesseform ist symmetrisch und  $\mathcal{C}^1$ -bilinear.*
- (2) *Die zweite kovariante Ableitung  $\nabla^2$  ist  $\mathcal{C}^1$ -linear in den ersten beiden Argumenten.*
- (3) *Der Riemannsche Krümmungstensor  $R$  ist  $\mathcal{C}^2$ -linear in allen Argumenten und für je vier tangentielle Vektorfelder  $X, Y, Z, W$  gilt*

$$R_{X,Y}Z + R_{Y,X}Z = 0 \quad \text{und} \quad \langle R_{X,Y}Z, W \rangle + \langle Z, R_{X,Y}W \rangle = 0 .$$

BEWEIS. Zunächst zu Aussage (1) über die Hesse-Form. Die  $\mathcal{C}^1$ - (ja sogar  $\mathcal{C}^0$ -) Linearität der Hesse-Form  $d^2k$  im ersten Argument sollte klar sein, denn für differenzierbare Funktionen  $f, k$  und Vektorfelder  $X, Y$  gilt ja

$$(fX)(Y(k)) - (\nabla_{fX}Y)(k) = g(X(Y(k)) - (\nabla_XY)(k)) .$$

Daraus folgt  $\mathcal{C}^1$ -Linearität im zweiten Argument, sobald wir Symmetrie gezeigt haben. Aber Symmetrie folgt aus Bemerkung 3.38 über die Lie-Klammer und aus der Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhangs, siehe Proposition 3.41 (5), denn

$$\begin{aligned} d^2k(X, Y) - d^2k(Y, X) &= X(Y(k)) - Y(X(k)) - (\nabla_XY - \nabla_YX)(k) \\ &= [X, Y](k) - [Y, X](k) = 0 . \end{aligned}$$

Die  $\mathcal{C}^1$ -Linearität von  $\nabla^2$  im ersten Argument folgt unmittelbar aus der  $\mathcal{C}^0$ -Linearität von  $\nabla$  im ersten Argument, siehe Proposition 3.41 (1). Additivität in der zweiten Gleichung ist klar, und für die Homogenität benutzen wir Proposition 3.41 (1)–(3) und erhalten

$$\begin{aligned} \nabla_{X,hY}^2Z &= \nabla_X(h\nabla_YZ) - \nabla_{X(h)Y+h\nabla_XY}Z \\ &= X(h)\nabla_YZ + h\nabla_X\nabla_YZ - X(h)\nabla_YZ - h\nabla_{\nabla_XY}Z \\ &= h\nabla_X\nabla_YZ - h\nabla_{\nabla_XY}Z = h\nabla_{X,Y}^2Z . \end{aligned}$$

Damit ist die  $\mathcal{C}^1$ -Linearität von  $R$  in den ersten zwei Argumenten ebenfalls bewiesen. Wir zeigen zunächst die zwei angegebenen Antisymmetrien in (3). Die

erste folgt unmittelbar aus Definition 3.46. Für die zweite benutzen wir, dass der Levi-Civita-Zusammenhang nach Proposition 3.41 (6) metrisch ist und erhalten

$$\begin{aligned}
\langle R_{X,Y}Z, W \rangle &= \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle - \langle \nabla_Y \nabla_X Z, W \rangle - \langle \nabla_{[X,Y]} Z, W \rangle \\
&= X \langle \nabla_Y Z, W \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X W \rangle - Y \langle \nabla_X Z, W \rangle + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y W \rangle \\
&\quad - [X, Y] \langle Z, W \rangle + \langle Z, \nabla_{[X,Y]} W \rangle \\
&= X (Y \langle Z, W \rangle) - X \langle Z, \nabla_Y W \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X W \rangle \\
&\quad - Y (X \langle Z, W \rangle) + Y \langle Z, \nabla_X W \rangle + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y W \rangle \\
&\quad - [X, Y] \langle Z, W \rangle - \langle Z, \nabla_{[Y,X]} W \rangle \\
&= \langle Z, \nabla_Y \nabla_X W \rangle - \langle Z, \nabla_X \nabla_Y W \rangle - \langle Z, \nabla_{[Y,X]} W \rangle \\
&= \langle Z, R_{Y,X} W \rangle = -\langle Z, R_{X,Y} W \rangle .
\end{aligned}$$

Für das dritte Argument ist Additivität wieder klar, und die obige Antisymmetrie liefert  $\mathcal{C}^2$ -Homogenität, denn es gilt

$$\langle R_{X,Y}(kZ), W \rangle = -\langle kZ, R_{X,Y}W \rangle = -k \langle Z, R_{X,Y}W \rangle = k \langle R_{X,Y}Z, W \rangle$$

für alle Vektorfelder  $W$ , folglich auch  $R_{X,Y}(kZ) = k R_{X,Y}Z$ .  $\square$

**3.49. FOLGERUNG.** *Die Ausdrücke  $d^2k(X, Y)$  oder  $R_{X,Y}Z$  an einer Stelle  $p \in M$  hängen nur von den Vektoren  $X(p)$ ,  $Y(p)$  und  $Z(p)$  ab, nicht von deren Fortsetzungen als Vektorfelder auf  $M$ .*

**BEWEIS.** Zum Beweis gehen wir vor wie in Bemerkung 3.47. Dazu wählen wir eine lokale Parametrisierung  $f = \varphi^{-1}: V \rightarrow U \subset M$  und stellen unsere Vektorfelder bezüglich der Koordinatenfelder dar durch

$$X = X_1^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + X_2^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi_2}, \quad Y = Y_1^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + Y_2^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \quad \text{und} \quad Z = Z_1^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + Z_2^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi_2} .$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
d^2k(X, Y) &= \sum_{i,j=1}^2 X_i^\varphi Y_j^\varphi d^2k \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \right) \\
\text{und} \quad R_{X,Y}Z &= \sum_{i,j,k=1}^2 X_i^\varphi Y_j^\varphi Z_k^\varphi R_{\frac{\partial}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial \varphi_j}} \frac{\partial}{\partial \varphi_k},
\end{aligned}$$

und das hängt an der Stelle  $p$  nur noch von den Funktionswerten  $X_i^\varphi(p)$ ,  $Y_j^\varphi(p)$  und  $Z_k^\varphi(p)$  ab. Diese wiederum sind die Koordinaten von  $X(p)$ ,  $Y(p)$  und  $Z(p)$  in der Basis  $(\frac{\partial}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial}{\partial \varphi_2})$  von  $T_pM$ .  $\square$

Somit erhalten wir jetzt multilineare Abbildungen

$$\begin{aligned}
d_p^2k: T_pM \times T_pM &\rightarrow \mathbb{R}, \quad (\nabla^2 \cdot, \cdot)_p: T_pM \times T_pM \rightarrow T_pM, \\
\text{und} \quad R_{\cdot, \cdot} |_p: T_pM \times T_pM \times T_pM &\rightarrow T_pM .
\end{aligned}$$



3.50. BEMERKUNG. Wir können den Riemannschen Krümmungstensor ähnlich wie den Zusammenhang  $\nabla$  durch Funktionen  $R_{ijk}^l$  bzw.  $R_{ijkl}: U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $i, j, k, l \in \{1, 2\}$  darstellen durch

$$R \frac{\partial}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \frac{\partial}{\partial \varphi_k} = \sum_{l=1}^2 R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial \varphi_l} \quad \text{bzw.} \quad R_{ijkl} = \left\langle R \frac{\partial}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \frac{\partial}{\partial \varphi_k}, \frac{\partial}{\partial \varphi_l} \right\rangle.$$

Wie im Beweis der Folgerung 3.49 erhält man für beliebige Vektorfelder die Formel

$$R_{X,Y}Z = \sum_{i,j,k,l=1}^2 X_i^\varphi Y_j^\varphi Z_k^\varphi R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial \varphi_l}.$$

(1) Dann gilt wieder

$$R_{ijkl} = \sum_{m=1}^2 R_{ijk}^m g_{ml}^\varphi \quad \text{und} \quad R_{ijk}^l = \sum_{m=1}^2 R_{ijkm} g_\varphi^{ml}.$$

(2) Wegen der Antisymmetrien des Krümmungstensors in Proposition 3.48 (3) gilt  $R_{ijkl} = 0$  falls  $i = j$  oder  $k = l$ , und für die verbleibenden vier Ausdrücke folgt

$$R_{1221} = -R_{1212} = -R_{2121} = R_{2112}.$$

Somit wird der Riemannsche Krümmungstensor einer Fläche vollständig bestimmt durch die Funktion  $R_{1221}: U \rightarrow \mathbb{R}$ .

(3) Da die Lie-Klammern der Vektorfelder  $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}$  verschwinden, folgt aus der Definition des Krümmungstensors

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^2 R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial \varphi_l} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi_j}} \frac{\partial}{\partial \varphi_k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi_i}} \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \\ &= \sum_{m=1}^2 \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi_i}} \left( \Gamma_{jk}^m \frac{\partial}{\partial \varphi_m} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi_j}} \left( \Gamma_{ik}^m \frac{\partial}{\partial \varphi_m} \right) \right) \\ &= \sum_{l=1}^2 \left( \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial \varphi_i} + \sum_{m=1}^2 \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial \varphi_j} - \sum_{m=1}^2 \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l \right) \frac{\partial}{\partial \varphi_l}. \end{aligned}$$

Also lassen sich die obigen Koeffizienten berechnen als

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial \varphi_j} + \sum_{m=1}^2 (\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l).$$

Ähnlich wie bei den Christoffel-Symbolen erhalten wir die etwas einfachere Formel

$$R_{ijk}^l \circ f = \frac{\partial(\Gamma_{jk}^l \circ f)}{\partial x_i} - \frac{\partial(\Gamma_{ik}^l \circ f)}{\partial x_j} + \sum_{m=1}^2 (\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l) \circ f.$$

Mit Hilfe dieser Formel lässt sich der Krümmungstensor in einzelnen Beispielen berechnen (Übung).

Um die Definition des Krümmungstensors  $R$  zu rechtfertigen, wollen wir nun zeigen, dass  $R$  nicht immer verschwindet. Insbesondere gilt der Satz von Schwarz nicht für die zweite kovariante Ableitung von Vektorfeldern. Außerdem wollen wir zeigen, dass  $R$  tatsächlich etwas mit der Krümmung von  $M$  zu tun hat. Am einfachsten erreichen wir das, indem wir  $R$  durch wohlbekanntere Größen der äußeren Geometrie ausdrücken. So erhalten wir nicht nur das Theorema Egregium (wörtlich „herausragender Lehrsatz“) von Gauß, sondern zusätzlich auch die Codazzi-Mainardi-Gleichung. Zunächst müssen wir aber noch die Ableitung von  $h$  definieren.

3.51. DEFINITION. Sei  $B$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Bilinearform auf einer Fläche  $M$ , und seien  $X, Y, Z$  Vektorfelder auf  $M$ . Dann definieren wir die *kovariante Ableitung*  $\nabla_X B$  von  $B$  durch

$$(\nabla_X B)(Y, Z) = X(B(Y, Z)) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z) .$$

3.52. BEMERKUNG. (1) Wir zeigen wieder zunächst einmal, dass  $\nabla B$  in allen drei Argumenten  $\mathcal{C}^k$ -linear ist. Für das erste Argument ist das klar, für die beiden anderen folgt es, da zum Beispiel

$$(\nabla_X B)(Y, hZ) = h(\nabla_X B)(Y, Z) + X(h) B(Y, Z) - B(Y, X(h) Z) .$$

Wie in Folgerung 3.49 hängt  $(\nabla_X B)(Y, Z)|_p$  nur von  $X(p), Y(p), Z(p)$  ab. Wenn wir für Bilinearformen auf dem  $\mathbb{R}^n$  analog eine Ableitung einführen, dann sorgen die zusätzlichen Terme dafür, dass nur die Koeffizienten von  $B$ , aber nicht die Argumente abgeleitet werden.

(2) Dass der Levi-Civita-Zusammenhang gemäß Proposition 3.41 (6) metrisch ist, lässt sich nun auch ausdrücken durch die einfache Gleichung

$$\nabla g = 0 ,$$

d.h.,  $\nabla$  ist *parallel* bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs.

(3) Mit anderen Worten misst  $\nabla B$ , ob  $B$  eine einfache Produktregel wie in 3.41 (6) erfüllt ist. Noch anders ausgedrückt gilt nun die allgemeinere Produktregel

$$X(B(Y, Z)) = (\nabla_X B)(Y, Z) + B(\nabla_X Y, Z) + B(Y, \nabla_X Z) .$$

3.53. SATZ (Ableitungsgleichungen). Sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine  $\mathcal{C}^3$ -Fläche mit Levi-Civita-Zusammenhang  $\nabla$ , Krümmungstensor  $R$ , zweiter Fundamentalform  $h$ , Weingarten-Operator  $S$  und Gaußkrümmung  $K$ , und seien  $X, Y, Z$  Vektorfelder auf  $M$ . Dann gelten die folgenden Gleichungen.

(1) Theorema Egregium oder Gauß-Gleichung.

$$R_{X,Y}Z = h(Y, Z) S(X) - h(X, Z) S(Y) = K \cdot (\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y) .$$

(2) Codazzi-Mainardi-Gleichung.

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z) .$$

Aus der Codazzi-Mainardi-Gleichung und der Symmetrie von  $h$  folgt leicht, dass die Trilinearform  $\nabla h$  in allen Argumenten symmetrisch ist.

BEWEIS. Sei  $\nu$  ein lokales Einheitsnormalenfeld. Wir benutzen Proposition 3.41 (4) und erhalten folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} X(Y(Z)) &= X(\nabla_Y Z + h(Y, Z)\nu) \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + h(X, \nabla_Y Z)\nu + X(h(Y, Z))\nu - h(Y, Z)S(X). \end{aligned}$$

Der letzte Term ergibt sich aus der Definition 3.23 des Weingarten-Operators  $S$ . Analog berechnen wir  $Y(X(Z))$ . Außerdem haben wir wegen der Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhangs noch

$$\begin{aligned} [X, Y](Z) &= \nabla_{[X, Y]}Z + h([X, Y], Z)\nu \\ &= \nabla_{[X, Y]}Z + h(\nabla_X Y, Z)\nu - h(\nabla_Y X, Z)\nu. \end{aligned}$$

Aus Bemerkung 3.38 folgt, dass

$$X(Y(Z)) - Y(X(Z)) - [X, Y](Z) = 0. \quad (*)$$

Wir berechnen zunächst den tangentialen Anteil und erhalten die erste Gleichung in (1):

$$\begin{aligned} 0 &= (X(Y(Z)) - Y(X(Z)) - [X, Y](Z))^\top \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - h(Y, Z)S(X) - \nabla_Y \nabla_X Z + h(X, Z)S(Y) - \nabla_{[X, Y]}Z \\ &= \nabla_{X, Y}^2 Z - \nabla_{Y, X}^2 Z + h(X, Z)S(Y) - h(Y, Z)S(X) \\ &= R_{X, Y}Z - (h(Y, Z)S(X) - h(X, Z)S(Y)). \end{aligned}$$

Um hieraus die eigentliche Gauß-Gleichung, nämlich die zweite Gleichung in (1), zu erhalten, überlegen wir uns zunächst, dass die beiden Ausdrücke

$$\langle R_{X, Y}Z, W \rangle \quad \text{und} \quad K \cdot (\langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle)$$

beide antisymmetrisch in  $X$  und  $Y$  sowie in  $Z$  und  $W$  sind. Wie in Bemerkung 3.50 (2) reicht es daher aus, eine Basis  $(e_1, e_2)$  von  $T_p M$  zu wählen und beide Ausdrücke für  $X = W = e_1$  und  $Y = Z = e_2$  zu vergleichen. Wir wählen der Einfachheit halber eine Orthonormalbasis  $e_1, e_2$  von  $T_p M$  aus Hauptkrümmungsrichtungen, d.h., es gelte  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$  und  $S(e_i) = \kappa_i e_i$ . Jetzt folgt sofort unsere Behauptung, denn

$$\begin{aligned} \langle R_{e_1, e_2} e_2, e_1 \rangle &= h(e_2, e_2) \langle S e_1, e_1 \rangle - h(e_1, e_2) \langle S e_2, e_1 \rangle = \kappa_2 \cdot \kappa_1 - 0 \cdot 0 \\ &= K = K \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = K \cdot (\langle e_2, e_2 \rangle \langle e_1, e_1 \rangle - \langle e_1, e_2 \rangle \langle e_2, e_1 \rangle). \end{aligned}$$

Nun sammeln wir die Normalanteile in (\*) und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \langle X(Y(Z)) - Y(X(Z)) - [X, Y](Z), \nu \rangle \\ &= h(X, \nabla_Y Z) + X(h(Y, Z)) - h(Y, \nabla_X Z) - Y(h(X, Z)) \\ &\quad - h(\nabla_X Y, Z) + h(\nabla_Y X, Z) \\ &= (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z), \end{aligned}$$

aber das ist gerade die Codazzi-Mainardi-Gleichung (2).  $\square$

Das „herausragende“ am Theorema Egregium lässt sich am besten wie folgt ausdrücken.

3.54. FOLGERUNG. *Die Gauß-Krümmung ist eine Größe der inneren Geometrie.*

BEWEIS. Sei  $p \in M$ . Wähle eine Orthonormalbasis  $(e_1, e_2)$  von  $T_pM$ , dann folgt

$$K(p) = \langle R_{e_1, e_2} e_2, e_1 \rangle.$$

Nach Proposition 3.44 (3) und Bemerkung 3.50 (3) ist die rechte Seite eine Größe der inneren Geometrie, sie hängt also in einer Parametrisierung  $f$  nur von  $g^f$ , aber nicht von  $f$  selbst ab.  $\square$

3.55. BEMERKUNG. Erstaunlich daran ist auch, dass der Ausdruck  $R_{X,Y}Z$  auf den ersten Blick dritte Ableitungen einer Parametrisierung  $f$  von  $M$  enthält, während die Gauß-Krümmung aus der zweiten Fundamentalform gewonnen werden kann, die wegen Proposition 3.26 nur zweite Ableitungen von  $f$  enthält. Um das zu verstehen, überlegen wir uns, dass  $g^f$  aus ersten Ableitungen von  $f$  definiert wird, dass  $\Gamma_{ij}^k$  erste Ableitungen von  $g$ , also zweite Ableitungen von  $f$  enthält, und  $R$  wiederum Ableitungen davon enthält. Das „Wunder“ besteht also darin, dass sich die dritten Ableitungen insgesamt wieder wegheben.

Wir geben ohne Beweis eine lokale Umkehrung des Satzes 3.53 an, die in etwa dem Hauptsatz 2.26 der Kurventheorie entspricht. Ähnlich wie beim mehrdimensionalen Umkehrsatz aus der Analysis können wir eine Fläche nur lokal aus ihrer ersten und zweiten Fundamentalform zurückbestimmen. Zur Konstruktion des Levi-Civita-Zusammenhangs in diesem Kontext siehe Proposition 4.2 unten.

3.56. SATZ (Hauptsatz der lokalen Flächentheorie; Bonnet). *Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen, sei  $k \geq 3$ , sei  $(g_{ij}) \in \mathcal{C}^{k-1}(U; M_2(\mathbb{R}))$  überall symmetrisch und positiv definit, und sei  $(h_{ij}) \in \mathcal{C}^{k-1}(U; M_2(\mathbb{R}))$  überall symmetrisch, so dass die Gauß- und die Codazzi-Mainardi-Gleichung aus Satz 3.53 für  $\nabla$  und  $R$  gelten. Sei  $x \in U$ ,  $p \in \mathbb{R}^3$  und  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$  gegeben, so dass  $\langle v_i, v_j \rangle = g_{ij}(x)$  für alle  $i, j = \{1, 2\}$ .*

*Dann existiert eine Umgebung  $V \subset U$  von  $x$  und eine Parametrisierung  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  einer Fläche  $M$ , deren erste und zweite Fundamentalform bezüglich  $f$  durch  $g$  und  $h$  dargestellt werden, mit  $f(x) = p$  und  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = v_i$  für  $i = \{1, 2\}$ . Je zwei solche Parametrisierungen stimmen auf einer kleinen Umgebung von  $x$  überein.*  $\square$

Wir erhalten eine ähnliche Eindeutigkeitsaussage wie in Folgerung 2.27.

3.57. FOLGERUNG. *Sei  $V \subset \mathbb{R}^2$  offen und zusammenhängend. Zwei Flächenparametrisierungen  $f_1, f_2: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  haben genau dann die gleichen ersten und zweiten Fundamentalformen, wenn es eine orientierungserhaltende euklidische Isometrie  $G \in SO(3) \times \mathbb{R}^3$  mit  $f_2 = G \circ f_1$  gibt.*  $\square$

## KAPITEL 4

### Innere Geometrie der Flächen

In diesem Kapitel wollen wir den Zusammenhang von Gauß-Krümmung, Parallelverschiebung entlang geschlossener Kurven und geodätischer Krümmung verstehen. Höhepunkt des Kapitels ist der globale Satz von Gauß-Bonnet, der einen Zusammenhang zwischen topologischer Gestalt und Krümmungseigenschaften herstellt.

#### 4.1. Geodätische

In diesem Abschnitt wollen wir Flächen  $M$  mit einer beliebigen Riemannschen Metrik  $g$  betrachten, die — im Gegensatz zur ersten Fundamentalform — nicht von der Lage von  $M$  im umgebenden Raum abhängt. Auf diese Weise können wir mehr Beispiele von Flächen als zuvor betrachten, unter ihnen auch den hyperbolischen Raum aus Abschnitt 1.4. Der Einfachheit halber arbeiten wir zunächst nur mit offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$ .

4.1. DEFINITION. Es sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen. Eine *Riemannsche Metrik* der Klasse  $\mathcal{C}^k$  auf  $U$  ist eine  $\mathcal{C}^k$ -Funktion  $g = (g_{ij})_{i,j}: U \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ , so dass  $g_x$  für alle  $x \in U$  symmetrisch und positiv definit ist. Für  $v, w \in \mathbb{R}^2$  setzen wir

$$g_p(v, w) = v^t \cdot g_p \cdot w = \sum_{i,j=1}^2 v_i w_j g_{ij}(p).$$

Für zwei Vektorfelder  $X, Y: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  bezeichnet  $g(X, Y): U \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion  $x \mapsto g_p(X_p, Y_p)$ .

Ein Vektorfeld auf  $U \subset \mathbb{R}^2$  wird wie in Abschnitt 3.4 durch eine Funktion  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben. Den Raum aller Vektorfelder bezeichnen wir mit  $\mathfrak{X}^k(U) = \mathcal{C}^k(U; \mathbb{R}^2)$ , wobei wir die Differenzierbarkeitsordnung  $k$  meist weglassen werden. Wir bezeichnen die Koordinatenfelder mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = e_i$$

in Analogie zur Notation  $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}$ . Die Inverse Matrix zu  $(g_{ij})$  bezeichnen wir mit

$$g^{-1} = (g^{ij})_{i,j}: U \rightarrow M_2(\mathbb{R}).$$

Als erstes konstruieren wir den Levi-Civita-Zusammenhang zur Metrik  $g$ , der die Eigenschaften (1)–(3), (5) und (6) aus Proposition 3.41 erfüllt.

4.2. PROPOSITION. *Es sei  $g$  eine Riemannsche Metrik auf  $U$ , dann existiert genau eine Abbildung  $\nabla: \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)$  mit den Eigenschaften*

- (1)  $\nabla$  ist  $C^0$ -linear im ersten Argument;
- (2)  $\nabla$  ist  $\mathbb{R}$ -linear im zweiten Argument;
- (3) Es gilt die Leibnizregel  $\nabla_X(fY) = X(f) \cdot Y + f \cdot \nabla_X Y$ ;
- (4)  $\nabla$  ist torsionsfrei;
- (5)  $\nabla$  ist metrisch, das heißt es gilt  $\nabla g = 0$ .

BEWEIS. Aus den geforderten Eigenschaften folgt die Koszul-Formel aus Proposition 3.44 (3), das heißt, es gilt

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \Big|_p \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(p) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p$$

für alle  $p \in U$ , mit

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left( \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right).$$

Für beliebige Vektorfelder  $X, Y$  folgt aus (1)–(3), dass

$$\nabla_X Y = \sum_{i,k=1}^n X_i^\varphi \left( \frac{\partial Y_k^\varphi}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n Y_j^\varphi \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \quad (*)$$

wie in Bemerkung 3.43. Damit ist die Eindeutigkeit von  $\nabla$  bewiesen.

Um die Existenz zu zeigen, müssen wir nachrechnen, dass das in (\*) konstruierte  $\nabla$  alle Eigenschaften (1)–(5) erfüllt. Diese Rechnungen wollen wir hier aber nicht durchführen.  $\square$

Man beachte, dass wir in Proposition 3.41 die Existenz von  $\nabla$  nicht überprüfen mussten, da ja  $\nabla$  durch Definition 3.39 bereits gegeben war.

4.3. DEFINITION. Es sei  $g$  eine Riemannsche Metrik auf  $U \subset \mathbb{R}^n$ , dann heißt der soeben konstruierte Zusammenhang  $\nabla$  der *Levi-Civita-Zusammenhang* auf  $(U, g)$ . Für  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$  definieren wir die *zweite kovariante Ableitung* und den *Riemannschen Krümmungstensor* durch

$$\nabla_{X,Y}^2 Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z$$

$$\text{und} \quad R_{X,Y} Z = \nabla_{X,Y}^2 Z - \nabla_{Y,X}^2 Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Die *Gaußkrümmung* von  $(U, g)$  ist definiert als

$$K = \det g^{-1} \cdot g \left( R_{\frac{\partial}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial}{\partial \varphi_2}} \frac{\partial}{\partial \varphi_2}, \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \right).$$

4.4. BEMERKUNG. Für  $\nabla^2$  und  $R$  gelten analog Proposition 3.48 (2) und (3) und Folgerung 3.49. Wie in Bemerkung 3.50 wird  $R$  komplett bestimmt durch

$$R_{ijkl} = g \left( R_{\frac{\partial}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial}{\partial \varphi_j}} \frac{\partial}{\partial \varphi_k}, \frac{\partial}{\partial \varphi_l} \right),$$

und wegen der Antisymmetrien aus Proposition 3.48 (3) reicht, es die Funktion  $R_{1221}$  zu kennen. Aus der Definition der Gaußkrümmung folgt ähnlich wie im Beweis der zweiten Gleichung in Satz 3.53 (1), dass

$$g(R_{X,Y}Z, W) = K \cdot (g(Y, Z) \cdot g(X, W) - g(X, Z) \cdot g(Y, W)) ,$$

$$\text{und daher} \quad R_{X,Y}Z = K \cdot (g(Y, Z) \cdot X - g(X, Z) \cdot Y) .$$

Wir wollen die Christoffelsymbole und die Riemannsche Krümmung für die Beispiele 4.6 (1)–(3) berechnen. Diese Metriken sind *konform*, das heißt, es gilt  $g_{ij} = u^2 \cdot \delta_{ij}$  für eine Funktion  $u: U \rightarrow \mathbb{R}$  ohne Nullstellen.

4.5. PROPOSITION. *Sei  $g = u^2 \langle \cdot, \cdot \rangle$  eine konforme Metrik auf  $U \subset \mathbb{R}^2$ , dann werden der Levi-Civita-Zusammenhang und der Riemannsche Krümmungstensor gegeben durch*

$$\Gamma_{ij}^k = u^{-1} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \delta_{jk} + \frac{\partial u}{\partial x_j} \delta_{ik} - \frac{\partial u}{\partial x_k} \delta_{ij} \right)$$

$$\text{und} \quad K = -u^{-3} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + u^{-4} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right) .$$

BEWEIS. Wir verwenden zunächst die Koszulformel und erhalten

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_l u^{-2} \delta_{kl} \left( \frac{\partial u^2 \delta_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial u^2 \delta_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial u^2 \delta_{ij}}{\partial x_k} \right) \\ &= u^{-1} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \delta_{jk} + \frac{\partial u}{\partial x_j} \delta_{ik} - \frac{\partial u}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) . \end{aligned}$$

Damit können wir alle acht Christoffelsymbole angeben:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = u^{-1} \frac{\partial u}{\partial x_1} ,$$

$$\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{11}^2 = u^{-1} \frac{\partial u}{\partial x_2} .$$

Zur Berechnung der Gauß-Krümmung benutzen wir die Formel aus Bemerkung 3.50 (3) und finden

$$\begin{aligned} K u^4 &= K \det g = R_{1221} = u^2 R_{122}^1 \\ &= u^2 \left( \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x_2} + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 \right) \\ &= -u \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - u \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 . \quad \square \end{aligned}$$

4.6. BEISPIEL. Wir betrachten drei wichtige Beispiele.

- (1) Die *Euklidische Metrik* oder *Standardmetrik* auf  $\mathbb{R}^2$  wird gegeben durch

$$g_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Für die Euklidische Ebene ist  $u = 1$  in Proposition 4.5, daher  $K = 0$ .

- (2) Betrachte die Umkehrung  $f = \varphi^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$  der stereographische Projektion aus den Übungen. Es gilt

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|^2 + 1} \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ \|x\|^2 - 1 \end{pmatrix}$$

und

$$df_x = \frac{2}{(\|x\|^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} 1 - x_1^2 + x_2^2 & -2x_1x_2 \\ -2x_1x_2 & 1 + x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Die erste Fundamentalform der  $S^2$  wird nach Bemerkung 3.11 (1) in diesen Koordinaten gegeben durch

$$g_x^f = df_x^* \cdot df_x = \frac{4}{(\|x\|^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir nennen das die *sphärische Metrik bezüglich der stereographischen Projektion*. Wir erhalten

$$u(x) = \frac{2}{1 + \|x\|^2}.$$

Nachrechnen ergibt die konstante Gaußkrümmung  $K = 1$ .

- (3) Wir definieren analog dazu eine „stereographische Projektion“ vom hyperbolischen Raum aus Abschnitt 1.4 auf den Einheitsball in Ebene  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  mit Zentrum  $-\epsilon_3$ . Dann wird die zugehörige Parametrisierung gegeben durch  $f: B_1^2(0) \rightarrow \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^3$  mit

$$f(x) = \frac{1}{1 - \|x\|^2} \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 1 + \|x\|^2 \end{pmatrix}$$

und

$$df_x = \frac{2}{(1 - \|x\|^2)^2} \begin{pmatrix} 1 + x_1^2 - x_2^2 & 2x_1x_2 \\ 2x_1x_2 & 1 - x_1^2 + x_2^2 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten jetzt die vom Lorentz-Skalarprodukt induzierte Riemannsche Metrik. Analog zu (2) erhalten wir

$$g_x^f = df_x^* \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot df_x = \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir nennen das die *hyperbolische Metrik im Poincaré-Ballmodell*. Für den hyperbolischen Raum erhalten wir

$$u(x) = \frac{2}{1 - \|x\|^2}.$$

Nachrechnen ergibt die konstante Gaußkrümmung  $K = -1$ .

Wenn wir die Länge von Kurven auf  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $S^2$  oder  $\mathbb{H}^2$  wie in Bemerkung 3.11 (3) definieren, dann erhalten wir genau die Bogenlänge der Euklidischen, sphärischen bzw. hyperbolischen Geometrie wie in Bemerkung 2.11. Man überprüft leicht, dass der in Kapitel 1 eingeführte Abstand zwischen zwei



Punkten  $p, q$  in der jeweiligen Geometrie nichts anderes ist als die innere Metrik aus Definition 2.4 zur jeweiligen Bogenlänge. Wir können also Euklidische, sphärische und hyperbolische Geometrie auch mit den Methoden dieses Abschnitts beschreiben. Insbesondere können wir in diesem Zusammenhang einen sinnvollen Flächeninhalt für Dreiecke definieren.

Als nächstes konstruieren wir einen Zusammenhang längs Abbildungen. Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  (meist  $n = 1, 2$ ) und  $F: A \rightarrow U$  differenzierbar, dann ist ein Vektorfeld längs  $F$  eine Abbildung

$$V: A \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Dabei fassen wir  $X(a)$  als Vektor im Punkt  $F(a)$  auf für alle  $a \in A$ . Wir schreiben  $\mathfrak{X}(F)$  für den Raum aller Vektorfelder längs  $F$ . Als Beispiel betrachte die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} \in \mathfrak{X}(F)$$

für alle  $i = 1, \dots, n$ . Allgemeiner sei  $Y$  ein Vektorfeld auf  $A$ , dann ist  $dF(Y) \in \mathfrak{X}(F)$  mit

$$dF(Y)|_a = dF_a(Y_a) \in \mathbb{R}^2.$$

Für jedes  $X \in (U)$  ist ebenfalls  $X \circ F \in \mathfrak{X}(F)$  ein Vektorfeld längs  $F$ .

Wir wollen jetzt Vektorfelder  $X$  längs  $F: A \rightarrow U$  ableiten, und zwar nach Vektorfeldern  $V$  auf  $A$ . Dazu benötigen wir eine Variante  $\nabla^F$  des Levi-Civita-Zusammenhangs  $\nabla$  auf  $U$ .

**4.7. PROPOSITION.** *Es gibt eine eindeutige Ableitungsvorschrift  $\nabla^F: \mathfrak{X}(A) \times \mathfrak{X}(F) \rightarrow \mathfrak{X}(F)$  mit folgenden Eigenschaften.*

- (1)  $\nabla^F$  ist  $C^0(A)$ -linear im ersten Argument;
- (2)  $\nabla^F$  ist  $\mathbb{R}$ -linear im zweiten Argument;
- (3) Für  $f \in C^1(A)$ ,  $X \in (A)$  und  $V \in (F)$  gilt die Leibnizregel

$$\nabla_X^F(fV) = X(f) \cdot V + f \cdot \nabla_X^F V;$$

- (4) Sei  $X \in (A)$ ,  $Y \in (U)$  und  $a \in A$ , dann gilt

$$\nabla_X^F(Y \circ F)|_a = \nabla_{dF_a(X_a)} Y.$$

Für  $\nabla^F$  gilt außerdem:

- (5)  $\nabla^F$  ist torsionsfrei, das heißt, für  $X, Y \in \mathfrak{X}(A)$  gilt

$$\nabla_X^F(dF(Y)) - \nabla_Y^F(dF(X)) = dF([X, Y]);$$

- (6)  $\nabla^F$  is metrisch, das heißt, für  $X \in \mathfrak{X}(A)$  und  $V, W \in (F)$  gilt

$$X(g(V, W)) = g(\nabla_X^F V, W) + g(V, \nabla_X^F W): A \rightarrow \mathbb{R}.$$

BEWEIS. Es seien  $\Gamma_{ij}^k$  die Christoffel-Symbole des Levi-Civita-Zusammenhangs auf  $(U, g)$ . Aus (1) und (4) folgt zunächst

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial a_i}}^F \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \circ F \right) \Big|_a = \nabla_{\frac{\partial F}{\partial a_i}(a)} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k,l=1}^2 \frac{\partial F_l}{\partial a_i}(a) \Gamma_{lj}^k(F(a)) \frac{\partial}{\partial x_k}(F(a)).$$

Für

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \cdot \frac{\partial}{\partial a_i} \in \mathfrak{X}(A) \quad \text{und} \quad V = \sum_{k=1}^2 V_k \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \circ F \right) \in \mathfrak{X}(F)$$

mit  $X_1, \dots, X_n, V_1, V_2: A \rightarrow \mathbb{R}$  erhalten wir wegen (1)–(3), dass

$$\begin{aligned} \nabla_X^F V &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^2 \nabla_{X_i}^F \cdot \frac{\partial}{\partial a_i} \left( V_k \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \circ F \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^2 \left( X_i \cdot \frac{\partial V_k}{\partial a_i} + \sum_{j,l=1}^2 X_i \cdot \frac{\partial F_l}{\partial a_i} \cdot V_j \cdot (\Gamma_{lj}^k \circ F) \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \circ F \right) \quad (*) \end{aligned}$$

Also ist  $\nabla^F$  eindeutig durch (1)–(4) bestimmt.

Jetzt muss man noch zeigen, dass die durch (\*) definierte Ableitungsvorschrift die Eigenschaften (1)–(6) erfüllt. Dabei folgen (5) und (6) aus den entsprechenden Eigenschaften des Levi-Civita-Zusammenhangs.  $\square$

4.8. DEFINITION. Sei  $g$  Riemannsche Metrik auf  $U$  mit Levi-Civita-Zusammenhang  $\nabla$ , und sei  $F: A \rightarrow U$  differenzierbar, dann heißt  $\nabla^F$  der Levi-Civita-Zusammenhang *längs*  $F$ .

Eine parametrisierte Kurve  $\gamma: I \rightarrow U$  heißt *Geodätische Linie* (kurz *Geodätische*), wenn  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\gamma \dot{\gamma} = 0$ .

Die Länge einer Kurve bezüglich einer Riemannschen Metrik  $g$  definieren wir wie in Bemerkung 3.11 (3). Eine Kurve  $\gamma: I \rightarrow U$  ist *nach  $g$ -Bogenlänge parametrisiert*, falls  $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 1$  auf ganz  $I$ . Wir wollen zeigen, dass kürzeste Kurven stets Geodätische sind. Dazu betrachten wir *Variationen* einer Kurve  $\gamma: I = [a, b] \rightarrow U$ , also Funktionen  $h: I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ , so dass  $h(t, 0) = \gamma(t)$  für alle  $t \in I$ . Wir erhalten also eine Familie von Kurven  $\gamma_s = h(\cdot, s): I \rightarrow U$ .

4.9. SATZ (Erste Variation der Bogenlänge). *Sei  $g$  eine Riemannsche Metrik auf  $U \subset \mathbb{R}^2$ , sei  $\gamma: I = [a, b] \rightarrow U$  nach  $g$ -Bogenlänge parametrisiert, und sei  $h: I \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  eine Variation von  $\gamma$ , Dann gilt*

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\gamma_s) = g \left( \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right) \Big|_{t=a}^b - \int_a^b g \left( \frac{\partial h}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\gamma \dot{\gamma} \right) dt.$$

BEWEIS. Wir gehen vor wie im Beweis von Lemma 3.36. Wir werden Proposition 4.7 (5) für die Vektorfelder  $\frac{\partial h}{\partial s}$  und  $\frac{\partial h}{\partial t}$  verwenden.

$$\frac{d}{ds} \Big|_0 L(\gamma_s) = \frac{d}{ds} \Big|_0 \int_a^b \sqrt{g(\dot{\gamma}_s(t), \dot{\gamma}_s(t))} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} g \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t} \right) \frac{dt}{\underbrace{2 \sqrt{g(\dot{\gamma}_s(t), \dot{\gamma}_s(t))}}_{=1}} \\
&= \int_a^b g \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^h \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t} \right) dt = \int_a^b g \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^h \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right) dt \\
&= \int_a^b \left( \frac{\partial}{\partial t} g \left( \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right) - g \left( \frac{\partial h}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^h \frac{\partial h}{\partial t} \right) \right) dt \\
&= g \left( \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right) \Big|_{t=a}^b - \int_a^b g \left( \frac{\partial h}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\gamma} \dot{\gamma} \right) dt. \quad \square
\end{aligned}$$

4.10. BEMERKUNG. Sei  $U$  eine orientierbare Fläche, und sei  $\gamma: I \rightarrow U$  nach Bogenlänge parametrisiert mit geodätischer Krümmung  $\kappa$  gemäß Definition 3.31. Dann existiert ein eindeutiges Vektorfeld  $V$  längs  $\gamma$ , so dass  $(\dot{\gamma}, V)$  an jedem Punkt von  $\gamma$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis bilden. Nach Bemerkung 3.40 gilt

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\gamma} \dot{\gamma} = \kappa V,$$

also

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\gamma_s) = g \left( \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right) \Big|_{t=a}^b - \int_a^b \kappa(t) g \left( \frac{\partial h}{\partial s}, V(t) \right) dt.$$

4.11. FOLGERUNG. Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  eine Kurve mit minimaler Länge zwischen den Punkten  $p = \gamma(a)$  und  $q = \gamma(b)$ . Dann ist  $\gamma$  Umparametrisierung einer Geodätischen.

BEWEIS. Wir erinnern uns, dass  $L(\gamma)$  unter Umparametrisierungen invariant ist, und dürfen daher annehmen, dass  $\gamma$  bereits nach Bogenlänge parametrisiert ist. Wir betrachten nur Variationen  $h: I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  von  $\gamma$  mit  $h(a, s) = p$  und  $h(b, s) = q$  für alle  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Dann verschwindet  $\frac{\partial h}{\partial s}$  an den Intervallenden, und Satz 4.9 liefert

$$\frac{d}{ds} \Big|_0 L(h_s) = - \int_a^b g \left( \frac{\partial h}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\gamma} \dot{\gamma} \right) dt.$$

Wenn  $\gamma$  die Länge minimiert, muss dieser Ausdruck für jede Variation  $h$  von  $\gamma$  verschwinden, also muss

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^h \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\gamma} \dot{\gamma} = 0$$

gelten, also ist  $\gamma$  eine Geodätische.  $\square$

## 4.2. Der lokale Satz von Gauß-Bonnet

In diesem Abschnitt beweisen wir den lokalen Satz von Gauß-Bonnet, der einen Zusammenhang zwischen der Parallelverschiebung um eine geschlossene, zusammenziehbare Kurve in der Fläche und dem Integral über die Gauß-Krümmung im umlaufenen Gebiet herstellt. Als Anwendung können wir Formeln für den Flächeninhalt sphärischer und hyperbolischer Dreiecke herleiten.

Wir erinnern uns zunächst an die Definition des Kurvenintegrals und formulieren den Satz von Green, einen Spezialfall des Satzes von Stokes aus der Vektoranalysis. Sei wieder  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen. Eine *Eins-Form* oder *Pfaffsche Form* der Klasse  $\mathcal{C}^k$  auf  $U$  ist eine  $\mathcal{C}^k(U)$ -lineare Abbildung

$$\alpha: \mathfrak{X}^k(U) \rightarrow \mathcal{C}^k(U).$$

Für ein Vektorfeld  $X$  auf  $U$  folgt sofort

$$\alpha(X) = \alpha\left(X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) = X_1 \cdot a_1 + X_2 \cdot a_2$$

mit  $a_1 = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$  und  $a_2 = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \in \mathcal{C}^k(U)$ .

Dafür schreiben wir auch kurz

$$\alpha = a_1 dx_1 + a_2 dx_2.$$

Insbesondere hängt  $\alpha(X)|_p$  nur von  $a_1(p)$ ,  $a_2(p)$  und  $X_p$  ab, vergleiche dazu Folgerung 3.49.

Es sei jetzt  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  eine parametrisierte  $\mathcal{C}^k$ -Kurve mit  $k \geq 1$ , dann definieren wir das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_a^b \alpha(\dot{\gamma}(t)) dt.$$

Es hängt nicht von der gerichteten Parametrisierung ab, denn sei  $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$  eine streng monotone  $\mathcal{C}^k$ -Umparametrisierung, dann folgt

$$\int_{\gamma \circ \varphi} \alpha = \int_c^d \alpha(\dot{\gamma}(\varphi(u)) \cdot \varphi'(t)) du = \int_a^b \alpha(\dot{\gamma}(t)) dt = \int_{\gamma} \alpha.$$

Es sei jetzt  $\gamma$  eine stückweise differenzierbare Kurve. Wir sagen, dass  $\gamma$  eine kompakte Teilmenge  $\Omega \subset U$  *positiv umläuft*, wenn  $\gamma$  einfach geschlossen ist, die Spur im  $\gamma$  von  $\gamma$  genau der Rand von  $\Omega$  ist und der orientierte Einheitsnormalenvektor in Richtung  $\Omega$  zeigt.

4.12. SATZ (von Green). *Es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  eine stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurve, die eine kompakte Menge  $\Omega$  positiv umläuft, und es sei  $\alpha = a_1 dx_1 + a_2 dx_2$  eine Eins-Form auf  $U$ . Dann gilt*

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2.$$

BEWEISSKIZZE. Wir zerlegen  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  mit  $\alpha_i = a_i dx_i$  und betrachten zunächst den Fall  $\alpha_2 = 0$ .

Wir nehmen an, dass sich  $\Omega$  durch senkrechte Schnitte zerlegen lässt in Bereiche der Form

$$\Omega_i = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 \in [a_i, b_i] \text{ und } x_2 \in [f(x_1), g(x_1)] \}$$

für geeignete  $\mathcal{C}^1$ -Funktionen  $f \leq g: [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann parametrisieren  $\gamma_i, \delta_i: [0, b_i - a_i] \rightarrow U$  mit  $\gamma_i(t) = (a_i + t, f(a_i + t))$  und  $\delta_i(t) = (b_i - t, g(b_i - t))$

jeweils Abschnitte von  $\gamma$ . Somit ist  $\Omega$  die Vereinigung der  $\Omega_i$  (disjunkt bis auf endlich viele Strecken) und im  $\gamma$  die Vereinigung der obigen Kurvenstücke (disjunkt bis auf endlich viele Punkte).

Auf  $\Omega_i$  berechnen wir mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und der eindimensionalen Integraltransformationsformel, dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} -\frac{\partial a_1}{\partial x_2} dx_1 dx_2 &= - \int_{a_i}^{b_i} \int_{f(x_1)}^{g(x_1)} \frac{\partial a_1}{\partial x_2} dx_2 dx_1 \\ &= \int_{a_i}^{b_i} \left( a_1(x_1, f(x_1)) - a_1(x_1, g(x_1)) \right) dx_1 \\ &= \int_0^{b_i - a_i} \left( a_1(a_i + t, f(a_i + t)) + a_1(b_i - t, g(b_i - t)) \right) dt \\ &= \int_{\gamma_i} \alpha_1 + \int_{\delta_i} \alpha_1, \end{aligned}$$

da ja

$$\begin{aligned} \alpha_1(\dot{\gamma}_i(t)) &= \alpha_1|_{(a_i+t, f(a_i+t))} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} = a_1(a_i + t, f(a_i + t)) \\ \text{und} \quad \alpha_1(\dot{\delta}_i(t)) &= \alpha_1|_{(b_i-t, g(b_i-t))} \begin{pmatrix} -1 \\ g'(t) \end{pmatrix} = -a_1(b_i - t, g(b_i - t)). \end{aligned}$$

Aufsummieren über  $i$  liefert die Behauptung für  $\alpha_1$ . Durch Zerlegung in waagerechte Streifen erhalten wir die Behauptung für  $\alpha_2$ . Sollte es nicht möglich sein, das Gebiet  $\Omega$  mit je endlich vielen Streifen zu zerteilen, so approximieren wir  $\gamma$  geeignet durch Kurven, für die das möglich ist.  $\square$

Wir betrachten wieder eine Riemannsche Metrik  $g$  auf  $U \subset \mathbb{R}^2$  und erinnern uns an das Volumenelement

$$dA = \sqrt{\det(g)} dx_1 dx_2 \in \Omega^2(U)$$

aus Definition 3.13, das wir jetzt als Zwei-Form auffassen. Indem wir das Gram-Schmidt-Verfahren punktweise auf die Standardbasis  $(e_1, e_2)$  des  $\mathbb{R}^2$  anwenden, erhalten wir zwei Vektorfelder  $v_1, v_2$  auf  $U$ , die an jedem Punkt  $p \in U$  eine orientierte Orthonormalbasis bezüglich der Metrik  $g_p$  bilden.

4.13. PROPOSITION. *Es existiert eine Eins-Form  $\alpha \in \Omega^1(U)$ , so dass*

$$\nabla_X v_1 = \alpha(X) v_2 \quad \text{und} \quad \nabla_X v_2 = -\alpha(X) v_1$$

für jedes Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(U)$ . Außerdem gilt

$$\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} = -K \sqrt{\det(g)}.$$

BEWEIS. Da  $g(v_i, v_j) = \delta_{ij}$  konstant ist, folgt

$$g(\nabla_X v_i, v_j) + g(v_i, \nabla_X v_j) = X(g(v_i, v_j)) = 0.$$

Wir setzen also

$$\alpha(X) = g(\nabla_X v_1, v_2)$$

und erhalten die erste Aussage.

Wir setzen wieder  $a_i = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ . Um die zweite Aussage zu beweisen, berechnen wir

$$\begin{aligned} R_{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}} v_1 &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}} v_1 - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} v_1 - \nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right]} v_1 \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \left( \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) v_2 \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}} \left( \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) v_2 \right) \\ &= \frac{\partial a_2}{\partial x_1} v_2 - a_2 a_1 v_1 - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} v_2 + a_1 a_2 v_1 = \left( \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) v_2 . \end{aligned}$$

Hieraus berechnen wir die Gauß-Krümmung mit Hilfe von Definition 4.3 und Bemerkung 4.4 und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} &= g(R_{e_1, e_2} v_1, v_2) \\ &= K (g(e_2, v_1) \cdot g(e_1, v_2) - g(e_1, v_1) \cdot g(e_2, v_2)) = -K \det B , \end{aligned}$$

wobei die Matrix  $B = (g(e_j, v_i))_{ij}$  gerade den Basiswechsel von der Orthonormalbasis  $(v_1, v_2)$  zur Standardbasis  $(e_1, e_2)$  beschreibt. Mithin besteht  $B^{-1}$  aus den Koordinaten der  $g$ -Orthonormalbasis  $(v_1, v_2)$ , also ist  $(B^{-1})^t \cdot g \cdot B^{-1}$  die Einheitsmatrix, und es folgt

$$\det B = \sqrt{\deg g} .$$

Daraus ergibt sich die zweite Behauptung.  $\square$

Sei jetzt  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  eine einfach geschlossene Kurve in  $U$ , die eine Teilmenge  $\Omega \subset U$  positiv umläuft. Dann folgt aus dem Satz 4.12 von Green und Proposition 4.13, dass

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = - \int_{\Omega} K dA . \quad (4.1)$$

Wenn wir versuchen, den Hopfschen Umlaufsatz 2.38 auf einfach geschlossene Kurven in  $(U, g)$  zu verallgemeinern, dann tritt die linke Seite in Gleichung (4.1) als Korrekturterm auf, und wir erhalten den lokalen Satz von Gauß-Bonnet.

**4.14. SATZ (Gauß-Bonnet; lokale Fassung).** *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet mit einer Riemannschen Metrik  $g$ , und es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  eine nach Bogenlänge parametrisierte  $\mathcal{C}^2$ -geschlossene Kurve, die eine Teilmenge  $\Omega \subset U$  positiv umläuft. Dann gilt*

$$\int_{\Omega} K dA + \int_a^b \kappa(t) dt = 2\pi .$$

In der Euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$  mit der Standardmetrik verschwindet das Integral über die Gauß-Krümmung. Falls  $\gamma$  eine  $\mathcal{C}^2$ -geschlossene Kurve ist, verallgemeinert Satz 4.14 offensichtlich den Hopfschen Umlaufsatz 2.38.

BEWEIS. Wir kombinieren den Beweis von Satz 2.38 mit Formel (4.1). Dazu wählen wir die orientierte  $g_p$ -Orthonormalbasis  $(v_1, v_2)$  wie oben so, dass  $v_1$  überall ein positives Vielfaches des Standardbasisvektors  $e_1$  ist. Außerdem dürfen wir annehmen, dass die zweite Komponente  $\gamma_2(t)$  von  $\gamma$  bei  $t = a$  und  $t = b$  ihr absolutes Minimum annimmt. Dann folgt  $\dot{\gamma}(a) = \dot{\gamma}(b) = v_1$  aufgrund der Umlaufrichtung.

Da  $\gamma$  nach  $g$ -Bogenlänge parametrisiert ist, finden wir eine Winkelfunktion

$$\psi: \{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq s \leq t \leq b \} \rightarrow \mathbb{R}$$

mit  $\psi(a, a) = 0$ , so dass

$$\begin{aligned} & \cos \psi(s, t) v_1(\gamma(t)) + \sin \psi(s, t) v_2(\gamma(t)) \\ &= \begin{cases} \frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{\|\gamma(t) - \gamma(s)\|_{g_{\gamma(t)}}} & \text{für } s < t \text{ und } (s, t) \neq (a, b), \\ \dot{\gamma}(t) & \text{für } s = t, \text{ und} \\ -\dot{\gamma}(a) = -v_1 & \text{für } s = a \text{ und } t = b. \end{cases} \end{aligned}$$

Wie im Beweis des Hopfschen Umlaufsatzes 2.38 dürfen wir folgern, dass

$$\psi(b, b) = \psi(a, a) + 2\pi.$$

Wir schreiben  $\varphi(t) = \psi(t, t)$ , dann folgt  $\varphi(a) = 0$  und  $\varphi(b) = 2\pi$ .

Wir ergänzen  $\dot{\gamma}(t)$  zu einer  $g_{\gamma(t)}$ -Orthonormalbasis durch das Vektorfeld

$$V = -\sin \varphi \cdot (v_1 \circ \gamma) + \cos \varphi \cdot (v_2 \circ \gamma) \in \mathfrak{X}(\gamma)$$

längs  $\gamma$ . Um die geodätische Krümmung von  $\gamma$  zu bestimmen, berechnen wir

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\gamma \dot{\gamma} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\gamma (\cos \varphi \cdot (v_1 \circ \gamma) + \sin \varphi \cdot (v_2 \circ \gamma)) \\ &= \dot{\varphi} \cdot (-\sin \varphi \cdot (v_1 \circ \gamma) + \cos \varphi \cdot (v_2 \circ \gamma)) + (\cos \varphi \cdot \nabla_{\dot{\gamma}} v_1 + \sin \varphi \cdot \nabla_{\dot{\gamma}} v_2) \\ &= (\dot{\varphi} + \alpha(\dot{\gamma})) \cdot V \end{aligned}$$

nach Proposition 4.13.

Aus der Definition der geodätischen Krümmung  $\kappa$  und Bemerkung 4.10 folgt also

$$\kappa(t) = \dot{\varphi}(t) + \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)).$$

Jetzt erhalten wir unsere Behauptung mit (4.1), denn

$$\begin{aligned} \int_a^b \kappa(t) dt &= \int_a^b (\dot{\varphi}(t) + \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))) dt \\ &= \varphi(t)|_{t=a}^b + \int_\gamma \alpha = 2\pi - \int_\Omega K dA. \quad \square \end{aligned}$$

Für den nächsten Schritt betrachten wir Kurven mit „Ecken“ und betrachten die Winkel an diesen Ecken. Dazu definieren wir einen gerichteten

$g$ -Winkel  $\sphericalangle_p(v, w) \in (-\pi, \pi)$  ähnlich wie in Definition 3.10 für Vektoren  $v, w \in T_p U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , so dass  $w$  kein negatives Vielfaches von  $v$  ist, durch

$$\sphericalangle_p(v, w) = \begin{cases} \arccos \frac{g_p(v, w)}{\|v\|_p \|w\|_p} & \text{falls } (v, w) \text{ positiv orientiert ist, und} \\ -\arccos \frac{g_p(v, w)}{\|v\|_p \|w\|_p} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Den Fall, dass  $w$  negatives Vielfaches von  $v$  ist, müssen wir gesondert betrachten.

Wir erinnern uns an die Definition 2.9 einer stückweisen  $\mathcal{C}^2$ -Kurve. Eine solche Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  ist stetig, und es existieren  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  so, dass  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \in \mathcal{C}^2([t_{i-1}, t_i], U)$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Wir schreiben  $\dot{\gamma}^-(t_i)$  und  $\dot{\gamma}^+(t_i) \in \mathbb{R}^2$  für die links- bzw. rechtsseitige Ableitung von  $\gamma$  an den entsprechenden Stellen. Wenn  $\gamma$  geschlossen ist, dürfen wir  $\dot{\gamma}^-(a) = \dot{\gamma}^-(b)$  und  $\dot{\gamma}^+(b) = \dot{\gamma}^+(a)$  setzen.

Wir nehmen an, dass eine solche Kurve  $\gamma$  ein Gebiet  $\Omega$  positiv umläuft. Sollte  $\dot{\gamma}^-(t_i) = -\dot{\gamma}^+(t_i)$  gelten, so setzen wir  $\sphericalangle_{\gamma(t_i)}(\dot{\gamma}^-(t_i), \dot{\gamma}^+(t_i)) = \pm\pi$ , je nachdem, ob es sich um eine konvexe oder konkave Ecke von  $\Omega$  handelt. Außerdem definieren wir den  $g$ -Innenwinkel von  $\Omega$  an der Ecke  $\gamma(t_i)$  mit

$$\sphericalangle_{\gamma(t_i)}(\Omega) = \pi - \sphericalangle_{\gamma(t_i)}(\dot{\gamma}^-(t_i), \dot{\gamma}^+(t_i)) \in [0, 2\pi].$$

4.15. FOLGERUNG. *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet mit einer Riemannschen Metrik  $g$ , und es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  eine nach Bogenlänge parametrisierte geschlossene stückweise  $\mathcal{C}^2$ -Kurve, die eine Teilmenge  $\Omega \subset U$  positiv umläuft. Es seien  $a = t_0 < \dots < t_n = b$  so gewählt, dass  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \in \mathcal{C}^2([t_{i-1}, t_i], U)$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Dann gilt*

$$\int_{\Omega} K \, dA + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \kappa(t) \, dt + \sum_{i=1}^n \sphericalangle_{\gamma(t_i)}(\dot{\gamma}^-(t_i), \dot{\gamma}^+(t_i)) = 2\pi.$$

Äquivalent dazu gilt

$$\int_{\Omega} K \, dA + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \kappa(t) \, dt - \sum_{i=1}^n \sphericalangle_{\gamma(t_i)}(\Omega) = (2 - n)\pi.$$

Falls die Teilstücke  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  gerade Strecken sind, verallgemeinert diese Folgerung den Satz 1.8 über die Winkelsumme im Euklidischen Dreieck.

BEWEIS. Beide Formeln sind offensichtlich äquivalent. Wir geben hier zwei Beweisideen für die erste Formel.

Zum einen können wir wie im Beweis des Satzes 4.14 vorgehen, dann lassen sich allerdings  $\psi(t_i, t_i)$  und  $\varphi(t_i)$  nicht definieren. Statt dessen erhalten wir für die Differenz der links- und rechtsseitigen Grenzwerte, dass

$$\varphi(t_i+) - \varphi(t_i-) = \sphericalangle_{\gamma(t_i)}(\dot{\gamma}^-(t_i), \dot{\gamma}^+(t_i)).$$



Entsprechend folgt daraus

$$2\pi = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\varphi}(t) dt + \sum_{i=1}^n \angle_{\gamma(t_i)}(\dot{\gamma}^-(t_i), \dot{\gamma}^+(t_i)).$$

Mit dieser Formel liefert der obige Beweis unser Resultat.

Die zweite Möglichkeit besteht darin, die Kurve  $\gamma$  durch eine Folge von  $\mathcal{C}^2$ -geschlossenen Kurven in einem geeigneten Sinne zu approximieren. Dann konzentriert sich ein Teil des Integrals über die geodätische Krümmung an den Ecken  $\gamma(t_i)$  und konvergiert genau gegen die Winkel  $\angle_{\gamma(t_i)}(\dot{\gamma}^-(t_i), \dot{\gamma}^+(t_i))$ .  $\square$

Wir wollen jetzt Formeln für die Winkelsumme im sphärischen und hyperbolischen Dreiecken beweisen. Dank des Satzes von Gauß-Bonnet (und des im Beweis benutzten Satzes von Stokes) können wir diesen Flächeninhalt angeben, ohne ihn per Integration auszurechnen. Wir holen jetzt also die Beweise der Sätze 1.28 und 1.42 nach.

4.16. FOLGERUNG. *Sei  $\Delta$  ein sphärisches bzw. hyperbolisches Dreieck mit den Winkeln  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ . Dann hat  $\Delta$  den Flächeninhalt*

$$A(\Delta) = \alpha + \beta + \gamma - \pi \quad \text{bzw.} \quad A(\Delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

BEWEIS. Es sei  $\Omega$  das jeweilige Dreieck. Die Gauß-Krümmung der Sphäre beträgt  $K = 1$ , die des hyperbolischen Raumes  $K = -1$ . Die Geradenstücke haben geodätische Krümmung  $\kappa = 0$ . Aus Folgerung 4.15 folgt also

$$\pm A(\Delta) = \int_{\Omega} K dA = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

$\square$

4.17. BEMERKUNG. Somit haben hyperbolische Dreiecke einen Flächeninhalt kleiner als  $\pi$ , und das obwohl man — im Gegensatz zum sphärischen Fall — die Seiten beliebig lang machen kann. Das liegt daran, dass hyperbolische Dreiecke im Vergleich zu Euklidischen Dreiecken „dünn“ sind. Diese Beobachtung kann man im Rahmen der Riemannschen Geometrie konkretisieren und auf beliebige Mannigfaltigkeiten mit Krümmungsschranken verallgemeinern.

Lässt man alle drei Ecken eines hyperbolischen Dreiecks im Poincaré-Ball  $D^2$  gegen den „Rand im Unendlichen“  $S^1$  konvergieren, so erhält man ein sogenanntes „ideelles Dreieck“, dessen Seiten unendlich lang sind, und dessen Flächeninhalt genau  $\pi$  ist.

### 4.3. Kompakte Flächen und der globale Satz von Gauß-Bonnet

Danach geben den globalen Satz von Gauß-Bonnet an, der etwas über die totale Gauß-Krümmung einer kompakten Fläche  $M \subset \mathbb{R}^n$  ohne Rand aussagt. Da wir einige topologische Resultate benutzen werden, die wir hier nur zitieren, aber nicht beweisen können, wird dieser ganze Abschnitt etwas vage ausfallen.

Eine *Triangulierung* einer solchen kompakten Fläche  $M$  ohne Rand besteht aus

- (0)  $E$  paarweise verschiedenen Punkten  $p_1, \dots, p_E \in M$ ;
- (1)  $K$  Kurven  $\gamma_1, \dots, \gamma_K$  in  $M$ ,  $\gamma_j: [a_j, b_j] \rightarrow M$ , mit  $\gamma_j(a_j), \gamma_j(b_j) \in \{p_1, \dots, p_K\}$ , so dass die Einschränkungen  $\gamma_j|_{(a_j, b_j)}$  paarweise disjunkt sind und die Punkte  $p_1, \dots, p_E$  aus (0) nicht treffen;
- (2) den  $F$  Zusammenhangskomponenten  $D_1, \dots, D_F$  von  $M \setminus (\{p_1, \dots, p_E\} \cup \text{im } \gamma_1 \cup \dots \cup \text{im } \gamma_K)$ , wobei  $\bar{D}_i$  jeweils homöomorph zu einem Polygon in der Ebene ist, so dass die Punkte  $p_k \in \partial D_i$  aus (0) auf die Ecken und die Kurven im  $\gamma_j \subset \partial D_i$  aus (1) auf die Kanten des Polygons abgebildet werden.

Wir nennen eine solche Triangulierung *glatt*, wenn alle Kurven  $\gamma_j$  in (1) glatt sind und die Homöomorphismen in (2) als Diffeomorphismen gewählt werden können. Man kann zeigen, dass jede kompakte glatte Fläche eine glatte Triangulierung zulässt.

4.18. DEFINITION. Die *Eulerzahl* einer solchen Triangulierung ist gegeben durch

$$\chi = E - K + F \in \mathbb{Z}.$$

4.19. BEMERKUNG. Für die  $S^2$  ist diese Zahl  $\chi$  gerade 2, das folgt aus dem Eulerschen Polyedersatzes.

Man kann für alle  $n$  zeigen, dass  $\chi(S_\bullet)$  nicht von der Wahl der Zerlegung abhängt, daher schreiben wir im folgenden einfach  $\chi(M)$ . Für kompakte Flächen ist das allerdings auch eine Folgerung aus dem folgenden Satz 4.21.

4.20. BEISPIEL. Man projiziere etwa das Oktaeder mit den Ecken  $\pm e_0, \pm e_1, \pm e_2$  zentral auf die Sphäre  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  und erhält als Bild drei Großkreise, die sich jeweils in rechten Winkeln schneiden. Wenn man jetzt die Ecken, Kanten und Dreiecke geeignet orientiert und durchnumeriert, erhält man eine Triangulierung der Sphäre  $S^2$ .

Zur Erinnerung: eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist *kompakt* genau dann, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist. Insbesondere sind also beschränkte, abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  kompakt. Ohne Beweis benutzen wir, dass jede kompakte glatte Mannigfaltigkeit eine glatte simpliziale Zerlegung besitzt, und dass man im Falle von Flächen die Zerlegung auch so wählen kann, dass alle Eins-Simplizes geodätische Strecken sind.

Man kann sich leicht überlegen, dass die einzelne Terme in Satz 4.14 und Folgerung 4.15 nicht von der Orientierung von  $\Omega$  abhängen. Ändert man etwa die Orientierung von  $\Omega$ , so ändert sich auch die Umlaufrichtung von  $\gamma$ , so dass die geodätische Krümmung insgesamt erhalten bleibt. Daher brauchen wir keinerlei Orientierungsbegriff im folgenden Satz.

4.21. SATZ (Gauß-Bonnet; globale Fassung). *Sei  $M$  eine kompakte Fläche mit Riemannscher Metrik  $g$  und Gauß-Krümmung  $K$ , dann gilt*

$$2\pi \chi(M) = \int_M K dA.$$

Insbesondere hängt die Eulerzahl  $\chi(M)$  nicht von der Wahl der Triangulierung und die totale Gauß-Krümmung  $\int_M K dA$  nicht von der Wahl der Metrik  $g$  auf  $M$  ab.

BEWEIS. Jede kompakte Fläche trägt eine glatte Triangulierung. Da wir jedes einzelne Polygon mit einer Teilmenge der Ebene identifizieren können, die mit einer Riemannschen Metrik versehen ist, können wir den lokalen Satz 4.14 von Gauß-Bonnet anwenden, und erhalten

$$\begin{aligned} \int_M K dA &= \sum_{i=1}^F \int_{D_i} K dA \\ &= \sum_{i=1}^F \left( - \int_{\partial D_i} \kappa + \sum_{e \text{ Ecke von } D_i} \sphericalangle_e(D_i) + (2 - \#\text{Ecken von } D_i) \pi \right) \end{aligned}$$

Jede Kurve  $\gamma_j$  taucht genau zweimal im Rand eines Polygons auf. Da die beiden Polygone auf verschiedenen Seiten von  $\gamma_j$  liegen, hat die geodätische Krümmung in beiden Fällen entgegengesetztes Vorzeichen. Daher folgt

$$\sum_{i=1}^F \int_{\partial D_i} \kappa = 0 .$$

An jeder Ecke  $p_k$  beträgt die Summe der angrenzenden  $g$ -Innenwinkel genau  $2\pi$ , daher gilt

$$\sum_{i=1}^F \sum_{e \text{ Ecke von } D_i} \sphericalangle_e(D_i) = 2\pi E .$$

Jedes Polygon  $D_i$  hat genauso viele Ecken wie Kanten, und jede Kante kommt in genau zwei Polygonen vor, also folgt

$$\sum_{i=1}^F \#\text{Ecken von } D_i = 2K .$$

Wir setzen all das in die obige Formel ein und erhalten

$$\int_M K dA = 2\pi (E - K + F) = 2\pi \chi(M) . \quad \square$$



## Literatur

- [B] C. Bär, *Elementare Differentialgeometrie*, de Gruyter, Berlin 2001.
- [C] M. do Carmo, *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1983.
- [K] W. Kühnel, *Differentialgeometrie. Kurven—Flächen—Mannigfaltigkeiten*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 2003.