# Algebraische Topologie — WS 19/20

Sebastian Goette

# Inhaltsverzeichnis


Einführung 1

Kapitel 1. Kapitel 1 — Grundbegriffe 3
1.a. Metrische Räume 3
1.b. Topologische Räume 5
1.c. Trennungseigenschaften 8
1.d. Basen und Abzählbarkeitseigenschaften 10
1.e. Konstruktionen topologischer Räume 13
1.f. Kompaktheit 18
1.g. Zusammenhang 23
1.h. Quotienten und Verklebung 24
1.i. CW-Komplexe und topologische Mannigfaltigkeiten 27
1.j. Übungen zu Kapitel 1 36

Kapitel 2. Fundamentalgruppe und Überlagerungen 43
2.a. Homotopien und Homotopieäquivalenz 43
2.b. Die Fundamentalgruppe 46
2.c. Die Fundamentalgruppe der $S^1$ 50
2.d. Der Satz von Seifert-van Kampen 54
2.e. Die Fundamentalgruppe eines CW-Komplexes 62
2.f. Überlagerungen 66
2.g. Die universelle Überlagerung 71
2.h. Übungen zu Kapitel 2 74

Kapitel 3. Homotopiegruppen 79
3.a. Höhere Homotopiegruppen 79
3.b. Die lange exakte Homotopiesequenz eines Paares 84
3.c. Faserungen 88
3.d. Der Ausschneidungssatz 93
3.e. Der Satz von Brouwer und Hopf 97
3.f. Kofaserungen und Quotienten 102
3.g. Der Freudenthalsche Einhängungssatz 107
3.h. Stabile Homotopiegruppen 109
3.i. Gerahmter Bordismus 114
3.j. Die erste stabile Homotopiegruppe der Sphären 121
3.k. Übungen zu Kapitel 3 125

Kapitel 4. Elementare Homotopietheorie 131
4.a. Adjungierte Funktoren, Limiten und Kolimiten 131
4.b. Eine angenehme Kategorie topologischer Räume 136
4.c. Das Exponentialgesetz 140

4.d. CW-Komplexe und der Satz von Whitehead 145
4.e. Modellkategorien 155
4.f. Faser- und Kofaser-Sequenzen 159
4.g. Übungen zu Kapitel 4 164

Kapitel 5. Homologie 169
5.a. Die Eilenberg-Steenrod-Axiome 169
5.b. Zelluläre Homologie 176
5.c. Homologiefunktoren und Spektra 188
5.d. Das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum 193
5.e. Die abgeleiteten Funktoren Tor und Ext 198
5.f. Das Moore-Spektrum und ein universelles Koffizienten-Theorem 205
5.g. Produkträume und die Künneth-Formel 209
5.h. Übungen zu Kapitel 5 215

Kapitel 6. Kohomologie 221
6.a. Axiome für Kohomologiefunktoren 221
6.b. Der abgeleitete inverse Limes 223
6.c. Zelluläre Kohomologie und ein universelles Koeffiziententheorem 226
6.d. Produkte 232
6.e. Spektren und Kohomologiefunktoren 237
6.f. Vektor- und Prinzipalbündel 240
6.g. Klassifikation von Prinzipalbündeln 245
6.h. Topologische $K$-Theorie 250
6.i. Bordismus 256
6.j. Übungen zu Kapitel 6 265

Kapitel 7. Ringspektra und Multiplikative Kohomologiefunktoren 269
7.a. Die stabile CW-Kategorie 269
7.b. Eigenschaften der stabilen Homotopiekategorie 274
7.c. Das reduzierte Produkt von Spektren 279
7.d. Ringspektren und Produkte 290
7.e. Allgemeine singuläre Homologie und Kohomologie 295
7.f. Übungen zu Kapitel 7 298

Kapitel 8. Dualität 303
8.a. Spanier-Whitehead-Dualität 303
8.b. Orientierungen und Thom-Isomorphismen 308
8.c. Poincaré-Dualität 312
8.d. Eulerklasse und Gysin-Sequenz 317
8.e. Euler- und Lefschetzzahl 320
8.f. Übungen zu Kapitel 8 328

Literatur 331

Stichwortverzeichnis 333

# Einführung

Bevor wir mit dem eigentlichen Stoff der Vorlesung beginnen, möchte ich Ihnen ein paar Beispiele geben, zum einen Aussagen, die sich in der Sprache der Topologie formulieren lassen, zum anderen Aussagen aus anderen Gebieten der Mathematik, die sich aber topologisch beweisen lassen. Nicht alle diese Beispiele werden in der Vorlesung tatsächlich auftreten, weil sie zum Teil etwas mehr Hintergrundwissen brauchen — sei es topologisch, sei es aus einem anderen Gebiet der Mathematik — als wir in dieser Vorlesung lernen können.

0.1. Beispiel. Sei

$$B^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |x| < 1 \right\}$$

die (offene) Einheitskreisscheibe, und sei

$$D^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |x| \leq 1 \right\}$$

ihr Abschluss.

Der *Brouwersche Fixpunktsatz* besagt:

0.2. Satz (Brouwer). *Jede stetige Abbildung $f\colon D^n \to D^n$ der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe auf sich selbst hat mindestens einen Fixpunkt.*

Das heißt, es existiert $x_0 \in D^n$ mit

$$f(x_0) = x_0 \ .$$

Hierbei bedeutet stetig das gleiche wie in der Analysis.

Vergleichen Sie diesen Satz mit dem Fixpunktsatz von Banach:

0.3. Satz (Banach). *Sei $X$ ein vollständiger normierter Vektorraum, und sei $F\colon X \to X$ eine Abbildung zu der ein $\lambda < 1$ existiert, so dass*

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \lambda \, \|x - y\| \tag{*}$$

*für alle $x$, $y \in X$. Dann hat $F$ einen eindeutigen Fixpunkt.*

Wir vergleichen die Sätze von Banach und Brouwer.

(1) Der Satz von Banach ist insofern allgemeiner, als das er für mehr Räume funktioniert, denn der Satz von Brouwer gilt nur für gewisse Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Er ist schärfer, denn er liefert einen *eindeutigen* Fixpunkt. Außerdem liefert der Beweis ein Verfahren zur approximativen Bestimmung des Fixpunkts.

(2) Der Satz von Brouwer ist insofern allgemeiner, als er mehr Abbildungen zulässt. Wir könnten nämlich den Satz von Brouwer auch für Abbildungen $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ formulieren, so dass $F(D^n) \subset D^n$. Aus dem Banachschen Satz folgt ja unter anderem, dass der Einheitskreis um den Fixpunkt in sich abgebildet wird. Auf der anderen Seite kann eine Abbildung den Einheitskreis in sich abbilden, ohne dass sie die Lipschitz-Bedingung (*) erfüllt. Der Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes sagt uns allerdings nicht, wie wir den Fixpunkt auffinden können.

Die Sätze sind also verschieden. Der Banachsche Fixpunktsatz ist ein „metrischer“ Satz, während der Brouwersche Fixpunktsatz ein „topologischer“ Satz ist.

0.4. Beispiel. Unter der $n$-dimensionale Einheitssphäre verstehen wir die Menge

$$S^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; |x| = 1 \right\} .$$

Ein Einheitsvektorfeld auf der $S^n$ ist eine stetige Abbildung $V\colon S^n \to \mathbb{R}^n$, so dass

$$|V(x)| = 1 \quad \text{und} \quad V(x) \perp x \; .$$

0.5. Satz (vom Igel). *Sei $n$ gerade, dann existiert kein stetiges Einheitsvektorfeld auf $S^n$.*

Mit anderen Worten: ein gerade-dimensionaler Igel ohne Glatzpunkt lässt sich nicht kämmen (Igel lassen sich sowieso nicht kämmen — sie stellen ihre Stacheln auf, wenn man's versucht).

Auf der anderen Seite existiert solch ein Vektorfeld immer, wenn $n$ ungerade ist. In diesem Fall identifizieren wir $\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{C}^{\frac{n+1}{2}}$ und setzen einfach $V(x) = ix$.

0.6. Beispiel. Das folgende Beispiel ist mit dem zweiten verwandt, auch wenn man das nicht auf den ersten Blick erkennen kann. Sei $A$ eine Algebra über $\mathbb{R}$, d.h., $A$ ist ein reeller Vektorraum, und es existiert eine $\mathbb{R}$-bilineare Multiplikationsabbildung $*\colon A \times A \to A$. Diese muss weder assoziativ noch kommutativ sein.

Wir nennen $A$ eine *Divisionsalgebra,* wenn zu jedem $a \in A \setminus 0$ ein $a' \in A$ existiert, so dass

$$a' * (a * b) = (b * a) * a' = b$$

für alle $b \in A$ gilt.

0.7. Satz (Kervaire, Milnor). *Die einzigen endlich-dimensionalen Divisionsalgebren über $\mathbb{R}$ sind $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ (die Quaternionen) und $\mathbb{C}\mathrm{a}$ (die Oktaven).*

Diesen Satz werden wir in der Vorlesung sicherlich nicht beweisen. Genau wie beim Fundamentalsatz der Algebra handelt es sich hier um einen rein algebraischen Satz, der sich aber nur mit analytischen / topologischen Methoden beweisen lässt. Die Liste der algebraischen Resultate, die mit topologischen Methoden bewiesen werden, wird immer länger.

KAPITEL 1

# Kapitel 1 — Grundbegriffe

Wir lernen in diesem Kapitel den Begriff des topologischen Raumes und der stetigen Abbildungen kennen. Außerdem definieren wir noch zahlreiche Eigenschaften von topologischen Räumen und Abbildungen, und beweisen ein paar kleine Sätze, die wir in späteren Kapiteln benötigen werden. Einiges sollte aus Analysis bekannt sein — zumindest im metrischen Fall.

## 1.a. Metrische Räume

Wir erinnern uns kurz an die Definition von metrischen Räumen und stetigen Abbildungen im Sinne der Analysis. Wenn wir von einer Definition „im Sinne der Analysis“ sprechen, meinen wir damit eine Definition, die mit „für alle $\varepsilon > 0$ existiert ...“ beginnt.

1.1. Definition. Ein *metrischer Raum* ist ein Paar $(X, d)$ aus einer Menge $X$ und einer Abbildung $d\colon X \times X \to [0, \infty]$, die

(1) *positiv* ist, das heißt, $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,
(2) *symmetrisch* ist, das heißt, $d(x, y) = d(y, x)$, und
(3) die *Dreiecksungleichung* $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ erfüllt,

jeweils für alle $x$, $y$, $z \in X$.

1.2. Beispiel. Es folgen einige einfache Beispiele von Metriken.

(1) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, jeweils mit $d(x, y) = |y - x|$.
(2) Jeder normierte Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ ist metrisch mit $d(x, y) = \|y - x\|$.
(3) Jede Menge $M$ trägt eine Metrik
$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \text{ und} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$
(4) Jede Teilmenge $Y$ eines metrischen Raumes $(X, d)$ ist wieder ein metrischer Raum mit der induzierten Metrik $d|_Y = d|_{Y \times Y}$.

Weitere Beispiele folgen in den Übungen 1.95 und 1.97.

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, $\varepsilon > 0$ und $x \in X$. Der $\varepsilon$-Ball um $x$ ist die Menge
$$B_\varepsilon(x) = \{\, x' \in X \mid d(x, x') < \varepsilon \,\} \,.$$

1.3. Definition. Seien $(X, d)$, $(Y, d')$ metrische Räume. Eine Abbildung $F\colon (X, d) \to (Y, d')$ heißt *stetig am Punkt* $x \in X$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass
$$F\big(B_\delta(x)\big) \subset B_\varepsilon\big(F(x)\big) \,.$$
$F$ heißt *stetig,* wenn $F$ an allen Punkten $x \in X$ stetig ist.

Das ist genau die Definition, die Sie aus Analysis kennen. Wir erinnern uns an eine weitere Definition. Im folgenden bezeichne $\mathcal{P}X$ die Potenzmenge von $X$. Da wir es in der Topologie häufig mit Mengen von Mengen — wie der Potenzmenge — zu tun haben, verwenden wir für solche Mengen kalligraphische Buchstaben, um sie zum Beispiel von Punktmengen zu unterscheiden.

1.4. Definition. Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *offen in* $X$, wenn zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$. Die Gesamtheit aller offenen Mengen $\mathcal{O}_d \subset \mathcal{P}X$ heißt die *metrische Topologie.* Sei $x \in X$, dann heißt eine beliebige Teilmenge $V \subset X$ eine *Umgebung von* $x$, wenn es eine offene Menge $U$ gibt mit $x \in U \subset V$.

1.5. Bemerkung. Die Offenheit einer Menge $U$ hängt ab vom umgebenden Raum $X$ und der gewählten Metrik $d$. So ist etwa die Menge $[-\pi, \pi] \cap \mathbb{Q}$ offen in $\mathbb{Q}$, aber nicht in $\mathbb{R}$.

1.6. Bemerkung. Zu Definition 1.4 äquivalent ist die folgende Charakterisierung offener und abgeschlossener Mengen in metrischen Räumen. Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Folge $(a_i)_i$ in $A$, die in $(X, d)$ im Sinne der Analysis konvergiert, der Grenzwert $\lim_{i\to\infty} a_i$ in $A$ liegt. Eine Teilmenge $U \subset X$ ist offen, wenn $X \setminus U$ abgeschlossen ist.

Zur Erinnerung: zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem Vektorraum $V$ heißen *äquivalent,* wenn es Konstanten $0 < c$, $C < \infty$ gibt, so dass

$$c\,\|v\| \le \|v\|' \le C\,\|v\|$$

für alle $v$. Sei $V \cong \mathbb{R}^n$ endlich dimensional, dann sind alle Normen äquivalent. Auf unendlichdimensionalen Vektorräumen gibt es hingegen viele paarweise inäquivalente Normen, und entsprechend viele verschiedene Topologien.

1.7. Bemerkung. Zwei Normen auf einem $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum induzieren genau dann die gleiche Topologie, wenn sie äquivalent sind.

Begründung. Seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ äquivalent. Aus

$$d(x, y) = \|y - x\| \le \frac{1}{c}\,\|y - x\|' = \frac{1}{c}\,d'(x, y)$$

folgt $B'_{c\varepsilon}(x) \subset B_\varepsilon(x)$, wobei $B'_{c\varepsilon}(x)$ einen Ball bezüglich $d'$ bezeichne. Somit enthält jeder metrische Ball bezüglich $d'$ einen metrischen Ball bezüglich $d'$. Die umgekehrte Behauptung zeigt man genauso. Hieraus folgt die Gleichheit der Topologien.

Wir nehmen jetzt an, dass $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ die gleiche Topologie induzieren. Bälle $B_r(x) \subset V$ sind offen, denn für jeden Punkt $y \in B_r(x)$ folgt $B_{r-\|x-y\|}(y) \subset B_r(x)$ aus der Dreiecksungleichung. Insbesondere ist $B_1(0) \subset V$ offen. Da $\|\cdot\|'$ die gleiche Topologie induziert, existiert $r > 0$, so dass der $\|\cdot\|'$-Ball $B'_r(0)$ vom Radius $r$ um 0 in $B_1(0)$ enthalten ist. Aus $\|x\|' < r$ folgt also $\|x\| < 1$, und mit $c = \frac{1}{r}$ erhalten wir daraus

$$c\,\|v\| \le \|v\|'$$

für alle $v \in V$. Die andere Ungleichung folgt entsprechend. □

Wir wollen jetzt zeigen, wie man Stetigkeit auch definieren kann, wenn man nicht die Metrik kennt, sondern nur ihre offenen Mengen.

1.8. Satz. *Seien $(X, d)$ und $(Y, d')$ metrische Räume. Eine Abbildung $F\colon (X, d) \to (Y, d')$ ist genau dann stetig, wenn die Urbilder aller offenen Teilmengen von $Y$ in $X$ wiederum offen sind.*

Zusammen mit Bemerkung 1.7 folgt, dass die Stetigkeit einer Abbildung $F\colon (V, d) \to (W, d')$ zwischen zwei normierten Vektorräumen nur von den Äquivalenzklassen der Normen $d$ und $d'$ abhängt. Dieses Faktum ist aus Analysis bekannt.

Beweis. Wir nehmen an, dass $F$ stetig ist im Sinne von Definition 1.3. Sei $V \subset Y$ offen, und sei $x \in F^{-1}(V) \subset X$ beliebig. Da $V$ offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(F(x)) \subset V$. Aufgrund der Stetigkeit von $F$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $F(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(F(x)) \subset V$ gilt, insbesondere folgt $B_\delta(x) \subset F^{-1}(V)$. Da $x$ beliebig war, ist also $F^{-1}(V)$ offen in $X$.

Wir nehmen jetzt an, dass Urbilder offener Mengen offen sind. Seien jetzt $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da der Ball $B_\varepsilon(F(x))$ in $Y$ offen ist, ist auch $U = F^{-1}\big(B_\varepsilon(F(x))\big)$ offen in $X$, und natürlich liegt $x$ in $U$. Also existiert ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset U$ gilt. Es folgt $F(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(F(x))$. Da $x$ und $\varepsilon$ beliebig waren, ist $F$ also stetig im Sinne von Definition 1.3. $\square$

## 1.b. Topologische Räume

Wir erinnern uns an die Defition topologischer Räume und stetiger Abbildungen aus der Analysis.

1.9. Bemerkung. Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, und sei $\mathcal{O}_d$ die von $d$ definierte Topologie auf $X$.

(1) Die leere Menge $\emptyset$ und $X$ selbst sind nach Definition 1.4 offen, gehören also zu $\mathcal{O}$.
(2) seien $U_1, \ldots, U_k$ offen, und sei $x \in U_1 \cap \cdots \cap U_k$. Da die $U_i$ offen sind, existieren $\varepsilon_i > 0$, so dass $B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$. Sei $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$, dann ist $\varepsilon > 0$, und es gilt $B_\varepsilon(x) \subset U_1 \cap \cdots \cap U_k$. Da $x$ beliebig war, ist $U_1 \cap \cdots \cap U_k$ also wieder offen.
(3) Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_d$ eine beliebig grosse Ansammlung offener Mengen. Sei
$$x \in \bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \ ,$$
dann existiert also ein $U \in \mathcal{U}$, so dass $x \in U$. Da $U$ offen ist, existiert $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U \subset \bigcup \mathcal{U}$. Da $x$ beliebig war, ist $\bigcup \mathcal{U}$ also wieder offen.

Wir benutzen diese drei Beobachtungen über $\mathcal{O}_d$, um den allgemeinen Begriff einer Topologie zu definieren.

1.10. Definition. Sei $X$ eine Menge. Eine *Topologie* auf $X$ ist eine Teilmenge $\mathcal{O}$ der Potenzmenge $\mathcal{P}X$ mit folgenden Eigenschaften.

(1) Die leere Menge $\emptyset$ und $X$ selbst liegen in $\mathcal{O}$.
(2) Seien $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{O}$, dann liegt auch $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{O}$.
(3) Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$, dann liegt auch $\bigcup \mathcal{U}$ in $\mathcal{O}$.

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ aus einer Menge $X$ und einer Topologie $\mathcal{O}$ auf $X$.

1.11. Beispiel. Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, dann definiert $\mathcal{O}_d$ nach Bemerkung 1.9 eine Topologie auf $X$. Umgekehrt heißt eine Topologie $\mathcal{O}$ auf $X$ *metrisierbar,* wenn es eine Metrik $d$ auf $X$ gibt, so dass $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$. Die meisten topologischen Räume, denen wir später begegnen, werden metrisierbar sein. Dennoch gibt es interessante und wichtige topologische Räume, die nicht metrisierbar sind.

1.12. Beispiel. Sei $X$ eine beliebige Menge. Wir definieren zwei "triviale" Topologien auf $X$.

(1) Sei $\mathcal{O}_\delta = \mathcal{P}X$, dann ist jede Teilmenge von $X$ offen bezüglich $\mathcal{O}_\delta$. Wir nennen $\mathcal{O}_\delta$ die *diskrete Topologie* auf $X$. Die diskrete Topologie wird von der Metrik aus Beispiel 1.2 (3) induziert.
(2) Das andere Extrem ist $\mathcal{O}_K = \{\emptyset, X\} \subset \mathcal{P}X$. Diese Topologie heißt *Klumpentopologie* (*indiskrete Topologie*). Diese Topologie ist nur metrisierbar, wenn $X$ höchstens einen Punkt enthält, wie wir später sehen werden.

Die Topologie ist die Menge aller offenen Teilmengen. Wir definieren entsprechend die Begriffe „Umgebung" und „abgeschlossene Menge" wie gehabt.

1.13. Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *offen* bezüglich $\mathcal{O}$, falls $U \in \mathcal{O}$. Sei $x \in X$ und $V \subset X$ mit $x \in V$, dann heißt $V$ eine *Umgebung* von $x$

bezüglich $\mathcal{O}$, falls es eine offene Menge $U \in \mathcal{O}$ gibt, so dass $x \in U \subset V$ gilt. Sei $A \subset X$, dann heißt $A$ *abgeschlossen* bezüglich $\mathcal{O}$, falls das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

1.14. Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, und sei $Y \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Das *Innere* $\mathring{Y}$ von $Y$ ist die größte offene Teilmenge von $X$, die ganz in $Y$ enthalten ist. Der *Abschluss* $\overline{Y}$ von $Y$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von $X$, die $Y$ enthält. Der *Rand* von $Y$ ist die Menge $\partial Y = \overline{Y} \setminus \mathring{Y}$.

1.15. Bemerkung. Sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, und sei $Y \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Es gilt

$$\mathring{Y} = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{O} \\ U \subset Y}} U \qquad \text{und} \qquad \overline{Y} = \bigcap_{\substack{X \setminus A \in \mathcal{O} \\ A \supset Y}} A \, .$$

Die erste Menge ist offen nach Definition 1.10 (3). Für die zweite zeigt man analog, dass das Komplement abgeschlossen ist. Ausserdem ist

$$\overline{X \setminus Y} = X \setminus \mathring{Y} \, , \qquad (X \setminus Y)^\circ = X \setminus \overline{Y} \, , \quad \text{und} \quad \partial(X \setminus Y) = \partial Y \, .$$

1.16. Beispiel. Das Innere und der Abschluss einer Menge hängen vom umgebenden Raum und seiner Topologie ab. Sei $V = [-\pi, \pi] \cap \mathbb{Q}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \text{in } \mathbb{Q}: \quad & \mathring{V} = V \, , & \overline{V} &= V \, , & \partial V &= \emptyset \, , \\ \text{und in } \mathbb{R}: \quad & \mathring{V} = \emptyset \, , & \overline{V} &= [-\pi, \pi] \, , & \partial V &= [-\pi, \pi] \, . \end{aligned}$$

Falls es klar ist, von welcher Topologie $\mathcal{O}$ auf $X$ wir reden, lassen wir den Zusatz „bezüglich $\mathcal{O}$“ in der Regel weg. Wir haben in Satz 1.8 ein „topologisches“ Kriterium für die Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen kennengelernt. Wir erheben dieses Kriterium zur Definition.

1.17. Definition. Eine Abbildung $F\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ zwischen topologischen Räumen heißt *stetig* genau dann, wenn Urbilder offener Mengen offen sind, wenn also $F^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ für alle $U \in \mathcal{O}_Y$. Es bezeichne $C(X, Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von $X$ nach $Y$.

Wenn eine stetige Abbildung $F\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ bijektiv ist und $F^{-1}\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ ebenfalls stetig ist, heißt $F$ ein *Homöomorphismus.*

1.18. Beispiel.
(1) Nach Satz 1.8 sind Abbildungen zwischen metrischen Räumen genau dann im topologischen Sinne stetig, wenn sie im metrischen Sinne stetig sind.
(2) Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, und sei $y_0$ ein Punkt in $Y$. Die konstante Abbildung $F\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ mit $F(x) = y_0$ für alle $x \in X$ ist immer stetig, denn für jede offene Menge $U \subset Y$ gilt

$$F^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{O}_X & \text{falls } y_0 \notin U, \text{ und} \\ X \in \mathcal{O}_X & \text{falls } y_0 \in U. \end{cases}$$

1.19. Bemerkung. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$, $(Z, \mathcal{O}_Z)$ topologische Räume.
(1) Die Identität $\mathrm{id}_X\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (X, \mathcal{O}_X)$ auf $X$ mit $\mathrm{id}_X(x) = x$ für alle $x \in X$ ist immer stetig, denn für alle $U \in \mathcal{O}_X$ gilt

$$\mathrm{id}_X^{-1}(U) = U \in \mathcal{O}_X \, .$$

(2) Seien $F\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ und $G\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetige Abbildungen, dann ist auch $G \circ F\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetig. Sei nämlich $U \subset Z$ offen in $Z$, dann ist $G^{-1}(U)$ offen in $Y$, und somit ist $F^{-1}\big(G^{-1}(U)\big)$ offen in $X$. Da also $(G \circ F)^{-1}(U) = F^{-1}\big(G^{-1}(U)\big) \in \mathcal{O}_X$ für alle $U \in \mathcal{O}_Z$, ist $G \circ F$ stetig.

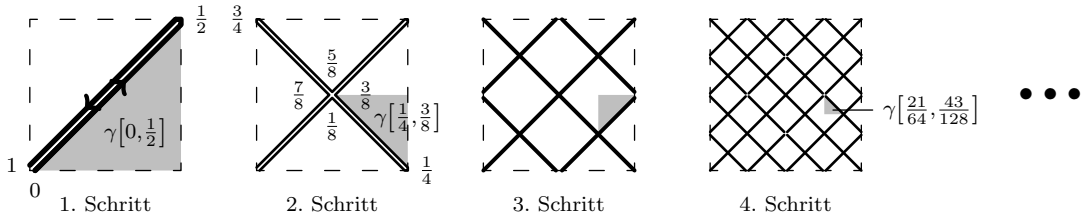



Abbildung 1.1. Eine flächenfüllende Kurve

Mit einer *Klasse* bezeichnen wir eine beliebige Ansammlung von Mengen. Manche Klassen sind Mengen, alle anderen nennt man echte Klassen. Ein Beispiel für eine echte Klasse ist die Klasse aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Da Elemente von Klassen selbst bloß Mengen und keine echten Klassen sind, erhalten wir hier kein Paradoxon.

1.20. Definition. Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus

(1) einer Klasse von *Objekten* $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$,
(2) zu je zwei Objekten $X$, $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ einer Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ von *Morphismen*,
(3) je einem ausgezeichneten Morphismus $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ für jedes Objekt $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, und
(4) zu je drei Objekten $X$, $Y$, $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ einer *Verkettung*

$$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \qquad \text{mit} \qquad (f,g) \mapsto g \circ f\ ,$$

so dass die folgenden zwei Axiome gelten.
*Identität*. Seien $X$, $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, dann gilt

$$f = f \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_Y \circ f\ .$$

*Assoziativität*. Für alle $X$, $Y$, $Z$, $W \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ und alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,W)$, gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f\ .$$

1.21. Beispiel. Es folgen einige typische Beispiele von Kategorien.

(1) Die Kategorie $\mathcal{S}et$ hat als Objekte alle Mengen, und als Morphismen alle Abbildungen zwischen Mengen.
(2) Die Kategorie $\mathcal{G}rp$ hat als Objekte alle Gruppen, und als Morphismen alle Gruppenhomomorphismen.
(3) Sei $\Bbbk$ ein Körper, dann hat die Kategorie $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ als Objekte alle $\Bbbk$-Vektorräume, und als Morphismen alle $\Bbbk$-linearen Abbildungen.
(4) Die Kategorie $\mathcal{T}op$ hat als Objekte alle topologischen Räume, und als Morphismen alle stetigen Abbildungen, siehe Bemerkung 1.19.

In jedem dieser Beispiele ist die Identität die Identität der zugrundeliegenden Menge, und die Komposition die Hintereinanderschaltung von Abbildungen.

Schließlich wollen wir an ein pathologisches Beispiel erinnnern, das uns zeigt, dass stetige Abbildungen mitunter unerwartete Eigenschaften an den Tag legen.

1.22. Beispiel. Es gibt stetige, surjektive Abbildungen vom Einheitsintervall $I = [0,1]$ in die Menge $I \times I \subset \mathbb{R}^2$. Zum Beispiel kann man zwei Kopien der Kochschen Schneeflockenkurve aneinandersetzten, siehe Abbildung 1.1. Die entstehende Kurve $\gamma$ ist stetig, sogar $\frac{1}{2}$-Höldersch. In jedem Schritt $\gamma_{i+1}$ wird jede Strecke der Kurve $\gamma_i$ durch vier Strecken der halben Länge ersetzt. Man überzeugt sich, dass die Folge $(\gamma_i)_i$ gleichmäßig konvergiert. Den Bildpunkt $\gamma(t)$ kann man durch Intervallschachtelung bestimmen.

Wir können auch verschiedene Topologien auf ein und demselben Raum vergleichen.

1.23. Definition. Seien $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ zwei Topologien auf einer Menge $X$. Dann ist $\mathcal{O}'$ *feiner* als $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}$ *gröber* als $\mathcal{O}'$, wenn $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$.

1.24. Bemerkung. Eine Topologie $\mathcal{O}'$ auf $X$ ist nach Definition 1.17 genau dann feiner als $\mathcal{O}$, wenn die Identität $\mathrm{id}_X \colon (X, \mathcal{O}') \to (X, \mathcal{O})$ stetig ist. Mit Bemerkung 1.19 (2) folgt: Sei die Abbildung $F \colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig, sei $\mathcal{O}'_X$ feiner als oder gleich $\mathcal{O}_X$, und sei $\mathcal{O}'_Y$ gröber als oder gleich $\mathcal{O}_Y$, dann ist auch $F \colon (X, \mathcal{O}'_X) \to (Y, \mathcal{O}'_Y)$ stetig.

1.25. Beispiel. Sei $X = \mathbb{R}^n$, sei $\mathcal{O}_d$ die metrische Topologie zur Standardmetrik, und sei $\mathcal{O}_f$ die Topologie zur französischen Eisenbahnmetrik. Dann ist die diskrete Topologie $\mathcal{O}_\delta = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ aus Beispiel 1.12 (1) feiner als $\mathcal{O}_f$, die Topologie $\mathcal{O}_f$ ist feiner als $\mathcal{O}_d$, und $\mathcal{O}_d$ ist wiederum feiner als die Klumpentopologie $\mathcal{O}_K = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$ aus Beispiel 1.12 (2).

## 1.c. Trennungseigenschaften

Wir untersuchen die Frage, ob es in einem topologischen Raum genug offene Mengen gibt, so dass man vorgegebene Punkte oder Teilmengen voneinander „trennen“ kann.

Wir beantworten diese Frage zunächst für metrische Räume. Sei dazu $I = ([0,1], \mathcal{O}_d)$ das reelle Einheitsintervall, wie üblich versehen mit der metrischen Topologie.

1.26. Satz. *Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Dann gilt bezüglich $\mathcal{O}_d$:*

(1) *einpunktige Teilmengen von $X$ sind abgeschlossen;*
(2) *seien $A_0$, $A_1 \subset X$ abgeschlossen und disjunkt, dann existieren disjunkte offene Mengen $U_0$, $U_1 \in \mathcal{O}$ mit $A_0 \subset U_0$ und $A_1 \subset U_1$;*
(3) *seien $A_0$, $A_1 \subset X$ abgeschlossen und disjunkt, dann gibt es eine stetige Funktion $f \colon X \to I$ mit $A_0 = f^{-1}\{0\}$ und $A_1 = f^{-1}\{1\}$.*

Beweis. Zu (1). Zu zeigen ist die Offenheit von $X \setminus \{x\}$ für ein beliebiges $x \in X$. Sei dazu $x \neq y \in X$, dann folgt

$$B_{d(x,y)}(y) \subset X \setminus \{x\} \ .$$

Also ist $X \setminus \{x\}$ offen nach 1.4.

(3) $\longrightarrow$ (2). Wähle $f$ wie in (3). Da $f$ stetig ist, sind die Mengen $U_0 = f^{-1}\big(\big[0, \frac{1}{2}\big)\big)$ und $U_1 = f^{-1}\big(\big(\frac{1}{2}, 1\big]\big)$ disjunkt und offen in $X$, da $\big[0, \frac{1}{2}\big)$ und $\big(\frac{1}{2}, 1\big]$ disjunkt und offen in $I$ sind.

Punkt (3) lassen wir als Übung 1.103. □ □

1.27. Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ hat die *Trennungseigenschaft* oder erfüllt das *Trennungsaxiom*

(T0) wenn es zu je zwei Punkten $x \neq y$ in $X$ eine offene Menge $U \in \mathcal{O}$ gibt mit $x \in U$, $y \notin U$ oder $x \notin U$, $y \in U$,
(T1) wenn alle einpunktigen Mengen $\{x\}$ für $x \in X$ abgeschlossen sind,
(T2) oder ist ein *Hausdorff-Raum*, wenn es zu je zwei Punkten $x \neq y$ in $X$ disjunkte offene Mengen $U$, $V \in \mathcal{O}$ mit $x \in U$ und $y \in V$ gibt,
(T3) wenn es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$ und jedem Punkt $x \in X \setminus A$ disjunkte offene Mengen $U$, $V \in \mathcal{O}$ mit $A \subset U$ und $x \in V$ gibt,
(T3a) wenn es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$ und jedem Punkt $x \in X \setminus A$ eine stetige Funktion $f \colon (X, \mathcal{O}) \to I$ mit $f(A) \subset \{0\}$ und $f(x) = 1$ gibt,
(T4) wenn es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $A$, $B \subset X$ disjunkte offene Mengen $U$, $V \in \mathcal{O}$ mit $A \subset U$ und $B \subset V$ gibt.

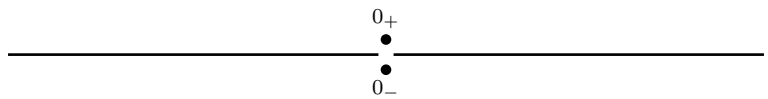



Abbildung 1.2. Ein nicht Hausdorffscher Raum

Ein topologischer Raum heißt *regulär,* wenn er die Eigenschaften (T1) und (T3) erfüllt, *vollständig regulär,* wenn er die Eigenschaften (T1) und (T3a) erfüllt, und *normal,* wenn er die Eigenschaften (T1) und (T4) erfüllt.

Die für uns zunächst wichtigste Trennungseigenschaft ist „hausdorffsch". Bemerkung 1.28 und Beispiel 1.29 sollen das verdeutlichen.

1.28. Bemerkung. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

(1) Wenn $(X, \mathcal{O})$ hausdorffsch ist, dann hat jede Folge in $X$ höchstens einen Grenzwert. Das heißt, zu jeder Folge $(x_i)_i$ gibt es höchstens einen Punkt $x \in X$, so dass für jede Umgebung $U$ von $x$ fast alle Folgenglieder $x_i$ in $U$ liegen. Denn wäre $y \in X \setminus \{x\}$ ein weiterer Grenzwert, so könnte man $x$ und $y$ durch disjunkte offene Umgebungen $U$ und $V$ trennen, und fast alle Folgenglieder müssten in $U \cap V = \emptyset$ liegen.

(2) Wenn sich zwei Punkte $x$, $y \in X$ nicht durch disjunkte offene Umgebungen trennen lassen, gilt $f(x) = f(y)$ für jede stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$. Denn wäre $f(x) \neq f(y)$, so könnte man $f(x)$ und $f(y)$ in $\mathbb{R}$ durch disjunkte offene Intervalle $I$, $J \subset \mathbb{R}$ trennen. Aber dann trennten $f^{-1}(I)$ und $f^{-1}(J)$ bereits $x$ und $y$.

1.29. Beispiel. Betrachte den Raum $X = (-1, 0) \cup \{0_+, 0_-\} \cup (0, 1)$ mit der folgenden Topologie $\mathcal{O}$. Eine Teilmenge $U \subset X$ sei offen, wenn zu jedem Punkt $x \in U \setminus \{0_+, 0_-\}$ ein $\varepsilon_x > 0$ mit $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subset U \setminus \{0_+, 0_-\}$ existiert, und falls $0_- \in U$ oder $0_+ \in U$, ein $\varepsilon_0 > 0$ mit $(-\varepsilon_0, 0) \cup (0, \varepsilon_0) \subset U$ existiert, siehe Abbildung 1.2. Man überzeugt sich leicht, dass $(X, \mathcal{O})$ die Trennungseigenschaften (T0) und (T1) erfüllt. Die Hausdorff-Eigenschaft (T2) ist jedoch verletzt, da der Schnitt je zweier Umgebungen von $0_+$ und $0_-$ eine kleine Menge der Form $(-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ enthält. Als Beispiel für eine Folge mit zwei Grenzwerten betrachten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0_+ \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0_- \ .$$

Ein wichtiges Hilfsmittel in der Topologie ist das Lemma von Urysohn, wonach jeder (T4)-Raum „viele stetige Funktionen" trägt.

1.30. Lemma (Urysohn). *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein (T4)-Raum. Dann existiert zu je zwei abgeschlossenen, disjunkten Teilmengen $A$, $B \subset X$ eine stetige Funktion $f\colon X \to I$ mit $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$.*

Beweis. Sei

$$D = \left\{ a\, 2^{-k} \;\middle|\; a,\, k \in \mathbb{N},\, 0 \le a \le 2^k \right\}$$

die Menge der dyadischen Zahlen im Einheitsintervall $I$. Wir wollen induktiv zu allen $d \in D$ eine offene Menge $U_d$ konstruieren, so dass $A \subset \overline{U}_d \subset U_{d'} \subset X \setminus B$ für alle $d$, $d' \in D$ mit $d < d'$. Für $t \in I$ definieren wir dann offene Mengen

$$U_t = \bigcup_{d \in D \cap [0,t]} U_d \ ,$$

und wiederum gilt $\overline{U}_t \subset U_{t'}$ für alle $t$, $t' \in I$ mit $t < t'$, da zwischen $t$ und $t'$ noch beliebig viele dyadische Zahlen liegen.

Mit $U_t = \emptyset$ für $t < 0$ und $U_t = X$ für $t > 1$ definieren wir

$$f(x) = \inf\{\, t \in \mathbb{R} \mid x \in U_t \,\} \in [0,1] \ .$$

Aus $A \subset U_0 \subset U_1 \subset X \setminus B$ folgt sofort $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$. Um Stetigkeit zu zeigen, betrachten wir für $t \in I$ und $x \in X$ mit $f(x) = t$ sowie $\varepsilon > 0$ das Intervall $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \cap I$. Sei $0 < \delta < \varepsilon$, dann folgt

$$x \in U_{t+\delta} \setminus \overline{U}_{t-\delta} \subset f^{-1}(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \ ,$$

also ist $f$ stetig.

Nun zur Konstruktion der Familie $(U_d)_{d \in D}$. Zu (T4) äquivalent ist die folgende Aussage: sei $A \subset Y \subset X$, $A$ abgeschlossen und $Y$ offen, dann existiert eine offene Menge $U$, so dass $A \subset U \subset \overline{U} \subset Y$.

Wir wählen also zunächst $U_0 \in \mathcal{O}$ mit $A \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset X \setminus B$, und $U_1 \in \mathcal{O}$ mit $\overline{U}_0 \subset U_1 \subset \overline{U}_1 \subset X \setminus B$. Seien jetzt alle $U_d$ mit Nenner $2^k$ bestimmt, dann wählen wir $U_{(2a+1)\,2^{-k-1}}$ induktiv so, dass

$$\overline{U}_{a\,s^{-k}} \subset U_{(2a+1)\,2^{-k-1}} \subset \overline{U}_{(2a+1)\,2^{-k-1}} \subset U_{(a+1)\,2^{-k}} \ . \qquad \square$$

1.31. Bemerkung. Urysohn's Lemma 1.30 ist nicht ganz so stark wie Satz 1.26 (3), denn dort galt sogar $f^{-1}(0) = A$ und $f^{-1}(1) = B$. Wenn nämlich $f^{-1}(0) = A$ gilt, dann können wir die abgeschlossene Menge $A$ als Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen schreiben, etwa

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left[0, \frac{1}{n}\right) \ .$$

Und das muss in allgemeinen (T4)-Räumen nicht gelten.

1.32. Bemerkung. Aus Satz 1.26 und den obigen Definitionen ergeben sich die folgenden Implikationen.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\text{metrisierbar} & \Longrightarrow & \text{normal} & \Longrightarrow & \begin{array}{c}\text{vollständig}\\ \text{regulär}\end{array} & \Longrightarrow & \text{regulär} & \Longrightarrow & \begin{array}{c}\text{hausdorffsch}\\ \text{(T2)}\end{array} & \Longrightarrow & \text{(T1)} \Longrightarrow \text{(T0)} \\
 & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & & & \\
 & & \text{(T4)} & & \text{(T3a)} & \Longrightarrow & \text{(T3)} & & & &
\end{array}$$

Aus metrisierbar folgt normal wegen Satz 1.26. Die drei vertikalen Pfeile beruhen direkt auf den Definitionen. Aus (T3a) folgt (T3) wie (2) aus (3) in Satz 1.26, genauso folgt regulär aus vollständig regulär. Um aus regulär hausdorffsch zu folgern, ersetzen wir die abgeschlossene Menge in (T3) durch einen Punkt, der nach (T1) abgeschlossen ist. Aus normal folgt vollständig regulär mit (T1) und Urysohns Lemma 1.30. Aus hausdorffsch folgt (T1) wie im Beweis von 1.26 (1), und (T1)-Räume sind offensichtlich (T0).

In den Übungen 1.104–1.106 wird deutlich, dass in der Tat die Eigenschaften (T3), (T3a) und (T4) ohne (T1) wenig Aussagekraft besitzen.

### 1.d. Basen und Abzählbarkeitseigenschaften

Um eine Topologie $\mathcal{O}$ zu definieren, ist es häufig unbequem, alle offenen Mengen anzugeben. Stattdessen sucht man möglichst kleine Teilmengen $\mathcal{U}$ von $\mathcal{O}$, so dass $\mathcal{O}$ selbst die gröbste Topologie ist, für die alle Mengen in $\mathcal{U}$ offen sind. So wird man auf die Begriffe „Basis“ und „Subbassis“ geführt. Für spätere Überlegungen ist es oft hilfreich zu wissen, dass manche topologischen Räume eine „kleine“ — sprich abzählbare — Basis besitzen.

1.33. Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ heißt *Basis* von $\mathcal{O}$, wenn

$$\mathcal{O} = \left\{ \bigcup \mathcal{U} \;\middle|\; \mathcal{U} \subset \mathcal{B} \right\} = \left\{ \bigcup_{i \in I} U_i \;\middle|\; I \text{ Menge, } U_i \in \mathcal{U} \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Eine Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ heißt *Subbasis* von $\mathcal{O}$, wenn die Menge

$$\left\{ U_1 \cap \cdots \cap U_k \;\middle|\; k \in \mathbb{N},\, U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{S} \right\}$$

eine Basis von $\mathcal{O}$ bildet.

Mit anderen Worten: $\mathcal{B}$ ist eine Basis, wenn sich jede offene Menge als (beliebige) Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ schreiben lässt. $\mathcal{S}$ ist eine Subbasis, wenn sich jede offene Menge als (beliebige) Vereinigung von Durchschnitten je endlich vieler Elemente aus $\mathcal{S}$ schreiben lässt. Insbesondere ist jede Basis auch eine Subbasis.

1.34. Beispiel. Es folgen Basen und Subbasen für einige uns wohlbekannte Topologien.

(1) Sei $X$ eine Menge. Die einpunktigen Teilmengen von $X$ bilden eine Basis der diskreten Topologie $\mathcal{O}_\delta$ auf $X$. Die Menge $\{X\}$ bildet eine Basis der Klumpentopologie $\mathcal{O}_K$, und die leere Menge bildet eine Subbasis, denn $\bigcap \emptyset = X \in \mathcal{P}X$.

(2) Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, dann bildet die Menge $\mathcal{B}$ aller metrischen Bälle mit rationalem Radius eine Basis der metrischen Topologie $\mathcal{O}_d$. Sei nämlich $U \in \mathcal{O}_d$. Nach Definition 1.4 existiert zu jedem $x \in U$ ein Radius $0 < r_x \in \mathbb{Q}$ so dass $B_{r_x}(x) \subset U$. Also gilt

$$U = \bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x) \quad \text{und} \quad \{ B_{r_x}(x) \mid x \in U \} \subset \mathcal{B}\,.$$

Darüberhinaus ist eine Teilmenge $V \subset X$ genau dann eine Umgebung von $x \in X$, wenn sie einen der abzählbar vielen offene Bälle $B_r(x)$ mit $0 < r \in \mathbb{Q}$ enthält.

(3) Sei $X = \mathbb{R}^n$ mit der Standard-Topologie versehen. Dann bildet die Menge aller metrischen Bälle mit rationalem Radius um Mittelpunkte mit rationalen Koordinaten bereits eine Basis der metrischen Topologie. Diese Basis ist abzählbar, während $\mathcal{O}$ selbst überabzählbar ist.

Die letzten beiden Beispiele sollen als Motivation für die folgende Definition dienen.

1.35. Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann hat $(X, \mathcal{O})$ die *Abzählbarkeitseigenschaft* oder erfüllt das *Abzählbarkeitsaxiom*

(A1) wenn jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Menge $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{P}X$ von Umgebungen besitzt, so dass $V \subset X$ genau dann eine Umgebung von $x$ ist, wenn es ein $U \in \mathcal{U}_x$ mit $U \subset V$ gibt, und

(A2) wenn $\mathcal{O}$ eine abzählbare Basis besitzt.

Eine Teilmenge $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{O}$ wie in (A1) heißt auch *Umgebungsbasis.* Aus (A2) folgt (A1), denn sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis von $X$ und $x \in X$, dann ist

$$\mathcal{U}_x = \left\{ U \in \mathcal{B} \;\middle|\; x \in U \right\}$$

eine abzählbare Umgebungsbasis von $x$. Das zweite Abzählbarkeitsaxiom lässt sich benutzen, um topologische Argumente induktiv über kleine Mengen zu führen. Das erste Abzählbarkeitsaxiom wird häufig benötigt, um topologische Begriffe über Folgen zu erklären, so wie im folgenden Satz.

1.36. Satz. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum mit der Abzählbarkeitseigenschaft (A1). Dann ist eine Menge $A \subset X$ genau dann abgeschlossen, wenn sie* folgenabgeschlossen *ist, das heißt, wenn jede Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $A$, die in $X$ konvergiert, ihre Grenzwerte in $A$ annimmt.*

Beachte, dass der Grenzwert einer Folge nicht eindeutig sein muss, wenn der Raum nicht Hausdorff (T2) ist.

Beweis. Sei $A$ abgeschlossen, und sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X$ eine Folge mit Grenzwert $x \in X \setminus A$. Wir wollen zeigen, dass dann nicht alle $a_i$ in $A$ liegen können. Da $X \setminus A$ eine offene Umgebung von $a$ ist, existiert ein $i_0 > 0$, so dass $a_i \notin A$ für alle $i \geq i_0$.

Sei umgekehrt $A$ nicht abgeschlossen, das heißt, es gibt einen Punkt $x \notin A$, so dass jede Umgebung $V$ von $x$ die Menge $A$ schneidet. Da (A1) gilt, können wir eine abzählbare Umgebungsbasis $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von $x$ wählen. Da endliche Durchschnitte offener Mengen offen sind, sind endliche Durchschnitte von Umgebungen von $x$ wiederum Umgebungen von $x$, und wir setzen $U_i = V_1 \cap \cdots \cap V_i$. Dann ist $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis mit der Eigenschaft, dass $U_j \subset U_i$ für alle $j \geq i$. Sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_i \in A \cap U_i$. Eine Teilmenge $V \subset X$ ist Umgebung von $x$ genau dann, wenn es ein $i_0$ gibt mit $U_i \subset V$ für alle $i \geq i_0$. Es folgt $a_i \in V$ für alle $i \geq i_0$. Daraus folgt, dass $x$ ein Grenzwert unserer Folge $a_i$ ist. □

1.37. Bemerkung. Für allgemeine metrisierbare Räume gilt nur (A1), siehe Beispiel 1.34 (2). Es gilt aber der *erste Metrisationssatz von Urysohn:* Wenn $(X, \mathcal{O})$ die zweite Abzählbarkeitseigenschaft (A2) hat, dann ist $(X, \mathcal{O})$ genau dann metrisierbar, wenn $(X, \mathcal{O})$ regulär ist, also (T1) und (T3) erfüllt. Man beachte, dass $(X, \mathcal{O})$ nach Satz 1.26 dann sogar normal ist.

Die allgemeinen Metrisationssätze von Bing und Nagata-Smirnov geben ein genaues topologisches Äquivalent zur Metrisierbarkeit, sind aber leider nicht ganz so einfach zu formulieren.

Wir können eine Subbasis oder Basis aber auch dazu verwenden, eine Topologie zu definieren.

1.38. Satz. *Sei $X$ eine Menge, und seien $\mathcal{B}$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}X$ beliebig.*

(1) *Wenn für je endlich viele $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{B}$ mit $k \geq 0$ eine Untermenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ existiert, so dass $B_1 \cap \cdots \cap B_k = \bigcup \mathcal{U}$, dann existiert eine eindeutige Topologie $\mathcal{O}_\mathcal{B}$ auf $X$ mit Basis $\mathcal{B}$. Wir nennen $\mathcal{O}_\mathcal{B}$ die durch die Basis $\mathcal{B}$ definierte Topologie.*

(2) *Es existiert eine eindeutige Topologie $\mathcal{O}_\mathcal{S}$ auf $X$ mit Subbasis $\mathcal{S}$. Sei $\mathcal{O}_X$ eine beliebige Topologie auf $X$ mit $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}_X$, dann gilt $\mathcal{O}_\mathcal{S} \subset \mathcal{O}_X$. Wir nennen $\mathcal{O}_\mathcal{S}$ die durch die Subbasis $\mathcal{S}$ definierte Topologie.*

Insbesondere ist $\mathcal{O}_\mathcal{S}$ die *kleinste* oder *gröbste* Topologie auf $X$, bezüglich der alle Mengen der Subbasis $\mathcal{S}$ offen sind.

Beweis. Zu (1). Die Menge $\mathcal{O} = \left\{ \bigcup \mathcal{U} \;\middle|\; \mathcal{U} \subset \mathcal{B} \right\}$ enthält $\emptyset = \bigcup \emptyset$ und erfüllt Axiom (3) in Definition 1.10. Nach Voraussetzung gilt $X = \bigcap \emptyset \subset \mathcal{O}$, somit ist auch Axiom (1) erfüllt. Um Axiom (2) zu zeigen, seien $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_k \subset \mathcal{B}$, dann folgt

$$\left(\bigcup \mathcal{U}_1\right) \cap \cdots \cap \left(\bigcup \mathcal{U}_k\right) = \bigcup_{U_1 \in \mathcal{U}_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}_k} U_1 \cap \cdots \cap U_k \,.$$

Nach Voraussetzung gilt $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{O}$ für alle Terme auf der rechten Seite, und da Axiom (3) gilt, auch für deren Vereinigung. Also ist $\mathcal{O}$ eine Topologie.

Man sieht leicht, dass jede Topologie $\mathcal{O}'$, die $\mathcal{B}$ enthält, alle offenen Mengen aus $\mathcal{O}$ enthalten muss, also folgt $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$. Wäre umgekehrt $U \in \mathcal{O}' \setminus \mathcal{O}$, dann liesse $U$ sich nicht als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{O}$ schreiben, $\mathcal{B}$ wäre dann also keine Basis von $\mathcal{O}'$. Also ist $\mathcal{O}_\mathcal{B} = \mathcal{O}$ die einzige Topologie mit Basis $\mathcal{B}$.

Zu (2) setze

$$\mathcal{B} = \left\{ U_1 \cap \cdots \cap U_k \;\middle|\; k \geq 0,\, U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{S} \right\} ,$$

dann erfüllt $\mathcal{B}$ die Voraussetzung von (1) und definiert eine Topologie $\mathcal{O}_B$ mit Subbasis $\mathcal{S}$. Wie unter (1) lässt sich zeigen, dass das die einzige Topologie auf $X$ mit Subbasis $\mathcal{S}$ ist; in der Tat enthält jede Topologie $\mathcal{O}_X$ mit $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}_X$ bereits $\mathcal{O}_\mathcal{S}$. □

## 1.e. Konstruktionen topologischer Räume

In diesem Abschnitt lernen wir, wie man aus bekannten topologischen Räumen neue topologische Räume gewinnen kann.

Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen, dann bezeichne $\coprod_i X_i$ die disjunkte Vereinigung dieser Mengen, und $\iota_i\colon X_i \hookrightarrow \coprod_i X_i$ sei die Inklusion der Menge $X_i$ in die disjunkte Vereinigung. Da die Mengen $X_i$ nicht immer paarweise disjunkt sind, müssen wir die disjunkte Vereinigung beliebiger Mengen erst konstruieren, zum Beispiel wie folgt:

$$\coprod_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I} \{i\} \times X_i \quad \subset \quad I \times \bigcup_{i\in I} X_i \qquad \text{und} \qquad \iota_i(x_i) = (i, x_i)\ .$$

1.39. Definition. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die *topologische Summe* der $X_i$ ist definiert als

$$\coprod_i (X_i, \mathcal{O}_i) = \Big(\coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup\Big) \qquad \text{mit} \qquad \mathcal{O}_\sqcup = \Big\{ U \subset \coprod_i X_i \;\Big|\; \iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I \Big\}\ .$$

Wenn wir $X_i$ mit der Teilmenge $\iota_i(X_i) \subset \coprod_i X_i$ identifizieren, dann ist $U \subset \coprod_i X_i$ genau dann offen, wenn $U \cap X_i$ für alle $i \in I$ in $X_i$ offen ist.

Wir überprüfen, dass $\mathcal{O}_\sqcup$ eine Topologie ist. Dazu nutzen wir elementare Eigenschaften der Urbild-Abbildung $\iota_i^{-1}$ aus, nämlich

$$\iota_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{O}_i\ , \qquad \iota_i^{-1}(X) = X_i \in \mathcal{O}_i\ ,$$
$$\iota_i^{-1}(U_i \cap \cdots \cap U_k) = \iota_i^{-1}(U_i) \cap \cdots \cap \iota_i^{-1}(U_k) \in \mathcal{O}_i \qquad \text{und} \qquad \iota_i^{-1}\Big(\bigcup \mathcal{U}\Big) = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} \iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i$$

für $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{O}$ und $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$.

1.40. Satz. *Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume.*

(1) *Die Topologie $\mathcal{O}_\sqcup$ ist die feinste Topologie auf der disjunkten Vereinigung $\coprod_i X_i$, für die alle Abbildungen $\iota_i\colon X_i \hookrightarrow \coprod_i X_i$ stetig sind.*
(2) *Die Topologie $\mathcal{O}_\sqcup$ ist die einzige Topologie $\mathcal{O}$ auf $\coprod_i X_i$, so dass eine beliebige Abbildung $F$ von $(\coprod_i X_i, \mathcal{O})$ in einen beliebigen topologischen Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ genau dann stetig ist, wenn alle Abbildungen $F \circ \iota_i\colon (X_i, \mathcal{O}_i) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetig sind.*
(3) *Der Raum $(\coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup)$ zusammen mit den Abbildungen $\big(\iota_i\colon X_i \to \coprod_i X_i\big)_{i\in I}$ ist ein* Koprodukt *der Räume $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ in der Kategorie $\mathcal{T}op$, das heißt, dass zu jedem Objekt $(Z, \mathcal{O}_Z)$ und jeder Familie von Morphismen $(F_i\colon X_i \to Z)_{i\in I}$ genau ein Morphismus $F\colon \coprod_i X_i \to Z$ existiert, so dass $F_i = F \circ \iota_i$ für alle $i \in I$.*

1.41. Bemerkung. Die charakteristische Eigenschaft (2) der topologischen Summe wird durch das linke kommutative Diagramm veranschaulicht.

$$\begin{tikzcd} (X_i, \mathcal{O}_i) \arrow[r, "F \circ \iota_i"] \arrow[d, hook, "\iota_i"'] & (Z, \mathcal{O}_Z) \\ \big(\coprod_i X_i, \mathcal{O}\big) \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} (X_i, \mathcal{O}_i) \arrow[r, "F_i"] \arrow[d, "\iota_i"'] & (Z, \mathcal{O}_Z) \\ (Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[ur, dashed, "F"'] & \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Ein Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ mit stetigen Abbildungen $\iota_i\colon X_i \to Y$ ist genau dann ein *Koprodukt* im Sinne von Satz 1.40 (3), wenn zu jedem Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ mit stetigen Abbildungen $F_i\colon X_i \to Z$ genau eine stetige Abbildung $F$ wie im rechten Diagramm existiert.

Wie bei vielen universellen Konstruktionen folgt, dass das Koprodukt bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt ist durch (3). Wenn also ein anderer Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ mit Abbildungen $(\eta_i \colon X_i \to Y)_i$ die Koprodukteigenschaft erfüllt, dann gibt es genau einen Homöomorphismus $G \colon \coprod_i X_i \to Y$ mit $\eta_i = G \circ \iota_i$ für alle $i$. Dazu betrachten wir die folgenden vier Diagramme.

$$\begin{tikzcd}
(X_i, \mathcal{O}_i) \arrow[r, "\eta_i"] \arrow[d, hook, "\iota_i"'] & (Y, \mathcal{O}_Y) \\
\left(\coprod_i X_i, \mathcal{O}\right) \arrow[ur, dashed, "G"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(X_i, \mathcal{O}_i) \arrow[r, hook, "\iota_i"] \arrow[d, "\eta_i"'] & \left(\coprod_i X_i, \mathcal{O}\right) \\
(Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[ur, dashed, "H"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X_i, \mathcal{O}_i) \arrow[r, hook, "\iota_i"] \arrow[d, hook, "\iota_i"'] & \left(\coprod_i X_i, \mathcal{O}\right) \\
\left(\coprod_i X_i, \mathcal{O}\right) \arrow[ur, dashed, "\mathrm{id}", "H \circ G"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(X_i, \mathcal{O}_i) \arrow[r, "\eta_i"] \arrow[d, "\eta_i"'] & (Y, \mathcal{O}_Y) \\
(Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[ur, dashed, "\mathrm{id}", "G \circ H"'] &
\end{tikzcd}$$

Die ersten beiden Diagramme zeigen die Existenz eindeutiger Abbildungen $G$ und $H$, die letzten zwei Diagramme zeigen, dass $H = G^{-1}$, so dass $G$ in der Tat ein Homöomorphismus ist. Da dieser Homöomorphismus stets eindeutig ist, kann man mit seiner Hilfe je zwei verschiedene Modelle für das Koprodukt miteinander identifizieren.

Beweis des Satzes 1.40. Zu (1) sei $\mathcal{O}$ eine beliebige Topologie auf $\coprod_i X_i$. Es sind genau dann alle Inklusionsabbildungen $\iota_i \colon X_i \to \coprod_i X_i$ stetig, wenn

$$\iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i \qquad \text{für alle } U \in \mathcal{O} \text{ und alle } i \in I$$

gilt, wenn also $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_\sqcup$.

Zu (2) seien $(Z, \mathcal{O}_Z)$ und $F \colon (\coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ wie im Satz vorgegeben. Wenn $F$ stetig ist, sind alle Abbildungen $F \circ \iota_i$ stetig, da $\iota_i$ nach (1) stetig ist.

Seien jetzt alle Abbildungen $F \circ \iota_i$ stetig, und sei $U \subset Z$ offen, dann ist

$$\iota_i^{-1}\big(F^{-1}(U)\big) = \big(F \circ \iota_i\big)^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i$$

offen in $X_i$ für alle $i \in I$. Nach Definition 1.39 gilt $F^{-1}(U) \in \mathcal{O}_\sqcup$, also ist $F$ stetig.

Zur Eindeutigkeit sei $\mathcal{O}$ eine weitere Topologie auf $\coprod_i X_i$ mit der in (2) geforderten Eigenschaft. Für alle topologischen Räume $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ist also jede Abbildung $F \colon \coprod_i X_i \to Z$ genau dann stetig, wenn $F \circ \iota_i$ für alle $i \in I$ stetig ist. Wir wählen $Z = \coprod_i X_i$ mit verschiedenen Topologien und $F = \mathrm{id}$ und schließen wie folgt. Da

$$\mathrm{id} \colon \Big(\coprod_i X_i, \mathcal{O}\Big) \to \Big(\coprod_i X_i, \mathcal{O}\Big)$$

stetig ist, sind alle

$$\iota_i = \mathrm{id} \circ \iota_i \colon (X_i, \mathcal{O}_i) \to \Big(\coprod_i X_i, \mathcal{O}\Big)$$

stetig, und nach (1) ist $\mathcal{O}$ gröber als $\mathcal{O}_\sqcup$. Da nach (1) alle

$$\mathrm{id} \circ \iota_i \colon (X_i, \mathcal{O}_i) \to \Big(\coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup\Big)$$

stetig sind, ist auch

$$\mathrm{id} \colon \Big(\coprod_i X_i, \mathcal{O}\Big) \to \Big(\coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup\Big)$$

stetig. Also ist $\mathcal{O}$ ist nach Bemerkung 1.24 feiner als $\mathcal{O}_\sqcup$. Insgesamt folgt also $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\sqcup$ wie behauptet.

Zu (3) seien $f_i\colon X_i \to Z$ stetig. Die einzige Abbildung $f\colon \coprod_i X_i \to Z$ mit $f \circ \iota_i = f_i$ für alle $i$ wird gegeben durch

$$f(i, x_i) = f_i(x_i) \ ,$$

und $f$ ist stetig nach (2). $\square$

Als nächstes wollen wir Unterräume topologischer Räume betrachten.

1.42. Definition. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, und sei $Y \subset X$. Die *Unterraumtopologie* (auch *Relativ-*, *Spur-* oder *induzierte Topologie*) $\mathcal{O}_Y$ ist definiert durch

$$\mathcal{O}_Y = \left\{ Y \cap U \;\middle|\; U \in \mathcal{O}_X \right\} .$$

Man überlegt sich, dass $\mathcal{O}_Y$ eine Topologie ist, denn

$$\emptyset = Y \cap \emptyset \in \mathcal{O}_Y \ , \qquad Y = Y \cap X \in \mathcal{O}_Y \ ,$$

$$(Y \cap U_1) \cap \cdots \cap (Y \cap U_k) = Y \cap (U_1 \cap \cdots \cap U_k) \in \mathcal{O}_Y \qquad \text{und} \qquad \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (Y \cap U) = Y \cap \bigcup \mathcal{U}$$

für alle $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{O}_X$ und $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_X$.

Auch die Unterraumtopologie wird durch eine Eigenschaft charakterisiert.

1.43. Satz. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und sei $Y \subset X$ versehen mit der Unterraumtopologie $\mathcal{O}_Y$. Dann gilt:*

(1) *$\mathcal{O}_Y$ ist die gröbste Topologie auf $Y$, für die die Inklusion $\iota\colon Y \hookrightarrow X$ stetig ist.*
(2) *$\mathcal{O}_Y$ ist die einzige Topologie, für die eine Abbildung $F$ von einem beliebigen topologischen Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ nach $Y$ genau dann stetig ist, wenn die Abbildung $\iota \circ F\colon Z \to X$ stetig ist.*

Beweis. Da $\iota^{-1}(U) = U \cap Y$ gilt, folgt (1) bereits aus der Definition von $\mathcal{O}_Y$.

Zu (2) sei zunächst $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ein beliebiger topologischer Raum, und sei $F\colon Z \to Y$ eine Abbildung. Für eine offene Menge $V = U \cap Y \in \mathcal{O}_Y$ gilt

$$F^{-1}(V) = F^{-1}\big(\iota^{-1}(U)\big) = (\iota \circ F)^{-1}(U) \ ,$$

also ist $F$ genau dann stetig bezüglich $\mathcal{O}_Y$, wenn $\iota \circ F$ stetig ist bezüglich $\mathcal{O}_X$.

Um zu zeigen, dass $\mathcal{O}_Y$ die einzige Topologie mit dieser Eigenschaft ist, wählen wir eine beliebige Topologie $\mathcal{O}$ auf $Y$, die die in (2) geforderte Eigenschaft besitzt. Wir machen weiter wie im Beweis von Satz 1.40. Da $\mathrm{id}\colon (Y, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O})$ stetig ist, ist auch $\iota = \iota \circ \mathrm{id}\colon (Y, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ stetig, und nach (1) ist $\mathcal{O}$ feiner als $\mathcal{O}_Y$. Umgekehrt ist $\iota = \iota \circ \mathrm{id}\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ stetig, also ist auch $\mathrm{id}\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Y, \mathcal{O})$ stetig, und $\mathcal{O}$ ist gröber als $\mathcal{O}_Y$ nach Bemerkung 1.24. Also stimmen $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}_Y$ überein. $\square$

1.44. Definition. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Eine *Einbettung* von $X$ nach $Y$ ist eine injektive Abbildung $F\colon X \hookrightarrow Y$, so dass die induzierte Abbildung von $(X, \mathcal{O}_X)$ nach $F(X) \subset Y$ mit der Unterraumtopologie ein Homöomorphismus ist.

Wir betrachten jetzt die Produkttopologie. Dazu bezeichnen wir mit

$$\prod_i X_i = \left\{ (x_i)_{i \in I} \;\middle|\; x_i \in X_i \right\}$$

das kartesische Produkt einer Familie $(X_i)_{i \in I}$ von topologischen Räumen über einer beliebigen Indexmenge $I$, und mit $\pi_i\colon X \to X_i$ die Projektion auf die $i$-te Komponente.

1.45. Definition. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Das *topologische Produkt* der $X_i$ ist definiert als

$$\prod_i (X_i, \mathcal{O}_i) = \Big( \prod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcap \Big) \ ,$$

wobei $\mathcal{O}_\sqcap$ erzeugt wird von der Subbasis

$$\mathcal{S}_\sqcap = \bigcup_{i\in I} \{\, \pi_i^{-1}(U_i) \mid U_i \in \mathcal{O}_i \,\} \ .$$

Da wir $\mathcal{O}_\sqcap$ über mit Hilfe einer Subbasis erklärt haben, wissen wir aus Satz 1.38, dass $\mathcal{O}_\sqcap$ eine Topologie ist. Ein endlicher Durchschnitt von Mengen aus $\mathcal{S}_\sqcap$ hat die Gestalt

$$\prod_{i\in I} U_i = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(U_i) \qquad \text{mit } U_i \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I \text{ und } U_i = X_i \text{ für fast alle } i \in I \ .$$

Mit anderen Worten: eine Teilmenge $U \subset \prod_i X_i$ ist genau dann offen, wenn jeder Punkt $x$ eine Umgebung der obigen Form hat. Auch hier haben wir wieder eine universelle Eigenschaft.

1.46. Satz. *Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume.*

(1) *Die Topologie $\mathcal{O}_\sqcap$ ist die gröbste Topologie auf $\prod_i X_i$, für die alle Abbildungen $\pi_i\colon \prod_i X_i \twoheadrightarrow X_i$ stetig sind.*

(2) *Die Topologie $\mathcal{O}_\sqcap$ ist die einzige Topologie $\mathcal{O}$ auf dem kartesischen Produkt $\prod_i X_i$, so dass eine Abbildung $G$ von einem beliebigen topologischen Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ in das Produkt $\prod_i X_i$ genau dann stetig ist, wenn die Abbildungen $\pi_i \circ G$ für alle $i \in I$ stetig sind.*

(3) *Der Raum $(\prod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcap)$ zusammen mit den Abbildungen $(\pi_i\colon \prod_i X_i \twoheadrightarrow X_i)_{i\in I}$ ist ein* Produkt *in der Kategorie $\mathcal{T}op$, das heißt, zu jedem topologischen Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ und jeder Familie stetiger Abbildungen $(G_i\colon Z \to X_i)_{i\in I}$ existiert genau eine stetige Abbildung $G\colon Z \to Y$, so dass $G_i = \pi_i \circ G$ für alle $i \in I$.*

1.47. Bemerkung. Die charakterisierende Eigenschaft (2) des Produkts wird durch das linke Diagramm veranschaulicht.

$$\begin{tikzcd} & \left(\prod_i X_i, \mathcal{O}\right) \arrow[d, two heads, "\pi_i"] \\ (Z, \mathcal{O}_Z) \arrow[ur, "G"] \arrow[r, "\pi_i \circ G"'] & (X_i, \mathcal{O}_i) \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} & (Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[d, "\eta_i"] \\ (Z, \mathcal{O}_Z) \arrow[ur, dashed, "G"] \arrow[r, "G_i"'] & (X_i, \mathcal{O}_i) \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Ein Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ mit stetigen Abbildungen $\eta_i\colon Y \to X_i$ ist genau dann ein Produkt im Sinne von Satz 1.46 (3), wenn für alle $(Z, \mathcal{O}_Z)$ mit stetigen Abbildungen $G_i\colon Z \to X_i$ genau eine stetige Abbildung $G$ wie im rechten Diagramm existiert.

Das Produkt ist ebenfalls bis auf eindeutige Isomorphismen eindeutig bestimmt. Da sich die beiden Diagramme in (1.1) und (1.2) jeweils nur in der Richtung der Pfeile unterscheiden, sagt man, die beiden Konstruktionen in den Definitionen 1.39 und 1.45 seien zueinander *dual.* Daher rührt die Wahl der Bezeichnungen und der Symbole „$\coprod$“ und „$\prod$“.

Man beachte, dass (geeignet formulierte) universelle Eigenschaften wie in Satz 1.40 (3) oder Satz 1.46 (3) zwar die Eindeutigkeit der beschriebenen Objekte (bis auf eindeutige Isomorphismen) garantieren können, aber nicht die Existenz. Man muss also für jede Kategorie (wie $\mathcal{S}et$, $\mathcal{T}op$ oder $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$) erst beweisen, dass sie Produkte und Koprodukte enthält.

Beweis von Satz 1.46. Die Subbasis $\mathcal{S}_\sqcap$ enthält genau die Urbilder der offenen Teilmengen von $X_i$ unter den Abbildungen $\pi_i$. Also sind alle $\pi_i$ bezüglich einer Topologie $\mathcal{O}$ auf $\prod_{i\in I} X_i$ genau dann stetig, wenn $\mathcal{O}_\sqcap \subset \mathcal{O}$, und es folgt Behauptung (1).

Zu (2) sei $G$ stetig. Dann sind auch die Abbildungen $\pi_i \circ G$ stetig nach (1).

Seien umgekehrt alle Abbildungen $\pi_i \circ G$ stetig. Da die Abbildung $G^{-1}\colon \mathcal{P}(\prod_i X_i) \to \mathcal{P}Z$ mit Vereinigungen und Durchschnitten vertauscht, folgt Stetigkeit von $G$ bereits, wenn $G^{-1}(U) \in \mathcal{O}_Z$ nur für alle $U \in \mathcal{S}_\sqcap$ gilt. Aber

$$G^{-1}\big(\pi_i^{-1}(U_i)\big) = (\pi_i \circ G)^{-1} U_i \in \mathcal{O}_Z$$

wegen Stetigkeit der Abbildungen $\pi_i \circ G$.

Der Beweis der Eindeutigkeit ist völlig analog zu den Beweisen der Sätze 1.40 (2) und 1.43 (2). Behauptung (3) folgt wie in Satz 1.40 (3) aus der entsprechenden Eigenschaft des kartesischen Produkts und (2). $\square$

1.48. Bemerkung. Eine andere natürliche Topologie auf $\prod_i X_i$ ist die *Box-Topologie* $\mathcal{O}_\square$ mit Basis

$$\mathcal{B}_\square = \left\{ \prod_{i \in I} U_i \;\middle|\; U_i \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Wenn die Indexmenge $I$ unendlich ist und unendlich viele $X_i$ nicht die Klumpentopologie tragen, ist $\mathcal{O}_\square$ echt feiner als $\mathcal{O}_\sqcap$. Diese Topologie hat leider nicht so schöne Eigenschaften wie $\mathcal{O}_\sqcap$, obwohl sie auf den ersten Blick einfacher aussieht.

Wir sagen, dass eine topologische Eigenschaft $E$ (wie etwa eine Trennungs- oder Abzählbarkeitseigenschaft) unter einer Konstruktion (wie etwa dem Produkt, der disjunkten Vereinigung oder der Unterraumkonstruktion) *vererbt* wird, wenn immer dann, wenn alle zugrundeliegenden Topologien die Eigenschaft $E$ haben, auch die neu konstruierte Topologie diese Eigenschaft hat.

1.49. Satz. (1) *Die Trennungseigenschaften (T0) – (T4) und (T3a) und die Abzählbarkeitseigenschaft (A1) werden unter der disjunkten Vereinigung vererbt, die Eigenschaft (A2) wird vererbt, wenn die Indexmenge höchstens abzählbar ist.*

(2) *Es werden (T0) – (T3), (T3a), (A1) und (A2) unter Unterraumbildung vererbt.*

(3) *Es werden (T0) – (T3), (T3a) unter Produkten vererbt. Die Abzählbarkeitseigenschaften (A1) und (A2) werden vererbt, wenn die Indexmenge höchstens abzählbar ist.*

Beweis. Zu (1) kann man die in den Trennungsaxiomen (T0) – (T4) gesuchten offenen Mengen $U$ und $V \subset \coprod_{i \in I} X_i$ konstruieren, in dem man für alle $i \in I$ offene Teilmengen $\iota_i^{-1}(U)$, $\iota_1^{-1}(V) \subset X_i$ angibt. Analog konstruiert man die in (T3a) gesuchte Funktion, indem man stetige Funktionen auf jedem $X_i$ definiert und diese mit der universellen Eigenschaft aus Satz 1.40 (3) auf $\coprod_{i \in I} X_i$ zusammensetzt.

Sei $x = \iota_j(x_j) \in \iota_j(X_j) \subset \coprod_{i \in I} X_i$, und sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X_j)$ eine abzählbare Umgebungsbasis von $x_j$ in $X_j$, dann ist $\iota_j(\mathcal{U}) \subset \mathcal{P}(\coprod_{i \in I} X_i)$ eine abzählbare Umgebungsbasis von $x$ in der disjunkten Vereinigung, also wird (A1) vererbt. Wenn $I$ abzählbar ist und $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{O}_i$ eine abzählbare Basis von $\mathcal{O}_i$ für alle $i \in I$, dann ist

$$\bigcup_{i \in I} \iota_i(\mathcal{B}_i) \subset \mathcal{O}_\sqcup$$

eine abzählbare Basis der disjunkten Vereinigung.

Zu (2) betrachten wir nur (T3) und (T3a), die anderen Trennungsaxiome lassen sich analog beweisen. Sei also $A \subset Y$ abgeschlossen in der Unterraumtopologie auf $Y \subset X$. Dann lässt sich $Y \setminus A$ zu einer offenen Teilmenge von $X$ fortsetzen, deren Komplement $B$ in $X$ abgeschlossen ist mit $A = Y \cap B$. Sei $y \in Y \setminus A \subset X \setminus B$. Wir nehmen an, dass (T3) in $X$ gilt und finden disjunkte offene Mengen $U$, $V \subset X$ mit $y \in U$, $B \subset V$. Dann sind $Y \cap U$ und $Y \cap V$ in $Y$ offen und disjunkt und trennen $y$ und $A$. Zu (T3a) betrachte $A$, $B$ und $y$ wie oben. Wenn es eine Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit $B \subset f^{-1}(0)$ und $f(y) = 1$ gibt, dann ist $f|_y$ stetig nach Satz 1.43 (2) und trennt $y$ und $A$ in $Y$.

Sei $\mathcal{U}_x$ abzählbare Umgebungsbasis von $x \in Y \subset X$ in $X$, dann ist

$$\{Y \cap U \mid U \in \mathcal{U}_x\} \subset \mathcal{P}(Y)$$

eine abzählbare Umgebungsbasis von $x$ in $Y$. Genauso überträgt sich (A2) von $X$ auf den Unterraum $Y$.

Zu (3) betrachten wir wieder nur (T3) und (T3a), die anderen Trennungsaxiome funktionieren analog. Ein Raum $(Y, \mathcal{O}_y)$ erfüllt (T3) genau dann, wenn es zu jeder Umgebung $U$ von $y \in Y$ eine

abgeschlossene Umgebung $A$ mit $y \in A \subset U$ gibt. Denn wenn (T3) gilt und $U$ Umgebung von $y$ ist, dann ist auch das Innere $\mathring{U}$ Umgebung von $y$. Wir trennen $B = Y \setminus \mathring{U}$ von $y$ durch disjunkte offene Mengen $V$, $W \subset X$. Dann ist $Y \setminus V$ abgeschlossene Umgebung, da $y \in W \subset Y \setminus V$, und es gilt $Y \setminus V \subset \mathring{U} = Y \setminus B \subset U$. Die Umkehrung gilt analog.

Sei also $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ und sei $U$ Umgebung von $x$. Nach Definition 1.45 und der Konstruktion im Beweis von Satz 1.38 (2) existieren $U_{i_1} \in \mathcal{O}_{i_1}, \dots, U_{i_k} \in \mathcal{O}_{i_k}$ mit

$$x \in \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \subset U \tag{*}$$

Nach unserer obigen Überlegung existieren abgeschlossene Umgebungen $A_{ij} \subset U_{ij}$ von $x_{ij}$, und

$$\pi_{i_1}^{-1}(A_{ij}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(A_{i_k}) \subset U$$

ist eine abgeschlossene Umgebung von $x$ in $\prod_{i \in I} X_i$. Also gilt (T3).

Zu (T3a) sei $x \in \prod_{i \in I} X_i$ wie oben und $B \subset \prod_{i \in I} X_i$ abgeschlossen. Setze $U = \prod_{i \in I} X_i \setminus B$. Dann existieren $U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$ wie in (*). Also gibt es Funktionen

$$f_{i_j} \colon X_{i_j} \to [0,1] \qquad \text{mit} \qquad f_{i_j}\,|_{X_{i_j} \setminus U_{i_j}} = 0 \qquad \text{und} \qquad f_{i_j}(x_{i_j}) = 1\ .$$

Dann sind die $f_{i_j} \circ \pi_{i_j}$ nach Satz 1.46 (2) stetig, und

$$f = \min\bigl(f_{i_1} \circ \pi_{i_1}, \dots, f_{i_k} \circ \pi_{i_k}\bigr) \colon \prod_{i \in I} X_i \to [0,1]$$

ist als Minimum endlich vieler stetiger Funktionen wieder stetig mit $f(x) = 1$ und

$$B \subset X \setminus \bigl(\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k})\bigr) \subset f^{-1}(0)\ .$$

Sei schließlich $I$ höchstens abzählbar und $\mathcal{B}_i$ eine abzählbare Basis von $\mathcal{O}_i$. Dann erhalten wir eine abzählbare Subbasis

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1} \mathcal{B}_i$$

von $\mathcal{O}_\sqcap$, denn jedes Element $\pi_i^{-1}(U)$ von $\mathcal{S}_\sqcap$ lässt sich als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{S}$ schreiben. Dann ist aber auch die Basis

$$\mathcal{B} = \bigl\{U_1 \cap \dots \cap U_k \bigm| k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } U_1, \dots, U_k \in \mathcal{S}\bigr\}$$

von $\mathcal{O}_\sqcap$ abzählbar. Also wird (A2) und analog auch (A1) unter abzählbaren Produkten vererbt. $\square$

Normalität wird unter Produkten und Unterräumen nicht vererbt, also auch nicht (T4). Die Gegenbeispiele können keine metrischen Räume sein, da sich Metriken auf Unterräume und endliche Produkte übertragen lassen (Übungen 1.110, 1.111), womit diese nach Satz 1.26 wieder normal sind. Dann dürfen unsere Räume auch (A2) nicht erfüllen, da sie sonst nach Bemerkung 1.37 metrisierbar wären. Wir besprechen diese Gegenbeispiele daher nicht hier, sondern verweisen auf [**Que**].

## 1.f. Kompaktheit

Wir erinnern uns, dass abgeschlossene Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ viele schöne Eigenschaften haben: stetige Funktionen $f \colon I \to \mathbb{R}$ besitzen auf $I$ ein Maximum und ein Minimum, und jede Folge $(x_i)_i$ in $I$ hat mindestens einen Häufungspunkt. Der Grund dafür ist der Satz von Heine-Borel, nach dem abgeschlossene Intervalle kompakt sind.

Wir lernen drei mögliche Definitionen von Kompaktheitheit kennen. Eine *offene Überdeckung* eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ ist eine Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ mit $\bigcup \mathcal{U} = X$. Ein Punkt $x \in X$ ist *Häufungspunkt* einer Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ in jeder Umgebung von $x$ ein $x_i$ liegt mit $i \geq n$. Insbesondere sind Grenzwerte von Teilfolgen immer Häufungspunkte.

1.50. Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann heißt $X$

(1) *quasikompakt,* wenn es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung gibt, das heißt, eine Menge $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ mit $\bigcup \mathcal{U}_0 = X$,
(2) *kompakt,* wenn er Hausdorffsch und quasikompakt ist,
(3) *abzählbar kompakt*, wenn $X$ Hausdorffsch ist und es zu jeder abzählbaren offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine endliche Teilüberdeckung gibt, das heißt, $X = \bigcup_{i=0}^{N} U_i$ für ein $N \in \mathbb{N}$, und
(4) *folgenkompakt,* wenn $X$ Hausdorffsch ist und jede Folge $x_i \in X$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

In der Literatur wird teilweise die Hausdorff-Eigenschaft in (2)–(4) nicht verlangt. Wir halten uns hier an [**Que**].

1.51. Bemerkung. Es folgen einige wohlbekannte Eigenschaften kompakter Mengen.

(1) Abgeschlossene Unterräume eines (abzählbar / folgen-) kompakten Raumes sind wieder (abzählbar / folgen-) kompakt. Denn sei etwa $X$ kompakt, $A \subset X$ abgeschlossen und $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von $A$, dann existiert $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_X$ mit
$$\mathcal{V} = \left\{ U \cap A \;\middle|\; U \in \mathcal{U} \right\} .$$
Dann ist aber $\mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ offene Überdeckung von $X$, und eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{U}'$ liefert uns auch eine endliche Teilüberdeckung von $A$, nämlich
$$\left\{ U \cap A \;\middle|\; U \in \mathcal{U}' \right\} .$$
(2) Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ (abzählbar / folgen-) kompakt, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Hausdorff-Raum und $F\colon X \to Y$ stetig, dann ist das Bild $\operatorname{im} F \subset Y$, versehen mit der Unterraumtopologie, wieder (abzählbar / folgen-) kompakt (Übung 1.115).
(3) Sei $(X, \mathcal{O})$ (abzählbar / folgen-) kompakt, und sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist $f$ beschränkt und nimmt sein Maximum an. Dazu kombinieren wir (2) mit den Sätzen 1.53 und 1.54 unten.
(4) Jeder kompakte Raum ist normal (Übung 1.116).
(5) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Hausdorff-Raum, und sei $Y \subset (X, \mathcal{O}_X)$ kompakt in der Unterraumtopologie, dann ist $Y \subset X$ abgeschlossen.

1.52. Satz. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein Hausdorff-Raum.*

(1) *Wenn $X$ kompakt oder folgenkompakt ist, ist $X$ auch abzählbar kompakt.*
(2) *Es ist $X$ genau dann abzählbar kompakt, wenn jede Folge in $X$ einen Häufungspunkt besitzt.*
(3) *Wenn $X$ abzählbar kompakt ist und (A1) erfüllt, ist $X$ folgenkompakt.*
(4) *Wenn $X$ abzählbar kompakt ist und (A2) erfüllt, dann ist $X$ kompakt.*

Die Punkte (2) und (3) zeigen wieder einmal, dass man mit Folgen vorsichtig umgehen muss, wenn das erste Abzählbarkeitsaxiom verletzt ist. Wir fassen den obigen Satz in einem Diagramm zusammen.
$$\text{kompakt} \quad \underset{\Longrightarrow}{\overset{(A2)}{\Longleftarrow}} \quad \text{abzählbar kompakt} \quad \underset{\Longleftarrow}{\overset{(A1)}{\Longrightarrow}} \quad \text{folgenkompakt}$$
Wir betrachten im Folgenden vor allem kompakte Räume. In der Analysis ist hingegen der Begriff der Folgenkompaktheit wichtiger.

Beweis von Satz 1.52. In (1) ist nur zu zeigen, dass jeder folgenkompakte Raum auch abzählbar kompakt ist, die andere Aussage ist klar. Sei also $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare offene Überdeckung. Wir nehmen an, dass es keine endliche Teilüberdeckung gibt. Wir dürfen außerdem annehmen, dass
$$U_i \not\subset \bigcup_{j=0}^{i-1} U_j$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, andernfalls lassen wir $U_i$ weg und gehen zu einer kleineren Teilüberdeckung über. Wir wählen also eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_i \in U_i \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} U_j \ .$$

Sei $x \in X$ ein Häufungspunkt (z.B. der Grenzwert einer konvergenten Teilfolge), dann gilt $x \in U_{i_0}$ für ein $i_0 \in \mathbb{N}$, also liegen unendlich viele Folgenglieder in $U_{i_0}$, im Widerspruch zur Konstruktion.

Zu (2) zeigen wir, dass jede Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in einem abzählbar kompakten Raum $X$ einen Häufungspunkt besitzt, die Rückrichtung folgt wie in (1). Sei $A_n = \overline{\{\, x_i \mid i \geq n \,\}} \neq \emptyset$, dann ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ die Menge aller Häufungspunkte. Wenn wir annehmen, dass $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt besitzt, sei $U_n = X \setminus A_n$, dann ist $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare offene Überdeckung von $X$ mit $U_m \subset U_n$ für alle $m$, $n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$. Es folgt, dass $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i = U_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zu $A_n \neq \emptyset$.

Zu (3) wähle nach (2) einen Häufungspunkt $x$ der Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Wenn (A1) erfüllt ist, existiert eine abzählbare Umgebungsbasis $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von $x$, und wie im Beweis von Satz 1.36 dürfen wir annehmen, dass $V_j \subset V_i$ für alle $i$, $j \in \mathbb{N}$ mit $i < j$. Um eine Teilfolge mit Grenzwert $x$ zu konstruieren, setzen wir $i_0 = 1$ und wählen induktiv $i_j > i_{j-1}$ für $j \geq 1$ so, dass $x_{i_j} \in V_j$. Aus $V_j \subset V_i$ für alle $i < j$ folgt $x_{i_k} \in V_j$ für alle $k \geq j$, also konvergiert $(x_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$ gegen $x$.

Für (4) nehmen wir an, dass $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ eine beliebige offene Überdeckung ist, und dass $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis von $\mathcal{O}$ ist. Wenn wir eine abzählbare Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$ konstruieren können, folgt die Existenz einer endlichen Teilüberdeckung aus der Annahme, dass $X$ abzählbar kompakt ist. Wir wählen jetzt zu jedem $i \in \mathbb{N}$ eine Menge $U_i \in \mathcal{U} \cup \{\emptyset\}$, so dass $V_i \subset U_i$, falls eine Menge $U \in \mathcal{U}$ mit $V_i \subset U$ existiert, und $U_i = \emptyset$ sonst. Da $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von $X$ war, muss dann auch $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung sein, denn jeder Punkt $x \in X$ ist in einem $U \in \mathcal{U}$ enthalten, und es existiert also ein $i$ mit $x \subset V_i \subset U$. Elimination aller Indizes $i$ mit $U_i = \emptyset$ liefert eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung von $X$, nach Voraussetzung existiert also auch eine endliche Teilüberdeckung. □

Es folgen einige weitere Sätze aus Analysis II, die wir nicht noch einmal beweisen wollen.

1.53. Satz. *Für einen metrischen Raum sind die Begriffe kompakt, abzählbar kompakt und folgenkompakt äquivalent.*

1.54. Satz (Heine-Borel). *Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

1.55. Satz (Lebesgue). *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $K$. Dann existiert $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in K$ ein $U \in \mathcal{U}$ mit $B_\varepsilon(x) \cap K \subset U$ existiert.*

Den folgenden Satz wollen wir ebenfalls nicht beweisen.

1.56. Satz (Tychonoff). *Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume, dann ist der Produktraum $\prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{O}_i)$ genau dann kompakt, wenn alle Räume $(X_i, \mathcal{O}_i)$ kompakt sind.*

Man beachte, dass die Box-Topologie aus Bemerkung 1.48 diese Eigenschaft offensichtlich nicht besitzt.

Schließlich führen wir noch den Begriff der lokalen Kompaktheit ein.

1.57. Definition. Ein topologischer Raum heißt *lokalkompakt,* wenn er Hausdorffsch ist und jeder Punkt in $X$ eine kompakte Umgebung besitzt.

1.58. Beispiel. Die Räume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ sind lokalkompakt, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}^n$ jedoch nicht.

Wir benutzen Kompaktheit, um eine interessante und wichtige Topologie auf der Menge $C(X,Y)$ aller stetigen Abbildungen von $X$ nach $Y$ einzuführen.

1.59. Definition. Seien $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, dann ist die *kompakt-offene Topologie* $\mathcal{O}_{\mathrm{ko}}$ auf $C(X,Y)$ definiert als die Topologie zur Subbasis

$$\mathcal{S}_{\mathrm{ko}} = \{S_{K,U} \mid K \subset X \text{ kompakt und } U \subset Y \text{ offen}\}$$
$$\text{mit } S_{K,U} = \{F \in C(X,Y) \mid K \subset F^{-1}(U)\} \ .$$

Wenn der Definitionsbereich lokalkompakt ist, gibt es genug kompakte Mengen, um eine interessante Topologie zu erhalten. Seien $X$, $Y$, $Z$ Mengen, dann gibt es eine Bijektion

$$\mathrm{Abb}(X \times Y, Z) \cong \mathrm{Abb}(X, \mathrm{Abb}(Y,Z)) \ , \qquad F \longmapsto f = \big(x \mapsto F(x,\,\cdot\,) \in \mathrm{Abb}(Y,Z)\big) \ .$$

Die Abbildungen $f$ und $F$ heißen zueinander *adjungiert.*

1.60. Satz (Exponentialgesetz). *Es seien $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ und $(Z,\mathcal{O}_Z)$ topologische Räume, $f\colon X \to C(Y,Z)$ eine beliebige Abbildung, und $F\colon X \times Y \to Z$ dazu adjungiert.*

(1) *Wenn $F$ stetig ist, ist $f\colon (X,\mathcal{O}_X) \to (C(Y,Z),\mathcal{O}_{\mathrm{ko}})$ ebenfalls stetig, wir erhalten also eine injektive Abbildung*
$$\alpha\colon C\big(X \times Y, Z\big) \to C\big(X, C(Y,Z)\big) \ .$$
(2) *Die Abbildung $\alpha$ ist stetig.*
(3) *Sei $(Y,\mathcal{O}_Y)$ lokalkompakt. Dann ist $\alpha$ eine Bijektion.*
(4) *Es sei $(X,\mathcal{O}_X)$ Hausdorff und $(Y,\mathcal{O}_Y)$ lokalkompakt. Dann ist $\alpha$ ein Homöomorphismus.*
(5) *Sei $(X,\mathcal{O}_X)$ lokalkompakt. Die kompakt-offene Topologie ist auf $C(X,Y)$ die gröbste Topologie, für die die Auswertungsabbildung*
$$\mathrm{ev}\colon X \times C(X,Y) \to Y \qquad \textit{mit} \qquad \mathrm{ev}(x,g) = g(x)$$
*stetig ist.*

Wenn wir $Y^X$ anstelle von $(C(X,Y),\mathcal{O}_{\mathrm{ko}})$ schreiben, ließt sich (4) als $Z^{X\times Y} \cong (Z^Y)^X$, daher der Name „Exponentialgesetz“. Die Eigenschaft (5) ist eine Möglichkeit, die kompakt-offene Topologie zu charaktierisieren.

Die zahlreichen verschiedenen Bedingungen in (1)–(5) sind hässlich. Geht man aber zur Unterkategorie der kompakt erzeugten schwachen Hausdorff-Räume über, so existiert eine Topologie auf $C(X,Y)$, für die (1)–(5) ohne weitere Voraussetzungen gelten. Wir lernen später weitere Motivation für diese Unterkategorie kennen.

Beweis. Zu (1) sei $F\colon X \times Y \to Z$ stetig. Zu zeigen ist, dass

$$f^{-1}(S_{K,U}) = \{x \in X \mid F(x,y) \in U \text{ für alle } y \in K\}$$

für alle kompakten $K \subset Y$ und alle offenen $U \subset Z$ in $X$ offen ist. Sei dazu $x \in f^{-1}(S_{K,U})$. Da $F^{-1}(U) \subset X \times Y$ in der Produkttopologie offen ist und $(x,y) \in F^{-1}(U)$ für alle $y \in K$, existieren $V_y \subset X$ und $W_y \subset Y$ offen mit

$$(x,y) \in V_y \times W_y \subset F^{-1}(U) \ .$$

Die offenen Mengen $(W_y)_{y\in K}$ überdecken $K$, also gibt es endlich viele $y_1,\dots,y_k \in K$, so dass

$$K \subset W_{y_1} \cup \dots \cup W_{y_k} \ .$$

Dann ist

$$V = V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_k} \subset X$$

offen mit $x \in V$, und es gilt

$$V \times K \subset \bigcup_{i=1}^{k} V \times W_{y_i} \subset \bigcup_{i=1}^{k} V_{y_i} \times W_{y_i} \subset F^{-1}(U) \ ,$$

also $V \subset f^{-1}(S_{K,U})$. Somit ist $f^{-1}(S_{K,U}) \subset X$ offen, und $f$ ist stetig.

Zu (2) reicht es, für Subbasismengen $S_{K,W}$ (also $K \subset X$ kompakt, $W \subset C(Y,Z)$ offen) zu zeigen, dass $\alpha^{-1}(S_{K,W})$, denn $\alpha^{-1}$ ist mit endlichen Durchschnitten verträglich. Aus dem gleichen Grund reicht es, für $W$ Subbasismengen einzusetzen, denn für $L \subset Y$ kompakt und $U, V \subset Z$ offen gilt

$$S_{L,U\cap V} = \big\{\, f\colon Y \to Z \;\big|\; f(L) \subset U \text{ und } f(L) \subset V \,\big\} = S_{L,U} \cap S_{L,V} \ .$$

Die Stetigkeit von $\alpha$ folgt, denn für alle $K \subset X$ und $L \subset Y$ kompakt und $U \subset Z$ offen ist auch die folgende Menge offen:

$$\alpha^{-1}\big(S_{K,S_{L,U}}\big) = S_{K\times L,U} \subset C(X \times Y, Z) \ .$$

Zu (3) sei jetzt $f\colon X \to \mathcal{C}(Y,Z)$ stetig. Es sei $U \subset Z$ offen und $(x,y) \in F^{-1}(U)$. Nach Voraussetzung ist $f(x)\colon Y \to Z$ stetig, also ist

$$(f(x))^{-1}(U) = \{y \in Y \mid F(x,y) \in U\} \subset Y$$

offen. Da $Y$ lokalkompakt ist, hat $y$ eine kompakte Umgebung $K$, und $K$ ist normal nach Bemerkung 1.51 (4), erfüllt also insbesondere (T3). Wie im Beweis von Satz 1.49 (3) besitzt $y$ eine abgeschlossene Umgebung $A \subset K \cap (f(x))^{-1}(U)$. Nach Bemerkung 1.51 (1) ist $A$ dann auch kompakt. Da $f$ stetig ist, ist

$$V = f^{-1}(S_{A,U})$$

eine offene Umgebung von $x$ in $X$. Daraus folgt aber, dass $V \times A \subset F^{-1}(U)$ eine Umgebung von $(x,y)$ in $X \times Y$ ist. Also ist $F^{-1}(U)$ offen und $F$ daher stetig.

Zu (4) zeigen wir, dass Mengen der Form $S_{K\times L,U}$ eine Subbasis von $C(X \times Y, Z)$ bilden. Dann folgt die Offenheit von $\alpha$ mit dem gleichen Argument wie in (2). Sei dazu $M \subset X \times Y$ kompakt und $U \subset Z$ offen, und sei $F \in S_{M,U}$. Es reicht, endlich viele Kompakta $K_i \subset X$ und $L_i \subset Y$, $i = 1, \ldots, n$ zu konstruieren, so dass

$$F \in \bigcap S_{K_i\times L_i,U} \subset S_{M,U} \ .$$

Da $X$ und $Y$ Hausdorff sind, sind die Bilder $M_X \subset X$, $M_Y \subset Y$ der Projektionen von $M \subset X \times Y$ nach Bemerkung 1.51 (2) wieder kompakt. Daher finden wir zu jedem Punkt $(x,y) \in M$ kompakte Umgebungen $K_x$, $L_y$, so dass $K_x \times L_y \subset F^{-1}(U)$, also $F \in S_{K_x\times L_y,U}$ gilt. Wegen Kompaktheit von $M$ reichen endlich viele der Produkte $K_x \times L_y$ aus, um $M$ zu überdecken. Daraus ergibt sich die obige Behauptung.

Zu (5) betrachte die Identität

$$\mathrm{id}\colon (C(X,Y), \mathcal{O}) \longrightarrow (C(X,Y), \mathcal{O}_{\mathrm{ko}}) \ .$$

Sie induziert gerade die Abbildung

$$\mathrm{ev}\colon (C(X,Y), \mathcal{O}) \times (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y) \ .$$

Also ist ev nach (1), (3) und Bemerkung 1.24 genau dann stetig, wenn $\mathcal{O}$ feiner als $\mathcal{O}_{\mathrm{ko}}$ ist. □

1.61. Bemerkung. Es sei jetzt $(Y,d)$ ein metrischer Raum.

(1) Eine Folge $(f_i)_i$ in $C(X,Y)$ konvergiert genau dann in der kompakt-offenen Topologie gegen $f \in C(X,Y)$, wenn $(f_i)_i$ *gleichmäßig auf Kompakta* gegen $f$ konvergiert (oder kurz: *kompakt konvergiert*), das heißt, wenn es zu jedem Kompaktum $K \subset X$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$d\big(f_i(x), f(x)\big) < \varepsilon$$

für alle $x \in K$ und alle $i \geq n$ (Übung 1.117).

(2) Sei $X$ lokalkompakt, dann ist Konvergenz in der kompakt-offenen Topologie wegen (1) äquivalent zur lokal gleichmäßigen Konvergenz, das heißt, jeder Punkt $x \in X$ hat eine Umgebung, auf der die Folge gleichmäßig konvergiert.

(3) Wenn $X$ sogar kompakt ist, ist Konvergenz in der kompakt-offenen Topologie äquivalent zur gleichmäßigen Konvergenz.

Um gleichmäßige Konvergenz topologisch zu definieren, wenn $X$ nicht kompakt ist, brauchen wir eine stärkere Struktur als nur eine Topologie auf dem Raum $Y$.

## 1.g. Zusammenhang

Wir definieren den Begriff des zusammenhängenden Raumes. Für viele Anwendungen benötigen wir den etwas stärkeren Begriff des Wegzusammenhangs.

1.62. Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt

(1) *zusammenhängend,* wenn es keine zwei nichtleeren offenen Mengen $U$, $V \in \mathcal{O}$ gibt mit $U \cup V = X$ und $U \cap V = \emptyset$, und

(2) *wegzusammenhängend,* wenn zu je zwei $x$, $y \in X$ ein *Weg* $\gamma$ von $x$ nach $y$, das heißt, eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$, existiert.

Bedingung (1) kann man äquivalent mit abgeschlossenen Mengen formulieren.

1.63. Bemerkung. (1) Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ ist genau dann zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und $X$ die einzigen Mengen sind, die zugleich offen und abgeschlossen sind.

(2) Es trage $Y = \{0,1\}$ die diskrete Topologie. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ ist genau dann zusammenhängend, wenn es keine stetige surjektive Abbildung $F\colon X \twoheadrightarrow Y$ gibt.

1.64. Beispiel. Jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend. Sei etwa $I = U \mathbin{\dot\cup} V$ mit $U$, $V \subset (a,b)$ nichtleer, offen und abgeschlossen. Wir fixieren $u \in U$ und $v \in V$, o.B.d.A. sei $u < v$. Setze $x = \inf(V \cap [u,v])$, dann enthält jede Umgebung von $x$ sowohl Punkte von $V$ als auch von $U$. Es folgt

$$x \in \overline{V} \cap \overline{U} = V \cap U \ ,$$

da sowohl $U$ als auch $V$ abgeschlossen sind, im Widerspruch zu $U \cap V = \emptyset$.

1.65. Satz. (1) *Das Bild eines (weg-) zusammenhängenden Raumes unter einer stetigen Abbildung ist wieder (weg-) zusammenhängend.*

(2) *Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.*

Beweis. Sei $F\colon X \to Y$ stetig. Wenn $\operatorname{im} F \subset Y$ nicht zusammenhängend ist, dann gibt es nichtleere, offene Teilmengen $U$, $V \subset \operatorname{im} F$ mit $\operatorname{im} F = U \mathbin{\dot\cup} V$. Dann sind auch $F^{-1}(U)$ und $F^{-1}(V)$ nicht leer, offen mit $X = F^{-1}(U) \mathbin{\dot\cup} F^{-1}(V)$. Also ist auch $X$ nicht zusammenhängend.

Sei $X$ wegzusammenhängend und $F(x)$, $F(y)$ zwei beliebige Punkte in $\operatorname{im} F$. Sei $\gamma\colon [0,1] \to X$ ein Weg von $x$ nach $y$, dann ist $F \circ \gamma$ ein Weg von $F(x)$ nach $F(y)$ in $\operatorname{im} F$. Also ist auch $\operatorname{im} F$ wegzusammenhängend, und es folgt (1).

Zu (2) nehmen wir an, dass es nichtleere, offene und abgeschlossene Teilmengen $U$, $V \subset X$ mit $X = U \mathbin{\dot\cup} V$ gibt. Wähle $x \in U$ und $y \in V$. Dann kann es keinen Weg $\gamma$ von $x$ nach $y$ geben, denn ansonsten wäre

$$[0,1] = \gamma^{-1}(U) \mathbin{\dot\cup} \gamma^{-1}(V)$$

mit $\gamma^{-1}(U)$, $\gamma^{-1}(V)$ nichtleer, offen im Widerspruch zu Beispiel 1.64. $\square$

1.66. Definition. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, und sei $x \in X$.

(1) Die Vereinigung aller zusammenhängenden Unterräume von $X$, die $x$ enthalten, heißt die *Zusammenhangskomponente* $K(x)$ von $x$.
(2) Die Menge aller Punkte $y$, die sich mit $x$ durch einen stetigen Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ verbinden lassen, heißt die *Wegzusammenhangskomponente* von $x$.
(3) Der Raum $X$ heißt *total unzusammenhängend,* wenn $\{x\}$ die Zusammenhangskomponente von $x$ ist für alle $x \in X$.

1.67. Bemerkung. (1) Zusammenhangskomponenten sind immer abgeschlossen, Wegzusammenhangskomponenten jedoch nicht notwendigerweise, siehe Übung 1.118.
(2) Seien $x$, $y \in X$, dann gilt entweder $K(x) = K(y)$ oder $K(x) \cap K(y) = \emptyset$, analoges gilt für Wegzusammenhangskomponenten.
(3) Aus Beispiel 1.64 folgt, dass die Wegzusammenhangskomponente eines Punktes $x$ in $K(x)$ enthalten ist.
(4) Für alle $x \in X$ gilt

$$K(x) \subset \bigcap \left\{ V \subset X \;\middle|\; x \in V,\ V \text{ ist offen und abgeschlossen} \right\} .$$

Gleichheit muss nicht gelten.

1.68. Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *lokal* (*weg-*) *zusammenhängend,* wenn zu jedem Punkt $x$ und jeder Umgebung $U$ von $x$ eine (weg-) zusammenhängende Umgebung $V \subset U$ von $x$ existiert.

1.69. Bemerkung. Es gibt lokal zusammenhängende, nicht zusammenhängende topologische Räume, und auch zusammenhängende, nicht lokal zusammenhängende topologische Räume. Wir werden später in der Regel mit lokal wegzusammenhängenden Räumen arbeiten.

## 1.h. Quotienten und Verklebung

In Absatz 1.e hatten wir bereits einige Konstruktionen topologischer Räume vorgestellt. Jetzt wollen wir beliebige Vereinigungen und Quotienten topologischer Räume betrachten, und auch mehrere Räume zu einem neuen verkleben.

1.70. Bemerkung. Es sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume und $X$ eine Menge.
(1) Gegeben Abbildungen $f_i\colon X \to X_i$ für alle $i \in I$, existiert stets eine eindeutige gröbste Topologie $\mathcal{O}$ auf $X$, für die alle $f_i$ stetig sind. Diese Topologie $\mathcal{O}$ heißt die von den $f_i$ *induzierte Topologie* oder auch *Initialtopologie.* Beispiele sind die Unterraumtopologie (Satz 1.43 (1)), die Produkttopologie (Satz 1.46 (1)) sowie die Klumpentopologie, falls $I = \emptyset$.
(2) Seien umgekehrt Abbildungen $f_i\colon X_i \to X$ für alle $i \in I$ gegeben, dann existiert stets eine eindeutige feinste Topologie $\mathcal{O}$ auf $X$, für die alle $f_i$ stetig sind. Diese Topologie heißt die von den $f_i$ *koinduzierte Topologie* oder *Finaltopologie.* Beispiele sind die Summentopologie (Satz 1.40 (1)), sowie die diskrete Topologie, falls $I = \emptyset$.

Die Existenz und Eindeutigkeit ist in jedem Fall zu zeigen, die Argumente sind immer ähnlich denen in den Beweisen der Sätze 1.40, 1.43 und 1.46. Die Begriffe „Initialtopologie“ und „Finaltopologie“ stammen daher, dass man eine Topologie am „Beginn“ beziehungsweise „Ende“ der betrachteten „Pfeile“, also der Abbildungen $f_i$, definiert.

Im Folgenden betrachten wir einige Finaltopologien. Die Quotiententopologie ist dual zur Unterraumtopologie. Anstelle einer injektiven Abbildung $\iota\colon Y \hookrightarrow X$ in einen gegebenen topologischen Raum betrachten wir also eine surjektive Abbildung $\pi\colon X \twoheadrightarrow Y$ von einem gegebenen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ auf eine Menge $Y$. Dabei können wir $Y$ als Quotienten $Y = X/\sim$ nach einer Äquivalenzrelation $\sim$ auffassen, wobei

$$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \pi(x) = \pi(y) .$$

1.71. Definition. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und $\pi\colon X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. Dann definieren wir die *Quotiententopologie* oder *Identifizierungstopologie* auf $Y$ durch

$$\mathcal{O}_Y = \{U \subset Y \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X\} .$$

Ähnlich wie bei der Summentopologie überlegt man sich, dass $\mathcal{O}_Y$ tatsächlich eine Topologie ist. Die Quotiententopologie wird durch die folgende Eigenschaft charakterisiert.

1.72. Satz. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und $\pi\colon X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung.*

(1) *Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie auf $Y$, für die $\pi\colon X \twoheadrightarrow Y$ stetig ist.*
(2) *Die Quotiententopologie ist die einzige Topologie auf $Y$, für die eine Abbildung $f$ von $Y$ in einen beliebigen topologischen Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ genau dann stetig ist, wenn $f \circ \pi\colon X \to Z$ stetig ist.*

1.73. Bemerkung. Um zu sehen, dass Unterraumtopologie und Quotiententopologie zueinander dual sind, vergleichen wir die zugehörigen Diagramme.

$$\begin{tikzcd} & (X, \mathcal{O}_X) \\ (Z, \mathcal{O}_Z) \arrow[ur, "\iota \circ F"] \arrow[r, "F"'] & (Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[u, hook, "\iota"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X, \mathcal{O}_X) \arrow[d, two heads, "\pi"'] \arrow[dr, "f \circ \pi"] & \\ (Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[r, "f"'] & (Z, \mathcal{O}_Z) \end{tikzcd}$$

Das linke Diagramm beschreibt die Situation aus Satz 1.43 (2), das rechte die aus Satz 1.72 (2).

Beweis von Satz 1.72. Damit $\pi\colon X \to Y$ stetig ist, dürfen höchstens Teilmengen $U \subset Y$ mit $\pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ offen sein, also gilt (1).

Zu (2) kopieren wir den Beweis von Satz 1.43 (2) und drehen alle Pfeile um. □

1.74. Bemerkung. Sei $p\colon (X, \mathcal{O}_X) \to Y$ surjektiv, und $\mathcal{O}_Y$ sei die Quotiententopologie. Wir untersuchen, welche topologischen Eigenschaften sich von $X$ auf $Y$ vererben.

(1) Wenn $X$ quasikompakt ist, dann ist auch $Y$ quasikompakt, da $Y = p(X)$. Wenn $X$ kompakt und $Y$ Hausdorffsch ist, dann ist $Y$ auch kompakt, vgl. Übung 1.115.
(2) Wenn $X$ (weg-) zusammenhängend ist, dann ist auch $Y$ (weg-) zusammenhängend. Dies folgt wiederum aus der Stetigkeit von $p$ und Satz 1.65 (1).
(3) Trennungseigenschaften vererben sich im allgemeinen nicht von $X$ auf $Y$, wie die Übungen 1.124 und 1.126 zeigen. Insbesondere vererbt sich auch Kompaktheit nicht automatisch.
(4) Auch Abzählbarkeitseigenschaften vererben sich nicht immer, siehe Bemerkung 1.83 unten.

Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen an die Äquivalenzrelation $\sim$ beziehungsweise die Abbildung $\pi\colon X \to X/\sim$ lassen sich einzelne Trennungsaxiome von $X$ auf den Quotienten übertragen. Diese Sätze helfen uns aber bei den Spezialfällen, die wir als nächstes betrachten wollen, nicht weiter, daher lassen wir sie hier weg.

Als nächstes wollen wir die Summen- und die Quotiententopologie benutzen, um zwei weitere universelle Konstruktionen zu erklären. Wir benötigen beide später bei der Konstruktion von CW-Komplexen.

Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, sei $V \subset Y$ eine Teilmenge, und seien $f\colon V \to X$ eine zunächst beliebige Abbildung. Wir betrachten die Menge

$$X \cup_f Y = (X \dot\cup Y)/\sim ,$$

wobei $\sim$ die von $y \sim f(y)$ für alle $y \in V$ erzeugte Äquivalenzrelation ist. Hierbei *erzeugt* jede Teilmenge $S \subset M \times M$ eine Äquivalenzrelation $R$ auf $M$, so dass $aRb$ genau dann gilt, wenn es

eine Kette $a = a_0, a_1, \ldots, a_k = b$ von Elementen von $M$ mit $(a_{i-1}, a_i) \in S$ oder $(a_i, a_{i-1}) \in S$ für alle $i = 1, \ldots, k$ gibt. Die Punkte in $V$ werden in unserem Fall entlang der Abbildung $f$ an $X$ „angeklebt“. Die Quotiententopologie auf $X \cup_f Y$ heißt hier auch „Verklebungstopologie“. Man beachte: die kanonische Abbildung $i\colon X \hookrightarrow X \cup_f Y$ ist injektiv, die Abbildung $j\colon Y \to X \cup_f Y$ im allgemeinen jedoch nicht.

Ein wichtiger Spezialfall besteht darin, dass $f$ stetig ist. In diesem Fall erfüllt $W = X \cup_f Y$ die universelle Eigenschaft eines *Pushouts.*

1.75. Folgerung. *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, $V \subset Y$ und $f\colon V \to X$ stetig. Der Raum $X \cup_f Y$ trage die Identifizierungstopologie zur Abbildung $\pi\colon X \sqcup Y \twoheadrightarrow X \cup_f Y$. Sei $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ein weiterer topologischer Raum und $g\colon X \to Z$ und $h\colon Y \to Z$ stetig.*

(1) *Es existiert genau dann eine Abbildung $k\colon X \cup_f Y \to Z$ mit $g = k \circ i$ und $h = k \circ j$, wenn $g \circ f = h|_V\colon V \to Z$, und $k$ ist in diesem Fall eindeutig.*
(2) *In diesem Fall ist $k$ stetig.*

$$\begin{tikzcd}
 & & (Z, \mathcal{O}_Z) \\
(Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[rr, "j"] \arrow[urr, bend left, "h"] & & (W, \mathcal{O}_W) \arrow[ur, dashed, "k"] \\
(V, \mathcal{O}_V) \arrow[u, hook] \arrow[rr, "f"] & & (X, \mathcal{O}_X) \arrow[u, hook, "i"] \arrow[uur, bend right, "g"']
\end{tikzcd} \tag{1.3}$$

Beweis. Zu (1) existiert stets genau eine Abbildung

$$\overline{k}\colon X \sqcup Y \to Z \quad \text{mit} \quad \overline{k}|_X = g \quad \text{und} \quad \overline{k}|_Y = h\ ,$$

da die disjunkte Vereinigung ein Koprodukt in der Kategorie der Mengen ist. Damit $k$ existiert, muss $\overline{k}$ mit der Äquivalenzrelation $\sim$ verträglich sein. Das ist äquivalent zu

$$(g \circ f)(y) = \overline{k}(f(y)) = \overline{k}(y) = h(y) \qquad \text{für alle } y \in V\ .$$

Sei nun $k\colon X \cup_f Y \to Z$ eine Abbildung mit $g = k \circ i$ und $h = k \circ j$, dann gilt $(k \circ \pi)|_X = g$ und $(k \circ \pi)|_Y = h$, und es folgt $\overline{k} = k \circ \pi$ wegen Satz 1.40 (3). Da $\pi$ surjektiv ist, ergibt sich daraus die Eindeutigkeit von $k$.

Zu (2) folgern wir nach Satz 1.40 (2), dass $\overline{k}$ stetig ist. Da $\overline{k} = k \circ \pi$, folgt aus Satz 1.72 (2) die Stetigkeit von $k$. □

Sei jetzt $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine gerichtete Familie topologischer Räume, das heißt, es existieren (beliebige) Abbildungen $f_{ij}\colon X_i \to X_j$ für alle $i < j$ mit

$$f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}\colon X_i \to X_k \qquad \text{für alle } i < j < k.$$

Wir betrachten den *Kolimes*

$$\varinjlim X_i = \coprod_{i \in \mathbb{N}} X_i \Big/ \sim\ , \tag{1.4}$$

wobei

$$X_i \ni x_i \sim x_j \in X_j \quad \Longleftrightarrow \quad f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j) \qquad \text{für ein } k > i,\, j.$$

Die *schwache Topologie* auf $\lim_{\longrightarrow} X_i$ ist die von den natürlichen Abbildungen $g_i\colon X_i \to \lim_{\longrightarrow} X_i$ koinduzierte Topologie.

Ein wichtiger Spezialfall besteht darin, dass alle $f_{ji}$ stetig sind.

1.76. Folgerung. *Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ topologische Räume und $f_{ij}\colon X_i \to X_j$ stetige Abbildungen mit $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ für alle $i < j < k$. Sei $\varinjlim X_i$ mit der Identifizierungstopologie zur Abbildung $\coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i \to \varinjlim X_i$ versehen. Sei $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ein weiterer topologischer Raum und $(h_i\colon X_i \to Z)_{i\in\mathbb{N}}$ stetige Abbildungen.*

(1) *Es existiert genau dann eine Abbildung $\ell\colon \varinjlim X_i \to Z$ mit $h_i = \ell \circ g_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, wenn $h_j \circ f_{ji} = h_i\colon X_i \to Z$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, und $\ell$ ist in diesem Fall eindeutig.*
(2) *In dieser Situation ist $\ell$ stetig.*

Also erfüllt $W = \varinjlim X_i$ die universelle Eigenschaft eines *Kolimes.*

$$\begin{tikzcd}
 & & (Z, \mathcal{O}_Z) \\
(X_0, \mathcal{O}_0) \arrow[r, "f_{01}"] \arrow[urr, bend left, "h_0"] \arrow[drr, bend right, "g_0"'] & (X_1, \mathcal{O}_1) \arrow[r] \arrow[ur, bend left, "h_1"] \arrow[dr, bend right, "g_1"'] & \cdots \\
 & & (W, \mathcal{O}_W) \arrow[u, dashed, "\ell"']
\end{tikzcd} \tag{1.5}$$

Beweis. Dieser Beweis ist völlig analog zum Beweis von Folgerung 1.75. □

In Wirklichkeit ist die Kolimes-Konstruktion wesentlich allgemeiner und umfasst die universellen Eigenschaften in den Diagrammen (1.3) und (1.5) als Spezialfälle.

### 1.i. CW-Komplexe und topologische Mannigfaltigkeiten

Wir beschreiben jetzt zwei wichtige Klassen topologischer Räume. Die Grundidee bei beiden Konstruktionen besteht darin, Räume zu konstruieren, die sich in einem gewissen Sinne ähnlich verhalten wie $\mathbb{R}^n$ mit der Standardbasis.

1.77. Definition. Eine (*topologische*) *Mannigfaltigkeit* der *Dimension* $n \in \mathbb{N}$ ist ein Hausdorff-Raum $M$ mit abzählbarer Basis, so daß jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U \subset M$ besitzt, die homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist.

1.78. Beispiel. Die folgenden Räume sind Mannigfaltigkeiten.

(1) Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n$.
(2) Die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n$. Hierzu betrachtet man die stereographischen Projektion vom Nord- und Südpol $(0, \dots, 0, \pm 1)$ aus auf den Unterraum $\mathbb{R}^n \times \{0\}$.
(3) Jede offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit ist wieder eine Mannigfaltigkeit. Hierzu reicht es zu zeigen, dass offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ sind. Betrachte dazu die Abbildung
$$B_r(x) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \qquad \text{mit} \qquad y \mapsto \frac{1}{r - |y - x|}\,(y - x)\ .$$
(4) Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine $n$-dimensionale $C^k$-Untermannigfaltigkeit, dann ist $M$, versehen mit der Unterraumtopologie, eine $n$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

1.79. Bemerkung. (1) Wir verlangen die Hausdorff-Eigenschaft (T2), um den Raum aus Beispiel 1.29 und ähnliche Konstrukte auszuschliessen. Wir verlangen abzählbare Basen (A2), damit unsere Mannigfaltigkeiten nicht zu groß werden, betrachte dazu etwa das Produkt aus dem Intervall $(0, 1)$ mit einer überabzählbaren, diskreten Menge. Man

beachte, dass (A1) und (T1) automatisch erfüllt sind, da jeder Punkt eine Umgebung homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ besitzt.

(2) Mannigfaltigkeiten erfüllen (T3), sind also regulär, daher nach dem ersten Metrisationssatz von Urysohn metrisierbar (siehe Bemerkung 1.37), also insbesondere sogar normal. Sei etwa $A \subset M$ abgeschlossen und $p \in M \setminus A$, dann wählen wir eine zu $\mathbb{R}^n$ homöomorphe Umgebung $U \subset M$ von $p$ und betrachten $p \subset \mathbb{R}^n$ und $A \cap U \subset \mathbb{R}^n$. Dann existiert $r > 0$, so dass $D_r(p) \cap (A \cap U) = \emptyset$ in $\mathbb{R}^n$. Da $M$ hausdorffsch und $D_r(p)$ kompakt ist, ist das Bild $K$ von $D_r(p)$ unter der Inklusion $U \hookrightarrow M$ kompakt und insbesondere abgeschlossen nach Bemerkung 1.51 (2) und (5). Daher trennen die offenen Mengen $\mathring{K}$ und $M \setminus K$ den Punkt $p$ von der Menge $A$.

(3) Wir werden später sehen, dass die Dimension eine lokale Invariante ist: eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ genau dann isomorph, wenn $n = m$ gilt. Wir verlangen, dass eine Mannigfaltigkeit nur aus Komponenten einer festgelegten Dimension besteht.

Mit dieser Definition lässt sich zeigen, dass man jede Mannigfaltigkeit in den $\mathbb{R}^N$ einbetten kann, wenn $N$ hinreichend groß gewählt wurde.

Der Begriff der Mannigfaltigkeit ist jedoch für viele Zwecke zu speziell. Die folgende induktive Konstruktion liefert hingegen (überraschenderweise) eine Klasse von topologischen Räumen, die für viele Zwecke allgemein genug ist. Als Referenz verweisen wir auf den Anhang von [**H1**] und auf Abschnitt 4.d.

Wir bezeichnen mit $D^n = D_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ den abgeschlossenen $n$-dimensionalen Einheitsball, und mit $\partial D^n = S^{n-1}$ seinen Rand. Hier wie auch im folgenden bezieht sich ein hochgestellter Index immer auf eine Art Dimension und bezeichnet insbesondere nicht etwa einen Exponenten.

(1) Wir beginnen mit einem diskreten topologischen Raum $X^0$, dem 0-*Gerüst* oder 0-*Skelett,* dessen Punkte wir auch 0-*Zellen* nennen.

(2) Sei das $n-1$-Gerüst $X^{n-1}$ bereits induktiv konstruiert, sei $I^n$ eine beliebige Indexmenge, und sei

$$\left(\varphi_i^n \colon \partial D^n \to X^{n-1}\right)_{i \in I^n}$$

eine Familie stetiger Abbildungen. Definiere die natürliche Abbildung

$$\varphi^n = \bigcup_i \varphi_i^n \colon \coprod_i \partial D^n \to X^{n-1} \qquad \text{mit} \qquad \Big(\bigcup_i \varphi_i^n\Big)(i,x) = \varphi_i^n(x)\ .$$

Dann konstruieren wir das $n$-Gerüst $X_n$, indem wir $\#I^n$-viele Kopien von $D^n$ mit $X^{n-1}$ entlang der Abbildung $\phi^n$ verkleben wie in Folgerung 1.75:

$$X^n = \Big(\coprod_{i \in I^n} D^n\Big) \cup_{\phi^n} X^{n-1}\ .$$

Somit erhalten wir auf die $X^n$ die Quotiententopologie bezüglich einer Projektionsabbildung

$$\Big(X^{n-1} \sqcup \textstyle\coprod_{i \in I^n} D^n\,,\ \mathcal{O}_{\sqcup}\Big) \xrightarrow{\Pi^n} \big(X^n, \mathcal{O}_{X^n}\big)\ . \tag{1.6}$$

(3) Wir können entweder nach endlich vielen Schritten aufhören mit $X = X^n$, oder diesen Prozess für alle $n \in \mathbb{N}_0$ fortsetzen, in diesem Fall setzen wir

$$X = \varinjlim X^n$$

wie in Folgerung 1.76, und erhalten wiederum eine Quotiententopologie bezüglich

$$\coprod_{n \in \mathbb{N}_0} \big(X^n, \mathcal{O}_{X^n}\big) \twoheadrightarrow \big(X, \mathcal{O}_X\big)\ .$$

Als Menge ist $X$ die aufsteigende Vereinigung der Räume $X^0 \subset X^1 \subset \dots$

In $X$ gehört zu jedem $i \in I^n$ eine *charakteristische Abbildung*

$$\Phi_i^n \colon D^n \to X^n \hookrightarrow X \ ,$$

die die Verklebeabbildung $\varphi_i^n \colon S^{n-1} \to X^{n-1}$ fortsetzt, und $\Phi_i^n|_{B^n}$ ist ein Homöomorphismus von $B^n$ auf sein Bild $e_i^n = \Phi_i^n(B^n)$.

Aus den Definitionen der Verklebungstopologie folgt induktiv, dass eine Teilmenge $U \cap X^n$ genau dann in $X^n$ offen ist, wenn alle $(\Phi_i^j)^{-1}(U) \subset D^j$ offen sind für alle $j \leq n$ und $i \in I^j$. Für $n = 0$ ist das klar, da $X^0$ die diskrete Topologie trägt. Im Induktionsschritt ist $U \cap X^n$ genau dann offen, wenn das für $U \cap X^{n-1}$ und $(\Phi_i^n)^{-1}(U)$ für alle $i \in I^n$ gilt, also genau dann, wenn $(\Phi_i^j)^{-1}(U) \subset D^j$ offen sind für alle $j \leq n$ und $i \in I^j$.

Nach Definition der Kolimes-Topologie ist $U \subset X$ offen, wenn $U \cap X^n$ in $X^n$ offen ist für alle $n$, wenn also alle $(\Phi_i^n)^{-1}(U)$ offen sind. In der obigen Argumentation können wir „offen“ überall durch „abgeschlossen“ ersetzen. Insgesamt können wir also $X$ als einen großen Quotienten schreiben bezüglich der Vereinigung aller charakteristischen Abbildungen

$$\textstyle\coprod_{n\in\mathbb{N}_0} \coprod_{i\in I^n} \big(D^n, \mathcal{O}_{D^n}\big) \xrightarrow{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \bigcup_{i\in I^n} \Phi_i^n} \big(X, \mathcal{O}_X\big) \ . \tag{1.7}$$

Nach Definition 1.71 sind dann die folgenden drei Aussagen äquivalent:

(1) Die Menge $X$ trägt die CW-Topologie $\mathcal{O}_{\mathrm{CW}}$.
(2) Eine Teilmenge $U \subset X$ ist genau dann offen, wenn $(\Phi_i^n)^{-1}(U) \subset D^n$ in der üblichen Topologie offen ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $i \in I^n$.
(3) Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $(\Phi_i^n)^{-1}(A) \subset D^n$ in der üblichen Topologie abgeschlossen ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $i \in I^n$.

Die übliche Topologie auf $D^n$ ist hier einfach die Unterraum-Topologie zu $D^n \subset \mathbb{R}^n$.

1.80. Definition. Ein so konstruierter topologischer Raum $X$ heißt *Zellkomplex* oder *CW-Komplex.* Die Teilmenge $X^n \subset X$ heißt *$n$-Gerüst* (*$n$-Skelett*) von $X$. Die Abbildungen

$$\varphi_i^n \colon S^{n-1} \to X^{n-1} \hookrightarrow X$$

heißen *Verklebeabbildungen,* die

$$\Phi_i^n \colon D^n \to X^n \hookrightarrow X$$

*charakteristische Abbildungen.* Man nennt $e_i^n = \Phi_i^n(B^n)$ eine (*offene*) *$n$-Zelle* und $\bar{e}_i^n = \Phi_i^n(D^n)$ eine *abgeschlossene $n$-Zelle* von $X$.

Die Buchstaben „CW“ stehen für *closure finite, weak topology,* siehe unten.

1.81. Beispiel. Die folgenden Räume sind CW-Komplexe:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $X = S^n$ | mit | $X^0 = \dots = X^{n-1} = \mathrm{pt}$ , | | $X^n = \dots = S^n$ ; |
| | oder mit | $X^j = S^j$ | für $j \leq n$ , | $X^n = \dots = S^n$ ; |
| $X = \mathbb{R}$ | mit | $X^0 = \mathbb{Z}$ , | | $X^1 = \dots = \mathbb{R}$ ; |
| $X = \mathbb{R}^2$ | mit | $X^0 = \mathbb{Z}^2$ , | $X^1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ , | $X^2 = \dots = \mathbb{R}^2$ ; |
| $X = \mathbb{R}^n$ | mit | $X^0 = \mathbb{Z}^n$ , | $\dots$ , | $X^n = \dots = \mathbb{R}^n$ ; |

Das erste Beispiel zeigt, dass ein gegebener topologischer Raum auf (viele) verschiedene Weisen als CW-Komplex geschrieben werden kann.

Wir geben exemplarisch charakteristische Funktionen für die ersten zwei CW-Strukturen auf $S^n$ an. Für die erste wählen wir $\Phi^0(\{0\}) = e_{n+1} \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und

$$\Phi^n(v) = \begin{pmatrix} \sin(\pi\,|v|)\,\dfrac{v}{|v|} \\ -\cos(\pi\,|v|) \end{pmatrix} \quad \in \quad S^n \quad \subset \quad \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}\,.$$

Für die zweite CW-Stuktur setzen wir beispielsweise

$$\Phi^j_\pm(v) = \begin{pmatrix} v \\ \pm\sqrt{1-|v|^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \in \quad S^j \times \{0\} = S^n \cap \mathbb{R}^{j+1} \quad \subset \quad \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^j \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{n-j}$$

für alle $j \leq n$ und alle $v \in D^j$.

Wir wollen jetzt einige grundlegende Fakten über CW-Komplexe zusammenstellen.

1.82. Bemerkung. Sei $X = \lim_{\longrightarrow} X^n$ ein CW-Komplex, dann ist die Verklebungstopologie auf $X^n$ gleich der von $X$ induzierten Unterraumtopologie für alle $n$. Es reicht zu zeigen, dass Teilmengen $A \subset X^n$ als Teilmengen von $X^n$ genau dann abgeschlossen sind, wenn sie als Teilmengen von $X$ abgeschlossen sind. Nach Definition 1.71 der Quotiententopologie heißt das

$$\begin{aligned} & (\Phi^m_i)^{-1}(A) \subset D^m \text{ abgeschlossen für alle } m \leq n \text{ und alle } i \in I^m \\ \iff \quad & (\Phi^m_i)^{-1}(A) \subset D^m \text{ abgeschlossen für alle } m \in \mathbb{N}_0 \text{ und alle } i \in I^m\,. \end{aligned}$$

Die Richtung „$\Leftarrow$“ ist klar. Zu „$\Rightarrow$“ schließen wir durch Induktion über $m$: Wenn $A \subset X^{m-1}$ abgeschlossen ist, dann ist

$$(\Phi^m_i)^{-1}(A) = (\varphi^m_i)^{-1}(A) \quad \subset \quad S^{m-1} \subset D^m$$

abgeschlossen in $S^{m-1}$ wegen der Stetigkeit der Verklebeabbildungen $\varphi^n_i$, und in $D^m$, da $S^{m-1} \subset D^m$ abgeschlossen ist. Also ist $A$ in $X^m$ ebenfalls abgeschlossen, und damit auch in $X$. Somit trägt $X^n$ die von $X = \lim_{\longrightarrow} X^n$ induzierte Unterraumtopologie.

1.83. Bemerkung. $CW$-Komplexe erfüllen nicht automatisch das erste Abzählbarkeitsaxiom (A1) und sind daher auch nicht immer metrisierbar, siehe Beispiel 1.34 (2). Als Beispiel betrachten wir einen $CW$-Komplex mit 0-Skelett

$$X^0 = \mathbb{N} \,\dot\cup\, \{*\}\,.$$

Wir wählen $I^1 = \mathbb{N}$ und definieren Verklebefunktionen

$$\varphi^1_n \colon \{-1,1\} \to X^0 \qquad \text{mit} \qquad \varphi^1_n(-1) = * \qquad \text{und} \qquad \varphi^1_n(1) = n\,.$$

Unser $CW$-Komplex $X = X^1$ sieht also aus wie ein Stern mit abzählbar vielen Zacken. Äquivalent schreiben wir

$$X = ([-1,1] \times \mathbb{N})/\sim\,,$$

wobei $(-1,m) \sim (-1,n)$ für alle $m$, $n \in \mathbb{N}$, während alle anderen Punkte nur zu sich selbst äquivalent sind. Da der Raum $[-1,1]\times\mathbb{N}$ sogar das zweite Abzählbarkeitsaxiom (A2) erfüllt, erhalten wir auch ein Gegenbeispiel zu Bemerkung 1.74 (4). Im Beweis unten werden wir auch sehen, dass die CW-Topologie auf $X$ echt feiner ist als die metrische Topologie, bei der wir $X$ als Vereinigung radialer Strecken in einem Vektorraum mit der französischen Eisenbahnmetrik aus Übung 1.95 auffassen; dazu wählen wir etwa $U_n = B_{1/n}(*)$.

Es sei $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Umgebungen von $*$ in $X$. Mit Hilfe eines Diagonalarguments konstruieren wir eine offene Umgebung $V$ von $*$ in $X$, so dass kein $U_n$ ganz in $V$ enthalten ist. Damit zeigen wir, dass $*$ keine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, dass (A1) also verletzt ist.

Nach Definition der Quotiententopologie reicht es,

$$(\Phi_n^1)^{-1}(V) \subset [-1,1]$$

für alle $n$ als offene Umgebung von $-1 = (\Phi_n^1)^{-1}(*)$ anzugeben. Da $[-1,1]$ insbesondere (T3) erfüllt, finden wir (wie im Beweis von Satz 1.49 (3)) eine offene Umgebung $V_n$ von $-1$ in $[-1,1]$ mit

$$\overline{V}_n \subset \left((\Phi_n^1)^{-1}(U_n)\right)^\circ .$$

Für die offene Menge

$$V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_n^1(V_n) \subset X$$

gilt offensichtlich $U_n \not\subset V$ für alle $n$ wie gewünscht, denn

$$(\Phi_n^1)^{-1}(U_n) \not\subset (\Phi_n^1)^{-1}(V) .$$

1.84. Satz. *CW-Komplexe sind normal.*

Beweis. Sei $X = \lim_{\longrightarrow} X^n$ ein CW-Komplex. Zu zeigen ist, dass (T1) und (T4) gelten, und (T1) ist äquivalent dazu, dass Punkte in $X$ abgeschlossen sind.

Sei also $x \in X$. Da $X = \lim_{\longrightarrow} X^n$, existiert genau ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $x \in X^{n_0} \setminus X^{n_0-1}$. Da

$$X^{n_0} \setminus X^{n_0-1} = \coprod_{i\in I^{n_0}} e_i^{n_0} ,$$

liegt $x$ in genau einer Zelle $e_{i_0}^{n_0}$. Wir betrachten $X^{n_0}$ als Quotienten wie in (1.6), dann ist das Urbild $\{x\}$ gerade ein Punkt in einer Kopie von $D^{n_0}$ und somit abgeschlossen in $X^{n_0}$ nach Definition der Quotiententopologie.

Wie in Bemerkung 1.82 folgt aus der Stetigkeit der Verklebeabbildungen induktiv, dass $\{x\}$ in $X^n$ abgeschlossen ist für alle $n > n_0$. Jetzt können wir aus der Definition der Quotiententopologie in (1.7) darauf schließen, dass $\{x\} \subset X$ abgeschlossen ist. Da $x \in X$ beliebig war, gilt also (T1).

Wir zeigen jetzt, dass auch (T4) erfüllt ist. Dazu seien $A$, $B \subset X$ abgeschlossen. Wir konstruieren induktiv offenen Mengen $U^n$, $V^n \subset X^n$ mit

$$A \cap X^n \subset U^n , \qquad B \cap X^n \subset V^n \quad \text{und} \quad \overline{U^n} \cap \overline{V^n} = \emptyset . \tag{*}$$

Für $n = 0$ können wir $U^0 = A \cap X^0$ und $V^0 = B \cap X^0$ wählen. Danach wählen wir in jedem weiteren Schritt für $n > 0$ offene Mengen $U^n$ und $V^n \subset X^n$, die (*) erfüllen sowie

$$U^n \cap X^{n-1} = U^{n-1} \quad \text{und} \quad V^n \cap X^{n-1} = V^{n-1} . \tag{**}$$

Aus der Definition der schwachen Topologie und (*), (**) folgt, dass die Mengen

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} U^n \quad \text{und} \quad V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} V^n$$

in $X$ offen sind mit $A \subset U$, $B \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$, womit (T4) vorbehaltlich der Konstruktion der $U^n$, $V^n$ bewiesen ist.

Um $U^n$ und $V^n$ aus $U^{n-1}$ und $V^{n-1}$ zu konstruieren, können wir $U^n \cap e_i^n$ für jede Zelle $e_i^n \in X^n \setminus X^{n-1}$ einzeln konstruieren. Wir betrachten dazu die Mengen

$$\begin{aligned} & A_i^n = \left(\Phi_i^n\right)^{-1}(A) , && B_i^n = \left(\Phi_i^n\right)^{-1}(B) && \subset \quad D^n , \\ \text{und} \quad & M_i^n = \left(\varphi_i^n\right)^{-1}(U^{n-1}) , && N_i^n = \left(\varphi_i^n\right)^{-1}(U^{n-1}) && \subset \quad \partial D^n = S^{n-1} , \end{aligned}$$

dabei sind $A_i^n$ und $B_i^n$ abgeschlossen. Sei $d$ die euklidische Metrik auf $D^n \subset \mathbb{R}^n$. Nach dem Satz 1.54 von Heine-Borel ist $D^n$ kompakt, also auch alle abgeschlossenen Teilmengen. Da

$$\overline{M_i^n} \cap B_i^n = \overline{N_i^n} \cap A_i^n = \emptyset ,$$

folgt aus der Kompaktheit von $A_i^n$, $B_i^n$, $\overline{M_i^n}$ und $\overline{N_i^n}$, dass

$$\varepsilon_i^n = \frac{1}{2}\min\Big\{\inf_{x\in M_i^n}\inf_{y\in B_i^n} d(x,y)\,,\ \inf_{x\in N_i^n}\inf_{y\in A_i^n} d(x,y)\,,\ 1\Big\} = \frac{1}{2}\min\big\{d(M_i^n,B_i^n), d(A_i^n,N_i^n), 1\big\} > 0\ .$$

Wir erhalten also offene Teilmengen $P_i^n$, $Q_i^n \subset D^n$ der Gestalt

$$P_i^n = \left\{ x\in D^n \;\middle|\; \frac{x}{|x|}\in M_i^n \text{ und } |x| > 1-\varepsilon_i^n \right\}$$

$$\text{und}\qquad Q_i^n = \left\{ x\in D^n \;\middle|\; \frac{x}{|x|}\in N_i^n \text{ und } |x| > 1-\varepsilon_i^n \right\}$$

mit

$$P_i^n \cap S^{n-1} = M_i^n\ ,\qquad Q_i^n \cap S^{n-1} = N_i^n\ ,\qquad \text{und}\qquad \overline{P_i^n}\cap B_i^n = \overline{Q_i^n}\cap A_i^n = P_i^n\cap Q_i^n = \emptyset\ .$$

Schliesslich benutzen wir die Normalität der offenen Kreisscheibe $B^n$, um offene Mengen $R_i^n$, $T_i^n \subset B^n$ zu konstruieren, so dass

$$R_i^n \supset A_i^n \cap B^n\ ,\qquad \emptyset = \overline{R_i^n}\cap\overline{Q_i^n\cup B_i^n}\ ,$$

$$T_i^n \supset B_i^n \cap B^n\ ,\qquad \text{und}\qquad \emptyset = \overline{T_i^n}\cap\overline{P_i^n\cup R_i^n}\ .$$

Da

$$\big(P_i^n\cup R_i^n\big)\cap\partial D^n = \big(\varphi_i^n\big)^{-1}(U^{n-1})\quad\text{und}\quad \big(Q_i^n\cup T_i^n\big)\cap\partial D^n = \big(\varphi_i^n\big)^{-1}(V^{n-1})\ ,$$

können wir jetzt $U^n$ und $V^n$ so definieren, dass

$$(\Phi_i^n)^{-1}(U^n) = P_i^n\cup R_i^n\qquad\text{und}\qquad (\Phi_i^n)^{-1}(V^n) = Q_i^n\cup T_i^n$$

für alle $i$ offen ist und (*) und (**) erfüllt. □

1.85. Definition. Ein *Unterkomplex* $Y$ eines CW-Komplexes $X$ ist ein abgeschlossener Unterraum, der aus einer Vereinigung von Zellen von $X$ besteht. Ein CW-Komplex heißt *endlich,* wenn er aus endlich vielen Zellen besteht.

Da einzelne $n$-Zellen $e_i^n$ für $n > 0$ selbst nicht abgeschlossen sind, gehören auch alle Zellen, die vom Rand von $\bar{e}_i^n$ getroffen werden, mit zum Unterkomplex. Insbesondere sind Unterkomplexe selbst wieder CW-Komplexe, und man kann sich wie in Bemerkung 1.82 überzeugen, dass die Unterraumtopologie eines Unterkomplexes $Y \subset X$ mit seiner CW-Komplex-Topologie übereinstimmt, indem man induktiv die CW-Topologie auf $Y^n$ mit der Unterraumtopologie von $Y^n \subset X^n$ vergleicht.

Um einem möglichen Missverständnis vorzubeugen, weisen wir darauf hin, dass der Abschluss einer Zelle $e_i^n$ nicht notwendigerweise ein Unterkomplex von $X$ ist, genausowenig ihr Rand $\partial e_i^n \subset X^{n-1}$ (obwohl das in vielen Beispielen durchaus so sein wird).

1.86. Satz. *Ein Unterraum $A$ eines CW-Komplexes $X$ ist genau dann kompakt, wenn er abgeschlossenen und in einem endlichen Unterkomplex von $X$ enthalten ist.*

Beweis. „$\Longleftarrow$“: Jede abgeschlossene Zelle $\bar{e}_i^n = \Phi_i^n(D^n)$ ist als Bild einer kompakten Menge in einem Hausdorff-Raum kompakt, siehe Bemerkung 1.51 (2). Ein endlicher Unterkomplex ist eine endliche Vereinigung abgeschlossener Zellen, und daher immer noch kompakt. Eine abgeschlossene Teilmenge eines endlichen Unterkomplexes ist auch in $X$ abgeschlossen und daher nach Bemerkung 1.51 (1) kompakt.

„$\Longrightarrow$“: Sei $K \subset X$ kompakt, dann ist $K$ abgeschlossen nach Bemerkung 1.51 (5). Für die andere Richtung zeigen wir als nächstes, dass eine kompakte Teilmenge $K \subset X$ höchstens endlich viele offene Zellen treffen kann. Falls das nicht der Fall sein sollte, wählen wir abzählbar unendlich viele Punkte $x_j \in K$ mit $j \in \mathbb{N}_0$, die in paarweise verschiedenen Zellen liegen. Durch Induktion über $n$ wie im Beweis von Satz 1.84 konstruieren wir offene Mengen $U_j^n \subset X^n$ mit $x_j \in U_j^n$ falls $x_j \in X^n$,

und $U_j^n = \emptyset$ sonst. Hierbei ist $U_j^n$ das Bild eines kleinen Balles in $B^n$, falls $x_j \in e_i^n$ liegt, und ansonsten wählen wir $U_j^n$ so, dass

$$\left(\Phi_i^n\right)^{-1}\left(U_j^n\right) = \left\{ x \in D^n \;\middle|\; \frac{x}{|x|} \in \left(\varphi_i^n\right)^{-1}\left(U_j^{n-1}\right) \text{ und } |x| > 1 - \varepsilon_i^n \right\}$$

für ein hinreichend kleines $\varepsilon_i^n > 0$. Anschliessend setzen wir $U_j = \bigcup_n U_j^n$.

Die Menge $U_0 = X \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$ ist ebenfalls offen, da man zu $x_0 \in U_0$ analog zur Konstruktion der $U_j$ eine offene Umgebung von $x_0$ in $U_0$ finden kann. Dann wird $K$ überdeckt von den offenen Mengen $(U_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$, es existiert jedoch keine endliche Teilüberdeckung, da $x_j$ jeweils nur in $U_j$ enthalten ist, Widerspruch. Also kann $K$ nur endlich viele offene Zellen treffen.

Es bleibt zu zeigen, dass der Abschluss jeder einzelnen Zelle $e_i^n$ in einem endlichen Unterkomplex enthalten ist. Wir beweisen das durch Induktion über $n$. Der Rand $\partial e_i^n = \varphi_i^n(S^{n-1})$ einer Zelle $e_i^n$ ist ein kompakter Unterraum von $X^{n-1}$ und trifft daher nur endlich viele offene Zellen der Dimension $< n$, von denen jede nach Induktion in einem endlichen Unterkomplex enthalten ist. Durch Ankleben von $e_i^n$ an die endliche Vereinigung dieser endlichen Unterkomplexe erhält man einen endlichen Komplex, der $\overline{e}_i^n$ und damit auch $e_i^n$ enthält. □

Aus der Kompaktheit von $D^n$ folgt also insbesondere, dass das Bild $\overline{e_i^n}$ von $\Phi_i^n$ nur endlich viele Zellen trifft (daher „closure finite“). Mit „weak topology“ ist die im dritten Schritt auf $X$ definierte Topologie gemeint, bzw. die durch (1.7) definierte Quotiententopologie. Dadurch lassen sich CW-Komplexe sogar charakterisieren.

1.87. Satz (ohne Beweis, siehe [**H1**]). *Sei $X$ ein Hausdorff-Raum und $(\Phi_i^n \colon D^n \to X)_{n\in\mathbb{N}_0, i\in I^n}$ für jedes $n$ eine Familie stetiger Abbildungen. Dann sind die Abbildungen $\Phi_i^n$ genau dann die charakteristischen Abbildungen eines CW-Komplexes auf $X$, wenn*

(1) *die Einschränkungen $\Phi_i^n|_{B^n}$ allesamt Homöomorphismen auf ihre Bilder $e_i^n$ sind, und $X$ als Menge die disjunkte Vereinigung aller $e_i^n$ ist,*
(2) *die Bilder der $\Phi_i^n|_{\partial D^n}$ jeweils nur endlich viele Zellen treffen,*
(3) *und eine Menge $A \subset X$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $(\Phi_i^n)^{-1}(A) \subset D^n$ für alle $n$ und alle $i \in I^n$ abgeschlossen ist.*

Der Vollständigkeit halber definieren wir eine besondere Klasse von stetigen Abbildungen zwischen CW-Komplexen, die besonders schön mit der CW-Struktur verträglich ist.

1.88. Definition. Seien $X$ und $Y$ zwei CW-Komplexe. Eine stetige Abbildung $F \colon X \to Y$ heißt *zellulär,* wenn $F(X^n) \subset Y^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Das folgende technische Resultat wird später noch benötigt.

1.89. Proposition. *Es sei $X$ ein CW-Komplex und $Y$ lokalkompakt, dann ist die Produkttopologie auf $X \times Y$ gerade die Quotiententopologie zur Abbildung*

$$\coprod_{n\in\mathbb{N}_0} \coprod_{i\in I^n} D^n \times Y \xrightarrow{\bigcup_n \bigcup_i \Phi_i^n \times \mathrm{id}_Y} X \times Y \,.$$

Beweis. Es bezeichne $\mathcal{O}_{\sqcap}$ die Produkt- und $\mathcal{O}_{\twoheadrightarrow}$ die Quotiententopologie auf $X \times Y$. Aus der Stetigkeit von

$$\begin{aligned} \pi_X \circ (\Phi_i^n \times \mathrm{id}_Y) &= \Phi_i^n \circ \pi_{D^n} \colon D^n \times Y \longrightarrow X \\ \text{und} \qquad \pi_Y \circ (\Phi_i^n \times \mathrm{id}_Y) &= \pi_Y \qquad\quad \colon D^n \times Y \longrightarrow Y \end{aligned}$$

folgt mit den charakteristischen Eigenschaften aus Satz 1.46 (2) und Satz 1.72 (2) auch die Stetigkeit von

$$\begin{aligned} \Phi_i^n \times \mathrm{id}_Y \colon D^n \times Y &\longrightarrow (X \times Y, \mathcal{O}_\sqcap) \\ \text{und} \qquad \mathrm{id}_{X\times Y} \colon (X \times Y, \mathcal{O}_{\twoheadrightarrow}) &\longrightarrow (X \times Y, \mathcal{O}_\sqcap) \ . \end{aligned}$$

Für einen beliebigen topologischen Raum folgt aus Satz 1.60 (1) und (3), dass

$$F \colon (X \times Y, \mathcal{O}_\sqcap) \longrightarrow Z$$

genau dann stetig ist, wenn die zugehörige Abbildung

$$f \colon X \longrightarrow (C(Y,Z), \mathcal{O}_{\mathrm{ko}})$$

stetig ist. Aber das ist nach Satz 1.72 (2) äquivalent zur Stetigkeit von

$$f \circ \Phi_i^n \colon D^n \longrightarrow (C(Y,Z), \mathcal{O}_{\mathrm{ko}})$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $i \in I^n$, also wiederum mit Satz 1.60 zur Stetigkeit von

$$F \circ (\Phi_i^n \times \mathrm{id}_Y) \colon D^n \times Y \longrightarrow Z \ .$$

Nach Definition der Quotiententopologie sind für $Z = (X \times Y, \mathcal{O}_{\twoheadrightarrow})$ alle Abbildungen

$$\Phi_i^n \times \mathrm{id}_Y \colon D^n \times Y \longrightarrow (X \times Y, \mathcal{O}_{\twoheadrightarrow})$$

stetig, also nach dem obigen auch

$$\mathrm{id}_{X\times Y} \colon (X \times Y, \mathcal{O}_\sqcap) \longrightarrow (X \times Y, \mathcal{O}_{\twoheadrightarrow}) \ . \qquad \square$$

1.90. Bemerkung. Es ist wichtig, dass $Y$ lokalkompakt ist in der obigen Proposition. Seien etwa $X$ und $Y$ zwei beliebige $CW$-Komplexe mit charakteristischen Abbildungen $\Phi_i^n$ und $\Psi_j^m$. Dann erhalten wir eine $CW$-Struktur auf der Menge $X \times Y$ mit charakteristischen Abbildungen

$$D^{n\times m} \xrightarrow{\sim} D^n \times D^m \xrightarrow{\Phi_i^n \times \Psi_j^m} X \times Y \ .$$

Dann ist die $CW$-Topologie auf $X \times Y$ im allgemeinen feiner als die Produkt-Topologie.

Mit Hinblick auf eine Anwendung im nächsten Kapitel wollen wir uns überlegen, dass CW-Komplexe lokal zusammenziehbar sind.

1.91. Definition. Ein topologischer Raum $X$ heißt *zusammenziehbar,* wenn es eine stetige Abbildung $H \colon X \times [0,1] \to X$ und einen Punkt $x_0 \in X$ gibt, so dass

$$H(x,0) = x \quad \text{und} \quad H(x,1) = x_0$$

für alle $x \in X$ gilt.

Ein topologischer Raum $X$ heißt *lokal zusammenziehbar,* wenn jede Umgebung $U$ eines Punktes $x$ eine Umgebung $V$ von $x$ enthält, die sich auf $x$ zusammenziehen lässt.

1.92. Bemerkung. (1) Zum Beispiel ist $B^n$ zusammenziehbar mit

$$x_0 = 0 \quad \text{und} \quad H(x,t) = (1-t)x \in B^n \qquad \text{für alle } x \in B^n \text{ und alle } t \in [0,1] \ .$$

(2) Topologische Mannigfaltigkeiten sind lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, und daher ebenfalls lokal zusammenziehbar. Sei etwa $U$ eine beliebige Umgebung von $x \in M$, und sei $V$ eine zu $\mathbb{R}^n$ homöomorphe Umgebung von $x$. Dann ist $U \cap V$ zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ homöomorph, enthält also einen zusammenziehbaren Ball um $x$.

(3) Jeder zusammenziehbare Raum $X$ ist wegzusammenhängend, denn für alle $x \in X$ ist $t \mapsto H(x,t)$ ein Weg von $x$ zum festen Punkt $x_0$.

1.93. Satz. *CW-Komplexe sind lokal zusammenziehbar.*

Beweis. Sei $X$ ein CW-Komplex, sei $x_0 \in e^{n_0}_{i_0} \subset X^{n_0} \setminus X^{n_0-1}$, und sei $U \subset X$ eine Umgebung von $x_0$. Sei $V^{n_0} \subset U \cap X^{n_0}$ das Bild eines kleines Balles in $B^{n_0}$ unter der charakteristischen Abbildung $\Phi^{n_0}_{i_0}$, beziehungsweise $V^0 = \{x_0\}$ für den Fall dass $n_0 = 0$ und $x \in X^0$. Dann konstruieren wir induktiv offene Mengen $V^n \subset U \cap X^n$ mit $V^n \cap X^{n-1} = V^{n-1}$ für alle $n > n_0$, wobei wieder

$$\big(\Phi^n_i\big)^{-1}(V^n) = \left\{ x \in D^n \;\middle|\; \frac{x}{|x|} \in \big(\varphi^n_i\big)^{-1}\big(V^{n-1}_j\big) \text{ und } |x| > 1 - \varepsilon^n_i \right\} \subset \big(\Phi^n_i\big)^{-1}(U)$$

für ein hinreichend kleines $\varepsilon^n_i \in (0,1)$. Anschliessend setzen wir $V = \bigcup V^n$.

Wir können jetzt eine Abbildung $H$ wie in Definition 1.91 definieren, indem wir — beginnend mit der „höchsten“ Dimension — Punkte innerhalb einer Zelle auf ihren Rand projizieren. Da Zellen beliebig hohe Dimension haben können, müssen wir vorsichtig sein. Wir definieren zunächst $H^n \colon V^n \times [0,1] \to V^n$ für $n > n_0$ durch

$$H^n\big(\Phi^n_i(x), t\big) = \Phi^n_i\left(\frac{x}{|x|^t}\right)$$

für alle $x \in V^n \cap e^n_i$. Hier nutzen wir aus, dass $\varepsilon^n_i < 1$, also $|x| > 0$ für alle $x \in (\Phi^n_i)^{-1}(V^n)$. Offensichtlich gilt also

$$H^n\big(V^n, 1\big) \subset V^{n-1} \quad \text{und} \quad H^n(x,t) = x \text{ für alle } x \in V^{n-1}\,.$$

Außerdem definieren wir $H^{n_0} \colon V^{n_0} \times [0,1] \to V^{n_0}$ durch

$$H^{n_0}\big(\Phi^{n_0}_{i_0}(x), t\big) = \Phi^{n_0}_{i_0}\Big((1-t)\,x + t\,\big(\Phi^{n_0}_{i_0}\big)^{-1}(x_0)\Big)\,.$$

Wir schreiben $P^n = H(\,\cdot\,, 1) \colon V^n \to V^{n-1}$ und definieren $H \colon V \times [0,1] \to V$ für $x \in V^n$ durch

$$H(x,t) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \le t \le 2^{n_0-n-1}, \text{ und} \\ H^{n'}\big((P^{n'+1} \circ \cdots \circ P^n)(x), 2^{n'+1-n_0}\,t - 1\big) & \text{für } 2^{n_0-n'-1} \le t \le 2^{n_0-n'}\,. \end{cases}$$

Dann ist $H$ die gewünschte Abbildung. Für die Stetigkeit von $H$ reicht nach Proposition 1.89 und Satz 1.72 (2), dass $H(\Phi^n_i(\,\cdot\,), \cdot\,) \colon D^n \times [0,1] \to X$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $i \in I^n$ stetig ist. Wir schreiben $[0,1]$ als CW-Komplex mit den 1-Zellen

$$[0,1] = \big[0, 2^{n_0-n-1}\big] \cup \big[2^{n_0-n-1}, 2^{n_0-n}\big] \cup \cdots \cup \big[2^{-1}, 2^0\big]$$

und benötigen mit dem gleichen Argument nur die Stetigkeit von $H(\Phi^n_i(\,\cdot\,), \cdot\,)$ auf dem Produkt von $D^n$ mit den einzelnen Teilintervallen, aber die folgt direkt aus der Konstruktion der $H^n$ und $H$. Man beachte, dass wir trotz beliebig hoher „Kontraktionsgeschwindigkeiten“ nahe $t = 0$ aufgrund der Quotiententopologie auf $X$ keine Probleme mit der Stetigkeit bei $t = 0$ bekommen. □

1.94. Folgerung (aus Satz 1.93). *Sei $X$ ein CW-Komplex, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *$X$ ist zusammenhängend.*
(2) *$X$ ist wegzusammenhängend.*
(3) *$X^1$ ist zusammenhängend.*
(4) *$X^1$ ist wegzusammenhängend.*

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2). Sei $x \in X$, und sei $Z_x$ die Wegzusammenhangskomponente von $x$. Da $X$ lokal zusammenziehbar ist, folgt:

(1) $Z_x$ ist offen, denn alle $z \in Z_x$ haben eine zusammenziehbare Umgebung $U$. Sei $H \colon U \times [0,1] \to U$ die Kontraktion, dann ist $t \mapsto H(z,t)$ ein Weg von $y$ nach $z \in U$. Also kann jeder Punkt $z \in U$ mit $y$, also auch mit $x$ verbunden werden.

(2) $Z_x$ ist abgeschlossen, denn sei $y \in \overline{Z}_x$, und sei $U$ eine zusammenziehbare Umgebung von $y$, dann gibt es einen Punkt in $U \cap Z_x$, der sowohl mit $x$ als auch mit $y$ durch einen Weg verbunden werden kann, also kann auch $x$ mit $y$ durch einen Weg verbunden werden.

Somit ist $Z_x$ offen, abgeschlossen und nicht leer. Wenn $X$ zusammenhängend ist, folgt $X = Z_x$, somit ist $X$ auch wegzusammenhängend.

Da jeder wegzusammenhängende Raum nach 1.65 (2) zusammenhängend ist, folgt also (1) $\Longleftrightarrow$ (2). Da $X^1$ selbst ein CW-Komplex ist, folgt auch (3) $\Longleftrightarrow$ (4).

(1) $\Longrightarrow$ (3). Wir nehmen an, dass $X^1$ nicht zusammenhängend sei. Dann existiert eine offene und abgeschlossene Menge $\emptyset \neq A^1 \neq X^1$ mit offenem und abgeschlossenen Komplement $\emptyset \neq B^1 \neq X^1$, und $A^n$ und $B^n$ sind sogar Unterkomplexe, da abgeschlossene Zellen zusammenhängend sind.

Wir zeigen induktiv, dass $X^n$ nicht zusammenhängend ist, indem wir nichtleere abgeschlossene Mengen $A^n$ und $B^n$ mit

$$A^n \cap X^{n-1} = A^{n-1}\,, \qquad B^n \cap X^{n-1} = B^{n-1}\,, \quad \text{und} \quad X^n = A^n \,\dot\cup\, B^n \tag{*}$$

angeben. Betrachte dazu $\varphi_i^n \colon S^{n-1} = \partial D^n \to X^{n-1}$ für $i \in I^n$. Da $S^{n-1}$ zusammenhängend ist für $n \geq 2$, ist auch $\varphi_i^n(S^{n-1})$ zusammenhängend, und somit gilt entweder $\partial e_i^n = \varphi_i^n(S^{n-1}) \subset A^{n-1}$ oder $\partial e_i^n \subset B^{n-1}$. Wir können jetzt Unterkomplexe $\emptyset \neq A^n$, $B^n \subset X^n$ definieren durch

$$A^n = A^{n-1} \cup \bigcup_{\substack{i \in I^n \\ \partial e_i^n \subset A^{n-1}}} \bar{e}_i^n \quad \text{und} \quad B^n = B^{n-1} \cup \bigcup_{\substack{i \in I^n \\ \partial e_i^n \subset B^{n-1}}} \bar{e}_i^n\,,$$

und es gilt (*). Ausserdem sind $A^n$, $B^n$ als Unterkomplexe abgeschlossen. Schliesslich folgt

$$X = A \,\dot\cup\, B \qquad \text{mit} \qquad A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A^n \quad \text{und} \quad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} B^n\,,$$

und $A$ und $B$ sind beide abgeschlossen und nicht leer, also ist auch $X$ nicht zusammenhängend.

(4) $\Longrightarrow$ (2). Sei jetzt $X^1$ wegzusammenhängend, und sei $x \in X^0$. Wir zeigen induktiv, dass $X^n$ auch wegzusammenhängend ist. Sei also $y \in X^n$, dann suchen wir einen Weg von $y$ nach $x$. Falls $y \in X^{n-1}$, sind wir nach Induktionsvoraussetzung fertig.

Ansonsten ist $y = \Phi_i^n(y_0)$ mit $y_0 \in D^n$. Wir wählen $z_0 \in S^{n-1} = \partial D^n$ und erhalten einen Weg

$$s \mapsto \Phi_i^n\big((1-s)\,y_0 + s\,z_0\big)$$

von $y$ nach $z = \Phi_i^n(z_0) \in X^{n-1}$, und somit auch einen Weg von $y$ nach $x$ nach Induktionsvoraussetzung. Damit ist $X^n$ dann auch wegzusammenhängend.

Seien schliesslich $x$, $y \in X$ beliebig, dann existiert ein $N > 0$ mit $x$, $y \in X^N$, und somit lassen sich $x$, $y$ durch einen Weg in $X^N \subset X$ verbinden. □

## 1.j. Übungen zu Kapitel 1

*Übungen zu Abschnitt 1.a.*

1.95. Übung. Die Metrik der französischen Eisenbahnen. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Man setze

$$d_f(x,y) = \begin{cases} \|y-x\| & \text{falls } x \text{ und } y \text{ kollinear, und} \\ \|x\| + \|y\| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(1) $(V, d_f)$ ist ein metrischer Raum.
(2) Sei $d_n(x,y) = \|y-x\|$ die übliche Metrik. Die Identität $\mathrm{id}_V \colon (V, d_f) \to (V, d_n)$ ist stetig, nicht jedoch $\mathrm{id}_V \colon (V, d_n) \to (V, d_f)$.

1.96. Übung. Seien $(X,d)$, $(Y,d')$ metrische Räume und $\alpha \in (0,1]$. Eine Abbildung $F\colon (X,d) \to (Y,d')$ heißt *$\alpha$-Höldersch,* falls eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass für alle $x$, $y \in X$ gilt:

$$d'\big(F(x), F(y)\big) \le C\, d(x,y)^\alpha \ .$$

1-Höldersche Abbildungen heissen auch Lipschitzsch. Zeigen Sie, dass jede $\alpha$-Höldersche Abbildung stetig ist.

1.97. Übung. Sei $p$ eine Primzahl. Jede rationale Zahl $q \neq 0$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$q = p^r\, \frac{a}{b} \ ,$$

mit $r$, $a$, $b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, so dass $p$, $a$ und $b$ paarweise teilerfremd sind. In diesem Fall definieren wir die *$p$-adische Bewertung* von $q$ durch $\|q\|_p = p^{-r}$ und $\|0\|_p = 0$. Dadurch wird die $p$-adische Metrik

$$d_p(x,y) = \|y - x\|_p$$

auf $\mathbb{Q}$ induziert.

(1) Zeigen Sie, dass $d_p$ wirklich eine Metrik ist, also die Axiome (1)–(3) aus Definition 1.1 erfüllt.
(2) Zeigen Sie, dass eine verschärfte Dreiecksungleichung gilt:

$$d_p(x,z) \le \max\{d_p(x,y), d_p(y,z)\} \ ,$$

und „$<$“ kann nur auftreten, wenn $d_p(x,y) = d_p(y,z)$ gilt.
(3) Folgern Sie daraus: Für alle $x$, $y \in (\mathbb{Q}, d_p)$ und alle $\varepsilon$, $\delta > 0$ seien $B_\delta(x)$ und $B_\varepsilon(y)$ metrische Bälle bezüglich $d_p$, dann sind $B_\delta(x)$ und $B_\varepsilon(y)$ entweder disjunkt, oder einer der beiden Bälle enthält den anderen.

1.98. Übung. Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum, und sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $X$. Zeigen Sie: die Folge $x_i$ konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn es zu jeder Umgebung $U$ von $x$ in $X$ ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $x_i \in U$ für alle $i \ge n_0$.

1.99. Übung. Seien $(X,d)$ und $(Y,d')$ metrische Räume, und sei $x \in X$. Zeigen Sie: eine Abbildung $F\colon (X,d) \to (Y,d')$ ist genau dann stetig am Punkt $x$, wenn die Urbilder aller Umgebungen von $F(x)$ in $Y$ wiederum Umgebungen von $x$ sind.

*Übungen zu Abschnitt 1.b.*

1.100. Übung. Sei $X$ eine beliebige Menge, und sei

$$\mathcal{O} = \{\, U \subset X \mid X \setminus U \text{ ist eine endliche Menge } \} \cup \{\emptyset\} \quad \subset \quad \mathcal{P}X \ .$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $X$ definiert. Diese Topologie heißt auch die *koendliche Topologie.*

1.101. Übung. Die folgende Konstruktion ist wichtig in der algebraischen Geometrie. Wir nennen eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}^n$ *Zariski-abgeschlossen,* wenn es eine Menge $P \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ von Polynomen gibt, so dass

$$A = \big\{\, z \in \mathbb{C}^n \mid p(z) = 0 \text{ für alle } p \in P \,\big\} \ . \qquad (*)$$

Eine Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ heißt *Zariski-offen,* wenn $\mathbb{C}^n \setminus U$ Zariski-abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{O}_Z$ aller Zariski-offenen Teilmengen eine Topologie bildet. Diese Topologie heißt auch die *Zariski-Topologie.*
*Hinweis:* Überlegen Sie sich, dass es äquivalent (und etwas einfacher) ist, zu zeigen: (1) $\emptyset$ und $\mathbb{C}^n$ sind Zariski-abgeschlossen; (2) wenn $A_1, \dots, A_k$ Zariski-abgeschlossen sind, dann auch $A_1 \cup \dots \cup A_k$

(betrachten Sie hierzu geeigenete Produkte der definierenden Polynome); (3) wenn alle $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{P}\mathbb{C}^n$ Zariski-abgeschlossen sind, dann auch

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\,.$$

*Bemerkung:* Aus dem Hilbertschen Basissatz folgt, dass man für jedes $A$ nur jeweils endlich viele Polynome braucht, um $A$ wie in (*) zu definieren.

1.102. Übung. Seien $X$ und $Y$ beliebige Mengen. Zeigen Sie:

(1) Sei $\mathcal{O}_\delta = \mathcal{P}X$ die diskrete Topologie, und sei $\mathcal{O}_K = \{\emptyset, Y\}$ die Klumpentopologie. Dann sind für jeden beliebigen topologischen Raum $(Z, \mathcal{O})$ alle Abbildungen $F\colon (X, \mathcal{O}_\delta) \to (Z, \mathcal{O})$ und alle Abbildungen $G\colon (Z, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}_K)$ stetig.
(2) Seien $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_Y$ beliebige Topologien auf $X$ und $Y$. Falls für jeden beliebigen topologischen Raum $(Z, \mathcal{O})$ alle Abbildungen $F\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O})$ und alle Abbildungen $G\colon (Z, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig sind, dann ist $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_\delta$ die diskrete und $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_K$ die Klumpentopologie.

*Übungen zu Abschnitt 1.c.*

1.103. Übung. Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, und seien $A$, $A_0$ und $A_1$ abgeschlossene Teilmengen von $X$, und $A_0$ und $A_1$ seien disjunkt. Zeigen Sie:

(1) die Funktion $d_A\colon X \to \mathbb{R}$ mit $d_A(x) = \inf_{a \in A} d(a, x)$ ist stetig;
(2) es gilt $d_A(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in A$;
(3) die Funktion $f = d_{A_0}/(d_{A_0} + d_{A_1})$ hat die in Satz 1.26 (3) geforderten Eigenschaften.

1.104. Übung. Sei $X$ eine Menge mit mindestens zwei Elementen, und sei $\mathcal{O}_K$ die Klumpentopologie auf $X$. Welche Trennungseigenschaften besitzt $(X, \mathcal{O}_K)$?

1.105. Übung. Es sei $X$ eine unendliche Menge mit der koendlichen Topologie $\mathcal{O}$ aus Aufgabe 1.100. Welche Trennungseigenschaften besitzt $(X, \mathcal{O})$?

1.106. Übung. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{N}$ heiße offen bezüglich der Ordnungstopologie $\mathcal{O}_<$, wenn aus $m \in U$ auch $n \in U$ für alle $n \geq m$ folgt.

(1) Überprüfen Sie, dass $\mathcal{O}_<$ die Axiome einer Topologie erfüllt.
(2) Welche Trennungseigenschaften hat $(\mathbb{N}, \mathcal{O}_<)$?

1.107. Übung. Zeigen Sie:

(1) die Zariski-Topologie auf $\mathbb{C}^n$ ist für kein $n \geq 1$ hausdorffsch, erfüllt aber $(T1)$.
(2) Jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ definiert eine stetige Abbildung $p\colon (\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_Z) \to (\mathbb{C}, O_Z)$.
(3) Versuchen Sie zu erklären, warum (2) nicht Bemerkung 1.28 (2) widerspricht.

*Hinweis:* Um (1) zu beweisen, überlegen Sie sich, dass für alle Polynome $p$ gilt:

(1) wenn $p(x) \neq 0$, dann existiert ein kleiner metrischer Ball $B_\varepsilon(x)$, auf dem $p$ nirgends verschwindet.
(2) wenn $p$ auf einem kleinen metrischen Ball verschwindet, dann verschwindet es auf ganz $\mathbb{C}^n$.

*Übungen zu Abschnitt 1.d.*

1.108. Übung. Betrachte den Raum $X = [0, 1]^2$ mit

$$d\big((x_1, y_1)(x_2, y_2)\big) = \begin{cases} |y_2 - y_1| & \text{falls } x_1 = x_2, \text{ und} \\ 1 & \text{falls } x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

(1) Zeigen Sie, dass $d$ eine Metrik auf $X$ ist.
(2) Welche Abzählbarkeitseigenschaften erfüllt $(X, \mathcal{O}_d)$?

*Übungen zu Abschnitt 1.e.*

1.109. Übung. Betrachten Sie den obigen Raum $X = [0,1]^2$.

(1) Geben Sie einen Homöomorphismus $X \to \coprod_{i\in[0,1]}[0,1]$ an.
(2) Geben Sie einen Homöomorphismus zu einem nichttrivialen topologischen Produkt an.

1.110. Übung. Sei $(X, d_X)$ ein metrischer Raum mit Topologie $\mathcal{O}_{d_X}$, und sei $Y \subset X$ versehen mit der induzierten Metrik $d_Y = d|_{Y\times Y}$. Zeigen Sie, dass die von $\mathcal{O}_{d_X}$ induzierte Unterraumtopologie $\mathcal{O}_Y$ mit der metrischen Topologie $\mathcal{O}_{d_Y}$ übereinstimmt.

1.111. Übung. Seien $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ metrische Räume, dann definieren wir eine Metrik $d_{X\times Y}$ auf dem kartesischen Produkt $X \times Y$ durch

$$d_{X\times Y}\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \max\big\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\big\} .$$

Zeigen Sie, dass die von $\mathcal{O}_{d_X}$ und $\mathcal{O}_{d_Y}$ induzierte Produkttopologie mit der metrischen Topologie $\mathcal{O}_{d_{X\times Y}}$ übereinstimmt.

1.112. Übung. Sei $\Bbbk$ ein beliebiger Körper. Es seien $V_i$ Vektorräume über $\Bbbk$ für $i \in I$. Wir betrachten die direkte Summe und das

$$\begin{aligned}\bigoplus_{i\in I} V_i &:= \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in V_i \text{ für alle } i \in I,\ \text{fast alle } x_i = 0\}\\ \subset \prod_{i\in I} V_i &:= \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in V_i \text{ für alle } i \in I\} .\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(1) Die direkte Summe ist ein Koprodukt in $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$.
(2) Das direkte Produkt ist ein Produkt in $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$.
(3) Für die Dualräume gilt

$$\Big(\bigoplus_{i\in I} V_i\Big)^* = \prod_{i\in I} V_i^* .$$

1.113. Übung. Wir versehen $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ und alle Unterräume mit der Standardtopologie. Welche der folgenden Abbildungen sind Einbettungen:

$$F\colon (0,1) \to \mathbb{R}^2 \qquad F(t) = \big(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t\big) , \tag{a}$$

$$G\colon [0,1) \to \mathbb{R}^2 \qquad G(t) = \big(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t\big) . \tag{b}$$

$$H\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \qquad H(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 , \\ 1/n & \text{sonst.} \end{cases} \tag{c}$$

1.114. Übung. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine überabzählbare Familie topologischer Räume mit $\#X_i > 1$ für alle $i \in I$. Zeigen Sie: dann besitzt $\prod_i (X_i, \mathcal{O}_i)$ nicht die erste Abzählbarkeitseigenschaft.

*Übungen zu Abschnitt 1.f.*

1.115. Übung. Seien $(X, \mathcal{O})$, $(Y, \mathcal{O})$ Hausdorff-Räume, $X$ sei kompakt, und sei $F\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass dann auch $F(X) \subset Y$, versehen mit der Unterraumtopologie, kompakt ist.

1.116. Übung. Zeigen Sie: kompakte Räume sind normal, erfüllen also insbesondere (T4). Dazu zeigt am besten zuerst, dass kompakte Räume (T3) erfüllen.
*Hinweis:* Per Definitionem sind kompakte Räume Hausdorffsch.

1.117. Übung. Zeigen Sie: Wenn $(Y, d)$ metrischer Raum und $(f_i \colon X \to Y)_i$ eine Folge stetiger Funktionen ist, dann konvergiert $(f_i)_i$ genau dann in der kompakt-offenen Topologie gegen $f \in C(X, Y)$, wenn $(f_i)$ gleichmäßig auf Kompakta gegen $f$ konvergiert.

*Übungen zu Abschnitt 1.g.*

1.118. Übung. Sei

$$X = \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) \,\middle|\, x \neq 0 \right\} \cup \big( \{0\} \times [-1, 1] \big) \quad \subset \quad \mathbb{R}^2$$

versehen mit der von $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$ induzierten Unterraumtopologie.

(1) Skizzieren Sie $X$.
(2) Zeigen Sie, dass $X$ zusammenhängend ist.
(3) Bestimmen Sie die Wegzusammenhangskomponenten von $X$.

1.119. Übung. Zeigen Sie:

(1) Der Raum der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist total unzusammenhängend sowohl bezüglich der metrischen Topologie als auch bezüglich der $p$-adischen Topologien für alle Primzahlen $p$.
(2) Der Raum $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_Z)$ ist zusammenhängend.

1.120. Übung. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie topologischer Räume und $X = \prod_i (X_i, \mathcal{O}_i)$ ihr Produkt. Zeigen Sie, dass die Wegzusammenhangskomponente eines Punktes $(x_i)_{i \in I} \in X$ das Produkt der Wegzusammenhangskomponenten der Punkte $x_i \in X_i$ ist. Insbesondere ist $X$ genau dann wegzusammenhängend, wenn alle $X_i$ wegzusammenhängend sind.

*Übungen zu Abschnitt 1.h.*

1.121. Übung. Führen Sie den Beweis von Satz 1.72 (2) aus.

1.122. Übung. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, sei $V \subset Y$, und sei $f \colon V \to X$ stetig bezüglich der Unterraumtopologie auf $V$. Zeigen Sie:

(1) die Topologie $\mathcal{O}_X$ ist genau die von der Verklebungstopologie auf $X \subset X \cup_f Y$ induzierte Unterraumtopologie;
(2) wenn $V$ abgeschlossen ist und $X$ und $Y$ beide (T1) erfüllen, dann gilt (T1) auch für $X \cup_f Y$.

1.123. Übung. Zeigen Sie:

(1) Sei $X$ ein topologischer Raum und $A$ in $X$ abgeschlossen. Dann ist eine Teilmenge $B$ von $A$ genau dann in $X$ abgeschlossen, wenn sie in $A$ abgeschlossen ist.
(2) Sei $X = A_1 \cup \ldots \cup A_k$ Vereinigung abgeschlossener Teilmengen, dann ist $B$ in $X$ genau dann abgeschlossen, wenn alle $B \cap A_i$ in $A_i$ abgeschlossen sind.
(3) Das Argument in (2) funktioniert für eine beliebige lokal endliche Vereinigung: sei $X = \bigcup_{i \in I} A_i$, so dass alle $A_i$ in $X$ abgeschlossen sind, und so dass jeder Punkt eine Umgebung $U$ besitzt mit $U \cap A_i = \emptyset$ für fast alle $i$. Dann ist $B$ in $X$ genau dann abgeschlossen, wenn alle $B \cap A_i$ abgeschlossen sind.
(4) Sei $X$ wie in Teil (2) beziehungsweise wie in Teil (3). Seien $f_i : A_i \to Y$ stetige Abbildungen mit $f_{i|A_i \cap A_j} = f_{j|A_i \cap A_j}$, dann gibt es genau eine Abbildung $f : X \to Y$ mit $f_{|A_i} = f_i$, und $f$ ist stetig.

1.124. Übung. Sei $S^1 \subset \mathbb{C}$ der komplexe Einheitskreis, und sei $z = e^{i\varphi} \in S^1 \subset \mathbb{C}$. Wir betrachten auf $S^1$ die von $x \sim zx$ erzeugte Äquivalenzrelation, das heißt, $x \sim y$ genau dann, wenn $x/y = z^k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie die Quotiententopologie auf $S^1/\sim$, unterscheiden Sie die Fälle $\varphi \in 2\pi\mathbb{Q}$ und $\varphi \notin 2\pi\mathbb{Q}$.

1.125. Übung. Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^2$ die Äquivalenzrelation

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad (y_1, y_2) = \left(rx_1, \frac{x_2}{r}\right) \text{ für ein } r \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} \ .$$

(1) Skizzieren Sie die Äquivalenzklassen im $\mathbb{R}^2$.
(2) Skizzieren Sie $X = \mathbb{R}^2/\sim$.
(3) Beschreiben Sie die Quotiententopologie auf $X$, z.B., indem Sie eine Basis angeben.

1.126. Übung. Betrachten Sie die in Aufgabe 1.125 definierte Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{R}^2$. Sei wie vorhin $X = \mathbb{R}^2/\sim$, und sei $Y := \big(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big)/\sim$.

(1) Welche der Trennungseigenschaften (T0), (T1), (T3), (T4) erfüllt $X$?
(2) Zeigen Sie, dass $Y$ zum Raum aus Beispiel 1.29 homöomorph ist.
(3) Welche Trennungseigenschaften erfüllt $Y$?

1.127. Übung. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein normaler topologischer Raum, sei $f\colon X \to Y$ eine surjektive Abbildung, und sei $\mathcal{O}_Y$ die Quotiententopologie auf $Y$. Zeigen Sie:

(1) wenn Urbilder $f^{-1}(\{y\})$ von Punkten in $Y$ abgeschlossen sind in $X$, gilt (T1) für $(Y, \mathcal{O}_Y)$;
(2) wenn $f$ *abgeschlossen* ist, das heißt, wenn $f(A) \subset Y$ abgeschlossen ist für alle abgeschlossenen $A \subset X$, dann gilt (T4) für $(Y, \mathcal{O}_Y)$.

Wir haben also ein einfaches Kriterium dafür, wann Quotienten normaler Räume wiederum normal sind.

*Übungen zu Abschnitt 1.i.*

1.128. Übung. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ und $(Z, \mathcal{O}_Z)$ topologische Räume mit stetigen Abbildungen

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\ f\ } (Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\ g\ } (Z, \mathcal{O}_Z) \ .$$

(1) Falls $\mathcal{O}_Y$ die von $g$ und $\mathcal{O}_Z$ induzierte Topologie ist, und $\mathcal{O}_X$ die von $f$ und $\mathcal{O}_Y$ induzierte Topologie ist, dann ist $\mathcal{O}_X$ auch gleich der von $g \circ f$ und $\mathcal{O}_Z$ induzierten Topologie.
(2) Falls $\mathcal{O}_Y$ die von $f$ und $\mathcal{O}_X$ koinduzierte Topologie ist, und $\mathcal{O}_Z$ die von $g$ und $\mathcal{O}_Y$ koinduzierte Topologie ist, dann ist $\mathcal{O}_Z$ auch gleich der von $g \circ f$ und $\mathcal{O}_X$ koinduzierten Topologie.

1.129. Übung. Sei $\Bbbk = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ ein (Schief-)Körper, und sei $k = 1$, $2$ oder $4 = \dim_{\mathbb{R}} \Bbbk$, dann sei

$$\big(\Bbbk P^n, \mathcal{O}_{\Bbbk P^n}\big) = \big(\Bbbk^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}\big) \ / \sim \ ,$$

wobei $(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n)$ genau dann, wenn es ein $z \in \Bbbk^* = \Bbbk \setminus \{0\}$ gibt, so dass $y_i = zx_i$ für alle $i = 0, \dots, n$. Die Äquivalenzklasse von $(x_0, \dots, x_n)$ wird auch als $[x_0 : \cdots : x_n]$ geschrieben. Zeigen Sie, dass $\Bbbk P^n$, versehen mit der Quotiententopologie, eine $kn$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie dazu, dass $\Bbbk P^n$ die Eigenschaften (T2) und (A2) besitzt, und konstruieren Sie Homöomorphismen von $U_i = \{\, [x_0 : \cdots : x_n] \mid x_i \neq 0 \,\} \subset \Bbbk P^n$ nach $\Bbbk^n \cong \mathbb{R}^{nk}$.

1.130. Übung. Zeigen Sie, dass $\Bbbk P^m$ homöomorph zum Unterraum

$$\big\{\, [x_0 : \cdots : x_m : 0 : \cdots : 0] \;\big|\; (x_0, \dots, x_m) \in \Bbbk^{m+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\} \,\big\} \subset \Bbbk P^n$$

ist für alle $0 \leq m \leq n$, und dass diese Unterräume gerade die abgeschlossenen Zellen eines CW-Komplexes mit je einer Zelle der Dimension $0$, $k$, $\dots$, $kn$ bilden. Versuchen Sie insbesondere, charakteristische Abbildungen $\Phi^{kj}\colon D^{kj} \to \Bbbk P^n$ anzugeben, und überprüfen Sie, dass die oben definierte Topologie mit der Topologie des so definierten CW-Komplexes übereinstimmt.

1.131. Übung. Wir definieren

$$\Bbbk P^\infty = \varinjlim \Bbbk P^n \ .$$

Sei $\Bbbk^\infty$ der Vektorraum der endlichen $\Bbbk$-wertigen Folgen, und sei

$$Q = \big(\Bbbk^\infty \setminus \{0\}\big) \,/\, \sim \qquad \text{mit „}\sim\text{“ wie oben.}$$

Zeigen Sie:

(1) die natürliche Abbildung $F\colon \Bbbk P^\infty \to Q$ ist bijektiv;
(2) sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\Bbbk^\infty$ und sei $\mathcal{O}_Q$ die dazugehörige Quotiententopologie auf $Q$, dann ist $F$ stetig;
(3) (*Zusatzaufgabe*) die Umkehrabbildung $F^{-1}$ ist für keine Norm $\|\cdot\|$ auf $\Bbbk^\infty$ stetig.

1.132. Übung. Es seien $X$, $Y$ zwei $CW$-Komplexe, dann bezeichne $\mathcal{O}_\sqcap$ die Produkttopologie auf $X \times Y$ und $\mathcal{O}_{CW}$ die Topologie zur $CW$-Struktur aus Bemerkung 1.90.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_{CW}$ stets feiner ist als $\mathcal{O}_\sqcap$.
(2) Folgern Sie aus Proposition 1.89, dass $\mathcal{O}_{CW} = \mathcal{O}_\sqcap$ falls $X$ und $Y$ lokal kompakt sind.
(3) Funktioniert das Argument in (2) auch, wenn nur einer der Räume lokal kompakt ist?

KAPITEL 2

# Fundamentalgruppe und Überlagerungen

Wir behandeln in diesem Kapitel die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes. Diese Gruppe lässt sich für geeignete topologische Räume $X$ auf zweierlei Art definieren:

(1) Als Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ der Homotopieklassen von Wegen $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit festem Anfangs- und Endpunkt $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \in X$, oder

(2) Als Gruppe $\Gamma$, die auf einem einfach zusammenhängenden Raum $\widetilde{X}$ wirkt, mit $X \cong \widetilde{X}/\Gamma$.

2.1. Beispiel. Sei $X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und sei $p = 1$.

(1) Wir beschränken uns im folgenden auf stückweise glatte Wege. Sei $\gamma\colon [0,1] \to X$ ein Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$, dann erhalten wir die Umlaufzahl

$$\nu(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\dot\gamma(t)}{\gamma(t)}\, dt \quad \in \quad \mathbb{Z}\,.$$

In der Tat kann man zeigen, dass je zwei Wege in $\mathbb{C}^*$ mit Anfangs- und Endpunkt $p = 1$ und der gleichen Umlaufzahl um 0 in $\mathbb{C}^*$ (mit festgehaltenen Anfangs- und Endpunkten) homotop sind. Also ist $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \cong \mathbb{Z}$.

(2) Betrachte die (leicht modifizierte) Exponentialabbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ mit $z \mapsto e^{2\pi i\, z}$, dann gilt

$$e^{2\pi i\, z_0} = e^{2\pi i\, z_1} \quad \Longleftrightarrow \quad z_1 - z_0 \in \mathbb{Z}\,.$$

Wir können also $\mathbb{C}^*$ als Quotient des einfach zusammenhängenden Raumes $\mathbb{C}$ nach der Gruppe $\Gamma = \mathbb{Z}$ schreiben; dabei wirkt $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{C}$ durch Addition, geometrisch also durch Verschiebungen.

Wir wollen ab sofort unter einem Raum immer einen topologischen Raum verstehen, und unter einer Abbildung, einer Funktion oder einem Weg immer eine stetige Abbildung, eine stetige Funktion, oder einen stetigen Weg.

## 2.a. Homotopien und Homotopieäquivalenz

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff der Homotopie von Abbildungen ein. Homotopien sind Wege im Raum der Abbildungen. Indem wir statt stetiger Abbildungen Äquivalenzklassen homotoper stetiger Abbildungen betrachten, können wir den Begriff des Homöomorphismus durch den wesentlich gröberen Begriff der Homotopieäquivalenz ersetzen. Im Rest dieser Vorlesung lernen wir Methoden kennen, um nicht homotope Abbildungen oder nicht homotopieäquivalente Räume voneinander zu unterscheiden.

Ab sofort geben wir die Topologien nicht mehr an, wenn es nicht unbedingt nötig ist. Falls nicht anders angegeben, seien Abbildungen zwischen topologischen Räumen immer stetig.

2.2. Definition. Seien $X$, $Y$ topologische Räume. Zwei Abbildungen $f_0, f_1\colon X \to Y$ heißen *homotop*, kurz $f_0 \sim f_1$, wenn es eine bezüglich der Produkttopologie stetige Abbildung $H\colon X \times [0,1] \to Y$ mit $H(x,t) = f_t(x)$ für $t \in \{0,1\}$ gibt. Dann heißt $H$ eine *Homotopie* zwischen $f_0$ und $f_1$, und wir schreiben $H_t = H(\circ, t)\colon X \cong X \times \{t\} \to Y$ für alle $t \in [0,1]$. Die Menge aller zu $f$ homotopen Abbildungen heißt die *(freie)* Homotopieklasse *von $f$ und wird mit $[f]$ bezeichnet.*

2.3. Bemerkung. (1) Homotopie ist eine Äquivalenzrelation (Übung 2.74), und ihre Äquivalenzklassen sind gerade Homotopieklassen.

(2) Homotopie ist verträglich mit Hintereinanderschalten von Abbildungen:

$$\big(f_0 \sim f_1 \colon Y \to Z \quad \text{und} \quad g_0 \sim g_1 \colon X \to Y\big) \qquad \Longrightarrow \qquad (f_0 \circ g_0) \sim (f_1 \circ g_1) \colon X \to Z \ .$$

2.4. Definition. Seien $X$, $Y$ topologische Räume. Eine stetige Abbildung $f \colon X \to Y$ heißt *Homotopieäquivalenz*, wenn es eine stetige Abbildung $g \colon Y \to X$ gibt, so dass

$$g \circ f \sim \mathrm{id}_X \colon X \to X \qquad \text{und} \qquad f \circ g \sim \mathrm{id}_Y \colon Y \to Y \ .$$

In diesem Fall heißen $X$ und $Y$ *homotopieäquivalent,* und $g$ heißt ein *Homotopieinverses* zu $f$ .

2.5. Beispiel. Ein Raum $X$ ist genau dann zum einpunktigen Raum $Y = \{*\}$ homotopieäquivalent, wenn er zusammenziehbar ist. Sei dazu $f \colon X \to Y$ die offensichtliche Abbildung, und sei $g \colon Y \to X$ gegeben mit $g(*) = x_0 \in X$. Dann ist $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, und eine Homotopie zwischen $\mathrm{id}_X$ und $g \circ f$ ist gerade eine Abbildung $H \colon X \times [0,1] \to X$ wie in Definition 1.91.

2.6. Bemerkung. (1) Jeder Homöomorphismus $f$ ist insbesondere eine Homotopieäquivalenz mit $g = f^{-1}$.

(2) Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation (Übung 2.75).

(3) Betrachte die *Homotopie-Kategorie* $\mathcal{HT}op$ mit

$$\mathrm{Obj}(\mathcal{HT}op) = \{\, \text{topologische Räume} \,\} \ ,$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{HT}op}(X,Y) = \{\, \text{stetige Abbildungen} \,\}/\sim \ .$$

Die Identität auf $X$ im Sinne von Definition 1.20 (3) ist die Homotopieklasse der Abbildung $\mathrm{id}_X$. Die Verkettung von Homotopieklassen ist nach Bemerkung 2.3 (2) wohldefiniert.

Ein Morphismus $f \colon X \to Y$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt invertierbar oder *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $g \colon Y \to X$ (ein *Inverses*) gibt, so dass

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \qquad \text{und} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y \ .$$

Beispiele sind Bijektionen in $\mathcal{S}et$, Gruppenisomorphismen in $\mathcal{G}rp$, lineare Isomorphismen in $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$, und natürlich Homöomorphismen in $\mathcal{T}op$. Nach obiger Definition sind Homotopieäquivalenzen gerade die Isomorphismen in $\mathcal{HT}op$.

Algebraische Topologie versucht als erstes Ziel, gewisse Klassen von Räumen bis auf Homotopie-Äquivalenz zu unterscheiden.

Oftmals ist freie Homotopie ein etwas zu grober Begriff. Beispielsweise ist ein Weg $\gamma \colon [0,1] \to X$ immer homotop zur konstanten Abbildung auf seinen Anfangspunkt.

2.7. Definition. Ein *Paar topologischer Räume*, kurz *Paar*, besteht aus einem topologischen Raum $X$ und einer beliebigen Teilmenge $A \subset X$. Eine *Abbildung* $f \colon (X,A) \to (Y,B)$ *von Paaren* ist eine stetige Abbildung $f \colon X \to Y$ mit $f(A) \subset B$. Ein *punktierter* (*topologischer*) *Raum* $(X, x_0)$ ist ein Paar $(X, \{x_0\})$ mit $x_0 \in X$. Der Punkt $x_0$ heißt auch *Basispunkt.* Eine *punktierte Abbildung* $f \colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ist eine Abbildung der entsprechenden Paare, es gilt also $f(x_0) = y_0$.

2.8. Definition. Es seien $(X,A)$ und $(Y,B)$ Paare. Zwei Abbildungen $f$, $g \colon (X,A) \to (Y,B)$ heißen *homotop relativ zu* $A$, wenn es eine Homotopie $H \colon X \times [0,1] \to Y$ zwischen $f$ und $g \colon X \to Y$ gibt mit

$$H(a,t) = f(a) = g(a) \qquad \text{für alle } a \in A \text{ und alle } t \in [0,1] \ .$$

Wir sprechen manchmal von Homotopien relativ zu $A$, ohne eine Teilmenge $B \subset Y$ festzulegen. In diesem Fall können wir formal jede beliebige Teilmenge $f(A) \subset B \subset Y$ zulassen. Diese spielt aber keine weitere Rolle.

Der Weg $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ mit $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ ist in $\mathbb{C}^*$ frei homotop zu einem konstanten Weg vermöge

$$H(t,s) = e^{2\pi i(1-s)t} \ .$$

Wir werden aber bald sehen, dass $\gamma$ nicht relativ zu $\{0,1\}$ (also relativ zu den Endpunkten) homotop zum konstanten Weg ist.

2.9. Bemerkung. Wir erinnern uns an die kompakt-offene Topologie aus Definition 1.59.

(1) Wie in Satz 1.60 gehört zu jeder Homotopie $H\colon X \times [0,1] \to Y$ zwischen $f,\, g\colon X \to Y$ ein stetiger Weg $h\colon [0,1] \to (C(X,Y), \mathcal{O}_{\mathrm{ko}})$ von $f$ nach $g$ mit

$$(h(s))(x) = H_s(x) = H(x,s)$$

für alle $x \in X$, $s \in [0,1]$. Wenn $X$ lokal kompakt ist, liefert jeder solche Weg umgekehrt eine Homotopie. In diesem Fall sind Wegzusammenhangskomponenten in $C(X,Y)$ also gerade Homotopieklassen von Abbildungen von $X$ nach $Y$.

(2) Sei jetzt $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge und $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung, dann betrachte die Teilmenge

$$C_{f|A}(X,Y) = \{\, g \in C(X,Y) \mid g|_A = f_A \,\} \subset C(X,Y) \ ,$$

dann liefert eine Homotopie relativ zu $A$ einen Weg in $C_{f|A}(X,Y)$ wie oben. Wenn $X$ lokal kompakt ist, gehört wie oben zu jedem Weg in $C_{f|A}(X,Y)$ eine relative Homotopie. Das folgt aus (1), indem man $C_{f|A}(X,Y)$ mit der Unterraumtopologie versieht und deren charakterisierende Eigenschaft ausnutzt.

Zum Schluss geben wir ein Beispiel, dass Homotopieäquivalenzen mitunter nicht so offensichtlich sind, wie sie erscheinen.

2.10. Definition. Eine Teilmenge $A$ eines topologischen Raumes $X$ heißt *Retrakt von $X$*, wenn es eine stetige Abbildung $f\colon X \to A$ mit $f|_A = \mathrm{id}_A$ gibt. Sie heißt *Deformationsretrakt*, wenn zusätzlich $\iota \circ f\colon X \to X$ homotop zur Identität $\mathrm{id}_X$ ist, und *starker Deformationsretrakt*, wenn die Homotopie zwischen $\iota \circ f$ und $\mathrm{id}_X$ sogar relativ zu $A$ gewählt werden kann.

2.11. Beispiel. (1) Jede einpunktige Menge $\{p\} \subset X$ ist Retrakt von $X$, aber nur dann Deformationsretrakt, wenn $X$ zusammenziehbar ist. Beispielsweise ist $\{1\} \subset \mathbb{C}^*$ kein Deformationsretrakt (Beweis später).

(2) Der Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ ist ein starker Deformationsretrakt von $\mathbb{C}^*$ mit

$$f(z) = \frac{z}{|z|} \qquad \text{und} \qquad H(z,s) = \frac{z}{|z|^s} \ .$$

Er ist aber kein Retrakt von ganz $\mathbb{C}$ (Beweis später).

Das folgende Beispiel soll zeigen, dass man sich nicht jede Deformationsretraktion vorstellen kann.

2.12. Beispiel. Bings „Haus mit zwei Zimmern“ kann man basteln, indem man zwei leere Dosen mit den Unterseiten aneinanderklebt. Dann bohrt man von jeder Seite durch einen Deckel und die gemeinsamen Unterseiten je ein Loch am Rand, und klebt je einen passenden Zylinder zwischen ein Deckel- und ein Unterseitenloch so ein, dass dieser auf seiner vollen Länge den jeweiligen Dosenrand berührt (Abbildung 2.1, linkes Bild). Man kann jetzt durch das Loch in der einen Dose in das „Zimmer“ in der anderen Dose gelangen und umgekehrt.

Man überzeugt sich, dass Bings Haus ein starker Deformationsretrakt einer vollen Dose ist (Abbildung 2.1, rechtes Bild), genau wie ein Punkt in der Dose. Da Homotopieäquivalenz transitiv ist, ist Bings Haus zusammenziehbar. Die zugehörige Deformationsretraktion kann man sich aber kaum vorstellen.

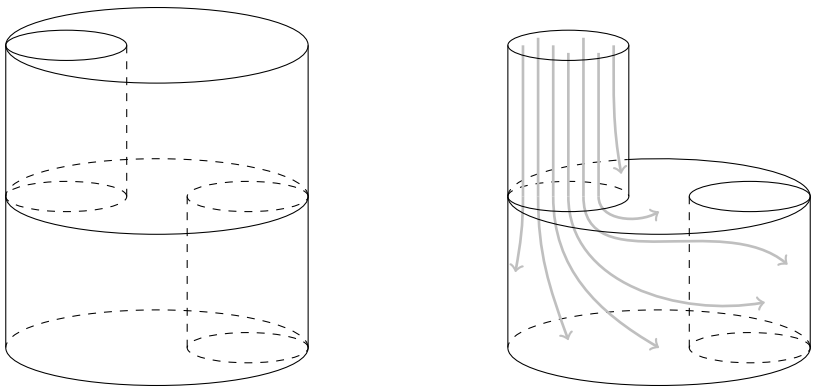


Abbildung 2.1. Bings Haus mit zwei Räumen

## 2.b. Die Fundamentalgruppe

Die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes misst, wieviele Typen von nichtzusammenziehbaren Schleifen es in einem topologischen Raum gibt. Beispielsweise ist ein Fahrrad dann sicher an einem Gitter angeschlossen, wenn das Fahrradschloss sowohl im umgebenden Raum ohne Gitter, als auch im umgebenden Raum ohne Fahrrad nicht zusammenziehbar ist. Wir definieren hier die Fundamentalgruppe und geben erste Eigenschaften an. Für Anwendungen benötigen wir einige Techniken, die wir in den nächsten Abschnitten kennenlernen werden.

2.13. Definition. Es sei $(X, x)$ ein punktierter topologischer Raum. Eine *Schleife* in $(X, x)$ ist ein Weg von $x$ nach $x$, also eine Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Seien $\gamma_1$, $\gamma_2$ zwei Schleifen in $(X, x)$, dann ist ihre *Verkettung* die Schleife $\gamma_1\gamma_2\colon [0,1] \to X$ mit

$$(\gamma_1\gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{falls } 0 \le t \le \frac{1}{2}\text{ , und} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{falls } \frac{1}{2} \le t \le 1\text{ .} \end{cases}$$

Die *Fundamentalgruppe* $\pi_1(X, x)$ ist die Menge aller Schleifen in $(X, x)$ modulo Homotopie relativ zu $\{0, 1\}$.

Bei der Verkettung werden also beide Schleifen nacheinander mit doppelter Geschwindigkeit durchlaufen. Wir benutzen Übung 1.123 um zu sehen, dass die Verkettung wieder stetig ist.

Homotopie relativ zu $\{0, 1\}$ bedeutet für Schleifen soviel wie Homotopie bei festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt. Insbesondere gilt für eine solche Homotopie zwischen $\gamma_0$ und $\gamma_1$, dass

$$\begin{aligned} H(0,s) = H(1,s) &= x && \text{für alle } s \in [0,1]\text{ , und} \\ H(t,s) &= \gamma_s(t) && \text{für alle } t \in [0,1] \text{ und alle } s \in \{0,1\}\text{ .} \end{aligned}$$

2.14. Satz. *$\pi_1(X, x)$ bildet mit der Verkettung eine Gruppe. Das neutrale Element und das Inverse zu $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$ werden repräsentiert durch $e$ beziehungsweise $\bar{\gamma}\colon [0,1] \to X$, mit*

$$e(t) = x \qquad \textit{und} \qquad \bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t) \qquad \textit{für alle } t \in [0,1]\text{ .}$$

Beweis. Hier ist einiges zu zeigen: zunächst die Wohldefiniertheit der Verkettung relativer Homotopieklassen, dann die Gruppenaxiome.

Seien $H_1$ und $H_2\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ relative Homotopien zwischen den Schleifen $\alpha_0$ und $\alpha_1$ beziehungsweise zwischen $\beta_0$ und $\beta_1$. Wir verketten die Homotopien und erhalten

$$H = \begin{cases} H_1(2t,s) & \text{falls } 0 \le t \le \frac{1}{2}\text{ , und} \\ H_2(2t-1,s) & \text{falls } \frac{1}{2} \le t \le 1\text{ .} \end{cases}$$

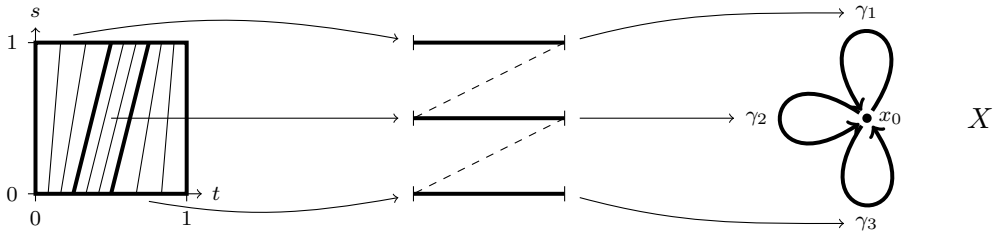
Dann ist $H$ eine Homotopie zwischen $\alpha_0\beta_0$ und $\alpha_1\beta_1$ relativ zu $\{0,1\}$, also ist die Verkettung mit relativer Homotopie verträglich, und damit als Verknüpfung auf $\pi_1(X,x)$ wohldefiniert.

Zur Assoziativität überlegen wir uns, dass

$$\big((\gamma_1\gamma_2)\gamma_3\big)(t) = \begin{cases} \gamma_1(4t) & 0 \le t \le 1/4\ , \\ \gamma_2(4t-1) & 1/4 \le t \le 1/2\ , \\ \gamma_3(2t-1) & 1/2 \le t \le 1\ ; \end{cases}$$

$$\big(\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)\big)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \le t \le 1/2\ , \\ \gamma_2(4t-2) & 1/2 \le t \le 3/4\ , \\ \gamma_3(4t-3) & 3/4 \le t \le 1\ . \end{cases}$$

Also konstruieren wir eine Homotopie zwischen $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$ und $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$ wie im folgenden Bild,




also in Formeln als

$$H(s,t) = \begin{cases} \gamma_1\big(4t/(1+s)\big) & 0 \le t \le (1+s)/4\ , \\ \gamma_2\big(4t-(1+s)\big) & (1+s)/4 \le t \le (2+s)/4\ , \\ \gamma_3\big(1-4(1-t)/(2-s)\big) & (2+s)/4 \le t \le 1\ . \end{cases}$$

Um zu zeigen, dass $[e]$ ein linksneutrales Element ist, konstruieren wir ähnlich wie oben eine relative Homotopie zwischen $e\gamma$ und $\gamma$ für eine beliebige Schleife $\gamma$. Schließlich überprüfen wir, dass $[\overline{\gamma}]$ nur von $[\gamma]$ abhängt und zu $[\gamma]$ linksinversiv ist. Dazu konstruieren wir eine Homotopie

$$H(t,s) = \begin{cases} \gamma(1-2st) & \text{falls } 0 \le t \le \frac{1}{2}\ , \text{und} \\ \gamma(1-2s(1-t)) & \text{falls } \frac{1}{2} \le t \le 1\ . \end{cases}$$

zwischen $e$ und $\overline{\gamma}\gamma$. Damit haben wir die Gruppenaxiome für $\pi_1(X,x)$ nachgewiesen.

Insbesondere folgt, dass $[e]$ das eindeutige, beidseitige neutrale Element und $[\overline{\gamma}]$ das eindeutige, beidseitige Inverse zu $[\gamma]$ ist. □

Wir werden später etwas nachlässig sein und manchmal $\gamma$ statt $[\gamma]$ schreiben.

2.15. Satz. *Sei $X$ ein Raum, $x$, $y \in X$. Jede Homotopieklasse von Wegen von $x$ nach $y$ induziert einen Isomorphismus von $\pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y)$. Insbesondere hängt der Isomorphietyp der Gruppe $\pi_1(X,x)$ nicht vom Basispunkt $x$ ab, wenn $X$ wegzusammenhängend ist.*

Beweis von Satz 2.15. Sei $\alpha\colon [0,1] \to X$ ein Weg von $x$ nach $y$, dann betrachte die Abbildung

$$\pi_1(X,x) \ni \gamma \longmapsto \bar{\alpha}\gamma\alpha \in \pi_1(X,y)\ .$$

Wie im obigen Beweis sieht man, dass $[\overline{\alpha}\gamma\alpha]$ weder von der Klammerung noch von den relativen Homotopieklassen von $\alpha$ und $\gamma$ abhängt. Es handelt sich um einen Homomorphismus, da

$$(\overline{\alpha}\gamma_1\alpha)(\overline{\alpha}\gamma_2\alpha) \sim (\overline{\alpha}\gamma_1)(\alpha\overline{\alpha})(\gamma_2\alpha) \sim (\overline{\alpha}\gamma_1)e(\gamma_2\alpha) \sim (\overline{\alpha}\gamma_1)(\gamma_2\alpha) \sim \overline{\alpha}(\gamma_1\gamma_2)\alpha\ .$$

Der inverse Gruppenhomomorphismus wird analog von $\overline{\alpha}$ induziert, denn $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$ und

$$\alpha(\overline{\alpha}\gamma\alpha)\overline{\alpha} \sim (\alpha\overline{\alpha})\gamma(\alpha\overline{\alpha}) \sim e\gamma e \sim \gamma\ .$$ □

Man schreibt daher manchmal $\pi_1(X)$, wenn $X$ wegzusammenhängend ist und es nur auf den Isomorphietyp der Gruppe $\pi_1(X,x)$ ankommt, aber nicht auf die einzelnen Elemente.

2.16. Bemerkung. Für $x = y$ gehört also zu jedem $\alpha \in \pi_1(X,x)$ ein Automorphismus von $\pi_1(X,x)$. In diesem Fall handelt es sich um den inneren Automorphismus

$$\gamma \longmapsto \bar{\alpha}\gamma\alpha \ .$$

Dies zeigt: Wenn $\pi_1(X,x)$ nicht kommutativ ist, kann man nicht von den Elementen von $\pi_1(X)$ sprechen, ohne einen Fußpunkt zu fixieren.

2.17. Bemerkung. Es sei $(X,x)$ ein punktierter topologischer Raum. Dann definieren wir den *Pfadraum* $PX$, den *freien Schleifenraum* $LX$ und den (*punktierten*) *Schleifenraum* $\Omega(X,x)$ durch

$$\begin{aligned} PX &= (C([0,1],X),\mathcal{O}_{\mathrm{ko}}) \ , \\ LX &= \{\gamma \in PX \mid \gamma(0) = \gamma(1)\} \subset PX \ , \\ \text{und} \qquad \Omega(X,x) &= \{\gamma \in LX \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x\} \subset LX \ , \end{aligned}$$

wobei $LX$ und $\Omega(X,x)$ die von $PX$ induzierte Unterraumtopologie tragen.

(1) Da $[0,1]$ kompakt ist, sind relative Homotopien von Schleifen in $(X,x)$ nach Bemerkung 2.9 (2) gerade Wege in $\Omega(X,x)$. Also entspricht $\pi_1(X,x)$ gerade der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von $\Omega(X,x)$, kurz

$$\pi_1(X,x) = \pi_0(\Omega(X,x)) \ .$$

(2) Falls $X$ wegzusammenhängend ist, hat $LX$ gerade die Wegzusammenhangskomponenten

$$\pi_0(LX) = \pi_1(X,x)^{\mathrm{ab}} \ ,$$

da wir nach Bemerkung 2.16 die Elemente $\gamma$ und $\alpha^{-1}\gamma a$ identifizieren müssen. Hierbei bezeichnet $G^{\mathrm{ab}}$ die *Abelisierung*

$$G^{\mathrm{ab}} = G/[G,G]$$

der Gruppe $G$, die dadurch entsteht, dass alle Kommutatoren $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$ mit dem neutralen Element gleichgesetzt werden. Die Abelisierung ist der größte abelsche Quotient von $G$.

(3) Analog zu (1) kann man höhere Homotopiegruppen induktiv für $k \geq 2$ durch

$$\pi_k(X,x) = \pi_{k-1}(\Omega(X,x),e_x)$$

definieren. Dabei bezeichnet $e_x$ wie in Satz 2.14 die konstante Schleife im Punkt $x$. Man sieht hier aber beispielsweise nicht, dass alle $\pi_k(X,x)$ für $k \geq 2$ abelsch sind.

So, wie man in einer Kategorie nicht nur Objekte betrachtet, sondern immer auch Morphismen, betrachtet man nicht nur Kategorien für sich, sondern auch „Abbildungen“ zwischen ihnen. Dabei muss man vorsichtig sein, da Abbildungen im strengen Sinne nur zwischen Mengen, aber nicht zwischen Klassen definiert sind.

2.18. Definition. Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Kategorien. Ein (*kovarianter*) *Funktor* $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ordnet jedem Objekt $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ ein Objekt $\mathcal{F}A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$ und jedem Morphismus $F \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ einen Morphismus $\mathcal{F}F \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}A,\mathcal{F}B)$ zu, so dass

$$\mathcal{F}\,\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{\mathcal{F}A} \ , \tag{1}$$

$$\mathcal{F}(F \circ G) = \mathcal{F}F \circ \mathcal{F}G \tag{2}$$

für alle $A,B,C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ und alle $F \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,C)$, $G \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$.

2.19. Definition. Wir betrachten die Kategorien $\mathcal{T}op_+$ (und $\mathcal{HT}op_+$) der punktierten topologischen Räume und der (relativen Homotopieklassen von) stetigen Abbildungen mit

$$\begin{aligned} \mathrm{Obj}(\mathcal{T}op_+) = \mathrm{Obj}(\mathcal{HT}op_+) &= \left\{ (X,x) \;\middle|\; X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{T}op) \text{ und } x \in X \right\} , \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op_+}\big((X,x),(Y,y)\big) &= \left\{ F\colon X \to Y \;\middle|\; F \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(X,Y) \text{ und } F(x) = y \right\} \\ \text{und} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{HT}op_+}\big((X,x),(Y,y)\big) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op_+}\big((X,x),(Y,y)\big) \,/\, \sim , \end{aligned}$$

wobei $\sim$ hier Homotopie relativ zum Basispunkt bezeichnet. Die Identität auf $(X,x)$ ist die (relative Homotopieklasse der) Abbildung $\mathrm{id}_{(X,x)}$, und die Verkettung ist die Hintereinanderausführung.

Später werden wir die Klasse der Objekte in $\mathcal{HT}op_+$ etwas einschränken, siehe Beispiel 4.64 (2).

2.20. Beispiel. Durch Vergessen der Basispunkte und Übergang zu (relativen) Homotopieklassen von Abbildungen erhalten wir ein kommutatives Diagramm von Funktoren

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}op_+ \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{HT}op_+ \arrow[d] \\ \mathcal{T}op \arrow[r] & \mathcal{HT}op \end{tikzcd}$$

2.21. Satz. *Die Fundamentalgruppe ist ein Funktor*

$$\pi_1\colon \mathcal{T}op_+ \to \mathcal{G}rp$$

*von der Kategorie der punktierten topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen. Dabei wird $(X,x)$ auf $\pi_1(X,x)$ und $F\colon (X,x) \to (Y,y)$ auf $F_* = \pi_1 F\colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,y)$ abgebildet mit*

$$F_*[\gamma] = [F \circ \gamma] \in \pi_1(Y,y) \qquad \textit{für alle } [\gamma] \in \pi_1(X,x) \; .$$

*Dieser Funktor ist auch auf $\mathcal{HT}op_+$ wohldefiniert.*

Beweis. Sei $F\colon (X,x) \to (Y,y)$ eine stetige punktierte Abbildung. Als erstes zeigen wir, dass $\pi_1 F = F_*$ ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist. Sei $H$ eine relative Homotopie zwischen $\gamma_0$, $\gamma_1\colon ([0,1],\{0,1\}) \to (X,x)$, dann ist die Abbildung $F \circ H\colon [0,1] \times [0,1] \to Y$ eine relative Homotopie zwischen $F \circ \gamma_0$ und $F \circ \gamma_1$, also ist $F_*$ wohldefiniert.

Seien $\gamma_1$, $\gamma_2$ zwei Schleifen in $(X,x)$. Dann folgt

$$(F \circ \gamma_1)(F \circ \gamma_2) = F \circ (\gamma_1 \gamma_2)$$

direkt aus Definition 2.13, also ist $F_*$ ein Gruppenhomomorphismus.

Als nächstes überprüfen wir, dass $\pi_1$ die beiden Eigenschaften aus Definition 2.18 erfüllt. Da $\mathrm{id}_X \circ \gamma = \gamma$, gilt offensichtlich (1), also

$$(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x)} \; .$$

Seien $F\colon (Y,y) \to (Z,z)$ und $G\colon (X,x) \to (Y,y)$ punktierte Abbildungen. Dann folgt (2), da

$$(F \circ G)_*[\gamma] = [(F \circ G) \circ \gamma] = [F \circ (G \circ \gamma)] = F_*(G_*[\gamma]) \; .$$

Um zu zeigen, dass $\pi_1$ auch auf $\mathcal{HT}op_+$ wohldefiniert ist, müssen wir nur überprüfen, dass $F_*$ nur von der relativen Homotopieklasse von $F$ abhängt. Sei also $H\colon X \times [0,1] \to Y$ eine relative Homotopie zwischen $F_0$ und $F_1\colon (X,x) \to (Y,y)$, dann ist die Abbildung $[0,1] \times [0,1] \to Y$ mit

$$(t,s) \mapsto H(\gamma(t),s)$$

eine relative Homotopie zwischen $F_{0*}\gamma$ und $F_{1*}\gamma$. $\square$

Wir können den Funktor $\pi_1 \colon \mathcal{T}op_+ \to \mathcal{G}rp$ also in zwei Funktoren

$$\mathcal{T}op_+ \longrightarrow \mathcal{H}\mathcal{T}op_+ \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{G}rp\ ,$$

zerlegen, dabei ist der erste Funktor der gleiche wie in Beispiel 2.20.

Wegen Bemerkung 2.16 dürfen wir jedoch auf keinen Fall den Basispunkt vergessen, wir erhalten also keinen Funktor $\mathcal{T}op \to \mathcal{G}rp$. Später werden uns Homologie und Kohomologie solche Funktoren (mit Werten in abelschen Gruppen) liefern.

2.22. Folgerung. *Seien $(X,x)$, $(Y,y)$ homotopieäquivalente Paare topologischer Räume, dann ist $\pi_1(X,x)$ isomorph zu $\pi_1(Y,y)$.*

Beweis. Sei $F \colon (X,x) \to (Y,y)$ homotopieinvers zu $G \colon (Y,y) \to (X,x)$, dann folgt aus Funktorialität, dass

$$G_* \circ F_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x)} \qquad \text{und} \qquad F_* \circ G_* = \mathrm{id}_{\pi_1(Y,y)}\ .$$

Also sind $F_*$ und $G_*$ zueinander inverse Gruppenisomorphismen. □

Mit dem gleichen Argument sieht man, dass Funktoren stets Isomorphismen auf Isomorphismen abbilden.

2.23. Definition. Ein topologischer Raum heißt *einfach zusammenhängend,* wenn er wegzusammenhängend ist mit $\pi_1(X) = \{e\}$.

Hierbei haben wir ausgesnutzt, dass der Isomorphietyp von $\pi_1(X,x)$ nach Satz 2.15 nicht vom Basispunkt $x \in X$ abhängt. In Übung 2.77 lernen Sie andere Charakterisierungen einfach zusammenhängender Räume kennen.

2.24. Beispiel.
(1) Der einpunktige Raum $\{*\}$ ist einfach zusammenhängend, da es nur die konstante Schleife $t \mapsto *$ gibt.
(2) Sei $X$ zusammenziehbar, dann ist $X$ nach Beispiel 2.5 zu $\{*\}$ homotopieäquivalent, also folgt $\pi_1(X) = \{e\}$. Nach Bemerkung 1.92 (3) sind zusammenziehbare Räume insbesondere wegzusammenhängend, also ist $X$ auch einfach zusammenhängend.

## 2.c. Die Fundamentalgruppe der $S^1$

In diesem Abschnitt rechnen wir unsere erste Fundamentalgruppe aus, und zwar „von Hand“. Anschließend beweisen wir den Brouwerschen Fixpunktsatz und den Satz von Borsuk-Ulam als Anwendungen davon.

Wir fassen $S^1$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ (mit der Unterraumtopologie) auf. Um $\pi_1(S^1,1)$ zu berechnen, brauchen wir den Begriff der Überlagerung.

2.25. Definition. Eine Abbildung $p \colon \widetilde{X} \to X$ heißt *Überlagerung,* wenn es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung $U$ von $x$ und eine Menge $M$ mit diskreter Topologie gibt, so dass

$$\begin{array}{ccccc} U \times M & \cong & p^{-1}(U) & \hookrightarrow & \widetilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & = & U & \hookrightarrow & X \end{array}\ .$$

Wir nennen dann $U$ *gleichmäßig überlagert.* Eine Überlagerung $p \colon \widetilde{X} \to X$ heißt *universell,* wenn $\widetilde{X}$ zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist.

2.26. Beispiel. Betrachte die modifizierte komplexe Exponentialabbildung $p = e^{2\pi i\,\cdot} : \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{C}$. Diese Abbildung ist eine Überlagerung, denn jeder Punkt $z = e^{2\pi i\varphi} \in S^1$ hat eine gleichmäßig überlagerte Umgebung $S^1 \setminus \{-z\}$, da

$$p^{-1}(S^1 \setminus \{-z\}) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\varphi + n - \frac{1}{2}, \varphi + n + \frac{1}{2}\right) \cong \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \mathbb{Z} \,.$$

Da $\mathbb{R}$ zusammenziehbar ist, ist $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ nach Definition 2.25 eine universelle Überlagerung.

2.27. Satz (Homotopie-Liftungssatz). *Sei $p\colon \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung, und seien $\widetilde{F}\colon Y \to \widetilde{X}$ und $H\colon Y \times [0,1] \to X$ stetig mit*

$$H(\,\cdot\,,0) = p \circ \widetilde{F}\colon Y \to X \,,$$

*dann existiert genau eine stetige Abbildung $\widetilde{H}\colon Y \times [0,1] \to \widetilde{X}$ mit*

$$p \circ \widetilde{H} = H \qquad \textit{und} \qquad \widetilde{H}(\,\cdot\,,0) = \widetilde{F}\colon Y \to \widetilde{X} \,.$$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\widetilde{F}"] \arrow[d, hook, "\times\{0\}"'] & \widetilde{X} \arrow[d, two heads, "p"] \\
Y \times [0,1] \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & X
\end{tikzcd}$$

Wir nennen $\tilde{H}$ einen Lift der Homotopie $H$ mit Startwert $\tilde{F}$.

Beweis. Idee: Lokale Existenz und Eindeutigkeit liefern globale Existenz und Eindeutigkeit.

Zur lokalen Existenz von Lifts fixiere $y \in Y$. Zu jedem $s \in [0,1]$ existiert eine gleichmäßig überlagerte Umgebung $U_s$ von $H(y,s) \in X$, ein offenes Teilintervall $I_s \subset [0,1]$ mit $s \in I_s$ und eine offene Umgebung $V_s \subset Y$ von $y$ mit $H(V_s \times I_s) \subset U_s$. Endlich viele solche Intervalle $I_s$ überdecken $[0,1]$, da $[0,1]$ kompakt ist. Also existieren $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$, gleichmäßig überlagerte $U_i$ und Umgebungen $V_i$ von $y$ mit

$$H(V_i \times [t_{i-1}, t_i]) \subset U_i \,.$$

Wir konstruieren induktiv Umgebungen $W_i$ von $y$ und Lifts $\widetilde{H}_i$ von $H|_{W_i\times[0,t_i]}$. Setze dazu zunächst $W_0 = Y$ und $\widetilde{H}_0(\,\cdot\,,0) = \widetilde{F}$. Sei jetzt eine offene Umgebung $W_{i-1}$ von $y$ und ein Lift $\widetilde{H}_{i-1}$ von $H|_{W_{i-1}\times[0,t_{i-1}]}$ bereits konstruiert. Betrachte die stetige Abbildung

$$f_i\colon W_{i-1} \cap V_i \xrightarrow{\widetilde{H}_{i-1}(\,\cdot\,,t_{i-1})} p^{-1}(U_i) = U_i \times M_i \longrightarrow M_i \,,$$

und sei $m_i = f_i(y) \in M_i$. Da $M_i$ die diskrete Topologie trägt, ist $\{m_i\} \subset M_i$ offen, also ist

$$W_i = f_i^{-1}(m_i) \subset W_{i-1} \cap V_i$$

eine offene Umgebung von $y$. Für $w \in W_i$ setze

$$\widetilde{H}_i(w,s) = \begin{cases} \widetilde{H}_{i-1}(w,s) & 0 \le s \le t_{i-1} \,, \\ \big(H(w,s), m_i\big) \in U_i \times M_i \subset \widetilde{X} & t_{i-1} \le s \le t_i \,. \end{cases}$$

Dann ist $\widetilde{H}_i$ auf beiden Teilbereichen stetig und stimmt auf dem Durchschnitt überein, ist also insgesamt stetig. Setze schließlich $W_y = W_k$ und erhalte einen Lift

$$\widetilde{H}_y\colon W_y \times [0,1] \to \widetilde{X} \qquad \text{von} \qquad H|_{W_y\times[0,1]} \,.$$

Außerdem ist das die einzige mögliche Wahl von $\widetilde{H}_i\colon W_i \times [0,t_i] \to \widetilde{X}$. Wenn die Eindeutigkeit auf $W_{i-1} \times [0,t_{i-1}]$ bereits induktiv gezeigt ist, erzwingen für alle $y' \in W_i$ Liftungseigenschaft sowie die Stetigkeit der Abbildung

$$[t_{i-1},t_i] \xrightarrow{\widetilde{H}_i(y',\,\cdot\,)} p^{-1}(U_i) = U_i \times M_i \longrightarrow M_i$$

unsere Wahl von $\widetilde{H}(y',s)$ für $s \in [t_{i-1},t_i]$, denn eine stetige Funktion in einen diskreten Raum ist lokal konstant.

Schließlich ist $\widetilde{H}_y = \widetilde{H}_k\colon W_y \times [0,1] = W_k \times [0,1] \to \widetilde{X}$ ein stetiger Lift von $H|_{W_y \times [0,1]}$ mit $\widetilde{H}(y',0) = \widetilde{F}(y')$ für alle $y' \in W_y$. Seien $y$, $y'$ gegeben, dann folgt

$$\widetilde{H}_y|_{(W_y \cap W_{y'}) \times [0,1]} = \widetilde{H}_{y'}|_{(W_y \cap W_{y'}) \times [0,1]}$$

aus unser obigen lokalen Eindeutigkeitsüberlegung.

Somit können wir alle lokalen Lifts $\widetilde{H}_y\colon W_y \times [0,1] \to \widetilde{X}$ zu einer globalen Abbildung $\widetilde{H}$ zusammensetzen. Die Stetigkeit von $\widetilde{H}$ folgt, da $\widetilde{H}$ nahe $(y,s)$ mit $\widetilde{H}_y$ übereinstimmt und $\widetilde{H}_y$ nach Konstruktion bei $(y,s)$ stetig ist. □

2.28. Satz. *Es gilt $\pi_1(S^1,1) \cong \mathbb{Z}$, wobei $[\mathrm{id}_{S^1}]$ der $1 \in \mathbb{Z}$ entspricht.*

Beweis. Wir betrachten die Überlagerung $p = e^{2\pi i\,\cdot} : \mathbb{R} \to S^1$ aus Beispiel 2.26. Wir fassen $\gamma \in \pi_1(S^1,1)$ als Homotopie $H$ von Abbildungen von $Y = \{*\}$ nach $S^1$ mit $H(*,s) = \gamma(s)$ auf. Es sei $\widetilde{F}(*) = 0 \in \mathbb{Z}$ ein Lift von $H(*,0) = 1$, dann existiert nach Satz 2.27 ein Lift $\tilde{\gamma}(s) = \widetilde{H}(*,s)$, und es folgt $\tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$.

Seien $\gamma_0$ und $\gamma_1$ relativ homotope Schleifen in $(S^1,1)$ mit Lifts $\tilde{\gamma}_0$ und $\tilde{\gamma}_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Wir fassen eine relative Homotopie $H$ zwischen $\gamma_0$ und $\gamma_1$ als Homotopie $K(s,t) = H(t,s)$ von der konstanten Abbildung $s \mapsto 1$ zu sich selbst auf. Dann lässt sich $K$ nach Satz 2.27 zu einer Homotopie $\widetilde{K}$ liften, wobei $\widetilde{K}(s,t) = \tilde{\gamma}_s(t)$ für $s \in \{0,1\}$ aufgrund der Eindeutigkeit der Lifts $\tilde{\gamma}_i$. Wir erhalten also eine Homotopie $\widetilde{H}(t,s) = \widetilde{K}(s,t)$ zwischen $\tilde{\gamma}_0$ und $\tilde{\gamma}_1$. Da $s \mapsto \widetilde{H}(1,s)$ die konstante Abbildung $H(1,s) = 1 \in S^1$ liftet, erhalten wir eine relative Homotopie zwischen Wegen, die bei $0 \in \mathbb{R}$ beginnen. Insbesondere folgt $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1) \in \mathbb{Z}$. Also erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung

$$\Phi\colon \pi_1(S^1,1) \to \mathbb{Z} \qquad \text{mit} \qquad \Phi([\gamma]) = \tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z} \qquad \text{für } \tilde{\gamma} \text{ wie oben.}$$

Ein Lift von $\gamma_1\gamma_2$ ist

$$\widetilde{\gamma_1\gamma_2} = \begin{cases} \tilde{\gamma}_1(2t) & 0 \le t \le 1/2\ , \\ \tilde{\gamma}_1(1) + \tilde{\gamma}_2(2t-1) & 1/2 \le t \le 1\ , \end{cases}$$

dabei nutzen wir aus, dass für jede Zahl $n \in \mathbb{Z}$ die Abbildung $t \mapsto \tilde{\gamma}(t) + n$ ein Lift von $\gamma$ ist, wenn $\tilde{\gamma}$ ein Lift ist, da

$$e^{2\pi i(\tilde{\gamma}(t)+n)} = e^{2\pi i\tilde{\gamma}(t)} \cdot e^{2\pi i n} = \gamma(t) \cdot 1\ .$$

Also ist $\Phi$ ein Gruppenhomomorphismus. Man kann sich durch Nachrechnen überzeugen, dass $\gamma$ dabei gerade auf die Umlaufzahl $\nu_{(\gamma,0)}$ aus Beispiel 2.1 (1) abgebildet wird.

Zur Injektivität seien $\gamma_0$, $\gamma_1$ Schleifen in $S^1$ mit Lifts $\tilde{\gamma}_0$, $\tilde{\gamma}_1$, so dass $\tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{\gamma}_1(0) = 0$ und $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1) = n \in \mathbb{Z}$. Da $\mathbb{R}$ zusammenziehbar ist, ist $\mathbb{R}$ einfach zusammenhängend. Insbesondere existiert eine relative Homotopie $\tilde{H}$ zwischen $\tilde{\gamma}_0$ und $\tilde{\gamma}_1$ (Übung 2.77). Dann ist $p \circ \tilde{H}$ eine relative Homotopie zwischen $\gamma_0$ und $\gamma_1$, also folgt $[\gamma_0] = [\gamma_1]$.

Zur Surjektivität betrachte zu $n \in \mathbb{Z}$ die Schleife $\gamma_n$ mit Lift $\tilde{\gamma}_n$, wobei

$$\gamma_n(t) = e^{2nint} \qquad \text{und} \qquad \tilde{\gamma}_n(t) = nt\ .$$ □

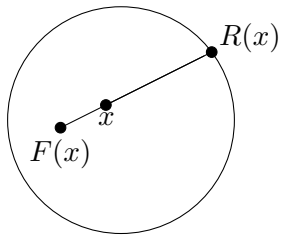



Abbildung 2.2. Die Retraktion im Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes

Wir kommen jetzt zu zwei Anwendungen; weitere folgen in den Übungen 2.80 und 2.81. Zur Motivation zunächst der eindimensionale Fall des Brouwerschen Fixpunktsatzes.

2.29. Bemerkung. Jede stetige Funktion $f\colon D^1 = [-1,1] \to [-1,1]$ hat einen Fixpunkt. Betrachte dazu die Funktion

$$g\colon [-1,1] \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad x \mapsto x - f(x)\ .$$

Es gilt $f(x) = x$ genau dann, wenn $g(x) = 0$. Da $g(-1) \leq 0$ und $g(1) \geq 0$, folgt die Behauptung aus dem Zwischenwertsatz.

2.30. Bemerkung. Sei $Y \subset X$, sei $y \in Y$, und sei $R\colon X \to Y$ eine Retraktion, dann ist der Homomorphismus $\pi_1 R\colon \pi_1(X,y) \to \pi_1(Y,y)$ surjektiv und $\pi_1\iota\colon \pi_1(Y,y) \to \pi_1(X,x)$ injektiv. Zerlege dazu $\mathrm{id}_{\pi_1(Y,y)} = \pi_1 \mathrm{id}_Y$ als

$$\pi_1(Y,y) \xrightarrow{\pi_1\iota} \pi_1(X,y) \xrightarrow{\pi_1 R} \pi_1(Y,y)\ .$$

Mit anderen Worten: eine Retraktion verhält sich ähnlich wie eine Projektion in einem (semi-) direkten Produkt von Gruppen, Ringen, Vektorräumen etc.

2.31. Satz (Brouwerscher Fixpunktsatz, $n = 2$). *Jede stetige Abbildung $F\colon D^2 \to D^2$ hat einen Fixpunkt.*

Beweis. Falls es keinen Fixpunkt gibt, konstruieren wir eine Retraktion $R\colon D^2 \to \partial D^2 = S^1$ wie in Abbildung 2.2. Da $\pi_1(D^2,1) = 0$ und $\pi_1(S^1,1) = \mathbb{Z}$, widerspricht das der obigen Bemerkung.

Zur Konstruktion der Retraktion beachten wir, dass $\min_{x\in D^2} d(F(x),x) > 0$ wegen Kompaktkeit von $D^2$. Daher erhalten wir eine stetige Abbildung, indem wir die Strecke von $F(x)$ nach $x$ über $x$ hinaus fortsetzen, bis sie $S^1$ schneidet, und $x$ den Schnittpunkt $R(x)$ zuordnen. Falls $x \in S^1$, ist $x = R(x)$ dieser Schnittpunkt, also erhalten wir die gesuchte Retraktion. □

Der folgende Satz gilt analog für Abbildungen $S^n \to \mathbb{R}^n$, wird hier aber nur für $n = 2$ bewiesen.

2.32. Satz (Borsuk-Ulam). *Sei $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig, dann existiert $x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$.*

Beweis. Falls nicht, existiert eine Abbildung $G\colon S^2 \to S^1 \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ mit

$$G(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}\ ,$$

und es folgt $G(x) = -G(-x)$ auf ganz $S^2$. Betrachte den Äquator

$$\gamma\colon [0,1] \to S^2 \subset \mathbb{R}^3 \qquad \text{mit} \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

Ohne Einschränkung gelte $G(\gamma(0)) = 1 \in S^1 \subset \mathbb{C}$, anderfalls drehen wir $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ entsprechend. Es sei $g = G \circ \gamma$. Wir wollen $G_*[\gamma] = [g] \in \pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$ bestimmen. Sei dazu $\tilde{g}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ein

Lift von $g\colon [0,1] \to S^1$ wie in Satz 2.28 unter der Überlagerung $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ mit $p(t) = e^{2\pi t}$ aus Beispiel 2.26. Aus

$$g(t+1/2) = G\big(-\gamma(t)\big) = -(G \circ \gamma)(t) = -g(t)$$

folgt

$$\tilde{g}(t+1/2) - \tilde{g}(t) \in \mathbb{Z} + 1/2 \ ,$$

da $p^{-1}(-1) = \mathbb{Z} + 1/2$. Da der obige Ausdruck stetig von $t$ abhängt und $\mathbb{Z} + 1/2$ diskret ist, ist er konstant, und wir erhalten

$$\tilde{g}(1) - \tilde{g}(0) = \big(\tilde{g}(1) - \tilde{g}(1/2)\big) + \big(\tilde{g}(1/2) - \tilde{g}(0)\big) = 2\big(\tilde{g}(1/2) - \tilde{g}(0)\big) \in 2\mathbb{Z} + 1 \ .$$

Insbesondere wird der Äquator auf ein ungerades Element von $\pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$ abgebildet. Der Äquator $\gamma$ ist aber null-homotop in $S^2$. Sei $H$ eine Homotopie von $\gamma$ zur konstanten Schleife, dann ist $G \circ H$ eine Homotopie von $g$ zur konstanten Schleife, was einen Widerspruch darstellt. $\square$

Die Beweise der obigen Sätze sind nicht konstruktiv, das heißt, sie liefern kein Verfahren, das einen Punkt mit der gesuchten Eigenschaft findet. Das gleiche gilt für die beiden Anwendungen in den Übungen 2.80 und 2.81, auch dort sind die Beweise indirekt. Man beachte, dass es in allen vier Problemen beliebig „schlecht konditionierte“ Situationen gibt, in denen eine beliebig kleine Variation der Ausgangsdaten (zum Beispiel Variation von $F$ um weniger als $\varepsilon > 0$ in der Supremumsnorm) beliebig große Änderungen des gesuchten Punktes bewirken können.

## 2.d. Der Satz von Seifert-van Kampen

Wir wollen als nächstes den Satz von Seifert-van Kampen beweisen, der es in vielen Fällen ermöglicht, die Fundamentalgruppe eines zusammengesetzten Raumes aus den Fundamentalgruppen seiner Bausteine zu rekonstruieren. Dazu benötigen wir ein paar Begriffe aus der Gruppentheorie.

Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie von Gruppen. Wir wollen zunächst eine Gruppe konstruieren, die alle Gruppen $G_i$ enthält, und in der keine „unnötigen“ Relationen gelten. Diese Gruppe soll das „freie Produkt“ der Gruppen $G_i$ heißen. Wir werden sehen, dass das freie Produkt das Koprodukt in der Kategorie $\mathcal{G}rp$ der Gruppen ist.

2.33. Bemerkung (Zur Erinnerung). Produkt $\prod$ und Summe $\bigoplus$ von Gruppen; Abbildungen

$$G_j \xrightarrow{\iota_j} \textstyle\bigoplus_i G_i \longrightarrow \prod_i G_i \xrightarrow{\pi_j} G_j \ .$$

In beiden Fällen kommutieren die Elemente verschiedener Gruppen, was eine zusätzliche Relation darstellt, die wir hier umgehen wollen.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Gruppen $G_i$ paarweise disjunkt sind, ansonsten müssten wir die Elemente von $G_i$ als $(i,g)$ „markieren“.

2.34. Definition. Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen. Ein *Wort* $w$ im Alphabet $\dot{\cup}_i G_i$ ist ein Tupel $g_1 \dots g_k$ der endlichen *Länge* $\ell(w) = k \geq 0$ von *Buchstaben* $g_j \in G_{i_j}$ mit $i_j \in I$. Schreibe $\emptyset$ für das leere Wort. Ein Wort heißt *gekürzt* oder *reduziert,* wenn

(1) kein Buchstabe ein neutrales Element $e_i \in G_i$ ist, und
(2) keine zwei aufeinanderfolgenden Buchstaben $g_j$, $g_{j+1}$ zur gleichen Gruppe $G_{i_j} = G_{i_{j+1}}$ gehören.

Ein Wort *kürzen* oder *reduzieren* heißt, so oft wie möglich einen der folgenden Schritte auszuführen:

(1) Weglassen eines Einselementes $e_i \in G_i$ an einer beliebigen Stelle des Wortes,

$$w' e_i w'' \mapsto w' w'' \ ,$$

(2) Ersetzen zweier aufeinanderfolgender Buchstaben $g_j$, $g_{j+1} \in G_{i_j}$ aus derselben Gruppe durch ihr Produkt,

$$w' g_j g_{j+1} w'' \mapsto w'(g_j g_{j+1}) w'' \ .$$

Zwei Wörter heißen *äquivalent,* wenn sie zum gleichen Wort reduziert werden können.

2.35. Proposition. *Jedes Wort lässt sich auf genau eine Weise reduzieren.*

Beweis. Die einzige mögliche Wahl beim Reduzieren besteht in der Reihenfolge, in der mögliche Reduktionsschritte ausgeführt werden. Falls diese Schritte an räumlich getrennten Stellen im Wort stattfinden, ist ihre Reihenfolge egal, beispielsweise sei $1 \leq i$, $i+1 < j$, $j+1 \leq k$, dann ist

$$w' \underbrace{g_i\, g_{i+1}}_{\in G_i} w'' \underbrace{g_j\, g_{j+1}}_{\in G_j} w''' \sim w'(g_i g_{i+1}) w''(g_j g_{j+1}) w'''$$

unabhängig von der Reihenfolge der Reduktionsschritte.

Nur wenn ein Element gleichzeitig auf zwei verschiedene Weisen reduziert werden kann, kann es auf die Reihenfolge ankommen. Die möglichen Buchstabenketten, bei denen das vorkommen kann, sind

$$w'\, ghk\, w'' \sim w'\, (gh)k\, w'' \sim w'\, g(hk)\, w'' \sim w'\, (ghk)\, w'' \ ,$$
$$w'\, ge\, w'' \sim w'\, (ge)\, w'' \sim w'\, g\, w'' \qquad \text{und} \qquad w'\, eg\, w'' \sim w'\, (eg)\, w'' \sim w'\, g\, w''$$

mit $g$, $h$, $k$ und $e = e_i \in G_i$ für ein $i \in I$. Hier sorgen die Rechenregeln für Gruppen dafür, dass es nicht auf die Reihenfolge der Reduktion ankommt. □

2.36. Definition. Sei $(G_i)_{i \in I}$ eine Familie von Gruppen. Das *freie Produkt* $*_i G_i = \coprod_i G_i$ der $G_i$ ist die Menge aller reduzierten Wörter, die Multiplikation ist Hintereinanderschreiben und anschließende Reduktion. Definiere Abbildungen $\iota_j \colon G_j \to \coprod_i G_i$ mit

$$\iota_j(g) = \begin{cases} \emptyset & g = e_j \ , \\ g & g \in G_j \setminus \{e_j\} \ . \end{cases}$$

2.37. Proposition. *Das freie Produkt ist eine Gruppe, und die Abbildungen $\iota_j$ sind Homomorphismen.*

Beweis. Da es laut Beweis des Satzes 2.35 nicht auf die Reihenfolge der Reduktionsschritte ankommt, erhalten wir das Produkt dreier Wörter durch Hintereinanderschreiben aller drei Wörter und anschließendes Kürzen; hieraus folgt Assoziativität der Multiplikation.

Das leere Wort ist offensichtlich neutrales Element, und für jedes Wort gilt

$$(g_1 \dots g_k)^{-1} = g_k^{-1} \dots g_1^{-1} \ .$$

Für alle $i \in I$ und alle $g \in G_i$ ist $\iota_i(g)$ gekürzt, und offensichtlich ist $\iota_i$ ein Homomorphismus. □

2.38. Beispiel. (1) Freie Gruppen in einem Buchstaben $\mathbb{Z}$.

(2) Freie Gruppen $F_k = \coprod_{i=1}^k \mathbb{Z}$.

(3) Unendliche Diedergruppe $D_\infty \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ (Isometriegruppe des metrischen Raumes $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$), die nichttrivialen Elemente der beiden Kopien von $\mathbb{Z}_2$ sind zwei benachbarte Spiegelungen, etwa an den Punkten 0 und 1/2.

2.39. Satz. *Das Produkt von Gruppen ist ein Produkt auf der Kategorie der Gruppen. Das freie Produkt von Gruppen ist ein Koprodukt auf der Kategorie der Gruppen.*

Beweis. Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen. Wie in Übung 1.112 ist ihr Produkt

$$\prod_{i\in I} G_i = \{(g_i)_{i\in I} \mid g_i \in G_i \text{ für alle } i \in I\} ,$$

zusammen mit den Projektionen

$$p_j \colon \prod_{i\in I} G_i \to G_j , \qquad p_j((g_i)_{i\in I}) = g_j .$$

Elemente des Produktes werden komponentenweise verknüpft, das neutrale Element ist $(e_i)_{i\in I}$ mit $e_i \in G_i$ neutral, das Inverse von $(g_i)_{i\in I}$ ist $(g_i^{-1})_{i\in I}$. Die Projektionen $p_j$ sind Gruppenhomomorphismen.

Sei $H$ eine weitere Gruppe, und seien $f_i \colon H \to G_i$ Gruppenhomomorphismen. Zu zeigen ist nach Bemerkung 1.47 die universelle Eigenschaft des Produktes, wonach es genau einen Homomorphismus $f \colon H \to G$ mit $f_i = p_i \circ f$ für alle $i \in I$ gibt. Man sieht leicht, dass dann gerade

$$f(h) = (f_i(h))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i$$

folgt, und dass $f$ tatsächlich ein Homomorphismus ist.

Nach Bemerkung 1.41 besagt die universelle Eigenschaft des Koproduktes, dass es zu jeder Gruppe $H$ und Homomorphismen $f_i \colon G_i \to H$ genau einen Homomorphismus $f \colon *_{i\in I} G_i \to H$ mit $f_i = f \circ \iota_i$ für alle $i \in I$ gibt. Da das freie Produkt von den einbuchstabigen Wörtern erzeugt wird, folgt

$$f(g_1 \cdots g_k) = f_{i_1}(g_1) \cdots f_{i_k}(g_k) \in H ,$$

wobei $g_j \in G_{i_j}$ wie oben. Offensichtlich ist Kürzen mit $f$ verträglich, da alle $f_i$ Homomorphismen sind. Also ist $f$ ebenfalls Homomorphismus. □

Im Satz von Seifert-van Kampen benötigen wir einen Quotienten des freien Produkts. Da man Quotienten von Gruppen nur nach Normalteilern bilden kann, erinnern wir uns an die Definition von Normalteilern.

Ein *Normalteiler* $N$ einer Gruppe $G$ ist eine Untergruppe mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass $gng^{-1} \in N$ für alle $g \in G$ und alle $n \in N$. Kerne von Gruppenhomomorphismen $F \colon G \to H$ haben diese Eigenschaft, denn sei $g \in G$, $k \in \ker F$, dann folgt

$$F(gkg^{-1}) = F(g) \cdot \underbrace{F(k)}_{=e} \cdot F(g)^{-1} = e \in H ,$$

also $gkg^{-1} \in \ker F$.

Sei umgekehrt $N$ ein Normalteiler, dann definieren wir eine Gruppenstruktur auf dem Quotienten

$$G/N = \{gN \mid g \in G\} \qquad \text{mit} \qquad gN = \{gn \mid n \in N\}$$

durch

$$(gN) \cdot (hN) = g(hNh^{-1}) \cdot (hN) = gh \cdot N \cdot N = (gh)N .$$

Die Normalteiler-Eigenschaft garantiert uns, dass dieses Produkt wohldefiniert ist. Die natürliche Abbildung $G \to G/N$ mit $g \mapsto gN$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern $N$.

2.40. Definition. Es sei $G$ eine Gruppe und $M \subset G$ eine Teilmenge. Dann ist der von $M$ erzeugte Normalteiler $(M)$ von $G$ der kleinste Normalteiler $N \subset G$, so dass $M \subset N$.

Man kann sich überzeugen, dass Durchschnitte von Normalteilern wieder Normalteiler sind, so dass der Begriff des kleinsten Normalteilers in der obigen Definition sinnvoll ist. Alternativ dazu geben wir $(M)$ explizit an.

2.41. Bemerkung. Es gilt

$$(M) = \left\{ g_1 m_1^{\pm 1} g_1^{-1} \cdots g_k m_k^{\pm 1} g_k^{-1} \;\middle|\; k \geq 0, g_1, \ldots, g_k \in G \text{ und } m_1, \ldots, m_k \in M \right\} . \qquad (*)$$

Man überzeugt sich leicht, dass die rechte Seite eine Untergruppe von $M$ beschreibt, und sogar einen Normalteiler, da

$$g\big(g_1 m_1^{\pm 1} g_1^{-1} \cdots g_k m_k^{\pm 1} g_k^{-1}\big) g^{-1} = (gg_1) m_1^{\pm 1} (gg_1^{-1}) \cdots (gg_k) m_k^{\pm 1} (gg_k)^{-1} .$$

Umgekehrt enthält jeder Normalteiler, der $M$ enthält, auch alle Produkte von Elementen der Form $gm^{\pm 1}g^{-1}$, also ist die rechte Seite von (*) tatsächlich der kleinste Normalteiler, der $M$ enthält.

Wir formulieren und beweisen jetzt den weiter oben angekündigten Satz.

2.42. Satz (Seifert-van Kampen). *Sei $(X, x)$ ein punktierter Raum, und sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ eine offene Überdeckung von $X$, so dass*

(1) *jede Menge $U \in \mathcal{U}$ den Basispunkt $x$ enthält, und*
(2) *jeder Durchschnitt $U \cap V$ für $U$, $V \in \mathcal{U}$ wegzusammenhängend ist.*

*Dann ist die von den Homomorphismen $\iota_{U*} \colon \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ induzierte natürliche Abbildung*

$$\varphi \colon \coprod_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$$

*surjektiv. Falls darüberhinaus*

(3) *jeder Durchschnitt $U \cap V \cap W$ für $U$, $V$, $W \in \mathcal{U}$ wegzusammenhängend ist,*

*dann wird der Kern der Abbildung $\varphi$ gegeben durch*

$$\ker \varphi = \left( \left\{ (\iota_{U \cap V \to U})_*[\gamma] \cdot (\iota_{U \cap V \to V})_*[\gamma]^{-1} \;\middle|\; U, V \in \mathcal{U} \text{ und } [\gamma] \in \pi_1(U \cap V, x) \right\} \right) . \qquad (*)$$

Hier bezeichnen $\iota_U \colon U \to X$ und $\iota_{U \cap V \to U} \colon U \cap V \to U$ die Inklusionsabbildungen.

Beweis. Wir schreiben wieder $\alpha\beta$ für die Verkettung beliebiger Wege mit passenden Anfangs- und Endpunkten wie im Beweis von Satz 2.15.

Um zu zeigen, dass die Abbildung $\varphi$ surjektiv ist, betrachten wir eine Schleife $\gamma \colon [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Da $(\gamma^{-1}(U))_{U \in \mathcal{U}}$ eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $[0, 1]$ ist, existiert nach dem Satz 1.55 von Lebesgue ein $n > 0$, so dass jeder Weg

$$\gamma_i(t) = \left( \gamma|_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]} \right) \left( \frac{t + i - 1}{n} \right)$$

für $1 \leq i \leq n$ ganz in einer der Mengen $U_i \in \mathcal{U}$ verläuft. Nach (1) und (2) gibt es Wege $\alpha_i$ von $x$ nach $\gamma(\frac{i}{n}) = \gamma_i(1) = \gamma_{i+1}(0)$ in $U_i \cap U_{i+1}$. Also schreiben wir $\gamma$ als Verkettung

$$\gamma \sim \underbrace{\gamma_1 \alpha_1^{-1}}_{\in \operatorname{im} \iota_{U_1 *}} \underbrace{\alpha_1 \gamma_2 \alpha_2^{-1}}_{\in \operatorname{im} \iota_{U_2 *}} \cdots \underbrace{\alpha_{n-1} \gamma_n}_{\in \operatorname{im} \iota_{U_n *}} \in \operatorname{im} \varphi ,$$

und es folgt Surjektivität.

Wir bezeichnen die rechte Seite von (*) mit $N \subset \coprod_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U, x)$. Sei $\gamma \in \pi_1(U \cap V, x)$, dann ist offensichtlich

$$[e] = [\gamma][\overline{\gamma}] = \underbrace{(\iota_{U \cap V \to U})_*[\gamma]}_{\in \operatorname{im} \iota_{U*}} \cdot \underbrace{(\iota_{U \cap V \to V})_*[\gamma]^{-1}}_{\in \operatorname{im} \iota_{V*}} \in \pi_1(X, x) ,$$

woraus sich $N \subset \ker \varphi$ ergibt.

Sei umgekehrt $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$ für Schleifen $\gamma_i$ in $U_i \in \mathcal{U}$, dargestellt durch das entsprechende Wort $w \in \ker \varphi$. Dann existiert eine Homotopie $H \colon [0, 1] \times [0, 1] \to X$ von der trivialen Schleife zu $\gamma$. Nach dem Satz von Lebesgue können wir das kompakte Einheitsquadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ so in Waben zerlegen, dass jede Wabe $W_i \subset [0, 1] \times [0, 1]$ von $H$ ganz in eine der Mengen $U_i \in \mathcal{U}$

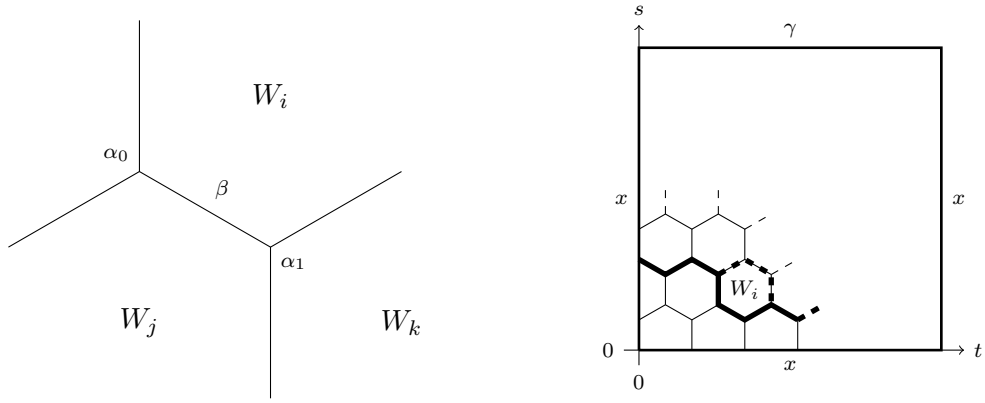



Abbildung 2.3. Zerlegung des Einheitsquadrats in Waben

abgebildet wird. Nach (3) finden wir zu jedem Eckpunkt $(t, s)$ einen Weg $\alpha$ von $x$ nach $H(t, s)$, der ganz im Durchschnitt der (maximal drei) offenen Mengen $U_i, U_j, U_k \in \mathcal{U}$ zu den angrenzenden Waben $W_i, W_j, W_k$ verläuft. Wir können jetzt jede Kante zwischen zwei Waben wie oben durch eine Schleife $\alpha_0\beta\alpha_1^{-1}$ beschreiben, die ganz im Durchschnitt der $U_i, U_j \in \mathcal{U}$ zu den angrenzenden Waben $W_i, W_j$ verläuft.

Wir zerlegen die Homotopie $H$ in eine Folge einzelner Homotopien $H_i$ relativ zu $x$, die jeweils eine Wabe $W_i$ überstreichen, siehe Abbildung 2.3. Zu Beginn der Homotopie wird der betrachtete Pfad beschrieben durch ein Wort aus Buchstaben der Form

$$\cdots \iota_{(U_i \cap U_j \to U_j)*} \underbrace{[\alpha_0\beta\overline{\alpha}_1]}_{\sigma \text{ in } U_i \cap U_j} \cdots \in \prod_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U, x) \ ,$$

dabei gehört $U_j$ hier stets zu einer Wabe $W_j$ „unterhalb“ des Pfades zu Beginn der Homotopie $H_i$. Fall die Kante $\beta$ an die Wabe $W_i$ angrenzt, müssen wir als erstes diesen Buchstaben durch einen Buchstaben in $\pi_1(U_i, x)$ ersetzen. Dazu beachten wir, dass

$$w'\iota_{(U_i \cap U_j \to U_i)*}[\sigma]w'' = \Big(w'\iota_{(U_i \cap U_j \to U_i)*}[\sigma]\iota_{(U_i \cap U_j \to U_j)*}[\sigma]^{-1}w'^{-1}\Big)\Big(w'\iota_{(U_i \cap U_j \to U_j)*}[\sigma]w''\Big) \ .$$

Dieses Ersetzen entspricht also gerade der Multiplikation von links mit einem Element von $N$, vergleiche Bemerkung 2.41.

Wenn wir alle Buchstaben, die zu Kanten der Wabe $W_i$ gehören, durch Buchstaben in $\pi_1(U_i, x)$ ersetzt haben, können wir die Homotopie $H_i$ durchführen. Dabei wird ein Produkt von Schleifen in $U_i$ durch ein in $U_i$ homotopes Produkt ersetzt. Nach Kürzen verändert sich das zugehörige Wort im freien Produkt der $\pi_1(U, x)$ also gar nicht.

Nach endlich vielen Schritten erreichen wir den ursprünglichen Weg $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$, wobei $\gamma$ aber möglicherweise durch ein anderes Wort repräsentiert wird, falls ein oder mehrere $\gamma_i$ als Schleifen in anderen Umgebungen geschrieben wurden. Nochmaliges Multiplizieren mit Elementen von $N$ behebt dieses Problem.

Da wir mit der trivialen Schleife, dargestellt durch das leere Wort, begonnen haben, haben wir also $w \in \ker\varphi$ insgesamt als Produkt von Elementen von $N$ geschrieben, also folgt $\ker\varphi \subset N$ und daher $\ker\varphi = N$. □

2.43. Beispiel. Die Ziffer „8“ lässt sich als Vereinigung zweier Kreise schreiben. Sei „8“ $= U \cup V$, wobei $U$ und $V$ kleine offene Umgebungen der beiden Kreise seien, so dass die Kreise Deformations-Retrakte von $U$ und $V$ sind. Wähle $x_0$ als Schnittpunkt der beiden Kreise, dann liefert Seifert-van Kampen, dass $\pi_1(\text{„8“}, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

2.44. Beispiel. Ohne die erste Voraussetzung (1) läßt sich der Satz von Seifert-van Kampen nicht formulieren. Es folgen zwei Beispiele, die zeigen, dass die anderen beiden Voraussetzungen ebenfalls nötig sind.

(1) Betrachte $X = S^1 \subset \mathbb{C}$ als Vereinigung zweier zusammenziehbarer Mengen $U_\pm = S^1 \setminus \{\pm i\}$. Beide Mengen haben triviale Fundamentalgruppe, also ist auch $\pi_1(U_+, 1) * \pi_1(U_-, 1)$ trivial. Auf der anderen Seite ist $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$ nichttrivial, insbesondere ist die natürliche Abbildung $\pi_1(U_+, 1) * \pi_1(U_-, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$ nicht surjektiv. Das liegt daran, dass $U^+ \cap U^- = S^1 \setminus \{i, -i\}$ nicht zusammenhängend ist, also Voraussetzung (2) verletzt ist.

(2) Betrachte $Y = S^1 \cup [-1, 1] \subset \mathbb{C}$, und setze $U_x = Y \setminus \{x\}$ für $x \in \{-i, 0, i\}$. Dann sind die drei Mengen $U_x$ jeweils homotopieäquivalent zu einem Kreis, haben also Fundamentalgruppe $\mathbb{Z}$. Der Durchschnitt je zweier dieser drei Mengen ist zusammenziehbar, also gilt $N = \{e\}$ und

$$\pi_1(Y, 1) = \big(\pi_1(U_i, 1) * \pi_1(U_{-i}, 1)\big)/N = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \ ,$$

denn Voraussetzung (3) folgt aus Voraussetzung (2), solange wir nur zwei offene Mengen betrachten.

Andererseits gilt

$$\big(\pi_1(U_i, 1) * \pi_1(U_0, 1) * \pi_1(U_{-i}, 1)\big)/N = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \ ,$$

und $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, etwa haben beide Gruppen unterschiedliche Abelisierungen. Da $U_i \cap U_0 \cap U_{-i}$ nicht wegzusammenhängend ist, ist Voraussetzung (3) für die Überdeckung $\{U_i, U_0, U_{-i}\}$ verletzt.

2.45. Bemerkung. Der Spezialfall $X = U \cup V$ im Satz 2.42 von Seifert-van Kampen ist besonders wichtig und etwas einfacher zu formulieren als der allgemeine Fall. Da der Beweis aber nicht einfacher wird, haben wir gleich den allgemeinen Fall betrachtet.

(1) Seien $G, H, K$ Gruppen und $a\colon K \to G$, $b\colon K \to H$ Gruppenhomomorphismen, so definiert man das *amalgamierte Produkt* von $G$ und $H$ über $K$ durch

$$G *_K H = G * H \ / \ \big(\{\, a(k)b(k)^{-1} \mid k \in K \,\}\big) \ .$$

Das amalgamierte Produkt erfüllt die universelle Eigenschaft eines Pushouts in der Kategorie $\mathcal{G}rp$, vergleiche Folgerung 1.75.

$$\begin{tikzcd}
 & & L \\
G \arrow[r, "i"] \arrow[urr, bend left, "g"] & G *_K H \arrow[ur, dashed, "f"] & \\
K \arrow[u, "a"] \arrow[r, "b"] & H \arrow[u, "j"] \arrow[uur, bend right, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Seien dazu $i\colon G \to G *_K H$ und $j\colon H \to G *_K H$ die natürlichen Homomorphismen, sei $L$ eine Gruppe und seien $g\colon G \to L$, $h\colon H \to L$ Homomorphismen mit $g \circ a = h \circ b\colon K \to L$, dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus

$$f\colon G *_K H \to L \text{ mit } g = f \circ i \text{ und } h = f \circ j \ .$$

(2) Sei $X = U \cup V$ topologischer Raum mit $U$, $V$ offen. Dann trägt $X$ die Quotiententopologie zur natürlichen Abbildung $U \sqcup V \twoheadrightarrow X$. Also ist $X$ ebenfalls ein Pushout nach Folgerung 1.75. Dazu fasst man $U \cap V$ als Teilmenge von $V$ auf und betrachtet die Inklusion $f\colon U \cap V \hookrightarrow U$ (oder umgekehrt). Wenn wir einen Basispunkt $x \in U \cap V$ festlegen, erhalten wir analog einen Pushout $X = U \cup_{U \cap V} V$ in der Kategorie $\mathcal{T}op_+$.

(3) Der Satz von Seifert-van Kampen besagt, dass der Funktor $\pi_1$ den Pushout in $\mathcal{T}op_+$ auf den Pushout in $\mathcal{G}rp$ abbildet, falls $U \cap V$ wegzusammenhängend ist. Denn, wie schon gesagt, reichen Voraussetzung (1) und (2) aus, solange man Überdeckungen aus zwei Mengen betrachtet.

(4) Man beachte: Ein beliebiger Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ muss den Pushout in $\mathcal{C}$ nicht auf den in $\mathcal{D}$ abbilden, falls beide Pushouts existieren. Das zeigt bereits Beispiel 2.44 (1). Im allgemeinen erhält man nur einen Morphismus vom Pushout der Bilder unter $\mathcal{F}$ in das Bild des Pushouts unter $\mathcal{F}$, siehe Übung 2.87.

2.46. Beispiel. Die Sphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist offensichtlich wegzusammenhängend für $n \geq 2$. Wir betrachten $S^n = U_+ \cup U_- \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $U_\pm = S^n \setminus \{(0, \ldots, 0, \mp 1)\}$ wie in Beispiel 1.78 (2). Die stereographische Projektion liefert Homöomorphismen $U_+ \cong \mathbb{R}^n \cong U_-$, also sind $U_\pm$ zusammenziehbar. Schließlich ist $S^{n-1}$ ein Deformationsretrakt von $U_+ \cap U_-$. Mit $x = (1, 0, \ldots, 0)$ erhalten wir für $n \geq 2$, dass

$$\pi_1(S^n, x) = \pi_1(U_+, x) *_{\pi_1(U_+ \cap U_-, x)} \pi_1(U_-, x) = \{e\} *_{\pi_1(S^{n-1}, x)} \{e\} = \{e\} \ ,$$

also sind Sphären einfach zusammenhängend ab Dimension 2.

Man ist versucht, das obige Beispiel so zu begründen, dass man jede Schleife in $S^n$ für $n \geq 2$ von einem Punkt $y \in S^n$, der nicht getroffen wird, zum Basispunkt $x$ „wegdrückt“. Beispiel 1.22 zeigt aber, dass man Schleifen konstruieren kann, die jeden Punkt in $S^n$ treffen. Also braucht man ein komplizierteres Argument.

2.47. Beispiel. Zur Vorbereitung auf die Übungsaufgabe 2.83 zu den Borromäischen Ringen geben wir drei weitere Beispiele. Dabei betrachten wir die Fundamentalgruppen von Komplementen eines oder mehrerer Kreise im $\mathbb{R}^3$.

(1) Betrachte $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. Wir addieren einen Punkt im Unendlichen, indem wir $U = \mathbb{R}^3 \setminus S^1$ via stereographischer Projektion in $S^3 \setminus S^1$ einbetten, hierbei wird $S^1$ zu einem Großkreis, und der fehlende Punkt in $S^3$ sei $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. Es sei $V$ die obere Halbkugel, dann ist $S^2$ ein Deformationsretrakt von $U \cap V$. Also gilt nach Satz 2.42 mit $x = U \cap V$, dass

$$\pi_1(S^3 \setminus S^1, x) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1, x) *_{\pi_1(S^2, x)} \pi_1(V, x) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1, x) \ .$$

Jetzt bilden wir $S^3 \setminus S^1$ durch stereographische Projektion an einem Punkt der $S^1$ nach $\mathbb{R}^3$ ab und erhalten einen Homöomorphismus $S^3 \setminus S^1 \cong \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0, 0)\} \times \mathbb{R})$. Aber $S^1$ ist ein Deformationsretrakt davon, so dass schließlich

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1) \cong \pi_1(S^3 \setminus S^1) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \ .$$

(2) Wir betrachten jetzt das Komplement zweier „unverlinkter“ Kreise im Raum, genauer $Y = \mathbb{R}^3 \setminus (S^1 \times \{-1, 1\})$. Mit Beispiel (1) und Seifert-van Kampen folgt

$$\begin{aligned} \pi_1(Y) &\cong \pi_1((\mathbb{R}^2 \times (-\infty, 1)) \setminus (S^1 \times \{-1\})) *_{\pi_1(\mathbb{R}^2 \times (-1,1))} \pi_1((\mathbb{R}^2 \times (-1, \infty)) \setminus (S^1 \times \{1\})) \\ &\cong \mathbb{Z} *_{\{e\}} \mathbb{Z} \cong F_2 \ . \end{aligned}$$

(3) Wir betrachten im Gegensatz dazu das Komplement zweier „einfach verlinkter“ Kreise im $\mathbb{R}^3$, nämlich

$$Z = \mathbb{R}^3 \setminus (\{(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \mid \varphi \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, \cos\psi + 1, \sin\psi)\varphi \in \mathbb{R}\}) \ .$$

Wie in (1) fügen wir einen Punkt im Unendlichen hinzu, dann hat $Z$ die gleiche Fundamentalgruppe wie

$$S^3 \setminus (\{(\cos\varphi, \sin\varphi, 0, 0) \mid \varphi \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 0, \cos\psi, \sin\psi) \mid \psi \in \mathbb{R}\}) \ .$$

Ein Deformationsretrakt hiervon ist der Clifford-Torus

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\varphi, \sin\varphi, \cos\psi, \sin\psi) \;\middle|\; \varphi, \psi \in \mathbb{R} \right\} \cong S^1 \times S^1 \ ,$$

so dass

$$\pi_1(Z) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ncong \pi_1(Y) \ .$$

Also kann die Fundamentalgruppe des Komplementes erkennen, ob man einen oder zwei Kreise entfernt hat, und ob diese „verlinkt“ waren oder nicht. Auch für Knoten im $\mathbb{R}^3$ ist die Fundamentalgruppe des Komplementes eine sehr mächtige Invariante. Allerdings kann man zwei auf verschiedene Weisen definierten Gruppen nicht immer ohne weiteres ansehen, ob sie isomorph sind oder nicht.

Wir haben schon in der Übung 2.76 gesehen, dass die Fundamentalgruppe eines endlichen Produktes punktierter Räume gleich dem Produkt ihrer Fundamentalgruppen ist. Etwas ähnliches wird für Koprodukte punktierter topologischer Räume gelten.

2.48. Definition. Das *Bouquet* oder *Wedge-Produkt* einer Familie $(X_i, x_i)_{i\in I}$ punktierter topologischer Räume ist der punktierte Raum

$$\bigvee_{i\in I}(X_i, x_i) = \left( \coprod_{i\in I} X_i / \sim, x_0 \right)$$

mit der Quotiententopologie, wobei die Äquivalenzrelation „$\sim$“ erzeugt wird durch $x_i \sim x_j$ für alle Paare $i$, $j \in I$, und $x_0 = [x_i]$ für alle $i \in I$. Sei $\iota_i \colon (X_i, x_i) \to \left(\bigvee_{i\in I}(X_i, x_i), x_0\right)$ die natürliche Inklusion.

2.49. Bemerkung. Das Wedge-Produkt erfüllt die universelle Eigenschaft eines Koproduktes in der Kategorie $\mathcal{T}op_+$. Dazu sei $(Y, y)$ ein weiterer punktierter Raum und seien $f_i \colon (X_i, x_i) \to (Y, y)$ punktierte Abbildungen, dann existiert zunächst einmal genau eine stetige Abbildung $\bar{f} \colon \coprod_{i\in I} X_i \to Y$ mit $f_i = \bar{f} \colon \bar{\iota}_i$, wobei $\bar{\iota}_i$ hier die Inklusion von $X_i$ in die disjunkte Vereinigung bezeichne.

Sei $q \colon \coprod_{i\in I} X_i \to \bigvee_{i\in I}(X_i, x_i)$ die Abbildung auf den Quotienten. Die Abbildung $\bar{f}$ bildet alle Basispunkte $x_i$ auf $y$ ab, also ist die induzierte Abbildung $f \colon \bigvee_{i\in I}(X_i, x_i) \to (Y, y)$ wohldefiniert, nach Satz 1.72 stetig, und wegen der Eindeutigkeit von $\bar{f} = f \circ q$ auch eindeutig.

2.50. Folgerung. *Sei $(X_i, x_i)_{i\in I}$ eine Familie gut punktierter topologischer Räume, das heißt, dass jeder Punkt $x_i$ eine zusammenziehbare offene Umgebung $U_i \subset X_i$ besitzt. Dann gilt*

$$\pi_1\left( \bigvee_{i\in I}(X_i, x_i), x_0 \right) = \coprod_{i\in I} \pi_1(X_i, x_i) \ .$$

Also bildet der Funktor $\pi_1$ unter entsprechenden Voraussetzungen auch Koprodukte in $\mathcal{T}op_+$ auf Koprodukte in $\mathcal{G}rp$ ab. In Abschnitt 3.f werden wir „gut punktiert“ etwas anders definieren; die Folgerung bleibt aber gültig.

Beweis. Wir schreiben $\bigvee_{i\in I}(X_i, x_i) = \bigcup_{i\in I} V_i$ mit

$$V_j = (X_j, x_j) \vee \bigvee_{i\in I\setminus\{j\}} (U_i, x_i) \ .$$

Da die $U_i$ zusammenziehbar sind, ist $X_j$ Deformationsretrakt von $V_j$. Außerdem ist

$$V_j \cap V_k = \bigvee_{i\in I}(U_i, x_i) = V_j \cap V_k \cap V_\ell$$

zusammenziehbar, falls mindestens zwei der Indizes $j$, $k$, $\ell \in I$ verschieden sind. Aus dem Satz 2.42 von Seifert-van Kampen folgt die Behauptung. $\square$

## 2.e. Die Fundamentalgruppe eines CW-Komplexes

Wir berechnen die Fundamentalgruppen von $CW$-Komplexen mit Hilfe des Satzes von Seifert-van Kampen. Es wird sich zeigen, dass jede Schleife zu einer Schleife im 1-Gerüst homotop ist, und dass man bereits am 2-Gerüst alle möglichen Homotopien erkennen kann. Insgesamt gilt also $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X^2, x_0)$ für wegzusammenhängende $CW$-Komplexe mit $x_0 \in X$, wobei $X^1$ die Erzeuger und $X^2$ die Relationen in einer Präsentation von $\pi_1(X, x_0)$ liefert. Umgekehrt taucht jede Gruppe als Fundamentalgruppe eines $CW$-Komplexes auf.

2.51. Bemerkung. Sei $M$ eine Familie von *Erzeugern* von $G$, und sei $R \subset *_{m \in M}\mathbb{Z}$ eine Menge von *Relationen* in der von den Elementen von $M$ erzeugten freien Gruppe $F$. Dann sei $N = (R)$ der von den Relationen erzeugte Normalteiler von $F$. Wir schreiben

$$G = F/N = \langle\, M \mid R \,\rangle\ ,$$

diese Darstellung heißt auch eine *Präsentation* der Gruppe $G$. Jede Gruppe besitzt eine Präsentation. Zum Beispiel könnten wir $M = G$ setzen, dann ist $F$ die Menge aller Wörter in $M$ (wobei wir die Gruppenstruktur von $G$ vergessen haben). Dann wählen wir $R = \ker(F \to G)$, wobei wir jedes Wort in $F$ auf das entsprechende Produkt in $G$ abbilden.

Zur Erinnerung: Ein $CW$-Komplex $X$ ist die Vereinigung seiner $n$-Gerüste $X^n$, versehen mit der schwachen Topologie. Dabei ist $X^0$ diskret, und man konstruiert induktiv

$$X^n = X^{n-1} \cup \bigcup_{i \in I^n} e_i^n = X^{n-1} \cup_{\phi^n} \coprod_{i \in I^n} D^n\ .$$

Unter einem *maximalen Baum* in einem wegzusammenhängenden $CW$-Komplex verstehen wir einen zusammenziehbaren Unterkomplex $Y \subset X^1$ mit $X^0 \subset Y$. Wir werden im Laufe des Beweises des folgenden Satzes verstehen, dass ein maximaler Baum gleichzeitig ein maximaler zusammenziehbarer Unterkomplex von $X^1$ ist.

2.52. Satz. *Sei $X$ ein wegzusammenhängender CW-Komplex und $x_0 \in X^0$.*

(1) *Dann existiert $J \subset I^1$, so dass*

$$Y = X^0 \cup \bigcup_{j \in J} e_j^1$$

*ein maximaler Baum in $X$ ist.*

(2) *Für $J$ wie in (1) gilt*

$$\pi_1(X^1, x_0) \cong \coprod_{i \in I \setminus J} \mathbb{Z}\ .$$

(3) *Es sei $[\sigma] \in \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ ein Erzeuger, dann gilt*

$$\pi_1(X^2, x_0) \cong \pi_1(X^1, x_0)/(\{\varphi_{i*}^2[\sigma] \mid i \in I^2\})\ .$$

(4) *Es gilt*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X^2, x_0) \cong \big\langle\, \{\, [\sigma_i] \mid i \in I^1 \setminus J \,\} \;\big|\; \{\, \varphi_{i*}^2[\sigma] \mid i \in I^2 \,\} \,\big\rangle\ .$$

Dieser Satz ist zwar nicht einfach zu formulieren, und auch der Beweis ist kompliziert, da der Satz von Seifert-van Kampen mit offenen Teilmengen arbeitet, während die natürlicherweise auftretenden Unterkomplexe im Beweis abgeschlossen sind — ein Großteil des Beweises besteht darin, dieses Problem zu umgehen. Dafür läßt sich die Berechnung der Fundamentalgruppe eines gegebenen CW-Komplexes mit Hilfe dieses Satzes auf rein algebraische Rechnungen mit Erzeugern und Relationen zurückführen. Das werden wir in Folgerung 2.53 und Beispiel 2.54 ausnutzen.

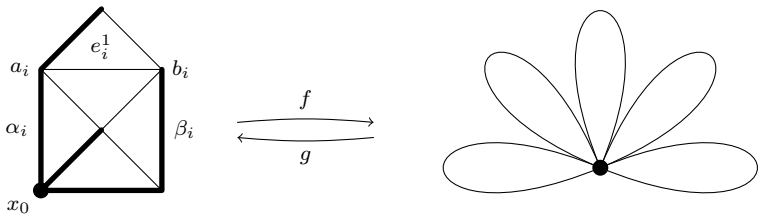



Abbildung 2.4. Ziehe einen maximalen Baum zusammen

Beweis. Zu (1) definieren wir eine Metrik $d$ auf $X^0$ so, dass $d(x,y)$ die Anzahl der Kanten $e_i^1 \subset X^1$ angibt, die ein Weg von $x$ nach $y$ in $X^1$ mindestens durchlaufen muss. Die Axiome einer Metrik lassen sich leicht überprüfen. Da $X$ wegzusammenhängend ist, ist nach Folgerung 1.94 auch $X^1$ wegzusammenhängend, so dass es stets Wege $\gamma\colon [0,1] \to X^1$ von $x$ nach $y$ gibt. Aus der Kompaktheit von $[0,1]$ folgt mit Bemerkung 1.51 (2) und Satz 1.86, dass $d(x,y) < \infty$ für alle $x, y \in X^1$.

Wir konstruieren $Y = \bigcup_{k=0}^{\infty} Y_k$ induktiv. Dazu sei $Y_0 = \{x_0\}$. Gegeben $Y_{k-1}$ für $k \geq 1$, so dass

$$Y_{k-1}^0 = Y_{k-1} \cap X^0 = \{x \in X^0 \mid d(x, x_0) \leq k-1\}$$

und $J_{k-1}$ mit

$$Y_{k-1} = Y_{k-1}^0 \cup \bigcup_{j \in J_{k-1}} e_j^1 \ ,$$

finden wir von jedem $x \in X^0$ mit $d(x,x_0) = k$ mindestens eine Kante $e_{i_x}^1$, die $x$ mit einem Punkt $x' \in Y_{k-1}^0$ mit $d(x', x_0) = k-1$ verbindet. Wir nehmen für jeden solchen Punkt genau eine entsprechende Kante zu $Y_{k-1}$ hinzu und erhalten $Y_k$. Man beachte, dass es von jedem Punkt $x \in Y_k^0$ dann induktiv genau einen kürzesten Weg von $x$ nach $x_0$ gibt, der über $k$ Kanten führt.

Um zu zeigen, dass $\{x_0\}$ Deformationsretrakt von $Y$ und $Y$ somit zusammenziehbar ist, konstruieren wir zunächst Abbildungen $H_k\colon Y_k \times [0,1] \to Y_k$ relativ zu $Y_{k-1} \times [0,1]$, so dass $H_k(y,0) = y$ und $H_k(y,1) \in Y_{k-1}$ für alle $y \in Y$. Dazu ziehen wir gleichzeitig alle Kanten $\overline{e}_{i_x}^1$ von $x \in Y_k^0 / Y_{k-1}^0$ nach $x' \in Y_{k-1}^0$ auf ihren Endpunkt $x'$ zusammen. Anschließend setzen wir alle $H_k$ wie im Beweis von Satz 1.93 zu einer Abbildung $H\colon Y \times [0,1] \to Y$ zusammen mit

$$H(y,s) = \begin{cases} y & \text{für } 0 \leq s \leq 2^{-k} \ , \text{ und} \\ H_{k'}((r_{k'+1} \circ \cdots \circ r_k)(y), 2^{-k'}s - 1) & \text{für } 2^{-k'} \leq s \leq 2^{1-k'} \end{cases}$$

für alle $y \in Y_k \setminus Y_{k-1}$, $k \geq 0$, wobei $r_k = H(\cdot, 1)\colon Y_k \to Y_{k-1}$ die oben konstruierten Retraktionen seien. Damit haben wir gezeigt, dass $Y$ zusammenziehbar ist mit $X^0 \subset Y$, also in unserem Sinne ein maximaler Baum. Außerdem würde das Hinzunehmen jeder weiteren Kante zu $Y$ einen Unterkomplex von $X^1$ mit nichttrivialer Fundamentalgruppe liefern, so dass $Y$ tatsächlich ein maximaler zusammenziehbarer Unterkomplex ist.

Zu (2) reicht es nach Folgerung 2.50 zu zeigen, dass $X^1$ zu einem Bouquet von Kreisen homotopieäquivalent ist. Dazu definieren wir eine Abbildung

$$f\colon (X^1, x_0) \longrightarrow \bigvee_{i \in I^1 \setminus J} (S^1, 1) \ ,$$

die ganz $Y$ auf den Basispunkt und jede Kante $e_i^1$ mit $i \notin J$ homöomorph auf den entsprechenden Kreis $S^1 \setminus \{1\}$ rechts abbildet. Umgekehrt definieren wir

$$g\colon \bigvee_{i \in I^1 \setminus J} (S^1, 1) \longrightarrow (X^1, x_0)$$

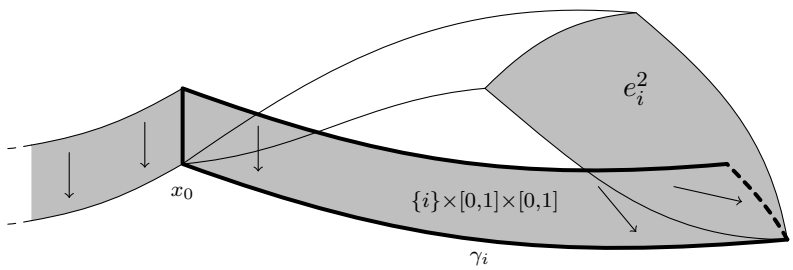



Abbildung 2.5. Der Raum $\overline{X}^n$

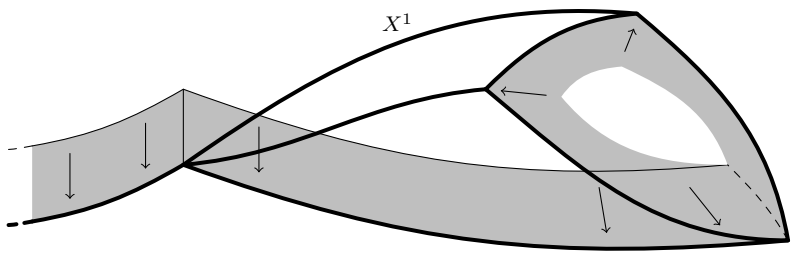



Abbildung 2.6. Die Umgebung $U_0$ von $X^{n-1}$

so, dass jeder Kreis auf eine Schleife $\alpha_i e_i^1 \overline{\beta}_i$ abgebildet wird; dabei seien $\alpha_i$, $\beta_i$ die kürzesten Wege von $x_0$ zu den Endpunkten $a_i$, $b_i$ von $e_i^1$, siehe Abbildung 2.4.

Die Abbildung $g \circ f\colon (X^1, x_0) \to (X^1, x_0)$ bildet ganz $Y$ auf $x_0$ und jede Kante $\overline{e}_i^1$ auf die Schleife $\alpha_i e_i^1 \overline{\beta}_i$ ab. Wir können die obige Homotopie $H$ zu einer Homotopie zwischen $\mathrm{id}_{X^1}$ und $g \circ f$ ausdehnen, indem wir $e_i^1 \times \{s\}$ auf einen Weg von $H(a_i, s)$ über $e_i^1$ nach $H(b_i, s)$ abbilden.

Umgekehrt zieht $f \circ g\colon \bigvee_{i \in I^1 \setminus J}(S^1, 1) \to \bigvee_{i \in I^1 \setminus J}(S^1, 1)$ jeweils das erste und das letzte Drittel jedes Kreises auf den Basispunkt zusammen. Auch hier lässt sich eine Homotopie zur Identität angeben. Also sind $(X^1, x_0)$ und $\bigvee_{i \in I^1 \setminus J}(S^1, 1)$ homotopieäquivalent. Jetzt folgt (2) aus Folgerung 2.50, da $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Auch die Schritte (3) und (4) basieren auf dem Satz von Seifert-van Kampen. Um induktiv von $\pi_1(X^{n-1}, x_0)$ zu $\pi_1(X^n, x_0)$ für $n \geq 2$ zu gelangen, vergrößern wir $X^n$ zu $\overline{X}^n$, siehe Abbildung 2.5. Dazu wählen wir für jedes $i \in I^n$ einen Weg $\gamma_i$ von $x_0$ zum Bild $x_i$ des Basispunktes von $S^{n-1}$ unter der Verklebeabbildung $\varphi_i$. Wir verkleben $I^n \times [0,1] \times [0,1]$ wie folgt mit $X^n$.

(1) Wir identifizieren alle Strecken $\{(i,0)\} \times [0,1]$ miteinander und kleben $[(i,0,0)]$ an den Punkt $x_0$.
(2) Wir verkleben $\{i\} \times [0,1] \times \{0\}$ entlang von $\gamma_i\colon [0,1] \times \{0\}$ mit $X^{n-1}$.
(3) Wir kleben $\{1\} \times [0,1]$ auf eine Strecke in $e_i^n$ vom Punkt $x_i$ ins Innere der Zelle bis zum Radius $1/2$.

Dann ist $X^n$ ein Deformationsretrakt von $\overline{X}^n$, indem wir jedes Quadrat $\{i\} \times [0,1] \times [0,1]$ auf das Bild von $\{i\} \times ([0,1] \times \{0\} \cup \{1\} \times [0,1])$ zusammenziehen.

Wir betrachten die folgenden offenen Teilmengen. Es sei

$$U_0 = \overline{X}^n \setminus \bigcup_{i \in I^n} \Phi_i^n\Big(D_{1/2}^n\Big) ,$$

wobei $D_{1/2}^n \subset D^n$ den abgeschlossenen Ball vom Radius $\frac{1}{2}$ bezeichne, siehe Abbildung 2.6. Dann ist $X^{n-1}$ ein Deformationsretrakt von $U_0$.

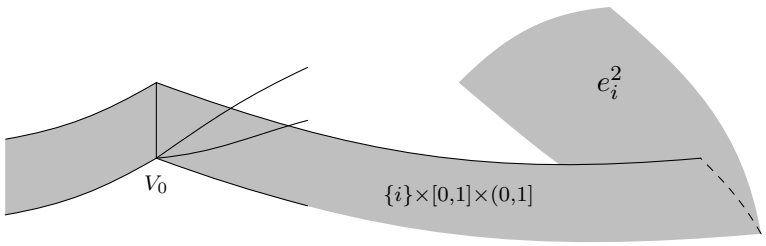



Abbildung 2.7. Der Raum $U_i$

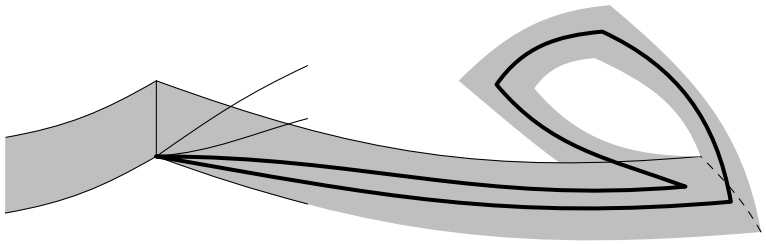


Abbildung 2.8. Die Fundamentalgruppe von $U_0 \cap U_i$

Nach Satz 1.93 existiert eine zusammenziehbare Umgebung von $x_0$ in $X^n \cap U_0$. Es sei $V_0 \subset \overline{X}^n$ ihr Urbild unter der Retraktion $r_n \colon \overline{X}^n \to X^n$, dann ist $V_0$ ebenfalls zusammenziehbar. Für $i \in I^n$ setze

$$U_i = V_0 \cup (\{i\} \times [0,1] \times (0,1]) \cup e_i^n \ .$$

Man überzeugt sich, dass $U_i$ ebenfalls zusammenziehbar ist, siehe Abbildung 2.7.

Für $i \neq j \in I^n$ ist $U_i \cap U_j = V_0$ zusammenziehbar, also insbesondere wegzusammenhängend. Außerdem ist

$$U_0 \cap U_i = V_0 \cup (\{i\} \times [0,1] \times (0,1]) \cup \Phi_i^n(B^n \setminus D^n_{1/2})$$

wegzusammenhängend mit Deformationsretrakt $\Phi_i^n(S^{n-1}_{3/4})$. Analog sieht man, dass auch dreifache Durchschnitte von $\mathcal{U} = \{U_0\} \cup \{\, U_i \mid i \in I^n \,\}$ wegzusammenhängend sind.

Im Fall $n = 2$ folgt

$$\pi_1(U_0 \cap U_i, x_0) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \ ,$$

wobei ein Erzeuger $[\sigma] \in \pi_1(S^1)$ auf eine Schleife abgebildet wird, die in $U_0$ zu $\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\overline{\gamma}_i$ homotop ist, siehe Abbildung 2.8. Behauptung (3) folgt jetzt aus Satz 2.42, da

$$\begin{aligned}\pi_1(X^2, x_0) = \pi_1(\overline{X}^2, x_0) &= \Big(\pi_1(U_0, x_0) * \coprod_{i \in I^n} \pi_1(U_i, x_0)\Big) \Big/ \big(\{[\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\overline{\gamma}_i] \mid i \in I^2\}\big) \\ &= \pi_1(X_1, x_0) \Big/ \big(\{[\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\overline{\gamma}_i] \mid i \in I^2\}\big) \ .\end{aligned}$$

Man beachte, dass die Erzeuger $[\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\overline{\gamma}_i]$ nach Satz 2.15 vom Weg $\gamma_i$ abhängen. Da aber verschiedene Wege zueinander konjugierte Erzeuger liefern, hängt der erzeugte Normalteiler nach Bemerkung 2.41 nicht von der Wahl von $\gamma_i$ ab.

Der Beweis von Behauptung (4) beginnt damit, dass $U_0 \cap U_i \sim S^{n-1}$ für $n \geq 3$ nach Beispiel 2.46 einfach zusammenhängend ist und somit $\pi_1(X^n, x_0) \cong \pi_1(X^{n-1}, x_0)$ analog zur obigen Überlegung. Jetzt liefert die Inklusion $\iota \colon X^n \hookrightarrow X$ Isomorphismen der Fundamentalgruppen. Denn sei $\gamma$ eine Schleife in $X$, dann verläuft $\gamma$ in einem Gerüst $X^n$ nach Satz 1.86, also ist die Abbildung

$$\iota_* \colon \pi_1(X^2, x_0) \cong \pi_1(X^n, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

surjektiv. Falls $\gamma$ nullhomotop ist, verläuft aus dem gleichen Grund eine Homotopie $H$ zur trivialen Schleife ganz in einem $X^n$ (wobei $n$ jetzt größer sein kann), also ist $\iota_*$ auch injektiv. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

2.53. Folgerung. *Sei $G$ eine Gruppe, dann existiert ein CW-Komplex $X$ mit $\pi_1(X) \cong G$.*

Beweis. Sei $G$ durch Erzeuger $M \subset G$ und Relationen $R$ gegeben. Wir konstruieren einen CW-Komplex $X$. Sei $X^0 = \{x_0\}$ das 0-Skelett, bestehend aus einer 0-Zelle $x_0$.

Wir wählen $I^1 = M$, das heißt, für jeden Erzeuger $m \in M$ sei $e^1_m$ eine 1-Zelle, deren zwei Endpunkte notwendigerweise an $x_0$ angeklebt sind. Dann ist $\{x_0\} \subset X^1$ ein maximaler Baum, also ist $F = \pi_1(X^1, x_0)$ die von den Schleifen $\{\, e^1_m \mid m \in M \,\}$ erzeugte freie Gruppe. Wir identifizieren den zu $e^1_m$ gehörigen Erzeuger mit $m \in M$.

Wir wählen $I^2 = R$, und für jede Relation $r = m_1 \cdots m_k \in R$ wählen wir eine 2-Zelle $e^2_r$, so dass die Verklebeabbildung $\varphi^2_r \colon S^1 \to X^1$ gerade das Element $m_1 \cdots m_k \in \pi_1(X^1, x_0)$ repräsentiert.

Aus Satz 2.52 folgt jetzt

$$\pi_1(X^2, x_0) = \langle\, M \mid R \,\rangle = G\ . \qquad \square$$

2.54. Beispiel. Wir betrachten Flächen, genauer, kompakte, zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension 2.

(1) Eine orientierbare Fläche $X_g$ vom *Geschlecht* $g \geq 0$ lässt sich als CW-Komplex mit einer Ecke $\{x_0\}$, $2g$ Kanten $a_1, \ldots, a_g$, $b_1, \ldots, b_g$ und einer 2-Zelle schreiben. Die zugehörige Verklebeabbildung $\varphi^2$ entspreche der Schleife $a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1 \cdots a_g b_g \bar{a}_g \bar{b}_g$, und wir erhalten die Präsentation

$$\pi_1(X_g, x_0) \cong \langle\, a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \,\rangle\ .$$

Für $g = 0$ erhalten wir die Sphäre $S^2$, für $g = 1$ den Torus $T^2$. Da die Relation ein Produkt von Kommutatoren ist, erhalten wir die Abelisierung

$$\pi_1(X_g, x_0)^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}\ .$$

(2) Eine nicht orientierbare Fläche $Y_g$ vom Geschlecht $g \geq 0$ lässt sich analog schreiben als CW-Komplex mit einer Ecke $\{x_0\}$, $g+1$ Kanten $a_0, \ldots, a_g$ und einer 2-Zelle. Die Verklebeabbildung sei gegeben durch die Schleife $a_0^2 \cdots a_g^2$, also gilt

$$\pi_1(Y_g, x_0) \cong \langle a_0, \ldots, a_g \mid a_0^2 \cdots a_g^2 \rangle\ .$$

Für $g = 0$ erhalten wir $\mathbb{R}P^2$, für $g = 1$ die Kleinsche Flasche. In diesem Fall erhalten wir die Abelisierung

$$\pi_1(Y_g, x_0)^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{g+1} / \langle (2, \ldots, 2) \rangle \cong \mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ ,$$

wobei die rechte Darstellung zu den Erzeugern $a_1, \ldots, a_g$ und $a_0 + \cdots + a_g$ gehört.

Wir sehen also, dass man die unterschiedlichen Flächen anhand ihrer Fundamentalgruppen unterscheiden kann.

## 2.f. Überlagerungen

Wir betrachten Überlagerungen $\widetilde{X} \to X$ eines gegebenen topologischen Raumes $X$, und vergleichen die Fundamentalgruppen von $\widetilde{X}$ und $X$ miteinander.

Wir erinnern uns an die Definition 2.25 von Überlagerungen. Eine Überlagerung heißt universell, wenn sie zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist.

2.55. Beispiel. In Beispiel 2.26 hatten wir bereits eine universelle Überlagerung $p\colon \mathbb{R} \twoheadrightarrow S^1$ kennengelernt. Andere zusammenhängende Überlagerungen von $S^1 \subset \mathbb{C}$ sind von der Form

$$p_k\colon S^1 \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow S^1 \qquad \text{mit} \qquad z \longmapsto z^k$$

für $0 < k \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$\operatorname{im} p_{k*} = k\,\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1, 1)\ .$$

Wir werden später sehen, dass das bis auf Isomorphie alle zusammenhängenden Überlagerungen der $S^1$ sind.

Unter einem *Lift* einer Abbildung $F\colon Y \to X$ in eine Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \to X$ verstehen wir eine Abbildung $\widetilde{F}\colon Y \to \widetilde{X}$ mit $F = p \circ \widetilde{F}$. Wenn wir von punktierten Räumen und Abbildungen $(Y, y_0) \to (X, x_0) \leftarrow (\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ sprechen, erwarten wir von einem Lift ebenfalls, dass er $y_0$ auf $\tilde{x}_0$ abbildet.

Wir erinnern uns an den Homotopie-Liftungssatz 2.27 und insbesondere an den Beweis des Satzes 2.28. Dort hatten wir für $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ gesehen, dass wir jede Schleife in $(X, x_0)$ zu einem Weg in $\tilde{X}$ mit vorgegebenem Anfangspunkt eindeutig liften können, und dass relativ homotope Schleifen zu relativ homotopen Wegen liften. Das dortige Argument überträgt sich auf alle Überlagerungen.

2.56. Satz. *Sei $p\colon (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung, dann ist die Abbildung*

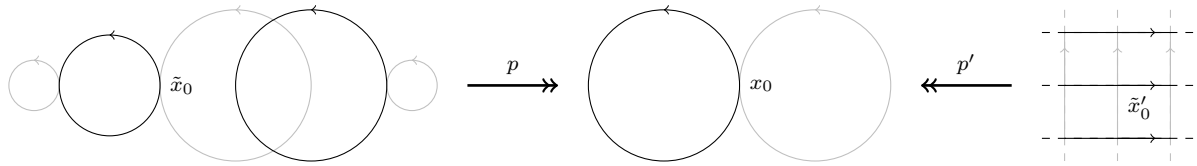
$$p_*\colon \pi_1\big(\widetilde{X}, \tilde{x}_0\big) \to \pi_1(X, x_0)$$

*injektiv, und für $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ liegt $[\gamma]$ genau dann im Bild von $p_*$, wenn $\gamma$ einen Lift $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to \widetilde{X}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}_0$ besitzt.*

Beweis. Sei $\tilde{\gamma}\colon S^1 \to \widetilde{X}$ eine Schleife, so dass $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ relativ zu Anfangs- und Endpunkt nullhomotop ist. Dann lässt sich die Nullhomotopie mit Satz 2.27 zu einer relativen Nullhomotopie von $\tilde{\gamma}$ liften. Also ist $p_*$ injektiv.

Eine Schleife $\gamma$, deren Lift $\tilde{\gamma}$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$ wiederum eine Schleife ist, liegt im Bild von $p_*$, da $p_*[\tilde{\gamma}] = [p \circ \tilde{\gamma}] = [\gamma]$. Sei umgekehrt $\gamma$ eine Schleife mit $[\gamma] \in \operatorname{im}(p_*)$. Dann ist $\gamma$ homotop zu einer Schleife der Form $\gamma' = p \circ \tilde{\gamma}'$. Liften der Homotopie liefert eine Homotopie zwischen dem Lift $\tilde{\gamma}$ von $\gamma$ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ und $\tilde{\gamma}'$, also folgt $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1) = \tilde{x}_0$. $\square$

2.57. Beispiel. Die „Acht“ $X = S^1 \vee S^1$ hat sehr viele paarweise nicht isomorphe Überlagerungen, siehe [**H1**]. Wir werden sehen, dass das Bild $\operatorname{im} p_*$ der Fundamentalgruppe $\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ in $\pi_1(X, x_0)$ die Überlagerung $p\colon (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ bereits bis auf Isomorphie festlegt.




Wir wollen allgemeiner fragen, wann sich eine Abbildung $F\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ zu einer Abbildung $\widetilde{F}\colon (Y, t_0) \to (\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $F = p \circ \widetilde{F}$ liften lässt.

Wir erinnern uns an den Begriff „lokal wegzusammenhängend“ aus Definition 1.68. Falls $Y$ lokal wegzusammenhängend ist, sind alle Wegzusammenhangskomponenten sowohl offen als auch abgeschlossen. Also ist $Y$ in diesem Fall genau dann wegzusammenhängend, wenn $Y$ zusammenhängend ist.

2.58. Satz (Liftungssatz). *Sei $p\colon (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung, und sei $Y$ zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann lässt sich eine Abbildung $F\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$*

*genau dann zu einer Abbildung* $\widetilde{F}\colon (Y, y_0) \to (\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ *mit* $F = p \circ \widetilde{F}$ *liften, wenn*

$$\operatorname{im} F_* \subset \operatorname{im} p_* \subset \pi_1(X, p) \ . \tag{*}$$

*In diesem Fall ist der Lift* $\widetilde{F}$ *durch* $\widetilde{F}(y_0) = \tilde{x}_0$ *eindeutig bestimmt.*

Falls $Y$ nicht zusammenhängend ist, müssen wir den Lift auf jeder Wegzusammenhangskomponente von $Y$ einzeln konstruieren; eventuell benötigen wir dazu jeweils andere Basispunkte.

Beweis. Die Aussage „$\Longrightarrow$“ ist klar, da aus der Existenz von $\widetilde{F}$ bereits

$$\operatorname{im} F_* = \operatorname{im}\bigl(p_* \circ \widetilde{F}_*\bigr) \subset \operatorname{im} p_*$$

folgt.

Sei umgekehrt (*) erfüllt. Wir definieren einen Lift $\widetilde{F}$ wie folgt. Da $Y$ wegzusammenhängend ist, können wir zu jedem $y \in Y$ einen Pfad $\sigma$ von $y_0$ nach $y$ angeben, und dazu wie im Beweis von Satz 2.28 einen Lift $\tilde{\tau}$ von $\tau = F \circ \sigma$ mit Anfangspunkt $\tilde{\tau}(0) = x_0$. Wir setzen $\tilde{F}(y) = \tilde{\tau}(1)$. Hieraus folgt auch bereits die Eindeutigkeit von $\widetilde{F}$.

Um zu zeigen, dass $\widetilde{F}$ wohldefiniert ist, wählen wir einen weiteren Weg $\sigma'$ von $y_0$ nach $y$ und konstruieren einen Lift $\tilde{\tau}'$ von $\tau' = F \circ \sigma'$ wie oben. Dann ist $\tau'\bar{\tau} \in \operatorname{im} F_* \subset \operatorname{im} p_*$ nach (*), also existiert ein geschlossener Lift $\widetilde{\tau'\bar{\tau}}$ nach Satz 2.56. Das heisst, ein Lift $\tilde{\bar{\tau}}$ von $\bar{\tau}$ startet bei $\tilde{\tau}'(1)$ und führt zu $\tilde{x}_0$. Wegen der Eindeutigkeit des Lifts ist $\tilde{\bar{\tau}} = \bar{\tilde{\tau}}$, und es folgt $\tilde{\tau}(1) = \tilde{\tau}'(1)$, was zu zeigen war.

Zur Stetigkeit von $\widetilde{F}$ sei $y \in Y$, und sei $U$ eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von $x = F(y)$ in $X$. Dann existiert eine Umgebung $\widetilde{U} \subset \widetilde{X}$ von $\tilde{x} = \widetilde{F}(y)$, so dass $p\colon \widetilde{U} \to U$ ein Homöomorphismus ist. Hierbei können wir offensichtlich $U$ so wählen, dass $\widetilde{U}$ als Umgebung von $\tilde{y}$ beliebig klein wird. Wegen Stetigkeit von $F$ ist $F^{-1}(U)$ offen, und es existiert eine wegzusammenhängende Umgebung $V \subset F^{-1}(U)$ von $y$.

Sei $\sigma$ ein Weg von $y_0$ nach $y$. Sei $\tilde{\tau}$ der Lift von $\tau = F \circ \sigma$ wie oben, so dass also $\tilde{\tau}(1) = \widetilde{F}(y)$. Sei $y' \in V$, und sei $\alpha$ ein Weg von $y$ nach $y'$ in $V$. Da $\beta = F \circ \alpha$ in $U$ verläuft, hat $\beta$ einen Lift $\tilde{\beta} = (p|_{\widetilde{U}})^{-1} \circ \beta$ in $\widetilde{U}$. Dann ist $\tilde{\tau}\tilde{\beta}$ ein Lift von $\tau\beta = F \circ (\sigma\alpha)$, und es folgt

$$\widetilde{F}(y') = (\tilde{\tau}\tilde{\beta})(1) = \tilde{\beta}(1) \in \widetilde{U} \ .$$

Also gilt $\widetilde{F}(V) \subset \widetilde{U}$, und da $\widetilde{U}$ beliebig klein gewählt werden kann folgt die Stetigkeit von $\widetilde{F}$ bei $y$. Da $y$ beliebig war, ist $\widetilde{F}$ stetig. □

2.59. Bemerkung. Der lokale Wegzusammenhang wurde nur eingesetzt, um die Stetigkeit von $\widetilde{F}$ nachzuweisen, er ist aber nötig für die Existenz des Liftes, siehe Übung 2.93. Zur Eindeutigkeit von $\widetilde{F}$ reicht Zusammenhang jedoch aus: Sei etwa $p\colon (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung, und sei $Y$ zusammenhängend. Seien $\widetilde{F}$, $\widetilde{F}'\colon (Y, y_0) \to (\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ Lifts von $F$. Dann ist die Menge

$$\{\, y \in Y \mid \widetilde{F}(y) = \widetilde{F}'(y) \,\} \subset Y$$

offen, abgeschlossen und nicht leer, also stimmen die Lifts auf ganz $Y$ überein.

Eine Gruppenwirkung einer Gruppe $G$ auf einem topologischen Raum $X$ ist ein Homomorphismus von $G$ in die Gruppe der Homöomorphismen von $X$. Unter Umständen trägt der Quotient $X/G$, dessen Punkte die Bahnen der $G$-Wirkung sind, wieder die Struktur eines topologischen Raumes, so dass die kanonische Abbildung $X \twoheadrightarrow X/G$ eine Überlagerung ist. Wir beschreiben zunächst diese Konstruktion. Später überlegen wir uns, welche Überlagerungen von Gruppenwirkungen kommen.

2.60. Definition. Eine (*Gruppen-*) *Wirkung* oder *Operation* einer Gruppe $\Gamma$ auf einem topologischen Raum $X$ ist ein Gruppenhomomorphismus $\rho$ von $\Gamma$ in die Gruppe $\operatorname{Aut} X$ der Homöomorphismen von $X$, schreibe $\rho_\gamma$ oder kurz $\gamma\colon X \to X$ für das Bild von $\gamma \in \Gamma$.

Eine *Bahn* von $\rho$ (oder auch kurz von $\Gamma$) ist eine Teilmenge der Form

$$\rho_\Gamma(x) = \Gamma x = \{\rho_\gamma(x) \mid \gamma \in \Gamma\} \subset X$$

mit $x \in X$. Der *Quotient*

$$X/\Gamma = \{\Gamma x \mid x \in X\} \subset \mathcal{P}X$$

ist die Menge aller Bahnen. Es bezeichne

$$p\colon X \twoheadrightarrow X/\Gamma \qquad \text{mit} \qquad p(x) = \Gamma x$$

die Projektionsabbildung. Der Raum $X/\Gamma$ trage die Quotiententopologie unter $p$.

Es folgen zwei Bedingungen an Gruppenwirkungen, die sicherstellen, dass die Projektionsabbildung eine Überlagerung ist.

2.61. Definition. Eine Gruppenwirkung von $\Gamma$ auf $X$ heißt *frei*, wenn für alle $x \in X$ und alle $\gamma \in \Gamma$ aus $\gamma(x) = x$ bereits $\gamma = e$ folgt. Sie heißt *eigentlich diskontinuierlich*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U$ in $X$ besitzt, so dass $\gamma(U) \cap U = \emptyset$ falls $\gamma(x) \neq x$.

Wenn $\Gamma$ frei wirkt, kann $\gamma(x) = x$ nur für das neutrale Element gelten.

2.62. Beispiel. Wir geben verschiedene Beispiele von Gruppenwirkungen.

(1) Es sei $X = \mathbb{R}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$ und $\gamma(x) = x+\gamma$. Dann ist der Quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ homöomorph zu $S^1 \subset \mathbb{C}$ wie in Beispiel 2.26 via

$$\mathbb{Z}x \longmapsto e^{2\pi i x} .$$

Diese Wirkung ist frei und eigentlich diskontinuierlich. Wähle dazu als Umgebung von $x \in \mathbb{R}$ das Intervall $U = (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$, dann gilt $(x + n - \frac{1}{2}, x + n + \frac{1}{2}) \cap (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}) = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(2) Es sei $X = S^1 \subset \mathbb{C}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$, $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ eingekürzter Bruch und $\gamma(z) = e^{2\pi i r\gamma} \cdot z$. Elemente $\gamma \in q\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ wirken trivial, das heißt, es gilt $\gamma(z) = z$ für alle $z \in S^1$. Daher ist diese Wirkung nicht frei. Sie ist aber eigentlich diskontinuierlich: zu $z \in S^1$ wähle

$$U = \left\{ e^{2\pi i\varphi} \cdot z \;\middle|\; \varphi \in \left(-\frac{1}{2q}, \frac{1}{2q}\right) \right\} ,$$

dann gilt $U \cap \rho_n(U) = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus q\mathbb{Z}$.

Die Faktorgruppe $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ wirkt ebenfalls auf $S^1$. Der Quotient ist homöomorph zu $S^1$ via

$$(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})z \longmapsto z^q \in S^1 ,$$

und die Abbildung $S^1 \to S^1$ ist dieselbe wie in Beispiel 2.55. Diese Wirkung ist sowohl frei als auch eigentlich diskontinuierlich.

(3) Es seien $X$, $\Gamma$ wie in (2), aber $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann liegen alle Bahnen dicht in $X$. Da jede offene Menge alle Bahnen schneidet, ist $X/\Gamma$ jetzt eine überabzählbare Menge mit der Klumpentopologie. Die Wirkung ist zwar frei, aber nicht eigentlich diskontinuierlich. Denn die Bahn von $z \in S^1$ trifft jede noch so kleine Umgebung $U$: Zu jeder Umgebung $U$ von $z \in S^1$ existiert also $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $\rho_n(z) \in U$, insbesondere $U \cap \rho_n(U) \neq \emptyset$.

2.63. Proposition. *Es sei $\rho$ eine freie und eigentlich diskontinuierliche Wirkung einer Gruppe $\Gamma$ auf $X$. Dann ist die Projektionsabbildung $p\colon X \to X/\Gamma$ eine Überlagerung.*

Beweis. Es sei $y = \Gamma x \in X/\Gamma$, und es sei $U$ eine Umgebung von $x$ wie in Definition 2.61. Es sei $V = p(U) \in X/\Gamma$, dann folgt aus Definition 2.61, dass

$$p^{-1}(V) = \dot{\bigcup_{\gamma\in\Gamma}} \gamma(U) \subset X \ .$$

Wir dürfen $U$ als offen annehmen. Dann sind alle $\gamma(U)$ offen, und $A \subset p^{-1}(V)$ ist genau dann offen, wenn alle $A \cap \gamma(U)$ offen sind. Also erhalten wir den gesuchten Homöomorphismus

$$p^{-1}(V) \cong \coprod_{\gamma\in\Gamma} \gamma(U) \cong \Gamma \times U \ ,$$

das heißt, $V \subset X/\Gamma$ ist gleichmäßig überlagert. Da das für alle $y \in X/\Gamma$ funktioniert, folgt unsere Behauptung. □

2.64. Bemerkung. Der Raum $X/\Gamma$ trägt die Quotiententopologie. Nach Bemerkung 1.74 ist nicht klar, dass sich „schöne“ Eigenschaften von $X$ auf den Quotienten vererben. Als Beispiel betrachte den normalen Raum $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Hierauf wirkt $\mathbb{Z}$ durch $n\,(x,y) = (2^n x, 2^{-n} y)$. Da $(0,0) \notin X$, ist diese Wirkung frei und eigentlich diskontinuierlich. Sei etwa $(x,y) \in X$, dann können wir als Umgebung $U$ wie in Definition 2.61 von $x$ die Menge $(2^{-1/2}x, 2^{1/2}x) \times \mathbb{R}$ wählen, falls $x \neq 0$, oder die Menge $\mathbb{R} \times (2^{-1/2}y, 2^{1/2}y)$, falls $y \neq 0$.

Allerdings ist der Quotient nicht einmal Hausdorffsch. Die Punkte $a = p(x,0)$ und $b = p(0,y) \in X/\Gamma$ lassen sich nicht trennen, denn für noch so kleine Umgebungen $U$ von $a$ und $V$ von $b$ gibt es ein hinreichend großes $n \in \mathbb{Z}$ so dass

$$U \ni p(x, 2^{-n}y) = p(2^{-n}x, y) \in V \ .$$

2.65. Definition. Eine *Decktransformation* einer Überlagerung $p\colon \tilde{X} \to X$ ist ein Homöomorphismus $F\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$, so dass $p \circ F = p$. Eine zusammenhängende Überlagerung heißt *normal*, wenn es zu je zwei $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$ eine Decktransformation $F$ mit $F(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ gibt.

Warnung: „normal“ hat hier nichts mit (T1) und (T4) zu tun, sondern mit dem Begriff des Normalteilers, siehe Folgerung 2.68.

2.66. Bemerkung. Die Decktransformationen einer gegebenen Überlagerung $p\colon \tilde{X} \to X$ bilden stets eine Gruppe $\Gamma$, die *Decktransformationsgruppe*. Sei $\tilde{X}$ zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Da jede Decktransformation ein Lift $\tilde{p}$ von $p\colon \tilde{X} \to X$ mit $\tilde{p}(\tilde{x}_0) = F(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ ist, wirkt $\Gamma$ wegen der Eindeutigkeit der Lifte frei. Indem wir Urbilder gleichmäßig überlagerter Umgebungen von Punkten in $X$ betrachten, sehen wir, dass $\Gamma$ auch eigentlich diskontinuierlich wirkt. Falls $p\colon \tilde{X} \to X$ normal ist, folgt $X \cong \tilde{X}/\Gamma$.

Seien umgekehrt $X$, $\Gamma$ wie in Proposition 2.63 und $X$ zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann ist $p\colon X \to X/\Gamma$ eine normale Überlagerung, und $\Gamma$ ist die Gruppe der Decktransformationen. Hier benutzen wir wieder die Eindeutigkeit im Liftungssatz 2.58, um zu zeigen, dass es keine weiteren Decktransformationen gibt.

2.67. Beispiel. Wir haben in Beispiel 2.62 schon gesehen, dass die zusammenhängenden Überlagerungen der $S^1$ in Beispiel 2.55 normal sind. Das linke Bild in Beispiel 2.57 besitzt keine Decktransformationen außer der Identität, ist also nicht normal. Für das rechte Bild erhalten wir eine Decktransformationsgruppe $\Gamma \cong \mathbb{Z}^2$, also ist dieses Beispiel normal. Dreht man aber nur je einen horizontalen und einen vertikalen Pfeil in dem Bild um, so erhält man eine neue Überlagerung ohne nichttriviale Decktransformationen.

2.68. Folgerung (aus dem Liftungssatz 2.58). *Es sei $p\colon \tilde{X} \to X$ eine zusammenhängende, lokal wegzusammenhängende Überlagerung, seien $x_0 \in X$ und $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$, und sei $\tilde{\gamma}$ ein Weg in $\tilde{X}$ von $\tilde{x}_0$ nach $\tilde{x}_1$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *Es existiert eine Decktransformation $F\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$ mit $F(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$.*
(2) *Es gilt $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) \subset \pi_1(X, x_0)$.*
(3) *Für $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ gilt $[\gamma]^{-1} p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))[\gamma] = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.*

*Insbesondere ist $p$ genau dann eine normale Überlagerung, wenn $\operatorname{im} p_*$ Normalteiler von $\pi_1(X, x_0)$ ist. In diesem Fall ist $\Gamma = \pi_1(X, x_0)/\operatorname{im}(p_*)$ die Gruppe der Decktransformationen.*

Beweis. Da Decktransformationen invertierbar sind und die Abbildung $p$ liften, folgt die Äquivalenz von (1) und (2) unmittelbar aus Satz 2.58.

Wie im Satz 2.15 liefert $\sigma \mapsto \overline{\gamma}\sigma\gamma$ einen Isomorphismus von $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. Es folgt

$$p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = [\gamma]^{-1} p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))[\gamma] \ ,$$

und daraus die Äquivalenz von (2) und (3). Da sich je zwei Wege $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ von $\tilde{x}_0$ nach $\tilde{x}_1$ bis auf Homotopie nur bis auf Verkettung mit der Schleife $\tilde{\gamma}_2\overline{\tilde{\gamma}}_1$ am Punkt $\tilde{x}_0$ unterscheiden, kommt es nicht auf die Wahl von $\tilde{\gamma}$ an.

Wenn $\operatorname{im} p_*$ ein Normalteiler ist, gilt (3), wegen (1) existieren alle Decktransformationen, und $p$ ist normal. Sei umgekehrt $p$ normal, also gilt (1). Da es zwischen je zwei Punkten in $p^{-1}(x_0)$ einen Weg $\tilde{\gamma}$ gibt, folgt aus (3), dass $\operatorname{im} p_*$ ein Normalteiler ist.

Um eine Wirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf $\tilde{X}$ zu konstruieren, betrachten wir zu $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ die nach dem Liftungssatz 2.58 eindeutige Decktransformation $\rho_{[\gamma]}\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$, die den Basispunkt $\tilde{x}_0$ auf den Endpunkt $\tilde{\gamma}(1)$ des Lifts $\tilde{\gamma}$ von $\gamma$ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ abbildet.

Wir müssen zeigen, dass $\rho$ einen Gruppenhomomorphismus liefert. Sei dazu $[\gamma_1] \in \pi_1(X, x_0)$, und sei $\tilde{\gamma}_1$ der Lift von $\gamma_1$ mit $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{x}_0$. Dann folgt $\rho_{[\gamma_1]}(\tilde{x}_0) = \tilde{\gamma}_1(1)$. Außerdem ist $\tilde{\gamma}' = \rho_{[\gamma]} \circ \tilde{\gamma}$ ein Lift von $\gamma$ mit $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{\gamma}_1(1)$, also ist die Verkettung $\widetilde{\gamma_1\gamma} = \tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}'$ ein Lift von $\gamma_1\gamma$ mit $\widetilde{\gamma_1\gamma}(0) = \tilde{x}_0$. Es folgt

$$\rho_{[\gamma_1]}\big(\rho_{[\gamma]}(\tilde{x}_0)\big) = \rho_{[\gamma_1]}\big(\tilde{\gamma}(1)\big) = \tilde{\gamma}'(1) = \widetilde{\gamma_1\gamma}(1) = \rho_{[\gamma_1\gamma]}(\tilde{x}_0) \ .$$

Wegen der Eindeutigkeitsaussage im Liftungssatz 2.58 folgt $\rho_{[\gamma_1]} \circ \rho_{[\gamma]} = \rho_{[\gamma_1\gamma]}$, und wir erhalten eine Gruppenwirkung.

Da nach Satz 2.56 gerade die Elemente von $\operatorname{im} p_*$ zu Schleifen in $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ liften, folgt $\ker \rho = \operatorname{im} p_*$, so dass die Gruppe $\Gamma = \pi_1(X, x_0)/\operatorname{im} p_*$ frei und wegen Bemerkung 2.66 auch eigentlich diskontinuierlich auf $\tilde{X}$ wirkt, mit $X \cong \tilde{X}/\Gamma$. □

## 2.g. Die universelle Überlagerung

Nach Satz 2.56 bestimmt jede Überlagerung $p\colon (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Untergruppe $\operatorname{im} p_*$ der Fundamentalgruppe von $(X, x_0)$. Wir wollen zeigen, dass es für geeignete Räume $X$ umgekehrt zu jeder Untergruppe $G \subset \pi_1(X, x_0)$ bis auf Isomorphie genau eine zusammenhängende Überlagerung $p\colon (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ mit $\operatorname{im} p_* = G$ gibt. Dazu erinnern wir uns, dass eine Überlagerung nach Definition 2.25 universell heißt, wenn sie zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist. Eine universelle Überlagerung $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ haben wir in Beispiel 2.26 bereits kennengelernt.

Wir werden später sehen, dass die universelle Überlagerung von $X$ jede zusammenhängende Überlagerung von $X$ überlagert, daher der Name. Außerdem kann man jede beliebige (auch nicht zusammenhängende) Überlagerung mit Hilfe der universellen Überlagerung konstruieren.

2.69. Definition. Ein topologischer Raum $X$ heißt *semilokal einfach zusammenhängend*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U$ besitzt, so dass $\operatorname{im}(\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)) = 0$.

2.70. Satz. *Jeder zusammenhängende, lokal wegzusammenhängende und semilokal einfach zusammenhängende topologische Raum $X$ mit $x_0 \in X$ hat eine universelle Überlagerung.*

2.71. Bemerkung. Die Voraussetzung „semilokal einfach zusammenhängend“ wirkt technisch. Tatsächlich ist sie notwendig, siehe Übung 2.94. Sei nämlich $\widetilde{X} \to X$ eine universelle Überlagerung, sei $U \subset X$ eine wegzusammenhängende, gleichmäßig überlagerte Umgebung von $x \in X$, sei $\widetilde{U}$ eine Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U)$, sei $\tilde{x} \in \widetilde{U}$ und $x = p(\tilde{x})$. Dann folgt $\operatorname{im}(\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)) = \{e\}$ aus den folgenden kommutativen Diagrammen.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{U} \arrow[r] \arrow[d, "p|_{\widetilde{U}}"', "\cong"] & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r] & X \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} \pi_1(\widetilde{U},\tilde{x}) \arrow[r] \arrow[d, "(p|_{\widetilde{U}})_*"', "\cong"] & \pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}) = \{e\} \arrow[d, "p_*"] \\ \pi_1(U,x) \arrow[r] & \pi_1(X,x) \end{tikzcd}$$

Beweis von Satz 2.70. Angenommen, es gebe eine universelle Überlagerung. Dann wissen wir nach Satz 2.56, dass eine Schleife $\gamma$ in $X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ genau dann zu einer Schleife in der universellen Überlagerung liftet, wenn sie in $X$ nullhomotop ist. Wie immer folgt, dass zwei Wege $\sigma$, $\sigma'$ von $x_0$ nach $x \in X$ genau dann Lifts $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}'$ mit $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{\sigma}'(0) = \tilde{x}_0$ und gleichem Endpunkt $\tilde{x} = \tilde{\sigma}(1) = \tilde{\sigma}'(1)$ haben werden, wenn $\sigma$ und $\sigma'$ homotop sind. Also definieren wir

$$\widetilde{X} = \left\{ \sigma\colon [0,1] \to X \;\middle|\; \sigma(0) = x_0 \right\} /\!\sim \qquad \text{und} \qquad p([\sigma]) = \sigma(1)\ ,$$

wobei „$\sim$“ hier Homotopie relativ zu $\{0,1\}$ bezeichne.

Zur Topologie von $\tilde{X}$ sei zunächst $U \subset X$ offen und $x \in U$, dann hat $x$ nach Voraussetzung eine wegzusammenhängende offene Umgebung $V \subset U$ mit $\operatorname{im}(\pi_1(V,x) \to \pi_1(X,x)) = 0$. Also bildet

$$\mathcal{B} = \left\{ V \in \mathcal{O}_X \;\middle|\; V \text{ wegzusammenhängend und } \operatorname{im}\bigl(\pi_1(V,x) \to \pi_1(X,x)\bigr) = 0 \right\}$$

eine Basis von $\mathcal{O}_X$.

Für $V \in \mathcal{B}$ und einen Weg $\sigma\colon [0,1] \to X$ mit $\sigma(0) = x_0$ und $\sigma(1) \in V$ setze

$$U(V,\sigma) = \left\{ [\sigma\beta] \;\middle|\; \beta \text{ Weg in } V \text{ mit } \beta(0) = \sigma(1) \right\} \subset \widetilde{X}\ .$$

Dann ist die Abbildung

$$U(V,\sigma) \longrightarrow V \qquad \text{mit} \qquad [\sigma\beta] \longmapsto \beta(1) \tag{*}$$

eine Bijektion, denn Surjektivität folgt, da $V$ wegzusammenhängend ist, und Injektivität, da für zwei Wege $\beta$, $\beta'$ mit gleichem Anfangspunkt $x$ und gleichem Endpunkt die Schleife $\beta'\beta^{-1}$ in $V$ ja in $X$ zusammenziehbar ist, somit also auch $[\sigma\beta] = [\sigma\beta'] \in \widetilde{X}$.

Wir definieren also eine Topologie auf $\widetilde{X}$ durch Angabe einer Basis

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \left\{ U(V,\sigma) \;\middle|\; V \in \mathcal{B} \text{ und } \sigma \text{ Weg in } X \text{ mit } \sigma(0) = x_0 \text{ und } \sigma(1) \in V \right\}\ .$$

Aus (*) folgt jetzt sofort die Stetigkeit von $p$ und die Überlagerungseigenschaft, da alle $V \in \mathcal{B}$ gleichmäßig überlagert sind.

Es gilt $\operatorname{im} p_* = 0$, denn sei $\tilde{\gamma}$ eine Schleife in $\widetilde{X}$, dann zerlegen wir $[0,1]$ in Teilintervalle $[t_i, t_{i+1}]$, so dass jedes Teilintervall in eine der Mengen $U(V_i,\sigma_i) \in \widetilde{\mathcal{B}}$ abgebildet wird. Wir erhalten eine Nullhomotopie von $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$, indem wir ausnutzen, dass $\sigma_i \gamma|_{[t_i,t_{i+1}]} \sim \sigma_{i+1}$ gilt (Bild). Aus Satz 2.56 folgt $\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0) = 0$ da offensichtlich $\operatorname{im} p_* = 0$. □

2.72. Bemerkung. Auf der soeben konstruierten universellen Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \to X$ wirkt die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$ durch $[\gamma] \cdot [\sigma] = [\gamma\sigma]$. Außerdem folgt aus obigem Beweis, dass $\widetilde{X}/\pi_1(X,x_0) \cong X$. Beides erhalten wir aber auch direkt aus Folgerung 2.68, da die Gruppe $\operatorname{im} p_* = \{e\}$ trivial und insbesondere ein Normalteiler von $\pi_1(X,x_0)$ ist.

Die universelle Überlagerung erfüllt eine universelle Eigenschaft und ist daher bis auf eindeutige Isomorphie von punktierten Überlagerungen eindeutig bestimmt.

2.73. Folgerung. *Es sei $(X, x_0)$ zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, und es sei $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine universelle Überlagerung.*

(1) *Es sei $q\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ eine weitere Überlagerung. Dann existiert genau eine Abbildung $r\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (Y, y_0)$ mit $p = q \circ r$, und $r$ ist ebenfalls eine universelle Überlagerung von $Y$.*

(2) *Sei insbesondere $p'\colon (\tilde{X}', \tilde{x}_0') \to (X, x_0)$ eine weitere universelle Überlagerung, dann existiert ein eindeutiger Homöomorphismus $F\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}', \tilde{x}_0')$, so dass $p = p' \circ F$.*

Beweis. Da $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend ist, folgt die Existenz und Eindeutigkeit eines Liftes $r$ von $p$ aus Satz 2.58, da $\{e\} = \operatorname{im} p_* \subset \operatorname{im} q_*$. Um zu sehen, dass $r$ eine Überlagerung ist, wählen wir zu $y \in Y$ eine wegzusammenhängende Umgebung $U$ von $x = q(y)$, die sowohl von $p$ als auch von $q$ gleichmäßig überlagert wird. Dann sind die Wegzusammenhangskomponenten von $p^{-1}(U)$ und $q^{-1}(U)$ jeweils homöomorph zu $U$ via $p$ beziehungsweise $q$. Sei $V \subset Y$ die Wegzusammenhangskomponente von $q^{-1}(U)$, die $y$ enthält. Da $p = q \circ r$, und da stetige Abbildungen zusammenhängende Mengen auf zusammenhängende Mengen abbilden, ist $r^{-1}(V) \subset p^{-1}(U)$ eine disjunkte Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten von $p^{-1}(U)$. Also ist $r$ eine Überlagerung von $Y$, und da $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist, sogar eine universelle.

Die zweite Aussage zeigt man mit dem üblichen universellen Trick. □

Es seien $X$, $\tilde{X}$ und $Y$ wie oben. Aus Satz 2.56 und Folgerung 2.68 ergibt sich sofort, dass

$$Y \cong \widetilde{X}/\pi_1(Y, y_0) \cong \widetilde{X}/\operatorname{im} q_* \,.$$

Auf diese Weise kann man eine Kategorie aller punktierten zusammenhängenden Überlagerungen von $(X, x_0)$ konstruieren und zeigen, dass sie zur Kategorie aller Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$ äquivalent ist. Dabei ist ein *Äquivalenz von Kategorien* $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Funktor, so dass

(1) zu jedem $B \in \operatorname{Obj}(\mathcal{B})$ ein $A \in \operatorname{Obj}(\mathcal{A})$ mit $\mathcal{F}A = B$ existiert, das heißt, so dass $\mathcal{F}$ auf Objekten bis auf Isomorphie surjektiv ist, und

(2) für alle $A$, $C \in \operatorname{Obj}(\mathcal{A})$ die Abbildung $\mathcal{F}\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, C) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$ eine Bijektion ist, das heißt, so dass $\mathcal{F}$ auf Morphismen bijektiv ist.

In unserem Fall betrachten wir eine Kategorie, deren Objekte gerade Untergruppen $G$, $H$, … von $\pi_1(X, x_0)$ und deren Morphismen gerade die Inklusionsabbildungen sind, also

$$\operatorname{Hom}(H, G) = \begin{cases} \{H \hookrightarrow G\} & \text{falls } H \subset G, \text{ und} \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem betrachten wir eine Kategorie, deren Objekte gerade punktierte, zusammenhängende Überlagerungen $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$, $q\colon (Z, z_0) \to (X, x_0)$ von $(X, x_0)$, …, und deren Morphismen $F\colon p \to q$ gerade punktierte Überlagerungen $r\colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ mit $p = q \circ r$ sind. Als Funktoren erhalten wir zum einen die Zuordnung

$$\pi_1(X, x_0) \supset G \longmapsto \tilde{X}/G \qquad \text{und} \qquad (H \hookrightarrow G) \longmapsto \big(\tilde{X}/H \twoheadrightarrow \tilde{X}/G \text{ mit } Hx \mapsto Gx\big)\,,$$

zum anderen die Zuordnung

$$p \longmapsto \operatorname{im} p_* \subset \pi_1(X, x_0) \qquad \text{und} \qquad (p \twoheadrightarrow q) \longmapsto (\operatorname{im} p_* \hookrightarrow \operatorname{im} q_*)\,;$$

für eine Äquivalenz von Kategorien hätte es gereicht, nur einen dieser zwei Funktoren anzugeben.

Einen ähnlichen Sachverhalt lernt man in der Algebra kennen. Dort klassifizieren die Untergruppen der Galois-Gruppe genau die Zwischenkörper in einer Galois-Körpererweiterung. Die Rolle der universellen Überlagerung spielt der algebraische Abschluss eines perfekten Körpers, siehe unten.

Allgemeiner kann man auch beweisen, dass die Kategorie aller Überlagerungen äquivalent ist zur Kategorie aller Gruppenwirkungen von $\pi_1(X, x_0)$ auf (diskreten) Mengen. Diese Kategorie umfasst die Kategorie der Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$, wobei man einer Untergruppe $\Gamma \subset \pi_1(X, x_0)$ die Menge der Rechtsnebenklassen $M = \pi_1(X, x_0)/\Gamma$ zuordnet. Um aus einer diskreten Menge $M$ mit $\pi_1(X, x_0)$-Wirkung eine Überlagerung zu konstruieren, betrachtet man den Quotienten

$$\tilde{X} \times_\Gamma M = (\tilde{X} \times M)/\Gamma \ ,$$

wobei $\gamma$ auf $\tilde{X} \times M$ durch $\gamma(\tilde{x}, m) = (\gamma\tilde{x}, \gamma m)$ wirkt. Die Bahnen der $\Gamma$-Wirkung auf $M$ entsprechen genau den Zusammenhangskomponenten der Überlagerung $\tilde{X} \times_\Gamma M$. Die obige Zuordnung läßt sich zu einem Funktor ausbauen, von dem man wieder zeigen kann, dass er eine Äquivalenz von Kategorien liefert.

Zum Schluss dieses Kapitels geben wir ein „Wörterbuch“ zur Übersetzung zwischen Sachverhalten aus der Galois-Theorie und der Überlagerungstheorie an.

| *Galois-Theorie* | *Überlagerungstheorie* |
|---|---|
| Perfekter Körper $K$ | Zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender, semilokal einfach zusammenhängender, punktierter topologischer Raum $(X, x_0)$ |
| Algebraische Erweiterung $L \supset K$ | Zusammenhängende, punktierte Überlagerung $q\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ |
| Algebraischer Abschluss $\overline{K}$ | Universelle Überlagerung $p\colon (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ |
| Absolute Galoisgruppe $G = G(\widetilde{K}/K)$ | Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ |
| abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$ | Untergruppe $\Gamma \subset \pi_1(X, x_0)$ |
| Fixkörper von $H$ | Quotient $(\widetilde{X}/\Gamma, \Gamma\tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ |
| Normale Erweiterung $L \supset K$ | Normale Überlagerung $q\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ |
| Relative Galoisgruppe $G(L/K)$ | Decktransformationsgruppe $\pi_1(X, x_0)/(\operatorname{im} q_*)$ |

Die Parallelen sind klar erkennbar. Entscheidender Unterschied: alle „Pfeile“ in der Kategorie der algebraischen Erweiterungen verlaufen genau andersherum als in der Kategorie der punktierten Überlagerungen. Das liegt daran, dass die entsprechenden Äquivalenzen von Kategorien in der Galois-Theorie kontravariante Funktoren sind. Wenn wir anstelle der topologischen Räume $X$ die Algebra der stetigen Funktionen $X \to \mathbb{C}$ betrachten, sind wir in einer ähnlichen Situation wie bei den Körpern. Wie Sie umgekehrt im Falle von Zahlkörpern zu einer „geometrischen“ Beschreibung kommen, lernen Sie in der arithmetischen Geometrie.

## 2.h. Übungen zu Kapitel 2

*Übungen zu Abschnitt 2.a.*

2.74. Übung. Sei $(X, A)$ ein Paar und $Y$ ein Raum. Zeigen Sie: Homotopie relativ zu $A$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Abbildungen von $X$ nach $Y$.

2.75. Übung. Seien $X$, $Y$, $Z$ topologische Räume, und seien $F\colon X \to Y$ und $G\colon Y \to Z$ Homotopieäquivalenzen, dh., es existieren Abbildungen $P$, $Q$ mit $P \circ F \sim \mathrm{id}_X$, $F \circ P \sim \mathrm{id}_Y \sim Q \circ G$ und $G \circ Q \sim \mathrm{id}_Z$. Konstruieren Sie Homotopien

$$(P \circ Q) \circ (G \circ F) \sim \mathrm{id}_X \qquad \text{und} \qquad (G \circ F) \circ (P \circ Q) \sim \mathrm{id}_Z \ .$$

Insbesondere ist Homotopieäquivalenz eine Äquivalenzrelation.

*Übungen zu Abschnitt 2.b.*

2.76. Übung. Seien $X$, $Y$ topologische Räume, seien $x \in X$ und $y \in Y$ Punkte. Finden Sie einen natürlichen Gruppenisomorphismus

$$\pi_1\big(X \times Y, (x,y)\big) \cong \pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y) \ .$$

2.77. Übung. Sei $X$ ein topologischer Raum. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen, in dem Sie jeweils geeignete Homotopien angeben.

(1) Jede Abbildung $S^1 \to X$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung.
(2) Jede Abbildung $F\colon S^1 \to X$ lässt sich zu einer Abbildung $\overline{F}\colon D^2 \to X$ mit $\overline{F}|_{\partial D^2} = F$ ausdehnen.
(3) Die Fundamentalgruppen $\pi_1(X,x)$ sind für alle $x \in X$ trivial.
(4) Je zwei Wege zwischen zwei Punkten $x$, $y \in X$ sind homotop.

2.78. Übung. Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe eines wegzusammenhängenden Raumes $X$ genau dann abelsch ist, wenn für alle $x$, $y \in X$ der Isomorphismus

$$\pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y) \ , \qquad [\gamma] \mapsto [\gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0]$$

nicht vom Weg $\gamma_0$ von $x$ nach $y$ abhängt.

2.79. Übung.
(1) Sei $\circ$ eine Verknüpfung auf einer Menge $G$ und $e \in G$. Dann sind äquivalent:
  (a) $(G, \circ, e)$ ist eine Gruppe.
  (b) Es gibt eine Kategorie $\mathcal{G}$ in der jeder Morphismus invertierbar ist (siehe Bemerkung 2.6) mit $\mathrm{Obj}(\mathcal{G}) = \{*\}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(*,*) = G$ mit Verknüpfung $\circ$ und $\mathrm{id}_* = e$.
(2) Seien $G$, $H$ Gruppen, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ Kategorien wie in (1) und sei $F\colon G \to H$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:
  (a) $F$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
  (b) Es gibt einen Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ mit $\mathcal{F}* = *$ und $\mathcal{F} = F\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(*,*) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(*,*)$.

*Übungen zu Abschnitt 2.c.*

2.80. Übung. Seien $T$ (Toast), $S$ (Schinken) und $A$ (Ananas) drei kompakte, paarweise disjunkte Teilmengen des $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass es eine Schnittebene $E \subset \mathbb{R}^3$ gibt, die jede der drei Teilmengen $T$, $S$ und $A$ in zwei Teile von gleichem Volumen zerlegt.

*Hinweis*: Zu jedem $v \in S^2$ existiert (mindestens) ein $d = d_v$, so dass die Hyperebene

$$\big\{x \bigm| \langle x, v\rangle = d\big\}$$

das gesamte Sandwich $T \cup S \cup A$ in zwei gleichgrosse Teile teilt. Überlegen Sie sich, dass die Funktionen $t$, $s$ und $a\colon S^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$t(v) = \mathrm{vol}\big\{\, x \in T \bigm| \langle x, v\rangle \le d_v \,\big\}$$

und $s$, $a$ analog nicht von der Wahl von $d_v$ wie oben, sondern nur von $v$ abhängen, und in $v$ stetig sind. Folgern Sie dann die Behauptung mit dem Satz von Borsuk-Ulam.

2.81. Übung. Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra wie folgt. Sei $P = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n z^0\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom. Zeigen Sie: Für $R > \max\big\{1, \sum_{i=1}^n |a_i|\big\}$ ist der Pfad

$$\gamma\colon S^1 \to S^1 \ , \qquad z \mapsto \gamma(z) := \frac{P(Rz)}{|P(Rz)|}$$

in $S^1$ homotop zu $\gamma_0 : S^1 \to S^1, \gamma_0(z) = z^n$. Folgern Sie: $P$ hat mindestens eine Nullstelle $z_0$ mit $|z_0| \le R$.

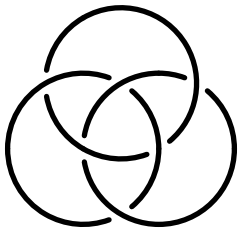
*Übungen zu Abschnitt 2.d.*

2.82. Übung. Seien $G$, $H$ Gruppen. Zeigen Sie:

(1) Das Zentrum $Z(G * H) = \{\, z \in G * H \mid zw = wz \text{ für alle } w \in G * H \,\}$ von $G * H$ ist die triviale Gruppe $\{e\} = \{\emptyset\} \subset G * H$;

(2) alle Torsionselemente (Elemente $w \in G * H$ mit $w^N = e$ für ein $N > 0$) sind von der Form $w = vgv^{-1}$ oder $w = vhv^{-1}$ mit $v \in G * H$ und $g \in G$ bzw. $h \in H$ mit $g^N = e$ bzw. $h^N = e$.

2.83. Übung. Zeigen Sie mit Hilfe von Beispiel 2.47 (2), dass die Borromäischen Ringe $R_1$, $R_2$, $R_3 \subset \mathbb{R}^3$ sich im umgebenden $\mathbb{R}^3$ nicht trennen lassen. Bestimmen Sie dazu die Äquivalenzklasse $[\gamma] \in \pi_1\big(\mathbb{R}^3 \setminus (R_1 \cup R_2), \gamma(0)\big) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ eines Weges $\gamma$, der $R_3$ parametrisiert.



2.84. Übung. Es sei

$$X = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ \frac{1}{n}(\cos\varphi + 1, \sin\varphi) \;\middle|\; \varphi \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

versehen mit der Unterraumtopologie. Zeigen Sie, dass $X$ überabzählbare Fundamentalgruppe hat, indem Sie für jede $\mathbb{Z}$-wertige Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Schleife angeben, die den Kreis mit Radius $\frac{1}{n}$ genau $a_n$-mal umläuft.

2.85. Übung. Es sei $G$ eine Gruppe. Für $g, h \in G$ schreibe $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1} \in G$. Dann definiert man die Abelisierung von $G$ als

$$G^{\mathrm{ab}} = G \,/\, \big(\{\, [g, h] \mid g, h \in G \,\}\big)\ .$$

Es sei $p\colon G \to G^{\mathrm{ab}}$ die Projektion auf den Quotienten. Zeigen Sie:

(1) Die Gruppe $G^{\mathrm{ab}}$ ist abelsch (kommutativ).

(2) Sei $H$ eine abelsche Gruppe und $f\colon G \to H$ ein Homomorphismus, dann gibt es genau einen Homomorphismus $\overline{f}\colon G^{\mathrm{ab}} \to H$, so dass $f = \overline{f} \circ p$.

2.86. Übung. Seien $G$, $H$ Gruppen, $p\colon G \to G^{\mathrm{ab}}$, $q\colon H \to H^{\mathrm{ab}}$ wie in Aufgabe 2.85, und $f\colon G \to H$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie:

(1) Es gibt genau einen Homomorphismus $f^{\mathrm{ab}}\colon G^{\mathrm{ab}} \to H^{\mathrm{ab}}$, so dass $q \circ f = f^{\mathrm{ab}} \circ p$.

(2) Dadurch wird Abelisierung zu einem Funktor von der Kategorie aller Gruppen in die der abelschen Gruppen.

(3) Folgern Sie, dass die freien Gruppen $F_k$ und $F_l$ für $k \neq l$ nicht isomorph sind.

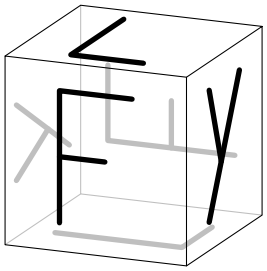
2.87. Übung. Es seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ zwei Kategorien, in denen es alle Produkte „$\times$“, Koprodukte „$\sqcup$“ und Pushouts „$\cup$“ gibt, und sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Konstruieren Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaften Morphismen in $\mathcal{D}$, und zwar

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(A \times B) &\longrightarrow \mathcal{F}(A) \times \mathcal{F}(B), \\ \mathcal{F}(A) \sqcup \mathcal{F}(B) &\longrightarrow \mathcal{F}(A \sqcup B), \\ \mathcal{F}(A) \cup_{\mathcal{F}(C)} \mathcal{F}(B) &\longrightarrow \mathcal{F}(A \cup_C B), \end{aligned}$$

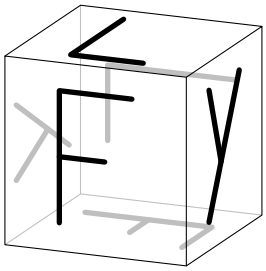
für alle Objekte $A$, $B$, $C$ von $\mathcal{C}$ und Morphismen $f\colon C \to A$, $g\colon C \to B$.

*Übungen zu Abschnitt 2.e.*

2.88. Übung. Man betrachte den Würfel $[0,1]^3$ und erzeuge $X_1$, $X_2$, indem man je zwei Seiten gemäß der beiden Skizzen identifiziert. Finden Sie eine CW-Struktur für *einen* der Räume $X_i$ mit je zwei 0-Zellen, vier 1-Zellen, drei 2-Zellen und einer 3-Zelle, und beweisen Sie *entweder*, dass $\pi_1(X_1, x) = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ zur Gruppe der ganzen Einheits-Quaternionen isomorph ist, *oder* dass $\pi_1(X_2, x) = \mathbb{Z}_8$ zyklisch von der Ordnung 8 ist.



$X_1$



$X_2$

*Anleitung*: Färben Sie in der Skizze jeweils die Ecken und die Kanten, die miteinander identifiziert werden, gleich ein, und geben Sie den Kanten eine Richtung. Orientieren Sie sich dazu an den Buchstaben auf den Seiten. Ein maximaler Baum besteht aus einer Kante zwischen den Ecken. Die verbleibenden gerichteten Kanten liefern drei Erzeuger, die drei Flächen je eine Relation. Versuchen Sie, die so erhaltene Präsentation soweit wie möglich zu vereinfachen.

2.89. Übung. (1) Geben Sie eine CW-Zerlegung von $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ an, so dass $S^n \cap \mathbb{R}^{k+1} \times \{0\}$ aus zwei $k$-Zellen besteht für alle $0 \leq k \leq n$.

(2) Die Gruppe $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ wirkt auf $S^n$ durch Multiplikation. Zeigen Sie, dass der Quotient $S^n/\mathbb{Z}_2$ genau der reell projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ aus Aufgabe 1.130 ist.

(3) Berechnen Sie $\pi_1(\mathbb{R}P^n, [1 : 0 : \cdots : 0])$ für $n \geq 2$.

2.90. Übung. Seien $X_1$, $X_2 \cong S^1 \times S^1$ zwei Tori. Erzeugen Sie $X$, indem Sie $X_1$ und $X_2$ entlang eines Kreises $S^1 \times \{1\}$ miteinander verkleben.

(1) Finden Sie eine CW-Struktur auf $X$ und berechnen Sie so $\pi_1(X)$.

(2) Stellen Sie $X$ als topologisches Produkt aus zwei bekannten Räumen dar, und berechnen Sie so $\pi_1(X)$.

*Übungen zu Abschnitt 2.f.*

2.91. Übung. Seien $p\colon \widetilde{X} \to X$, $p_1\colon \widetilde{X}_1 \to X_1$ und $p_2\colon \widetilde{X}_2 \to X_2$ Überlagerungen. Zeigen Sie:

(1) sei $A \subset X$ eine Unterraum und $\widetilde{A} = p^{-1}A \subset \widetilde{X}$, dann ist $p|_{\widetilde{A}}\colon \widetilde{A} \to A$ eine Überlagerung;

(2) die natürliche Abbildung $p_1 \times p_2\colon \widetilde{X}_1 \times \widetilde{X}_2 \to X_1 \times X_2$ ist eine Überlagerung.

2.92. Übung. Sei $p\colon \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung, wobei $X$ zusammenhängend sei. Zeigen Sie:

(1) die Mengen $p^{-1}(\{x\}) \subset \widetilde{X}$ sind für alle $x \in X$ gleichmächtig;

(2) der Raum $\widetilde{X}$ ist genau dann kompakt, wenn $X$ kompakt ist und $p^{-1}(\{x_0\})$ endlich ist für ein $x_0 \in X$.

2.93. Übung. Wir betrachten den topologischen Raum

$$Y := \left\{ \left(2 + \sin \tfrac{\pi}{t}\right) e^{2\pi i t} \;\middle|\; \varphi \in (0,1] \right\} \cup [1,3] \subset \mathbb{C} \,.$$

(1) Skizzieren Sie $Y$, und zeigen Sie, dass $\pi_1(Y) = 0$.

(2) Beweisen Sie, dass die Radialprojektion $F\colon Y \to S^1 \subset \mathbb{C}$ dennoch keinen Lift $\widetilde{F}\colon Y \to \mathbb{R}$ zulässt.

*Übungen zu Abschnitt 2.g.*

2.94. Übung. Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ die Vereinigung aller Kreise um $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ mit Radius $\frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ wie in Übung 2.84, und $X$ trage die vom $\mathbb{R}^2$ induzierte Unterraumtopologie. Skizzieren Sie $X$ und zeigen Sie, dass $X$ keine einfach zusammenhängende Überlagerung besitzt.

2.95. Übung. Überlagerungstheorie benötigt keine Trennungseigenschaften. Sei $X = ((-1,1) \times \{1,-1\})/\sim$ der Ihnen wohlbekannte, nicht Hausdorffsche Raum aus Beispiel 1.29, wobei die Äquivalenzrelation „$\sim$“ erzeugt werde von $(t,1) \sim (t,-1)$ für alle $t \neq 0$.

(1) Zeigen Sie, dass $X$ zusammenhängend und lokal zusammenziehbar ist.
(2) Bestimmen Sie die universelle Überlagerung von $X$.
(3) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von $X$.

2.96. Übung. Bestimmen Sie wie in Folgerung 2.53 einen CW-Komplex mit Fundamentalgruppe isomorph zur unendlichen Diedergruppe, präsentiert durch

$$\langle a, b \mid a^2, b^2 \rangle \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

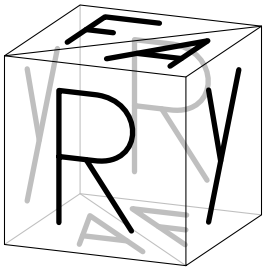
und seine universelle Überlagerung. Sie dürfen Beispiel 2.54 (2) zu Hilfe nehmen.

2.97. Übung. Bestimmen Sie alle zusammenhängenden punktierten Überlagerungen der beiden Räume $X_1$ und $X_2$ aus Übung 2.88 bis auf punktierte Überlagerungs-Homöomorphismen, und geben Sie gegebenenfalls die Gruppe der Decktransformationen an.

2.98. Übung. Verkleben Sie die acht Seiten des unten skizzierten Polytopes wie angegeben, und zeigen Sie, dass der entstehende topologische Raum $X$ die Fundamentalgruppe

$$\pi_1(X, x_0) \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ & 1 & b \\ & & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a,\, b,\, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

besitzt. Finden Sie eine universelle Überlagerung. Wie kann man eine Überlagerung von $X$ konstruieren, die nicht normal ist?



KAPITEL 3

# Homotopiegruppen

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir die Fundamentalgruppe aus der Topologie und erhalten höhere Homotopiegruppen. Wir lernen einige Berechnungsmethoden kennen, unter anderem die lange exakten Sequenzen für Paare und für Faserungen.

Als Beispiel zeigen wir, dass eine stetige Abbildung der $n$-dimensionalen Sphäre $S^n$ in sich durch ihren Abbildungsgrad in $\mathbb{Z}$ bis auf Homotopie eindeutig bestimmt wird, mit anderen Worten gilt $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Als Anwendung beweisen wir den Brouwerschen Fixpunktsatz 0.2. Höhere Homotopiegruppen $\pi_{n+k}(S^n)$ der Sphären lassen sich geometrisch als sogenannte gerahmte Bordismusgruppen $k$-dimensionaler Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n+k}$ interpretieren.

Da wir zur Berechnung der Homotopiegruppen nur wenige Werkzeuge haben, führen wir außerdem stabile Homotopiegruppen ein. Die höheren stabilen Homotopiegruppen der Sphären sind zwar leichter zu bestimmen als die $\pi_k(S^n)$, sind aber dennoch bis zum heutigen Tage noch nicht vollständig bekannt.

## 3.a. Höhere Homotopiegruppen

Wir betrachten zunächst die Kategorie $\mathcal{T}op_+$ der punktierten topologischen Räume aus Definition 2.19. Da wir in diesem Kapitel fast nur punktierte Räume betrachten, schreiben wir statt $(X, x_0)$ auch manchmal nur kurz $X$. Eine Homotopie zwischen zwei punktierten Abbildungen $f,\ g\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ist eine Homotopie relativ zu $\{x_0\}$, siehe Definitionen 2.2 und 2.8. Falls eine solche Homotopie existiert, nennen wir $f$ und $g$ homotop in $\mathcal{T}op_+$ und schreiben wieder kurz $f \sim g$. Wie in Bemerkung 2.3 erhalten wir eine Äquivalenzrelation, die mir der Verkettung von stetigen Abbildungen verträglich ist.

Indem wir als Morphismen zwischen punktierten Räumen nicht einzelne punktierte stetige Abbildungen, sondern punktierte Homotopieklassen betrachten, erhalten wir die punktierte Homotopiekategorie $\mathcal{HT}op_+$, siehe Definition 2.19. Streng genommen sollten wir hier nur gut punktierte Räume zulassen, siehe Definition 3.55 und Beispiel 4.64 (2) unten. Wir schreiben dafür kurz

$$[X, Y] = [(X, x_0), (Y, y_0)] = \mathrm{Hom}_{\mathcal{HT}op_+}\big((X, x_0), (Y, y_0)\big)\ .$$

In Satz 2.21 haben wir bereits gesehen, dass die Fundamentalgruppe einen kovarianten Funktor $\pi_1\colon \mathcal{HT}op_+ \to \mathcal{G}rp$ definiert. Wir wollen jetzt weitere Funktoren $\pi_n$ auf $\mathcal{HT}op_+$ definieren. Für $n = 0$ erhalten wir nur punktierte Mengen, für $n \geq 2$ erhalten wir abelsche Gruppen.

Es seien $A \subset X$ topologische Räume, dann bezeichne $X/A \in \mathcal{T}op_+$ den Quotientenraum mit Basispunkt $A/A$. Er trage die Quotiententopologie aus Definition 1.71, die zugrundeliegende Äquivalenzrelation hat dann also $A$ als eine Äquivalenzklasse, alle Punkte von $X \setminus A$ hingegen bilden je einpunktige Äquivalenzklassen. Falls $A = \emptyset$ und $X$ kompakt ist, definieren wir

$$X/\emptyset = X_+ \cong X \sqcup \{*\} \in \mathcal{T}op_+\ ,$$

wir fügen also zu $X$ einen zusätzlichen Basispunkt $*$ mit der Topologie der disjunkten Vereinigung (Definition 1.39) hinzu. Übrigens ist der Funktor $\cdot_+\colon \mathcal{T}op \to \mathcal{T}op_+$ linksadjungiert zum vergesslichen Funktor $\mathcal{T}op_+ \to \mathcal{T}op$, das heißt, für einen unpunktierten Raum $X$ und einen punktierten Raum $Y$

gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op_+}(X_+, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y) \ .$$

Es sei $I = [0,1]$ das Einheitsintervall und $I^k$ der $k$-dimensionale Einheitswürfel, dann bezeichne

$$\partial I^k = I^k \setminus (0,1)^k$$

den (*geometrischen*) *Rand* des Einheitswürfels. Im Falle $k = 0$ ist $\partial(I^0) = \partial \mathrm{pt} = \emptyset$ leer, dabei ist pt ein fester einpunktiger Raum. Nach Übung 3.103 gibt es für alle $k$ einen Homöomorphismus

$$I^k/\partial I^k \cong S^k \ .$$

Den Basispunkt, also die Äquivalenzklasse des Randes $\partial I^k$, identifizieren wir mit dem Nordpol.

3.1. Definition. Für einen punktierten Raum $X$ und $k \geq 0$ definieren wir die *$k$-te Homotopiegruppe*

$$\pi_k(X) = \big([I^k/\partial I^k, X], 0\big) \ ,$$

dabei sei $0 \in \pi_k(X)$ die Homotopieklasse der konstanten Abbildung $c(t_1, \ldots, t_k) = x_0$. Sei $F\colon X \to Y$ eine punktierte Abbildung, dann definieren wir $\pi_k F\colon \pi_k(X) \to \pi_k(Y)$ durch

$$\pi_k F([f]) = [F \circ f] \ .$$

Sei schließlich $k \geq 1$ und $a = [f]$, $b = [g] \in \pi_k(X)$, dann definieren wir $ab = [fg] \in \pi_k(X)$, wobei

$$(fg)(t_1, \ldots, t_k) = \begin{cases} f([2t_1, t_2, \ldots, t_k]) & \text{falls } t_1 \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ g([2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_k]) & \text{falls } t_1 \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Wie in Bemerkung 2.3 und Satz 2.14 folgt, dass die Verknüpfung und die Abbildung $\pi_k F$ wohldefiniert sind. Für $k = 0$ erhalten wir keine Gruppe, da wir keine Verknüpfung definiert haben, so dass wir hier eigentlich nur 0-te *Homotopiemenge* sagen dürften. Für $\pi_k F$ schreibt man oft auch kurz $F_*$, und für $ab$ schreibt man meist $a + b$, wenn $k \geq 2$.

3.2. Bemerkung. Wir können $\pi_k(X)$ auch wie folgt beschreiben.

(1) Für $k = 0$ ist $I^0/\partial I^0 \cong \{0\}/\emptyset \cong S^0$ ein diskreter Raum aus zwei Punkten $*$ (Basispunkt, Nordpol) und 0 (Südpol). Die Menge der punktierten Abbildungen $f\colon S^0 \to X$ entspricht genau den Punkten $x \in X$, wobei $f(*) = x_0$ und $f(0) = x$. Eine Homotopie $h$ zwischen solchen Abbildungen bildet $\{*\} \times I$ konstant auf $x_0$ ab, und

$$\gamma = h|_{\{0\}\times I}\colon I \to X \qquad \text{mit} \qquad \gamma(t) = h(0,t)$$

beschreibt einen Weg von $f(0)$ nach $g(0)$. Umgekehrt liefert jeder Weg $\gamma\colon I \to X$ von $f(0)$ nach $g(0)$ eine punktierte Homotopie $h$ zwischen $f$ und $g$ mit

$$h(s,t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{falls } s = 0, \text{ und} \\ x_0 & \text{falls } s = *. \end{cases}$$

Somit ist $\pi_0(X)$ gerade die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von $X$, und $0 \in \pi_0(X)$ bezeichnet die Wegzusammenhangskomponente des Basispunktes $x_0$.

(2) Für $k = 1$ ist eine punktierte Abbildung $f\colon S^1 \to X$ gerade eine Schleife am Basispunkt $x_0$, und 0 bezeichnet die konstante Schleife. Die Verkettung entspricht der üblichen Verkettung von Schleifen. Also ist $\pi_1(X)$ genau die Fundamentalgruppe von $X$ aus Abschnitt 2.b.

(3) Da es für alle $k$ einen Homöomorphismus $I^k/\partial I^k \to (S^k, *)$ gibt, gibt es eine natürliche Bijektion

$$\pi_k(X) \cong [S^k, X] \ .$$

3.3. Definition. Es seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ Kategorien und $F$, $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ kovariante (kontravariante) Funktoren. Eine *natürliche Transformation* $\tau\colon F \to G$ ordnet jedem Objekt $X$ von $\mathcal{C}$ einen Morphismus $\tau_X\colon F(X) \to G(X)$ in $\mathcal{D}$ so zu, dass für jeden Morphismus $f\colon X \to Y$ in $\mathcal{C}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\tau_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\tau_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "Gf"] & G(Y) \end{tikzcd} \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[d, "\tau_X"'] & F(Y) \arrow[l, "Ff"'] \arrow[d, "\tau_Y"] \\ G(X) & G(Y) \arrow[l, "Gf"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert. Wenn $\tau_X$ für alle $X$ ein Iso-/Mono-/Epimorphismus ist, spricht man entsprechend von einem *natürlichen* Iso-/Mono-/Epimorphismus.

Oftmals wird das Adjektiv „natürlich“ benutzt, ohne die beteiligten Funktoren im einzelnen zu spezifizieren. In der obigen Bemerkung 3.2 (3) erhalten wir beispielsweise einen natürlichen Isomorphismus zwischen den Funktoren $\pi_k$ und $[S^k, \cdot\,]\colon \mathcal{HT}op_+ \to \mathcal{S}et_+$.

3.4. Beispiel. Der einpunktige Raum pt ist initiales (kofinales) und terminales (finales) Objekt in der Kategorie $\mathcal{T}op_+$. Das heißt, zu jedem punktierten Raum $(X, x_0)$ gibt es genau eine punktierte Abbildung $\mathrm{pt} \to X$, nämlich $* \mapsto x_0$ (pt ist *initial*), und genau eine Abbildung $X \to \mathrm{pt}$, nämlich die konstante Abbildung (pt ist *terminal*). Ein initiales und terminales Objekt heißt auch *Nullobjekt.*

Insbesondere sei $X = S^k$. Wegen Bemerkung 3.2 (3) gilt

$$\pi_k(\mathrm{pt}) \cong [S^k, \mathrm{pt}] = \{e\} = 0\ .$$

Für unser nächstes Zwischenergebnis benötigen wir drei weitere Kategorien. Die Kategorie $\mathcal{S}et_+$ der *punktierten Mengen* hat als Objekte Paare $(A, a_0)$ aus einer Menge $A$ mit einem ausgezeichneten Element $a_0 \in A$. Manchmal schreiben wir wieder kurz $A$ für $(A, a_0)$. Wie bei den punktierten Räumen definieren wir

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et_+}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et_+}((A, a_0), (B, b_0)) = \left\{\, f\colon A \to B \;\middle|\; f(a_0) = b_0 \,\right\}\ .$$

Außerdem sei $\mathcal{G}rp$ die Kategorie der Gruppen, mit Gruppenhomomorphismen als Morphismen, und $\mathcal{A}b$ sei die Kategorie der abelschen Gruppen, wiederum mit Gruppenhomomorphismen als Morphismen.

Wir erhalten „vergessliche“ Funktoren

$$\mathcal{A}b \longrightarrow \mathcal{G}rp \longrightarrow \mathcal{S}et_+\ .$$

Da jede abelsche Gruppe insbesondere eine Gruppe ist, ist der erste Funktor eine Einbettung. Die Kategorie $\mathcal{A}b$ ist sogar eine *volle Unterkategorie* von $\mathcal{G}rp$, das heißt, für zwei Objekte $A$, $B \in \mathcal{A}b$ gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}rp}(A, B)\ .$$

Der zweite Funktor $\mathcal{G}rp \to \mathcal{S}et_+$ ordnet jeder Gruppe $A$ mit neutralem Element $e$ die punktierte Menge $(A, e)$ zu. Da jeder Gruppenhomomorphismus die neutralen Elemente aufeinander abbildet, ist er auch ein Morphismus punktierter Mengen.

3.5. Satz. *Die Homotopiegruppen haben folgende Eigenschaften.*

(1) *Für alle $k \geq 0$ ist $\pi_k\colon \mathcal{HT}op_+ \to \mathcal{S}et_+$ ein Funktor.*
(2) *Für alle $k \geq 1$ ist $\pi_k\colon \mathcal{HT}op_+ \to \mathcal{G}rp$ ein Funktor.*
(3) *Für alle $k \geq 2$ ist $\pi_k\colon \mathcal{HT}op_+ \to \mathcal{A}b$ ein Funktor.*

Damit sind die wichtigsten elementaren Eigenschaften der $\pi_k$ bereits zusammengefasst. Insbesondere sind die Homotopiegruppen homotopieinvariant, verträglich mit punktierten Abbildungen, und für $k \geq 2$ sogar abelsche Gruppen.

Beweis. Der Beweis von (1) und (2) ist ähnlich wie bei der Fundamentalgruppe, siehe Satz 2.14 und Satz 2.21.

Wir beginnen mit (1) für $k \geq 0$ beliebig, dabei hilft Bemerkung 3.2 (1), den Fall $k = 0$ besser zu verstehen. Seien $F\colon X \to Y$ und $f_0 \sim f_1\colon I^k/\partial I^k \to X$ punktiert homotope punktierte Abbildungen. Wie in Bemerkung 2.3 (2) sind dann auch $F \circ f_0$ und $F \circ f_1\colon I^k/\partial I^k \to Y$ punktiert homotop, so dass

$$\pi_k F([f_0]) = [F \circ f_0] = [F \circ f_1] = \pi_k F([f_1]) \ .$$

Wir erhalten also in der Tat eine Abbildung

$$\pi_k F\colon \pi_k(X) \to \pi_k(Y) \ .$$

Es gilt offensichtlich $\pi_k \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{\pi_k(X)}$. Für $F\colon X \to Y$, $G\colon Y \to Z$ und $f\colon I^k/\partial I^k \to X$ folgt außerdem

$$\pi_k(G \circ F)([f]) = [G \circ F \circ f] = \pi_k G([F \circ f]) = \pi_k G\big(\pi_k F([f])\big) \ ,$$

also gilt auch $\pi_k(G \circ F) = (\pi_k G) \circ (\pi_k F)$, und $\pi_k$ ist insbesondere ein Funktor von der Kategorie $\mathcal{T}op_+$ in die Kategorie $\mathcal{S}et_+$ der punktierten Mengen.

Seien jetzt $F_0 \sim F_1\colon X \to Y$ punktiert homotop, und sei $f\colon I^k/\partial I^k \to X$ eine punktierte Abbildung. Dann sind $F_0 \circ f$, $F_1 \circ f$ nach Bemerkung 2.3 (2) punktiert homotop, also gilt

$$\pi_k F_0([f]) = [F_0 \circ f] = [F_1 \circ f] = \pi_k F_1([f]) \ .$$

Somit ist $\pi_k$ mit Homotopie verträglich und liefert daher eine Abbildung

$$\pi_k\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{HT}op_+}(X, Y) = [X, Y] \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et_+}\big(\pi_k(X), \pi_k(Y)\big) \ .$$

Also ist $\pi_k$ sogar ein Funktor von der Kategorie $\mathcal{HT}op_+$ in die Kategorie $\mathcal{S}et_+$ der punktierten Mengen. Damit ist (1) gezeigt.

Zu (2) sei $k \geq 1$. Punktierte Homotopien $H_1$, $H_2\colon (I^k/\partial I^k) \times I \to X$ zwischen $f_1$ und $g_1$ beziehungsweise $f_2$ und $g_2\colon I^k/\partial I^k \to X$ lassen sich zusammensetzen zu einer Homotopie $H$ zwischen $f_1 f_2$ und $g_1 g_2$ mit

$$H\big([t_1, \ldots, t_k], s\big) = \begin{cases} H_1\big([2t_1, t_2 \ldots, t_k], s\big) \ , & \text{falls } t_1 \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ H_2\big([2t_1 - 1, t_2 \ldots, t_k], s\big) \ , & \text{falls } t_1 \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Genauso wie in Definition 3.1 behandeln wir also die Variable $t_1$ so, wie die Variable $t$ in Definition 2.13 und im Beweis von Satz 2.14. Mit dem gleichen Trick lassen sich die Homotopien aus dem Beweis von Satz 2.14 zum Beweis der Gruppenaxiome auf die hiesige Situation übertragen.

Außerdem gilt wie im Beweis von Satz 2.21 für $F\colon X \to Y$ und $f$, $g\colon I^k/\partial I^k \to X$, dass

$$\pi_k F([f]) \pi_k F([g]) = (F \circ f)(F \circ g) = F \circ (fg) = \pi_k F([fg]) \ ,$$

also ist $\pi_k F$ ein Gruppenhomomorphismus. Die Funktoraxiome

$$\pi_k \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{\pi_k(X)} \qquad \text{und} \qquad \pi_k(F \circ G) = \pi_k F \circ \pi_k G$$

folgen bereits aus (1), also ist (2) bewiesen.

Zum Beweis von (3) benötigen wir die Variablen $t_1$ und $t_2$. Wir definieren eine punktierte Homotopie $H$ zwischen $fg$ und $gf$ durch

$$H\big([t_1,\dots,t_k],s\big) = \begin{cases} f\big(\big[2t_1,\frac{t_2}{1-2s},t_3,\dots,t_k\big]\big) & \text{für } s\in\big[0,\frac14\big]\ ,\quad t_1\in\big[0,\frac12\big]\ ,\quad t_2\in\big[0,1-2s\big]\ ,\\ g\big(\big[2t_1-1,\frac{t_2-2s}{1-2s},t_3,\dots,t_k\big]\big) & \text{für } s\in\big[0,\frac14\big]\ ,\quad t_1\in\big[\frac12,1\big]\ ,\quad t_2\in\big[2s,1\big]\ ,\\ f\big(\big[2(t_1-s)+\frac12,2t_2,\dots\big]\big) & \text{für } s\in\big[\frac14,\frac34\big]\ ,\quad t_1\in\big[s-\frac14,s+\frac14\big]\ ,\quad t_2\in\big[0,\frac12\big]\ ,\\ g\big(\big[2(t_1+s)-\frac32,2t_2-1,\dots\big]\big) & \text{für } s\in\big[\frac14,\frac34\big]\ ,\quad t_1\in\big[\frac34-s,\frac54-s\big]\ ,\quad t_2\in\big[\frac12,1\big]\ ,\\ f\big(\big[2t_1-1,\frac{t_2}{2s-1},t_3,\dots,t_k\big]\big) & \text{für } s\in\big[\frac34,1\big]\ ,\quad t_1\in\big[\frac12,1\big]\ ,\quad t_2\in\big[0,2s-1\big]\ ,\\ g\big(\big[2t_1,\frac{t_2+2s-2}{2s-1},t_3,\dots,t_k\big]\big) & \text{für } s\in\big[\frac34,1\big]\ ,\quad t_1\in\big[0,\frac12\big]\ ,\quad t_2\in\big[2-2s,1\big]\ ,\\ x_0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Hieraus folgt, dass $\pi_k(X)$ abelsch ist für $k\geq 2$. Nach (2) ist $\pi_kF\colon \pi_k(X)\to\pi_k(Y)$ für alle stetigen Abbildungen $F\colon X\to Y$ ein Homomorphismus, der nach (1) nur von der punktierten Homotopieklasse von $F$ abhängt, also erhalten wir einen Funktor $\pi_k\colon \mathcal{HT}op_+\to\mathcal{A}b$. □

3.6. Bemerkung. Nach Bemerkung 2.6 sind Isomorphismen in der Homotopiekategorie $\mathcal{HT}op_+$ gerade punktierte Homotopieäquivalenzen. Ein topologischer Raum ist nach Beispiel 2.5 genau dann zusammenziehbar, wenn er zum einpunktigen Raum pt homotopieäquivalent ist. Da ein Funktor isomorphe Objekte auf isomorphe Objekte abbildet, folgt aus Beispiel 3.4, dass

$$X \text{ zusammenziehbar} \qquad\Longrightarrow\qquad \pi_k(X)=0 \text{ für alle } k\geq 0\ .$$

Wir werden später im Satz von Whitehead sehen, dass für eine große Klasse topologischer Räume auch die Umkehrung gilt.

3.7. Proposition. *Für alle $k\geq 1$ liefert jede relative Homotopieklasse $[\gamma]$ von Pfaden von $x_0$ nach $x_1$ einen Isomorphismus*

$$[\gamma].\colon \pi_k(X,x_1)\to\pi_k(X,x_0) \qquad \textit{mit} \qquad [\gamma].[f]=[\gamma.f]\ ,$$

$$\textit{wobei}\qquad \gamma.f=\begin{cases} f\big(2t_1-\frac12,\dots,2t_k-\frac12\big) & \textit{für } \frac14\leq t_1,\dots,t_k\leq\frac34,\ \textit{und}\\ \gamma\big(2-4\max\big\{\big|t_1-\frac12\big|,\dots,\big|t_k-\frac12\big|\big\}\big) & \textit{sonst.}\end{cases}$$

*Insbesondere wirkt die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ durch Gruppenautomorphismen auf $\pi_k(X)$.*

Für $k=1$ erhalten wir innere Automorphismen von $\pi_1(X)$, siehe Bemerkung 2.16.

Beweis. Mit ähnlichen Methoden wie im vorangegangenen Beweis überprüft man die folgenden Aussagen.

(1) Die Abbildung $\gamma.f$ ist stetig.
(2) Relativ homotope Pfade $\gamma_0$, $\gamma_1$ von $x_0$ nach $x_1$ und punktiert homotope Abbildungen $f_0$, $f_1\colon I^k/\partial I^k\to(X,x_1)$ liefern punktiert homotope Abbildungen $\gamma_0.f_0$, $\gamma_1.f_1$. Wenn wir Schleifen an $x_0$ betrachten, erhalten wir also eine wohldefinierte Abbildung $\pi_1(X)\times\pi_k(X)\to\pi_k(X)$.
(3) Es gilt $\gamma_0.(\gamma_1.f)\sim(\gamma_0\gamma_1).f$, und für den konstanten Pfad $e$ gilt $e.f\sim f$. Wenn wir Schleifen an $x_0$ betrachten, ist die obige Abbildung also eine Gruppenwirkung.
(4) Die obige Wirkung ist mit der Gruppenstruktur auf $\pi_k(X)$ verträglich. □

Wir wollen uns jetzt die Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{HT}op}(S^n,X)=[S^n_+,X]$ der *freien Homotopieklassen* von Abbildungen von $S^n$ nach $X$ anschauen.

3.8. Folgerung (aus Proposition 3.7). *Es sei $X$ ein wegzusammenhängender topologischer Raum und $k \geq 1$. Dann steht die Menge $[S^n_+, X]$ der freien Homotopieklassen nicht punktierter Abbildungen $S^n \to X$ in natürlicher Bijektion zur Menge $\pi_k(X)/\!\!/\pi_1(X)$ der Orbiten der $\pi_1(X)$-Wirkung auf $\pi_k(X)$.*

Wir schreiben hier $\pi_k(X)/\!\!/\pi_1(X)$ um deutlich zu machen, dass es sich nicht um den Quotienten nach einer Untergruppe handelt.

Beweis. Fixiere $x_0 \in X$. Es sei $f\colon S^k \to X$ gegeben, dann wählen wir einen Weg $\gamma$ in $X$ von $x_0$ zu $f(e_1)$ und erhalten nach Proposition 3.7 ein Element $[\gamma.f] \in \pi_k(X, x_0)$. Für einen weiteren Weg $\gamma'$ gilt dann

$$[\gamma'.f] = [\gamma'\bar{\gamma}].[\gamma.f] \ ,$$

der Orbit von $[\gamma.f]$ unter der $\pi_1(X, x_0)$-Wirkung hängt also nicht von der Wahl von $\gamma$ ab.

Sei $h$ eine freie Homotopie zwischen $f$ und $g\colon S^n \to X$, dann setzen wir $\gamma(t) = h(e_1, t)$. Mithilfe von $h$ lässt sich eine punktierte Homotopie zwischen $f$ und $\gamma.g$ konstruieren, so dass der obige Orbit auch nicht von der freien Homotopieklassen von $f$ abhängt. Also ist die obige Zuordnung wohldefiniert. Sie ist auch natürlich im Sinne von Definition 3.3, denn sei $F\colon X \to Y$ stetig, dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} {[S^n_+, X]} \arrow[r] \arrow[d, "F\circ"'] & \pi_k(X)/\!\!/\pi_1(X) \arrow[d, "F_*"] \\ {[S^n_+, Y]} \arrow[r] & \pi_k(Y)/\!\!/\pi_1(Y) . \end{tikzcd}$$

Surjektivität ist klar, da wir jede punktierte Abbildung als nicht punktierte Abbildung auffassen können. Zur Injektivität bleibt zu zeigen, dass $f$, $g\colon S^k \to X$ frei homotop sind, wenn $[\gamma.f] = [\gamma'.g]$ für geeignete Wege $\gamma$, $\gamma'$ gilt. Aber das folgt, da $\gamma.f$ stets frei homotop zu $f$ ist. □

3.9. Definition. Es sei $(X, x_0)$ ein punktierter topologischer Raum und $k \geq 1$. Wir definieren den *$k$-ten Schleifenraum* von $(X, x_0)$ durch

$$\Omega^k(X) = \Omega^k(X, x_0) = \left\{ f\colon I^k \to X \;\middle|\; \partial I^k \subset f^{-1}(x_0) \right\} \subset C(I^k, X) \ ,$$

wobei $C(I^k, X)$ die kompakt-offene und $\Omega^k(X, x_0)$ die Unterraumtopologie trage. Als Basispunkt von $\Omega^k(X, x_0)$ fixieren wir die konstante Abbildung auf $x_0$.

3.10. Bemerkung. Es gilt (Übung 3.105, siehe Bemerkung 2.17):

(1) für $k$, $\ell \geq 0$ gilt $\Omega^k(\Omega^\ell(X)) \cong \Omega^{k+\ell}(X)$;
(2) für $k$, $\ell \geq 0$ gilt $\pi_k(\Omega^\ell(X)) \cong \pi_{k+\ell}(X)$.

## 3.b. Die lange exakte Homotopiesequenz eines Paares

Ein *punktiertes Paar* $(X, A)$ besteht aus einem punktierten topologischen Raum $X$ mit Basispunkt $x_0$ und einer Teilmenge $A \subset X$, so dass $x_0 \in A$. Eine *Abbildung* zwischen punktierten Paaren $(X, A)$, $(Y, B)$ ist eine punktierte Abbildung $f\colon X \to Y$, so dass $f(A) \subset B$. Die punktierten Paare mit ihren Abbildungen bilden eine Kategorie

$$\mathcal{P}air_+ \ .$$

Zwei Abbildungen $f$, $g\colon (X, A) \to (Y, B)$ punktierter Paare heißen (*als Abbildungen punktierter Paare*) *homotop,* wenn es eine punktierte Homotopie $h\colon X \times I \to Y$ zwischen ihnen gibt, so dass

$$A \times I \subset h^{-1}(B) \ . \tag{3.1}$$

Die punktierten Paare mit Homotopieklassen von Abbildungen bilden eine Kategorie

$$\mathcal{HP}air_+ \ .$$

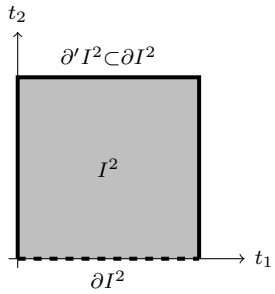



Abbildung 3.1. Das Tripel $\partial' I^2 \subset \partial I^2 \subset I^2$

Für $k \geq 1$ bezeichne

$$\partial' I^k = \partial I^k \setminus \big((0,1)^{k-1} \times \{0\}\big)$$

den Rand von $I^k$ ohne eine (offene) Seite, siehe Abbildung 3.1. Da wir im Folgenden manche Abbildungen auf $(0,1)^{k-1} \times \{0\}$ nicht festlegen, nennen wir $I^{k-1} \times \{0\}$ die „offene Seite“ von $I^k$.

3.11. Definition. Für ein punktiertes Paar $(X, A)$ und $k \geq 1$ definieren wir

$$\pi_k(X, A) = \big(\big[\big(I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k\big), (X, A)\big], 0\big) \ ,$$

dabei bezeichne wieder 0 die konstante Abbildung auf $x_0 \in A$. Seien $a = [f]$, $b = [g] \in \pi_k(X, A)$ und $k \geq 2$, dann definieren wir $ab = [fg] \in \pi_k(X, A)$ wie in Definition 3.1. Außerdem bezeichnen wir die Homotopieklasse der konstanten Abbildung $c(t_1, \ldots, t_k) = x_0$ mit $0 = [c] \in \pi_k(X, A)$. Sei schließlich $F\colon (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung punktierter Paare, dann definieren wir $\pi_k F\colon \pi_k(X, A) \to \pi_k(Y, B)$ durch

$$\pi_k F([f]) = [F \circ f] \ .$$

Für $k = 0$ setzen wir

$$\pi_0(X, A) = \pi_0(X/A) = \pi_0(X)/\pi_0(A) \ ,$$

wobei der rechte Quotient als Quotient punktierter Mengen zu verstehen ist. Für eine Abbildung $F$ punktierter Paare sei $\pi_0 F\colon \pi_0(X, A) \to \pi_0(Y, B)$ die von $\pi_0 F\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ induzierte Abbildung.

Man beachte, dass wir aufgrund der Sonderrolle der Koordinate $t_k$ in der Definition von $\partial' I^k$ eine gesonderte Definition für $\pi_0$ benötigen und im Falle $k = 1$ keine Gruppenstruktur erhalten. Wie in Bemerkung 2.3 folgt wieder, dass die Verknüpfung und die Abbildung $\pi_k F$ wohldefiniert sind. Für $\pi_k F$ schreibt man oft auch kurz $F_*$, und für $ab$ schreibt man meist $a + b$, wenn $k \geq 3$.

3.12. Bemerkung. Wenn in der obigen Definition $A = \{x_0\}$ gilt, dann wird $\partial I^k/\partial' I^k$ auf $x_0$ abgebildet. Nach der charakteristischen Eigenschaft der Quotiententopologie in Satz 1.72 entprechen solche Abbildungen $f\colon I^k/\partial' I^k \to (X, x_0)$ genau den Abbildungen aus Definition 3.1. Es folgt

$$\pi_k(X, \{x_0\}, x_0) = \pi_k(X, x_0)$$

sogar für alle $k \geq 0$, aber für $k = 1$ fehlt der linken Seite die Gruppenstruktur.

3.13. Bemerkung. Nach Übung 3.103 gibt es für alle $k \geq 1$ einen Homöomorphismus

$$\big(I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k\big) \cong (D^k, S^{k-1}) \ .$$

Dabei liegt der Basispunkt auf dem Rand $S^{k-1}$ der Einheitskreissscheibe. Wir erhalten also für $k \geq 1$ natürliche Bijektionen

$$\pi_k(X, A, x_0) = [(D^k, S^{k-1}, *), (X, A, x_0)] \ .$$

3.14. Proposition. *Die relativen Homotopiegruppen haben folgende Eigenschaften.*

(1) *Für alle $k \geq 0$ ist $\pi_k \colon \mathcal{HP}air_+ \to \mathcal{S}et_+$ ein Funktor.*
(2) *Für alle $k \geq 2$ ist $\pi_k \colon \mathcal{HP}air_+ \to \mathcal{G}rp$ ein Funktor.*
(3) *Für alle $k \geq 3$ ist $\pi_k \colon \mathcal{HP}air_+ \to \mathcal{A}b$ ein Funktor.*

Beweis. Völlig analog zum Beweis von Satz 3.5, wobei wir aber, da die Variable $t_k$ eine Sonderrolle spielt, $k \geq 2$ in (2) und $k \geq 3$ in (3) fordern müssen. □

3.15. Proposition. *Für alle $k \geq 1$ liefert jede relative Homotopieklasse $[\gamma]$ von Pfaden in $A$ von $x_0$ nach $x_1$ einen Isomorphismus*

$$[\gamma].\colon \pi_k(X, A, x_1) \to \pi_k(X, A, x_0) \qquad \textit{mit} \qquad [\gamma].[f] = [\gamma.f] \ ,$$

$$\textit{wobei} \quad \gamma.f = \begin{cases} f\big(2t_2 - \frac{1}{2} \ldots, 2t_{k-1} - \frac{1}{2}, 2t_k\big) & \textit{für } \frac{1}{4} \leq t_1, \ldots, t_{k-1} \leq \frac{3}{4} \ , \ \ t_k \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma\big(2 - 4\max\big\{\big|t_1 - \frac{1}{2}\big|, \ldots, \big|t_{k-1} - \frac{1}{2}\big|, \big|\frac{t_k}{2}\big|\big\}\big) & \textit{sonst.} \end{cases}$$

*Insbesondere wirkt die Fundamentalgruppe $\pi_1(A)$ durch Gruppenautomorphismen auf $\pi_k(X, A)$.*

Beweis. Analog zum Beweis von Proposition 3.7. □

3.16. Bemerkung. Für $k \geq 1$, $\ell \geq 0$ gilt (Übung 3.106, siehe Bemerkung 3.10)

$$\pi_k\big(\Omega^\ell(X), \Omega^\ell(A)\big) \cong \pi_{k+\ell}(X, A) \ .$$

Für $k = 0$ ist die Behauptung falsch, wie man am Beispiel $(D^1, S^0)$ mit $\ell = 1$ sehen kann.

Wir definieren exakte Sequenzen hier in $\mathcal{S}et_+$. Sei $f \colon (A, a_0) \to (B, b_0)$ eine punktierte Abbildung, dann definieren wir ihren *Kern* als

$$\ker f = f^{-1}\{b_0\} \subset A \ .$$

Außerdem sei $0 = \mathrm{pt} = \{*\}$ eine feste einpunktige Menge. Mit dieser Notation sieht alles genauso aus wie in der Kategorie der Gruppen oder $R$-Moduln, die wir später noch betrachten werden. Allerdings folgt in $\mathcal{S}et_+$ aus $\ker f = \{a_0\} \cong \{*\}$ noch nicht, dass $f$ injektiv ist.

3.17. Definition. Eine *Sequenz* in $\mathcal{S}et_+$ ist eine Familie $(f_i \colon M_i \to M_{i-1})_{i \in \mathbb{Z}}$ punktierter Abbildungen zwischen punktierten Mengen. Eine *Sequenzabbildung* von $(f_i \colon M_i \to M_{i-1})$ nach $(g_i \colon N_i \to N_{i-1})$ vom Grad $d \in \mathbb{Z}$ ist eine Familie punktierter Abbildungen $(k_i \colon M_i \to N_{i+d})_{i \in \mathbb{Z}}$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \cdots & M_{i-1} \arrow[l] \arrow[d, "k_{i-1}"'] & M_i \arrow[l, "f_i"'] \arrow[d, "k_i"'] & M_{i+1} \arrow[l, "f_{i+1}"'] \arrow[d, "k_{i+1}"'] & \cdots \arrow[l] \\ \cdots & N_{i+d-1} \arrow[l] & N_{i+d} \arrow[l, "g_{i+d}"'] & N_{i+d+1} \arrow[l, "g_{i+d+1}"'] & \cdots \arrow[l] \end{tikzcd}$$

kommutiert, das heißt, es gilt $k_{i-1} \circ f_i = g_{i+d} \circ k_i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Eine Sequenz $(f_i \colon M_i \to M_{i-1})$ heißt *exakt an der Stelle $M_i$*, wenn $\ker f_i = \operatorname{im} f_{i+1} \subset M_i$ gilt. Sie heißt (*lange*) *exakte Sequenz,* wenn sie an allen Stellen exakt ist. Eine *kurze exakte Sequenz* ist eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longleftarrow A' \longleftarrow A \longleftarrow A'' \longleftarrow 0 \ .$$

Völlig analog definieren wir Sequenzen und exakte Sequenzen in den Kategorien $\mathcal{G}rp$ und $\mathcal{A}b$.

Kurze exakte Sequenzen denken wir uns nach links und rechts fortgesetzt durch $0 = \{*\}$ beziehungsweise durch die einelementige Gruppe. Wir werden Diagramme zu Sequenzen teils wie oben mit Pfeilen von rechts nach links darsellen, teils aber auch die Richtung der Pfeile umdrehen:

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

3.18. Bemerkung. Wenn in einer exakten Sequenz von Gruppen eine der Abbildungen konstant auf $e$ abbildet, dann erlaubt es Rückschlüsse über die benachbarten Gruppen und Abbildungen, siehe Übung 3.107. Das passiert insbesondere dann, wenn eine der Gruppen trivial ist.

Es sei $(X, A, x_0)$ ein punktiertes Paar. Dann haben wir natürliche Inklusionen in $\mathcal{T}op_+$ beziehungsweise $\mathcal{P}air_+$,

$$i\colon (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0) \qquad \text{und} \qquad j\colon (X, \{x_0\}, x_0) \hookrightarrow (X, A, \{x_0\})\ .$$

3.19. Satz (Homotopiesequenz eines Paares). *Es sei $(X, A, x_0)$ ein punktiertes Paar. Für $k \geq 1$ und $[f] \in \pi_k(X, A, x_0)$ mit $f\colon I^k/\partial' I^k \to X$ definiere $\partial[f] = [\partial f] \in \pi_{k-1}(A, x_0)$ durch*

$$\partial f = f|_{(I^{k-1}\times\{0\})/(\partial I^{k-1}\times\{0\})}\colon I^{k-1}/\partial I^{k-1} \to A\ .$$

*Dann erhalten wir eine natürliche lange exakte Sequenz*

$$\cdots \longleftarrow \{*\} \longleftarrow \pi_0(X, A) \xleftarrow{j_*} \pi_0(X) \xleftarrow{i_*} \pi_0(A) \xleftarrow{\partial} \pi_1(X, A) \xleftarrow{j_*} \pi_1(X) \xleftarrow{i_*} \pi_1(A) \xleftarrow{\partial} \cdots$$

*Die Gruppe $\pi_1(A, x_0)$ wirkt durch Sequenzabbildungen, wobei sie auf $\pi_0(X)$, $\pi_0(A)$ und $\pi_0(X, A)$ trivial wirke.*

Von rechts kommend bis $\pi_1(X)$ handelt es sich dabei um eine exakte Sequenz von Gruppen, bis $\pi_2(X)$ sogar um eine exakte Sequenz abelscher Gruppen. Die Abbildung $\partial$ nennt man auch den *Verbindungshomomorphismus.* Die Sequenz setzt sich durch $\{*\}$ unendlich weit nach links fort. Eine Verallgemeinerung für Tripel findet sich in Übung 3.110.

Beweis. Zunächst einmal ist die Einschränkung $\partial f$ wie gefordert eine punktierte Abbildung. Außerdem ist $\partial$ mit punktierten Homotopien von Abbildungen von Paaren verträglich und respektiert die Gruppenstruktur, falls $k \geq 2$. Also ist die Abbildung $\partial\colon \pi_k(X, A, x_0) \to \pi_{k-1}(A, x_0)$ wohldefiniert.

Sei $F\colon (X, A, x_0) \to (Y, A, y_0)$ eine Abbildung punktierter Paare, dann induziert $F$ eine Sequenzabbildung von der Sequenz des Paares $(X, A, x_0)$ in die des Paares $(Y, A, y_0)$. Somit ist die Sequenz natürlich, das heißt, $i_*$, $j_*$ und $\partial$ sind natürliche Transformationen zwischen Funktoren $\mathcal{HP}air_+ \to \mathcal{S}et_+$ im Sinne von Definition 3.3.

Schließlich sind die Gruppenwirkungen aus den Propositionen 3.7 und 3.15 ebenfalls mit $i_*$, $j_*$ und $\delta$ verträglich; dabei wirkt $g \in \pi_1(A)$ als $i_*g$ auf $\pi_k(X)$.

Zur Exaktheit sind sechs Inklusionen zu beweisen. Wir überprüfen nur zwei davon, der Rest ist Übung 3.108. Zu einer Abbildung $f\colon I^k/\partial I^k \to X$ wie in Definition 3.1 oder $f\colon I^k/\partial' I^k \to X$ wie in Definition 3.11 bezeichne dabei $\bar{f}$ die entsprechende Abbildung auf $I^k$. Wenn wir umgekehrt nur $\bar{f}$ angeben, so lässt sich mit der charakteristischen Eigenschaft der Quotiententopologie aus Satz 1.72 (2) die Stetigkeit der zugehörigen Abbildung $f$ überprüfen. Im Folgenden sei stets $k \geq 1$.

„$\operatorname{im} j_* \subset \ker \partial$“. Gegeben sei $f\colon I^k/\partial I^k \to X$. Da $I^{k-1} \times \{0\} \subset \partial I^k$, ist $\partial(j \circ \bar{f}) = f|_{I^{k-1}\times\{0\}}$ die konstante Abbildung auf den Basispunkt, also $\partial j_*[f] = 0 \in \pi_{k-1}(A)$.

„$\ker \partial \subset \operatorname{im} j_*$“. Es sei $f\colon I^k/\partial' I^k \to X$ gegeben, und es sei $h\colon (I^{k-1}/\partial I^{k-1}) \times I \to A$ eine Nullhomotopie von $\partial f$ in $A$. Betrachte $\bar{g}\colon I^k \to X$ mit

$$\bar{g}(t_1, \ldots, t_k) = \begin{cases} \bar{h}(t_1, \ldots, t_{k-1}, 1 - 2t_k) & \text{für } t_k \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ \bar{f}(t_1, \ldots, t_{k-1}, 2t_k - 1) & \text{für } t_k \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Betrachte die Homotopie $\bar{k}\colon I^k \times I \to X$ zwischen $j \circ \bar{g}$ und $\bar{f}$ mit

$$\bar{k}(t_1, \ldots, t_k, s) = \bar{g}\left(t_1, \ldots, t_{k-1}, \frac{s + (2-s)t_k}{2}\right)\ .$$

Da $\bar{g}$ ganz $\partial' I^k$ auf $x_0$ abbildet, bildet sie $\partial' I^k \times I$ auf $x_0$ ab. Da $h$ Werte in $A$ annimmt, erhalten wir

$$\bar{k}(t_1, \ldots, t_{k-1}, 0, s) = \bar{g}\Big(t_1, \ldots, t_{k-1}, \frac{s}{2}\Big) = \bar{h}(t_1, \ldots, t_{k-1}, 1-s) \in A\,.$$

Somit $j_*[g] = [f] \in \pi_k(X, A)$. □

Das folgende Lemma ist sehr hilfreich im Umgang mit exakten Sequenzen.

3.20. Lemma (Vierer- und Fünferlemma). *Gegeben sei eine Sequenzabbildung*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "a"'] & B \arrow[l] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[l] \arrow[d, "c"'] & D \arrow[l] \arrow[d, "d"'] & E \arrow[l] \arrow[d, "e"'] \\
A' & B' \arrow[l] & C' \arrow[l] & D' \arrow[l] & E' \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

*in $\mathcal{S}et_+$. Beide Zeilen seien exakt. Außerdem seien $C$, $C'$ Gruppen und $c$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt:*

(1) *seien $b$, $d$ surjektiv und $a$ injektiv, und sei $B'$ ebenfalls eine Gruppe und $C' \to B'$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist $c$ surjektiv;*
(2) *seien $b$, $d$ injektiv und $e$ surjektiv. Dann ist $c$ injektiv;*
(3) *seien $b$, $d$ bijektiv, $a$ injektiv und $e$ surjektiv, und $C' \to B'$ wie in* (1)*. Dann ist $c$ bijektiv.*

Beweis. Man beweist (1) und (2) durch Diagrammjagd. Es folgt (3). □

3.21. Folgerung. *Es sei $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren. Wenn $f$ und $f|_A$ für alle $k$ Isomorphismen $\pi_k(X) \to \pi_k(Y)$ beziehungsweise $\pi_k(A) \to \pi_k(B)$ induzieren, dann ist $f_*\colon \pi_k(X, A) \to \pi_k(Y, B)$ ebenfalls ein Isomorphismus für alle $k$.* □

## 3.c. Faserungen

Die lange exakte Sequenz aus Satz 3.19 ist in der vorliegenden Form noch nicht wirklich hilfreich, um Homotopiegruppen zu bestimmen. Hier formulieren wir sie um in eine lange exakte Sequenz für Serre-Faserungen. Später werden wir noch eine (nicht so lange, aber noch wichtigere) exakte Sequenz für Kofaserungen kennenlernen.

3.22. Definition. Eine Abbildung $p\colon E \to B$ hat die *Homotopieliftungseigenschaft* bezüglich eines Raumes $X$, wenn zu jeder Abbildung $\tilde{f}\colon X \to E$ und jeder Abbildung $h\colon X \times I \to B$ mit

$$h(\,\cdot\,, 0) = p \circ \tilde{f}\colon X \to B$$

ein Lift $\tilde{h}\colon X \times I \to E$ existiert mit

$$p \circ \tilde{h} = h \qquad \text{und} \qquad \tilde{h}(\,\cdot\,, 0) = \tilde{f}\colon X \to E\,.$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, hook, "\times\{0\}"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{h}"] & B
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung $p$ heißt *Serre-Faserung,* wenn sie die Homotopieliftungseigenschaft bezüglich $X = I^k$ für alle $k \geq 0$ besitzt. Sie heißt *Hurewicz-Faserung,* wenn sie die Homotopieliftungseigenschaft sogar bezüglich aller topologischen Räume $X$ besitzt.

Wenn die Abbildung $p$ überdies punktiert ist, nennen wir sie eine punktierte Serre- beziehungsweise Hurewicz-Faserung, und $p^{-1}(b_0) \subset E$ ihre *Faser.*

3.23. Bemerkung. Nach Übung 3.111 sind die Paare $(I^k, I^{k-1} \times \{0\})$ und $(I^k, \partial' I^k)$ homöomorph. Also ist eine Abbildung $p\colon E \to B$ genau dann eine Serre-Faserung, wenn für alle $k \geq 1$ und alle Abbildungen $f\colon I^k \to B$ und $\tilde{g}\colon \partial' I^k \to E$ mit

$$f|_{\partial' I^k} = p \circ \tilde{g}\colon \partial' I^k \to B$$

eine Abbildung $\tilde{f}\colon I^k \to E$ existiert mit

$$p \circ \tilde{f} = f \qquad \text{und} \qquad \tilde{f}|_{\partial' I^k} = \tilde{g}\ .$$

Das gleiche geht selbstverständlich auch, wenn man eine andere offene Seite aus $\partial I^k$ entfernt.

$$\begin{tikzcd} \partial' I^k \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ I^k \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & B \end{tikzcd}$$

3.24. Proposition. *Es sei $p\colon (E, e_0) \to (B, b_0)$ eine Serre-Faserung, und es sei $F = p^{-1}(b_0) \subset E$. Dann induziert $p$ für alle $k > 0$ einen Isomorphismus*

$$p_*\colon \pi_k(E, F, e_0) \to \pi_k(B, \{b_0\}, b_0) \cong \pi_k(B, b_0)\ .$$

Für $k = 0$ ist diese Aussage falsch: es kann durchaus Wegzusammenhangskomponenten von $B$ geben, deren Urbild leer ist.

Beweis. Zur Surjektivität betrachte eine punktierte Abbildung $f\colon I^k/\partial I^k \to (B, b_0)$, aufgefasst als Abbildung $(I^k, \partial I^k) \to (B, \{b_0\})$. Die Abbildung $\tilde{g}\colon \partial' I^k \to \{e_0\} \subset E$ sei konstant. Dann liefert Bemerkung 3.23, angewandt auf $\bar{f}\colon I^k \to B$, das gesuchte Urbild $\tilde{\bar{f}}$, denn $\tilde{f}|_{\partial' I^k} = \tilde{g}$ ist die konstante Abbildung, und auf der „offenen Seite“ $I^{k-1} \times \{0\}$ nimmt $\tilde{f}$ Werte in $F = p^{-1}(e_0)$ an.

Zur Injektivität seien $\tilde{f}_0$, $\tilde{f}_1\colon (I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k) \to (E, F)$ mit $p_*[\tilde{f}_0] = p_*[\tilde{f}_1]$ gegeben. Dann bilden $p \circ \tilde{f}_i$ den gesamten Rand nach $b_0$ ab. Es sei $h\colon (I^k/\partial I^k) \times I \to B$ eine punktierte Homotopie zwischen $p \circ \tilde{f}_0$ und $p \circ \tilde{f}_1$ in $B$. Definiere $\tilde{g}\colon \partial I^{k+1} \setminus \big((0,1)^{k-1} \times \{0\} \times (0,1)\big) \to E$ durch

$$\tilde{g}(t_1, \ldots, t_{k+1}) = \begin{cases} \tilde{\bar{f}}_i(t_1, \ldots, t_k) & \text{falls } t_{k+1} = i \in \{0,1\}, \text{ und} \\ e_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, siehe Abbildung 3.2. Nach Bemerkung 3.23, angewandt auf $\bar{h}$, existiert eine Abbildung $\tilde{\bar{h}}$, die $\tilde{g}$ fortsetzt, und auf der „offenen Seite“ $t_k = 0$ Werte in $F$ annimmt, da $\bar{h}$ dort auf $b_0$ abbildet. Also ist $\tilde{h}$ eine punktierte Homotopie von Paaren zwischen $\tilde{f}_0$ und $\tilde{f}_1$, was zu zeigen war. □

Es ist nicht ungewöhnlich, dass Injektivität ähnlich wie Surjektivität bewiesen wird: „Injektivität bis auf Homotopie ist Surjektivität für Homotopien“.

3.25. Satz (Homotopiesequenz für Serre-Faserungen). *Es sei $p\colon (E, e_0) \to (B, b_0)$ eine punktierte Serre-Faserung, und es sei $i\colon F = p^{-1}(b_0) \to E$ die Inklusion der Faser. Dann existiert für alle $k \geq 1$ ein Verbindungshomomorphismus $\partial\colon \pi_k(B) \to \pi_{k-1}(F)$, so dass die Sequenz*

$$\pi_0(B) \xleftarrow{p_*} \pi_0(E) \xleftarrow{i_*} \pi_0(F) \xleftarrow{\partial} \pi_1(B) \xleftarrow{p_*} \pi_1(E) \longleftarrow \ldots$$

*exakt und natürlich ist.*

Im Gegensatz zur Homotopiesequenz 3.19 eines Paares bricht diese Sequenz bei $\pi_0(B)$ ab.

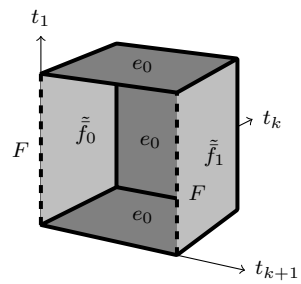



Abbildung 3.2. Der Definitionsbereich von $\tilde{g}$

Beweis. Mit Proposition 3.24 erhalten wir eine Sequenzabbildung

$$\begin{tikzcd}
\dots & \pi_{k-1}(F,e_0) \arrow[l] \arrow[d, equal] & \pi_k(E,F,e_0) \arrow[l, "\partial'"'] \arrow[d, "p_*"', "\cong"] & \pi_k(E,e_0) \arrow[l, "j_*"'] \arrow[d, equal] & \dots \arrow[l] \\
\dots & \pi_{k-1}(F,e_0) \arrow[l] & \pi_k(B,b_0) \arrow[l, "\partial"'] & \pi_k(E,e_0) \arrow[l, "p_*"'] & \dots \arrow[l] ,
\end{tikzcd}$$

hierbei sei $\partial'$ der Verbindungshomomorphismus aus Satz 3.19. In der Tat kommutiert das rechte Quadrat, da $p \circ j = \mathrm{id}_{(B,\{b_0\})} \circ p$. Das linke Quadrat nehmen wir als Definition für den Verbindungshomomorphismus $\partial = \partial' \circ (p_*)^{-1}$. Da die obere Sequenz exakt ist, ist es die untere auch.

Da nicht notwendigerweise $\pi_0(E,F) \cong \pi_0(B)$ gilt, bleibt Exaktheit bei $\pi_0(E,e_0)$ zu prüfen. Sei zunächst $f\colon S^0 \to (F,e_0)$ gegeben, dann bildet $p \circ i \circ f$ konstant auf $b_0$ ab, also gilt $\operatorname{im} i_* \subset \ker p_*$. Sei umgekehrt $f\colon S^0 \to (E,e_0)$ mit $[f] \in \ker p_*$ gegeben, dann existiert eine punktierte Nullhomotopie von $p \circ f$ in $B$, also ein Pfad von $p(f(0))$ nach $b_0$. Mit der Homotopieliftungseigenschaft erhalten wir einen Pfad von $f(0)$ nach $F$, also eine punktierte Homotopie von $f$ zu einem Element in $\operatorname{im} i_*$.

Zur Natürlichkeit betrachte ein kommutatives Diagramm punktierter Serre-Faserungen

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & D \arrow[d, "q"] \\
B \arrow[r, "f"] & C .
\end{tikzcd}$$

Seien $F = p^{-1}(b_0)$ und $G = q^{-1}(c_0)$ die Fasern, dann bildet $g|_F$ die Faser $F$ auf $G$ ab. Betrachte jetzt die zugehörigen langen exakten Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
\dots & \pi_{k-1}(E) \arrow[l] \arrow[d, "g_*"'] & \pi_{k-1}(F) \arrow[l, "i_*"'] \arrow[d, "g|_{F*}"'] & \pi_k(B) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_k(E) \arrow[l, "p_*"'] \arrow[d, "g_*"'] & \dots \arrow[l] \\
\dots & \pi_{k-1}(D) \arrow[l] & \pi_{k-1}(G) \arrow[l, "i_*"'] & \pi_k(C) \arrow[l, "\partial"'] & \pi_k(D) \arrow[l, "p_*"'] & \dots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Die äußeren Quadrate kommutieren, da die entsprechenden punktierten Abbildungen ebenfalls kommutieren. Nach Definition des Verbindungshomomorphismus kommutiert das innere Quadrat, da die Sequenz aus Satz 3.19 natürlich ist. □

3.26. Folgerung (aus dem Liftungssatz 2.58). *Es sei $p\colon (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung. Dann ist die Abbildung*

$$p_* = \pi_k p\colon \pi_k(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_k(X, x_0)$$

*ein Isomorphismus für alle $k \geq 2$. Außerdem haben wir eine exakte Sequenz*

$$\pi_0(X) \longleftarrow \pi_0(\widetilde{X}) \longleftarrow \pi_0(p^{-1}(x_0)) \longleftarrow \pi_1(X) \xleftarrow{\pi_1 p} \pi_1(\widetilde{X}) \longleftarrow 0 .$$

Die Injektivität von $\pi_1 p$ kennen wir bereits aus Satz 2.56.

Beweis. Nach dem Homotopieliftungssatz 2.27 sind alle Überlagerungen Hurewicz-Faserungen, also erst recht Serre-Faserungen. Dabei ist die Faser $F = p^{-1}(x_0)$ einer Überlagerung diskret, und $S^k$ ist zusammenhängend für $k \geq 1$, folglich sind alle stetigen punktierten Abbildungen $S^k \to F$ konstant. Es folgt $\pi_k(F) = 0$ für alle $k \geq 1$. Mit Satz 3.25 und Bemerkung 3.18 folgen die Behauptungen. $\square$

3.27. Beispiel. Die universelle Überlagerung von $S^1$ ist $\mathbb{R}$ nach Beispiel 2.26, also zusammenziehbar. Wegen den Bemerkungen 3.2 (1) und 3.6, Satz 2.28 und Folgerung 3.26 gilt daher

$$\pi_k(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 1, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3.28. Beispiel. Es sei $E = B \times F$ ein Produkt punktierter Räume und $p\colon E \to B$ die Projektion auf den ersten Faktor. Dann ist $p$ nach Übung 3.112 eine Hurewicz-, also auch eine Serre-Faserung. Es gilt $\pi_k(E) = \pi_k(B) \times \pi_k(F)$, siehe Übung 3.104. Also hat die Homotopiesequenz die Form

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}(F) \xleftarrow{\partial} \pi_k(B) \xleftarrow{p_*} \underbrace{\pi_k(B) \times \pi_k(F)}_{\cong \pi_k(E)} \xleftarrow{i_*} \pi_k(F) \xleftarrow{\partial} \pi_{k+1}(B) \longleftarrow \dots$$

Die Abbildung $p_*$ ist die Projektion auf $\pi_k(B)$, und $i_*(a) = (0, a) \in \pi_k(B) \times \pi_k(F)$ für alle $a \in \pi_k(F)$. Die Sequenz ist offensichtlich bei $\pi_k(E)$ exakt. Da $p_*$ surjektiv und $i_*$ injektiv ist, folgt aus der Exaktheit an den anderen Stellen, dass

$$\ker \partial = \operatorname{im} p_* = \pi_k(B) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{im} \partial = \ker i_* = 0 \ ,$$

also ist der Verbindungshomomorphismus $\partial = 0$ für alle $k$.

3.29. Bemerkung. Allgemeiner sei $p\colon E \to B$ eine Faserung. Unter einem *Schnitt* von $p$ verstehen wir ein Rechtsinverses von $p$, also eine Abbildung $s\colon B \to E$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_B$. Mit anderen Worten ist $\operatorname{im} B \subset E$ in diesem Fall ein Retrakt von $E$. Im obigen Beispiel $E = B \times F$ liefert jeder Punkt $f \in F$ einen Schnitt $s_f$ mit $s_f(b) = (b, f)$.

Wenn $p$ einen Schnitt besitzt, gibt es in der Homotopiesequenz 3.25 ein Rechtsinverses $s_*$ von $p_*$. Aus $p_* \circ s_* = \mathrm{id}_{\pi_k(B)}$ folgt die Surjektivität von $p*$, somit gilt $\partial = 0$. Also können wir $\partial$ als *Hindernis* gegen die Existenz eines Schnittes auffassen.

In Übung 5.84 werden wir sehen, dass die Homotopiesequenz 3.25 ab $k \geq 2$ genau die gleiche Gestalt wie im obigen Beispiel hat. Im Falle $k = 1$ können wir lediglich folgern, dass $\pi_1(E)$ isomorph zu einem semidirekten Produkt $\pi_1(B) \ltimes \pi_1(F)$ ist.

3.30. Definition. Ein *Faserbündel* mit *typischer Faser* $F$ ist eine stetige Abbildung $p\colon E \to B$, so dass jeder Punkt $b$ eine Umgebung $U \subset B$ besitzt, für die ein Homöomorphismus $\varphi\colon p^{-1}(U) \to U \times F$ existiert, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei $\mathrm{pr}_U$ die Projektion auf den ersten Faktor bezeichne. Dann heißt $E$ der *Totalraum,* $B$ die *Basis,* und $\varphi$ eine *lokale Trivialisierung* oder *Bündelkarte* von $p\colon E \to B$.

Ein Produkt wie in Beispiel 3.28 heißt auch *triviales Faserbündel,* daher die Terminologie.

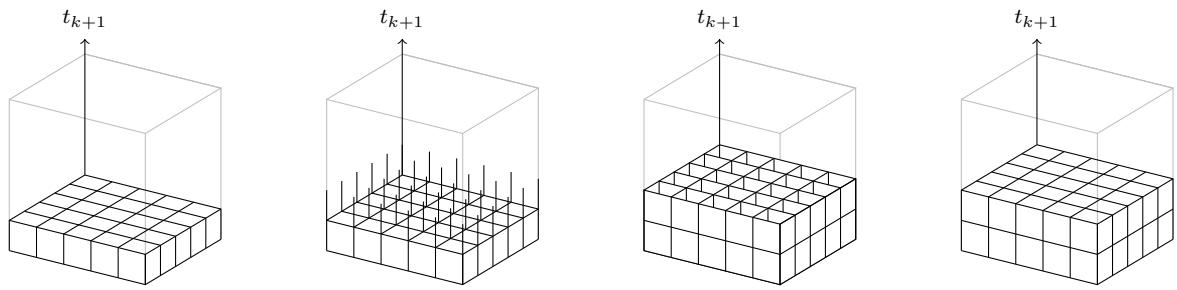



Abbildung 3.3. Schichtweise Konstruktion von $\tilde{h}$

3.31. Proposition. *Es sei $p\colon E \to B$ eine Abbildung, und jeder Punkt $b \in B$ besitze eine Umgebung $U \subset B$, so dass $p\colon p^{-1}(U) \to U$ eine Serre-Faserung ist. Dann ist $p$ ebenfalls eine Serre-Faserung.*

3.32. Folgerung. *Jedes Faserbündel $p\colon E \to B$ ist eine Serre-Faserung.* □

Faserbündel über parakompakten Räumen sind sogar Hurewicz-Faserungen [**tD2**, Section 13.4], aber das zeigen wir hier nicht.

Beweis von Proposition 3.31. Es sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $B$ durch Mengen $U$, über denen $p$ eine Serre-Faserung ist. Es sei $X = I^k$ für $k \geq 0$, und $h\colon X \times I \to B$ und $\tilde{f}\colon X \to E$ seien Abbildungen wie in Definition 3.22. Dann ist $\{\, h^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U} \,\}$ eine offene Überdeckung von $I^{k+1}$. Nach dem Satz 1.55 von Lebesgue können wir $I^{k+1}$ für ein geeignetes $N \gg 1$ in $N^{k+1}$ Würfel der Kantenlänge $\frac{1}{N}$ unterteilen, so dass jeder dieser Würfel ganz in einer der Mengen $h^{-1}(U)$ mit $U \in \mathcal{U}$ enthalten ist.

Um $\tilde{h}$ zu konstruieren, setzen wir $\tilde{f}$ von $I^k \times \{0\}$ Schicht für Schicht auf $I^{k+1}$ fort. Wir konstruieren in jeder Schicht $\tilde{h}$ zunächst auf den Strecken über allen Ecken, dann auf den Quadraten über allen Kanten, und so weiter, und zum Schluss auf den $k+1$-dimensionalen Würfeln selbst, siehe Abbildung 3.3. Dabei müssen wir in jedem Schritt von einer Menge der Form $\partial' I^i$ auf $I^i$ fortsetzen. Dazu benutzen wir Bemerkung 3.23 und die Tatsache, dass wir stets über einer der offenen Mengen $U \subset B$ arbeiten, für die $p^{-1}(U) \to U$ eine Serre-Faserung ist. □

3.33. Beispiel. Der *komplex projektive Raum* $\mathbb{C}P^n$ ist definiert als Quotientenraum

$$\mathbb{C}P^n = \big(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\big)/\!\sim\ ,$$

wobei $(z_0, \dots, z_n) \sim (w_0, \dots, w_n)$ genau dann, wenn es $a \in \mathbb{C}^\times$ mit $a \cdot (z_0, \dots, z_n) = (w_0, \dots, w_n)$ gibt, siehe Übung 1.129. Man schreibt für die Äquivalenzklassen auch gern $(z_0 : \cdots : z_n) = q(z_0, \dots, z_n)$. Der $\mathbb{C}P^n$ wird überdeckt von den $n+1$ Teilmengen $U_0, \dots, U_n$ mit

$$U_k = \big\{\, (z_0 : \cdots : z_n) \;\big|\; z_k \neq 0 \,\big\} = \operatorname{im}(q|_{\mathbb{C}^k \times \{0\} \times \mathbb{C}^{n-k}})\ .$$

Wir betrachten die sogenannte *Hopf-Faserung*

$$p\colon S^{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \overset{q}{\twoheadrightarrow} \mathbb{C}P^n\ .$$

Über jedem $U_k$ erhalten wir als lokale Trivialisierung den Homöomorphismus

$$\varphi\colon p^{-1}(U_k) \to U_k \times S^1 \qquad \text{mit} \qquad \varphi(z_0, \dots, z_n) = \big((z_0 : \cdots : z_n), \tfrac{z_k}{|z|_k}\big)$$

$$\text{und} \qquad \varphi^{-1}\big((z_0 : \cdots : z_n), w\big) = \frac{w(z_k^{-1} z_0, \dots, 1, \dots, z_k^{-1} z_n)}{\big\|(z_k^{-1} z_0, \dots, 1, \dots, z_k^{-1} z_n)\big\|}\ .$$

Also ist die Hopf-Faserung ein Faserbündel mit typischer Faser $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$.

Es gilt $S^2 \cong \mathbb{C}P^1$ (Riemannsche Zahlenkugel). Also erhalten wir als Spezialfall insbesondere die klassische Hopf-Faserung $S^3 \to S^2$ mit Faser $S^1$. Die zugehörige exakte Homotopiesequenz 3.25 hat die Form

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\pi_{k-1}(S^1)}_{=0 \text{ für } k\neq 2} \xleftarrow{\partial} \pi_k(S^2) \xleftarrow{p_*} \pi_k(S^3) \xleftarrow{i_*} \underbrace{\pi_k(S^1)}_{=0 \text{ für } k\neq 1} \longleftarrow \cdots$$

Also gilt $\pi_k(S^2) \cong \pi_k(S^3)$ für alle $k \geq 3$.

3.34. Beispiel. Der *quaternionisch projektive Raum* $\mathbb{H}P^n$ ist definiert als Quotient

$$\mathbb{H}P^n = \big(\mathbb{H}P^{n+1} \setminus \{0\}\big)/\!\sim\ ,$$

wobei $(q_0, \ldots, q_n) \sim (r_0, \ldots, r_n)$ genau dann, wenn es $a \in \mathbb{H}^\times$ mit $a \cdot (q_0, \ldots, q_n) = (r_0, \ldots, r_n)$ gibt. Mit den gleichen Argumenten wie oben erhalten wir die *quaternionische Hopf-Faserung*

$$p\colon S^{4n+3} \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{H}P^n$$

als Faserbündel mit typischer Faser $S^3 \subset \mathbb{H}^\times$.

Es gilt $S^4 \cong \mathbb{H}P^1$, also existiert ein Faserbündel $p\colon S^7 \to S^4$ mit typischer Faser $S^3$. Die zugehörige Homotopiesequenz hat die Gestalt

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}(S^3) \xleftarrow{\partial} \pi_k(S^4) \xleftarrow{p_*} \pi_k(S^7) \xleftarrow{i_*} \pi_k(S^3) \xleftarrow{\partial} \pi_{k+1}(S^4) \longleftarrow \cdots$$

## 3.d. Der Ausschneidungssatz

Für kleine $k$ ist es manchmal möglich, die $k$-te Homotopiegruppe eines Raumes aus den $k$-ten Homotopien von Unterräumen (genauer, von Unterraum-Paaren) zusammenzusetzen, ähnlich wie im Satz 2.42 von Seifert und van Kampen. Einen direkter Vergleich mit diesem Ergebnis nehmen wir später vor.

3.35. Definition. Ein Raum $X \neq \emptyset$ heißt *$n$-zusammenhängend,* wenn $\pi_k(X, x) = 0$ für alle $x \in X$ und alle $0 \leq k \leq n$.

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ mit $X \neq \emptyset$ heißt *$n$-zusammenhängend,* wenn für alle $x \in X$ die induzierte Abbildung $f_*\colon \pi_k(X, x) \to \pi_k(Y, f(x))$ ein Isomorphismus ist für alle $0 \leq k < n$ und surjektiv für $k = n$.

Ein Paar $(X, A)$ mit $A \neq \emptyset$ heißt *$n$-zusammenhängend,* wenn die Inklusion $A \hookrightarrow X$ eine $n$-zusammenhängende Abbildung ist.

Eine Abbildung $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ von Paaren mit $A$, $B \neq \emptyset$ heißt *$n$-zusammenhängend,* wenn für alle $x \in A$ und alle $0 \leq k < n$ die induzierte Abbildung $f_*\colon \pi_k(X, A, x) \to \pi_k(Y, B, f(x))$ ein Isomorphismus ist, und eine Surjektion für $k = n$.

Für einen Raum bedeutet 0-zusammenhängend das gleiche wie wegzusammenhängend, siehe Bemerkung 3.2 (1), und 1-zusammenhängend bedeutet wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend nach Bemerkung 3.2 (2). Ein Paar $(X, A)$ ist 0-zusammenhängend, wenn jede Wegzusammenhangskomponente von $X$ einen Punkt von $A$ enthält.

3.36. Bemerkung. Für einen Raum $X$ sind äquivalent:

(1) der Raum $X$ ist $n$-zusammenhängend;
(2) für alle $k \leq n$ lässt sich jede Abbildung $S^k \to X$ zu einer Abbildung $D^{k+1} \to X$ fortsetzen;
(3) für alle $k \leq n$ lässt sich jede Abbildung $\partial I^{k+1} \to X$ zu einer Abbildung $I^{k+1} \to X$ fortsetzen.

Die Äquivalenz von (2) und (3) ist offensichtlich, da die Paare $(D^{k+1}, S^k)$ und $(I^{k+1}, \partial I^{k+1})$ homöomorph sind.

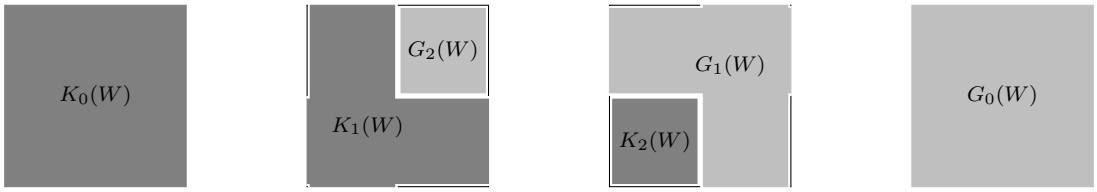



Abbildung 3.4. Die Mengen $K_r(W)$ und $G_r(W)$

Zur Äquivalenz von (1) und (2) sei $f\colon S^k = I^k/\partial I^k \to X$ gegeben. Eine Nullhomotopie $h$ von $f$ ist eine Fortsetzung von $f$ auf $I^{k+1}/\partial' I^{k+1}$ und umgekehrt, und das Paar $(I^{k+1}/\partial' I^{k+1}, I^k/\partial I^k)$ ist homöomorph zu $(D^{k+1}, S^k)$.

3.37. Bemerkung. Für ein Paar $(X, A)$ und $n \geq 0$ sind äquivalent:

(1) das Paar $(X, A)$ ist $n$-zusammenhängend;
(2) für alle $k \leq n$ und alle $x \in A$ gilt $\pi_k(X, A, x) = 0$;
(3) für alle $1 \leq k \leq n$ ist jede Abbildung $(I^k, \partial I^k) \to (X, A)$ als Abbildung von Paaren homotop zu einer Abbildung $(I^k, \partial I^k) \to (A, A)$, und jeder Punkt in $X$ lässt sich durch einen Weg mit $A$ verbinden;
(4) für alle $k \leq n$ lässt sich jede Abbildung $(\partial' I^{k+1}, \partial I^k \times \{0\}) \to (X, A)$ zu einer Abbildung $(I^{k+1}, I^k \times \{0\}) \to (X, A)$ fortsetzen.

Die Äquivalenz von (1) und (2) ergibt aus der langen exakten Sequenz 3.19 des Paares $(X, A)$.

Zu (2) $\Rightarrow$ (3) überlegt man sich, dass die Paare $(I^k, \partial I^k)$, $(D^k, S^{k-1})$ und $(I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k)$ paarweise homöomorph sind.

Wie in Bemerkung 3.23 existiert ein Homöomorphismus $g\colon I^{k+1} \to I^{k+1}$, der $\partial' I^{k+1}$ auf $I^k \times \{0\}$ abbildet und umgekehrt. Zu (3) $\Rightarrow$ (4) sei $h\colon (I^{k+1}, \partial' I^{k+1}) \to (X, A)$ die Homotopie aus (3) zu $f \circ g^{-1}|_{I^k \times \{0\}}$. Dann ist $h \circ g$ die gesuchte Fortsetzung.

Für (4) $\Rightarrow$ (2) betrachte $f\colon (I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k) \to (X, A)$. Da das Paar $(I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k)$ zu $(\partial' I^{k+1}, \partial I^k \times \{0\})$ homöomorph ist, ist $f$ relativ zum Rand $\partial I^k/\partial' I^k$ homotop zu einer Abbildung $(I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k) \to (A, A)$, liegt also im Bild von $\pi_k(A, A, x) = 0$.

3.38. Satz (Ausschneidungssatz, Blakers-Massey). *Es sei $X$ ein topologischer Raum und $U$, $V \subset X$ offen mit $X = U \cup V$ und $U \cap V \neq \emptyset$. Das Paar $(U, U \cap V)$ sei $p$-zusammenhängend, und $(V, U \cap V)$ sei $q$-zusammenhängend mit $p$, $q \geq 0$, dann ist $i\colon (U, U \cap V) \to (X, V)$ eine $(p+q)$-zusammenhängende Abbildung von Paaren.*

Der Name rührt daher, dass wir die abgeschlossene Menge $V \setminus U$ aus $X$ „ausschneiden“ können, ohne die ersten $p+q-1$ Homotopiegruppen zu verändern. Mit Hilfe dieses Satzes werden wir später einige nichttriviale Homotopiegruppen ausrechnen und viele wichtige Resultate beweisen.

Wir kopieren den Beweis von Puppe, siehe [**tD2**, Abschnitt 6.9]. Als erstes bringen wir die Repräsentanten von Homotopieklassen oder Homotopien zwischen ihnen in eine spezielle Form (Propositionen 3.39, 3.40), siehe Abbildung 3.6. Anschließend können wir den Anteil mit Werten in $V \setminus U$ wegdeformieren (Proposition 3.41).

Dazu betrachten wir achsenparallele Würfel der Form

$$W(a, \delta, J) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_i \in [a_i, a_i + \delta] \text{für } i \in J, \text{ und } x_i = a_i \text{ sonst} \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

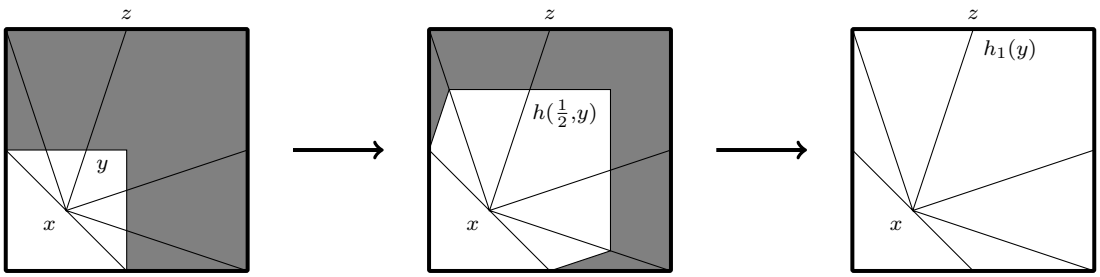



Abbildung 3.5. Die Homotopie $h_1$

für $a \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ und $J \subset \{1, \dots, n\}$. Für $W = W(a, \delta, J)$ und $0 \le r$ definieren wir Teilmengen $K_r(W)$ und $G_r(W) \subset W$ — wie in Abbildung 3.4 angedeutet — durch

$$\begin{aligned} K_r(W) &= \left\{ x \in W \;\middle|\; x_i \in \left(a_i, a_i + \tfrac{\delta}{2}\right) \text{ für mindestens } r \text{ verschiedene } i \in J \right\}, \\ G_r(W) &= \left\{ x \in W \;\middle|\; x_i \in \left(a_i + \tfrac{\delta}{2}, a_i + \delta\right) \text{ für mindestens } r \text{ verschiedene } i \in J \right\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Inbesondere gilt $K_r(W) = G_r(W) = \emptyset$ falls $r > \dim W = \#J$. Unter den Seiten von $W(a, \delta, J)$ verstehen wir alle Würfel $W(a', \delta, J')$ mit $J' \subset J$ und mit $a'_i \in \{a_i, a_i + \delta\}$ für alle $i \in J \setminus J'$ und $a'_i = a_i$ sonst. Die Vereinigung aller echten Seiten $W$ heißt wieder der (*geometrische*) *Rand* $\partial W$ von $W$.

3.39. Proposition. *Es seien $r \le \dim W$, $f\colon W \to X$ und $A \subset X$ gegeben, so dass*

$$f^{-1}(A) \cap W' \subset K_r(W')$$

*für alle Seiten $W'$ von $W$ gilt. Dann ist $f$ homotop relativ zum Rand $\partial W$ zu einer Abbildung $g\colon W \to X$ mit $g^{-1}(A) \subset K_r(W)$. Eine entsprechende Aussage gilt, wenn man $K_r$ überall durch $G_r$ ersetzt.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $W = I^k$ ein Einheitswürfel. Wir definieren eine Abbildung $h = h_1\colon I^k \to I^k$ homotop zur Identität und ersetzen $f$ durch die homotopie Abbildung $f \circ h$. Dazu fixieren wir $x = \left(\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4}\right)$. Für jeden Strahl $s$ am Punkt $x$ sei $y$ der Schnittpunkt von $s$ mit $\partial[0, \frac{1}{2}]^k$, und $z$ sei der Schnittpunkt von $s$ mit $\partial I^k$. Dann bilde $h_1$ die Strecke $xy$ affin auf die Strecke $xz$, und die Strecke $yz$ konstant auf den Punkt $z$ ab, siehe Abbildung 3.5. Diese Abbildung ist stetig, eine Homotopie zur Identität wird gegeben durch $h_t = (1-t)\,\mathrm{id}_W + t\,h_1$, und man sieht leicht, dass $g = f \circ h_1$ die gestellte Bedingung erfüllt. □

Wir betrachten jetzt eine Abbildung $f\colon I^k \to X$. Nach dem Satz 1.55 können wir $I^k$ für ein geeignetes $N$ so in $N^k$ Würfel der Kantenlänge $\frac{1}{N}$ zerlegen, dass jeder dieser Würfel entweder in $f^{-1}(U)$ oder in $f^{-1}(V)$ liegt.

3.40. Proposition. *Das Paar $(U, U \cap V)$ sei $p$-zusammenhängend, und $(V, U \cap V)$ sei $q$-zusammenhängend für $p$, $q \ge 0$. Dann existiert zu jeder Abbildung $f\colon I^k \to X$ eine Homotopie $h$ von $f$ zu $g\colon I^k \to X$, die für alle Seiten $W$ von Würfeln der obigen Zerlegung folgendes erfüllt:*

(1) *falls $W \subset f^{-1}(U \cap V)$, gelte $h(x,t) = f(x)$ für alle $x \in W$, $t \in I$;*
(2) *falls $W \subset f^{-1}(U)$, gelte $h(x,t) \subset U$ für alle $x \in W$, $t \in I$, und $g^{-1}(U \setminus V) \cap W \subset K_{p+1}(W)$;*
(3) *falls $W \subset f^{-1}(V)$, gelte $h(x,t) \subset V$ für alle $x \in W$, $t \in I$, und $g^{-1}(V \setminus U) \cap W \subset G_{q+1}(W)$.*

Beweis. Wir konstruieren $h$ der Reihe nach für alle Ecken der Würfel $W$, dann für alle Kanten, und so weiter, und zum Schluss für die Würfel $W$ selbst.

Sei also zunächst $W = \{x\}$ eine Ecke. Falls $f(x) \in U \cap V$, definieren wir $h|_{W\times I}$ durch (1). Sei also $f(x) \in U \setminus V$. Da $\pi_0(U, U \cap V) = 0$, finden wir einen Weg von $x$ zu einem Punkt in $U \cap V$; dieser sei unsere Homotopie. Genauso verfahren wir, falls $f(x) \in V \setminus U$.

Sei jetzt $W$ ein Würfel der Dimension $n \geq 1$. Nach Induktion ist $h$ auf $\partial W \times I$ bereits konstruiert und wird auf $W \times \{0\}$ durch $f|_W$ gegeben. Falls $W \subset f^{-1}(U \cap V)$, definieren wir $h|_{W\times I}$ wieder durch (1). Gelte also $W \subset f^{-1}(U)$, aber nicht $W \subset f^{-1}(V)$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Falls $n \leq p$, gilt $\pi_n(U, U \cap V) = 0$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $h(x,t) \in U$ und $h(x,1) \in U \cap V$ für alle $x \in \partial W$ und alle $t \in I$. Wir setzen $f|_{W\times\{0\}}$ und $h|_{\partial W\times I}$ gemäß Bemerkung 3.37 (4) zu einer Abbildung $h\colon W \times I \to U$ so fort, dass $h(x,1) \in U \cap V$ für alle $x \in W$. Es folgt

$$g^{-1}(U \setminus V) = \emptyset = K_{p+1}(W) \ .$$

Falls $n > p$, konstruieren wir $h$ und $g$ mit Hilfe von Proposition 3.39. Analog verfahren wir, falls $W \subset f^{-1}(V)$, aber nicht $W \subset f^{-1}(U)$. □

3.41. Proposition. *Es sei $k \leq p+q$ und $f\colon (I^k, \partial' I^k) \to (X, U)$ eine Abbildung mit $I^{k-1}\times\{0\} \subset f^{-1}(V)$. Dann existiert eine Homotopie $h\colon I^{k+1} \to X$ von $f$ zu einer Abbildung $g\colon I^k \to U$ mit folgenden Eigenschaften.*

(1) *Wenn $f$ eine Seite $W \subset \partial' I^k$ von $I^k$ nach $U \cap V$ abbildet, gelte $h(x,t) = f(x)$ für alle $t \in I$ und alle $x \in W$.*
(2) *Für alle $t \in I$ und alle $x \in \partial' I^k$ gelte $h(x,t) \in U$.*
(3) *Für alle $t \in I$ und alle $x \in I^{k-1} \times \{0\}$ gelte $h(x,t) \in V$.*

Beweis. Wir wenden Proposition 3.40 an und erhalten eine zu $f$ homotope Abbildung $I^k \to X$. Die Bedingungen (1)–(3) in Proposition 3.40 stellen sicher, dass diese Homotopie die obigen Eigenschaften (1)–(3) erfüllt. Wir dürfen daher ohne Einschränkung für alle $W$ annehmen, dass

$$f^{-1}(U \setminus V) \subset K_{p+1}(W) \qquad \text{und} \qquad f^{-1}(V \setminus U) \subset G_{q+1}(W) \ .$$

Betrachte jetzt die orthogonale Projektion $P\colon I^k \to I^{k-1} \times \{0\}$. Sei $W'$ das Bild unter $p$ eines Würfels $W$ der obigen Zerlegung. Da wir die Kontrolle über eine Koordinate verlieren, gilt

$$K_{p+1}(W) \subset P^{-1}\big(K_p(W')\big) \qquad \text{und} \qquad G_{q+1}(W) \subset P^{-1}\big(G_q(W')\big) \ .$$

Da $k - 1 < p + q$, sind die Mengen $K_p(W')$ und $G_q(W')$ nach Konstruktion (3.2) disjunkt, siehe Abbildung 3.4. Wegen Proposition 3.40 (2) und (3) sind dann auch die kompakten Mengen

$$A = \big\{\, P(x) \;\big|\; x \in f^{-1}(U \setminus V) \,\big\} \qquad \text{und} \qquad B = \big\{\, P(x) \;\big|\; x \in f^{-1}(V \setminus U) \,\big\} \subset I^{k-1}$$

disjunkt. Da $\partial' I^k$ auf $U$ abgebildet wird, ist insbesondere $B$ auch disjunkt zu $\partial I^{k-1}$. Nach Urysohns Lemma 1.30 existiert eine stetige Funktion $u\colon I^{k-1} \to I$ mit $u|_{A\cup\partial I^{k-1}} = 0$ und $u|_B = 1$.

Insbesondere liegt $f^{-1}(U \setminus V)$ oberhalb des Graphen von $u$ in $I^k$, und $f^{-1}(V \setminus U)$ unterhalb, siehe Abbildung 3.6. Wir konstruieren eine Homotopie relativ zu $\partial' I^k$ durch

$$h(x_1, \ldots, x_k, t) = f\big(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + (1 - x_k)tu(x_1, \ldots, x_{k-1})\big) \ .$$

Diese Homotopie bildet ganz $\partial I^k \times I$ nach $V$ ab, und die Abbildung $g = h(\,\cdot\,, 1)$ nimmt Werte in $U$ an. Zusammen mit der Homotopie aus Proposition 3.40 ist die Behauptung bewiesen. □

Beweis des Ausschneidungssatzes 3.38. Es sei $k = 0$. Jede Wegzusammenhangskomponente von $U$ und $V$ enthält Punkte von $U \cap V$, da $p$, $q \geq 0$. Es folgt

$$\pi_0(X, V) = \{*\} = \pi_0(U, U \cap V) \ .$$

Zur Surjektivität der Abbildung

$$i_*\pi_k(U, U \cap V, x) \to \pi_k(X, V, x)$$

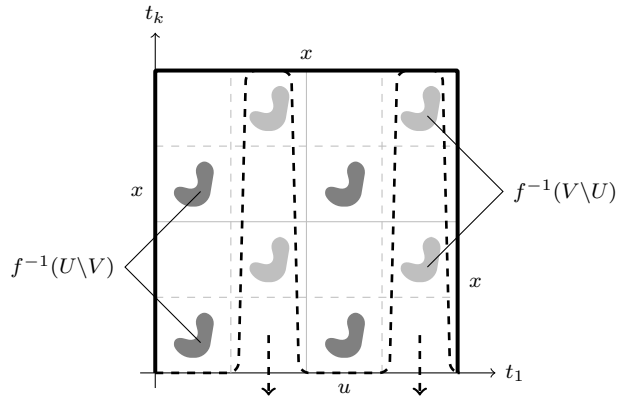



Abbildung 3.6. Die Urbilder von $V \setminus U$ und $U \setminus V$ in $I^k$

seien $1 \le k \le p+q$ und $f\colon (I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k) \to (X, V)$ gegeben. Wir wenden Proposition 3.41 auf $\bar f\colon I^k \to X$ an. Es folgt $[f] = [g] \in \pi_k(X, V)$ und $[g] \in \operatorname{im}(i_*)$. Damit ist Surjektivität von $i_*$ bewiesen.

Der Beweis der Injektivität verläuft ähnlich. Sei $2 \le k \le p+q$, und seien $f_0$, $f_1 \in \pi_{k-1}(U, U \cap V, x)$ mit $i_* f_0 = i_* f_1$ repräsentiert durch $\bar f_j\colon (I^{k-1}, \partial I^{k-1}) \to (U, U \cap V)$, so dass $\partial' I^{k-1} \subset \bar f_j^{-1}(\{x\})$ für $j = 0, 1$. Dann existiert eine Homotopie $\bar h\colon (I^k, \partial I^{k-1} \times I) \to (X, V)$ zwischen $\bar f_0$ und $\bar f_1$, wobei ganz $\partial' I^{k-1} \times I$ auf $x$ abgebildet wird. Insbesondere bildet $\bar h$ die Seite $\partial I^{k-2} \times \{0\} \times I$ nach $V$ ab, alle anderen Seiten von $I^k$ werden nach $U$ abgebildet. Wir werden Proposition 3.41 auf $\bar h$ an und erhalten eine neue Abbildung $\bar k\colon I^k \to U$. Dabei wird zunächst $f_j$ durch eine in $(U, U \cap V)$ punktiert homotope Abbildung $g_j = k(\,\cdot\,, j)$ ersetzt, und $k$ ist eine punktierte Homotopie zwischen $g_0$ und $g_1$ in $(U, U \cap V)$. Es folgt $[f_0] = [g_0] = [g_1] = [f_1] \in \pi_{k-1}(U, U \cap V)$, und wir erhalten die Injektivität von $i_*$ in den Graden $0, \ldots, p+q-1$. Zusammen mit der obigen Surjektivität ist $i\colon (U, U \cap V) \to (X, V)$ also eine $(p+q)$-zusammenhängende Abbildung von Paaren. $\square$

## 3.e. Der Satz von Brouwer und Hopf

In diesem Abschnitt berechnen wir einige Homotopiegruppen von Sphären. Die Homotopiegruppen der $S^1$ kennen wir bereits aus Beispiel 3.27.

Für $n \ge 1$ bezeichne $e_1 \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ den Basispunkt. Wir zerlegen $S^n = U \cup V$ mit $U = S^n \setminus \{-e_2\}$ und $V = S^n \setminus \{e_2\}$; beide Teilmengen sind zusammenziehbar. Mit Bemerkung 3.6 liefert die lange exakte Sequenz des Paares $(S^n, V)$ Isomorphismen

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\pi_{k-1}(V)}_{=0} \longleftarrow \pi_k(S^n, V) \xleftarrow[\cong]{j_*} \pi_k(S^n) \longleftarrow \underbrace{\pi_k(V)}_{=0} \longleftarrow \cdots \tag{3.3}$$

für alle $k$. Der Durchschnitt $U \cap V$ ist homotopieäquivalent zu einer $S^{n-1}$. Mit Folgerung 3.21 schließen wir, dass die jeweiligen Inklusionen der „oberen“ und „unteren“ Hemisphären in die $S^n$ für alle $k$ Isomorphismen

$$\pi_k(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_k(U, U \cap V) \qquad \text{und} \qquad \pi_k(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_k(V, U \cap V) \tag{3.4}$$

induzieren. Der Raum $D^n$ ist zusammenziehbar. Die Homotopiesequenz 3.19 des Paares $(D^n, S^{n-1})$ liefert also Isomorphismen

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\pi_{k-1}(D^n)}_{=0} \longleftarrow \pi_{k-1}(S^{n-1}) \xleftarrow[\cong]{\partial} \pi_k(D^n, S^{n-1}) \longleftarrow \underbrace{\pi_k(D^n)}_{=0} \longleftarrow \cdots \tag{3.5}$$

für alle $k$.

3.42. Satz (Brouwer, Hopf). *Für alle $n \geq 1$ gilt:*

(1) *der Raum $S^n$ ist $(n-1)$-zusammenhängend;*
(2) *das Paar $(D^n, S^{n-1})$ ist $(n-1)$-zusammenhängend;*
(3) *es gilt*
$$\pi_n(S^n) \cong \pi_{n+1}(D^{n+1}, S^n) \cong \mathbb{Z}\ ,$$
*dabei werden beide Gruppen von der jeweiligen Identität erzeugt;*
(4) *die Abbildung*
$$\pi_{k-1}(S^{n-1}) \xrightarrow[\cong]{\partial^{-1}} \pi_k(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_k(U, U \cap V) \xrightarrow{i_*} \pi_k(S^n, V) \xrightarrow[\cong]{j_*^{-1}} \pi_k(S^n)$$
*ist ein Isomorphismus für alle $1 \leq k < 2n-2$, und surjektiv, falls $1 \leq k = 2n-2$.*

In (3) haben wir $I^n/\partial I^n$ gemäß Bemerkung 3.2 (3) mit $S^n$ und $(I^n/\partial' I^n, \partial I^n/\partial' I^n)$ gemäß Bemerkung 3.13 mit $(D^n, S^{n-1})$ identifiziert.

Aussage (1) kann man auch elementar (ohne Ausschneidung) beweisen, allerdings ist der Beweis immer noch etwas aufwändig. Dazu stellt man ein Element von $\pi_k(S^n)$ mit $k < n$ durch eine punktierte Abbildung $f\colon I^k/\partial I^k \to S^n$ dar. Diese Abbildung kann surjektiv sein, siehe Beispiel 1.22. Indem man $f$ im Inneren von $I^k$ geschickt glättet, erhält man eine punktiert homotope Abbildung, die einen Punkt in $S^n$ nicht trifft, ohne Einschränkung den Südpol $x$. Dann zieht man $S^n \setminus \{x\}$ auf den Nordpol zusammen und erhält so eine Nullhomotopie von $f$.

Beweis. Wir beweisen zunächst (1), (2) und (4) durch Induktion über $n$. Für $n = 1$ gelten die Behauptungen, denn $S^1$ ist zusammenhängend, es gilt $\pi_0(D^1, S^0) = \{*\}$, und Aussage (4) ist leer.

Sei jetzt $n > 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\pi_k(S^{n-1}) = 0$ für $k \leq n-2$. Aus (3.5) folgt $\pi_k(D^n, S^{n-1}) = 0$ für alle $k \leq n-1$, also ist $(D^n, S^{n-1})$ ein $(n-1)$-zusammenhängendes Paar nach Bemerkung 3.37, und (2) ist gezeigt.

Wegen (3.4) sind auch die Paare $(U, U \cap V)$ und $(V, U \cap V)$ jeweils $(n-1)$-zusammenhängend. Nach dem Ausschneidungssatz 3.38 ist $(U, U \cap V) \to (S^n, V)$ eine $(2n-2)$-zusammenhängende Abbildung. Es folgt Behauptung (4).

Für $n \geq 2$ ist $2n-2 \geq n$, und für $k < n$ erhalten wir
$$0 = \pi_k(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_k(U, U \cap V) \cong \pi_k(S^n, V) \cong \pi_k(S^n)\ .$$
Damit sind (1), (2) und (4) für alle $n$ gezeigt.

Für $n = 1$ folgt (3) aus Satz 2.28. Für $n = 2$ betrachten wir die Homotopiesequenz der Hopf-Faserung aus Beispiel 3.33. Wegen (1) hat sie die Form
$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\pi_1(S^3)}_{=0} \xleftarrow{i_*} \underbrace{\pi_1(S^1)}_{\cong\mathbb{Z}} \xleftarrow{\partial} \pi_2(S^2) \xleftarrow{p_*} \underbrace{\pi_2(S^3)}_{=0} \longleftarrow \cdots$$
Mit (4) und (3.5) erhalten wir die Isomorphismen in (3) induktiv für alle $n$.

Wir konstruieren induktiv Homöomorphismen
$$\varphi_k\colon I^k/\partial I^k \xrightarrow{\cong} S^k \qquad \text{und} \qquad \psi_k\colon (I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k) \xrightarrow{\cong} (D^k, S^{k-1})$$
wie in den Bemerkung 3.2 (3), und zeigen, dass $[\mathrm{id}_{S^n}] = [\varphi_n]$ und $[\mathrm{id}_{(D^{n+1}, S^n)}] = [\psi_{n+1}]$ jeweils Erzeuger von $\pi_n(S^n)$ beziehungsweise $\pi_{n+1}(D^{n+1}, S^n)$ sind. Für $\pi_1(S^1)$ folgt das aus Satz 2.28.

Sei also $n \geq 2$ und $[\varphi_{n-1}]$ Erzeuger von $\pi_{n-1}(S^{n-1})$. Dann können wir $\psi_n$ konstruieren, indem wir
$$\psi_n|_{(I^{n-1} \times \{0\})/(\partial I^{n-1} \times \{0\})} = \varphi_{n-1}$$

auf $(I^n/\partial' I^n, \partial I^n/\partial' I^n)$ fortsetzen. Nach Satz 3.19 und (3.5) ist dann $[\psi_n] = \partial^{-1}[\varphi_{n-1}]$ Erzeuger von $\pi_n(D^n, S^{n-1})$.

Mit dem Ausschneidungssatz 3.38 erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z} \cong \pi_n(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_n(U, U \cap V) \longrightarrow \pi_n(S^n, V) \cong \pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$$

(für $n = 2$ ist diese Abbildung wegen (4) zunächst nur surjektiv, aber die einzigen surjektiven Gruppen-Endomorphismen von $\mathbb{Z}$ sind $a \mapsto \pm a$, also bijektiv). Das Bild von $[\psi_n]$ ist Erzeuger von $\pi_n(S^n)$.

Das Bild von $[\psi_n]$ in $\pi_n(S^n, V)$ entspricht einer Abbildung, die das Innere von $I^n$ homöomorph auf die Hemisphäre $\{\, x \in S^n \mid x_2 > 0 \,\}$ abbildet. In $\pi_n(S^n, \{e_1\}) \cong \pi_n(S^n)$ entspricht das einer Abbildung, die das Innere von $I^n$ homöomorph auf $S^n \setminus \{e_1\}$ abbildet; diese sei unsere neue Abbildung $\varphi_n$. □

3.43. Beispiel. Wir betrachten die Hopf-Faserungen aus den Beispielen 3.33 und 3.34.

(1) Da $\pi_1(S^{2n+1}) = 0$ für $n \geq 1$ nach Satz 3.42 (1), ist die Inklusion $i\colon S^1 \to S^{2n+1}$ der Faser in der Hopf-Faserung $p\colon S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ homotop zur konstanten Abbildung; es folgt $\pi_k i = 0$ für alle $k$. Somit zerfällt die lange exakte Sequenz in eine Folge kurzer exakter Sequenzen der Form

$$0 \longleftarrow \pi_{k-1}(S^1) \overset{\partial}{\twoheadleftarrow} \pi_k(\mathbb{C}P^n) \overset{p_*}{\hookleftarrow} \pi_k(S^{2n+1}) \longleftarrow 0\,.$$

Aus Beispiel 3.27 folgt jetzt

$$\pi_2(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \qquad \text{und} \qquad \pi_k(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_k(S^{2n+1}) \text{ für alle } k \neq 2\,.$$

Wegen Satz 3.42 (3) gilt für $k \neq 2$ also auch

$$\pi_{2n+1}(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_{2n+1}(S^{2n+1}) \cong \mathbb{Z}\,, \qquad \text{insbesondere} \qquad \pi_3(S^2) \cong \pi_3(\mathbb{C}P^1) \cong \mathbb{Z}\,.$$

Erzeuger dieser Gruppe $\mathbb{Z}$ ist übrigens die Hopf-Faserung selbst, denn

$$[p] = [p \circ \mathrm{id}_{S^{2n+1}}] = p_*[\mathrm{id}_{S^{2n+1}}]\,.$$

Interessanterweise kann man also eine Sphäre in eine Mannigfaltigkeit $M$ kleinerer Dimension nicht-nullhomotop abbilden.

(2) Genauso ist in der quaternionischen Hopf-Faserung $i\colon S^3 \to S^{4n+3}$ homotop zur konstanten Abbildung, und wir erhalten eine Folge kurzer exakter Sequenzen

$$0 \longleftarrow \pi_{k-1}(S^3) \overset{\partial}{\twoheadleftarrow} \pi_k(\mathbb{H}P^n) \overset{p_*}{\hookleftarrow} \pi_k(S^{4n+3}) \longleftarrow 0\,.$$

Im Gegensatz zur $S^1$ gilt $\pi_k(S^3) \neq 0$ für unendlich viele $k \geq 3$. Für $k = 4n+3$ sehen wir aber immerhin, dass die Klasse $[p] = p_*[\mathrm{id}_{S^{4n+3}}]$ der quaternionischen Hopf-Faserung unendliche Ordnung in der Gruppe $\pi_{4n+3}(\mathbb{H}P^n)$ hat. Im Spezialfall $n = 1$ folgt daraus, dass $\pi_7(S^4)$ eine unendliche Gruppe ist.

In der Tat enthält $\pi_{4n-1}(S^{2n})$ stets $\mathbb{Z}$ als direkten Summanden für alle $n \in \mathbb{Z}$, aber das können wir jetzt noch nicht beweisen. Ansonsten ist $\pi_k(S^n)$ endlich für $k > n$, und wir sehen, dass die Bedingung in Satz 3.42 (4) scharf ist, denn $\pi_{4n-1}(S^{2n}) \to \pi_{4n}(S^{2n+1})$ ist sicher nicht injektiv.

Der Satz 3.42 von Brouwer-Hopf hat viele topologische und geometrische Anwendungen. Einige fassen wir hier zusammen, weitere folgen in Übung 3.117.

3.44. Satz (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Für $n \geq 0$ hat jede stetige Abbildung $f\colon D^n \to D^n$ einen Fixpunkt.*

Der Fall $n = 1$ folgt aus dem Zwischenwertsatz, siehe Bemerkung 2.29, und $n = 2$ haben wir bereits in Satz 2.31 behandelt.

Beweis. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen, es sei also $n \geq 1$. Wie im Beweis von Satz 2.31 im Fall $n = 2$ nehmen wir an, dass die Abbildung $f\colon D^n \to D^n$ keinen Fixpunkt hat, und konstruieren dann eine Retraktion $r\colon D^n \to S^{n-1} = \partial D^n$ wie in Abbildung 2.2. Sei $i\colon S^{n-1} \to D^n$ die Inklusion, dann gilt also $r \circ i = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$. Wie in Bemerkung 2.30 folgt für jeden kovarianten Funktor $\Phi$ von der Kategorie $\mathcal{T}op_+$ in eine Kategorie $\mathcal{C}$, dass $\Phi r \circ \Phi i = \mathrm{id}_{\Phi S^{n-1}}$. Der Funktor $\pi_{n-1}\colon \mathcal{T}op_+ \to \mathcal{S}et_+$ liefert jetzt einen Widerspruch, da $\pi_{n-1}(S^{n-1}) \neq \{*\} = \pi_{n-1}(D^n)$. □

Wir wollen jetzt freie Homotopieklassen von Abbildungen von $S^n$ nach $S^n$ betrachten und erinnern uns an Folgerung 3.8. Für die Spären $S^n$ mit $n \geq 1$ wirkt $\pi_1(S^n)$ trivial auf $\pi_k(S^n)$, denn $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ ist abelsch und alle anderen $\pi_k(S^1)$ verschwinden, und für $n > 1$ ist $\pi_1(S^n)$ trivial. Daher identifizieren wir $[S^k_+, S^n]$ mit $\pi_k(S^n)$.

3.45. Definition. Sei $\deg\colon [S^n_+, S^n] \cong \pi_n(S^n) \to \mathbb{Z}$ der Isomorphismus aus Satz 3.42 (3). Für eine Abbildung $f\colon S^n \to S^n$ heißt $\deg f = \deg[f] \in \mathbb{Z}$ der *Abbildungsgrad* von $f$.

Später werden wir diesen Begriff verallgemeinern auf Abbildungen zwischen orientierten topologischen Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension.

3.46. Folgerung (aus Satz 3.42). *Zwei Abbildungen $f$, $g\colon S^n \to S^n$ sind genau dann homotop, wenn sie den gleichen Abbildungsgrad haben.* □

3.47. Beispiel. Es sei $A \in GL(n, \mathbb{R})$ für $n \geq 1$, dann hat die Abbildung $f_A\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ mit

$$f_A(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|}$$

den Abbildungsgrad $\deg f_A = \operatorname{sign}\det A \in \{1, -1\}$.

Die Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ hat genau zwei Wegzusammenhangskomponenten, auf denen die Determinante unterschiedliches Vorzeichen hat. Ein Weg $\gamma$ zwischen zwei Elementen $A$, $B \in GL(n, \mathbb{R})$ liefert eine Homotopie

$$h(x, t) = \frac{\gamma(t)x}{\|\gamma(t)x\|}$$

zwischen $f_A$ und $f_B$. Da $\deg f_{E_n} = \deg \mathrm{id} = \operatorname{sign}\det E_n$ gilt, reicht es, ein Element $A$ mit $\deg f_A = \operatorname{sign}\det A = -1$ anzugeben. Aus dem Beweis von Satz 3.5 schließen wir, dass folgende Matrix das Gewünschte leistet:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots\ 1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} .$$

Unter einem Vektorfeld auf $S^n$ verstehen wir eine Abbildung $f\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, so dass $x$ und $f(x)$ für alle $x$ aufeinander senkrecht stehen.

3.48. Satz (Satz vom Igel). *Die Sphäre $S^n$ trägt genau dann ein nirgends verschwindendes Vektorfeld, wenn $n$ ungerade ist.*

Beweis. Sei $n = 2k - 1$ ungerade. Ein nicht verschwindendes Vektorfeld wird gegeben durch

$$f(z) = iz \qquad \text{für alle } z \in S^n \subset \mathbb{C}^k .$$

Umgekehrt sei $f$ ein nirgends verschwindendes Vektorfeld. Indem wir $f(x)$ durch $\frac{f(x)}{\|f(x)\|}$ ersetzen, dürfen wir $\|f(x)\| = 1$ für alle $x \in S^n$ annehmen. Dann erhalten wir eine Homotopie zwischen id und $-\mathrm{id}$ durch

$$h(x, t) = \cos(\pi t)\, x + \sin(\pi t)\, f(x) .$$

Es folgt

$$1 = \deg \mathrm{id} = \deg(-\mathrm{id}) = \operatorname{sign}\det(-E_{n+1}) = (-1)^{n+1} ,$$

also ist $n$ ungerade. □

Wir beweisen noch die Invarianz der Dimension und die Invarianz des Gebietes. Dabei ist interessant, dass wir mit Hilfe eines homotopieinvarianten Funktors Eigenschaften nachweisen können, die nicht homotopieinvariant sind. Wir erinnern uns an den Begriff der topologischen Mannigfaltigkeit aus Definition 1.77, siehe auch Bemerkung 1.79 (3). Es sei $(X, x_0)$ ein punktierter topologischer Raum und $x \in X$, $x \neq x_0$. Dann schreiben wir $X|x = (X, X \setminus \{x\}) = (X, X \setminus \{x\}, x_0)$.

3.49. Beispiel. Bis auf Homöomorphie gibt es nur zwei zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeiten: den Kreis $S^1$ und das offene Intervall $\mathbb{R}$. In diesem Fall erhalten wir für jeden Punkt $x$ Bijektionen $\pi_0(S^1|x) = \pi_0(\mathbb{R}|x) = \{*\}$, sowie mit Folgerung 3.21 auch

$$\pi_1(S^1|x) \cong \pi_1(S^1, \{x_0\}) \cong \mathbb{Z}\,, \quad \text{und} \quad \pi_1(\mathbb{R}|x) \cong \pi_1(D^1, S^0) \cong \pi_0(S^0) \cong \{0, *\}\,.$$

3.50. Proposition. *Es sei $M$ eine zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$, und es sei $x \in M$. Dann gilt*

(1) *Für $0 \leq k \leq n-1$ ist $\pi_k(M|x) = 0$.*
(2) *Die Gruppe $\pi_n(M|x)$ enthält eine Kopie von $\mathbb{Z}$ als Untergruppe.*

Falls $M$ nicht zusammenhängend ist, gilt die Aussage, falls wir den Basispunkt in der gleichen Zusammenhangskomponente wie $x$ wählen.

Beweis. Es sei $U \subset M$ eine offene Umgebung von $x$, die zu $B^n$ (oder äquivalent zu $\mathbb{R}^n$) homöomorph ist. Indem wir $U$ gegebenenfalls verkleinern, dürfen wir annehmen, dass sich der Homöomorphismus zu einem Homöomorphismus $\overline{U} \cong D^n$ fortsetzt.

Wir zerlegen

$$M = U \cup (M \setminus \{x\})\,.$$

Da $M$ zusammenhängend ist, ist $(M \setminus \{x\}, U \setminus \{x\})$ ein 0-zusammenhängendes Paar. Da $U$ zusammenziehbar und $U \setminus \{x\}$ zu $S^{n-1}$ homotopieäquivalent ist, ist $U|x = (U, U \setminus \{x\})$ ein $(n-1)$-zusammenhängendes Paar. Aus dem Ausschneidungssatz folgt für $k \leq n-1$, dass

$$\pi_k(M|x) = \pi_k(M, M \setminus \{x\}) \cong \pi_k(U, U \setminus \{x\}) = \pi_k(U|x) = 0\,.$$

Betrachte jetzt die Inklusion $U \to M$ und die Quotientenabbildung

$$q\colon M \to M/(M \setminus U) \cong S^n\,.$$

Wie im Beweis von Satz 3.42 erhalten wir einen Isomorphismus

$$\pi_n(q \circ i)\colon \pi_n(U|x) \cong \pi_n(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow \pi_n(S^n)\,.$$

Wie in Bemerkung 2.30 folgt die Injektivität von $\pi_n i$. □

3.51. Satz (Invarianz der Dimension, Brouwer). *Es seien $M$, $N$ topologische Mannigfaltigkeiten. der Dimensionen $m$, $n \in \mathbb{N}$. Wenn $M$ und $N$ homöomorph sind, gilt $m = n$.*

Beweis. Wir betrachten als erstes den Spezialfall, dass $m = 0$. In diesem Fall trägt $M$ die diskrete Topologie. Wenn $M$ und $N$ homöomorph ist, trägt auch $N$ die diskrete Topologie, also gilt auch $n = 0$. Andernfalls können wir mit Beispiel 3.49 und Proposition 3.50 die Dimension von $M$ charakterisieren als

$$m = \inf\{\, k \in \mathbb{N} \mid \pi_k(M|x) \neq 0 \,\}\,.$$

Wenn $M$ und $N$ homöomorph sind, folgt $m = n$. □

3.52. Definition. Eine (*topologische*) *Mannigfaltigkeit mit Rand* der *Dimension* $n \in \mathbb{N}$ ist ein Hausdorff-Raum $M$ mit abzählbarer Basis, so daß jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset M$ besitzt, die homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ oder zu $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ ist.

Der (*geometrische*) *Rand* $\partial M$ von $M$ ist die Teilmenge derjenigen Punkte, die von Homöomorphismen $U \to \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ wie oben auf Punkte in $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ abgebildet werden.

3.53. Bemerkung. Für einen Punkt $x$ in einer Mannigfaltigkeit $M$ mit Rand gibt es genau zwei Möglichkeiten, siehe Übung 3.118.

(1) Für jede offene Umgebung $U \subset M$ von $x$ und jeden Homöomorphismus $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)$ gilt $\varphi(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)$; in diesem Fall heißt $x$ ein *innerer Punkt* von $M$, oder
(2) Es gibt keine offene Umgebung von $x$ in $M$, die zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist, und für jede offene Umgebung $U \subset M$ von $x$ und jeden Homöomorphismus $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)$ gilt $\varphi(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$; in diesem Fall heißt $x$ ein *Randpunkt* von $M$.

3.54. Beispiel. Wir kennen bereits einige topologische Mannigfaltigkeiten mit Rand.

(1) Jede topologische Mannigfaltigkeit $M$ im Sinne von Definition 1.77 ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = \emptyset$.
(2) Jede differenzierbare Mannigfaltigkeit $M$ mit Rand $N \subset M$ ist topologische Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = N$.
(3) Der Halbraum $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)$ ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.
(4) Der abgeschlossene Ball $D^n$ ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand $S^{n-1}$.
(5) Der Einheitswürfel $I^n$ ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial I^n$, denn es gilt $(D^n, S^{n-1}) \cong (I^n, \partial I^{n-1})$.

## 3.f. Kofaserungen und Quotienten

Wenn man in einem Diagramm alle Pfeile umdreht, erhält man ein dazu duales Diagramm. In diesem Sinne sind Produkte dual zur disjunkten Vereinigung (Sätze 1.40 und 1.46), Unterräume sind dual zu Quotienten (Sätze 1.43 und 1.72). Solange man nur abstrakt mit universellen Eigenschaften arbeitet, lassen sich alle Argumente übertragen. Aber bereits die Existenz von Produkten oder disjunkten Vereinigungen lässt sich nicht rein abstrakt zeigen, man braucht konkrete Überlegungen.

*Eckmann-Hilton-Dualität* ist die Idee, dass es auch zu jedem homotopietheoretischen Begriff einen dualen Begriff geben sollte. In diesem Abschnitt geht es um den dualen Begriff zu den Faserungen aus Abschnitt 3.c, der tatsächlich mindestens so wichtig ist wie das Original. Im Hinblick auf später betrachten wir in diesem Abschnitt auch Räume ohne Basispunkt. Wir bilden das duale Diagramm zum Diagramm zur Homotopieliftungseigenschaft

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\tilde f"] \arrow[d, hook, "\times\{0\}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed, "\tilde h"] & B \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} Y & X \arrow[l, "f"'] \arrow[dl, dashed, "H"] \\ C(I,Y) \arrow[u, two heads, "\mathrm{ev}_0"] & A \arrow[l, "h"'] \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Hier ist nach dem Exponentialgesetz 1.60 (3) das Produkt mit dem festen, lokalkompakten Raum $I$ dual zum Wegeraum $C(I,\,\cdot\,)$: anstelle von Homotopien von Abbildungen von $Y$ nach $B$ oder $E$ betrachten wir Homotopien von Abbildungen von $A$ oder $X$ nach $Y$. Das rechte Diagramm führt zu unserem neuen Begriff.

3.55. Definition. Eine Abbildung $i\colon A \to X$ ist eine (*Hurewicz-*) *Kofaserung,* wenn $i$ für jeden Raum $Y$ die *Homotopieausdehnungseigenschaft* besitzt, das heißt, wenn es zu jedem Raum $Y$, jeder Abbildung $f\colon X \to Y$ und jeder Homotopie $h\colon A \times I \to Y$ mit

$$h(a,0) = f(i(a)) \qquad \text{für alle } a \in A \tag{1}$$

eine Homotopie $H\colon X \times I \to Y$ gibt, so dass

$$H(x,0) = f(x) \qquad \text{und} \qquad H(i(a),t) = h(a,t) \qquad \text{für alle } x \in X,\ a \in A \text{ und } t \in I\,. \tag{2}$$

Wir nennen ein Paar $(X, A)$ eine *Kofaserung,* wenn die Inklusion $i\colon A \to X$ eine Kofaserung ist. Wir nennen einen punktierten Raum $(X, x_0)$ *gut punktiert* und $x_0$ einen *guten* oder *nicht entarteten Basispunkt,* wenn $\{x_0\}$ in $X$ abgeschlossen und $(X, \{x_0\})$ eine Kofaserung ist.

Die neue Definition von „gut punktiert“ unterscheidet sich von derjenigen aus Folgerung 2.50, siehe Bemerkung 3.60 (3).

3.56. Beispiel. Zunächst wollen wir etwas besser verstehen, was wir gerade definiert haben. Wir beginnen mit einigen trivialen Beispielen.

(1) Die Identität $\mathrm{id}_X$ ist eine Kofaserung.
(2) Die triviale Abbildung $\emptyset \to X$ ist eine Kofaserung in $\mathcal{T}op$, das Analogon $\mathrm{pt} \to X$ in $\mathcal{T}op_+$ jedoch nicht immer.
(3) Die Inklusion $X \to X \sqcup Y$ ist eine Kofaserung in $\mathcal{T}op$. Falls $Y$ gut punktiert ist, ist auch $X \to X \vee Y$ eine Kofaserung in $\mathcal{T}op_+$.

Weitere Beispiele gibt es in den Übungen 3.122 und 3.130.

3.57. Definition. Es sei $f\colon Y \to X$ eine Abbildung. Wir definieren den *Abbildungszylinder*

$$Zf = (Y \times I \sqcup X)/\!\sim\ ,$$

wobei „$\sim$“ die von $(y, 0) \sim f(y)$ für alle $y \in Y$ erzeugte Äquivalenzrelation sei.

3.58. Bemerkung. Es sei $i\colon A \to X$ eine Abbildung, dann entspricht ein Paar von Abbildungen $f$, $h$ wie in Definition 3.55 (1) nach der charakteristischen Eigenschaft 1.72 (2) der Quotiententopologie genau einer stetigen Abbildung $F\colon Zi \to Y$. Insbesondere induzieren für $Y = X \times I$ die Abbildungen

$$X \cong X \times \{0\} \hookrightarrow X \times I \qquad \text{und} \qquad A \times I \xrightarrow{i \times \mathrm{id}_I} X \times I$$

eine stetige Abbildung $\bar{\iota}\colon Zi \to X \times I$. Es folgt, dass $i$ genau dann eine Kofaserung ist, wenn $Zi$ ein Retrakt von $X \times I$ ist, das heißt, wenn eine Abbildung $\bar{r}\colon X \times I \to Zi$ mit $\bar{r} \circ \bar{\iota} = \mathrm{id}_{Zi}$ existiert. Denn für jede Kofaserung $i$ liefert die Homotopieausdehnungseigenschaft für $\mathrm{id}_{Zi}\colon Zi \to Zi$ gerade eine solche Abbildung $\bar{r}$. Seien umgekehrt $f$ und $h$ wie in Definition 3.55 (1) gegeben, sei $F\colon Zi \to Y$ die davon induzierte Abbildung, und sei $\bar{r}\colon X \times I \to Zi$ wie oben, dann erfüllt $H = F \circ \bar{r}\colon X \times I \to Y$ gerade die Bedingung in Definition 3.55 (2).

Jetzt kann man zeigen, dass jede Kofaserung eine Einbettung ist (Übung 3.125), also induziert $i$ einen Homöomorphismus $A \cong \mathrm{im}(i)$. Wir können uns also auf Paare $(X, A)$ beschränken. In diesem Fall ist $X \times \{0\} \cup A \times I$ also ein Retrakt von $X \times I$. Wenn $X$ ein Hausdorff-Raum ist, ist $A \subset X$ abgeschlossen (Übung 3.126).

3.59. Proposition. *Es sind äquivalent:*

(1) $(X, A)$ *ist ein* Umgebungsdeformationsretrakt, *das heißt, es gibt eine Abbildung* $u\colon X \to I$ *und eine Homotopie* $h\colon X \times I \to X$, *so dass*

$$A \subset u^{-1}(0)\ , \tag{a}$$

$$h|_{X \times \{0\} \cup A \times I} = \pi_X|_{X \times \{0\} \cup A \times I}\ , \tag{b}$$

$$h(x, t) \in A \text{ für alle } x \in X \text{ mit } u(x) < t\ ; \tag{c}$$

(2) $X \times \{0\} \cup A \times I$ *ist starker Deformationsretrakt von* $X \times I$;
(3) $X \times \{0\} \cup A \times I$ *ist Retrakt von* $X \times I$;
(4) $(X, A)$ *ist eine Kofaserung.*

Der Begriff Umgebungsdeformationsretrakt bedeutet, dass sich eine Umgebung $U = u^{-1}([0, 1))$ von $A$ in $X$ (aber nicht notwendigerweise in $U$) auf $A$ zusammenziehen lässt. Aus (c) schließen wir, dass $u^{-1}(0)$ gerade der Abschluss von $A$ ist. Wenn $A$ abgeschlossen ist, folgt also $A = u^{-1}(0)$.

Beweis. Nach Bemerkung 3.58 sind (3) und (4) äquivalent, und (3) folgt offensichtlich aus (2). Es gelte (1), dann folgt (2) mit der Deformationsretraktion $r\colon X \times I \times I \to X \times I$,

$$r(x,t,s) = \begin{cases} \big(h(x,st),(1-s)t\big) & \text{falls } t \le u(x), \text{ und} \\ \big(h(x,st),t-su(x)\big) & \text{falls } t \ge u(x). \end{cases}$$

Es gelte jetzt (3), und $r\colon X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$ sei Retraktion. Es seien $\pi_X\colon X \times I \to X$ und $\pi_I\colon X \times I \to I$ die Projektionen. Dann definiere $u$ und $h$ durch

$$\begin{aligned} u(x) &= \sup_{t\in I}\big(t - \pi_I r(x,t)\big)\ , \\ h(x,t) &= \pi_X r(x,t)\ . \end{aligned}$$

Die Funktion $u$ ist stetig, da $I$ kompakt ist. Die Eigenschaften (a)–(c) sind leicht zu prüfen, also folgt (1). □

3.60. Bemerkung. Mit diesem Ergebnis erhalten wir weitere Beispiele von Kofaserungen.

(1) Nach Bemerkung 3.23 ist das Paar $(D^n, S^{n-1}) \cong (I^n, \partial I^n)$ eine Kofaserung für $n \ge 0$.
(2) Allgemeiner sei $M$ topologischer Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M \neq \emptyset$, dann ist $(M, \partial M)$ eine Kofaserung. Hierzu ist allerdings noch zu zeigen, dass $\partial M$ in $M$ eine Umgebung der Gestalt $\partial M \times [0,1)$ besitzt.
(3) Der Begriff „gut punktiert“ in Folgerung 2.50 unterscheidet sich von dem aus Definition 3.55. Wir haben damals eine anschaulichere Definition gewählt, während die jetzige besser in den allgemeinen Kontext der Homotopietheorie passt. Man kann Folgerung 2.50 aber auch mit dem neuen Begriff zeigen (Übung 3.123).

3.61. Folgerung (aus Proposition 3.59). *Es seien $(X,A)$ und $(Y,B)$ Kofaserungen mit $A \subset X$ und $B \subset Y$ abgeschlossen. Dann ist auch $(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$ Kofaserung.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $(X,A)$ mit $u\colon X \to I$ und $h\colon X \times I \to X$ sowie $(Y,B)$ mit $v\colon Y \to I$ und $k\colon Y \times I \to I$ zu Umgebungsdeformationsrektrakten wie in Proposition 3.59 (1) werden. Dann ist auch $(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$ ein Umgebungsdeformationsrektrakt mit $w\colon X \times Y \to I$ und $\ell\colon X \times Y \times I \to X \times Y$, wobei

$$\begin{aligned} w(x,y) &= \min\big(u(x), v(y)\big)\ , \\ \ell(x,y,t) &= \Big(h\big(x, \min(t, v(y))\big), k\big(y, \min(t, u(x))\big)\Big)\ . \end{aligned}$$

Wir benötigen $A$ und $B$ abgeschlossen, um $\ell(x,y,t) \in A \times Y \cup X \times B$ aus $t > w(t)$ zu folgern. □

Wir benutzen als nächstes die Homotopieausdehnungseigenschaft, um interessante Aussagen über Kofaserungen zu beweisen.

3.62. Proposition. *Es sei $(X,A)$ eine Kofaserung. Falls $A$ zusammenziehbar ist, ist die Quotientenabbildung $X \to X/A$ eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Es bezeichne $F\colon X \to X/A$ die Quotientenabbildung. Es sei $h\colon A \times I \to A$ eine Homotopie zwischen $\mathrm{id}_A$ und der konstanten Abbildung auf den Punkt $a_0 \in A \subset X$. Mit der Homotopieausdehnungseigenschaft für $\iota \circ h$ erhalten wir eine Homotopie $H\colon X \times I \to X$ mit $H|_{A\times I} = h$ und $H(\,\cdot\,,0) = \mathrm{id}_X$. Da $H(a,1) = a_0$ für alle $a \in A$, induziert $H(\,\cdot\,,1)$ eine Abbildung $G\colon X/A \to X$. Da $G(F(x)) = H(x,1)$ für alle $x \in X$, ist $H$ eine Homotopie zwischen $\mathrm{id}_X$ und $G \circ F$.

Da $H(a,t) = h(a,t) \in A$ für alle $a \in A$, induziert $H$ eine Abbildung $\bar{H}\colon (X/A) \times I \to X/A$, und es gilt $\bar{H}(\,\cdot\,,1) = F \circ G$. Also ist $\bar{H}$ eine Homotopie zwischen $\mathrm{id}_{X/A}$ und $F \circ G$. □

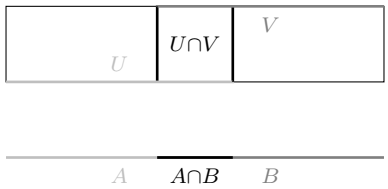



Abbildung 3.7. Der Raum $Y = U \cup V$

In Folgerung 1.75 haben wir Pushouts kennengelernt. Wenn $A \subset X$ Teilmenge und $f\colon A \to B$ stetig ist, schreiben wir hier $X \cup_f B$ statt $B \cup_f X$. Dieser Begriff ist übrigens dual zum Faserprodukt oder Pullback aus Übung 3.112. Ein Spezialfall des Pullbacks ist die Faser, das duale Diagramm liefert die Kofaser einer Kofaserung $A \to X$, nämlich den Quotienten $X/A$.

3.63. Beispiel. Es sei $A \subset X$ Teilmenge und $f\colon A \to \mathrm{pt}$ die konstante Abbildung, dann ist $X \cup_f \mathrm{pt}$ homöomorph zum Quotienten $X/A$.

Das nächste Resultat ist eine wichtige Übung, siehe 3.127.

3.64. Proposition. *Es sei $(X, A)$ eine abgeschlossene Kofaserung und $f\colon A \to B$ stetig. Dann ist auch $(X \cup_f B, B)$ eine abgeschlossene Kofaserung.* □

Weitere Aussagen über Kofaserungen folgen in den nächsten Abschnitten. Anstelle beliebiger Paare betrachtet man in der Homotopietheorie besonders gern Kofaserungen. Daher wollen wir ein wichtiges Resultat auf eine Kofaserungs-Situation übertragen.

3.65. Folgerung (Ausschneidungssatz für Kofaserungen). *Es seien $A$, $B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cup B = X$, $A \cap B \neq \emptyset$, so dass $(A, A \cap B)$ eine $p$-zusammenhängende und $(B, A \cap B)$ eine $q$-zusammenhängende Kofaserung ist, mit $p$, $q \geq 0$. Dann ist $(X, B)$ ebenfalls eine Kofaserung, und $i\colon (A, A \cap B) \to (X, B)$ ist eine $(p+q)$-zusammenhängende Abbildung von Paaren.*

Beweis. Indem wir $X$ als Pushout von $A$ längs der Inklusion $A \cap B \to B$ auffassen, sehen wir mit Proposition 3.64, dass $(X, B)$ eine Kofaserung ist.

Wir betrachten die Teilmenge

$$Y = (A \times \{0\}) \cup \big((A \cap B) \times I\big) \cup (B \times \{1\}) \subset X \times I \ ,$$

siehe Abbildung 3.7. Nach Proposition 3.59 (2) existieren Homotopien $H\colon A \times I^2 \to A \times I$ zwischen $\mathrm{id}_{A \times I}$ und einer Retraktion auf $A \times \{0\} \cup (A \cap B) \times I$, und $K\colon B \times I^2 \to B \times I$ zwischen $\mathrm{id}_{B \times I}$ und einer Retraktion auf $B \times \{1\} \cup (A \cap B) \times I$. Da $(A \cap B) \times I$ abgeschlossen ist, dürfen wir $H$ und $K$ verkleben und sehen, dass $Y$ Deformationsretrakt von $X \times I$ ist. Insbesondere induziert die Projektion $X \times I \to X$ eine Homotopieäquivalenz $Y \to X$.

Wir zerlegen jetzt $Y$ in offene Teilmengen $U = Y \cap \big(X \times [0,1)\big)$ und $V = Y \cap \big(X \times (0,1]\big)$. Dann induziert die obige Projektion Homotopieäquivalenzen $U \to A$, $V \to B$ und $U \cap V \to A \cap B$. Jetzt folgt die Aussage aus dem Ausschneidungssatz 3.38. □

Wir wollen den Ausschneidungssatz benutzen, um Aussagen über Quotienten von Paaren topologischer Räume zu machen.

3.66. Definition. Es sei $(X, x_0)$ ein punktierter topologischer Raum. Dann definieren wir den (*reduzierten*) *Kegel* über $X$ als

$$CX = (X \times I)/\big(X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times I\big) \ .$$

Es sei $(X, A)$ ein punktiertes Paar, dann definieren wir den *Homotopiequotienten* (auch *Homotopiekofaser*) $X /\!\!/ A$ durch

$$X /\!\!/ A = X \cup_A CA = (X \sqcup CA)/\sim ,$$

wobei die Äquivalenzrelation „$\sim$“ erzeugt wird durch $X \ni a \sim [(a, 1)] \in CA$ für alle $a \in A$.

Wir können genausogut auch den unreduzierten Kegel und den unreduzierten Homotopiequotienten betrachten.

3.67. Bemerkung. Wir nehmen an, dass $(A, x_0)$ gut punktiert ist.

(1) Nach Bemerkung 3.60 (1) ist $(D^1, S^0) \cong (I, \partial I)$ eine abgeschlossene Kofaserung. Wir wenden Folgerung 3.61 auf dieses Paar und $(A, \emptyset)$ sowie $(A, \{x_0\})$ an und erhalten abgeschlossene Kofaserungen

$$(A \times I, A \times \partial I) \qquad \text{und} \qquad (A \times I, A \times \partial I \cup \{x_0\} \times I) .$$

Das erste Paar betrachten wir später als den *Zylinder* über $A$. Wir betrachten die Quotientenabbildung

$$q\colon A \times \partial I \cup \{x_0\} \times I \longrightarrow (A \times \partial I \cup \{x_0\} \times I)/(\{x_0\} \times I) \cong A \vee A .$$

Der Pushout des zweiten Paares oben mit $q$ liefert den sogenannten *reduzierten Zylinder*

$$(A \times I) \cup_q \big((A \times \partial I \cup \{x_0\} \times I)/(\{x_0\} \times I)\big) \cong (A \times I)/(\{x_0\} \times I) .$$

Nach Proposition 3.64 erhalten wir eine abgeschlossene Kofaserung

$$\big((A \times I)/(\{x_0\} \times I), A \vee A\big) .$$

(2) Es sei $c\colon A \to \{x_0\} \subset A$ die konstante Abbildung. Nach der universellen Eigenschaft aus Folgerung 1.75 erhalten wir eine Abbildung $g = (c, \mathrm{id}_A)\colon A \vee A \to A$. Wir betrachten den reduzierten Zylinder und bilden den Pushout

$$\big((A \times I)/(\{x_0\} \times I), A \vee A\big) \cup_g A \cong CA .$$

Mithin bildet der reduzierte Kegel eine Kofaserung $(CA, A)$. Wenn $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge ist, liefert der Pushout längs der Inklusion $A\colon X$ den Raum $X /\!\!/ A$ und wir erhalten eine abgeschlossene Kofaserung $(X /\!\!/ A, X)$.

(3) Sei jetzt $(X, A)$ ebenfalls eine abgeschlossene Kofaserung. Dann dürfen wir den Pushout „umdrehen“ und erhalten eine Kofaserung $(X /\!\!/ A, CA)$. Da $(X \times I)/(X \times \{0\})$ zusammenziehbar ist, ist $CA$ nach Proposition 3.62 zusammenziehbar, und $X /\!\!/ A$ ist homotopieäquivalent zum Quotienten $(X /\!\!/ A)/CA \cong X/A$. Wir betrachten $X /\!\!/ A$ als Ersatz für den Quotienten bis auf Homotopie, selbst wenn $(X, A)$ keine abgeschlossene Kofaserung ist. Daher der Name „Homotopiequotient“.

3.68. Proposition. *Es sei $(X, A)$ eine $p$-zusammenhängende abgeschlossene Kofaserung und $A$ sei $q$-zusammenhängend mit $p \geq 0$, $q \geq -1$. Dann ist die Quotientenabbildung $(X, A) \to (X/A, *)$ eine $p + q + 1$-zusammenhängende Abbildung.*

Wenn $A$ nicht zusammenhängend ist, sei $q = -1$.

Beweis. Anstelle von $X/A$ betrachten wir den Raum $X /\!\!/ A = X \cup_A CA$. Da $CA$ zusammenziehbar und $A$ ein $q$-zusammenhängender Raum ist, ist $(CA, A)$ ein $(q + 1)$-zusammenhängendes Paar nach Definition 3.35. Nach dem Ausschneidungssatz 3.65 ist die Inklusion $(X, A) \to (X \cup_A CA, CA)$ eine $(p + q + 1)$-zusammenhängende Abbildung. Da $CA$ zusammenziehbar und die Quotientenabbildung $X \cup_A CA \to X/A$ eine Homotopieäquivalenz ist, gilt $\pi_k(X \cup_A CA, CA) \cong \pi_k(X \cup_A CA) \cong \pi_k(X/A)$ für alle $k$. $\square$

3.69. Beispiel. Wir betrachten das 1-zusammenhängende Paar $(D^2, S^1)$. Da $S^1$ zusammenhängend ist, erhalten wir eine 2-zusammenhängende Quotientenabbildung $(D^2, S^1) \to (S^2, *)$. Tatsächlich gilt $\pi_2(D^2, S^1) \cong \mathbb{Z} \cong \pi_2(S^2)$, aber $0 \cong \pi_3(D^2, S^1) \to \pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ ist nicht mehr surjektiv.

3.70. Folgerung (aus der langen exakten Sequenz 3.19 des Paares $(X, A)$). *Es sei $(X, A)$ eine $p$-zusammenhängende Kofaserung mit $p \geq 0$, und $A$ sei $q$-zusammenhängend. Dann erhalten wir eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longleftarrow \pi_0(X) \longleftarrow \pi_0(A) \xleftarrow{\partial} \pi_1(X/A) \longleftarrow \cdots \longleftarrow \pi_{p+q}(X) \longleftarrow \pi_{p+q}(A) \ .$$

Beweis. Wir betrachten die lange exakte Sequenz für Paare und erhalten

$$\begin{tikzcd}
\pi_{p+q}(X,A) \arrow[d, "\cong"'] & \pi_{p+q}(X) \arrow[l] \arrow[d, equal] & \pi_{p+q}(A) \arrow[l] \arrow[d, equal] & \pi_{p+q+1}(X,A) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
\pi_{p+q}(X/A) & \pi_{p+q}(X) \arrow[l] & \pi_{p+q}(A) \arrow[l] & \pi_{p+q+1}(X/A) \ . & \qquad \square\square
\end{tikzcd}$$

Im Allgemeinen gibt es keine passende Abbildung $\partial\colon \pi_{p+q+1}(X/A) \to \pi_{p+q}(A)$, die die Sequenz fortsetzt. Für $(X, A) = (D^3, S^2)$ mit $p = 2$ und $q = 1$ wäre $\partial\colon \pi_4(S^3) \cong \mathbb{Z}/2 \to \pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ linksinvers zur Quotientenabbildung $\pi_4(D^3, S^2) \cong \mathbb{Z} \to \pi_4(S^3) \cong \mathbb{Z}/2$.

## 3.g. Der Freudenthalsche Einhängungssatz

Wir definieren das reduzierte Produkt und die Einhängung punktierter Räume und zeigen, dass Homotopiegruppen unter iterierter Einhängung „stabil“ werden. Die Eigenschaften dieser sogenannten stabilen Homotopiegruppen beleuchten wir dann im nächsten Abschnitt.

Wir erinnern uns an das Bouquet oder Wedge-Produkt punktierter Räume aus Definition 2.48. Es ist das Koprodukt in der Kategorie $\mathcal{T}op_+$ nach Bemerkung 2.49. Seien $(X_j, x_j)_{j \in J}$ gut punktierte Räume, dann hat

$$\Big( \coprod_{j \in J} X_j, \{\, x_j \mid j \in J \,\} \Big)$$

die Homotopieausdehnungseigenschaft, und $\{\, x_j \mid j \in J \,\}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge. Das Bouquet $\bigvee_{j \in J} (X_j, x_j)$ ist der Quotient nach dieser abgeschlossenen Teilmenge, also nach Proposition 3.64 selbst eine abgeschlossene Kofaserung.

Die universellen Eigenschaften aus Satz 1.40 und 1.46 liefern stets Abbildungen vom Koprodukt einer Familie punktierter Räume in ihr Produkt. Wir können also $X \vee Y$ nach $X \times Y$ abbilden, indem wir $x \in X$ auf $(x, y_0)$ und $y \in Y$ auf $(x_0, y) \in X \times Y$ abbilden, und erhalten einen Unterraum des kartesischen Produktes.

3.71. Definition. Es seien $(X, x_0)$, $(Y, y_0)$ punktierte Räume, dann definieren wir das *reduzierte* (oder auch *Smash-*) *Produkt* durch

$$(X, x_0) \wedge (Y, y_0) = (X \times Y)/(X \vee Y) \ .$$

Für $x \in X$, $y \in Y$ schreibe $x \wedge y \in X \wedge Y$ für die Äquivalenzklasse des Punktes $(x, y)$. Seien $(X, A)$, $(Y, B)$ punktierte Paare, dann setzen wir

$$(X, A) \wedge (Y, B) = (X \wedge Y, A \wedge Y \cup X \wedge B) \ .$$

Seien $f\colon X_1 \to X_2$, $g\colon Y_1 \to Y_2$ punktierte Abbildungen von Räumen oder Paaren, dann definieren wir ihr reduziertes Produkt als

$$f \wedge g\colon X_1 \wedge Y_1 \to X_2 \wedge Y_2 \qquad \text{mit} \qquad (f \wedge g)(x \wedge y) = f(x) \wedge g(y) \ .$$

Die (*reduzierte*) *Einhängung* oder (*reduzierte*) *Suspension* von $X$ oder $(X, A)$ ist definiert als

$$SX = X \wedge S^1 \qquad \text{beziehungsweise} \qquad (SX, SA)\ .$$

Die Einhängung einer punktierten Abbildung $f\colon X \to Y$ ist definiert als

$$Sf = f \wedge \mathrm{id}_{S^1}\colon SX \to SY\ .$$

Später werden wir die Basispunkte des Öfteren nicht mitschreiben.

3.72. Beispiel. Es folgen einige wichtige elementare Beispiele.

(1) Der reduzierte Kegel von $X$ aus Definition 3.66 lässt sich als $CX = (X, x_0) \wedge (I, 0)$ schreiben.

(2) Es gilt $S^k \wedge S^\ell \cong S^{k+\ell}$. Formal sieht man das am einfachsten mit Hilfe der Homöomorphismen

$$S^k \wedge S^\ell \cong (I^k/\partial I^k) \wedge (I^\ell/\partial I^\ell) \cong I^{k+\ell} \big/ \big(\partial I^k \times I^\ell \cup I^k \times \partial I^\ell\big) = I^{k+\ell}/\partial I^{k+\ell} \cong S^{k+\ell}\ .$$

(3) Es gilt $S^k \wedge (D^\ell, S^{\ell-1}) \cong (D^{k+\ell}, S^{k+\ell-1})$. Hierzu betrachten wir

$$\begin{aligned} S^k \wedge (D^\ell, S^{\ell-1}) &\cong (I^k/\partial I^k) \wedge (I^\ell/\partial' I^\ell, \partial I^\ell/\partial' I^\ell) \\ &\cong \big(I^{k+\ell}/\underbrace{(\partial I^k \times I^\ell \cup I^k \times \partial' I^\ell)}_{=\partial' I^{k+\ell}}, \underbrace{(\partial I^k \times I^\ell \cup I^k \times \partial I^\ell)}_{\partial I^{k+\ell}}/\partial' I^{k+\ell}\big) \cong (D^{k+\ell}, S^{k+\ell-1})\ . \end{aligned}$$

3.73. Bemerkung. Es folgen einige elementare Eigenschaften.

(1) Das reduzierte Produkt von Abbildungen ist mit der Verkettung verträglich:

$$(f_1 \wedge g_1) \circ (f_2 \wedge g_2) = (f_1 \circ f_2) \wedge (g_1 \circ g_2)\ .$$

Insbesondere definiert die Einhängung einen Funktor $S\colon \mathcal{T}op_+ \to \mathcal{T}op_+$.

(2) Das reduzierte Produkt punktierter Räume oder Paare ist genau wie das kartesische Produkt (jeweils bis auf eindeutige natürliche Homöomorphismen) assoziativ und kommutativ. Insbesondere können wir die Einhängung iterieren und erhalten

$$S^k X \cong (\cdots (X \wedge S^1) \wedge \cdots) \wedge S^1 \cong X \wedge S^k\ .$$

Außerdem gilt

$$S^k(X \wedge Y) \cong X \wedge Y \wedge S^k \cong X \wedge (S^k Y) \cong (S^k X) \wedge Y\ .$$

(3) Es gilt (bis auf einen eindeutigen natürlichen Homöomorphismus) das Distributivgesetz

$$(X \vee Y) \wedge Z \cong (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)\ ,$$

und analog für das reduzierte Produkt von links (Übung 3.131), analog zum Distributivgesetz von disjunkter Vereinigung und kartesischem Produkt. Insbesondere gilt auch

$$S^k(X \vee Y) \cong S^k X \vee S^k Y\ .$$

(4) Es gilt (bis auf einen eindeutigen natürlichen Homöomorphismus), dass

$$X \wedge S^0 \cong X \cong S^0 \wedge X\ .$$

Insbesondere gilt $S^k X \cong X \wedge S^k$ auch für $k \geq 0$.

(5) Ein reduziertes Produkt gut punktierter Räume ist wieder gut punktiert. Dazu benutzen wir Folgerung 3.61 und Proposition 3.64, und stellen $X \wedge Y$ als Pushout der Kofaserung $(X \times Y, X \vee Y)$ längs der konstanten Abbildung $X \vee Y \to \mathrm{pt}$ dar.

Genauso ist ein reduziertes Produkt gut punktierter, abgeschlossener Kofaserungen wieder eine gut punktierte, abgeschlossene Kofaserung (Übung 3.132). Also erhalten wir auch einen Einhängungsfunktor für gut punktierte, abgeschlossene Kofaserungen mit

$$S^k(X,A) = (S^kX, S^kA)\ .$$

(6) Seien $(X,A)$ und $(Y,B)$ gut punktierte, abgeschlossene Kofaserungen, und sei $(Z,C) = (X,A) \wedge (Y,B)$, dann gilt $Z/C \cong (X/A) \wedge (Y/B)$. Eine analoge Eigenschaft haben wir in Beispiel 3.72 (2) bereits benutzt.

Man beachte, dass das reduzierte Produkt nicht die universelle Eigenschaft eines Produktes aus Satz 1.46 auf $\mathcal{T}op_+$ erfüllt — diese Rolle übernimmt das punktierte kartesische Produkt, wie wir bereits aus Übung 3.104 wissen. Stattdessen legen die obigen Eigenschaften nahe, es als eine Art Tensorprodukt zu betrachten. Diesen Standpunkt werden wir in Abschnitt 4.c noch näher beleuchten.

3.74. Satz (Freudenthalscher Einhängungssatz). *Es sei $X$ ein $n$-zusammenhängender, gut punktierter Raum, dann ist der Einhängungshomomorphismus*

$$S\colon \pi_k(X) \to \pi_{k+1}(SX)$$

*ein Isomorphismus für $k \leq 2n$ und surjektiv für $k = 2n+1$. Insbesondere ist $SX$ ein $(n+1)$-zusammenhängender Raum.*

Bevor wir diesen Satz beweisen, bemerken wir, dass wir genau dieses Verhalten im Falle $X = S^n$ bereits in Satz 3.42 (4) beobachten konnten.

Beweis. Wir erinnern uns an den reduzierten Kegel $CX$ aus Definition 3.66. Wir hatten in Bemerkung 3.67 (2) die Basis des Kegels $CX$ mit $X$ identifiziert und gezeigt, dass $(CX,X)$ eine Kofaserung ist. Für den Quotienten erhalten wir

$$CX/X \cong (X \times I)/(X \times \partial I \cup \{x_0\} \times I) \cong (X \times S^1)/(X \vee S^1) \cong SX\ .$$

Wir fahren ähnlich fort wie im Beweis des Satzes 3.42 von Brouwer und Hopf. Da $CX$ zusammenziehbar ist, erhalten wir in der langen exakten Homotopiesequenz 3.19 des Paares $(CX,X)$ einen Isomorphismus $\partial\colon \pi_{k+1}(CX,X) \xrightarrow{\cong} \pi_k(X)$. Die Umkehrabbildung wird induziert von $f \mapsto f \wedge \mathrm{id}_{(I,1)}$. Wir schalten die Quotientenabbildung $q\colon CX \to SX$ nach und erhalten die gesuchte Abbildung

$$S\colon \pi_k(X) \xrightarrow{\partial^{-1}} \pi_{k+1}(CX,X) \xrightarrow{q_*} \pi_{k+1}(SX)\ .$$

Da $X$ ein $n$-zusammenhängender Raum und $CX$ zusammenziehbar ist, ist $(CX,X)$ ein $(n+1)$-zusammenhängendes Paar. Unsere Behauptung folgt also aus Proposition 3.68 über die Quotientenabbildung $q$. □

## 3.h. Stabile Homotopiegruppen

Wir benutzen den Freudenthalschen Einhängungssatz, um stabile Homotopiegruppen zu definieren. Anschließend beweisen wir einige angenehme Eigenschaften dieser Funktoren. Unter anderem können wir abgeschlossene Kofaserungen durch ihre Quotienten ersetzen, ohne höheren Zusammenhang vorauszusetzen. Tatsächlich liefert stabile Homotopietheorie den Prototyp für eine Homologietheorie. Allerdings bezahlen wir auch einen Preis: die einfachen Formeln für Produkte und die lange exakte Sequenz für Faserbündel gehen verloren.

3.75. Bemerkung. Wir betrachten Abbildungen zwischen Einhängungen.

(1) Es seien $X$, $Y$ punktierte Räume. Auf der Menge $[SX, Y]$ der punktierten Homotopieklassen von Abbildungen $SX \to Y$ können wir wie in den Definitionen 2.13 und 3.1 eine Gruppenstruktur definieren durch

$$(f+g)(x \wedge t) = \begin{cases} f\big(x \wedge (2t)\big) & \text{falls } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \text{ und} \\ g\big(x \wedge (2t-1)\big) & \text{falls } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Die Abbildung ist wohldefiniert, denn für $t \in \big\{0, \frac{1}{2}, 1\big\}$ bildet sie auf den Basispunkt $y_0$ ab, ebenso wie im Falle, dass $x = x_0$.

(2) Indem wir diese Konstruktion iterieren, erhalten wir Gruppenstrukturen auch auf $[S^k X, Y]$ für alle $k \ge 1$. Im Falle $k \ge 2$ ist $[S^k X, Y]$ abelsch wie in Satz 3.5 (3).

(3) Als Spezialfall der obigen Konstruktion betrachten wir $[S^k X, S^k Y]$. Da Einhängung ein Funktor ist, erhalten wir eine Abbildung

$$S\colon [S^k X, S^k Y] \to [S^{k+1} X, S^{k+1} Y] \qquad \text{mit} \qquad f \mapsto Sf\ .$$

Nach Bemerkung 3.73 (2) ist das reduzierte Produkt assoziativ und kommutativ. Wir können also dafür sorgen, dass die „neue“ Kopie von $S^1$ in $S^{k+1}X = S(S^k X)$ nicht diejenige ist, mit der wir oben die Gruppenstruktur definiert haben. Daher ist $S\colon [S^k X, S^k Y] \to [S^{k+1} X, S^{k+1} Y]$ ein Gruppenhomomorphismus.

(4) Wir wissen aus Übung 3.116, dass $[S^n, S^n]$ mit der Hintereinanderschaltung zu einem Ring wird. Analog sehen wir, dass Hintereinanderausführung eine bilineare Abbildung

$$[S^n X, S^n Y] \times [S^n Y \times S^n Z] \xrightarrow{\circ} [S^n X, S^n Z]$$

liefert.

In Folgerung 1.76 haben wir die universelle Eigenschaft des Kolimes kennengelernt und Kolimiten für Familien topologischer Räume definiert. Auch in der Kategorie der abelschen Gruppen gibt es Kolimiten. Sei dazu $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Familie abelscher Gruppen mit Homomorphismen $f_{k\ell}\colon G_k \to G_\ell$, so dass $f_{k\ell} \circ f_{jk} = f_{j\ell}$ für alle $j \le k \le \ell$. Dann definieren wir in Analogie zu (1.4) den Kolimes

$$G = \varinjlim G_k = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} G_k \Big/ \sim\ ,$$

wobei $G_j \ni g_j \sim g_k \in G_k$ genau dann gelte, wenn es ein $\ell \ge k, j$ gibt, so dass $f_{j\ell}(g_j) = f_{k\ell}(g_k) \in G_\ell$. Für jedes $k$ erhalten wir eine natürliche Abbildung $f_k\colon G_k \to G$ mit $g_k \mapsto [g_k] \in G$, so dass $f_k = f_\ell \circ f_{k\ell}$ für alle $k \le \ell$. Man kann sich davon überzeugen, dass $G$ eine Gruppe ist, dass alle $f_k$ Gruppenhomomorphismen sind, und dass $\big(G, (f_k)_k\big)$ die universelle Eigenschaft eines Kolimes aus Folgerung 1.76 erfüllt. Beispiele gibt es in Übung 3.134.

Hier haben wir zunächst Abbildungen $S\colon [S^k X, S^k Y] \to [S^{k+1} X, S^{k+1} Y]$. Hintereinanderschalten von $(\ell - k)$ dieser Abbildungen liefert $f_{k\ell}\colon [S^k X, S^k Y] \to [S^\ell X, S^\ell Y]$. Bei einem Kolimes kommt es nie auf die ersten Glieder in der Folge an. Daher stört es im Folgenden nicht, dass im Allgemeinen $[X, Y]$ keine Gruppe und $[SX, SY]$ nicht abelsch ist. Wir dürfen am Anfang der Folge sogar negative Indizes zulassen.

Sei $f\colon X \to Y$ stetig, dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_k(X) \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\pi_k f"'] & \pi_{k+1}(SX) \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\pi_{k+1} Sf"'] & \pi_{k+2}(S^2 X) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{k+1} S^2 f"'] & \cdots \\
\pi_k(Y) \arrow[r, "S"] & \pi_{k+1}(SY) \arrow[r, "S"] & \pi_{k+2}(S^2 Y) \arrow[r] & \cdots\ ,
\end{tikzcd}$$

denn für $u\colon S^k \to X$ gilt nach Bemerkung 3.73 (1), dass

$$\big(\pi_{k+1}Sf\big)(S[u]) = \big[(f \wedge \mathrm{id}_{S^1}) \circ (u \wedge \mathrm{id}_{S^1})\big] = \big[(f \circ u) \wedge \mathrm{id}_{S^1}\big] = S\big((\pi_k f)[u]\big)\ . \tag{3.6}$$

Die obere Reihe des Diagramms „konvergiert“ gegen den Kolimes der $\pi_{k+n}(S^n X)$ für $n \to \infty$, die untere gegen den Kolimes der $\pi_{k+n}(S^n Y)$, und die Abbildungen $\pi_{k+n}S^n f$ induzieren eine Abbildung zwischen diesen Kolimiten.

3.76. Definition. Es seien $X$, $Y$ punktierte Räume, dann definieren wir

$$[X,Y]^s = \varinjlim [S^n X, S^n Y] \in \mathcal{A}b\ .$$

Insbesondere definieren wir für alle $k \in \mathbb{Z}$ die *$k$-te stabile Homotopiegruppe* von $X$ als

$$\pi_k^s(X) = [S^k, X]^s = \varinjlim \pi_{k+n}(S^n X) \in \mathcal{A}b\ .$$

Für Abbildungen $f\colon X \to Y$ definieren wir

$$\pi_k^s f = \varinjlim \pi_{k+n} S^n f\colon \pi_k^s(X) \to \pi_k^s(Y)\ .$$

Wir könnten jetzt eine „naive“ stabile Homotopiekategorie mit den gleichen Objekten wie in $\mathcal{T}op_+$ und $\mathcal{HT}op_+$ definieren, und als Morphismenmengen die Gruppen $[X,Y]^s$ einsetzen. Diese Kategorie ist aber für Anwendungen nicht „stabil genug“: zum einen enthält sie zu wenig Objekte, so dass man später zu sogenannten „Spektren“ übergeht. Zum anderen enthält sie zu wenig Morphismen, so dass man stattdessen Folgen solcher Abbildungen $f_k$ zwischen Teilmengen der $k$-ten Räume der Spektren betrachtet, dass jeder „Teil“ des $k$-ten Raumes für irgendein $\ell \geq k$ im Definitionsbereich von $f_\ell$ liegt. Im Falle der stabilen Homotopiegruppen sind diese Überlegungen allerdings nicht notwendig, so dass wir hier bereits das Wort „stabil“ benutzen dürfen.

3.77. Proposition. *Für alle $k \in \mathbb{Z}$ sind die stabilen Homotopiegruppen Funktoren*

$$\pi_k^s\colon \mathcal{HT}op_+ \to \mathcal{A}b\ . \quad \square$$

Ein Kolimes ist besonders leicht dann zu berechnen, wenn die Folge der betrachteten Objekte irgendwann stationär wird, das heißt, wenn die Abbildungen $f_{k\ell}\colon G_k \to G_\ell$ für alle $k$, $\ell \geq n_0$ Isomorphismen sind. In diesem Fall ist der Kolimes $G$ natürlich isomorph zu allen Gruppen $G_k$ mit $k \geq n_0$. Genau dieses Phänomen beobachten wir im Fall der stabilen Homotopiegruppen.

3.78. Folgerung (aus dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.74). *Für jeden gut punktierten topologischen Raum $X$ gilt*

$$\pi_k^s(X) \cong \begin{cases} 0 & \textit{falls } k < 0, \textit{ und} \\ \pi_{k+\ell}(S^\ell X) & \textit{falls } k \geq 0 \textit{ und } \ell \geq k+2. \end{cases}$$

*Wenn $X$ ein $n$-zusammenhängender Raum ist, gilt sogar*

$$\pi_k^s(X) \cong \pi_{k+\ell}(S^\ell X) \qquad \textit{falls } \ell \geq \max(k-2n, 0)\ . \quad \square$$

3.79. Definition. Ein *gutes Paar* $(X, A, x_0)$ ist eine abgeschlossene Kofaserung, bei der $(A, x_0)$ gut punktiert ist.

Zu jedem guten Paar betrachten wir die Inklusionsabbildung $i\colon A \to X$ und die Quotientenabbildung $q\colon X \to X/A$. Für Abbildungen $f$ schreiben wir wieder kurz $f_* = \pi_k^s f$, wenn keine Missverständnisse zu erwarten sind.

3.80. Satz (stabile Homotopiesequenz). *Für gute Paare $(X, A)$ erhalten wir eine natürliche lange exakte Sequenz abelscher Gruppen*

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}^s(A) \xleftarrow{\partial} \pi_k^s(X/A) \xleftarrow{q_*} \pi_k^s(X) \xleftarrow{i_*} \pi_k^s(A) \longleftarrow \cdots$$

Diese Sequenz haben wir in Folgerung 3.70 bereits für die „unstabilen“ Homotopiegruppen gesehen, allerdings hat sie dort auf beiden Seiten nach endlich vielen Schritten aufgehört.

Beweis. Wir starten wieder mit den langen exakten Sequenzen der Paare $(S^nX, S^nA)$ aus Satz 3.19. Sie sind mit Einhängung verträglich, das heißt, das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots & \pi_{k-1}(X) \arrow[l] \arrow[d, "S"'] & \pi_{k-1}(A) \arrow[l, "\pi_{k-1}i"'] \arrow[d, "S"'] & \pi_k(X,A) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "S"'] & \pi_k(X) \arrow[l, "\pi_k q"'] \arrow[d, "S"'] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & \pi_k(SX) \arrow[l] & \pi_{k-1}(SA) \arrow[l, "\pi_k Si"'] & \pi_{k+1}(SX,SA) \arrow[l, "\partial"'] & \pi_{k+1}(SX) \arrow[l, "\pi_{k+1}Sq_*"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Dadurch erhalten wir die gesuchte Sequenz als Kolimes der obigen Sequenzen unter iterierter Einhängung. Jedes endliche Stück der obigen Sequenz wird durch ausreichend häufiges Einhängen stationär. Für die Terme $\pi_{k+\ell}(S^\ell A)$ und $\pi_{k+\ell}(S^\ell X)$ erhalten wir das mit Folgerung 3.78, und für die Terme $\pi_{k+\ell}(S^\ell X, S^\ell A)$ ergibt es sich aus dem Fünferlemma 3.20. Schließlich dürfen wir $\pi_{k+\ell}(S^\ell X, S^\ell A)$ für hinreichend hohe $\ell$ nach Proposition 3.68 und Bemerkung 3.73 (5) und (6) durch $\pi_{k+\ell}(S^\ell(X/A))$ ersetzen.

Die äußeren Quadrate der obigen Sequenz kommutieren wegen der Funktorialität der Einhängung, siehe (3.6). Für das mittlere Quadrat betrachten wir die Konstruktion von $\partial$ in Satz 3.19. Es sei $[u] \in \pi_k(X, A)$ repräsentiert durch

$$u\colon (I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k) \to (X, A)\ .$$

Mit Beispiel 3.72 (3) sehen wir schließlich, dass

$$\begin{aligned}\partial Su = \partial(u \wedge \mathrm{id}_{S^1}) = (u \wedge \mathrm{id}_{S^1})|_{(I^k\times\{0\})/(\partial I^k\times\{0\})} \\ = \big(u|_{(I^{k-1}\times\{0\})/(\partial I^{k-1}\times\{0\})}\big) \wedge \mathrm{id}_{S^1} = \partial u \wedge \mathrm{id}_{S^1} = S\partial u\ .\end{aligned}$$

Also kommutieren $S$ und $\partial$, und wir erhalten den Verbindungshomorphismus auch im Kolimes.

Die stabile lange exakte Sequenz im Satz ist natürlich, da die einzelnen Sequenzen natürlich sind. □

3.81. Bemerkung. Motiviert durch den obigen Beweis können wir $\pi_k^s(X, A) = \pi_k^s(X/A)$ definieren. Dann gilt eine lange exakte Sequenz für Paare wie in Satz 3.19. Den Ausschneidungssatz für stabile Homotopiegruppen bekommen wir geschenkt, denn wenn $(A, A\cap B)$ und $(B, A\cap B)$ gute Paare sind, gilt $A/(A\cap B) \cong X/B$, also erst recht $\pi_k^s(A, A\cap B) \cong \pi_k^s(X, B)$. Wir dürfen dabei aber nicht vergessen, dass sowohl Proposition 3.68 über Quotienten als auch der Freudenthalsche Einhängungssatz 3.74 wesentlich auf dem Ausschneidungssatz beruhen.

Es sei $(X_j)_{j\in J}$ eine Familie gut punktierter Räume, und $\iota_j\colon X_j \to X = \bigvee_{j\in J} X_j$ seien die Strukturabbildungen. Dann erhalten wir Abbildungen $\iota_{j*}\colon \pi_k^s(X_j) \to \pi_k^s(X)$ für alle $j \in J$. Aufgrund der universellen Eigenschaft 1.41 des Koproduktes $\bigoplus_{j\in J} \pi_k^s(X_j)$ induzieren diese Abbildungen eine eindeutige Abbildung

$$\bigoplus_{j\in J} \iota_{j*}\colon \bigoplus_{j\in J} \pi_k^s(X_j) \to \pi_k^s(X) = \pi_k^s\Big(\bigvee_{j\in J} X_j\Big)\ .$$

3.82. Proposition. *Die obige Abbildung $\bigoplus \iota_{j*}$ ist ein natürlicher Isomorphismus.*

Beweis. Falls die Indexmenge $J = \{1, \ldots, N\}$ endlich ist, zeigen wir die Behauptung durch Induktion über $N$. Dazu betrachten wir das Paar $\big(\bigvee_{j=1}^N X_j, \bigvee_{j=1}^{N-1} X_j\big)$ zusammen mit der Inklusion und der Quotientenabbildung

$$\iota_N\colon X_N \hookrightarrow \bigvee_{j=1}^N X_j \qquad \text{und} \qquad q_N\colon \bigvee_{j=1}^N X_j \twoheadrightarrow \bigvee_{j=1}^N X_j \Big/ \bigvee_{j=1}^{N-1} X_j \cong X_N\ .$$

Da $q_N \circ \iota_N = \mathrm{id}_{X_N}$, spaltet die lange exakte Sequenz

$$\cdots \leftarrow \pi_k^s(X_N) \underset{\iota_{N*}}{\overset{q_{N*}}{\leftrightarrows}} \pi_k^s\left(\bigvee_{j=1}^N X_j\right) \leftarrow \pi_k^s\left(\bigvee_{j=1}^{N-1} X_j\right) \leftarrow \dots$$

aus Satz 3.80. Induktiv erhalten wir

$$\pi_k^s\left(\bigvee_{j=1}^N X_j\right) \cong \pi_k^s\left(\bigvee_{j=1}^{N-1} X_j\right) \oplus \pi_k^s(X_N) \cong \bigoplus_{i=1}^N \pi_k^s(X_j) \ .$$

Im Falle eine unendlichen Indexmenge zeigen wir zuerst Surjektivität. Dazu wählen wir zunächst einen Repräsentanten $[f] \in \pi_{k+n}(S^n X)$, der wiederum dargestellt wird durch

$$f\colon S^{k+n} \longrightarrow S^n X = \bigvee_{j \in J} S^n X_j \ .$$

Da $X$ gut punktiert ist, ist auch $S^n X$ nach Bemerkung 3.73 (5) gut punktiert. Wir bestimmen $u\colon S^n X \to I$ und $h\colon S^n X \times I \to S^n X$ wie in Proposition 3.59 (1). Dann erhalten wir eine offene Umgebung $U = u^{-1}([0,1))$ vom Basispunkt $* \in S^n X$, so dass $h$ die Menge $U$ in $S^n X$ relativ zu $*$ auf $*$ zusammenzieht. Außerdem sei $U_j = S^n X_j \setminus \{*\} \subset S^n X$, dann ist $U_j$ ebenfalls offen, und die Mengen $U$ und $(U_j)_{j \in J}$ überdecken $S^n X$.

Da $f$ stetig und $S^{k+n}$ kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $J_0 \subset J$, so dass

$$S^{k+n} = f^{-1}(U) \cup \bigcup_{j \in J_0} f^{-1}(U_j) \ .$$

Die Teilmenge $\bigcup_{j \in J_0} f^{-1}(U_j) \subset S^{k+n}$ ist offen, und ihr Rand wird auf den Basispunkt in $X$ abgebildet. Durch Verkleben erhalten wir eine Homotopie

$$(s,t) \longmapsto \begin{cases} h(f(s),t) & \text{falls } s \notin \bigcup_{j \in J_0} f^{-1}(U_j), \text{ und} \\ f(s) & \text{falls } s \in \overline{\bigcup_{j \in J_0} f^{-1}(U_j)} \ . \end{cases}$$

Für $t = 1$ trifft diese Abbildung nur noch diejenigen $X_j$ mit $j \in J_0$. Wir erhalten eine Abbildung $g \sim f$ mit

$$g\colon S^{k+n} \longrightarrow \bigvee_{j \in J_0} S^n X_j \hookrightarrow \bigvee_{j \in J} S^n X_j \ .$$

Somit liegt $[f] = [g]$ im Bild von $\pi_k^s\big(\bigvee_{j \in J_0} X_j\big) \cong \bigoplus_{J_0} \pi_k^s(X_j)$, also auch im Bild von $\bigoplus_J \pi_k^s(X_j)$.

Um Injektivität zu zeigen, sei $\sum_{i \in I} [f_i]$ ein Element des Kernes, insbesondere $[f_i] \in \pi_k^s(X_i)$, und $[f_i] = 0$ für fast alle $i$. Wir betrachten einen Repräsentanten $f\colon S^{k+n} \to S^n X$, der nur endlich viele der $X_i$ trifft. Dann können wir eine Nullhomotopie $h$ wie oben ebenfalls auf einen endlichen Teil des Koproduktes herunterdrücken, und die Behauptung folgt. □

3.83. Bemerkung. Wir haben jetzt bei einigen bekannten Resultaten die lästigen Zusammenhangsvoraussetzung durch den Übergang zu stabilen Homotopiegruppen eliminiert. Wir haben aber auch einige schöne Eigenschaften verloren: da die Einhängung eines kartesischen Produktes kein Produkt mehr ist, geht die Produktformel aus Beispiel 3.28 verloren, genauso wie die lange exakte Homotopiesequenz 3.25 für Serre-Faserungen. Anstelle dieser Resultate treten Spektralsequenzen, die für viele Berechnungen zu sperrig sind.

Die Kunst im Umgang mit Homotopiegruppen besteht daher oft darin, möglichst viele Rechnungen im sogenannten „stabilen Bereich“ durchzuführen, also für solche $k$, für die $\pi_k(X) \cong \pi_k^s(X)$ für den jeweiligen Raum $X$ noch gilt.

## 3.i. Gerahmter Bordismus

Wir geben jetzt eine differentialtopologische Beschreibung der stabilen Homotopiegruppen. Der Begriff einer $k$-dimensionalen differenzierbaren Untermannigfaltigkeit $M$ des $\mathbb{R}^n$ sollte bekannt sein. Wir lassen im Folgenden übrigens auch die leere Menge als Untermannigfaltigkeit zu. In jedem Punkt $p \in M$ spaltet sich $\mathbb{R}^n$ auf in den Tangentialraum $T_pM$ an $M$ und den dazu senkrechten Normalenraum $\nu_pM$. Diese Unterräume des $\mathbb{R}^n$ hängen stetig von $p \in M$ ab, insbesondere bildet die Vereinigung aller $\nu_pM$ eine Untermannigfaltigkeit 9von $M \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$, das *Normalenbündel* $\nu M$ von $M$. Dabei identifizieren wir $p \in M$ mit dem Nullvektor an der Stelle $p$ und erhalten einen Einbettung $M \hookrightarrow \nu M$, den *Nullschnitt.*

Unter einer *Trivialisierung* des Normalenbündels von $M$ verstehen wir eine stetige Abbildung $\tau\colon \nu M \to M \times \mathbb{R}^{n-k}$, so dass $\tau_p\colon \nu_pM \to \{p\} \times \mathbb{R}^{n-k}$ für alle $p \in M$ ein linearer Isomorphismus ist. Äquivalent dazu können wir jedem $p \in M$ auf stetige Weise einen Rahmen $(v_1, \ldots, v_{k-n})$, das heißt, eine Basis von $\nu_pM$, zuordnen, so dass $\tau(v_j) = (p, e_j) \in M \times \mathbb{R}^{n-k}$. Daher nennen wir $\tau$ auch *Rahmung* von $M$.

Sei schließlich $\tau$ eine Rahmung von $M \subset \mathbb{R}^n$, und sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall der Länge $> 0$. Dann können wir das Normalenbündel $\nu(J \times M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $J \times \nu M \to J \times M$ identifizieren, da die zusätzliche Richtung im umgebenden Raum tangential zu $J$ ist, also nicht zum Normalenbündel beiträgt. Daher induziert $\tau$ eine Rahmung $\tau \circ \pi_{\nu M}\colon \nu(J \times M) \cong J \times \nu M \to \mathbb{R}^{n-k}$.

3.84. Definition. Es seien $0 \le k < n$.

(1) Eine *gerahmte $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit* des $\mathbb{R}^n$ besteht aus
   (a) einer glatten, kompakten $k$-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ (ohne Rand) für ein $n > k$, und
   (b) einer Trivialisierung $\tau\colon \nu M \to M \times \mathbb{R}^{n-k}$ des Normalenbündels von $M$ in $\mathbb{R}^n$, der *Rahmung.*

(2) Ein *gerahmter Bordismus* zwischen zwei $k$-dimensionalen gerahmten Untermannigfaltigkeiten $(M_i, \tau_i)$ $(i = 0, 1)$ des $\mathbb{R}^n$ besteht aus
   (a) einer glatten, kompakten $(k+1)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $W \subset I \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit Rand $\partial W \subset \partial I \times \mathbb{R}^n$ mit *Krägen*
   $$W \cap \big([0,\varepsilon) \times \mathbb{R}^n\big) = [0,\varepsilon) \times M_0 \quad \text{und} \quad W \cap \big((1-\varepsilon, 1] \times \mathbb{R}^n\big) = (1-\varepsilon, 1] \times M_1$$
   für ein geeignetes $\varepsilon > 0$, und
   (b) einer Trivialisierung $\bar\tau\colon \nu W \to W \times \mathbb{R}^{n-k}$ von $\nu W$, so dass auf den Krägen
   $$\begin{aligned} \bar\tau|_{[0,\varepsilon)\times M_0} &= \tau_0 \circ \pi_{\nu M_0}\colon \nu W|_{W\cap([0,\varepsilon)\times\mathbb{R}^n)} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k} \\ \text{und} \qquad \bar\tau|_{(1-\varepsilon,1]\times M_1} &= \tau_1 \circ \pi_{\nu M_1}\colon \nu W|_{W\cap((1-\varepsilon,1]\times\mathbb{R}^n)} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}\ . \end{aligned}$$

(3) Zwei gerahmte $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ heißen *gerahmt bordant,* wenn ein gerahmter Bordismus zwischen ihnen existiert. Es bezeichne $\Omega_k^{\mathrm{fr},n}$ die Menge aller gerahmten $k$-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ bis auf gerahmten Bordismus.

In (2) schreiben wir

$$\partial(W, \bar\tau) = \partial_0(W, \bar\tau) \sqcup \partial_1(W, \bar\tau) \qquad \text{mit } \partial_i(W, \bar\tau) = (M_i, \tau_i)\ .$$

Wenn $\partial_1(W, \bar\tau) = \emptyset$ gilt, nennen wir $(M_0, \tau_0)$ *gerahmt nullbordant* und $(W, \bar\tau)$ einen *gerahmten Nullbordismus* von $(M_0, \tau_0)$.

Die einzigen kompakten Untermannigfaltigkeiten, die wir uns gut vorstellen können, sind geschlossene Kurven im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ („Knoten“) sowie orientierbare Flächen im $\mathbb{R}^3$. Für alle diese

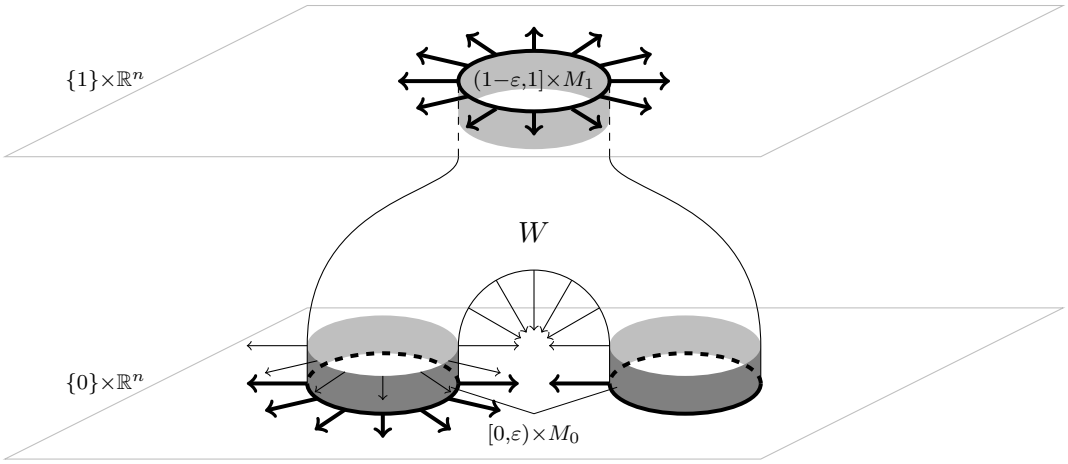



Abbildung 3.8. Ein gerahmter Bordismus

Untermannigfaltigkeiten finden wir Rahmungen (für Knoten sogar abzählbar viele nicht homotope). Es gibt aber auch Untermannigfaltigkeiten höherer Dimension und Kodimension, die keine Rahmungen zulassen.

Als Beispiel für einen Bordismus betrachten wir eine „Hose“ wie in Abbildung 3.8, deren Rand aus zwei Kreisen in $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ und einem Kreis in $\{1\} \times \mathbb{R}^2$ besteht. Wir erhalten eine kompatible Trivialisierung des Normalenbündels zum Beispiel, wenn wir jeweils für alle Kreise die nach außen beziehungsweise die nach innen weisenden Normalenvektoren gewählt haben.

3.85. Bemerkung. Wir überprüfen, dass „gerahmt bordant“ eine Äquivalenzrelation definiert.

(1) Sei $(M, \tau)$ gerahmte Mannigfaltigkeit, dann ist $W = I \times M$ ein Bordismus, und $\tau$ induziert eine Trivialisierung $\bar{\tau}$ von $\nu W$, die $\tau$ an beiden Randkomponenten fortsetzt.
(2) Sei $W$ ein gerahmter Bordismus zwischen $(M_0, \tau)$ und $(M_1, \tau_1)$. Spiegeln an der Ebene $\left\{\frac{1}{2}\right\} \times \mathbb{R}^n$ liefert einen Bordismus zwischen $M_1$ und $M_0$, und die Trivialisierung $\bar{\tau}$ lässt sich mitspiegeln.
(3) Sei schließlich $(W', \bar{\tau}')$ gerahmter Bordismus zwischen $(M_0, \tau_0)$ und $(M_1, \tau_1)$, und $(W'', \bar{\tau}'')$ sei gerahmter Bordismus zwischen $(M_1, \tau_1)$ und $(M_2, \tau_2)$. Wir stauchen beide Bordismen auf $\left[0, \frac{1}{2}\right] \times \mathbb{R}^n$ beziehungsweise $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \mathbb{R}^n$, dann bildet die Vereinigung $W$ aufgrund der Produktstruktur auf den Krägen wieder eine glatte Mannigfaltigkeit, und wir wählen $\varepsilon = \min\left(\frac{\varepsilon'}{2}, \frac{\varepsilon''}{2}\right)$. Die Trivialisierungen $\bar{\tau}'$ und $\bar{\tau}''$ stimmen nach Stauchung auf $\left(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon\right)$ mit der von $\tau_1$ induzierten Trivialisierung überein, und lassen sich daher auf ganz $W$ fortsetzen.

Wir haben also gezeigt, dass gerahmter Bordismus eine wohldefinierte Äquivalenzrelation darstellt.

Sei $(M, \tau)$ eine gerahmte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, und sei $p \in M$. Wir definieren eine Abbildung $a\colon \nu M \to \mathbb{R}^n$ durch

$$a(p, v) = p + v \ .$$

An der Stelle $(p, 0) \in M \times \{0\} \subset \nu M$ mit $p \in M$ hat $\nu M$ den Tangentialraum

$$T_{(p,0)}\nu M = T_p M \oplus \nu_p M \cong \mathbb{R}^n = T_p \mathbb{R}^n \ ,$$

und wir sehen, dass $da_{(p,0)} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Nach dem Umkehrsatz ist $a$ also ein lokaler Diffeomorphismus nahe des Nullschnitts $M \subset \nu M$. Da $M$ kompakt ist, finden wir ein $r > 0$, so dass $a\colon \nu^{(r)} M \to \mathbb{R}^n$ eine Einbettung wird, wobei

$$\nu^{(r)} M = \left\{ \, v \in \nu_p M \;\middle|\; |v| < r \, \right\} \ .$$

Wir definieren jetzt eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to S^{n-k} \cong D^{n-k}/S^{n-k-1}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tau_p(v)}{r} & \text{falls } x = a(p,v) \text{ für ein } p \in M \text{ und ein } v \in \nu_p M \text{ mit } |v| < r, \text{ und} \\ * & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.7}$$

Diese Abbildung ist stetig auf $\operatorname{im} a$. Sei jetzt $U \subset S^{n-k}$ offene Umgebung von $*$. Dann ist $a^{-1}(U)$ offene Umgebung von $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{im} a$. Also ist $f$ insgesamt stetig. Das Bild $\operatorname{im} a$ ist in einem Kompaktum $K$ in $\mathbb{R}^n$ enthalten, also wird $\mathbb{R}^n \setminus K$ konstant auf $*$ abgebildet. Also können wir $f$ auf die Einpunktkompaktifizierung fortsetzen und erhalten $f\colon S^n \to S^{n-k}$.

3.86. Satz (Pontryagin-Thom-Konstruktion, [**Mi**, Chapter 7]). *Für $0 \le k < n$ gilt*

$$\pi_n(S^{n-k}) \cong \Omega_k^{\mathrm{fr},n} .$$

Beweis. Der vollständige Beweis benötigt einige Sätzen aus der Differentialtopologie. Wir geben hier daher nur eine Beweisskizze und verweisen ansonsten auf [**Mi**].

Als erstes geben wir eine Umkehrabbildung zur obigen Konstruktion an. Dabei benutzen wir, dass es in jeder punktierten Homotopieklasse von Abbildungen $f\colon S^n \to S^{n-k}$ einen glatten Repräsentanten gibt, für den der „Südpol“ $0 \in \mathbb{R}^{n-k} \cong S^{n-k} \setminus \{*\}$ regulärer Wert ist, und setzen

$$M = f^{-1}(0) \subset f^{-1}(S^{n-k} \setminus \{*\}) \subset \mathbb{R}^n .$$

Dann ist $M$ eine glatte Untermannigfaltigkeit nach dem Satz über implizite Funktionen. Als Trivialisierung des Normalenbündels wählen wir einfach $\tau = df|_{\nu M}$.

Offensichtlich hängt $(M,\tau)$ von der Wahl des Repräsentanten $f$ von $[f] \in \pi_n(S^{n-k})$ ab. Es sei also $g$ ein weiterer glatter punktierter Repräsentant, für den 0 ein regulärer Wert ist. Dann können wir mit dem gleichen Satz wie oben eine Homotopie zwischen $f$ und $g$ durch eine glatte punktierte Homotopie approximieren, für die 0 ein regulärer Wert ist. Dabei können wir sogar annehmen, dass diese Homotopie nahe der Endpunkte stationär ist. Dann ist $W = h^{-1}(0) \subset I \times \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit wie in Definition 3.84 (2a) und $\bar\tau = dh|_{\nu W}$ eine Trivialisierung von $\nu W$, so dass $(W,\bar\tau)$ einen gerahmter Bordismus zwischen $(M_0,\tau_0)$ und $(M_1,\tau_1)$ darstellt.

Wir erhalten also eine wohldefinierte Abbildung $\Phi\colon \pi_n(S^{n-k}) \to \Omega_k^{\mathrm{fr},n}$. Die Surjektivität haben wir oben bereits gezeigt, indem wir $f$ zu $(M,\tau)$ konstruiert haben. Injektivität erhalten wir, indem wir auf dem gleichen Wege zu einem gerahmten Bordismus zwischen $(f_0^{-1}, df_0|_{\nu(f_0^{-1}(0))})$ und $(f_1^{-1}, df_1|_{\nu(f_1^{-1}(0))})$ eine Homotopie $h\colon I \times R^n \to D^{n-k}/S^{n-k-1}$ zwischen $f_0$ und $f_1$ angeben. $\square$

3.87. Bemerkung. Für $n \ge 2$ trägt $\pi_n(S^{n-k})$ eine abelsche Gruppenstruktur. Auch $\Omega_k^{\mathrm{fr},n}$ ist eine abelsche Gruppe für $n \ge 2$. Für die konstante Abbildung $f \equiv *$ ist $f^{-1}(0) = \emptyset$, also ist das Nullelement die leere Menge.

Seien $(M_0,\tau_0)$ und $(M_1,\tau_1)$ gegeben. Beide Mannigfaltigkeiten sind kompakt, also beschränkt in $\mathbb{R}^n$. Wir können daher beide Mannigfaltigkeiten innerhalb $\mathbb{R}^n$ in verschiedene Richtungen parallel so verschieben, dass sie disjunkt werden. Dann nehmen wir die disjunkte Vereinigung als Summe. Man überprüft leicht, dass verschiedene Verschiebungsvektoren gerahmt bordante Summen $(M_0,\tau_0) + (M_1,\tau_1)$ liefern, und dass diese Summe genau der Summe in $\pi_n(S^{n-k})$ entspricht.

Außerdem erhalten wir das gerahmte Inverse $-(M,\tau)$ von $(M,\tau)$, indem wir $M$ und $\tau$ gemeinsam an einer Hyperbene $H$ in $\mathbb{R}^n$ spiegeln. Wenn wir diese Hyperbene disjunkt zu $M$ wählen, stellen wir uns jetzt vor, dass $(M,\tau)$ an der „Achse“ $H \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ auf sein Inverses „rotiert“. Die so erzeugte „Rotationsmannigfaltigkeit“ stauchen wir nach $\mathbb{R}^n \times [0,1)$ und erhalten einen Bordismus von $(M,\tau) + (-(M,\tau))$ zur leeren Menge.

3.88. Beispiel. Für $k = 0$ betrachten wir endliche Teilmengen $M = (p_1,\dots,p_N)$ des $\mathbb{R}^n$. Der Einfachheit halber sei $n \ge 2$. Für jeden Punkt $p_i$ fixieren wir eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Ein gerahmter Bordismus zwischen $M_0$ und $M_1$ ist eine Sammlung von Kurven zwischen den Punkten aus beiden

Mengen. Aufgrund der Rahmung verbindet eine Kurve mit zwei Randpunkten in $M_0$ immer Punkte mit verschieden orientierten Basen, während eine Kurve von $M_0$ nach $M_1$ immer Punkte mit gleich orientierten Basen miteinander verbindet. Jetzt überzeugt man sich leicht, dass $\Omega_0^{\mathrm{fr},n} \cong \mathbb{Z} \cong \pi_n(S^n)$ gilt. Man beachte, dass es uns soeben gelungen ist, $\pi_n(S^n)$ ohne Benutzung des Ausschneidungssatzes und der Homotopiesequenz 3.25 für Faserungen zu bestimmen.

3.89. Folgerung. *Es sei $f\colon S^n \to S^n$ punktierte Abbildung. Wenn ein Punkt $p \in \mathbb{R}^n \cong S^n \setminus \{*\}$ existiert, so dass $f$ in einer Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $f^{-1}(p)$ glatt und $p$ regulärer Wert ist, dann berechnet sich der Abbildungsgrad aus Definition 3.45 als*

$$\deg f = \sum_{q \in f^{-1}(p)} \operatorname{sign} \det df_q \ . \quad \square$$

Später können wir mit einer ähnlichen Formel einen Abbildungsgrad für Abbildungen zwischen kompakten orientierten Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension erklären.

In Abschnitt 3.j betrachten wir noch den Fall $k = 1$. Für größere $k$ ist der Aufwand bei der Bestimmung von $\pi_n(S^{n-k})$ mit der Pontryagin-Thom-Konstruktion so hoch, dass man lieber auf andere Methoden zurückgreift.

Wir wollen jetzt zu $\pi_k^s(S^0)$ übergehen. Wir betrachten dazu die Inklusion $\iota\colon \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Es sei $(M, \tau)$ gerahmte $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Dann ist $M' = \iota(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ wieder Untermannigfaltigkeit mit Tangential- und Normalbündel

$$TM' = d\iota(TM) \cong TM \qquad \text{und} \qquad \nu M' = d\iota(\nu M) \times \{0\} \times \mathbb{R} \cong \nu M \times \mathbb{R} \ .$$

Wir erweitern also $\tau$ zu einer Trivialisierung

$$\tau' = \tau \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\colon \nu M' \cong \nu M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1-k} \ .$$

Mit gerahmten Bordismen verfahren wir analog und erhalten eine Abbildung

$$\iota_\#\colon \Omega_k^{\mathrm{fr},n} \longrightarrow \Omega_k^{\mathrm{fr},n+1} \ .$$

3.90. Proposition. *Für alle $0 \le k < n$ kommutiert das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \pi_n(S^{n-k}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "S"'] & \Omega_k^{\mathrm{fr},n} \arrow[d, "\iota_\#"] \\ \pi_{n+1}(S^{n+1-k}) \arrow[r, "\cong"] & \Omega_k^{\mathrm{fr},n+1} \ . \end{tikzcd}$$

Beweis. Der Einfachheit halber betrachten wir $S^{n+1} = S^n \wedge S^1$ und $S^{n+1-k} = S^{n-k} \wedge S^1$ und stabilisieren entsprechend in der letzten Koordinate. Sei $f\colon S^n \to S^{n-k}$ wie im Beweis von Satz 3.86 eine glatte punktierte Abbildung, so dass $0 \in \mathbb{R}^n = S^n \setminus \{0\}$ regulärer Wert ist, und es sei $(M, \tau) = \big(f^{-1}(0), df|_{\nu(f^{-1}(0))}\big)$. Dann ist $Sf = f \wedge \mathrm{id}_{S^1}$ in einer Umgebung von $(Sf)^{-1}(0)$ immer noch glatt und stimmt dort mit $f \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ überein. Daher erhalten wir

$$(Sf)^{-1}(0) = f^{-1}(0) \times \{0\} = M' \qquad \text{und} \qquad d(Sf)|_{\nu M'} = (df \times d\mathrm{id}_{\mathbb{R}})|_{\nu M \times \mathbb{R}} = \tau' \ . \qquad \square$$

3.91. Definition. Für $k \ge 0$ ist die *$k$-te gerahmte Bordismusgruppe* definiert durch

$$\Omega_k^{\mathrm{fr}} = \varinjlim \Omega_k^{\mathrm{fr},n} \ .$$

3.92. Folgerung (Aus Satz 3.42 (4) und 3.86). *Es gilt*

$$\pi_k^s \cong \Omega_k^{\mathrm{fr}} \ ,$$

*insbesondere gilt $\Omega_k^{\mathrm{fr}} \cong \Omega_k^{\mathrm{fr},n}$ für alle $n \ge 2k+2$.* $\square$

Wir nennen $(M,\tau)$ schlicht *gerahmte $k$-dimensionale Mannigfaltigkeit,* wenn es uns egal ist, in welchen $\mathbb{R}^n$ wir $(M,\tau)$ betrachten wollen — nur muss $n$ eine gewisse Mindestgröße haben, typischerweise jedoch nicht mehr als $2k+2$. Genauso sprechen wir nur noch von gerahmten Bordismen $(W,\bar\tau)$ zwischen $(M_0,\tau_0)$ und $(M_1,\tau_1)$ — dabei müssen wir unter Umständen $(M_0,\tau_0)$ und $(M_1,\tau_1)$ erst in einen größeren $\mathbb{R}^n$ einbetten. Als nächstes kommen wir zu einer geometrischen Interpretation der stabilen Homotopiegruppen $\pi_k^s(X)$, dabei betrachten wir direkt den Kolimes.

3.93. Definition. Es sei $X$ ein (nicht notwendig punktierter) topologischer Raum.

(1) Ein *gerahmter singulärer $k$-Zykel* in $X$ besteht aus
   (a) einer gerahmten $k$-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $(M,\tau)$ und
   (b) einer Abbildung $F\colon M\to X$.

(2) Zwei gerahmte singuläre Zykel $(M_0,\tau_0,F_0)$ und $(M_1,\tau_1,F_1)$ heißen *in $X$ gerahmt bordant* oder auch *gerahmt homolog,* wenn es
   (a) einen gerahmten Bordismus $(W,\bar\tau)$ zwischen $(M_0,\tau_0)$ und $(M_1,\tau_1)$ und
   (b) eine Abbildung $\bar F\colon W\to X$ mit $\bar F|_{\partial_i M}=F_i$ für $i\in\{0,1\}$ gibt.

(3) Die *$k$-te gerahmte Bordismusgruppe $\Omega_k^{\mathrm{fr}}(X)$ von $X$* sei die Menge aller gerahmten singulären $k$-Zykel in $X$ bis auf gerahmten Bordismus.

Wir nennen die obigen Zykel „singulär“, weil wir nicht erwarten, dass $F$ eine Einbettung ist — im schlimmsten Fall kann $F$ sogar konstant sein.

3.94. Bemerkung. Es sei $X$ ein topologischer Raum.

(1) Wie in Bemerkung 3.83 ist „gerahmt bordant“ in $X$ eine Äquivalenzrelation.

(2) Falls $X=\mathrm{pt}$ der einpunktige Raum ist, kommt für $F$ immer nur die konstante Abbildung in Frage, also gilt
$$\Omega_k^{\mathrm{fr}}(\mathrm{pt})=\Omega_k^{\mathrm{fr}}\ .$$

(3) Durch disjunkte Vereinigung der gerahmten Mannigfaltigkeiten $(M,\tau)$ wird $\Omega_k^{\mathrm{fr}}(X)$ wie in Bemerkung 3.87 zu einer abelschen Gruppe. Dabei müssen die Bilder der einzelnen gerahmten Untermannigfaltigkeiten in $X$ aber nicht disjunkt sein.

(4) Es sei $\varphi\colon X\to Y$ stetig. Dann induziert $\varphi$ einen funktoriellen Gruppenhomomorphismus
$$\varphi_*\colon \Omega_k^{\mathrm{fr}}(X)\to\Omega_k^{\mathrm{fr}}(Y)$$
durch $\varphi_*(M,\tau,F)=(M,\tau,\varphi\circ F)$. Sei $\eta$ eine Homotopie zwischen $\varphi$ und $\psi\colon X\to Y$, dann können wir $\eta\circ(F\times\mathrm{id}_I)\colon M\times I\to Y$ als gerahmten Bordismus zwischen $\varphi_*(M,\tau,F)$ und $\psi_*(M,\tau,F)$ auffassen. Also ist gerahmter Bordismus ein Funktor
$$\Omega_k^{\mathrm{fr},n}\colon \mathcal{HT}op\longrightarrow\mathcal{A}b\ .$$

Es sei $X$ ein topologischer Raum, dann erinnern wir uns an die Konstruktion
$$X_+=X\sqcup\mathrm{pt}\ ,$$
aus Abschnitt 3.a, wobei der zusätzliche Punkt $*\in\mathrm{pt}=\{*\}$ der Basispunkt sei.

3.95. Satz (Pontryagin-Thom-Konstruktion). *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus*
$$\pi_k^s(\,\cdot\,_+)\cong\Omega_k^{\mathrm{fr}}\colon\mathcal{HT}op\longrightarrow\mathcal{A}b\ .$$

Beweis. Es sei $f\colon S^n\to S^{n-k}\wedge X_+$ Repräsentant eines Elementes von $\pi_k^s(X_+)$. Als erstes überlegen wir uns, dass
$$S^{n-k}\wedge X_+=(S^{n-k}\times X\sqcup S^{n-k})/(\{*\}\times X\sqcup S^{n-k})\cong(S^{n-k}\times X)/(\{*\}\times X)\ .$$
Wir bezeichnen den Basispunkt von $S^{n-k}\wedge X_+$ wieder mit $\{*\}$ und betrachten
$$V=(S^{n-k}\wedge X_+)\setminus\{*\}\cong\mathbb{R}^{n-k}\times X\qquad\text{und}\qquad U=f^{-1}(V)\subset\mathbb{R}^n\cong S^n\setminus\{*\}\ .$$

Dann sind $V \subset S^{n-k} \wedge X_+$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die zusammengesetzte Abbildung

$$g\colon U \xrightarrow{f|_U} \mathbb{R}^{n-k} \times X \overset{\pi_{\mathbb{R}^{n-k}}}{\twoheadrightarrow} \mathbb{R}^{n-k}$$

ist *eigentlich,* das heißt, Urbilder kompakter Mengen sind kompakt. Denn sei $K \subset \mathbb{R}^{n-k}$ kompakt, dann sind $S^{n-k} \setminus K$ und $(S^{n-k} \setminus K) \wedge X_+$ offen und $g^{-1}(\mathbb{R}^{n-k} \setminus K) \cup (S^n \setminus U) = f^{-1}(S^{n-k} \setminus K)$ ist offene Umgebung des unendlichen Punktes $\{*\}$, also ist ihr Komplement $g^{-1}(K)$ in $S^n$ kompakt.

Insbesondere ist $g^{-1}(0) \subset U$ kompakt, und wir können $f$ auf einer kompakten Umgebung von $g^{-1}(0)$ in $U$ homotop so deformieren, dass die erste Komponente $g$ von $f$ in einer kleineren Umgebung von $g^{-1}(0)$ glatt ist und $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ als regulären Wert besitzt. Wie im Beweis von Satz 3.86 erhalten wir eine gerahmte $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, nämlich

$$(M, \tau) = \big(g^{-1}(0), dg|_{\nu(g^{-1}(0))}\big) \ .$$

Außerdem erhalten wir eine zusammengesetzte Abbildung

$$F\colon M \hookrightarrow U \xrightarrow{f|_U} \mathbb{R}^{n-k} \times X \overset{\pi_X}{\twoheadrightarrow} X \ ,$$

und $(M, \tau, F)$ ist der gesuchte singuläre gerahmte $k$-Zykel.

Seien zwei Repräsentanten $f_i\colon S^{n_i} \to S^{n_i-k} \wedge X_+$, $i \in \{0,1\}$ desselben Elements von $\pi_k^s(X)$ gegeben, dann finden wir zunächst ein $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ und eine Homotopie $h$ zwischen $S^{n-n_0} f_0$ und $S^{n-n_1} f_1$. Wie in Proposition 3.90 ersetzt Stabilisierung die gerahmte Mannigfaltigkeit $(M, \tau)$ durch $(M', \tau')$, ändert jedoch nichts an der Abbildung $F\colon M' \cong M \to X$. Wir nehmen also an, dass $n = n_0 = n_1$. Außerdem nehmen wir wie im ersten Schritt an, dass für $V = \mathbb{R}^{n-k} \times X$ wie oben und $U = h^{-1}(V)$ die zusammengesetzte Abbildung

$$\ell\colon U \xrightarrow{h|_U} \mathbb{R}^{n-k} \times X \overset{\pi_{\mathbb{R}^{n-k}}}{\twoheadrightarrow} \mathbb{R}^{n-k}$$

in einer Umgebung der kompakten Menge $\ell^{-1}(0) \subset I \times S^n$ glatt ist und 0 als regulären Wert besitzt. Wie im Beweis von Satz 3.86 ist $(W, \bar{\tau}) = (\ell^{-1}(0), d\ell|_{\ell^{-1}(0)})$ ein gerahmter Bordismus zwischen $(M_0, \tau_0)$ und $(M_1, \tau_1)$, und wir erhalten eine zusammengesetzte Abbildung

$$H\colon W \hookrightarrow U \xrightarrow{h|_U} \mathbb{R}^{n-k} \times X \overset{\pi_X}{\twoheadrightarrow} X$$

mit $H|_{\partial_i W} = F_i$ für $i = 0, 1$. Mithin sind $(M_0, \tau_0, F_0)$ und $(M_1, \tau_1, F_1)$ gerahmt bordant in $X$. Also ist $\Phi_X\colon \pi_k^s(X_+) \to \Omega_k^{\mathrm{fr}}(X)$ wohldefiniert.

Zur Natürlichkeit sei $\varphi\colon X \to Y$ gegeben. Zu zeigen ist die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\pi_k^s(X_+) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_*="'] & \Omega_k^{\mathrm{fr}}(X) \arrow[d, "\varphi_*="'] \\
\pi_k^s(Y_+) \arrow[r] & \Omega_k^{\mathrm{fr}}(Y) \ .
\end{tikzcd}$$

$\pi_k^s(\varphi_+)$

Wir setzen $V = \mathbb{R}^{n-k} \times X \subset S^{n-k} \wedge X_+$ wie oben und $W = \mathbb{R}^{n-k} \times Y \subset S^{n-k} \wedge Y_+$, dann folgt

$$V = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n-k}} \times \varphi)^{-1}(W) \ .$$

Zu $f\colon S^n \to S^{n-k} \wedge X_+$ bestimmen wir $U \subset \mathbb{R}^n$, $g\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$, $(M, \tau)$ und $F$ wie oben. Da $U = f^{-1}(V) = (\varphi \circ f)^{-1}(W)$, liefert $\varphi \circ f\colon S^n \to S^{n-k} \wedge Y_+$ die gleiche Abbildung

$$\pi_{\mathbb{R}^{n-k}} \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n-k}} \times \varphi) \circ f|_U = \pi_{\mathbb{R}^{n-k}} \circ f|_U = g \ ,$$

und daher die gleiche gerahmte $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit $(M, \tau)$. Jetzt folgt Natürlichkeit, denn $\varphi \circ f$ liefert den $k$-Zykel

$$\big(M, \tau, \pi_Y \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n-k}} \times \varphi) \circ f|_M\big) = \big(M, \tau, \varphi \circ \pi_X \circ f|_M\big) = \varphi_*(M, \tau, F) \ .$$

Zum Beweis der Surjektivität sei ein singulärer gerahmter $k$-Zykel $(M, \tau, F)$ in $X$ gegeben, dabei sei $(M, \tau)$ gerahmte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, und $a\colon \nu^{(r)}M \to \mathbb{R}^n$ sei eine Einbettung. In Analogie zu (3.7) definieren wir $f\colon S^n \to S^{n-k} \wedge X$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tau_p(v)}{r} \wedge F(p) & \text{falls } x = a(p,v) \text{ für ein } p \in M \text{ und ein } v \in \nu_p M \text{ mit } |v| < r, \text{ und} \\ * & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man überprüft wieder leicht, dass $f$ stetig ist, und den singulären gerahmten $k$-Zykel $(M, \tau, F)$ induziert. Zur Injektivität verfahren wir analog mit einem singulären gerahmten Bordismus zwischen zwei $k$-Zykeln. □

3.96. Bemerkung. Die höheren Homotopiegruppen $\pi_k(X)$ finden „runde Löcher“ von $X$, die dadurch sichtbar werden, dass man Sphären nach $X$ abbildet, die man anschließend nicht mehr zusammenziehen kann. Man findet jedoch keine Löcher, die dadurch zustande kommen, dass man andere kompakte Mannigfaltigkeiten nach $X$ abbildet, die sich dann in $X$ nicht durch einen Nullbordismus ausfüllen lassen. Beispielsweise sollte der Torus $T^2$ ein solches „torusförmiges Loch“ haben, aber es gilt $\pi_2(T^2) = 0$.

Mit der stabilen Homotopie und der Pontryagin-Thom-Konstruktion können wir nun immerhin Löcher in der Form gerahmter Untermannigfaltigkeiten aufspüren. Aber zum einen tragen die Rahmungen merkwürdige Zusatzinformation, siehe unten. Zum anderen gibt es in höheren Dimensionen Untermannigfaltigkeiten, die keine Rahmungen zulassen (ein Beispiel wäre $\mathbb{C}P^2 \subset \mathbb{R}^8$). Nach Bemerkung 3.94 (2) ist

$$\Omega_k^{\mathrm{fr}}(\mathrm{pt}) = \pi_k^s(S^0)$$

gerade die $k$-te stabile Homotopiegruppe der Sphären. Für viele $k > 0$ gilt $\pi_k^s(S^0) \neq 0$, obwohl ein Punkt eigentlich keine weitere Information tragen sollte. Aber immerhin sind alle $\pi_k^s(S^0)$ endliche Gruppen für $k > 0$.

Poincarés erste Idee, „Homologie“ zu definieren war daher, „orientierten“ Bordismus $\Omega_k^{SO}$ ohne Rahmungen zu betrachten. Aber auch diese Definition hat Probleme, so dass man einen etwas abstrakteren Zugang entwickelt hat. Würden wir Poincarés Ansatz folgen, so erhielten wir für $\Omega_k^{SO}(\mathrm{pt})$ nämlich abzählbar unendliche Gruppen für alle $k \in 4\mathbb{N}$, also noch mehr „Lärm um Nichts.“

3.97. Bemerkung. Der Vollständigkeit halber skizzieren wir auch „gerahmten Kobordismus“ mit dem dazugehörigen Pontryagin-Thom Isomorphismus

$$\Omega_{\mathrm{fr}}^k(X) \cong [X_+, S^k]^s = \varinjlim [S^{n-k} \wedge X_+, S^n] \ .$$

Diesmal erhalten wir kontravariante Funktoren, denn eine Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ induziert durch Zurückziehen eine Abbildung

$$\varphi^*\colon \Omega_{\mathrm{fr}}^k(Y) \cong [Y_+, S^k]^s \xrightarrow{\circ\varphi} [X_+, S^k]^s \cong \Omega_{\mathrm{fr}}^k(X) \ .$$

Am besten lässt sich die linke Seite beschreiben, wenn $X$ selbst eine kompakte Mannigfaltigkeit ist, denn in diesem Fall wird $\Omega_{\mathrm{fr}}^k(X)$ von $(\dim X - k)$-dimensionalen kompakten Untermannigfaltigkeiten $N \subset \mathbb{R}^{n-k} \times X$ mit Trivialisierungen $\tau$ des Normalenbündels $\nu_{N,X}$ von $N$ in $\mathbb{R}^{n-k} \times X$ erzeugt. Das Paar $(N, \tau)$ heißt dann *singulärer gerahmter $k$-Kozykel.* Die Äquivalenzrelation wird diesmal über gerahmte Kobordismen, also $(\dim X + 1 - k)$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten in $I \times \mathbb{R}^{n-k} \times X$ mit trivialisiertem Normalenbündel definiert.

Aufgrund der Pontryagin-Thom-Isomorphismen erhält man eine bilineare Abbildung

$$\Omega_{\mathrm{fr}}^k(X) \times \Omega_\ell^{\mathrm{fr}}(X) \cong [X_+, S^k]^s \times [S^\ell, X_+] \xrightarrow{\circ} \pi_\ell^s(S^k) = \pi_{\ell-k}^s(S^0) \ .$$

Im Fall $k = \ell$ ist der Wertebereich $\pi_0^s(S^0) \cong \mathbb{Z}$, man spricht von einer *Kronecker-Paarung.* Geometrisch lässt sie sich so beschreiben, dass man $(M, \tau)$ und das Bild von $(N, \tau')$ unter $\pi_X$ in „allgemeine Lage“ bringt und Schnittpunkte zählt, wobei die Rahmungen das Vorzeichen festlegen.

Wir haben jetzt die zur stabilen Homotopietheorie assoziierte Homologie- und Kohomologietheorie kennengelernt. Viele Aspekte fehlen noch, zum Beispiel gibt es ein *Cup-Produkt*

$$\smile\colon \Omega^k_{\mathrm{fr}}(X) \times \Omega^\ell_{\mathrm{fr}}(X) \longrightarrow \Omega^{k+\ell}_{\mathrm{fr}}(X) \ ,$$

bei dem man singuläre gerahmte Kozykeln miteinander „schneidet“, dabei addieren sich die Kodimensionen. So wird $\Omega^\bullet_{\mathrm{fr}}(X)$ zu einem $\mathbb{Z}$-graduierten Ring, dem gerahmten Kobordismusring. Es gibt auch ein *Cap-Produkt*

$$\frown\colon \Omega^k_{\mathrm{fr}}(X) \times \Omega^{\mathrm{fr}}_\ell(X) \longrightarrow \Omega^{\mathrm{fr}}_{\ell-k}(X) \ ,$$

das $\Omega^{\mathrm{fr}}_\bullet(X)$ zu einem $\mathbb{Z}$-graduierten $\Omega^\bullet_{\mathrm{fr}}(X)$-Modul macht. Auch hier schneidet man einen Zykel mit einem Kozykel und erhält so einen Zykel kleinerer Dimension.

## 3.j. Die erste stabile Homotopiegruppe der Sphären

Wir wollen jetzt $\pi_1^s(S^0)$ bestimmen. Da wir dazu gerahmte Kreise betrachten müssen, und sich zwei Rahmungen von $S^1 \subset \mathbb{R}^n$ um eine Abbildung $S^1 \mapsto SO(n-1)$ unterscheiden, beweisen wir zur Vorbereitung das folgende Resultat.

3.98. Satz. *Es sei $n \geq 3$. Dann gilt $\pi_1(SO(n), E_n) \cong \mathbb{Z}/2$, und das nicht triviale Element wird dargestellt durch die Schleife*

$$\gamma\colon I \ni t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t & & & 0 \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \in SO(n) \ .$$

Selbstverständlich können wir auch jede andere Ebene im $\mathbb{R}^n$ „einmal herumdrehen“, um den Erzeuger von $\pi_1(SO(n))$ zu erhalten. Die Bedingung $n \geq 3$ ist nötig, denn es gilt $SO(1) \cong \mathrm{pt}$ und $SO(2) \cong S^1$.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $n = 3$. Es sei $\mathbb{H}$ die Algebra der Quaternionen, dann bildet die Menge $S^3 \subset \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ der Einheitsquaternionen eine Gruppe bezüglich der Quaternionen-Multiplikation. Diese Gruppe wirkt auf dem Raum $\mathbb{I} \cong \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$ der imaginären Quaternionen durch

$$S^3 \times \mathbb{I} \ni (q, p) \longmapsto qp\bar{q} = qpq^{-1} \ .$$

Diese Wirkung erhält das Euklidische Skalarprodukt und die Orientierung, liefert also einen Homomorphismus $S^3 \to SO(3)$. Dabei wirken $\pm 1 \in S^3$ als $\mathrm{id}_{\mathbb{I}}$. Da es zu jedem Quaternion $q \in S^3 \setminus \{\pm 1\} \subset \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$ ein $p \in \mathbb{I}$ gibt, mit dem $q$ nicht kommutiert, wirken alle anderen Elemente der $S^3$ nicht-trivial. Schließlich kann man — zum Beispiel anhand der gleich folgenden geometrischen Darstellung – überprüfen, dass die obige Abbildung surjektiv ist. Es folgt

$$SO(3) \cong S^3/\{\pm 1\} \cong \mathbb{R}P^3 \ .$$

Wir geben eine geometrische Beschreibung der obigen Gruppenwirkung ohne Quaternionen. Dazu seien $e_0, \ldots, e_3$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$, und $\mathbb{R}^3$ sei das Erzeugnis von $e_1$, $e_2$, $e_3$. Wir wissen bereits, dass $\pm 1 = \pm e_0$ als $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ wirkt. Jedes andere $q \in S^3 \setminus \{\pm e_0\}$ schreiben wir als in eindeutiger Weise als

$$q = e_0 \cos\varphi + u \sin\varphi \qquad \text{mit } u \in S^2 \subset \mathbb{R}^3 \qquad \text{mit } \varphi \in (0, \pi) \ .$$

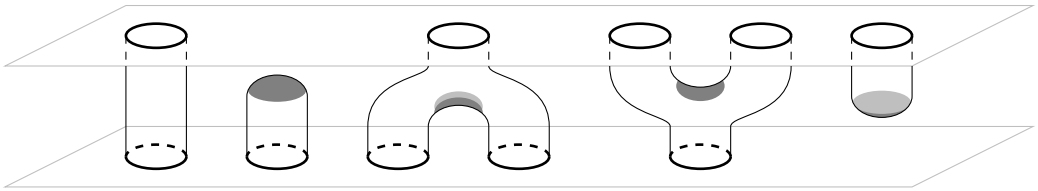


Abbildung 3.9. Elementare Bordismen

Dann wirkt $q$ als Drehung mit Winkel $2\varphi$ um die Achse $u\mathbb{R}$. Genauer ergänzen wir $u$ zu einer orientierten Orthonormalbasis $(u, v, w)$ des $\mathbb{R}^3$, dann folgt

$$q(u) = u\ , \qquad q(v) = v\,\cos 2\varphi - w\,\sin 2\varphi\ , \qquad q(w) = v\,\sin 2\varphi + w\,\cos 2\varphi\ .$$

Wir erhalten die gleiche Abbildung, indem wir $u$ durch $-u$ und $\varphi$ durch $\pi - \varphi$ ersetzen. Der Winkel $2\varphi$ lässt sich auch dadurch erklären, dass wir in der obigen Darstellung für $\varphi = \pi$ den Punkt $q = -e_0 \in S^3$ erhalten, der als Identität wirkt.

Wir wissen jetzt also, dass $S^3 \to SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$ die universelle Überlagerung ist. Aus Abschnitt 2.f wissen wir, dass dem nichttrivialen Element $1 \in \mathbb{Z}/2 \cong \pi_1(\mathbb{R}P^3)$ das Bild eines Weges $\tilde\gamma$ von $e_0$ nach $-e_0$ entspricht. Wir wählen $\tilde\gamma(t) = e_0\,\cos\pi t + e_3\,\sin\pi t$ und erhalten die im Satz genannte Schleife $\gamma$.

Damit ist der Fall $n = 3$ erledigt. Wir beweisen die Behauptung für größere $n$ durch Induktion. Dazu betrachten wir die Abbildung $p\colon SO(n+1) \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $p(g) = g\,e_{n+1}$. Diese Abbildung ist ein Faserbündel mit Faser

$$p^{-1}(e_{n+1}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(n+1) \;\middle|\; A \in SO(n) \right\} \cong SO(n)\ ,$$

siehe Übung 3.120. Aus der langen exakten Sequenz 3.25 schließen wir mit $n \geq 3$, dass

$$\underbrace{\pi_1(S^n)}_{=0} \longleftarrow \pi_1\big(SO(n+1)\big) \xleftarrow{\cong} \pi_1\big(SO(n)\big) \longleftarrow \underbrace{\pi_2(S^n)}_{=0}\ .$$

Dabei geht die erzeugende Schleife $\gamma$ in $SO(n)$ in die entsprechende Schleife in $SO(n+1)$ über. $\square$

3.99. Satz (Pontryagin). *Es gilt* $\pi_1^s(S^0) \cong \mathbb{Z}/2$.

Beweis. Nach Satz 3.42 (4) und Satz 3.86 gilt $\pi_1^s(S^0) \cong \pi_n(S^{n-1}) \cong \Omega_1^{\mathrm{fr},n}$ für alle $n \geq 4$. Wir betrachten zunächst kompakte gerahmte 1-Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$. Jede kompakte 1-Mannigfaltigkeit ist eine disjunkte Vereinigung von Kreisen. Wir parametrisieren jede Zusammenhangskomponente $M_i$ so durch eine Kurve $\gamma$, dass $\dot\gamma$ zusammen mit der Rahmung von $\nu M_i$ eine positive Basis des umgebenden $\mathbb{R}^n$ liefert. Da $n \geq 4$ ist, können wir diese Kreise gegebenenfalls „entknoten“, das heißt zu disjunkten Einheitskreisen in der Ebene $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkten auf der $x$-Achse deformieren, die im positiven Drehsinn durchlaufen werden — aus jeder solchen Deformation macht man leicht einen Bordismus, auf den sich auch die Rahmungen übertragen lassen.

Für einen einzelnen Kreis $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^n$ konstruieren wir eine Standardrahmung $\tau^0$, indem wir als $v_1^0$ den Ortsvektor in $\mathbb{R}^2$ wählen, und mit den Standardbasisvektoren $v_2^0 = e_3, \ldots, v_{n-1}^0 = e_n$ zu einer Basis des Normalenbündels. Jede andere Rahmung unterscheidet sich um ein Element aus $\pi_1(SO(n-1)) \cong \mathbb{Z}/2$. Wenn wir mehrere gerahmte Kreise haben, addieren wir die zugehörigen Elemente von $\mathbb{Z}/2$. Wir behaupten, dass dieses Summe eine gerahmte Bordismusinvariante ist.

Sei $W \subset I \times \mathbb{R}^n$ ein Bordismus. Zunächst erreichen wir durch eine kleine Deformation, dass die Koordinate $t \in I$ eine sogenannte *Morse-Funktion* auf $W$ wird, das heißt, die Abbildung $W \ni$

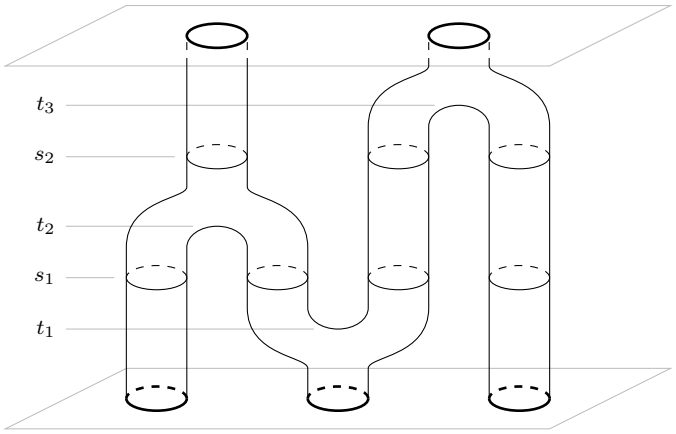



Abbildung 3.10. Zusammengesetzter Bordismus

$(t, x) \mapsto t \in I$ hat nur endlich viele kritische Punkte $(t_1, p_1)$, …, $(t_k, p_k)$, und nahe dieser Punkte $p_j = (x_{j,1}, \dots, x_{j,n})$ sieht $W$ aus wie der Graph einer Funktion

$$(x_1, \dots x_n) \longmapsto t_k \pm (x_1 - x_{j,1})^2 \pm \dots \pm (x_n - x_{j,n})^2 \ .$$

Wir dürfen dabei annehmen, dass $t_1 < \dots < t_k$ paarweise verschieden sind. Die Rahmungen deformieren wir wieder mit. Dann können wir den Bordismus durch Aufschneiden längs $\{s_i\} \times \mathbb{R}^n$ mit $t_1 < s_1 < t_2 < \dots < s_{k-1} < t_k$ in „elementare Bordismen“ wie in Abbildung 3.9 zerlegen. Diese können wir so anordnen, dass ganz $W$ in $I \times \mathbb{R}^2 \subset I \times \mathbb{R}^n$ zu liegen kommt; dabei ordnen wir die Kreise in $\partial_0 W$ und $\partial_1 W$ gegebenenfalls um, siehe Abbildung 3.10.

Auf $W$ konstruieren wir eine Standardrahmung $\tau^0$, indem wir auf den elementaren Bordismen in $I \times \mathbb{R}^2$ jeweils den nach außen weisenden Normalenvektor als $v_1^0$ wählen und dann mit den Standardbasisvektoren $v_2^0 = e_3$, …, $v_{n-1}^0 = e_n$ zu einer Basis des Normalenbündels ergänzen. Die Rahmungen $\tau$ und $\tau^0$ unterscheiden sich um eine Abbildung $g\colon W \to SO(n-1)$. Für jedes $s \in I \setminus \{t_1, \dots, t_k\}$ liefert die Einschränkung auf $W \cap (\{s\} \times \mathbb{R}^n) \cong S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1$ nach Folgerung 3.8 ein Tupel von Elementen von $\pi_1(SO(n-1)) \cong \mathbb{Z}/2$. Es sei $a_s \in \mathbb{Z}/2$ die Summe dieser Elemente. Die obige Behauptung ist bewiesen, wenn wir zeigen, dass $a_s$ nicht von $s$ abhängt. Für alle $s \in (t_i, t_{i+1})$ mit $1 \le i < k$ ist das klar, da die Abbildungen $g|_{W \cap (\{s\} \times \mathbb{R}^n)}$ homotop sind. Außerdem ist klar, dass sich der Beitrag eines zylindrischen elementaren Bordismus in einer Umgebung von $t_i$ nicht ändert.

Da $SO(n-1)$ zusammenhängend ist, können wir die gegebene Rahmung $\tau$ im Innern der nicht zylindrischen elementaren Bordismen so deformieren, dass sie auf den in Abbildung 3.9 grau markierten, zusammenziehbaren Regionen jedes elementaren Bordismus mit $\tau^0$ übereinstimmt. Dabei ändern sich die Elemente $a_s \in \mathbb{Z}/2$ nicht. Wenn der elementare Bordismus eine „Kappe“ ist (zweiter oder letzter elementarer Bordismus in der Abbildung), dann ist der Beitrag zu $a_s$ auf beiden Seiten von $t_i$ trivial. Wenn der elementare Bordismus eine „Hose“ ist (dritter oder vierter elementarer Bordismus in der Abbildung), dann ist der Beitrag zu $a_s$ auf der Seite von $t_i$ mit einer Randkomponente die Summe der Beiträge auf der Seite mit zwei Randkomponenten. Insgesamt ändert sich also $a_s$ beim Überqueren eines kritischen Wertes $t_i$ nicht.

Also ist unsere Behauptung bewiesen, und wir haben eine Abbildung

$$a\colon \pi_1^s(S^0) \cong \Omega_1^{\mathrm{fr}} \longrightarrow \pi_1(SO(n-1)) \cong \mathbb{Z}/2$$

konstruiert. Nach unser Vorüberlegung ist diese Abbildung surjektiv, da wir im Urbild jedes Elements einen gerahmten Kreis finden. Nach Konstruktion wird die leere gerahmte Mannigfaltigkeit

auf 0 abgebildet. Wenn $a$ bijektiv ist, ist $a$ ein Isomorphismus, denn bis auf Isomorphie gibt es nur eine Gruppe mit zwei Elementen.

Zur Injektivität sei eine gerahmte Bordismusklasse in $\mathbb{R}^n$ gegeben, ohne Einschränkung repräsentiert durch eine disjunkte Vereinigung $(M, \tau)$ von gerahmten Einheitskreisen wie oben. Wir behaupten, dass $(M, \tau)$ zu einem einzigen gerahmten Kreis kobordant ist, und erhalten Injektivität, da es auf einem Kreis nur zwei Klassen von Rahmungen gibt. Falls $M$ aus einem Kreis besteht, ist nichts zu tun. Falls $M = \emptyset$, betrachten wir den letzten elementaren Bordismus in Abbildung 3.9. Andernfalls benutzen wir die Hose in der Mitte der Abbildung, um die Anzahl der Kreise Schritt für Schritt bis auf einen zu reduzieren. Dabei überlegen wir uns, dass wir die gegebenen Rahmungen der „Hosenbeine“ bis zum „Gürtel“ fortsetzen können. □

In der gleichen Arbeit, in der Pontryagin diesen Satz bewiesen hat, hat er auch $\pi_2^s(S^0) \cong \mathbb{Z}/2$ bestimmt. Die Berechnung der höheren stabilen Homotopiegruppen der $S^0$ mit Hilfe der Pontryagin-Thom-Konstruktion erweist sich als sehr aufwändig, so dass man sich stattdessen anderer Hilfsmittel bedient. Ohne Beweis geben wir das folgende wichtige Resultat an.

3.100. Satz (Serre). *Mit Ausnahme von $\pi_n(S^n)$ und $\pi_{4k-1}(S^{2k})$ sind alle Homotopiegruppen von Sphären endlich. Insbesondere ist $\pi_k^s(S^0)$ endlich für alle $k > 0$.*

3.101. Bemerkung. Die Umkehrung der obigen Abbildung $a$ ist der sogenannte stabile *J-Homomorphismus*

$$J_k \colon \pi_k(SO) = \varinjlim \pi_k(SO(n)) \to \pi_k^s(S^0) \ ,$$

den wir jetzt betrachten wollen. Der Kolimes bezieht sich auf die gleiche Folge von Einbettungen $\iota_n \colon SO(n) \hookrightarrow SO(n+1)$ wie im Beweis von Satz 3.98. Also ist $SO$ die Gruppe der „orientierungserhaltenden orthogonalen Matrizen“ mit Indizes in $\mathbb{N}$, die bis auf endlich viele Einträge mit der „Einheitsmatrix“ $(\delta_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ übereinstimmen.

Die exakte Homotopiesequenz des Faserbündels $SO(n+1) \to S^n$ mit Faser $SO(n)$ aus dem Beweis des Satzes 3.98 liefert

$$\underbrace{\pi_k(S^n)}_{=0} \longleftarrow \pi_k(SO(n+1)) \xleftarrow{\cong} \pi_k(SO(n)) \xleftarrow{\partial} \underbrace{\pi_{k+1}(S^n)}_{=0}$$

für $n > k+1$, und $\pi_k$ ist hier verträglich mit dem Kolimes, so dass

$$\pi_k(SO) = \varinjlim \pi_k(SO(n)) \cong \pi_k(SO(k+2)) \ .$$

Die Gruppe $SO(n)$ wirkt durch Drehungen auf $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Es sei $a \in \pi_k(SO(n))$, dann erhalten wir eine Abbildung

$$S^k \times S^{n-1} \xrightarrow{a \times \mathrm{id}_{S^{n-1}}} SO(n) \times S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1} \ .$$

Wir konstruieren daraus eine Abbildung von $S^{k+n} \subset \mathbb{R}^{k+1} \oplus \mathbb{R}^n$ nach $S^n \subset \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \|q\|^2 - \|p\|^2 \\ 2\,\|p\|^2\ a\left(\frac{p}{\|p\|^2}\right) \cdot q \end{pmatrix}$$

falls $p \neq 0$.

Es bezeichne $J_k^n([a]) \in \pi_{k+n}(S^n)$ die zugehörige Homotopieklasse. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_k(SO(n)) \arrow[r, "J_k^n"] \arrow[d] & \pi_{k+n}(S^n) \arrow[d, "S"] \\ \pi_k(SO(n+1)) \arrow[r, "J_k^{n+1}"] & \pi_{k+n+1}(S^{n+1}) \ . \end{tikzcd}$$

Also erhalten wir den stabilen $J$-Homomorphismus als Kolimes

$$J_k = \varinjlim J_k^n \colon \varinjlim \pi_k(SO(n)) \longrightarrow \varinjlim \pi_{k+n}(S^n) = \pi_k^s(S^0) \ ,$$

und wegen Satz 3.42 (4) und der obigen Überlegung und gilt sogar $J_k = J_k^{k+2}$.

Für $k > 0$ liefert Bott-Periodizität Isomorphismen $\pi_{k+8n}(SO) \cong \pi_k(SO)$. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über $J_k$ für kleine $k$.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi_k(SO)$ | 0 | $\mathbb{Z}/2$ | 0 | $\mathbb{Z}$ | 0 | 0 | 0 | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Z}/2$ | $\mathbb{Z}/2$ | 0 | $\mathbb{Z}$ |
| $\operatorname{im} J_k$ | 0 | $\mathbb{Z}/2$ | 0 | $\mathbb{Z}/24$ | 0 | 0 | 0 | $\mathbb{Z}/240$ | $\mathbb{Z}/2$ | $\mathbb{Z}/2$ | 0 | $\mathbb{Z}/504$ |
| $\pi_k^s(S^0)$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Z}/2$ | $\mathbb{Z}/2$ | $\mathbb{Z}/24$ | 0 | 0 | $\mathbb{Z}/2$ | $\mathbb{Z}/240$ | $(\mathbb{Z}/2)^2$ | $(\mathbb{Z}/2)^3$ | $\mathbb{Z}/6$ | $\mathbb{Z}/504$ |

Die Gruppe $\operatorname{im} J_{4n-1}$ hängt zusammen mit den Bernoulli-Zahlen: der Nenner von $B_{2n}/4n$ ist gerade $\# \operatorname{im} J_{4n-1}$.

## 3.k. Übungen zu Kapitel 3

*Übungen zu Abschnitt 3.a.*

3.102. Übung. Seien $X$, $Y$ topologische Räume und $X = A \cup B$, wobei $A$, $B$ abgeschlossen sind. Zeigen Sie: $f \colon X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $f|_A$ und $f|_B$ stetig sind.

3.103. Übung. Konstruieren Sie Homöomorphismen

(1) $f \colon I^k/\partial I^k \to S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ ,
(2) $g \colon (I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k) \to (D^k, S^{k-1})$ .

3.104. Übung. Es seien $(X_i, x_i)$ für $i \in J$ punktierte Räume. Zeigen Sie:

(1) der punktierte Raum
$$(X, x_0) = \left( \prod_{i \in J} X_i, (x_i)_{i \in J} \right)$$
mit den Projektionen $p_i \colon (X, x_0) \to (X_i, x_i)$ erfüllt die universelle Eigenschaft eines Produktes (aus Satz 1.46 (3)) in der Kategorie $\mathcal{T}op_+$;
(2) es gilt $\pi_k(X, x_0) \cong \prod_{i \in J} \pi_k(X_i, x_i)$, wobei die Abbildung $p_{i*} = \pi_k p_i$ der Projektion auf den Faktor $\pi_k(X_i, x_i)$ entspricht.
(3) Sei $j \in J$, und sei $\iota_j \colon X_j \to X$ die Inklusion, die $y \in X_j$ auf $(y_i)_{i \in J}$ mit $y_j = y$ und $y_i = x_i$ für $i \neq j$ abbildet. Beschreiben Sie die Abbildung $\iota_{j*} \colon \pi_k(X_j, x_j) \to \pi_k(X, x_0)$.

3.105. Übung. Beweisen Sie Bemerkung 3.10. Überlegen Sie sich außerdem, dass $\Omega^k(X)$ natürlich zum Raum
$$\{ f \colon S^k \to X \mid f(*) = x_0 \}$$
homöomorph ist, wobei „$*$“ den Basispunkt der $S^k$ bezeichne.

*Übungen zu Abschnitt 3.b.*

3.106. Übung. Beweisen Sie Bemerkung 3.16.

3.107. Übung. Zeigen Sie für exakte Sequenzen von Gruppen:

(1) Die Sequenz $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ ist genau dann bei $A$ und $B$ exakt, wenn $f$ einen Isomorphismus $A \cong \ker g$ induziert.
(2) Die Sequenz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ ist genau dann bei $B$ und $C$ exakt, wenn $g$ einen Isomorphismus $\operatorname{coker} f \cong C$ induziert.

Was folgt für A und $f$ in den exakten Sequenzen $0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$ beziehungsweise $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$?

3.108. Übung. Beweisen Sie die Exaktheit der Sequenz aus Satz 3.19 an den fehlenden Stellen.

3.109. Übung. Beweisen Sie Lemma 3.20. Achten Sie darauf, nur $B$, $C$ und $C'$ als Gruppen und nur die Abbildungen dazwischen als Gruppenhomomorphismen vorauszusetzen; betrachten Sie alles andere in der Kategorie $\mathcal{S}et_+$.

3.110. Übung. Es seien $Z \subset Y \subset X$ Räume mit Basispunkt in $Z$. Wir betrachten

$$\partial\colon \pi_k(X,Y) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(Y) \longrightarrow \pi_{k-1}(Y,Z)$$

als Verbindungshomomorphimus in der Sequenz

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}(Y,Z) \xleftarrow{\partial} \pi_k(X,Y) \longleftarrow \pi_k(X,Z) \longleftarrow \pi_k(Y,Z) \xleftarrow{\partial} \pi_{k+1}(X,Y) \longleftarrow \cdots ,$$

wobei die unmarkierten Pfeile von Inklusion induziert werden.

(1) Zeichnen Sie die obige Sequenz zusammen mit den exakten Sequenzen der Paare $(X,Y)$, $(X,Z)$ und $(Y,Z)$ so in ein kommutatives Diagramm, dass keine Homotopiegruppe zweimal erscheint.
(2) Beweisen Sie Exaktheit der Sequenz, indem Sie nach Möglichkeit vom Diagramm aus (1) Gebrauch machen.

*Übungen zu Abschnitt 3.c.*

3.111. Übung. Konstruieren Sie den Homöomorphismus aus Bemerkung 3.23.

3.112. Übung. Im Folgenden bedeute Faserung entweder Serre- oder Hurewicz-Faserung. Zeigen Sie:

(1) Sei $p\colon E \to B$ eine Faserung, und sei $f\colon X \to B$ stetig. Seien die Abbildungen $f^*p\colon f^*E \to X$ und $\bar{f}\colon f^*E \to E$ durch

$$f^*E = \left\{ (e,x) \in E \times X \;\middle|\; p(e) = f(x) \in B \right\} , \qquad (f^*p)(e,x) = x , \qquad \bar{f}(e,x) = e$$

gegeben, dann ist $f^*p$ wieder eine Faserung.
(2) Die konstante Abbildung $F \to \mathrm{pt}$ ist eine Faserung für alle $F$. Die Projektion $B \times F \to B$ ist eine Faserung für alle $F$ und alle $B$.
(3) Seien $p\colon E \to B$ und $q\colon Y \to E$ Faserungen. Dann ist auch $p \circ q\colon Y \to B$ eine Faserung.

3.113. Übung. Eine *Retraktion* von einer Abbildung $p\colon E \to B$ zu einer Abbildung $q\colon D \to A$ ist ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "I"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[r, "R"] \arrow[d, "p"'] & D \arrow[d, "q"'] \\ A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "r"] & A \end{tikzcd} ,$$

so dass $r \circ i = \mathrm{id}_A$ und $R \circ I = \mathrm{id}_F$. Man sagt auch, $q\colon D \to A$ ist ein *Retrakt* von $p\colon E \to B$.

Zeigen Sie: wenn $p$ die Homotopieliftungseigenschaft für einen Raum $X$ besitzt, dann gilt das auch für $q$. Insbesondere sind Retrakte von Serre- beziehungsweise Hurewicz-Faserungen wieder von diesem Typ.

*Übungen zu Abschnitt 3.d.*

3.114. Übung. Es seien $X$, $Y$ topologische Räume. Definiere den *Verbund* von $X$ und $Y$ als Quotienten

$$X * Y = (X \times Y \times I)/\sim ,$$

wobei „$\sim$“ erzeugt wird durch

$$(x, y, 0) \sim (x, y', 0) \qquad \text{und} \qquad (x, y, 1) \sim (x', y, 1) \qquad \text{für alle } x,\, x' \in X \text{ und alle } y,\, y' \in Y\ .$$

Geben Sie Homöomorphismen $S^k * \mathrm{pt} \cong D^{k+1}$ und $S^k * S^\ell \cong S^{k+\ell+1}$ für alle $k$, $\ell$ an.

3.115. Übung. Es seien $(X, x_0)$, $(Y, y_0)$ punktierte Räume, und es sei $X * Y$ wie oben definiert. Wir identifizieren $X$, $Y$ mit Unterräumen von $X * Y$ durch $x \mapsto [(x, y_0, 0)]$, $y \mapsto [(x_0, y, 1)]$ für alle $x \in X$, $y \in Y$, wählen als Basispunkt $\left[\left(x_0, y_0, \frac{1}{2}\right)\right]$ und setzen $U = X * Y \setminus Y$ und $V = X * Y \setminus X$.

(1) Zeigen Sie, dass $U$, $V$, $U \cap V$ jeweils zu $X$, $Y$ und $X \times Y$ homotopieäquivalent sind.
(2) Bestimmen Sie die von den Inklusionen induzierten Abbildungen

$$\pi_k(U \cap V) \to \pi_k(U)\ , \qquad \pi_k(V) \to \pi_k(X * Y)$$

und die Gruppen $\pi_k(U, U \cap V)$.
(3) Die Räume $X$ und $Y$ seien $p$- beziehungsweise $q$-zusammenhängend. Wie hoch zusammenhängend ist dann $X * Y$?

*Hinweis:* Betrachten Sie die natürlichen Abbildung zwischen den langen exakten Sequenz der Paare $(U, U \cap V) \to (X * Y, V)$ und benutzen Sie den Ausschneidungssatz.

*Übungen zu Abschnitt 3.e.*

3.116. Übung. Zeigen Sie: die Hintereinanderausführung von punktierten Abbildungen von $S^n$ nach $S^n$ macht die Gruppe $\pi_n(S^n)$ zu einem Ring isomorph zu $\mathbb{Z}$.

3.117. Übung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle $n \geq 1$.

(1) Betrachte $D^n \subset \mathbb{R}^n$. Es sei $f\colon D^n \to \mathbb{R}^n$ mit $S^{n-1} \subset f^{-1}(S^{n-1})$ und $\deg f|_{\partial D^n} \neq 0$ gegeben, dann gilt $D^n \subset \mathrm{im}(f)$.
(2) Es seien $f_1, \ldots, f_n\colon I^n \to \mathbb{R}$ gegeben, so dass $f_i(x) < 0$ falls $x_i = 0$ und $f_i(x) > 0$ falls $x_i = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und alle $x \in I^n$. Dann existiert ein $x_0 \in I^n$ mit $f_1(x_0) = \cdots = f_n(x_0) = 0$.

3.118. Übung. Beweisen Sie Bemerkung 3.53.

3.119. Übung. Zeigen Sie: Die Abbildung $U(n) \to S^{2n-1}$ mit $g \mapsto ge_n \in S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ ist ein Faserbündel mit Faser $U(n-1)$.

Folgern Sie, dass $\pi_k(U(n)) \cong \pi_k(U(n-1))$ für $k < 2n-2$.

3.120. Übung. Zeigen Sie: Die Abbildung $O(n) \to S^{n-1}$ mit $g \mapsto ge_n \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Faserbündel mit Faser $O(n-1)$.

Folgern Sie, dass $\pi_k(O(n)) \cong \pi_k(O(n-1))$ und $\pi_k(SO(n)) \cong \pi_k(SO(n-1))$ für $k < n-2$.

*Übungen zu Abschnitt 3.f.*

3.121. Übung. Für topologische Räume $X$, $B$, $A \subset X$, und $f\colon A \to B$ stetig betrachten wir den *Pushout*

$$X \cup_f B = (X \sqcup B)/\sim ,$$

wobei „$\sim$“ erzeugt wird von $X \ni a \sim f(a) \in B$ für alle $a \in A$. Er erfüllt die universelle Eigenschaft aus Folgerung 1.75.

Es bezeichne $\mathcal{T}op^A$ die Kategorie der *„Räume unter $A$“* mit Objekten $(C, g)$ mit $g\colon A \to C$ und Morphismen

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op^A}\big((B, f), (C, g)\big) = \big\{\, h\colon B \to C \;\big|\; h \text{ stetig mit } h \circ f = g \,\big\} \,.$$

Es sei $(X, A)$ fest. Zeigen Sie, dass $(B, f) \mapsto (X \cup_f B, B)$ einen Funktor von der Kategorie $\mathcal{T}op^A$ in die Kategorie $\mathcal{P}air$ definiert.

3.122. Übung. Handelt es sich bei den Paaren

$$(X, A) = \big(\{a, b\}, \{a\}\big) \,, \tag{1}$$

$$(Y, B) = \big(\big\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\big\} \cup \{0\}, \{0\}\big) \tag{2}$$

um Kofaserungen, wobei $X$ die Klumpentopologie und $Y \subset \mathbb{R}$ die Unterraumtopologie trage?

3.123. Übung. Beweisen Sie Folgerung 2.50 mit dem neuen Begriff „gut punktiert“.

3.124. Übung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Wenn $(B, A)$ und $(X, B)$ Kofaserungen sind, dann ist auch $(X, A)$ Kofaserung.
(2) Es sei $(X, A)$ Kofaserung und $Y$ beliebig, dann ist auch $(X \times Y, A \times Y)$ Kofaserung.
(3) Ein Paar $(X, A)$ sei *Retrakt* von $(Y, B)$, das heißt, es gebe Abbildungen $i\colon (X, A) \to (Y, B)$ und $r\colon (Y, B) \to (X, A)$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_X$. Wenn $(Y, B)$ eine Kofaserung ist, dann ist auch $(X, A)$ eine Kofaserung.

3.125. Übung. Zeigen Sie: jede Kofaserung $i\colon A \to X$ ist eine Einbettung, siehe Definition 1.44. Zeigen Sie dazu, dass

$$\iota_1\colon A \cong A \times \{1\} \hookrightarrow Zi \qquad \text{und} \qquad \bar{\iota}_1\colon X \cong X \times \{1\} \hookrightarrow X \times I \,.$$

Einbettungen sind, und betrachten Sie das folgende Diagramm zu Bemerkung 3.58.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "i"'] & Zi \arrow[d, shift right, "\bar{\iota}"'] \\ X \arrow[r, "\bar{\iota}_1"] & X \times I \arrow[u, shift right, "\bar{r}"'] \end{tikzcd}$$

3.126. Übung. Zeigen Sie: wenn $X$ ein Hausdorff-Raum und $(X, A)$ eine Kofaserung ist, dann ist $A \subset X$ abgeschlossen. Betrachten Sie dazu die stetigen Abbildungen

$$f\colon X \cong X \times \{1\} \hookrightarrow X \times I \qquad \text{und} \qquad g\colon X \cong X \times \{1\} \xrightarrow{r} Zi \hookrightarrow X \times I \,,$$

und zeigen Sie zunächst

$$A = \big\{\, x \in X \;\big|\; f(x) = (x, 1) = r(x, 1) = g(x) \in X \times I \,\big\} \,.$$

3.127. Übung. Es sei $(X, A)$ eine abgeschlossene Kofaserung und $f\colon A \to B$ stetig.

(1) Konstruieren Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaften eine natürliche, stetige, bijektive Abbildung
$$(X \times I) \cup_{f \times \mathrm{id}_I} (B \times I) \longrightarrow (X \cup_f B) \times I \,.$$
(2) Zeigen Sie die Stetigkeit der Umkehrabbildung. *Hinweis:* Sie können dazu das Exponentialgesetz 1.60 benutzen.
(3) Zeigen Sie, dass $(X \cup_f B, B)$ wieder eine abgeschlossene Kofaserung ist.

3.128. Übung. Es sei $i\colon A \to X$ eine Kofaserung und eine Homotopieäquivalenz. Zeigen Sie:

(1) Im Sinne von Definition 2.10 ist $A$ ein starker Deformationsretrakt von $X$.

(2) Es sei $p\colon E \to P$ eine Hurewicz-Faserung, und es seien $f\colon A \to E$ und $g\colon X \to B$ Abbildungen mit $p \circ f = g \circ i$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "g"] \arrow[ur, dashed, "h"] & B \end{tikzcd} .$$

Dann gibt es eine Abbildung $h\colon X \to E$ mit $f = h \circ i$ und $g = p \circ h$.

3.129. Übung. Formulieren und beweisen Sie die Eckmann-Hilton-dualen Aussagen zur vorigen Aufgabe.

3.130. Übung. Betrachten Sie $A = \{a\} \subset X = \{a, b\}$ mit der Topologie $\mathcal{O}_X = \{\emptyset, A, X\}$, und zeigen Sie:

(1) Das Paar $(X, A)$ ist eine Kofaserung, $(X^2, A \times X \cup X \times A)$ jedoch nicht.
(2) Geben Sie Abbildungen $u\colon X \to I$ und $h\colon X \times I \to X$ wie in Proposition 3.59 (1) an.

*Übungen zu Abschnitt 3.g.*

3.131. Übung. Es seien $(X_j)_{j\in J}$ und $Y$ punktierte Räume. Konstruieren Sie eine natürliche bijektive, stetige Abbildung

$$\bigvee_{j\in J} (X_j \wedge Y) \longrightarrow \Big(\bigvee_{j\in J} X_j\Big) \wedge Y .$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung ein Homöomorphismus ist, wenn $J$ endlich ist.

3.132. Übung. Es seien $(X, A)$, $(Y, B)$, $(A, \{x_0\})$ und $(B, \{y_0\})$ abgeschlossene Kofaserungen. Zeigen Sie, dass $(X, A) \wedge (Y, B)$ wieder eine gut punktierte, abgeschlossene Kofaserung ist.

3.133. Übung. Es sei $(X, A)$ ein gutes Paar und $f\colon A \to B$ stetig. Konstruieren Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaften eine natürliche, stetige, bijektive Abbildung

$$SX \cup_{Sf} SB \longrightarrow S(X \cup_f B) ,$$

und beweisen Sie die Stetigkeit der Umkehrabbildung.

*Übungen zu Abschnitt 3.h.*

3.134. Übung. Bestimmen Sie für die folgenden Sequenzen von Gruppen jeweils den Kolimes $G$ und geben Sie auch die Abbildungen $g_k\colon G_k \to G$ an.

(1) $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \dots$
(2) $\mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 4} \dots$
(3) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \dots$

3.135. Übung. Zeigen Sie:

(1) Die stabile Homotopiegruppe $\pi_3^s(S^2) \cong \pi_1^s(S^0)$ wird von der Hopf-Faserung $p\colon S^3 \to S^2$ erzeugt.
(2) Es bezeichne $\iota\colon \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^2$ die Inklusion mit $(z_0 : z_1) \mapsto (z_0 : z_1 : 0)$. Dann ist $\iota_*[p] = 0 \in \pi_3(\mathbb{C}P^2)$.
(3) Es gilt dann auch $\iota_*[p] = 0 \in \pi_3^s(\mathbb{C}P^2)$.

3.136. Übung. (1) Zeigen Sie mit der stabilen Homotopiesequenz 3.80 für $(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1})$, dass $\pi_k^s(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_k^s(\mathbb{C}P^{n-1})$ für alle $k < 2n - 1$.
(2) Bestimmen Sie $\pi_2^s(\mathbb{C}P^n)$ für alle $n \geq 2$.
(3) Bestimmen Sie $\pi_3^s(\mathbb{C}P^n)$ für alle $n \geq 2$.

*Übungen zu Abschnitt 3.i.*

3.137. Übung. Es sei $p\colon S^3 \to S^2$ die Hopf-Faserung aus Beispiel 3.33. Bestimmen Sie die gerahmte Untermannigfaltigkeit $(M, \tau)$, die das Bild von $[p]$ unter der Pontryagin-Thom-Konstruktion repräsentiert.

KAPITEL 4

# Elementare Homotopietheorie

In diesem Abschnitt fassen wir einige Konstruktionen und Sätze zusammen, die uns später helfen, Homologie- und Kohomologietheorien homotopietheoretisch zu betrachten. Hierzu gehören zum einen abstrakte Konstruktionen aus der Kategorientheorie, sowie Kategorien mit Zusatzstrukturen, denen wir später in verschiedenen Zusammenhängen wieder begegnen.

Zum anderen betrachten wir die Unterkategorien $\mathcal{CW} \subset kw\mathcal{H} \subset \mathcal{T}op$. Während CW-Komplexe vor allem homotopietheoretisch schöne Eigenschaften haben, zeichnen sich die kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume dadurch aus, dass mit Ihnen viele elementare topologische Konstruktionen möglich sind, und dabei nur sehr selten pathologisches Verhalten auftritt.

Schließlich führen wir Modellkategorien ein, um einen abstrakten Rahmen für Homotopietheorie zu haben, der sich beispielsweise auch in der algebraischen Geometrie einsetzen lässt. Im letzten Abschnitt lernen wir zwei Typen topologischer Sequenzen kennen, aus denen wir viele exakte Sequenzen ableiten können.

## 4.a. Adjungierte Funktoren, Limiten und Kolimiten

Wir lernen einige Grundbegriffe aus der abstrakten Kategorientheorie kennen. Hierzu zählen adjungierte Funktoren, Limiten und Kolimiten, siehe Folgerung 1.76. Im nächsten Abschnitt helfen uns diese Überlegungen, einige Eigenschaften der Kategorie der kompakt erzeugten schwachen Hausdorff-Räume leichter zu verstehen. Außerdem brauchen wir Limiten und Kolimiten auch im Zusammenhang mit Modellkategorien.

4.1. Definition. Es seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $\mathcal{G}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Funktoren. Dann heißt $\mathcal{F}$ *linkadjungiert* zu $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ *rechtsadjungiert* zu $\mathcal{F}$ oder einfach $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zueinander *adjungiert,* wenn es für alle Objekte $X$ von $\mathcal{C}$ und $Y$ von $\mathcal{D}$ einen natürlichen Isomorphismus

$$\Phi_{X,Y}\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}X, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}Y)$$

gibt. Man spricht auch von einer *Adjunktion* und schreibt kurz $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : \mathcal{G}$ oder $\mathcal{F} \dashv \mathcal{G}$.

Man beachte, dass es auf die Reihenfolge der Funktoren ankommt. Wenn $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zueinander adjungiert sind, bedeutet das nicht, dass auch $\mathcal{G}$ und $\mathcal{F}$ zueinander adjungiert sind.

4.2. Bemerkung. Natürlichkeit bedeutet hier, dass für alle $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X)$ und alle $g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y')$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}X, Y) \arrow[r, "\Phi_{X,Y}"] \arrow[d, "g\circ\cdot\circ\mathcal{F}f"'] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}Y) \arrow[d, "\mathcal{G}g\circ\cdot\circ f"] \\
\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}X', Y') \arrow[r, "\Phi_{X',Y'}"] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X', \mathcal{G}Y') \,.
\end{tikzcd}$$

Die Funktoren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ sind im Allgemeinen nicht invers zueinander. Aber es gibt immerhin zwei wichtige natürliche Transformationen, die *Einheit* $\varepsilon\colon \mathcal{F}\circ\mathcal{G} \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ und die *Koeinheit* $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{G}\circ\mathcal{F}$, gegeben durch

$$\varepsilon_Y = \Phi^{-1}_{\mathcal{G}Y,Y}(\mathrm{id}_{\mathcal{G}Y}) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}\mathcal{G}Y, Y) \qquad \text{und} \qquad \eta_X = \Phi_{X,\mathcal{F}X}(\mathrm{id}_{\mathcal{F}X}) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}\mathcal{F}X)\,.$$

Die Existenz der natürlichen Bijektionen $\Phi_{X,Y}$ oben ist äquivalent dazu, dass für alle Objekte $X$ von $\mathcal{C}$ und $Y$ von $\mathcal{D}$ gilt:

$$\mathrm{id}_{\mathcal{F}X} = \varepsilon_{\mathcal{F}X} \circ \mathcal{F}\eta_X \qquad \text{und} \qquad \mathrm{id}_{\mathcal{G}Y} = \mathcal{G}\varepsilon_Y \circ \eta_{\mathcal{G}Y} \ .$$

In Bemerkung 4.28 sehen wir anhand eines Beispiels, wie man $\Phi_{X,Y}$ aus $\varepsilon_Y$ und $\eta_X$ rekonstruiert.

4.3. Beispiel. Um zu zeigen, wie häufig adjungierte Funktoren sind, geben wir zwei möglichst unterschiedliche Beispiele.

(1) In der Kategorie $\mathcal{S}et$ gilt das *Exponentialgesetz.*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(X \times Y, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(Y, Z))$$

für alle Mengen $X$, $Y$, $Z$, somit $\cdot \times Y \dashv \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(Y, \cdot)$. In $\mathcal{T}op$ gilt es nach Satz 1.60 (3), falls $Y$ lokalkompakt ist. Als Spezialfall erhalten wir die Adjunktion $S \dashv \Omega$ auf $\mathcal{T}op_+$.

(2) Es sei $B$ eine Menge und $V$ ein $\Bbbk$-Vektorraum. Bezeichne $\langle B \rangle_{\Bbbk}$ den von $B$ frei erzeugten Vektorraum und $|V|$ die Menge der Vektoren von $V$, dann gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}ec_{\Bbbk}}(\langle B \rangle, V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(B, |V|) \ .$$

Hierbei wird eine Abbildung $f$ abgebildet auf die lineare Abbildung

$$\sum_{b \in B} a_b \, b \longmapsto \sum_{b \in B} a_b \, f(b) \ .$$

Hier ist das „freie Erzeugnis“ linkadjungiert zu einem „vergesslichen Funktor“. Ähnliche Adjunktionen gibt es zwischen $\mathcal{S}et$ und $\mathcal{G}rp$ sowie zwischen $\mathcal{S}et$ und $\mathcal{A}b$.

Al nächstes werden wir den Begriff des Kolimes (direkten Limes) aus Folgerung 1.76 stark verallgemeinern und den dazu dualen Begriff des (inversen) Limes kennenlernen.

4.4. Definition. Ein *Diagramm* ist eine kleine Kategorie, das heißt, eine Kategorie, deren Objekte eine Menge bilden. Eine Kategorie mit endlich vielen Objekten, deren Morphismen von endlich vielen erzeugt werden, heißt entsprechend *endliches Diagramm.*

Sei $\mathcal{I}$ ein Diagramm und $\mathcal{C}$ eine Kategorie, dann ist ein Diagramm vom Typ $\mathcal{I}$ in $\mathcal{C}$ ein Funktor $\mathcal{F} \colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$.

Sei $C$ ein Objekt von $\mathcal{C}$, dann ist das diagonale Diagramm $\Delta_C$ vom Typ $\mathcal{I}$ in $\mathcal{C}$ der konstante Funktor, der alle Objekte von $\mathcal{I}$ auf $C$ und alle Morphismen in $\mathcal{I}$ auf $\mathrm{id}_C$ abbildet.

4.5. Beispiel. Es sei $\mathcal{I}$ eine Kategorie mit einem Objekt $X$ und einem Morphismus $f \colon X \to X$. Falls $f^n \neq f^m$ für alle $n > m \geq 0$, gibt es unendlich viele Morphismen; dennoch sprechen wir von einem endlichen Diagramm.

4.6. Bemerkung. Die Diagramme vom Typ $\mathcal{I}$ in $\mathcal{C}$ bilden selbst eine Kategorie $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$, dabei ist ein Morphismus in $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ gerade eine natürliche Transformation $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$.

Wir können die Zuordnung $C \mapsto \Delta_C$ als Funktor $\Delta \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ auffassen, denn ein Morphismus $f \colon C \to D$ liefert eine natürliche Transformation $\Delta_f \colon \Delta_C \to \Delta_D$. Wir nennen ihn den *Diagonalfunktor.*

4.7. Definition. Es sei $\mathcal{I}$ ein Diagramm und $\mathcal{F} \colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Dann hat $\mathcal{F}$ einen *Limes,* wenn es ein Objekt $\lim \mathcal{F}$ von $\mathcal{C}$ und eine in $C$ natürliche Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}(\Delta_C, \mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \lim \mathcal{F})$$

für alle Objekte $C$ von $\mathcal{C}$ gibt. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ hat *alle $\mathcal{I}$-Limiten,* wenn der Diagonalfunktor linksadjungiert zu einem Funktor $\lim \colon \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \to \mathcal{C}$ ist. Sie hat *alle Limiten,* wenn sie $\mathcal{I}$-Limiten für alle Diagramme besitzt, und *alle endlichen Limiten,* wenn sie $\mathcal{I}$-Limiten nur für alle endlichen Diagramme besitzt.

Der Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ hat einen *Kolimes,* wenn es ein Objekt $\operatorname{colim}\mathcal{F}$ von $\mathcal{C}$ und eine natürliche Bijektion

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}(\mathcal{F}, \Delta_C) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\operatorname{colim}\mathcal{F}, C)$$

für alle Objekte $C$ von $\mathcal{C}$ gibt. Die Kategorie $\mathcal{C}$ hat *alle $\mathcal{I}$-Kolimiten,* wenn der Diagonalfunktor rechtsadjungiert zu einem Funktor $\operatorname{colim}\colon \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \to \mathcal{C}$ ist. Analog definieren wir, wann $\mathcal{C}$ *alle kleinen* oder *endlichen Kolimiten* hat.

Eine Kategorie heißt *vollständig,* wenn sie alle kleinen Limiten hat, *kovollständig,* wenn sie alle kleinen Kolimiten hat, und *bivollständig,* wenn beides gilt.

Tatsächlich haben die meisten Kategorien, für die wir uns interessieren, alle Limiten und Kolimiten. In diesem Fall können wir lim und colim als rechts- beziehungsweise linsadjungierten Funktor zum Diagonalfunktor definieren. Wir wollen uns aber die Möglichkeit offenhalten, auch dann über einzelne $\mathcal{I}$-Limiten oder $\mathcal{I}$-Kolimiten zu sprechen, wenn nicht alle existieren; daher jeweils die etwas explizitere Definition am Anfang.

4.8. Bemerkung. Limiten und Kolimiten erfüllen universelle Eigenschaften, falls sie existieren. Dadurch sind sie wie immer bis auf eindeutige Isomorphismen eindeutig bestimmt, und wir dürfen salopp von „dem“ Limes und „dem“ Kolimes reden. Tatsächlich sind viele der kategoriellen Konstruktionen, die wir anhand von universellen Eigenschaften definiert haben, Beispiele von Limiten oder Kolimiten; mehr dazu gleich.

Wir wollen anhand eines konkreten Beispiels verstehen, was die obige Definition bedeutet. Dazu betrachten wir die endliche Kategorie $\mathcal{I}$ mit drei Objekten und zwei nichttrivialen Morphismen der Form

$$A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B\,. \tag{a}$$

Ein Diagramm $\mathcal{F}$ vom Typ $\mathcal{I}$ in $\mathcal{C}$ ist nichts anderes als ein Diagramm der obigen Form aus Objekten und Morphismen in $\mathcal{C}$. Eine natürliche Transformation von $\mathcal{F}$ zum Diagonalfunktor $\Delta_D$ für ein Objekt $D$ von $\mathcal{C}$ ist somit ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, "b"] \arrow[ddr, "a"'] & \\ & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"] & C\,. \end{tikzcd} \tag{b}$$

Den offensichtlichen Morphismus $f \circ a = g \circ b\colon D \to C$ haben wir der Übersicht halber weggelassen.

Der Identität $\mathrm{id}_{\lim\mathcal{F}}$ entspricht insbesondere ein Morphismus $\Delta_{\lim\mathcal{F}} \to \mathcal{F}$, also erhalten wir ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} \lim\mathcal{F} \arrow[r, "q"'] \arrow[d, "p"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & C\,. \end{tikzcd} \tag{c}$$

Da sich lim zu $\Delta$ für ein festes $\mathcal{F}$ wie ein rechtsadjungiert Funktor verhält, gibt es zu jedem Diagramm $\mathcal{F}$ vom Typ $\mathcal{I}$ wie in (a) und für alle $D$ und $a$, $b$ wie in (b) genau eine Abbildung $d\colon D \to$

$\lim \mathcal{F}$ wie im Diagramm

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, dashed, "d"] \arrow[drr, "b"] \arrow[ddr, "a"'] & & \\ & \lim \mathcal{F} \arrow[r, "q"'] \arrow[d, "p"] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"] & C \,. \end{tikzcd} \tag{d}$$

Das Diagramm kommutiert, falls wir zeigen können, dass $a = p \circ d$ und $b = q \circ d$. Aber das folgt aus der Natürlichkeit der Bijektionen $\Phi_{\cdot,\mathcal{F}}$ in der Definition. Dazu betrachte

$$\begin{tikzcd} (p,q) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^I}(\Delta_{\lim \mathcal{F}}, \mathcal{F}) \arrow[r, "\Phi_{\lim \mathcal{F}, \mathcal{F}}"] \arrow[d, "\cdot \circ \Delta_d"'] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\lim \mathcal{F}, \lim \mathcal{F}) \ni \mathrm{id}_{\lim \mathcal{F}} \arrow[d, "\cdot \circ d"'] \\ (a,b) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^I}(\Delta_D, \mathcal{F}) \arrow[r, "\Phi_{D,\mathcal{F}}"] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(D, \lim \mathcal{F}) \ni d \,. \end{tikzcd}$$

Die obere Zeile entspricht dem Diagramm (c), die untere (d), und rechts gilt offensichtlich $\mathrm{id}_{\lim \mathcal{F}} \circ d = d$. Aufgrund der Natürlichkeit erhalten wir auf der linken Seite die gesuchte Gleichheit. Die Abbildung $d$ ist auch eindeutig: gäbe es links eine andere Abbildung $e$ mit $p \circ e = a$ und $q \circ e = b$, dann wäre rechts $\mathrm{id}_{\lim \mathcal{F}} \circ e = d$, was natürlich nicht sein kann.

Also erfüllt $\lim \mathcal{F}$ genau die universelle Eigenschaft des Pullback. Das heißt, der Pullback ist ein Spezialfall eines endlichen Limes. Umgekehrt kann man zeigen, dass der Pullback ein Funktor $\mathcal{C}^{\mathcal{I}} \to \mathcal{C}$ ist, der zu $\Delta$ rechtsadjungiert ist, und somit ein Limes im Sinne der obigen Definition.

Indem wir alle Pfeile umdrehen, erhalten wir völlig analog, dass der Kolimes zum Diagramm

$$A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$$

die universelle Eigenschaft eines Pushouts erfüllt.

$$\begin{tikzcd} D & & \\ & \lim \mathcal{F} \arrow[ul, dashed] & B \arrow[l] \arrow[ull, "b"'] \\ & A \arrow[u] \arrow[uul, "a"] & C \arrow[l, "f"'] \arrow[u, "g"'] \,. \end{tikzcd}$$

Alle anderen Limiten und Kolimiten erfüllen analoge universelle Eigenschaften, die genauso bewiesen werden.

4.9. Beispiel. Wir geben einige bekannte Beispiele für diese Konstruktionen.

(1) Sei $\mathcal{I}$ eine Menge $I$ von Objekten, und die einzigen Morphismen seien die Identitäten dieser Objekte. Ein Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ist also eine durch $I$ indizierte Familie, und ihr Limes in $\mathcal{C}$ ist ihr Produkt, falls er existiert. Falls $I = \emptyset$, erhalten wir das terminale Objekt von $\mathcal{C}$.
(2) Analog ist der Kolimes von $\mathcal{F}$ das Koprodukt der obigen Familie, falls er existiert. Falls $I = \emptyset$, erhalten wir das initiale Objekt von $\mathcal{C}$.
(3) Bisher haben wir den Begriff des (inversen) Limes für den Spezialfall zum folgenden Diagramm verwendet:

$$X_0 \longleftarrow X_1 \longleftarrow \cdots \,.$$

(4) Analog haben wir den Begriff des Kolimes oder direkten Limes für folgenden Spezialfall verwendet:

$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots .$$

Wir werden auch in Zukunft die Konstruktionen aus (3) und (4) mit Limes und Kolimes bezeichnen, solange keine Verwechslungsgefahr besteht.

4.10. Proposition. *Jeder (endliche) Limes ist ein Pullback von (endlichen) Produkten. Jeder (endliche) Kolimes ist ein Pushout von (endlichen) Koprodukten.*

Insbesondere hat eine Kategorie $\mathcal{C}$ genau dann alle (endlichen) Limiten, wenn alle (endlichen) Produkte und alle Pullbacks existieren. Sie hat genau dann alle (endlichen) Kolimiten, wenn alle (endlichen) Koprodukte und alle Pushouts existieren.

Beweis. Für die erste Aussage schreiben wir $f\colon D_f \to Z_f$ für alle $f$ aus einer Menge von Morphismen, die alle Morphismen von $\mathcal{I}$ erzeugt. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\lim \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \prod_I \mathcal{F}(I) \arrow[d, "(g,h)"] \\
\prod_f \mathcal{F}(Z_f) \arrow[r, "\Delta"] & \prod_f \mathcal{F}(Z_f) \times \prod_f \mathcal{F}(Z_f) \,.
\end{tikzcd}$$

Hierbei geht das Produkt in der oberen Zeile über alle Objekte $I$ von $\mathcal{I}$, und die Produkte in der unteren Reihe jeweils über eine Menge von Erzeugern der Morphismen von $\mathcal{I}$. Ist $\mathcal{I}$ endlich, so sind es auch alle obigen Produkte. Für jeden Morphismus $f$ ist die $f$-Komponente von $g$ die Verkettung $f \circ \pi_{D_f}$, und die $f$-Komponente von $h$ ist einfach $\pi_{Z_f}$. Der obige Pullback ist genau der Limes, denn jede Abbildung $C \to \lim \mathcal{F}$ entspricht genau einer Familie von Abbildungen $C \to \mathcal{F}(I)$ für alle $I$, die mit den Erzeugern von $\mathcal{I}$ verträglich sind.

Völlig analog lässt sich jeder Kolimes als Pushout von Koprodukten darstellen. □

4.11. Beispiel. Die folgenden Kategorien sind somit bivollständig:

$$\mathcal{S}et\,, \qquad \mathcal{S}et_+\,, \qquad \mathcal{G}rp\,, \qquad \mathcal{A}b\,, \qquad \mathcal{V}ec_{\Bbbk}\,, \qquad \mathcal{T}op\,, \qquad \mathcal{T}op_+\,.$$

Das Koprodukt und den Pushout von Gruppen haben wir in Abschnitt 2.d kennengelernt.

4.12. Definition. Ein Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt *stetig,* wenn für alle Diagramme $\mathcal{F}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, die einen Limes in $\mathcal{C}$ besitzen, auch $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ einen Limes besitzt, nämlich $\lim(\mathcal{G} \circ \mathcal{F}) = \mathcal{G}(\lim \mathcal{F})$.

Ein Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt *kostetig,* wenn für alle Diagramme $\mathcal{F}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, die einen Kolimes in $\mathcal{C}$ besitzen, auch $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ einen Kolimes besitzt, nämlich $\lim(\mathcal{G} \circ \mathcal{F}) = \mathcal{G}(\lim \mathcal{F})$.

Die Begriffe „(ko-) vollständig“ und „(ko-)stetig“ sind in einer recht oberflächlichen Analogie zur Topologie metrischer Räume gewählt. Aufgrund von Proposition 4.10 reicht es, für Stetigkeit nur Produkte und Pullbacks, und für Kostetigkeit nur Koprodukte und Pushouts zu betrachten.

4.13. Beispiel. Die Fundamentalgruppe ist verträglich mit dem Produkt punktierter Räume. Nach dem Satz 2.42 von Seifert-van Kampen ist sie unter gewissen Voraussetzungen verträglich mit Koprodukten und Pushout, jedoch keinesfalls immer, siehe Beispiel 2.44.

4.14. Lemma. *Es seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien, und $\mathcal{H}\colon \mathcal{D} \rightleftarrows \mathcal{C} : \mathcal{G}$ zueinander adjungierte Funktoren. Dann ist $\mathcal{G}$ stetig und $\mathcal{H}$ kostetig.*

Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen gibt es umgekehrt zu einem stetigen Funktor einen linksadjungierten Funktor, und zu einem kostetigen Funktor einen rechtsadjungierten Funktor. Also ist das obige Lemma oft die Methode der Wahl, um Stetigkeit oder Kostetigkeit zu zeigen.

Beweis. Der Beweis ist rein formal. Zunächst überlegt man sich, dass

$$\Delta_{\mathcal{G}C} = \mathcal{G} \circ \Delta_C \qquad \text{und} \qquad \Delta_{\mathcal{H}D} = \mathcal{H} \circ \Delta_D \ .$$

Außerdem induzieren $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ aufgrund der Natürlichkeit der Adjunktion auch adjungierte Funktoren $\mathcal{H}\colon \mathcal{D}^{\mathcal{I}} \rightleftarrows \mathcal{C}^{\mathcal{I}} : \mathcal{G}$. Für $\mathcal{F}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ schreibt man

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(D, \mathcal{G}(\lim \mathcal{F})\big) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\mathcal{H}D, \lim \mathcal{F}\big) &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}\big(\Delta_{\mathcal{H}D}, \mathcal{F}\big) \\ &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}\big(\mathcal{H} \circ \Delta_D, \mathcal{F}\big) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^{\mathcal{I}}}\big(\Delta_D, \mathcal{G} \circ \mathcal{F}\big) \ .\end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{G}(\lim \mathcal{F})$ der Limes von $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$.

Analog gilt für $\mathcal{F}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{D}$, dass

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(\mathcal{H}(\operatorname{colim} \mathcal{F}), C\big) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\operatorname{colim} \mathcal{F}, \mathcal{G}C\big) &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}\big(\mathcal{F}, \Delta_{\mathcal{G}C}\big) \\ &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}\big(\mathcal{F}, \mathcal{G} \circ \Delta_C\big) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^{\mathcal{I}}}\big(\mathcal{H} \circ \mathcal{F}, \Delta_C\big) \ . \quad \square\end{aligned}$$

4.15. Beispiel. Wir betrachten das adjungierte Paar $\langle\,\cdot\,\rangle\colon \mathcal{S}et \leftrightarrows \mathcal{V}ec_{\Bbbk} : |\cdot|$ aus Beispiel 4.3 (2).

(1) Das freie Erzeugnis verträgt sich mit Kolimiten, beispielsweise gilt

$$\Big\langle \coprod_{i \in I} M_i \Big\rangle \cong \bigoplus_{i \in I} \langle M_i \rangle \ .$$

Mit allgemeinen Limiten ist $\langle\,\cdot\,\rangle$ jedoch nicht verträglich, zum Beispiel gilt

$$\langle M_1 \times M_2 \rangle \cong \langle M_1 \rangle \otimes \langle M_2 \rangle \ ,$$

und das Tensorprodukt ist nicht das kategorielle Produkt. Auf der anderen Seite lässt sich für ein unendliches Produkt von Vektorräumen nicht so einfach eine Basis angeben.

(2) Der vergessliche Funktor $|\cdot|$ vertauscht mit Limiten. Das erklärt, warum das kategorielle Produkt von beliebig vielen Vektorräumen durch das kartesische Produkt realisiert wird.

Analoge Überlegungen gelten selbstverständlich auch für die Kategorien $\mathcal{G}rp$, $\mathcal{A}b$ und $\mathcal{M}od_R$. Man beachte beispielsweise, dass das Produkt freier Gruppen im Allgemeinen nicht wieder frei ist.

## 4.b. Eine angenehme Kategorie topologischer Räume

In der Kategorie $\mathcal{T}op$ aller topologischer Räume gibt es einige „Pathologien“. Beispielsweise ist nicht jede Kofaserung abgeschlossen, das Exponentialgesetz 1.60 (4) gilt nur unter Zusatzvoraussetzungen, und Produkte von CW-Komplexen sind nicht automatisch selbst CW-Komplexe. Wir betrachten hier die Kategorie $kw\mathcal{H}$ der kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume, die diese Probleme nicht hat; mehr zu dieser Kategorie findet sich in [**St**]. Um das Exponentialgesetz zu beweisen und besser zu verstehen, führen wir in Abschnitt 4.c den Begriff einer abgeschlossenen monoidalen Kategorie ein.

Wir betrachten eine sogenannte *volle Unterkategorie* $kw\mathcal{H}$ der Kategorie $\mathcal{T}op$, das heißt, unsere Kategorie enthält eine gewisse Auswahl der Objekte von $\mathcal{T}op$, aber für je zwei Objekten $X$, $Y$ von $kw\mathcal{H}$ gilt

$$\operatorname{Hom}_{kw\mathcal{H}}(X, Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y) \ ,$$

es sind also nach wie vor genau die stetigen Abbildungen als Morphismen erlaubt. Die Definition von $kw\mathcal{H}$ erfolgt, indem wir mit stetigen Abbildungen $f\colon K \to X$ von Kompakta nach $X$ gewisse Eigenschaften „testen“. Dabei erinnern wir uns, dass bei uns alle kompakten Räume gemäß Definition 1.50 als Hausdorff vorausgesetzt sind.

4.16. Definition. Es sei $X$ ein topologischer Raum.

(1) Wir nennen $X$ *kompakt erzeugt,* wenn eine Teilmenge $U \subset X$ offen ist, falls $f^{-1}(U) \subset K$ für alle kompakten Räume $K$ und alle stetigen $f\colon K \to X$ offen ist.

(2) Wir nennen $X$ *schwach Hausdorff,* wenn $\operatorname{im} f \subset X$ abgeschlossen ist für alle Kompakta $K$ und alle stetigen Abbildungen $f\colon K \to X$.
(3) Es bezeichne $kw\mathcal{H} \subset \mathcal{T}op$ die volle Unterkategorie der kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume.

Beide Eigenschaften lassen sich mit Hilfe kompakter Räume testen. Nach Bemerkung 1.51 (2) und (5) ist jeder Hausdorff-Raum schwach Hausdorff, und da pt kompakt ist, erfüllt jeder schwache Hausdorff-Raum das erste Trennungsaxiom (T1). Ohne Beweis geben wir einige Klassen von Beispielen an.

4.17. Proposition. *Die Kategorie $kw\mathcal{H}$ enthält*

(1) *alle Hausdorff-Räume, die das Abzählbarkeitsaxiom (A1) erfüllen,*
(2) *alle metrischen oder metrisierbaren Räume,*
(3) *alle topologischen Mannigfaltigkeiten, und*
(4) *alle CW-Komplexe.*

Es sei $X$ ein beliebiger topologischer Raum, dann bezeichne $kX$ die gleiche Menge mit der *kompakt erzeugten Topologie*

$$\left\{ U \subset X \;\middle|\; f^{-1}(U) \subset K \text{ offen für alle Kompakta } K \text{ und alle stetigen } f\colon K \to X \right\} .$$

Wir nennen offene Mengen in $kX$ auch *$k$-offen.* Jede offene Menge ist also auch $k$-offen.

4.18. Proposition. *Die Zuordnung $k$ ist ein Funktor von der Kategorie $\mathcal{T}op$ in die Kategorie $k\mathcal{T}op$ der kompakt erzeugten Räume. Er ist rechtsadjungiert zur Inklusion $k\mathcal{T}op \hookrightarrow \mathcal{T}op$.*

Wir verschieben den Beweis in die Übungen 4.78 und 4.79.

4.19. Folgerung. *Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{I} \to k\mathcal{T}op$ ein Diagramm. Dann gilt*

$$\lim\nolimits^{k\mathcal{T}op} \mathcal{F} = k \lim\nolimits^{\mathcal{T}op} \mathcal{F} \tag{1}$$

$$\operatorname{colim}\nolimits^{k\mathcal{T}op} \mathcal{F} = \operatorname{colim}\nolimits^{\mathcal{T}op} \mathcal{F} . \tag{2}$$

*Insbesondere ist die Kategorie $k\mathcal{T}op$ bivollständig, und der Funktor $k$ ist stetig.*

Beweis. Die erste Aussage folgt aus den Lemma 4.14 und 4.18. Für die zweite Aussage reicht es zu zeigen, dass $\operatorname{colim}^{\mathcal{T}op} \mathcal{F}$ kompakt erzeugt ist. Nach Proposition 4.10 reicht es, Koprodukte und Pushouts, also Quotienten von Koprodukten, zu betrachten.

Die Topologie auf $X = \coprod_{i \in I} X_i$ ist die feinste Topologie, für die alle Inklusionen $X_j \to X$ stetig sind. Aber dann sind auch die Abbildungen $X_j = kX_j \to kX$ stetig, und da die kompakte erzeugte Topologie feiner ist, folgt, dass $X$ bereits kompakt erzeugt ist. Analog geht der Beweis für Quotienten. □

Die Hausdorff-Eigenschaft lässt sich wie folgt umformulieren: Ein Raum $X$ ist genau dann Hausdorff, wenn $\Delta X \subset X \times X$ abgeschlossen ist. Diese Idee übertragen wir auf kompakt erzeugte Räume.

4.20. Proposition. *Es sei $X$ kompakt erzeugt. Dann ist $X$ schwach Hausdorff genau dann, wenn $\Delta X \subset k(X \times X)$ abgeschlossen ist.*

Beweis. Sei zunächst $X$ kompakt erzeugt und $\Delta X \subset k(X \times X)$ abgeschlossen. Sei $K$ kompakt und $f\colon K \to X$ beliebig. Zu zeigen ist für alle kompakten $L$ und alle $g\colon L \to X$, dass $g^{-1}(\operatorname{im} f) \subset L$ abgeschlossen ist. Nach Voraussetzung ist die Menge

$$\left\{ (p,q) \in K \times L \;\middle|\; f(p) = g(q) \right\} = (f \times g)^{-1}(\Delta X) \subset K \times L$$

abgeschlossen, also auch kompakt. Ihr Bild unter der Projektion auf $L$ ist dann ebenfalls abgeschlossen. Aber dieses Bild ist gerade $g^{-1}(\operatorname{im} f)$. Also ist $X$ schwach Hausdorff.

Sei jetzt $X$ kompakt erzeugt und schwach Hausdorff. Zu zeigen ist für jedes Kompaktum $K$ und jede Abbildung $f\colon K \to X \times X$, dass das Urbild von $\Delta X$ abgeschlossen ist. Es sei $f(p) = (g(p), h(p))$ für alle $p \in K$, dann ist $f$ durch die stetigen Abbildungen $g$, $h$ eindeutig bestimmt. Sei $p \in K \setminus f^{-1}(\Delta X)$, so dass $x = g(p) \neq y = h(p)$. Als einpunktige Menge ist $\{y\} \subset X$ kompakt, also abgeschlossen. Also haben wir disjunkte abgeschlossene Teilmengen $\{p\}$ und $g^{-1}(y) \subset K$.

Da $K$ normal ist, finden wir offene, disjunkte Umgebungen $U$ von $p$ und $V \subset K$ von $g^{-1}(y)$. Dann ist $K \setminus V$ kompakt, somit ist $g(K \setminus V)$ abgeschlossen in $X$ und $W = K \setminus h^{-1}(g(K \setminus V))$ offen in $K$. Es gilt $p \in W$, da $y = h(p) \in g(V)$. Außerdem gilt $U \cap W \cap f^{-1}(\Delta X) = \emptyset$, denn sei $q \in U \cap W$, dann folgt $g(q) \in g(U) \subset g(K \setminus V)$ und $h(q) \notin g(K \setminus V)$, somit $q \notin f^{-1}(\Delta X)$. Also finden wir für $p \notin f^{-1}(\Delta X)$ eine Umgebung $U \cap W$ in $K \setminus f^{-1}(\Delta X)$, somit ist $\Delta X$ eine $k$-abgeschlossene Menge in $X \times X$. □

Wir können eine Äquivalenzrelation „$\sim$“ auf einem Raum $X$ als eine Teilmenge $R_\sim \subset X \times X$ mit $\Delta_X \subset R_\sim$ schreiben, dann gilt zum Beispiel $R_= = \Delta X$.

4.21. Proposition. *Es sei $X$ ein kompakt erzeugter Raum und „$\sim$“ eine Äquivalenzrelation auf $X$. Dann ist $X/\sim$ genau dann ein kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Raum, wenn $R_\sim \subset k(X \times X)$ abgeschlossen ist.*

Wir verschieben diesen Beweis auf später. Die Schwierigkeit besteht darin, zu zeigen, dass das Bild $\Delta_{X/\sim}$ von $R_\sim$ in $k((X/\sim) \times (X/\sim))$ wieder abgeschlossen ist.

Wir betrachten jetzt alle Äquivalenzrelationen, die durch $k$-abgeschlossene Teilmengen dargestellt werden. Da der Durchschnitt über eine Menge solcher Teilmengen wieder eine Äquivalenzrelation darstellt, gibt es eine minimale $k$-abgeschlossene Äquivalenzrelation „$\approx$“. Wir betrachten den Raum $hX = X/\approx$ mit der Quotiententopologie.

4.22. Proposition. *Die Zuordnung $X \mapsto hX$ ist ein Funktor $k\mathcal{T}op \to kw\mathcal{H}$. Er ist linksadjungiert zur Inklusion $kw\mathcal{H} \hookrightarrow k\mathcal{T}op$.*

Beweis. Nach Proposition 4.21 ist $X/\approx$ ein kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Raum.

Sei jetzt $Y$ ein kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Raum und $f\colon X \to Y$ stetig, dann ist auch $f \times f\colon k(X \times X) \to k(Y \times Y)$ stetig, somit ist das Urbild von $\Delta_Y$ in $k(X \times X)$ abgeschlossen und damit gröber als $R_{\approx_X}$. Das heißt, $f$ induziert eine Abbildung $hX \to Y$, die nach der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie auch stetig ist. Hieraus folgt sowohl, dass $h$ ein Funktor ist, als auch, dass er linksadjungiert zur Inklusion $kw\mathcal{H} \hookrightarrow k\mathcal{T}op$ ist. □

4.23. Folgerung. *Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{I} \to kw\mathcal{H}$ ein Diagramm. Dann gilt*

$$\lim^{kw\mathcal{H}} \mathcal{F} = \lim^{k\mathcal{T}op} \mathcal{F} \tag{1}$$

$$\operatorname{colim}^{kw\mathcal{H}} \mathcal{F} = h \operatorname{colim}^{k\mathcal{T}op} \mathcal{F}\,. \tag{2}$$

*Insbesondere ist die Kategorie $kw\mathcal{H}$ bivollständig, und der Funktor $h$ ist kostetig.*

Beweis. Die zweite Aussage folgt aus Lemma 4.14. Für die erste Aussage reicht zu zeigen, dass jeder Limes von kompakt erzeugten schwach Hausdorff-Räumen in $k\mathcal{T}op$ bereits schwach Hausdorff ist. Wegen Proposition 4.10 reicht es, Produkte in $k\mathcal{T}op$ und Pullbacks, also Unterräume von Produkten in $k\mathcal{T}op$ zu betrachten.

Es sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Räume, und es sei $X = k\prod_{i \in I} X_i$ ihr Produkt in $k\mathcal{T}op$. Für alle $j \in I$ ist die Projektionsabbildung

$$\pi_j\colon k(X \times X) \cong k\prod_{i \in I} k(X_i \times X_i) \longrightarrow k(X_j \times X_j)$$

stetig, somit ist $\pi_j^{-1}\Delta X_j$ abgeschlossen in $X \times X$. Aber dann ist auch $\Delta X = \bigcup_{j\in I} \pi_j^{-1}\Delta X_j$ abgeschlossen in $k(X \times X)$, und somit ist $X$ schwach Hausdorff.

Sei jetzt $X$ kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Raum und $A \subset X$ ein Unterraum. Dann ist $kA$ ebenfalls kompakt erzeugt, und die Inklusion $\iota\colon kA \to A \hookrightarrow X$ ist stetig. Sei $Y$ ebenfalls kompakt erzeugt, dann ist nach Proposition 4.18 eine Abbildung $F\colon Y \to kA$ genau dann stetig, wenn $F\colon Y \to A$ stetig ist, nach Satz 1.54 (2) also genau dann, wenn $\iota \circ F\colon Y \to X$ stetig ist. Sei jetzt $K$ kompakt und $f\colon K \to kA$ stetig. Dann ist $\iota \circ f\colon K \to X$ stetig, also ist $\operatorname{im}(\iota \circ f)$ abgeschlossen. Aber dann ist auch $\operatorname{im}(f) = \iota^{-1}\operatorname{im}(\iota \circ f)$ abgeschlossen. Also ist $kA$ schwach Hausdorff, und somit ist jeder Limes von kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räumen in $k\mathcal{T}op$ selbst wieder schwach-Hausdorff. □

4.24. Bemerkung. Zusammenfassend erhalten wir für Diagramme $\mathcal{F}\colon \mathcal{I} \to kw\mathcal{H}$ also

$$\lim^{kw\mathcal{H}} \mathcal{F} = k \lim^{\mathcal{T}op} \mathcal{F} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{colim}^{kw\mathcal{H}} \mathcal{F} = h \operatorname{colim}^{\mathcal{T}op} \mathcal{F}\,.$$

Im Beweis von Folgerung 4.23 haben wir außerdem gesehen, dass wir den Funktor $k$ auf Unterräume anwenden müssen, um in der Kategorie $kw\mathcal{H}$ die charakteristische Eigenschaft aus Satz 1.54 zu erhalten. Analog haben wir in Folgerung 4.19 den Funktor $h$ auf Quotienten angewandt, um die charakteristische Eigenschaft aus Satz 1.72 zu gewährleisten. Wir werden in Zukunft meistens in $kw\mathcal{H}$ arbeiten. Dann verstehen mit Unterräume, Quotienten, Produkte, Koprodukte, sowie allgemeine Limiten und Kolimiten ebenfalls in $kw\mathcal{H}$. Insbesondere schreiben wir „$k$“ und „$h$“ in der Regel nicht mit, es sei denn, um Verwechslungen zu vermeiden.

4.25. Bemerkung. Es folgen zwei wichtige Konsequenzen aus Proposition 4.21. Dazu seien $X$, $Y$ zwei kompakt erzeugte schwach-Hausdorff-Räume.

(1) Das reduzierte Produkt $X \wedge Y$ in $k\mathcal{T}op$ ist wieder schwach Hausdorff. Denn die einpunktigen Teilmengen $\{x_0\} \subset X$ und $\{y_0\} \subset Y$ sind kompakt und daher abgeschlossen. Die Diagonalen $\Delta X \subset k(X \times X)$ und $\Delta Y \subset k(Y \times Y)$ sind ebenfalls abgeschlossen, also auch $\Delta(X \times Y) = \Delta X \times \Delta Y \subset k(X \times X) \times k(Y \times Y)$, und die Topologie auf $k(X \times X \times Y \times Y) \cong k(k(X \times Y) \times k(X \times Y))$ ist noch feiner. Also ist auch die Menge

$$\begin{aligned} R_\sim = \Delta(X \times Y) \cup \big((X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y) \times (X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y)\big) \\ \subset k(k(X \times Y) \times k(X \times Y)) \end{aligned}$$

abgeschlossen, und $X \wedge Y = k(X \times Y)/{\sim}$ ist schwach Hausdorff.

(2) Es sei $A \subset X$ abgeschlossen und $f\colon kA \to Y$ stetig. Dann ist auch der Pushout $X \cup_f Y$ in $k\mathcal{T}op$ wieder schwach-Hausdorff. Die Teilmengen $A \times Y$ und $A \times A$ sind in $X \times Y$ beziehungsweise $X \times X$, also erst recht in $k(X \times Y)$ beziehungsweise $k(X \times X)$ abgeschlossen. Da $f$ stetig ist, sind auch die Teilmengen

$$\begin{aligned} (f \times \mathrm{id}_Y)^{-1}(\Delta Y) \subset k(kA \times Y) \subset k(X \times Y) \\ (f \times f)^{-1}(\Delta Y) \subset k(kA \times kA) \subset k(X \times X) \end{aligned}$$

abgeschlossen, also auch

$$\begin{aligned} R_\sim = \big(\Delta X \cup (f \times f)^{-1}(\Delta Y)\big) \sqcup (f \times \mathrm{id}_Y)^{-1}(\Delta Y) \sqcup (\mathrm{id}_Y \times f)^{-1}(\Delta Y) \sqcup \Delta Y \\ \subset k(X \times X) \sqcup k(X \times Y) \sqcup k(Y \times X) \sqcup k(Y \times Y) = k((X \sqcup Y) \times (X \sqcup Y))\,. \end{aligned}$$

Also ist $X \cup_f Y = (X \sqcup Y)/{\sim}$ schwach Hausdorff.

In beiden Fällen ist das Ergebnis also invariant unter dem Funktor $h$. Wenn $A \subset X$ nicht abgeschlossen ist, stimmt Aussage (2) nicht mehr, beispielsweise sei $f\colon \mathbb{Q} \to \mathrm{pt}$ die konstante Abbildung, dann ist $h(\mathbb{R} \cup_f \mathrm{pt}) \cong \mathrm{pt}$.

## 4.c. Das Exponentialgesetz

Wir kommen jetzt zum Raum der stetigen Abbildungen, siehe auch Abschnitt 1.f. Die folgenden Konstruktionen werden uns helfen, weitere schöne Eigenschaften der Kategorie $kw\mathcal{H}$ zu beweisen. Um den topologischen Aufwand gering zu halten, führen wir den Begriff der abgeschlossenen monoidalen Kategorie ein. Um den abstrakten Aufwand in Grenzen zu halten, begnügen wir uns mit einer relativ einfachen Version, die für den Anfang ausreicht.

4.26. Definition. Eine *monoidale Kategorie* $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ ist eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit

- einem Funktor $\otimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, dem *Tensorprodukt,*
- einem *Einheitsobjekt* $E$, und
- natürlichen Isomorphismen

$$\alpha_{X,Y,Z}\colon (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z)\ ,$$
$$\lambda_X\colon E \otimes X \xrightarrow{\cong} X \qquad \text{und} \qquad \rho_X\colon X \otimes E \xrightarrow{\cong} X\ ,$$

so dass für alle Objekte $X$, $Y$, $Z$, $W$ die folgenden Axiome gelten:

$$\alpha_{X,Y,Z\otimes W} \circ \alpha_{X\otimes Y,Z,W} = (\mathrm{id}_X \otimes \alpha_{Y,Z,W}) \circ \alpha_{X,Y\otimes Z,W} \circ (\alpha_{X,Y,Z} \otimes \mathrm{id}_W)\ , \tag{1}$$
$$\rho_X \otimes \mathrm{id}_Y = (\mathrm{id}_X \otimes \lambda_Y) \circ \alpha_{X,E,Y}\ . \tag{2}$$

Sie heißt (*rechts-*) *abgeschlossen,* falls zu jedem Objekt $Y$ ein zu $\cdot \otimes Y$ rechtsadjungierter Funktor $\hom(Y, \cdot\,)$ existiert. Sie heißt *kartesisch abgeschlossen,* wenn darüberhinaus das Tensorprodukt ein Produkt im Sinne von Bemerkung 1.47 ist und das Einheitsobjekt ein terminales Objekt.

Zu den Eigenschaften (1)–(2) gehören die kommutativen Diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[dr, "\alpha_{X,Y,Z\otimes W}"] & \\
((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[ur, "\alpha_{X\otimes Y,Z,W}"] \arrow[d, "\alpha_{X,Y,Z}\otimes \mathrm{id}_W"'] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W)) \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[rr, "\alpha_{X,Y\otimes Z,W}"] & & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[u, "\mathrm{id}_X\otimes\alpha_{Y,Z,W}"']
\end{tikzcd}\ ,$$

und

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes E) \otimes Y \arrow[rr, "\alpha_{X,E,Y}"] \arrow[dr, "\rho_X\otimes\mathrm{id}_Y"'] & & X \otimes (E \otimes Y) \arrow[dl, "\mathrm{id}_X\otimes\lambda_Y"] \\
 & X \otimes Y\ . &
\end{tikzcd}$$

Sie besagen, dass die Objekte von $\mathcal{C}$ eine „große“ Halbgruppe oder auch Monoid bilden („groß“ bedeutet, dass der Träger eine echte Klasse sein kann), wobei die üblichen Rechenregeln aber stets nur bis auf eindeutige natürliche Isomorphismen gelten. Man nennt eine Kategorie *streng monoidal,* wenn $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)$ und $E \otimes X = X = X \otimes E$ für alle Objekte $X$, $Y$ und $Z$ gelten, und $\alpha_{X,Y,Z}$ $\lambda_X$ und $\rho_X$ jeweils die Identitäten dieser Objekte sind. Die meisten monoidalen Kategorien sind nicht streng monoidal, aber mit einer Art Auswahlaxiom lässt sich zu jeder monoidalen Kategorie eine äquivalente streng monoidale Kategorie konstruieren.

Der Funktor hom heißt *interner hom-Funktor.* Er ist im ersten Argument kontravariant und im zweiten Argument kovariant, siehe Übung 4.86. „Intern“ bedeutet hier, dass $\hom(Y,Z)$ im Gegensatz zur Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ ein Objekt der Kategorie $\mathcal{C}$ ist. Wir können umgekehrt auch *abgeschlossene Kategorien* $(\mathcal{C},\hom,E)$ als Kategorien mit Einheitsobjekt $E$, internem hom-Funktor hom und gewissen natürlichen Transformationen definieren.

4.27. Beispiel. Wir geben eine Liste uns bekannter Kategorien mit verschiedenen monoidalen Strukturen an. Jede der folgenden Kategorien ist jeweils monoidal

- mit Koprodukt und initialem Objekt,
- mit Produkt und terminalem Objekt, beziehungsweise
- mit Tensorprodukt und Einheitsobjekt (falls definiert),

wir erhalten also pro Zeile bis zu drei verschiedene monoidale Kategorien, und nur bei einem Typ von Kategorien ist das abstrakte Tensorprodukt aus Definition 4.26 tatsächlich ein Tensorprodukt.

| Kategorie | Koprodukt | Initiales Objekt | Produkt | Terminales Objekt | Tensor-produkt | Einheits-objekt |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{G}rp$ | $*$ | $\{e\}$ | $\times$ | $\{e\}$ | — | — |
| $\mathcal{M}od_R, \mathcal{A}b, \mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ | $\oplus$ | $0$ | $\oplus$ | $0$ | $\otimes$ | $R, \mathbb{Z}, \Bbbk$ |
| $\mathcal{S}et, (\mathcal{T}op)$, $k\mathcal{T}op, kw\mathcal{H}$ | $\sqcup$ | $\emptyset$ | $\times$ | pt | $\times$ | pt |
| $\mathcal{S}et_+, (\mathcal{T}op_+)$, $k\mathcal{T}op_+, kw\mathcal{H}_+$ | $\vee$ | pt | $\times$ | pt | $\wedge$ | $S^0$ |

All diese Beispiele sind sogar *symmetrische monoidale Kategorien,* das heißt, es gibt natürliche Isomorphismen $\tau_{X,Y}\colon X\otimes Y \to Y\otimes X$, die gewisse Zusatzaxiome erfüllen, auf die wir hier noch nicht eingehen wollen. In Satz 7.27 sind sie anhand eines Beispiels aufgeführt.

(1) Die Kategorie $(\mathcal{S}et,\times,\mathrm{pt})$ ist kartesisch abgeschlossen. Das haben wir im Beweis von Satz 1.60 bereits ausgenutzt. Für die Kategorie $(\mathcal{S}et_+,\wedge,S^0)$ der punktierten Mengen verwenden wir die gleiche Notation wie für $\mathcal{T}op_+$. Sie ist abgeschlossen monoidal, aber das kartesische Produkt „$\times$“ ist nicht das Tensorprodukt „$\wedge$“.

(2) Die Kategorie $\mathcal{M}od_R$ für einen kommutativen Ring $R$ mit 1 ist abgeschlossen monoidal, denn die linearen Abbildungen zwischen zwei $R$-Moduln bilden selbst wieder einen $R$-Modul. Spezialfälle sind $\mathcal{A}b = \mathcal{M}od_{\mathbb{Z}}$ und $\mathcal{V}ec_{\Bbbk} = \mathcal{M}od_{\Bbbk}$. Das Tensorprodukt von Moduln ist Namensgeber für unser Tensorprodukt in Definition 4.26.

(3) In der Unterkategorie $fd\mathcal{V}ec_{\Bbbk} \subset \mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ der endlich-dimensionalen Vektorräume gibt es einen Dualitätsfunktor $X \mapsto X^* = \hom(X,\Bbbk)$, so dass $\hom(X,Y) \cong X^*\otimes Y$. In den anderen obigen Beispielen gibt es so etwas jedoch nicht. In Abschnitt 8.a führen wir eine Art topologischer Dualität ein.

(4) Die Kategorien $(\mathcal{T}op,\times,\mathrm{pt})$ und $(\mathcal{T}op_+,\wedge,S^0)$ sind monoidal. Für $\mathcal{T}op_+$ haben wir das in Bemerkung 3.73 angedeutet. Beide Kategorien sind nicht abgeschlossen, da einzelne Punkte im Exponentialgesetz 1.60 nicht ohne Voraussetzungen gelten.

(5) Die Kategorien $k\mathcal{T}op$ und $k\mathcal{T}op_+$ sowie $kw\mathcal{H}$ und $kw\mathcal{H}_+$ sind nach Satz 4.31 und Folgerung 4.34 abgeschlossen und monoidal. Zur Bedeutung der Symbole „$\times$“ und „$\wedge$“ siehe Bemerkungen 4.35 und 4.25 (1).

4.28. Bemerkung. Es seien $X$, $Y$ und $Z$ Objekte einer abgeschlossenen monoidalen Kategorie $\mathcal{C}$. Wir bezeichnen die Einheit der Adjunktion $\cdot\otimes Y \dashv \hom(Y,\cdot)$ mit $\mathrm{ev}_{Y,Z} = \varepsilon_Z\colon \hom(Y,Z)\otimes$

$Y \to Z$ und die Koeinheit mit $\otimes_{X,Y} = \eta_X \colon X \to \hom(Y, X \otimes Y)$. Aus der Natürlichkeit der Adjunktion in Bemerkung 4.2 erhalten wir zwei universelle Eigenschaften, siehe Übung 4.87.

(1) *Universelle Eigenschaft des internen hom-Funktors.* Es existiert eine natürliche Transformation $\mathrm{ev}_{Y,Z} \colon \hom(Y,Z) \otimes Y \to Z$, so dass zu jedem Morphismus $f \colon X \otimes Y \to Z$ ein eindeutiger Morphismus $g \colon X \to \hom(Y,Z)$ mit $f = \mathrm{ev}_{Y,Z} \circ (g \otimes \mathrm{id}_Y)$ existiert.

(2) *Universelle Eigenschaft des Tensorproduktes.* Es existiert eine natürliche Transformation $\otimes_{X,Y} \colon X \to \hom(Y, X \otimes Y)$, so dass zu jedem Morphismus $g \colon X \to \hom(Y,Z)$ ein eindeutiger Morphismus $f \colon X \otimes Y \to Z$ mit $g = \hom(Y,f) \circ \otimes_{X,Y}$ existiert.

Die Abbildung $g$ in (2) repräsentiert dabei so etwas wie eine „bilineare Abbildung“ $X \times Y \to Z$.

$$\begin{tikzcd} X \otimes Y \arrow[rr, dashed, "g \otimes \mathrm{id}_Y"] \arrow[dr, "f"'] & & \hom(Y,Z) \otimes Y \arrow[dl, "\mathrm{ev}_{Y,Z}"] \\ & Z & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\otimes_{X,Y}"] \arrow[dr, "g"'] & & \hom(Y, X \otimes Y) \arrow[dl, dashed, "\hom(Y,f)"] \\ & \hom(Y,Z) & \end{tikzcd} .$$

Insbesondere sehen wir, dass sich die Bijektion $\Phi_{X,Z}$ aus Definition 4.1 und ihr Inverses mit Hilfe der Koeinheit beziehungsweise der Einheit beschreiben lassen; das gilt analog für alle Adjunktionen.

4.29. Bemerkung. In einer Kategorie sind Objekte üblicherweise abstrakt, keine Mengen, deren Elemente man (mit der Sprache der Kategorien) erkennen könnte. Man kann also auch Morphismen nicht als Zuordnungsvorschriften interpretieren. In abgeschlossenen monoidalen Kategorien geht all das jedoch.

Sei $\mathcal{C}$ zunächst nur monoidal. Jedem Objekt $X$ können wir die Menge $|X| = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, X)$ zuordnen. Wenn $E$ das initiale Objekt (und $\otimes$ das Koprodukt) ist, hat diese Menge stets nur ein Element. In $(\mathcal{S}et, \times, \mathrm{pt})$ (und genauso in $\mathcal{T}op$, $k\mathcal{T}op$ und $kw\mathcal{H}$) hingegen entsprechen die Bildpunkte von Morphismen $\mathrm{pt} \to X$ genau den Elementen von $X$. In $(\mathcal{M}od_R, \otimes, R)$ identifizieren wir einen Morphismus $E = R \to X$ mit dem Bild von $1 \in R$. In $(\mathcal{S}et_+, \wedge, S^0)$ (und genauso in $\mathcal{T}op_+$, $k\mathcal{T}op_+$ und $kw\mathcal{H}_+$) betrachten wir das Bild desjenigen Punktes in $S^0$, der nicht Basispunkt ist. In diesen Fällen ist $|X|$ stets die dem Objekt $X$ zugrundeliegende Menge.

Ab jetzt sei $\mathcal{C}$ abgeschlossen. Für $X = E$ erhalten wir mit der Adjunktion $\cdot \otimes Y \dashv \hom(Y, \cdot)$ eine bijektive Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \xrightarrow{\circ \lambda_Y} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E \otimes Y, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(E, \hom(Y,Z)\big) = |\hom(Y,Z)| \ ,$$

da $\lambda_Y$ ein Isomorphismus ist. Also entspricht $\hom(Y,Z)$ der Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$. Um Morphismen auf Elementen auszuwerten, benutzen wir die Komposition $\circ$ von Morphismen in $\mathcal{C}$:

$$|\hom(Y,Z)| \times |Y| \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E,Y) \xrightarrow{\circ} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E,Z) = |Z| \ .$$

Wir erhalten also eine Abbildung $|\hom(Y,Z)| \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(|Y|, |Z|)$, und man kann überprüfen, dass das einen „vergesslichen“ Funktor $|\cdot| : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ liefert.

Sei schließlich $\mathcal{C}$ zusätzlich punktiert, das heißt, es gibt ein Nullobjekt 0, also eines, das gleichzeitig initial und terminal ist. Dann erhalten wir einen vergesslichen Funktor $|\cdot| : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et_+$, dabei repräsentiert der Nullmorphismus $E \to 0 \to X$ den Basispunkt von $|X|$.

4.30. Satz (Abstraktes Exponentialgesetz). *In jeder abgeschlossenen monoidalen Kategorie existiert ein natürlicher Isomorphismus*

$$\hom(X \otimes Y, Z) \cong \hom(X, \hom(Y,Z)) \ .$$

Beweis. Es sei $W$ ein weiteres Objekt, dann erhalten wir eine Verkettung natürlicher Bijektionen

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(W, \underbrace{\hom(X\otimes Y, Z)}_{A}\big) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(W\otimes X\otimes Y, Z\big) \xrightarrow{\cong} \\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(W\otimes X, \hom(Y,Z)\big) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(W, \underbrace{\hom(X, \hom(Y,Z))}_{B}\big)\ .\end{aligned}$$

Es bezeichne $f$ das Urbild von $\mathrm{id}_B$ und $g$ das Bild von $\mathrm{id}_A$ für $W = B$ beziehungsweise $W = A$. Wegen der Natürlichkeit der Adjunktionen aus Bemerkung 4.2 kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(B, A\big) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cdot\circ g"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(B, B\big) \ni \mathrm{id}_B \arrow[d, "\cdot\circ g"] \\ \mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(A, A\big) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(A, B\big) \ni g\ . \end{tikzcd}$$

Also folgt $f\circ g = \mathrm{id}_A$. Analog sieht man $g\circ f = \mathrm{id}_B$, mithin sind die beiden Objekte $A$ und $B$ im Satz isomorph. □

4.31. Satz. *Die Kategorie $k\mathcal{T}op$ ist kartesisch abgeschlossen.*

Insbesondere gilt in $k\mathcal{T}op$ das Exponentialgesetz wie in Satz 1.60, aber ohne zusätzliche Voraussetzungen an die beteiligten Räume. Wir werden das später auch für $kw\mathcal{H}$ zeigen. Zum Beweis von Proposition 4.21 benötigen wir aber zunächst einmal das Exponentialgesetz in $k\mathcal{T}op$.

Beweis. Aufgrund der universellen Eigenschaft ist das Produkt auf $k\mathcal{T}op$ aus Bemerkung 4.24 assoziativ mit Einheitsobjekt pt, somit ist $(k\mathcal{T}op, k(\,\cdot\,\times\,\cdot\,), \mathrm{pt})$ eine monoidale Kategorie.

Als internes hom-Objekt zu $Y$, $Z$ definieren wir

$$\hom(Y,Z) = kC(Y,Z)\ ,$$

wobei $C(Y,Z)$ wie immer die kompakt-offene Topologie aus Definition 1.59 trage.

Zu jeder Abbildung $f\colon X\times Y\to Z$ von Mengen existiert genau eine Abbildung $g\colon X\to \mathrm{Hom}(Y,Z)$, so dass $f(x,y) = g(x)(y)$ für alle $x\in X$ und alle $y\in Y$. Diese Bijektion $\mathrm{Hom}(X\times Y, Z)\cong \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Hom}(Y,Z))$ ist natürlich im Sinne von Bemerkung 4.2. Zu zeigen ist, dass $f\colon k(X\times Y)\to Z$ genau dann stetig ist, wenn $g(x)\colon Y\to Z$ für alle $x$ stetig ist und $g\colon X\to kC(Y,Z)$ ebenfalls stetig ist.

Sei $f\colon k(X\times Y)\to Z$ stetig, dann ist für alle $x$ die Abbildung $\iota_x\colon Y\to\{x\}\times Y$ stetig, und somit auch $g(x) = f\circ\iota_x$. Um zu zeigen, dass $g$ stetig ist, betrachten wir eine Testabbildung $h\colon K\to X$ mit $K$ kompakt. Es sei $L\subset Y$ kompakt mit Einbettungsabbildung $\iota\colon L\to Y$ und $U\subset Z$ offen, dann ist zu zeigen, dass $h^{-1}g^{-1}S_{L,U}$ in $K$ offen ist. Dazu sei

$$\begin{aligned} p\in h^{-1}g^{-1}S_{L,U} &= \big\{\, q\in K \;\big|\; f\big(h(q), \iota(\ell)\big)\in U \text{ für alle } \ell\in L\,\big\} \\ \text{und}\qquad V &= \big(f\circ(h\times\iota)\big)^{-1}(U)\subset K\times L\ . \end{aligned}$$

Da $f$ stetig ist, ist $f\circ(h\times\iota)\colon K\times L\to Z$ ebenfalls stetig, also ist $V$ offen. Da $h(p)\times L\subset V$ und $L$ kompakt ist, gibt es eine offene Teilmenge $W\subset K$ mit $W\times L\subset V$. Es folgt $p\in W\subset h^{-1}g^{-1}S_{L,U}$, also ist $h^{-1}g^{-1}S_{L,U}$ offen, und $g\circ h$ und $g$ sind stetig.

Sei jetzt $g\colon X\to kC(Y,Z)$ stetig, dann reicht es zu zeigen, dass für alle Kompakta $K$ und alle $h\colon K\to X\times Y$ die Abbildung $f\circ h\colon K\to Z$ stetig ist. Sei dazu $U\subset Z$ offen und

$$V = (f\circ h)^{-1}(U) = \big\{\, p\in K \;\big|\; g(h_1(p))(h_2(p))\in U\,\big\}\ .$$

Sei $p\in V$. Da $g(h_1(p))\colon Y\to Z$ und $h_2\colon K\to Y$ stetig sind, existiert eine Umgebung $L\subset K$ von $p$ mit $L\subset (g(h_1(p))\circ h_2)^{-1}(U)$. Da $K$ kompakt ist, dürfen wir annehmen, dass $L$ ebenfalls

kompakt ist. Dann ist auch $h_2(L)$ kompakt, und $g(h_1(p))$ liegt in der Subbasis-Menge $S_{h_2(L),U}$ der kompakt offenen Topologie, siehe Definition 1.57. Aber dann bildet $h_1$ eine Umgebung $W$ von $x$ nach $S_{h_2(L),U}$ ab, also besitzt $x$ eine Umgebung $W \cap L \subset V$, somit ist $V$ offen, und $f$ ist stetig. $\square$

An dieser Stelle können wir endlich den Beweis von Proposition 4.21 nachholen. Dazu bedarf es einiger Vorarbeit. Wir nennen eine Abbildung $q\colon X \to Y$ eine *Quotientenabbildung,* wenn $q$ stetig und surjektiv ist und $Y$ die Quotiententopologie aus Definition 1.71 trägt. Äquivalent dazu erfüllt $f$ die charakteristische Eigenschaft aus Satz 1.72.

4.32. Proposition. *Es sei $q\colon X \to Y$ eine Quotientenabbildung in $k\mathcal{T}op$ und $Z$ kompakt erzeugt. Dann ist auch $q \times \mathrm{id}_Z\colon k(X \times Z) \to k(Y \times Z)$ eine Quotientenabbildung.*

Beweis. Die Abbildung $q \times \mathrm{id}_Z$ ist stetig. Sei jetzt $W$ kompakt erzeugt und $g\colon k(Y \times Z) \to W$ eine beliebige Abbildung. Zu zeigen ist, dass $g$ stetig ist, falls $g \circ (q \times \mathrm{id}_Z)$ stetig ist. Zu $g$ und $g \circ (q \times \mathrm{id}_Z)$ erhalten wir adjungierte Abbildungen $h\colon Y \to kC(Z,W)$ und $h \circ q\colon X \to kC(Z,W)$ von Mengen wie im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
g \in \mathrm{Hom}\big(k(Y \times Z), W\big) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cdot \circ (q \otimes \mathrm{id}_Z)"'] & \mathrm{Hom}\big(Y, kC(Z,W)\big) \ni h \arrow[d, "\cdot \circ q"] \\
g \circ (q \otimes \mathrm{id}_Z) \in \mathrm{Hom}\big(k(X \times Z), W\big) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}\big(X, kC(Z,W)\big) \ni h \circ q\,.
\end{tikzcd}$$

Wenn $g \circ (q \times \mathrm{id}_Z)$ stetig ist, ist auch $h \circ q$ stetig, da $k\mathcal{T}op$ abgeschlossen ist. Da $q$ eine Quotientenabbildung ist, ist $h$ stetig. Aber dann ist auch $g$ stetig. $\square$

Beweis von Proposition 4.21. Es sei $\sim$ eine Äquivalenrelation auf dem kompakt erzeugten Raum $X$ und $q\colon X \to Y = X/{\sim}$ die Quotientenabbildung. Wie im Beweis der Folgerung 4.19 schließen wir, dass $Y$ ebenfalls kompakt erzeugt ist.

Nach Proposition 4.32 erhalten wir eine Quotientenabbildung

$$q \times q\colon k(X \times X) \xrightarrow{q \times \mathrm{id}_X} k(X/{\sim} \times X) \xrightarrow{\mathrm{id}_{X/\sim} \times q} k(X/{\sim} \times X/{\sim})\,.$$

Nach Proposition 4.20 ist $X/{\sim}$ genau dann schwach Hausdorff, wenn $\Delta(X/{\sim}) \subset k(X/{\sim} \times X/{\sim})$ abgeschlossen ist. Aber das gilt genau dann, wenn $R_\sim = (q \times q)^{-1}(\Delta(X/{\sim})) \subset k(X \times X)$ abgeschlossen ist. $\square$

Somit sind jetzt alle Aussagen in Abschnitt 4.b vollständig bewiesen. Es bleibt zu zeigen, dass auch $kw\mathcal{H}$ und $kw\mathcal{H}_+$ abgeschlossen sind.

4.33. Proposition. *Es seien $Y$, $Z$ kompakt erzeugt und $Z$ sei schwach Hausdorff. Dann ist auch $kC(Y,Z)$ schwach Hausdorff.*

Beweis. Zu zeigen ist die Abgeschlossenheit von $\operatorname{im} F \subset kC(Y,Z)$ für alle Kompakta $K$ und alle $F\colon K \to kC(Y,Z)$. Für alle Kompakta $L$ und alle Testabbildungen $G\colon L \to kC(Y,Z)$ muss also $G^{-1}(\operatorname{im} F) \subset L$ abgeschlossen sein. Betrachte jetzt die zugehörigen Abbildungen $f\colon k(K \times Y) \to Z$ und $g\colon k(L \times Y) \to Z$ sowie $\iota_y\colon k(K \times L) \to k(K \times Y \times L \times Y)$ mit $\iota_y(k,\ell) = (k,y,\ell,y)$, dann gilt

$$\begin{aligned}
G^{-1}(\operatorname{im} F) &= \big\{\, \ell \in L \;\big|\; \text{es gibt } k \in K \text{ mit } f(k,y) = g(\ell,y) \in Z \text{ für alle } y \in Y \,\big\} \\
&= \pi_L \bigcap_{y \in Y} \iota_y^{-1}(f \times g)^{-1}(\Delta Z)\,.
\end{aligned}$$

Da $Z$ schwach Hausdorff ist, ist $\Delta Z \subset k(Z \times Z)$ abgeschlossen, also auch $\iota_y^{-1}(f \times g)^{-1}(\Delta Z) \subset k(K \times L) = K \times L$. Somit ist $G^{-1}(\operatorname{im} F)$ das Bild einer abgeschlossenen, mithin kompakten Teilmenge von $K \times L$, und somit selbst kompakt, also auch abgeschlossen in $L$, was zu zeigen war. $\square$

Wir vervollständigen jetzt die letzten zwei Zeilen der Tabelle in Beispiel 4.27.

4.34. Folgerung. *Die Kategorien* $\big(kw\mathcal{H}, k(\,\cdot\,\times\,\cdot\,), \mathrm{pt}\big)$ *und* $\big(kw\mathcal{H}_+, k(\,\cdot\,\wedge\,\cdot\,), S^0\big)$ *der unpunktierten und der punktierten kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume sind abgeschlossen und monoidal.* □

4.35. Bemerkung. Wie schon in Bemerkung 4.24 gesagt, werden wir im Folgenden oft — meist stillschweigend — in $kw\mathcal{H}$ arbeiten. Beispielsweise schreiben wir $X \times Y$ und $X \wedge Y$ anstelle von $k(X \times Y)$ und $k(X \wedge Y)$. Unter einer Einbettung verstehen wir eine injektive Abbildung, die ein Homöomorphismus auf das mit der kompakt erzeugten Unterraum-Topologie versehene Bild ist.

Für gut punktierte Räume $X$, $Y$ in $kw\mathcal{H}_+$ schreiben wir

$$Y^X = k\big\{\, f \in kC(X,Y) \;\big|\; f(x_0) = y_0 \,\big\} \subset kC(X,Y)\ .$$

Im nicht punktierten Fall sei $Y^{X_+} = kC(X,Y)$ auch dann, wenn $Y$ keinen Basispunkt besitzt. Wenn $Y = (Y, y_0)$ punktiert ist, haben $Y^X$ und $Y^{X_+}$ die konstante Abbildung auf $y_0$ als Basispunkt. Nach Definition bezeichnet $[X,Y]$ die Menge der punktierten Homotopieklassen von Abbildungen, also die Wegzusammenhangskomponenten von $Y^X$. Daher erhalten wir die punktierte Menge

$$[X,Y] = \pi_0(Y^X)\ .$$

Anstelle von punktierten Räumen, Paaren und punktierten Paaren würden wir vielleicht lieber nur gut punktierte Räume und Kofaserungen betrachten. Dabei meinen wir mit Kofaserungen nach wie vor Hurewicz-Kofaserungen, wobei wir Definition 3.55 im Sinne von Bemerkung 4.35 in $kw\mathcal{H}$ verstehen. Die Kategorie der gut punktierten Räume ist allerdings nicht abgeschlossen, da $Y^X$ im Allgemeinen nicht wieder gut punktiert ist. In der Tat gibt es auch andere Gründe, nicht nur gut punktierte Räume zu betrachten. Im Abschnitt 4.e über Modellkategorien kommen wir auf diese Frage noch einmal zurück.

Für den Begriff des Umgebungsdeformationsretraktes verweisen wir auf Proposition 3.59.

4.36. Proposition. *Sei $A \to X$ Kofaserung in $kw\mathcal{H}$, dann ist $A \subset X$ abgeschlossen und $A \to X$ ist eine Einbettung. Für ein Paar $(X,A)$ in $kw\mathcal{H}$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *$(X,A)$ ist ein Umgebungsdeformationsretrakt;*
(2) *$X \times \{0\} \cup A \times I$ ist starker Deformationsretrakt von $X \times I$;*
(3) *$X \times \{0\} \cup A \times I$ ist Retrakt von $X \times I$;*
(4) *$(X,A)$ ist eine Kofaserung.*

Beweis. Man zeigt wie in Bemerkung 3.58, dass $i\colon A \to X$ genau dann eine Kofaserung ist, wenn $Zi \subset X \times I$ ein Retrakt ist. Wie in Übung 3.125 folgt, dass $i$ eine Einbettung ist, und mit einem ähnlichen Trick wie in Übung 3.126 sehen wir in Übung 4.80, dass $\mathrm{im}(i) \subset X$ abgeschlossen ist. Die Äquivalenz der Punkte (1)–(4) folgt wie im Beweis von Proposition 3.59. □

## 4.d. CW-Komplexe und der Satz von Whitehead

Wir erinnern uns an die Konstruktion von CW-Komplexen in Abschnitt 1.i vor Definition 1.80. Wir modifizieren diese Konstruktion wie folgt. Wie immer sei $S^{n-1} = \partial D^n$ und $B^n = \mathring{D}^n$.

4.37. Definition. Ein Paar $(X,A)$ in $\mathcal{T}op$ heißt *CW-Paar,* wenn es Mengen $J^n$, Räume $X^{n-1}$ und *Verklebeabbildungen* $\varphi^n_j\colon S^{n-1} \to X^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $j \in J^n$ gibt, so dass

$$X^{-1} = A\ , \tag{1}$$

$$X^n = \Big(\coprod_{j \in J^n} D^n\Big) \cup_{\varphi^n} X^{n-1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\ , \tag{2}$$

wobei $\varphi^n\colon \coprod_{j\in J^n} S^{n-1} \to X^{n-1}$ von den $\varphi_j^n$ induziert wird, und

$$X = \operatorname{colim} X^n \qquad \text{in } \mathcal{T}op\ . \tag{3}$$

Ein *punktierter CW-Komplex* $(X, x_0)$ ist ein CW-Paar der Form $(X, \{x_0\})$.

Die Räume $X^n$ heißen *$n$-Gerüste* oder *$n$-Skelette,* die induzierten Abbildungen

$$\Phi_j^n\colon D^n \to X^n \hookrightarrow X \qquad \text{mit} \qquad \Phi_j^n|_{S^{n-1}} = \varphi_j^n$$

heißen *charakteristische Abbildungen.* Man nennt $e_j^n = \Phi_j^n(B^n)$ eine *offene* und $\bar{e}_j^n = \Phi_j^n(D^n)$ eine *abgeschlossene $n$-Zelle* von $X$.

Kolimiten sind Quotienten disjunkter Vereinigungen. Somit ist eine Menge $U \subset X$ wie in Definition 1.80 genau dann offen, wenn $U \cap A$ und $(\Phi_j^n)^{-1}(U) \subset D^n$ für alle $n \geq 0$ und alle $j \in J^n$ offen sind. Für einen beliebigen Raum $Y$ ist eine Abbildung $f\colon X \to Y$ wegen der universellen Eigenschaften des Pushouts und des Kolimes genau dann stetig, wenn $f|_A$ und alle $f \circ \Phi_j^n\colon D^n \to Y$ stetig sind.

4.38. Proposition. *Es sei $(X, A)$ ein CW-Paar und $K$ kompakt. Dann trifft für jede stetige Abbildung $f\colon K \to X$ das Bild* $\operatorname{im} f$ *nur endlich viele Zellen.*

Insbesondere ist jede Zelle $e_j^n$ an nur endlich viele Zellen in $X^{n-1}$ angeklebt, da $S^{n-1}$ kompakt ist. Außerdem ist jede kompakte Teilmenge von $X$ in einem der Gerüste $X^n$ enthalten.

Beweis. Für alle $n$ sei

$$J'^n = \left\{\, j \in J^n \;\middle|\; e_j^n \cap \operatorname{im} f \neq \emptyset \,\right\}\ ,$$

und für alle $j \in J'^n$ wählen wir $x_j^n \in e_j^n \cap \operatorname{im} f$. Per Induktion über $n$ ist die Menge

$$P = \left\{\, x_j^n \;\middle|\; j \in J'^n \,\right\} \subset \operatorname{im} f \cap X^n$$

in $X^n$ abgeschlossen und diskret. Dazu konstruieren wir induktiv disjunkte Umgebungen $U_{j,n}^m$ der $x_j^m$ in $X^n$ für alle $m \leq n$. Für $m < n$ reicht es dazu,

$$(\Phi_i^n)^{-1}(U_{j,n}^m) = \left\{\, p \in D^n \;\middle|\; |p| > \frac{2}{3} \text{ und } \frac{p}{|p|} \in (\varphi_i^n)^{-1}(U_{j,n-1}^m) \,\right\}$$

anzugeben, sowie $(\Phi_i^n)^{-1}(U_{j,n}^n) = B_{\frac{1}{3}}(0)$ falls $i = j$ und $\emptyset$ sonst.

Dann ist die obige Menge $P$ als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge wieder kompakt, und da sie diskret ist, endlich. Also trifft $\operatorname{im} f$ nur Zellen bis zu einer endlichen Dimension $n_0$, und in jeder Dimension nur endlich viele. □

4.39. Folgerung. *Sei $(X, A)$ ein CW-Paar mit $A$ aus $kw\mathcal{H}$, dann ist $(X, A)$ ein Paar in $kw\mathcal{H}$.*

Insbesondere stimmt der Kolimes in Definition 4.37 (3) nach Folgerung 4.23 mit dem Kolimes in $kw\mathcal{H}$ überein.

Beweis. Es sei $A = X^{-1}$ in $kw\mathcal{H}$. Da $S^{n-1} \subset D^n$ abgeschlossen und $\varphi_j^n\colon S^{n-1} \to X^{n-1}$ stetig ist, ist nach Bemerkung 4.25 (2) induktiv auch $X^n$ in $kw\mathcal{H}$ für alle $n$.

Nach Folgerung 4.19 ist der Kolimes $X$ der $X^n$ zumindest kompakt erzeugt. Um zu zeigen, dass $X$ auch schwach Hausdorff ist, sei $K$ kompakt und $f\colon K \to X$ stetig. Da $\operatorname{im} f \subset X^n$ für ein $n$, ist $\operatorname{im} f$ in $X^n$ und damit auch in $X$ abgeschlossen. Also ist $X$ auch schwach Hausdorff. □

Da $A$ nicht normal sein muss, können wir nicht erwarten, dass $X$ wie in Satz 1.84 normal ist. Als Ersatz dafür reicht für manche Zwecke das folgende Resultat.

4.40. Proposition. *Es sei $(X, A)$ ein CW-Paar, dann sind für alle $m \leq n$ die Paare $(X, X^n)$, $(X^n, X^m)$ und $(X^m, A)$ abgeschlossene Kofaserungen.*

Beweis. Da $(D^n, S^{n-1})$ eine abgeschlossene Kofaserung ist, ist auch $\left(\coprod_{j\in J^n} D^n, \coprod_{j\in J^n} S^{n-1}\right)$ eine abgeschlossene Kofaserung. Aufgrund von Proposition 3.64 und Definition 4.37 (2) ist dann auch

$$(X^n, X^{n-1}) = \left(\left(\coprod_{j\in J^n} D^n\right) \cup_{\varphi^n} X^{n-1}, X^{n-1}\right)$$

eine abgeschlossene Kofaserung. Da $X^{-1} = A$, sind wegen Übung 3.124 (1) alle Paare $(X^n, X^m)$ und $(X^m, A)$ abgeschlossene Kofaserungen.

Sei jetzt $n \geq -1$, sei $Y$ ein weiterer Raum, und seien $f\colon X \to Y$ und $h_n\colon X^n \times I \to Y$ mit $f|_{X^n} = h_n|_{X^n\times\{0\}}$ wie in Definition 3.55 gegeben. Konstruiere induktiv $h_k\colon X^k \to Y^{I_+}$ mit der Homotopieausdehnungseigenschaft, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & & & C(I,Y) \arrow[d, "\mathrm{ev}_0"] \\
X^n \arrow[r, hook] \arrow[urrrr, "h_n"] & X^{n+1} \arrow[r, hook] \arrow[urrr, dashed, "h_{n+1}"] & \cdots \arrow[r] & X \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

kommutiert. Aufgrund der Kolimes-Eigenschaft in $\mathcal{T}op$ existiert auch $h$. Da $I$ lokalkompakt ist, entspricht $h$ nach Satz 1.60 (3) der gesuchten Homotopie $X \times I \to Y$. Da $X$ ein $kw\mathcal{H}$-Raum ist, ist $X^n \subset X$ wie in den Übungen 3.126 und 4.80 abgeschlossen. □

Wir erinnern uns an Unterkomplexe von CW-Komplexen aus Definition 1.85. Analog definieren wir einen relativen Unterkomplex $Y$ von $(X, A)$ als einen abgeschlossenen Unterraum $Y \subset X$ mit $A \subset Y$, der sich als Vereinigung von $A$ und offenen Zellen von $X$ schreiben lässt. Das nächste Resultat ist Übung 4.89.

4.41. Folgerung. *Es sei $Y$ ein Unterkomplex von $(X, A)$, dann ist $(X, Y)$ eine Kofaserung.*

Wir verallgemeinern als nächstes Definition 1.88.

4.42. Definition. Es seien $(X, A)$ und $(Y, B)$ CW-Paare. Eine Abbildung $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ von Paaren heißt *zellulär,* wenn $\mathrm{im}(f|_{X^n}) \subset Y^n$ für alle $n \geq -1$ gilt. Die CW-Paare mit den zellulären Abbildungen bilden eine Kategorie $\mathcal{CWP}air$. Analog definieren wir Kategorien $\mathcal{CW}$ und $\mathcal{CW}_+$ der nicht-punktierten und der punktierten CW-Komplexe mit zellulären Abbildungen.

4.43. Satz (Zelluläre Approximation). *Jede Abbildung $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ von CW-Paaren ist homotop zu einer zellulären Abbildung. Wenn $f$ auf einem Unterkomplex $Z$ von $(X, A)$ bereits zellulär ist, können zelluläre Abbildung und Homotopie relativ zu $Z$ gewählt werden.*

Beweis. Wir konstruieren induktiv Homotopien $h^n\colon X^n \times I \to Y$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
h^{-1}(\,\cdot\,, t) &= f|_A && \text{für alle } t \in I\,,\\
h^n(\,\cdot\,, 0) &= f|_{X^n} && \text{für alle } n\,,\\
h^n|_{X^{n-1}\times I} &= h^{n-1} && \text{für alle } n\,,\\
\text{und}\qquad h^n(\,\cdot\,, 1)\colon X^n &\to Y^n && \text{für alle } n\,.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Exponentialgesetzes fassen wir die $h^n$ als Abbildungen $X^n \to Y^I$ auf und erhalten mit der universellen Eigenschaft des Kolimes die gesuchte Abbildung $h\colon X \to Y^I$, oder äquivalent $h\colon X \times I \to Y$.

Es sei also $n \geq 0$, und die Homotopie $h^{n-1}$ sei bereits konstruiert. Dann setzen wir sie $n$-Zelle für $n$-Zelle von $X$ auf $X^n \times I$ fort. Sei $e^n_j$ mit $j \in J^n$ eine $n$-Zelle von $X$. Um $h^{n-1}$ auf $e^n_j \times I$ wie

gewünscht fortzusetzen, reicht es, eine Abbildung $g_j^n\colon D^n \times I \to Y$ anzugeben, so dass

$$\begin{aligned} & g_j^n|_{D^n\times\{0\}} = f \circ \Phi_j^n \ , \\ & g_j^n|_{S^{n-1}\times I} = h^{n-1} \circ (\varphi_j^n \times \mathrm{id}_I) \ , \\ \text{und} \qquad & g_j^n|_{D^n\times\{1\}}\colon D^n \times I \longrightarrow Y^n \ . \end{aligned}$$

Da

$$\big(D^n \times I, (D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I)\big) \cong \big(D^n \times I, D^n \times \{0\}\big) \ ,$$

reicht es zu zeigen, dass jede Abbildung $(D^n, S^{n-1}) \to (Y, Y^{n-1})$ als Abbildung von Paaren homotop ist zu einer Abbildung nach $(Y^n, Y^{n-1})$.

Sei also eine Abbildung $g\colon (D^n, S^{n-1}) \to (Y, Y^{n-1})$ gegeben. Da $D^n$ kompakt ist, trifft $g$ nach Proposition 4.38 nur endlich viele offene Zellen von $Y$. Sei $m$ die maximale Dimension einer Zelle in $Y$, die getroffen wird; ohne Einschränkung gelte $m > n$. Es seien also $c_1^m, \ldots, c_k^m \subset Y^m$ die $m$-Zellen von $Y$, die noch getroffen werden, und $\psi_k^m$ sei die Verklebeabbildung von $c_k^m$. Betrachte $Y' = Y^{m-1} \cup c_1^m \cup \cdots \cup c_{k-1}^m$ und schreibe

$$Y' \cup c_k^m = \big((D^m \setminus \{0\}) \cup_{\psi_k^m} Y'\big) \cup_{B^m\setminus\{0\}} B^m \ .$$

Da $D^n$ zusammenhängend ist, trifft $g$ nur diejenigen Wegzusammenhangskomponenten von $Y$, die Punkte im Bild von $\psi_k^m$ enthalten (falls $m \geq 2$, ist das nur eine). Wir dürfen daher annehmen, dass $Y'$ keine weiteren Wegzusammenhangskomponenten enthält. Dann ist $((D^m\setminus\{0\})\cup_{\psi_k^m} Y', B^m\setminus\{0\})$ ein 0-zusammenhängendes und $(B^m, B^m \setminus \{0\})$ ein $(m-1)$-zusammenhängendes Paar. Nach dem Ausschneidungssatz 3.38 und Homotopieinvarianz ist die Abbildung

$$0 = \pi_n(B^m, B^m \setminus \{0\}) \twoheadrightarrow \pi_n\big(Y' \cup c_k^m, (D^m \setminus \{0\}) \cup_{\psi_k^m} Y'\big) \cong \pi_n\big(Y' \cup c_k^m, Y'\big)$$

surjektiv, da $n \leq m-1$. Wir können also $g$ relativ zu $S^{n-1}$ zu einer Abbildung homotopieren, die $c_k^m$ nicht trifft. Genauso verfahren wir mit den Zellen $c_{k-1}^m, \ldots, c_1^m$ und erhalten eine Abbildung mit Bild in $Y^{m-1}$. Diesen Prozess setzen wir fort, bis wir eine Homotopie von $g$ zu einer Abbildung mit Bild in $(Y^n, Y^{n-1})$ gefunden haben. □

Später können wir den letzten Schritt im Beweis leicht mit der nächsten Folgerung begründen. Aber da die Folgerung zelluläre Approximation benutzt, brauchten wir oben einen anderen Beweis.

4.44. Folgerung. *Es sei $(X, A)$ ein CW-Paar mit $X = \operatorname{colim} X^n$ wie oben.*

(1) *Dann sind die Inklusionen $\iota\colon X^n \to X$ und $\iota\colon (X^n, A) \to (X, A)$ jeweils $n$-zusammenhängende Abbildungen.*
(2) *Wenn $J^{m+1} = \cdots = J^n = \emptyset$, ist $(X, X^m)$ ein $n$-zusammenhängendes Paar.*

Beweis. Wir schreiben $S^k$ als CW-Komplex $* \cup_{S^{k-1}} D^k$ und wenden zelluläre Approximation an. □

4.45. Definition. Eine Abbildung $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ zwischen Paaren heißt *schwache Homotopieäquivalenz,* wenn $\pi_k f\colon \pi_k(X, A, x_0) \to \pi_k(Y, B, f(x_0))$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $x_0 \in A$ ein Isomorphismus ist.

Zwei Paare $(X, A)$ und $(Y, B)$ heißen *schwach homotopieäquivalent,* wenn es $n \geq 0$, Paare $(X_i, A_i)$ für $i = 0, \ldots, n$ mit $X = X_0$ und $Y = X_n$ und $(Z_i, C_i)$ für $i = 0, \ldots, n-1$ und schwache Homotopieäquivalenzen $f_i\colon (X_i, A_i) \to (Z_i, C_i)$ und $g_i\colon (X_{i+1}, A_{i+1}) \to (Z_i, C_i)$ für $0 \leq i < n$ gibt.

Analog definieren wir schwache Homotopieäquivalenz für Räume.

Somit bedeutet „schwache Homotopieäquivalenz“ das gleiche wie „$n$-zusammenhängende Abbildung“ für alle $n \geq 0$.

Offensichtlich ist jede Homotopieäquivalenz eine schwache Homotopieäquivalenz, die Umkehrung muss jedoch nicht gelten, siehe Beispiel 4.52. Um tatsächlich eine Äquivalenzrelation zu erhalten, haben wir Symmetrie und Transitivität durch die Einführung von Zwischenschritten wie im folgenden Diagramm sichergestellt:

$$(X,A) = (X_0,A_0) \xrightarrow{f_0} (Z_0,C_0) \xleftarrow{g_0} (X_1,A_1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (Z_{n-1},C_{n-1}) \xleftarrow{g_{n-1}} (X_n,A_n) = (Y,B)\ .$$

In Übung 4.90 sehen wir, wie man diese Situation mit Hilfe von Satz 4.51 unten etwas vereinfachen kann.

4.46. Satz (Whitehead). *Jede schwache Homotopieäquivalenz $f\colon (Y,A) \to (X,A)$ von CW-Paaren relativ zu $A$ ist eine Homotopieäquivalenz. Wenn die Inklusion $\iota\colon Y \to X$ eines relativen Unterkomplexes $(Y,A)$ von $(X,A)$ eine schwache Homotopieäquivalenz ist, dann ist $Y$ ein Deformationsretrakt von $X$.*

In der ersten Aussage dürfen wir nicht von Abbildungen $(Y,B) \to (X,A)$ sprechen, denn bereits für Abbildungen $f\colon (B,B) \to (A,A)$ kann sie falsch sein. Um zu zeigen, dass schwach homotopieäquivalente CW-Komplexe homotopieäquivalent sind, müssen wir später noch sicherstellen, dass die Räume $X_i$ und $Z_i$ in Definition 4.45 alle als CW-Komplexe gewählt werden können.

Beweis. Es sei $f\colon (Y,A) \to (X,A)$ eine stetige Abbildung relativ zu $A$, die wir nach Satz 4.43 als zellulär voraussetzen dürfen. Es sei $Zf$ der Abbildungszylinder aus Definition 3.57. Da $f|_A = \mathrm{id}_A$, enthält $Zf$ den Abbildungszylinder $A \times I$ von $\mathrm{id}_A$ als Unterraum. Wir definieren den *relativen Abbildungszylinder* $Z_Af$ als Pushout

$$\begin{tikzcd} Zf \arrow[r] & Z_Af \\ A \times I \arrow[u, hook] \arrow[r] & A \arrow[u, hook] \end{tikzcd}\ ,$$

induziert von der Projektion $A \times I \to A$. Wir betrachten $(Z_Af, A)$ als CW-Paar mit Unterpaar $(X,A)$, so dass $(Z_Af, X)$ zu jeder $m$-Zelle $c_k^m$ von $Y$ eine $m$-Zelle $c_k^m \times \{0\}$ und eine $(m+1)$-Zelle $c_k^m \times (0,1) \subset Z_Af$ enthält. Man beachte, dass der Rand der letzteren im $m$-Gerüst von $Z_Af$ liegt. Die Inklusion $\iota\colon Y \to Z_Af$ mit $\iota(y) = (y,0)$ und die Projektion $p\colon Z_Af \to X$ mit $[(y,t)] \mapsto [f(y)]$ sind dann ebenfalls zellulär.

Wir erhalten $f$ als zusammengesetzte Abbildung

$$Y \xhookrightarrow{\iota} Z_Af \xrightarrow{p} X\ .$$

Da $p$ eine Deformationsretraktion ist, ist mit $f$ auch $\iota$ eine schwache Homotopieäquivalenz. Aus der zweiten Behauptung folgt dann, dass $Y$ ein Deformationsretrakt von $Z_Af$ ist, insbesondere ist $f$ dann auch eine Homotopieäquivalenz.

Zur zweiten Behauptung konstruieren wir induktiv Homotopien $h^n\colon (X^n \cup Y) \times I \to X$ relativ zu $Y$ ähnlich wie im Beweis der zellulären Approximation 4.43, so dass $h^n(\,\cdot\,,0) = \mathrm{id}$, $\mathrm{im}(h^n(\,\cdot\,,1)) \subset Y$, und $h^n|_{(X^{n-1}\cup Y)\times I} = h^{n-1}$, wobei $h^{-1} = \pi_Y$. Wie oben ergibt sich als Vereinigung die gesuchte Deformation $h\colon X \times I \to X$.

Im Falle $n = 0$ besagt unsere Voraussetzung, dass jede Zusammenhangskomponente von $X$ einen Punkt aus $Y$ enthält, und wir wählen $h^0(x,\,\cdot\,)$ als Pfad in $X$ von $x$ nach $Y^0$ für alle $x \in X^0 \setminus Y^0$.

Wir nehmen jetzt an, dass $n \geq 1$, und dass die Homotopie $h^{n-1} = h|_{(X^n\cup Y)\times I}$ bereits konstruiert ist. Dann setzen wir sie $n$-Zelle für $n$-Zelle von $X \setminus Y$ zu $h^n$ fort. Ähnlich wie im obigen Beweis recht es dafür, eine Abbildung $g\colon (D^n,S^{n-1}) \to (X, X^{n-1} \cup Y)$ als Abbildungen von Paaren zu einer Abbildung $(D^n,S^{n-1}) \to (X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y)$ zu homotopieren.

Da die Inklusion eine schwache Homotopieäquivalenz ist, schließen wir aus der langen exakten Homotopiesequenz

$$\cdots \longleftarrow \pi_{n-1}(X,A) \xleftarrow{\cong} \pi_{n-1}(Y,A) \xleftarrow{\partial} \pi_n(X,Y) \longleftarrow \pi_n(X,A) \xleftarrow{\cong} \pi_n(Y,A) \longleftarrow \cdots$$

des Tripels $(X,Y,A)$ aus Übung 3.110, dass $\pi_n(X,Y)=0$, und die gesuchte Homotopie existiert. $\square$

4.47. Bemerkung. Für zwei schwach homotopieäquivalente Räume $X$ und $Y$ gibt es nach Definition 4.45 Isomorphismen $\pi_k(X) \cong \pi_k(Y)$ für alle $k \geq 0$; diese werden induziert von den Abbildungen $f_i$ und $g_i$. Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen nicht richtig. Dazu betrachten wir beispielsweise die Räume

$$X = S^2 \times \mathbb{R}P^3 \qquad \text{und} \qquad Y = \mathbb{R}P^2 \times S^3 \,.$$

Beide Räume haben als universelle Überlagerung $S^2 \times S^3$, und die isomorphe Fundamentalgruppen $\mathbb{Z}/2$. Dennoch werden wir später sehen, dass sie nicht homotopieäquivalent sind.

Als nächstes versuchen wir, einen beliebigen topologischen Raum durch einen CW-Komplex zu ersetzen. Bis auf schwache Homotopieäquivalenz ist das möglich. Für spätere Anwendungen formulieren wir den entsprechenden Begriff noch etwas allgemeiner.

4.48. Definition. Ein *$n$-zusammenhängendes CW-Modell* für ein Paar $(Y,A)$ ist ein $n$-zusammenhängendes CW-Paar $(X,A)$ zusammen mit einer Abbildung $f\colon (X,A) \to (Y,A)$ relativ zu $A$, so dass $f_*\colon \pi_n(X,a) \to \pi_n(Y,a)$ injektiv ist und $f_*\colon \pi_k(X,a) \to \pi_k(Y,a)$ ein Isomorphismus für alle $k > n$ und alle $A \in A$.

Eine *CW-Approximation* eines Paares $(Y,A)$ besteht aus einem CW-Paar $(X,A)$ und einer Abbildung $f\colon (X,A) \to (Y,A)$ relativ zu $A$, so dass $f_*\colon \pi_k(X,x_0) \to \pi_k(Y,f(x_0))$ für alle $k \geq 0$ und alle $x_0 \in X$ ein Isomorphismus ist.

Eine CW-Approximation ist somit ein „$(-1)$-zusammenhängendes CW-Modell“. Falls $n \geq 1$, faktorisiert die Abbildung $\iota_*\colon \pi_n(A,a) \to \pi_n(Y,a)$ nach Voraussetzung als

$$\iota_*\colon \pi_n(A,a) \twoheadrightarrow \pi_n(X,a) \xhookrightarrow{f_*} \pi_n(Y,a) \,.$$

Aus dem Homomorphiesatz folgt, dass $\pi_n(X,a)$ in natürlicher Weise isomorph ist zu $\operatorname{im}\iota_*$. Das gleiche gilt sogar für $n=0$.

4.49. Bemerkung. Wir betrachten einen punktierten CW-Komplex $(X,x_0)$, somit ist $A = \{x_0\}$.

(1) Ein 0-zusammenhängendes CW-Modell von $X$ ist beispielsweise die Zusammenhangskomponente $X_0$ von $X$, die $x_0$ enthält.
(2) Ein 1-zusammenhängendes CW-Modell von $X$ ist beispielsweise die universelle Überlagerung $p\colon \tilde{X}_0 \to X_0$, denn $\pi_1(\tilde{X}_0,\tilde{x}_0) = \pi_0(\tilde{X}_0,\tilde{x}_0) = 0$ und $p_*\colon \pi_k(\tilde{X}_0,\tilde{x}_0) \cong \pi_k(X_0,x_0) \cong \pi_k(X,x_0)$ nach Folgerung 3.26. Wir überlegen uns dazu, dass die universelle Überlagerung eines CW-Komplexes wieder eine natürliche CW-Struktur trägt.

Daher nennt man in diesem Spezialfall ein $n$-zusammenhängendes CW-Modell eines punktierten CW-Komplexes auch eine „$n$-zusammenhängende Überlagerung“.

4.50. Beispiel. Es folgen einige konkrete Beispiele.

(1) Da $\pi_k(S^1) = 0$ für alle $k \geq 2$ nach Beispiel 3.27, ist $\{*\} \to S^1$ ein $n$-zusammenhängendes CW-Modell für alle $n \geq 1$.
(2) Nach Beispiel 3.33 liefert die Hopf-Faserung $p\colon S^3 \to S^2$ Isomorphismen $p_*\colon \pi_k(S^3) \to \pi_k(S^2)$ für alle $k \geq 3$. Also ist die Hopf-Faserung ein 2-zusammenhängendes CW-Modell für $S^2$.

Weitere Beispiele betrachten wir in Übung 4.91.

4.51. Satz (CW-Approximation). *Zu jedem punktierten Paar $(Y, A)$ und jedem $n \geq 0$ existiert ein $n$-zusammenhängendes CW-Modell. Zu jedem Paar $(Y, A)$ existiert eine CW-Approximation.*

*Sei $f_1 \colon (X, A) \to (Y, A)$ ein $n$-zusammenhängendes und $f_2 \colon (Z, B) \to (W, B)$ ein $m$-zusammenhängendes CW-Modell mit $n \geq m$, wobei wir CW-Approximationen wie $(-1)$-zusammenhängende CW-Modelle behandeln. Sei $g \colon (Y, A) \to (W, B)$ eine Abbildung, dann existiert eine zelluläre Abbildung $\ell \colon (X, A) \to (Z, B)$, so dass $f_2 \circ \ell$ relativ $A$ zu $g \circ f_1$ homotop ist. Je zwei solche Abbildungen sind relativ $A$ homotop.*

Beweis. Für die erste Behauptung behandeln wir jede Wegzusammenhangskomponente von $Y$ einzeln und nehmen daher ab jetzt an, dass $Y$ wegzusammenhängend ist. Falls $A = \emptyset$, ist $X = \emptyset$ das eindeutige $n$-zusammenhängende CW-Modell. Anderfalls fixieren wir einen Basispunkt in $x_0 \in A$.

Dann konstruieren wir ein CW-Paar $(X, A)$ und eine Abbildung $f \colon (X, A) \to (Y, A)$ relativ zu $A$. Wir starten mit $X^n = A$ und $f^n = f|_{X^n} = f|_A$. Dann folgt mit Folgerung 4.44 (2) bereits, dass $(X, A)$ ein $n$-zusammenhängendes Paar ist. Für alle $k > n$ konstruieren wir induktiv ein $k$-Skelett $X^k$ mit einer Abbildung $f^k \colon X^k \to Y$, so dass $f^k|_{X^{k-1}} = f^{k-1}$ und

$$\begin{aligned} & f^k_* \colon \pi_n(X^k) \hookrightarrow \pi_n(Y) && \text{injektiv, falls } n \geq 0, \\ & f^k_* \colon \pi_m(X^k) \xrightarrow{\cong} \pi_m(Y) && \text{ein Isomorphismus für alle } m \text{ mit } n < m < k, \\ \text{und} \quad & f^k_* \colon \pi_k(X^k) \twoheadrightarrow \pi_k(Y) && \text{surjektiv ist.} \end{aligned}$$

Sei jetzt $k > n$, und seien $X^{k-1}$ und $f^{k-1} \colon X^{k-1} \to Y$ bereits konstruiert, so dass die obigen Bedingungen erfüllt sind. Da die Inklusion $X^{k-1} \hookrightarrow X^k$ nach Folgerung 4.44 (1) eine $(k-1)$-zusammenhängende Abbildung ist und $f^{k-1}_*$ über $f^k_*$ faktorisiert, erfüllt $f^k_*$ die obigen Eigenschaften für alle $m < k-1$, und $f^k_* \colon \pi_{k-1}(X^k) \to \pi_{k-1}(Y)$ ist automatisch surjektiv. Wenn alle $f^k \colon X^k \to Y$ konstruiert sind, setzen wir schließlich

$$X = \operatorname{colim} X^k \qquad \text{und} \qquad f = \operatorname{colim} f^k \colon X \longrightarrow Y$$

und erhalten wieder wegen Folgerung 4.44 eine $n$-zusammenhängende CW-Approximation.

Die Konstruktion von $X^k$ und $f^k$ erfolgt in zwei Schritten. Falls $k = 1$, sei $J^1_1$ die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von $X^0$, die den Basispunkt $x_0$ nicht enthalten. Falls $k \geq 2$, wählen wir eine Erzeugermenge $J^k_1$ des Kernes von $f^{k-1}_* \colon \pi_{k-1}(X^{k-1}) \to \pi_{k-1}(Y)$. Für jedes $j \in J^k_1$ sei $\varphi^k_j \colon S^{k-1} \to X^{k-1}$ eine punktierte Abbildung, die das entsprechende Element von $\pi_{k-1}(X^{k-1})$ darstellt. Da $[f^{k-1} \circ \varphi^k_j] = 0 \in \pi_{k-1}(Y)$, existiert eine Abbildung $g^k_j \colon D^k \to Y$ mit $g^k_j|_{S^{k-1}} = f^{k-1} \circ \varphi^k_j$. Wir kleben eine Zelle $\bar{e}^k_j$ mit $\varphi^k_j$ an $X^{k-1}$ an und setzen $f^{k-1}$ durch $f^k_j$ auf $\bar{e}^k_j$ fort, so dass

$$\begin{tikzcd} D^k \arrow[r, "\Phi^k_j"'] \arrow[rr, bend left, "g^k_j"] & X^{k-1} \cup \bar{e}^k_j \arrow[r, dashed, "f^k_j"'] & Y \\ S^{k-1} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi^k_j"] & X^{k-1} \arrow[u, hook] \arrow[ur, "f^{k-1}"'] & . \end{tikzcd}$$

Sei $\psi^k \colon \coprod_{j \in J^k_1} S^{k-1} \to X^{k-1}$ durch die $\varphi^k_j$ für $j \in J^k_1$ induziert, dann setzen wir

$$X^k_1 = \left( \coprod_{j \in J^k_1} D^k \right) \cup_{\psi^k} X^{k-1} \qquad \text{und} \qquad f^k_1 = f^{k-1} \cup \bigcup_{j \in J^k_1} f^k_j \colon X^k_1 \longrightarrow Y \ .$$

Nach Konstruktion ist $f^k_{1*}\colon \pi_{k-1}(X^k) \to \pi_{k-1}(Y)$ jetzt injektiv und somit ein Isomorphismus,

$$\begin{tikzcd}
\pi_{k-1}(X^{k-1}) \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, "f^{k-1}_*"'] & \pi_{k-1}(X^k_1) \arrow[d, two heads] \arrow[dl, hook, "f^k_{1*}"'] \\
\pi_{k-1}(Y) & \pi_{k-1}(X^k) \arrow[l, "f^k_*"']
\end{tikzcd} .$$

Daran ändert sich nichts mehr, wenn wir weitere $k$-Zellen hinzufügen.

Im zweiten Schritt wählen wir eine Erzeugermenge $J^k_2$ von $\pi_k(Y)$ und Abbildungen $f^k_j\colon S^k \to (Y, y_0)$, die die entsprechenden Elemente von $\pi_k(Y)$ repräsentieren. Als Verklebeabbildung für die neuen $k$-Zellen wählen wir die konstante Abbildung $S^{k-1} \to \{x_0\} \to X^{k-1}$. Jetzt sei $J^k = J^k_1 \sqcup J^k_2$, und wir erhalten

$$X^k = X^k_1 \vee \bigvee_{j \in J^k_2} S^k \qquad \text{und} \qquad f^k = f^k_1 \vee \bigvee_{j \in J^k_2} f^k_j\colon X^k \longrightarrow Y\ .$$

Dann ist $f^k_*\colon \pi_k(X) \to \pi_k(Y)$ surjektiv, und die erste Behauptung somit vollständig bewiesen.

Für die zweite Behauptung erhalten wir $X^0$ und $f^0\colon X^0 \to Y$, indem wir aus jeder Wegzusammenhangskomponente $Y_0$ von $Y$, die keinen Punkt aus $A$ enthält, einen Punkt $y_0 \in Y_0$ zu $A$ hinzunehmen. Anschließend verfahren wir weiter wie oben für $n = 0$, beginnend bei $k = 1$. Da $\pi_0(A) \to \pi_0(Y)$ bereits surjektiv ist, liefert die Konstruktion am Ende auch einen Isomorphismus $\pi_0(X \to \pi_0(Y)$.

Zur letzten Behauptung nehmen wir an, dass $X^n = A$ falls $n \geq 0$. Andernfalls bilden wir wie oben ein $n$-zusammenhängendes CW-Modell $(X', A)$ von $(X, A)$ mit $X'^n = A$. Nach dem Satz 4.46 von Whitehead sind $(X', A)$ und $(X, A)$ homotopieäquivalent relativ zu $A$, so dass wir $(X, A)$ durch $(X', A)$ ersetzen dürfen. Außerdem nehmen wir an, dass $Z \to W$ eine Inklusionsabbildung ist, die wir $\iota$ nennen. Andernfalls ersetzen wir $(W, B)$ durch den relativen Abbildungszylinder $(Z_B f_2, B)$, der $(W, B)$ als Deformationsretrakt enthält, und $g$ durch die entsprechende Abbildung im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(X', A) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, dashed, "\ell"'] & (X, A) \arrow[r, "f_1"] \arrow[dl, dashed] & (Y, A) \arrow[d] \arrow[dl, "g"'] \\
(Z, B) \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[rr, bend right, "f_2"'] & (Z_B f_2, B) & (W, B) \arrow[l, hook', "\sim"']
\end{tikzcd} .$$

Jetzt können wir ähnlich wie im Beweis der zellulären Approximation 4.43 induktiv Zelle für Zelle Homotopien $h^k\colon X^k \times I \to W$ konstruieren, so dass $h^k(\,\cdot\,, 0) = (g \circ f_1)|_{X^k}$, $h^k(\,\cdot\,, 1)\colon X^k \to Z \subset W$ und $h^k|_{X^{k-1} \times I} = h^{k-1}$, wobei $h^n = (g \circ f_1 \circ p_X)|_{A \times I}\colon A \times I \to B \subset Z$ stationär sei. Wie oben ergibt sich als Vereinigung eine Homotopie $h\colon X \times I \to X$ von $g \circ f_1$ zu einer Abbildung nach $Z$. Nach Satz 4.43 macht eine weitere Homotopie diese Abbildung zellulär.

Sei jetzt $h^{k-1}\colon X^{k-1} \times I \to W$ bereits konstruiert, und sei $e^k_j$ eine $k$-Zelle von $X$. Da $h^{k-1}(\,\cdot\,, 1) \circ \varphi^k_j$ nach Induktionsvoraussetzung $S^{k-1}$ nach $Z$ abbildet, reicht es ähnlich wie im Beweis des Satzes 4.46 von Whitehead, eine Abbildung $(D^k, S^{k-1}) \to (W, Z)$ als Abbildung von Paaren zu einer Abbildung $D^k \to Z$ zu homotopieren, um $h^{k-1}$ auf $e^k_j \times I$ fortzusetzen. Das ist möglich, denn aus der langen exakten Sequenz 3.19 des Paares $(W, Z)$ erhalten wir

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}(W) \longleftarrow \pi_{k-1}(Z) \longleftarrow \underbrace{\pi_k(W, Z)}_{=0} \longleftarrow \pi_k(W) \xleftarrow{\cong} \pi_k(Z) \longleftarrow \cdots\ .$$

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, seien $\ell_0$, $\ell_1\colon X \to Z$ wie oben gegeben. Die zugehörigen Homotopien $h_0$, $h_1\colon X \times I \to W$ liefern eine Homotopie relativ zu $A$ von $\ell_0$ und $\ell_1$ als Abbildungen

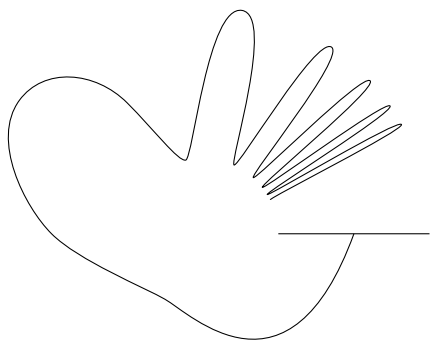


Abbildung 4.1. Das Topologische Huhn

nach $W$. Mit dem gleichen Trick wie oben können wir diese Homotopie relativ zu $A \times I \cup X \times \{0,1\}$ Zelle für Zelle zu einer Homotopie zwischen $\ell_0$ und $\ell_1$ mit Werten in $Z$ deformieren, was noch zu zeigen war. $\square$

4.52. Beispiel. Wir betrachten das *topologische Huhn*

$$Y = \left\{ \left(2 + \sin \frac{2\pi^2}{\varphi}\right) e^{i\varphi} \;\middle|\; \varphi \in (0, 2\pi] \right\} \cup [1,3] \subset \mathbb{C} \ ,$$

siehe Abbildung 4.1, auch bekannt als *polnischer Kreis.* Die starken Oszillationen machen den Übergang von Punkten mit positivem Argument zur positiven reellen Achse zu einem unüberwindbaren Hindernis für Abbildungen $S^k \to Y$, somit ist $\pi_k(Y) = 0$ für alle $k$. Eine CW-Approximation wäre demnach ein einzelner Punkt $X = \{x_0\}$, den wir auf $y_0$ abbilden. Dass $X \to Y$ keine Homotopieäquivalenz ist, sehen wir daran, dass es eine nicht-zusammenziehbare Abbildung $Y \to S^1$ gibt, gegeben durch $z \mapsto \frac{z}{|z|}$. Da alle CW-Approximationen nach Satz 4.51 homotopieäquivalent sind, sagen wir, dass $Y$ nicht den *Homotopietyp eines CW-Komplexes* hat. Wir haben jetzt also auch ein Beispiel von schwach homotopieäquivalenten, aber nicht homotopieäquivalenten Räumen.

In Übung 4.90 können wir jetzt zeigen, dass je zwei schwach homotopieäquivalente CW-Komplexe homotopieäquivalent sind, und dass schwach homotopieäquivalente topologische Räume homotopieäquivalente CW-Approximationen besitzen.

4.53. Bemerkung. Die Sätze 4.43, 4.46 und 4.51 zusammen erklären die Rolle der Homotopiegruppen und der CW-Komplexe in der Homotopietheorie.

(1) Zu jedem topologischen Raum $Y$ gibt es eine CW-Approximation $f_1 \colon X \to Y$, und zu jedem Morphismus $g \colon Y \to W$ und jeder CW-Approximation $f_2 \colon Z \to W$ gibt es bis auf Homotopie einen entsprechenden Morphismus $\ell \colon X \to Z$. Da all dies nur bis auf Homotopie wohldefiniert ist, erhalten wir einen Funktor $\mathcal{H}kw\mathcal{H} \to \mathcal{HCW}$, der mit schwacher Homotopieäquivalenz verträglich ist.
(2) Dieser Funktor ist keine Äquivalenz von Kategorien, da die Abbildung $[Y, W] \to [X, Z]$ im Allgemeinen nicht bijektiv ist, wie wir anhand der Abbildung $Y \to S^1$ im obigen Beispiel gesehen haben. Im nächsten Abschnitt werden wir den Begriff der Homotopie und der Homotopiekategorie etwas allgemeiner formulieren, um dieses Problem zu lösen.

Letztlich sollte es nicht allzusehr verwundern, dass CW-Komplexe und Homotopiegruppen so gut zusammenarbeiten: sowohl Homotopiegruppen als auch Abbildungen von CW-Komplexen in andere Räume basieren auf dem Verhalten von Abbildungen der Paare $(D^k, S^{k-1})$ in andere Räume, was wir den vorangegangenen Beweisen auch immer wieder benutzt haben.

Als letztes in diesem Abschnitt wollen wir uns überlegen, welche der Standardkonstruktionen aus CW-Komplexen wieder CW-Komplexe machen.

4.54. Proposition. *Die folgenden Konstruktionen mit CW-Konstruktion liefern in den Kategorien $k\mathcal{T}op$ und $kw\mathcal{H}$ wieder CW-Komplexe:*

(1) *beliebige Koprodukte,*
(2) *Pushouts entlang zellulärer Abbildungen von einem Unterkomplex in einen anderen CW-Komplex,*
(3) *Kolimiten von Inklusionen von Unterkomplexen,*
(4) *Produkte und reduzierte Produkte endlich vieler CW-Komplexe.*

In (4) dürfen wir nicht mit dem gewöhnlichen topologischen Produkt arbeiten, siehe Bemerkung 1.90. Die Kategorie $\mathcal{CW}$ ist nach Proposition 4.10 kovollständig. Sie ist jedoch nicht bivollständig, da bereits die einfachsten Pullbacks, nämlich Urbilder von Punkten aus $Y^0$ unter zellulären Abbildungen $X \to Y$ im Allgemeinen keine CW-Komplexe mehr sind.

Beweis. In jedem der Punkte (1)–(4) findet sich eine natürliche CW-Struktur auf dem neu konstruierten Raum. In (1)–(3) liefern die universellen Eigenschaften, dass diese CW-Struktur die gleiche Topologie induziert wie die universelle Konstruktion. Die Details sind Übung 4.92.

Wir führen daher nur den Beweis von (4) vor. Dazu seien $X$ und $Y$ CW-Komplexe mit charakteristischen Abbildungen $(\Phi_j^n\colon D^n \to X)_{n,j\in J^n}$ und $(\Psi_k^n\colon D^n \to Y)_{n,k\in K^n}$. Es bezeichne $X \times Y$ das $kw\mathcal{H}$-Produkt beider Räume, und es bezeichne $Z$ den CW-Komplex auf der Trägermenge von $X \times Y$ mit den charakteristischen Abbildungen

$$\left(\Phi_j^p \times \Psi_k^q\colon D^n \cong D^p \times D^q \to Z\right)_{\substack{p+q=n,\\ j\in J^p, k\in K^q}} .$$

Wir betrachten zunächst die Identität $f = \mathrm{id}\colon Z \to X \times Y$. Da alle $\Phi_j^p\colon D^p \to X$ und alle $\Psi_k^q\colon D^q \to Y$ stetig sind, sind auch alle Abbildungen

$$f \circ (\Phi_j^p \times \Psi_k^q)\colon D^n \longrightarrow X \times Y$$

stetig. Damit ist $f$ selbst nach Definition der schwachen Topologie auf $Z$ ebenfalls stetig.

Fixiere jetzt $k \in K^q$. Für jedes $j \in J^p$ induziert die charakteristische Abbildung $\Phi_j^p \times \Psi_k^q$ von $Z$ eine stetige Abbildung

$$D^p \longrightarrow \hom(D^q, Z) .$$

Nach Definition der schwachen Topologie auf $X$ ist dann auch die Abbildung $X \to \hom(D^q, Z)$ stetig, und aufgrund des Exponentialgesetzes 4.30 in $kw\mathcal{H}$ auch die Abbildung

$$\mathrm{id}_X \times \Psi_k^q\colon X \times D^q \longrightarrow Z .$$

Diese Abbildung induziert wiederum eine stetige Abbildung

$$D^q \longrightarrow \hom(X, Z)$$

für alle $q$ und alle $k \in K^q$. Mit der schwachen Topologie auf $Y$ erhalten wir eine stetige Abbildung $Y \to \hom(X, Z)$. Somit ist die Abbildung $\mathrm{id}\colon X \times Y \to Z$ ebenfalls stetig, das heißt, $X \times Y$ und $Z$ sind homöomorph. Hieraus leitet man mit (2) das analoge Resultat für $X \wedge Y$ ab. □

Für kompliziertere Konstruktionen sind CW-Komplexe leider nicht mächtig genug. Immerhin gilt aber folgendes Resultat, das wir ohne Beweis angeben.

4.55. Satz (Milnor). *Es seien $X$, $Y$ homotopieäquivalent zu CW-Komplexen, dann ist auch der Abbildungsraum $C(X, Y)$ homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex.*

## 4.e. Modellkategorien

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass der Begriff der „schwachen Homotopieäquivalenz“ es uns ermöglicht, anstelle beliebiger topologischer Räume nur CW-Komplexe zu betrachten, die wir weit besser verstehen. Wir haben in Bemerkung 4.53 (2) aber auch gesehen, dass unser Begriff einer naiven Homotopiekategorie $\mathcal{H}kw\mathcal{H}$ nicht gut zur Methode der CW-Approximation passt. Daher werden wir in diesem Abschnitt einen etwas anderen Begriff einer Homotopiekategorie entwickeln. Mehr Details dazu finden Sie in [**Ho, Qui**].

Bisher haben wir die Begriffe Faserung, Kofaserung und schwache Äquivalenz recht wahllos benutzt. In diesem Kapitel führen wir den Begriff einer Modellkategorie ein, der all diese Begriffe umfasst. Laut Quillen ist „Modellkategorie“ eine Abkürzung für „Kategorie von Modellen für eine Homotopietheorie“. Die Kategorie der kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume ohne Basispunkte trägt mehrere solcher Modellstrukturen. Für Retrakte von Abbildungen verweisen wir auf Übung 3.113.

4.56. Definition. Eine *Modellstruktur* $(w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ auf einer Kategorie $\mathcal{M}$ besteht aus drei Unterkategorien, den *Faserungen* $f\mathcal{M}$, den *Kofaserungen* $c\mathcal{M}$, und den *schwachen Äquivalenzen* $w\mathcal{M}$, sowie zwei funktoriellen Faktorisierungen $f = p \circ i = q \circ j$ für alle Morphismen $f$ in $\mathcal{M}$, so dass die folgenden Axiome gelten.

(M1) *Retrakte.* Ein Retrakt einer Faserung, Kofaserung oder schwachen Äquivalenz ist wieder vom gleichen Typ.

(M2) *Zwei-von-drei-Eigenschaft.* Seien $f\colon Y \to Z$ und $g\colon X \to Y$ Morphismen. Wenn zwei der drei Morphismen $f$, $g$ und $f \circ g$ schwache Äquivalenzen sind, dann auch der dritte.

(M3) *Liftungseigenschaft.* Wenn im äußeren kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & B \end{tikzcd}$$

der Morphismus $i$ eine Kofaserung, $p$ eine Faserung und $i$ oder $p$ eine schwache Äquivalenz ist, dann existiert eine Abbildung $h\colon X \to E$, so dass das gesamte Diagramm kommutiert.

(M4) *Funktorielle Faktorisierungen.* In den Faktorisierungen $f = p \circ i = q \circ j$ sind $i$, $j$ Kofaserungen, $p$, $q$ Faserungen und $p$ und $j$ schwache Äquivalenzen.

Eine *Modellkategorie* $(\mathcal{M}, w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ ist eine bivollständige Kategorie mit einer Modellstruktur.

Die Unterkategorien $c\mathcal{M}$, $f\mathcal{M}$ und $w\mathcal{M}$ sind im Allgemeinen nicht voll. Stattdessen folgt aus den Axiomen, dass sie jeweils alle Objekte enthalten. Wir nennen eine Faserung oder Kofaserung *trivial* oder *azyklisch,* wenn sie außerdem eine schwache Äquivalenz ist.

4.57. Bemerkung. Wir beginnen mit einigen einfachen Schlussfolgerungen.

(1) *Eckmann-Hilton-Dualität.* Wenn man in einer Katgeorie mit Modellstruktur alle Pfeile umdreht, erhält man wieder eine Modellstruktur; allerdings tauschen Faserungen und Kofaserungen ihre Rollen. Das bedeutet: wenn ein bestimmter Sachverhalt in allen Modellstrukturen (oder in allen Modellkategorien) gilt, dann gilt die Eckmann-Hilton-duale Aussage ebenfalls in allen Modellstrukturen (Modellkategorien).

(2) In einer Modellstruktur $(w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ legen $w\mathcal{M}$ und $c\mathcal{M}$ gemeinsam $f\mathcal{M}$ fest, siehe Übung 4.93. Das heißt aber nicht, dass zur jeder Wahl von $w\mathcal{M}$ und $c\mathcal{M}$ bereits eine Modellstruktur existiert.

(3) Es sei $A \to X$ eine Kofaserung und $A \to Y$ beliebig, dann ist der Pushout $Y \to X \cup_A Y$ wieder eine Kofaserung, siehe Übung 4.94.

Da Modellkategorien bivollständig sind, gibt es immer ein initiales Objekt $\emptyset$ und ein terminales Objekt $*$, siehe Beispiel 4.9(1) und (2). In einer punktierten Kategorie (zum Beispiel $\mathcal{T}op_+$) stimmen beide überein, wir behalten aber trotzdem die obige Notation bei.

4.58. Definition. Es sei $(\mathcal{M}, w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ eine Modellkategorie mit initialem Objekt $\emptyset$ und terminalem Objekt $*$. Ein Objekt $X$ von $\mathcal{M}$ heißt *fibrant,* wenn $X \to *$ eine Faserung ist, und *kofibrant,* wenn $\emptyset \to X$ eine Kofaserung ist. Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}_{cf}$ die volle Unterkategorie der Objekte, die sowohl fibrant als auch kofibrant sind.

4.59. Beispiel. Es folgen einige Beispiele von Modellstrukturen auf Kategorien topologischer Räume.

(1) Es sei $\mathcal{T} = \mathcal{T}op$, $k\mathcal{T}op$ oder $kw\mathcal{H}$ eine Kategorie topologischer Räume. Dann besitzt $\mathcal{T}$ eine Modellstruktur, in der $w\mathcal{M}$ gerade die Homotopieäquivalenzen sind. Faserungen sind die Hurewicz-Faserungen aus Definition 3.22 und Kofaserungen die abgeschlossenen Kofaserungen aus Definition 3.55. In dieser Kategorie sind alle Objekte fibrant und kofibrant, es gilt also $\mathcal{T}op_{cf} = \mathcal{T}op$. Wir nennen sie die *Hurewicz-,* die *naive* oder die *Strøm-Modellstruktur.* Wir haben Axiom (M1) in den Übungen 3.113, 3.124 und 4.95 bewiesen, und (M3) in den Übungen 3.128 und 3.129. Axiom (M2) gilt offensichtlich.

(2) Da schwache Homotopieäquivalenz allein mit Hilfe der Homotopiegruppen definiert ist, ist dieser Begriff unter Umständen hilfreicher als Homotopieäquivalenz im klassischen Sinne. In der sogenannten *Standard-, Serre-* oder *Quillen-Modellstruktur* sind die schwachen Äquivalenzen genau die schwachen Homotopieäquivalenzen, die Faserungen sind die Serre-Faserungen aus Definition 3.22, und die Kofaserungen sind Retrakte von relativen Zellkomplexen. *Relative Zellkomplexe* sind etwas allgemeiner als die relativen CW-Komplexe aus Definition 4.37. Hier darf man in jedem Schritt beliebig viele Zellen beliebiger Dimension ankleben, so dass eine Zelle auch an eine Zelle gleicher oder größerer Dimension angeklebt werden kann. Jetzt ist immer noch jedes Objekt fibrant. Kofibrant sind jedoch nur noch Zellkomplexe und ihre Retrakte.

(3) Die *gemischte* oder *Cole-Modellstruktur* benutzt schwache Homotopieäquivalenzen und Hurewicz-Faserungen. Die passenden Kofaserungen werden durch Bemerkung 4.57 (2) gegeben. Nach wie vor sind alle Objekte fibrant, kofibrant sind nur Räume vom Homotopietyp eines CW-Komplexes.

(4) Anstatt Homotopiegruppen zur Definition von schwacher Äquivalenz heranzuziehen, könnte man auch die Kategorie der Überlagerungen und die Kohomologie lokal konstanter Garben zur Definition von $w\mathcal{M}$ benutzen. In diesem Fall wäre beispielsweise der polnische Kreis (das „topologische Huhn“) aus Beispiel 4.52 zu $S^1$ schwach äquivalent. Leider ist mir keine Modellstruktur bekannt, die auf derartigen schwachen Äquivalenzen aufbaut.

In allen Fällen ist (M4) recht aufwändig nachzuprüfen, weshalb wir darauf hier verzichten wollen.

4.60. Definition. Sei $(\mathcal{M}, w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ eine Modellkategorie. Zwei Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ heißen *linkshomotop,* wenn es einen Raum $Z$ (den *Zylinder*) mit Abbildungen $\iota_0, \iota_1\colon X \to Z$, eine schwache Äquivalenz $p\colon Z \to X$ und eine *Linkshomotopie* $h\colon Z \to Y$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} X \sqcup X \arrow[r, "(f,g)"] \arrow[d, "(\mathrm{id}_X,\mathrm{id}_X)"'] \arrow[dr, "(\iota_0,\iota_1)"] & Y \\ X & Z \arrow[l, "p"] \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd} . \tag{1}$$

Sie heißen *rechtshomotop,* wenn es einen Raum $P$ (den *Pfadraum*) mit Abbildungen $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \colon P \to Y$, eine schwache Äquivalenz $u \colon Y \to P$ und eine *Rechtshomotopie* $k \colon X \to P$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} Y \times Y & X \arrow[l, "(f,g)"'] \arrow[d, "k"] \\ Y \arrow[u, "(\mathrm{id}_Y,\mathrm{id}_Y)"] \arrow[r, "u"] & P \arrow[ul, "(\varepsilon_0,\varepsilon_1)"'] \end{tikzcd} \tag{2}$$

Der „klassische“ Homotopiebegriff für stetige Abbildungen aus Definition 2.2 entspricht Linkshomotopie mit dem festen Zylinder $X \times I$. Nach dem Exponentialgesetz 1.60 (3) ist das äquivalent zu Rechtshomotopie mit dem Pfadraum $Y^I$. Die Definition hier ist zum einen allgemeiner, weil sie auch für Modellkategorien funktioniert, die überhaupt nichts mit topologischen Räumen zu tun haben, als auch potentiell gröber, weil man in $\mathcal{T}op$ oder $kw\mathcal{H}$ auch andere Zylinder und Pfadräume benutzen darf und dadurch unter Umständen mehr Homotopien bekommt.

4.61. Bemerkung. Diese beiden Begriffe sind zueinander dual und stimmen nicht immer überein. Sie hängen beide von den schwachen Äquivalenzen in $\mathcal{M}$ ab, aber nicht von der Wahl der Faserungen und der Kofaserungen. Wenn $X$ kofibrant ist, ist Linkshomotopie eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Hom}(X, Y)$, und Linkshomotopie impliziert Rechtshomotopie. Die dazu duale Aussage gilt ebenfalls. Wenn wir uns also auf die volle Unterkategorie $\mathcal{M}_{cf}$ einschränken, stimmen beide Homotopiebegriffe überein und definieren eine Äquivalenzrelation auf den Morphismen-Mengen. Es bezeichne $\mathcal{HM}_{cf}$ eine Kategorie mit den gleichen Objekten wie $\mathcal{M}_{cf}$ und Homotopieklassen von Morphismen.

4.62. Definition. Es sei $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie. Eine *Homotopiekategorie* zu $\mathcal{M}$ ist eine Kategorie $\mathrm{Ho}\mathcal{M}$ mit einem Funktor $\mathrm{Ho} \colon \mathcal{M} \to \mathrm{Ho}\mathcal{M}$, der alle schwachen Äquivalenzen auf Isomorphismen abbildet, so dass jeder andere Funktor $\mathcal{M} \to \mathcal{E}$, der schwache Äquivalenzen auf Isomorphismen abbildet, auf eindeutige Weise über $\mathrm{Ho}\mathcal{M}$ faktorisiert. Für Objekte $X$, $Y$ von $\mathcal{M}$ definieren wir

$$[X, Y] = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}\mathcal{M}}(\mathrm{Ho}\, X, \mathrm{Ho}\, Y) \ .$$

Man kann sich anhand der Diagramme zu Definition 4.60 überzeugen, dass der Funktor Ho links- oder rechtshomotope Abbildungen auf den gleichen Morphismus in $\mathrm{Ho}\mathcal{M}$ abbildet. Er verhält sich also ähnlich wie der Funktor $\mathcal{T}op \to \mathcal{HT}op$. Er kann aber auch Abbildungen identifizieren, die auf den ersten Blick nicht homotop sind, siehe Bemerkung 4.53 (2).

In der Sprache von Kategorien ist $\mathrm{Ho}\mathcal{M}$ die *Lokalisierung* von $\mathcal{M}$ an $w\mathcal{M}$. Insbesondere hängt die Homotopiekategorie nicht von der Wahl der Faserungen und Kofaserungen ab. Außerdem ist die Lokalisierung bis auf Äquivalenzen von Kategorien eindeutig, so dass insbesondere $[X, Y]$ wohldefiniert ist. Man kann Lokalisierungen (mit gewissen mengentheoretischen Schwierigkeiten) konstruieren, wobei man die Objekte beibehält und als Morphismen Äquivalenzklassen von „Zickzacks“ der Form

$$\begin{tikzcd} & C_1 \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr] & & C_k \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr] & \\ A & & A_1 & & A_{k-1} & & B \end{tikzcd}$$

einführt, bei denen alle nach links weisenden Pfeile aus $w\mathcal{M}$ stammen, ähnlich wie in Definition 4.45. Bei Quillen heißen die hier definierten Modellkategorien *abgeschlossen,* das heißt, dass ein Morphismus in $\mathcal{M}$ genau dann eine schwache Äquivalenz ist, wenn er in $\mathrm{Ho}\mathcal{M}$ auf einen Isomorphismus abgebildet wird. Das hat nichts mit dem Begriff „abgeschlossen“ aus Abschnitt 4.c zu tun.

Die Modellstruktur erlaubt eine einfachere Beschreibung der Homotopiekategorie bis auf Äquivalenz. An dieser Stelle kommen auch Faserungen und Kofaserungen ins Spiel.

4.63. Satz (Fundamental- über Modellkategorien, Quillen). *Es sei $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie, dann induziert der Funktor* Ho *eine Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{HM}_{cf} \to \mathrm{Ho}\mathcal{M}$.*

Insbesondere ist $\mathrm{Ho}\mathcal{M}$ selbst eine Kategorie im herkömmlichen Sinn. Wir haben in Bemerkung 4.53 gesehen, dass der klassische Abbildungs- und Homotopiebegriff nicht gut zu schwachen Homotopieäquivalenzen passt. Um $[X, Y]$ wie in Definition 4.62 zu bestimmen, kann man also $X$ und $Y$ durch schwach äquivalente, fibrant-kofibrante Objekte ersetzen, bevor man $[X, Y]$ durch Homotopien im Sinne von Definition 4.60 beschreiben kann. In der Tat reicht es sogar, $X$ durch ein kofibrantes und $Y$ durch ein fibrantes Objekt zu ersetzen.

4.64. Beispiel. Wir wollen uns dieses Resultat anhand der obigen Modellstrukturen auf $\mathcal{T} = \mathcal{T}op$, $k\mathcal{T}op$ oder $kw\mathcal{H}$ anschauen. In der Tat bilden topologische Räume eine interessante Beispielkategorie, um das Verhalten verschiedener Modellkategorien zu studieren. Allerdings sind in Beispiel 4.59 stets alle Objekte fibrant. Quillen hat gesehen, dass das nicht in jeder Modellkategorie so sein muss.

(1) In der Strøm-Modellstruktur sind alle Objekte fibrant und kofibrant. Wenn $f, g\colon X \to Y$ im klassischen Sinne von Definition 2.2 homotop sind, können wir $Z = X \times I$ in Definition 4.60 (1) wählen, somit sind $f$ und $g$ linkshomotop. Seien umgekehrt $f$ und $g$ linkshomotop, dann ist $p\colon Z \to X$ eine Homotopieäquivalenz, und es existiert ein Homotopieinverses $q\colon X \to Z$. In der Notation von Definition 4.60 (1) sind dann $\iota_0$, $\iota_1$ und $q$ im klassischen Sinne homotop. Wir erhalten klassische Homotopien

$$f = h \circ \iota_0 \sim h \circ \iota_1 = g\ .$$

Also stimmt der neue Homotopiebegriff in der Strøm-Modellstruktur mit dem klassischen überein, und es ist $\mathrm{Ho}\mathcal{T} = \mathcal{HT}$ die Homotopiekategorie aus Bemerkung 2.6 (2).

(2) Wenn wir zu punktierten Räumen übergehen, müssen wir als schwache Äquivalenzen punktierte Abbildungen $f\colon X \to Y$ zulassen, für die eine punktierte Abbildung $g\colon Y \to X$ existiert, so dass $g \circ f$ und $f \circ g$ als unpunktierte Abbildungen homotop zur Identität sind, siehe Übung 4.97 mit $A = \mathrm{pt}$.

Nach wie vor sind alle Objekte fibrant. Kofibrant sind jedoch nur noch die gut punktierten Räume aus Definition 3.55. Die zugehörige Homotopiekategorie hat als Objekte also nur gut punktierte Räume, und hier sind schwache Äquivalenzen wieder genau die punktierten Homotopieäquivalenzen. Somit erhalten wir die korrekte Homotopiekategorie, indem wir uns in unser naiven Homotopiekategorie auf gut punktierte Räume einschränken. Jeden nicht gut punktierten Raum $X$ können wir, wenn nötig, durch den Abbildungszylinder der Inklusion $\{x_0\} \hookrightarrow X$ ersetzen.

(3) In der Quillen-Modellkategorie ist jeder Raum nach Satz 4.51 zu einem CW-Komplex schwach äquivalent. Also reicht es, Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ zwischen CW-Komplexen zu betrachten.

Klassische Homotopie impliziert wieder Homotopie im neuen Sinn. Seien also $f, g$ im Sinne von Definition 4.60 homotop. Wir approximieren das Zylinderobjekt $Z$ durch einen CW-Komplex $k\colon W \to Z$ und erhalten mit Satz 4.51 zwei Abbildungen $j_0, j_1\colon X \to W$, so dass $k \circ j_i = \iota_i$ für $i = 0, 1$. Außerdem ist $p \circ k$ eine Homotopieäquivalenz nach dem Satz 4.46 von Whitehead. Sei $q\colon X \to W$ ein Homotopieinverses, dann folgt im klassischen Sinne $q \sim j_0 \sim j_1$, und wie oben sind auch $f$ und $g$ im klassischen Sinne homotop.

Also ist die Homotopiekategorie zur Quillen-Modellstruktur äquivalent zur naiven Homotopiekategorie $\mathcal{HCW}$ der CW-Komplexe, siehe Bemerkung 4.53 (1). Letztere ist deutlich

übersichtlicher als die Kategorie $\mathcal{HT}_{cf}$ aller Retrakte von Zellkomplexen, die uns der Satz von Quillen liefert. Außerdem ist $\mathcal{HCW}$ eine volle Unterkategorie der Kategorie $\mathcal{HTop}$.Wir erhalten $[X, Y]$, indem wir $X$ durch einen schwach homotopieäquivalenten CW-Komplex ersetzen, bevor wir klassische Homotopien betrachten.

### 4.f. Faser- und Kofaser-Sequenzen

Ab sofort sei stets $\mathcal{T}$ eine „schöne" Kategorie topologischer Räume, also beispielsweise $k\mathcal{Top}$ oder $kw\mathcal{H}$. Wir arbeiten ab jetzt wieder überwiegend mit der zugehörigen punktierten Kategorie $\mathcal{T}_+$. Außerdem fixieren wir eine Modellstruktur auf $\mathcal{T}_+$, beispielsweise die Strøm- oder die Quillen-Modellstruktur aus Beispiel 4.59 (1) beziehungsweise (2). In diesem Sinne verstehen wir schwache Äquivalenzen $w\mathcal{T}_+$, Faserungen $f\mathcal{T}_+$ und Kofaserungen $c\mathcal{T}_+$. Mit $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$ bezeichnen wir eine zugehörige Homotopiekategorie, also etwa die „naive" Homotopiekategorie $\mathcal{HT}_+$ der gut punktierten Räume im ersten und $\mathcal{HCW}_+$ im zweiten Fall, siehe Beispiel 4.64. Wir verstehen die Notation $[X, Y]$ im Sinne von Definition 4.62, das heißt, wir ersetzen $X$ durch einen schwach äquivalenten kofibranten Raum, bevor wir naive Homotopieklassen betrachten. Die allermeisten Konstruktionen im Folgenden lassen sich komplett in der Sprache der Modellkategorien für beliebige Modellkategorien durchführen. Wir werden aber die meiste Zeit mit konkreten topologischen Methoden arbeiten.

In den Homotopiekategorien $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$ gibt es keinen natürlichen Begriff exakter Sequenzen. In diesem Abschnitt lernen wir zwei Typen von Sequenzen kennen, die sich ähnlich wie exakte Sequenzen verhalten. ..Dazu ersetzen wir Abbildungen durch homotopieäquivalente Faserungen beziehungsweise Kofaserungen.

In Definition 3.66 haben wir den reduzierten Kegel $CA = A \wedge (I, 0)$ eines Raumes $A$ und den Homotopiequotienten $X /\!\!/ A = X \cup_A CA$ eines Paares $(X, A)$ kennengelernt. Nach Bemerkung 3.67 (2) und (3) sind $(CA, A)$ und $(X /\!\!/ A, X)$ immer Kofaserungen in der Strøm-Modellstruktur.

4.65. Definition. Es sei $f\colon Y \to X$ eine punktierte Abbildung. Dann definieren wir den (*reduzierten*) *Abbildungskegel* durch

$$Cf = CY \cup_f X \ ,$$

wobei $f$ auf der Basis $Y \cong Y \times \{1\} \subset CY$ definiert sei.

Insbesondere ist $X /\!\!/ A$ gerade der Abbildungskegel der Inklusion $A \hookrightarrow X$.

4.66. Bemerkung. Der Abbildungskegel hat einige schöne Eigenschaften.

(1) In Analogie zum Abbildungszylinder aus Definition 3.57 definieren wir den *reduzierten Abbildungszylinder* $Zf$ einer punktierten Abbildung $f\colon Y \to X$ als Pushout

$$Zf = (Y \wedge I_+) \cup_f X \qquad \text{mit} \qquad f\colon Y \times \{1\} \cong Y \to X \ .$$

Er enthält $Y \cong Y \times \{0\}$ als Unterraum, und $(Zf, Y)$ ist eine Kofaserung. Außerdem betrachten wir die Abbildung $\bar{f}\colon Y \times \{0, 1\} \to X$ mit

$$\bar{f}(y, t) = \begin{cases} * & \text{für } t = 0, \text{ und} \\ f(y) & \text{für } t = 1. \end{cases}$$

Man sieht leicht, dass

$$Cf = CY \cup_f X \cong Zf/Y \cong (Y \wedge I_+) \cup_{\bar{f}} X \ .$$

(2) Es sei $Z$ ein weiterer punktierter Raum. Aus der universellen Eigenschaft 1.75 eines Pushouts folgt, dass eine Abbildung $k\colon Cf \to Z$ genau einer Abbildung $g\colon X \to Z$ und einer

punktierten Nullhomotopie $h$ von der konstanten Abbildung $Y \to \{z_0\} \hookrightarrow Z$ zu $g \circ f$ entspricht.

$$\begin{tikzcd}
Y \wedge I_+ \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "h"] & Cf \arrow[r, "k"'] & Z \\
Y \times \{0,1\} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\bar{f}"] & X \arrow[u, hook] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

(3) Betrachte die Inklusion $\iota\colon X \to Cf$. Wir schreiben $f^* = \cdot \circ f\colon [X,Z] \to [Y,Z]$. Mit (2) sieht man, dass die Sequenz

$$[Cf, Z] \xrightarrow{\iota^*} [X, Z] \xrightarrow{f^*} [Y, Z]$$

punktierter Mengen für alle $Z$ bei $[X,Z]$ im Sinne von Definition 3.17 exakt ist.

Mit Hilfe dieser Bemerkung können wir jeder punktierten Abbildung $f\colon Y \to X$ eine Sequenz topologischer Räume und für jeden Raum $Z$ eine exakte Sequenz zuordnen. Auf diese Konstruktion kommen wir später in der Kohomologietheorie zurück. Wir erinnern uns an die iterierte Einhängung $S^k X = S^k \wedge X$ aus Definition 3.71 und Bemerkung 3.73 (2). Sei $f\colon X \to Y$ stetig, dann schreiben wir im Folgenden $-Sf$ für die Abbildung $(-\mathrm{id}_{S^1}) \wedge f\colon S^1 X \to S^1 Y$.

4.67. Satz (Barratt-Puppe-Sequenz). *Es sei $f\colon Y \to X$ eine Abbildung zwischen kofibranten punktierten Räumen. Dann existiert eine natürliche Sequenz*

$$\cdots \longleftarrow S^2 Cf \xleftarrow{S^2\iota} S^2 X \xleftarrow{S^2 f} S^2 Y \xleftarrow{-Sj} SCf \xleftarrow{-S\iota} SX \xleftarrow{-Sf} SY \xleftarrow{j} Cf \xleftarrow{\iota} X \xleftarrow{f} Y \qquad (*)$$

*in $\mathcal{T}_+$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *Für je zwei aufeinanderfolgende Abbildungen in der Sequenz existiert ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
Ck \arrow[d, "\ell"', "\sim"] & & \\
W & V \arrow[l] \arrow[ul] & U \arrow[l, "k"'] ,
\end{tikzcd}$$

*bei dem $\ell$ eine schwache Äquivalenz ist;*

(2) *Sei $g$ eine beliebige Abbildung in der Sequenz, dann stimmt die rechts von $g$ abgeschnittene Sequenz in $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$ gerade mit der entsprechenden Sequenz für $g$ überein;*

(3) *Für jeden Raum $Z$ ist die induzierte Sequenz*

$$\cdots \longrightarrow [S^2 Cf, Z] \xrightarrow{(S^2\iota)^*} [S^2 X, Z] \xrightarrow{(S^2 f)^*} [S^2 Y, Z] \xrightarrow{(-Sj)^*} [SCf, Z] \xrightarrow{(-S\iota)^*}$$
$$\longrightarrow [SX, Z] \xrightarrow{(-Sf)^*} [SY, Z] \xrightarrow{j^*} [Cf, Z] \xrightarrow{\iota^*} [X, Z] \xrightarrow{f^*} [Y, Z]$$

*von Mengen exakt.*

Nach Bemerkung 3.75 (1) ist die *Puppe-Sequenz* (3) bis zur Stelle $[SY, Z]$ eine exakte Sequenz von Gruppen, und nach 3.75 (2) sogar eine exakte Sequenz abelscher Gruppen bis zur Stelle $[S^2 Y, Z]$.

Die Minuszeichen vor allen ungeraden Einhängungen in (*) sind nötig, um (2) zu beweisen. Sie spielen eine Rolle in der Theorie sogenannter „triangulierter Kategorien“. Auf die Exaktheit in (3) haben sie keinen Einfluss, und die analoge Sequenz ohne Minsuzeichen ist offensichtlich isomorph zu (*), so dass man die Minuszeichen später oft weglässt.

Eine Sequenz (*) mit der Eigenschaft (1) heißt auch *Kofasersequenz.* Man kann zeigen, dass (1) und die Abbildung $f$ die Sequenz (*) bereits bis auf Isomorphie in $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$ eindeutig festlegen.

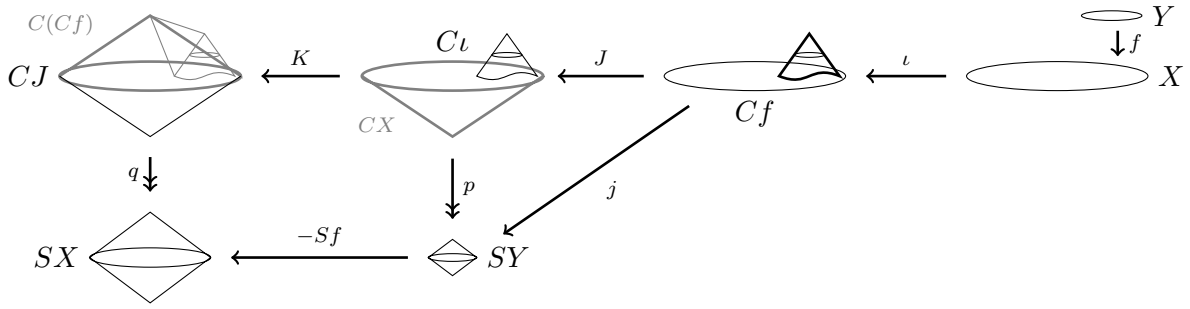



Abbildung 4.2. Zur Kofasersequenz der Abbildung $f\colon Y \to X$

Allgemeiner heißt eine Sequenz

$$\cdots \longleftarrow X_3 \longleftarrow X_2 \longleftarrow X_1 \longleftarrow X_0$$

mit der Eigenschaft (3) *Homotopie-koexakt.* Diese Eigenschaft ist schwächer als (1) und legt (*) nicht eindeutig fest. Beispielsweise können wir $Cf$ durch einen Raum $W$ ersetzen, der $Cf$ als Retrakt besitzt, und die Sequenz (*) links von $X$ durch die entsprechende Sequenz zur Abbildung $X \to W$ ersetzen, ohne die Exaktheit von (3) zu zerstören. Die schwache Äquivalenz $\ell$ in (1) ist ebenfalls nicht eindeutig bestimmt, denn die Gruppe $[SU, W]$ operiert auf der Menge der möglichen Homotopieklassen von Homotopieäquivalenzen.

Beweis. Wir arbeiten hier nur in der Strøm-Modellstruktur. In der Quillen-Modellstruktur reicht es, die Abbildung $f$ wie in Satz 4.51 durch eine zelluläre Abbildung zwischen CW-Komplexen zu ersetzen. Dadurch werden alle weiteren Abbildungen in (1) ebenfalls zu zellulären Abbildungen zwischen CW-Komplexen.

Wir konstruieren die Sequenz (*) Schritt für Schritt und beweisen (1) und (2), dann folgt die Exaktheit der Sequenz (3) aus Bemerkung 4.66 (3). Am Anfang der Sequenz (*) ist nichts zu tun.

Wir betrachten zu $\iota\colon X \to Cf$ den Abbildungskegel

$$C\iota = CX \cup_\iota Cf\ .$$

Da $(CY, Y)$ eine Kofaserung ist, sind $(Cf, X)$ und $(C\iota, CX)$ nach Proposition 3.64 ebenfalls Kofaserungen. Außerdem ist $CX$ zusammenziehbar, also ist die Quotientenabbildung $p\colon C\iota \to C\iota/CX$ eine Homotopieäquivalenz nach Proposition 3.62. Da $CX$ die „Basis“ des Abbildungskegels $C\iota$ ist, ist $C\iota/CX$ natürlich homöomorph zur Einhängung $SY$. Wir beweisen (1) an der Stelle $Cf$, indem wir die Abbildung $j\colon Cf \to SY$ definieren wie im Diagramm

$$\begin{tikzcd} C\iota \arrow[d, two heads, "p", "\sim"'] & Cf \arrow[l, "J"'] \arrow[dl, "j"] & X \arrow[l, "\iota"'] \\ SY\ . & & \end{tikzcd}$$

Im nächsten Schritt sei $J\colon Cf \to C\iota$ die natürliche Inklusion. Wie oben ist $CJ = C(Cf) \cup_J C\iota$, und $(CJ, C(Cf))$ ist eine Kofaserung. Da die „Basis“ $C(Cf)$ von $CJ$ zusammenziehbar ist, erhalten wir wieder eine Homotopieäquivalenz

$$q\colon CJ \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} CJ/C(Cf) \cong SX\ .$$

Das linke Quadrat in Abbildung 4.2 kommutiert bis auf die punktierte Homotopie $h\colon C\iota \times I \to SX$ mit

$$\begin{aligned} & h\big((y,s),t\big) = \big(f(y), 1-s+st\big) && \text{für } (y,s) \in CY \subset C\iota\ , \\ \text{und} \qquad & h\big((x,s),t\big) = (x, st) && \text{für } (x,s) \in CX \subset C\iota\ , \end{aligned}$$

wobei der Kegelparameter $s$ jeweils an der Spitze den Wert 0 und an der Basis den Wert 1 annimmt. Es folgt $h(\,\cdot\,,0) = (-Sf)\circ p$ und $h(\,\cdot\,,1) = q\circ K$, wobei $K\colon C\iota \to CJ$ wieder die natürliche Inklusion bezeichne. Wir erhalten das kommutative Diagramm in Abbildung 4.2. Damit ist (1) an der Stelle $SY$ ebenfalls gezeigt.

Als letztes beweisen wir induktiv (1) und (2), indem wir die Sequenz (*) mit der verschobenen Sequenz zur Abbildung $\iota$ vergleichen wie im Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \cdots & SX \arrow[l] & SY \arrow[l, "-Sf"'] & Cf \arrow[l, "j"'] & X \arrow[l, "\iota"'] & Y \arrow[l, "f"'] \\ \cdots & SCf \arrow[l] & SX \arrow[l, "-S\iota"'] \arrow[u, equal] & C\iota \arrow[l, "q\circ K"'] \arrow[u, "p"', "\sim"] & Cf \arrow[l, "J"'] \arrow[u, equal] & X \arrow[l, "\iota"'] \arrow[u, equal] & \end{tikzcd}$$

Dies erlaubt uns, die Sequenz (*) Schritt für Schritt nach links fortzusetzen. Die Eigenschaft (1) folgt aus der entsprechenden Eigenschaft für die $\iota$-Sequenz eine Position weiter rechts. □

4.68. Beispiel. Es sei $f\colon S^3 \to S^2$ die Hopf-Faserung. Wenn wir an $S^2$ eine Zelle mit der Verklebeabbildung $f$ ankleben, erhalten wir die komplex projektive Ebene $\mathbb{C}P^2$, siehe Übung 1.130. Insbesondere ist $\mathbb{C}P^2 \cong Cf$, da $D^4 \cong CS^3$. Der Quotient von $\mathbb{C}P^2$ nach dem 2-Gerüst $S^2$ ist homöomorph zu $S^4$. Wir erhalten also eine Kofasersequenz

$$\cdots \longleftarrow S^3 \xleftarrow{Sf} S^4 \longleftarrow \mathbb{C}P^2 \longleftarrow S^2 \xleftarrow{f} S^3\ .$$

Völlig analog führen wir jetzt Fasersequenzen ein. Dabei lassen wir uns wie in Abschnitt 3.f vom Prinzip der Eckmann-Hilton-Dualität leiten. Wir erinnern uns daran, dass $Y^{I_+} = C(I,Y)$ die unpunktierten und $Y^I$ die punktierten Abbildungen von $I = (I,0)$ nach $Y$ bezeichnet. Diese Räume sind dual zum reduzierten Zylinder $Y \wedge I_+$ beziehungsweise zum reduzierten Kegel $CY$.

4.69. Definition. Es sei $f\colon X \to Y$ eine punktierte Abbildung. Dann definieren wir die *Pfad-Faserung*

$$p\colon Pf \longrightarrow Y^{I_+} \xrightarrow{\mathrm{ev}_0} Y\ ,$$

indem wir $Pf = \big\{\, (\gamma,x) \in Y^{I_+} \times X \;\big|\; \gamma(1) = f(x) \,\big\} \to Y^{I_+}$ als Pullback

$$\begin{tikzcd} Y^{I_+} \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"'] & Pf \arrow[l] \arrow[d, "f^*\mathrm{ev}_1"] \\ Y & X \arrow[l, "f"'] \end{tikzcd}$$

konstruieren. Die typische Faser der Pfadfaserung ist die *Homotopiefaser*

$$Ff = \big\{\, (\gamma,x) \in Y^{I_+} \times X \;\big|\; \gamma(0) = y_0 \text{ und } \gamma(1) = f(x) \,\big\} = \big\{\, (\gamma,x) \in Y^{I} \times X \;\big|\; \gamma(1) = f(x) \,\big\}\ .$$

4.70. Bemerkung. Die Pfadfaserung hat folgende Eigenschaften, siehe auch Abbildung 4.3 und Übung 4.98.

(1) Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_0\colon Y^{I_+} &\longrightarrow Y\ , & \mathrm{ev}_1\colon Y^{I_+} &\longrightarrow Y\ , \\ p\colon Pf &\longrightarrow Y & \text{und} \qquad f^*\mathrm{ev}_1\colon Pf &\longrightarrow X \end{aligned}$$

sind Hurewicz-Faserungen mit Faser $Y^I$ beziehungsweise $Ff$, siehe Definition 3.22.

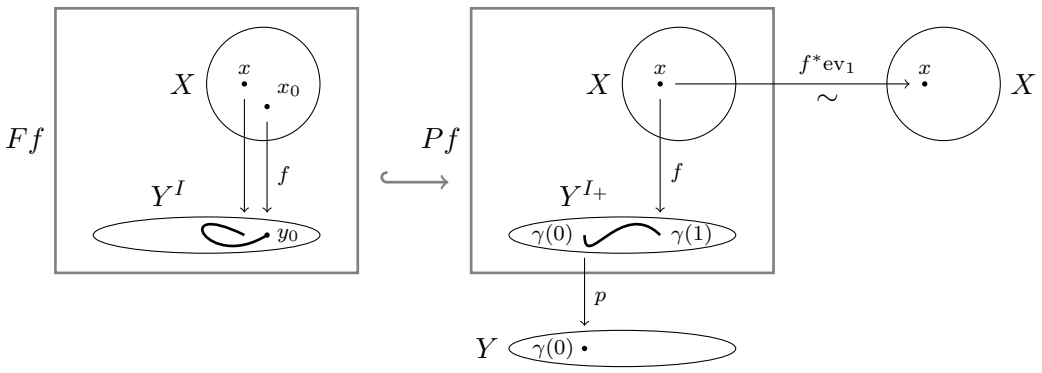



Abbildung 4.3. Die Pfadfaserung einer Abbildung $f\colon X \to Y$

(2) Wenn wir $Y$ mit den konstanten Pfaden in $Y^{I_+}$ identifizieren, ist $Y$ ein Deformationsretrakt von $Y^{I_+}$. Dabei können wir $\mathrm{ev}_0$ oder $\mathrm{ev}_1$ als Retraktionsabbildung wählen. Wählen wir entsprechend zu $x \in X$ den konstanten Pfad im Punkt $f(x)$ und benutzen $\iota\colon X \to Pf$ mit

$$\iota(x) = \big(t \mapsto f(x), x\big)$$

um $X$ mit $\operatorname{im}\iota \subset Pf$ zu identifizieren, so wird $X$ zu einem Deformationsretrakt von $Pf$.

(3) Es gilt $p \circ \iota = f$, und $f \circ f^*\mathrm{ev}_1$ ist punktiert homotop zu $p$, somit können wir jede beliebige Abbildung $f$ durch eine Hurewicz-Faserung $p\colon Pf \to Y$ mit homotopieäquivalentem Totalraum ersetzen.

(4) Wenn $f\colon X \to Y$ bereits eine Hurewicz-Faserung ist, dann ist die Homotopiefaser $Ff$ homotopieäquivalent zur Faser $f^{-1}(y_0)$.

4.71. Bemerkung. Dual zu Bemerkung 4.66 hat die Homotopiefaser folgende Eigenschaften.

(1) Die Homotopiefaser $Ff$ lässt sich auf zwei Weisen als Pullback darstellen:

$$\begin{tikzcd} Y^I \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"'] & Ff \arrow[l] \arrow[d, "q=f^*\mathrm{ev}_1"] \\ Y & X \arrow[l, "f"'] \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} Pf \arrow[d, "p"'] & Ff \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\ Y & \mathrm{pt}\,. \arrow[l] \end{tikzcd}$$

(2) Eine Abbildung $k\colon Z \to Ff$ entspricht genau einer Abbildung $g\colon Z \to X$ und einer punktierten Nullhomotopie $h$ von der konstanten Abbildung $Z \to \{y_0\} \hookrightarrow Y$ zur Abbildung $f \circ g$.

(3) Wir schreiben $f_* = f \circ \cdot\colon [Z, X] \to [Z, Y]$. Aus (2) folgt, dass die Sequenz

$$[Z, Ff] \xrightarrow{q_*} [Z, X] \xrightarrow{f_*} [Z, Y]$$

punktierter Mengen exakt ist.

Der folgende Satz ist Eckmann-Hilton dual zum Satz 4.67 von Barratt-Puppe. Der Beweis ist daher Übung 4.99. Wir überlegen uns aber, dass $\Omega^k X = X^{S^k}$ zu $S^k X = X \wedge S^k$ dual ist.

Da jede Hurewicz-Faserung eine Serre-Faserung ist, sieht diese Sequenz in der Quillen-Modellstruktur genau so aus wie in der Ström-Modellstruktur. Allerdings sollten wir in (3) den Raum $Z$ zunächst durch einen schwach äquivalenten CW-Komplex ersetzen, wenn wir die Menge $[Z, \cdot]$ aus Definition 4.62 durch die Menge naiver Homotopieklassen ersetzen wollen.

4.72. Satz. *Zu jeder Abbildung $f\colon X \to Y$ existiert eine natürliche Sequenz*

$$\cdots \longrightarrow \Omega^2 Ff \xrightarrow{\Omega^2 q} \Omega^2 X \xrightarrow{\Omega^2 f} \Omega^2 Y \xrightarrow{-\Omega r} \Omega Ff \xrightarrow{-\Omega q} \Omega X \xrightarrow{-\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{r} Ff \xrightarrow{q} X \xrightarrow{f} Y \qquad (*)$$

*punktierter Abbildungen mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *Für je zwei aufeinanderfolgende Abbildungen in der Sequenz existiert ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd} Ff \arrow[d, "k", "\sim"'] \arrow[dr, "q"] & & \\ W \arrow[r] & V \arrow[r, "f"] & U \end{tikzcd},$$

*bei dem $k$ eine Homotopieäquivalenz ist;*

(2) *Sei $g$ eine beliebige Abbildung in der Sequenz, dann stimmt die rechts von $g$ abgeschnittene Sequenz in $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$ gerade mit der entsprechenden Sequenz für $g$ überein;*

(3) *Für jeden gut punktierten Raum $Z$ ist die induzierte Sequenz*

$$\cdots \longrightarrow [Z, \Omega^2 Ff] \xrightarrow{(\Omega^2 q)_*} [Z, \Omega^2 X] \xrightarrow{(\Omega^2 f)_*} [Z, \Omega^2 Y] \xrightarrow{(-\Omega r)_*} [Z, \Omega Ff] \xrightarrow{(-\Omega q)_*}$$
$$\longrightarrow [Z, \Omega X] \xrightarrow{(-\Omega f)_*} [Z, \Omega Y] \xrightarrow{r_*} [Z, Ff] \xrightarrow{q_*} [Z, X] \xrightarrow{f_*} [Z, Y]$$

*von Mengen exakt.*

Eine Sequenz mit der Eigenschaft (1) heißt *Fasersequenz.* Die Sequenz (*) wird durch (1) und die Abbildung $f$ bis auf Isomorphie in $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$ eindeutig festgelegt. Allgemeiner heißt eine Sequenz

$$\cdots \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0$$

mit der Eigenschaft (3) *Homotopie-exakt.* Wiederum ist die Sequenz (*) nicht allein durch diese Eigenschaft bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig festgelegt, und $k$ in (1) ist nicht bis auf Homotopie eindeutig bestimmt.

Als Spezialfall der Sequenz (3) mit $Z = S^0$ erhalten wir die lange exakte Sequenz für Serre-Faserungen aus Satz 3.25, wenn wir $Ff$ durch die Faser $F$ und $[S^0, \Omega^k \cdot]$ mit Hilfe des Exponentialgesetzes durch $[S^k, \cdot]$ ersetzen.

4.73. Beispiel. Es sei $\iota\colon S^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ die Inklusion des 2-Gerüstes und $f\colon S^3 \to S^2$ die Hopf-Faserung. Da $\pi_3(\mathbb{C}P^\infty) = 0$, lässt sich die Abbildung $\iota \circ f$ auf $D^4 = CS^3$ fortsetzen. Das liefert uns eine Abbildung $g\colon S^3 \to F\iota$. Der Schleifenraum $\Omega\mathbb{C}P^\infty$ ist nach Übung 4.100 zu $S^1$ homotopieäquivalent. Aus der obigen langen exakten Sequenz (3) für $Z = S^k$ und Beispiel 3.33 folgt, dass $g_*\colon \pi_k(S^3) \to \pi_k(F\iota)$ ein Isomorphismus ist für alle $k \geq 3$. Für $k = 1, 2$ überlegt man sich, dass $\pi_k(\Omega S^2) \to \pi_j(\Omega\mathbb{C}P^1) = \pi_j(S^1)$ ein Isomorphismus ist für $j = 0, 1$. Außerdem sind sowohl $S^3$ als auch $F\iota$ zusammenhängend. Somit ist $g$ eine schwache Homotopieäquivalenz. Da $F\iota$ nach einer etwas allgemeineren Version des Satzes 4.55 von Milnor den Homotopietyp eines CW-Komplexes hat, ist $g$ nach dem Satz 4.46 von Whitehead sogar eine Homotopieäquivalenz. Wir erhalten somit eine Fasersequenz

$$\cdots \longrightarrow S^1 \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{f} S^2 \xrightarrow{\iota} \mathbb{C}P^\infty .$$

Auf der rechten Seite können wir die Fasersequenz sogar noch durch die Abbildung $\mathbb{C}P^\infty \to \mathbb{H}P^\infty$ fortsetzen.

## 4.g. Übungen zu Kapitel 4

*Übungen zu Abschnitt 4.a.*

4.74. Übung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen über Kolimiten.

(1) Der Kolimes $\mathrm{colim}(A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B)$ erfüllt die universelle Eigenschaft des Pushout.

(2) Jeder Kolimes lässt sich als Pushout von Koprodukten schreiben.

4.75. Übung. Es sei $\mathcal{I}$ die Kategorie mit einem Objekt aus Beispiel 4.5 und $\mathcal{F}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ ein Funktor. Beschreiben Sie $\mathcal{F}$ in Termen der linearen Algebra und geben Sie $\lim \mathcal{F}$ und $\operatorname{colim} \mathcal{F}$ an.

4.76. Übung. Welche Rechenregeln ergeben sich aus Lemma 4.14 und dem Exponentialgesetz für Mengen aus Beispiel 4.3 (1)

(1) für disjunkte Vereinigungen und kartesische Produkte, sowie
(2) für kartesische Produkte und Mengen von Abbildungen?

*Übungen zu Abschnitt 4.b.* Zur Erinnerung: unter „kompakt“ verstehen wir stets überdeckungskompakt und Hausdorffsch, siehe Definition 1.50.

4.77. Übung. Zeigen Sie:

(1) Hausdorff-Räume sind schwach Hausdorff, und schwache Hausdorff-Räume erfüllen (T1).
(2) Sei $X$ schwach Hausdorff, $K$ kompakt und $f\colon K \to X$ stetig. Dann ist $\operatorname{im} f$ kompakt (insbesondere Hausdorff), und $f$ ist *eigentlich,* das heißt, Urbilder kompakter Teilmengen sind kompakt.

4.78. Übung. Zeigen Sie:

(1) Die $k$-offenen Mengen von $X$ bilden eine Topologie $\mathcal{O}_{kX}$ auf $X$; diese ist feiner als $\mathcal{O}_X$. Schreibe $kX = (X, \mathcal{O}_{kX})$, dann ist insbesondere $\mathrm{id}_X\colon kX \to X$ stetig.
(2) Sei $K$ kompakt, dann ist $f\colon K \to X$ genau dann stetig, wenn $f\colon K \to kX$ stetig ist.
(3) Es gilt $\mathcal{O}_{k(kX)} = \mathcal{O}_{kX}$, also ist $kX$ kompakt erzeugt.
(4) Ein Raum $X$ ist genau dann kompakt erzeugt, wenn für jeden Raum $Y$ und jede Abbildung $g\colon X \to Y$ von Mengen äquivalent sind:
   (a) die Abbildung $g$ ist stetig, und
   (b) für jedes Kompaktum $K$ und jede stetige Abbildung $f\colon K \to X$ ist $g \circ f\colon K \to Y$ stetig.

4.79. Übung. Zeigen Sie:

(1) Der Funktor $k\colon w\mathcal{H} \to kw\mathcal{H}$ ist rechtsadjungiert zum Inklusionsfunktor $i\colon kw\mathcal{H} \to w\mathcal{H}$, das heißt, für alle $X \in kw\mathcal{H}$, $Y \in w\mathcal{H}$ gibt es eine natürliche Bijektion
$$\hom_{kw\mathcal{H}}(X, kY) = \hom_{w\mathcal{H}}(iX, Y)\ .$$
(2) Es sei $X \in kw\mathcal{H}$ und $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann hat $kA$ die charakteristische Eigenschaft eines Unterraums in der Kategorie $kw\mathcal{H}$ aus Satz 1.43.
(3) Es sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Räumen in $kw\mathcal{H}$, dann hat $k\prod_{i\in I} X_i$ die universelle Eigenschaft eines Produkts in der Kategorie $kw\mathcal{H}$ aus Satz 1.46.

4.80. Übung. Zeigen Sie in Analogie zu Aufgabe 3.126: wenn $X$ ein kompakt erzeugter schwach Hausdorff-Raum und $(X, A)$ eine Kofaserung in der Kategorie $kw\mathcal{H}$ ist, dann ist $A \subset X$ eine $k$-abgeschlossene Teilmenge.

4.81. Übung. Es sei $X \in kw\mathcal{H}$, und es sei $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X$ eine aufsteigende Folge von Unterräumen in $kw\mathcal{H}$, so dass $X \cong \operatorname{colim} X_n$. Außerdem sei $K$ kompakt und $f\colon K \to X$ stetig.

(1) Zeigen Sie, dass $\operatorname{im} f \subset X_n$ für ein hinreichend großes $n$.
(2) Folgern Sie für $x_0 \in X_0$, dass $\pi_k(X, x_0) = \operatorname{colim} \pi_k(X_n, x_0)$.

*Hinweis.* Beweisen Sie zunächst folgende Aussage: es sei $(x_n)_n$ eine Folge in $X$, so dass $x_n \in X \setminus X_{n-1}$, dann ist $\{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \subset X$ abgeschlossen.

4.82. Übung. Es bezeichne $|\cdot|\colon \mathcal{T}op \to \mathcal{S}et$ den vergesslichen Funktor, der einem topologischen Raum die zugrundeliegende Menge zuordnet.

(1) Geben Sie je einen links- und einen rechtsadjungierten Funktor zu $|\cdot|$ an.

(2) Gibt es links- und rechtsadjungierte Funktoren zur Einschränkung $|\cdot| : kw\mathcal{H} \to \mathcal{S}et$?

*Hinweis* zu (2). Welche Auswirkungen hat die Existenz der jeweiligen Adjungierten nach Lemma 4.14 auf Pullbacks und Pushouts?

4.83. Übung. Es bezeichne $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} S^1$ den Quotienten topologischer Räume. Bestimmen Sie den Kolimes der Folge

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \cdots$$

zum einen in der Kategorie $\mathcal{T}op$, zum anderen in der Kategorie $kw\mathcal{H}$.

4.84. Übung. Wir betrachten den inversen Limes $X$ der Folge

$$S^1 \xleftarrow{\cdot 1} S^1 \xleftarrow{\cdot 2} S^1 \xleftarrow{\cdot 3} S^1 \longleftarrow \cdots$$

topologischer Räume. Bestimmen Sie eine Abbildung der universellen Überlagerung $\mathbb{R} \to S^1$ des ersten Raumes in den Limes $X$. Ist diese Abbildung eine Einbettung? Ist sie surjektiv?

*Übungen zu Abschnitt 4.c.*

4.85. Übung. Konstruieren Sie die natürlichen Transformationen $\alpha$, $\lambda$ und $\rho$ aus Definition 4.26, zeigen Sie, dass sie Isomorphismen sind, und beweisen Sie die Axiome (1) und (2)

(1) entweder für $(\mathcal{C}, \times, E)$, falls endliche Produkte in $\mathcal{C}$ existieren und $E$ terminal ist,
(2) oder für $(\mathcal{C}, \sqcup, E)$, falls endliche Koprodukte in $\mathcal{C}$ existieren und $E$ initial ist.

4.86. Übung. Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine abgeschlossene monoidale Kategorie.

(1) Benutzen Sie die Adjunktion $\cdot \otimes Y \dashv \hom(Y, \cdot)$ und die Funktorialität von $\otimes$ im zweiten Argument, um zu zeigen, dass $\hom(\,\cdot\,, Z) \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ein kontravarianter Funktor ist.
(2) Zeigen Sei, dass $\hom(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ ein *Bifunktor* ist, das heißt, dass für alle $f \colon Z \to W$, $g \colon X \to Y$ gilt

$$\hom(X, f) \circ \hom(g, Z) = \hom(g, W) \circ \hom(Y, f) \colon \hom(Y, Z) \longrightarrow \hom(X, W)\ .$$

4.87. Übung. Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine abgeschlossene monoidale Kategorie. Beweisen Sie die universellen Eigenschaften des internen hom-Funktors und des Tensorproduktes aus Bemerkung 4.28 mit Hilfe von Bemerkung 4.2. Überlegen Sie sich außerdem, dass die Zuordnungen $f \mapsto g$ in (1) und $g \mapsto f$ in (2) zueinander invers sind.

4.88. Übung. Beweisen Sie Proposition 4.36, orientieren Sie sich dabei am Beweis von Proposition 3.59.

*Übungen zu Abschnitt 4.d.*

4.89. Übung. Beweisen Sie Folgerung 4.41.

4.90. Übung. Zeigen Sie:

(1) Schwach homotopieäquivalente CW-Komplexe sind homotopieäquivalent.
(2) Schwach homotopieäquivalente topologische Räume haben homotopieäquivalente CW-Approximationen.

4.91. Übung. Geben Sie $k$-zusammenhängende CW-Modelle für $(\mathbb{C}P^n, *)$ an für alle $k \leq 2n$.
*Zusatz:* Wie sieht es mit $(\mathbb{H}P^n, *)$ aus?

4.92. Übung. Präzisieren und beweisen Sie die folgende Aussage:
Pushouts längst zellulären Abbildungen auf Unterkomplexen sowie Kolimiten einer Folge zellulärer Inklusionen von CW-Komplexen liefern wieder CW-Komplexe.

*Übungen zu Abschnitt 4.e.*

4.93. Übung. Es sei $(w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ eine Modellstruktur. Zeigen Sie, dass $f\mathcal{M}$ gerade die Menge aller $p\colon E \to B$ in $\mathcal{M}$ ist, die für alle trivialen Kofaserungen $i\colon A \to X$ die Liftungseigenschaft

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & B \end{tikzcd}$$

erfüllen.

*Hinweis:* Wenn $p$ die Liftungseigenschaft hat, zerlegen Sie $p = q \circ j$ wie in Axiom (M4) und schreiben Sie $p$ als Retrakt von $q$.

4.94. Übung. Es sei $A \to X$ eine Kofaserung und $A \to Y$ beliebig. Zeigen Sie, dass der Pushout $Y \to X \cup_A Y$ wieder eine Kofaserung ist.

4.95. Übung. Es sei $f\colon A \to B$ ein Retrakt von $g\colon X \to Y$ im Sinne von Übung 3.113 in einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$. Zeigen Sie:

(1) Wenn $g$ ein Isomorphismus ist, dann ist auch $f$ ein Isomorphismus.
(2) Sei $\mathcal{C} = \mathcal{T}op$. Wenn $g$ eine Homotopieäquivalenz ist, dann auch $f$.
(3) Sei $\mathcal{C} = \mathcal{T}op$. Wenn $g$ eine schwache Homotopieäquivalenz ist, dann auch $f$.

*Hinweis:* (2) und (3) folgen aus (1) dank Funktorialität.

4.96. Übung. Es sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie. Zeigen Sie, dass man stets drei „triviale“ Modellstrukturen auf $\mathcal{C}$ erhält, indem man für zwei der drei Kategorien $w\mathcal{C}$, $f\mathcal{C}$ und $c\mathcal{C}$ alle Morphismen zulässt, und für die dritte nur Isomorphismen. Bestimmen Sie die zugehörigen Homotopiekategorien zum einen anhand der Definition 4.62, zum anderen mit dem Satz 4.63 von Quillen.

4.97. Übung. Es sei $(\mathcal{M}, w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ eine Modellkategorie und $A$ ein Objekt von $\mathcal{M}$. Die Kategorie $A \downarrow \mathcal{M}$ „unter $A$“ enthält als Objekte Morphismen der Form $A \to X$ in $\mathcal{M}$, und als Morphismen kommutative Diagramme der Form

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{M}$. Wir nennen einen Morphismus Faserung, Kofaserung beziehungsweise schwache Äquivalenz in $A \downarrow \mathcal{M}$, wenn $f$ in $\mathcal{M}$ vom entsprechenden Typ ist. Zeigen Sie, dass $A \downarrow \mathcal{M}$ mit dieser Struktur wieder eine Modellkategorie bildet.

*Übungen zu Abschnitt 4.f.*

4.98. Übung. Es sei $f\colon X \to Y$ eine beliebige Abbildung. Beweisen Sie zwei der folgenden Aussagen aus Bemerkung 4.70.

(1) Die Pfadfaserung $Pf \to Y$ ist eine Hurewicz-Faserung mit Faser $Ff$.
(2) Der Unterraum $\mathrm{im}(\iota) \cong X$ ist ein Deformationsretrakt von $Pf$.
(3) Die Abbildung $f \circ (f^*\mathrm{ev}_1)$ ist zu $p\colon Pf \to Y$ punktiert homotop.
(4) Wenn $f$ eine Hurewicz-Faserung ist, ist $f^{-1}(y_0)$ zur Homotopiefaser $Ff$ homotopieäquivalent.

4.99. Übung. Beweisen Sie Eigenschaft (1) für die Sequenz (*) aus Satz 4.72 an einer der Stellen $Ff$ oder $\Omega Y$, indem Sie den Beweis von Satz 4.67 mit Eckmann-Hilton-Dualität übertragen.

4.100. Übung. Es sei $\iota\colon S^2 \cong \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ die Inklusion. Die Abbildung $S^1 \wedge S^1 \cong S^2 \to \mathbb{C}P^\infty$ induziert eine Abbildung

$$S^1 \longrightarrow \Omega^1(\mathbb{C}P^\infty)\ .$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung eine schwache Homotopieäquivalenz ist. Aus den Sätzen von Milnor und Whitehead folgt, dass sie sogar eine Homotopieäquivalenz ist.

4.101. Übung. Es sei $\iota\colon S^2 \cong \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ die Inklusion und $F\iota$ ihre Homotopiefaser. Da $\pi_3(\mathbb{C}P^\infty) = 0$, lässt sich die durch die Hopf-Faserung induzierte Abbildung $g\colon S^3 \to S^2 \to \mathbb{C}P^\infty$ auf ganz $D^4$ fortsetzen.

Konstruieren Sie damit eine Abbildung $S^3 \to F\iota$. Zeigen Sie mit Hilfe der langen exakten Sequenz 3.25 für Faserungen, dass diese Abbildung eine schwache Homotopieäquivalenz ist.

4.102. Übung. Setzen Sie die Sequenz aus Beispiel 4.73 nach links fort, indem Sie sich überlegen, dass $\Omega S^1$ zu $\mathbb{Z}$ und $\Omega^k S^1$ für $k \geq 2$ zu einem Punkt homotopieäquivalent ist.

KAPITEL 5

# Homologie

Wir haben am Ende von Kapitel 3 gesehen, dass stabile Homotopiegruppen etwas leichter zu handhaben sind als die ursprünglichen Homotopiegruppen. Wir nehmen das als Inspiration für die Eilenberg-Steenrod-Axiome für allgemeine Homologie- und Kohomologiefunktoren. In der Literatur ist gern von Homologietheorien die Rede, aber eigentlich ist das ganze nur Teil einer größeren Theorie, daher verwenden wir den etwas bescheideneren Begriff Funktor.

## 5.a. Die Eilenberg-Steenrod-Axiome

Wir geben die Eilenberg-Steenrod-Axiome für allgemeine Homologiefunktoren an, leiten einige elementare Schlussfolgerungen ab, und geben ein Beispiel einer solchen Theorie. Weitere Homologiefunktoren konstruieren wir später.

Ab sofort sei wieder $\mathcal{T}$ eine „schöne“ Kategorie topologischer Räume, also beispielsweise $k\mathcal{T}op$ oder $kw\mathcal{H}$. An einzelnen Stellen werden wir sogar nur die Kategorie $\mathcal{CW}$ der CW-Komplexe und ihrer zellulären Abbildungen betrachten. Wir arbeiten ab jetzt wieder überwiegend mit der zugehörigen punktierten Kategorie $\mathcal{T}_+$. Außerdem fixieren wir eine Modellstruktur auf $\mathcal{T}_+$, beispielsweise die punktierte Strøm- oder Quillen-Modellstruktur, siehe Beispiel 4.64 (2) und Übung 4.97. In diesem Sinne verstehen wir schwache Äquivalenzen, Faserungen und Kofaserungen in $\mathcal{T}_+$. Anstelle von „kofibrant“ sagen wir nach wie vor „gut punktiert“ und erinnern uns daran, dass in beiden Modellstrukturen alle Räume fibrant sind. Mit $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$ bezeichnen wir wieder eine zugehörige Homotopiekategorie, und mit $[X, Y]$ die „Homotopieklassen“ im Sinne von Definition 4.62.

Als Zielkategorie wählen wir im Folgenden der Einfachheit halber stets die Kategorie $\mathcal{C} = \mathcal{M}od_R$ der (Links-) Moduln über einem Ring $R$. Im Prinzip könnten wir stattdessen eine Kategorie wählen, die viele wichtige Eigenschaften mit den Kategorien $\mathcal{M}od_R$ gemeinsam hat. Ein paar dieser Eigenschaften listen wir gleich auf. Wir könnten also beispielsweise eine sogenannte *Grothendieck-Kategorie* wählen, siehe (7) unten. Nach dem *Satz von Gabriel-Popescu* ist jede Grothendieck-Kategorie $\mathcal{C}$ eine volle Unterkategorie der Kategorie $\mathcal{M}od_R$ mit $R = \operatorname{End} G$, das heißt, sie erbt viele Eigenschaften von $\mathcal{M}od_R$. Allerdings erhalten wir unter Umständen andere Limiten und Kolimiten — dieses Phänomen haben wir in Abschnitt 4.b bereits beim Übergang von $\mathcal{T}op$ zu den vollen Unterkategorien $k\mathcal{T}op$ und $kw\mathcal{H}$ beobachtet. Insgesamt gibt es kaum Vorteile, allgemeinere Kategorien als $\mathcal{M}od_R$ zu betrachten, daher arbeiten wir lieber direkt in der Kategorie $\mathcal{M}od_R$. Später werden wir darüber hinaus oft annehmen, dass $R$ kommutativ oder sogar ein Hauptidealring ist. Das liefert uns gleich die wichtigsten Zielkategorien, nämlich

$$\mathcal{M}od_{\mathbb{Z}} = \mathcal{A}b \qquad \text{und} \qquad \mathcal{M}od_{\Bbbk} = \mathcal{V}ec_{\Bbbk} \qquad \text{für einen Körper } \Bbbk\,.$$

Die wichtigsten Körper wiederum werden $\Bbbk = \mathbb{Q}$ und $\Bbbk = \mathbb{Z}/2$ sein.

5.1. Bemerkung. Es sei $R$ ein Ring. Dann hat die Kategorie $\mathcal{M}od_R$ der (Links-) $R$-Moduln folgende wichtige Eigenschaften.

(1) *Punktiert:* Es gibt ein Nullobjekt 0, und daher zwischen je zwei Objekten $X$, $Y$ einen Nullmorphismus $0\colon X \to 0 \to Y$, siehe Bemerkung 4.29.

(2) *Additiv:* Zusätzlich zu (1) gibt es endliche Produkte und Koprodukte, und für je zwei Objekte ist die natürliche Abbildung

$$X \sqcup Y \longrightarrow X \times Y$$

ein Isomorphismus. Wir nennen das Koprodukt daher auch *direkte Summe.* Jetzt kann man Morphismen $f, g\colon X \to Y$ addieren:

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xleftarrow{\cong} X \sqcup X \xrightarrow{f \sqcup g} Y \sqcup Y \xrightarrow{\mathrm{id} \sqcup \mathrm{id}} Y \ .$$

Diese Addition entspricht genau der elementweisen Addition, also $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \in Y$. Allein aus der kategoriellen Beschriebung folgt, dass $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ eine abelsche Halbgruppe ist, und das die Verknüpfung von Morphismen bilinear ist. Zusätzlich fordert man noch, dass $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ sogar ein Gruppe ist.

(3) *Prä-Abelsch:* Zusätzlich zu (1), (2) hat jeder Morphismus $f\colon X \to Y$ einen *Kern* $\ker f \hookrightarrow X$ und einen *Kokern* $Y \twoheadrightarrow \operatorname{coker} f$. Bisher haben wir sie als Faser und Kofaser bezeichnet:

$$\begin{tikzcd} \ker f \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed] & X \arrow[d, "f"] \\ 0 \arrow[r] & Y \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} \operatorname{coker} f & Y \arrow[l, two heads] \\ 0 \arrow[u, dashed] & X \arrow[l] \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd} \ .$$

(4) *Abelsch:* Zusätzlich zu (1)–(3) ist jedes Unterobjekt *normal,* das heißt, Kern eines Morphismus, und jeder Quotient ist *konormal,* das heißt, Kokern eines Morphismus. Wir verzichten hier auf die kategorielle Beschreibung. Als Folge gilt der *Homomorphiesatz:* Für jeden Morphismus $f\colon X \to Y$ gilt

$$\operatorname{im} f = \ker \operatorname{coker} f \cong \operatorname{coker} \ker f = \operatorname{coim} f \ .$$

Außerdem können wir in abelschen Kategorien über exakte Sequenzen sprechen.

(5) *Vollständig und Kovollständig:* Alle Limiten und Kolimiten existieren, siehe Abschnitt 4.a. Aus (1)–(4) folgt bereits, dass alle endlichen Limiten und Kolimiten existieren.

(6) *Exakte gerichtete Kolimiten:* Jede Folge von Abbildungen kurzer exakter Sequenzen hat als Kolimes wieder eine kurze exakte Sequenz, siehe Beweis von Lemma 5.37. Man beachte, dass die analoge Eigenschaft für Limiten im Allgemeinen nicht gilt, siehe Abschnitt 6.b. Hier ist also zum ersten Mal das Dualitätsprinzip verletzt.

(7) *Grothendieck-Kategorie:* Zusätzlich zu (1)–(6) hat $\mathcal{M}od_R$ einen *Erzeuger,* nämlich $R$. Dazu betrachten wir den Funktor $|\cdot|\colon \mathcal{M}od_R \to \mathcal{S}et_+$ aus Bemerkung 4.29, der ein Objekt $X$ auf die Menge (nach (2) sogar abelsche Gruppe) $|X| = \mathrm{Hom}_R(R,X)$ abbildet. Dieser Funktor ist *treu,* das heißt, für alle Objekte ist $\mathrm{Hom}_R(X,Y) \to \mathrm{Abb}(|X|,|Y|)$ injektiv.

(8) *Abgeschlossen Monoidal:* Wenn $R$ kommutativ ist, ist $\mathcal{M}od_R$ eine abgeschlossene monoidale Kategorie, siehe Abschnitt 4.c.

In der Kategorie $\mathcal{M}od_R$ gelten viele Lemmata der homologischen Algebra, von denen wir bis jetzt nur das Vierer- und Fünfer-Lemma 3.20 kennengelernt haben. Dank (4) lassen sich viele Sätze über exakte Sequenzen durch „Diagrammjagd“ beweisen, und dank (7) dürfen wir dabei mit Elementen (nicht mit Morphismen) arbeiten, siehe etwa Satz 5.6 über die Mayer-Vietoris-Sequenz. Eigenschaft (8) wird wichtig, sobald wir zu sogenannten „multiplikativen“ Theorien übergehen. Später werden wir zusätzlich sogar fordern, dass $R$ ein Hauptidealring ist, siehe etwa Abschnitt 5.e.

5.2. Definition. Es sei $R$ ein Ring und $\mathcal{T}_+$ eine punktierte Kategorie topologischer Räume mit einer Modellstruktur. Ein (*allgemeiner*) *reduzierter Homologiefunktor* $\big(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet\big)$ auf $\mathcal{T}_+$ mit Werten in $\mathcal{M}od_R$ besteht aus einer Familie von Funktoren

$$\tilde{h}_\bullet = \big(\tilde{h}_n\colon \mathcal{T}_+ \to \mathcal{M}od_R\big)_{n\in\mathbb{Z}} \ ,$$

und einer Familie natürlicher Transformationen $\partial_\bullet = (\partial_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $\partial_n(X,A)\colon \tilde{h}_n(X/A) \to \tilde{h}_{n-1}(A)$ für alle Kofaserungen $(X,A)$ in $c\mathcal{T}_+$, die die folgenden *Eilenberg-Steenrod-Axiome* erfüllen.

(1) *Homotopieinvarianz.* Für jede schwache Äquivalenz $f\colon X \to Y$ ist $\tilde{h}_n f\colon \tilde{h}_n(X) \to \tilde{h}_n(Y)$ ein Isomorphismus für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(2) *Homologiesequenz.* Für jede Kofaserung $(X,A)$ mit den natürlichen Abbildungen $\iota\colon A \to X$ und $p\colon X \to X/A$ ist die folgende Sequenz exakt:

$$\cdots \longleftarrow \tilde{h}_{n-1}(A) \xleftarrow{\partial_n} \tilde{h}_n(X/A) \xleftarrow{\tilde{h}_n p} \tilde{h}_n(X) \xleftarrow{\tilde{h}_n \iota} \tilde{h}_n(A) \longleftarrow \cdots$$

(3) *Summenaxiom.* Sei $(X_i, x_i)_{i\in I}$ eine Familie von Räumen, dann ist die von den Inklusionsabbildungen $\iota_i\colon X_i \to \bigvee_{i\in I}(X_i, x_i)$ induzierte Abbildung

$$\bigoplus_{i\in I} \tilde{h}_n \iota_i\colon \bigoplus_{i\in I} \tilde{h}_n(X_i) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_n\Big(\bigvee_{i\in I}(X_i, x_i)\Big)$$

ein Isomorphismus.

Man nennt $\big(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet\big)$ einen (*gewöhnlichen*) *reduzierten Homologiefunktor* mit *Koeffizienten* $M \in \mathcal{M}od_R$, wenn zusätzlich das folgende Axiom gilt.

(4) *Dimensionsaxiom.*

$$\tilde{h}_n(S^0) = \begin{cases} M & \text{für } n = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgrund der Diagramme in Definition 4.60 gilt $h_n f = h_n g$ für alle $n$, wenn $f$ und $g\colon X \to Y$ (rechts- oder links-) homotop sind. Nach Definition 4.62 lässt sich $\tilde{h}_n$ auf der Homotopiekategorie $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$ definieren. Axiom (2) spricht nur über Kofaserungen. Für beliebige Paare $(Y,X)$ und allgemeiner Abbildungen $f\colon X \to Y$ ersetzt man den Quotienten durch den Homotopiequotienten $X /\!\!/ A$ aus Definition 3.66, beziehungsweise durch den Abbildungskegel aus Definition 4.65. Aufgrund der Homotopieinvarianz von $\tilde{h}$ gilt Axiom (2) in dieser Situation analog.

Wir betrachten die Kategorie der Pfeile in $c\mathcal{T}_+$, das ist die volle Unterkategorie von $\mathcal{P}air$, die alle Kofaserungen $(X,A)$ enthält. Die Zuordnungen $(X,A) \mapsto \tilde{h}_n(X/A)$ und $(X,A) \mapsto \tilde{h}_{n-1}(A)$ sind zwei Funktoren von dieser Kategorie in die Kategorie $\mathcal{M}od_R$. Der *Verbindungshomomorphismus* oder die *Randabbildung* $\partial_n$ im Axiom (2) ist eine natürliche Transformation im Sinne von Definition 3.3 zwischen diesen beiden Funktoren. Sei $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ eine Abbildung zwischen Kofaserungen, dann erhalten wir also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \tilde{h}_n(A) \arrow[r, "\tilde{h}_n\iota"] \arrow[d, "\tilde{h}_n(f|_A)"'] & \tilde{h}_n(X) \arrow[r, "\tilde{h}_n p"] \arrow[d, "\tilde{h}_n f"'] & \tilde{h}_n(X/A) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\tilde{h}_n \bar{f}"'] & \tilde{h}_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{h}_{n-1}(f|_A)"'] & \dots \\
\dots \arrow[r] & \tilde{h}_n(B) \arrow[r, "\tilde{h}_n\iota"] & \tilde{h}_n(Y) \arrow[r, "\tilde{h}_n p"] & \tilde{h}_n(Y/B) \arrow[r, "\partial_n"] & \tilde{h}_{n-1}(B) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Dabei ergibt sich die Kommutativität der zwei linken Quadrate aus der Natürlichkeit von $\iota$ und $p$ (siehe oben) und der Funktorialität von $\tilde{h}_n$, während die Kommutativität des rechten Quadrats aus der Natürlichkeit von $\partial_\bullet$ folgt. Streng genommen sollten wir in der Sequenz (3) Minuszeichen wie in den Faser- und Kofasersequenzen 4.67 und 4.72 einbauen. Diese ändern jedoch nichts an der Exaktheit und der Natürlichkeit und werden daher meist weggelassen.

Später schreiben wir meistens nur $\tilde{h}_\bullet$ anstelle von $\big(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet\big)$. Außerdem kürzen wir gern $\tilde{h}_k f$ durch $f_*$ ab, wenn klar ist, zwischen welchen Homologien $f_*$ abbildet.

In der Literatur gibt es viele Varianten dieser Axiome. Die natürliche lange exakte Sequenz (2) zusammen mit Homotopieinvarianz (1) bilden dabei stets den „harten Kern“. Auf das Summenaxiom (3) können wir wegen Bemerkung 5.7 verzichten, wenn wir nur endliche Koprodukte betrachten

wollen; diese reichen aber nicht für alle Anwendungen aus. Andere Axiome können wir bei Bedarf zusätzlich fordern, zum Beispiel, dass (3) sogar für alle abstrakten Limiten gilt. Die ursprünglichen Axiome von Eilenberg und Steenrod beziehen sich übrigens auf *unreduzierte* Homologie, siehe Bemerkung 5.5 (2) unten.

5.3. Lemma. *Es sei $X$ schwach zusammenziehbar, das heißt, schwach äquivalent zum Ein-Punkt-Raum* pt. *Dann gilt $\tilde{h}_k(X) = 0$ für jeden allgemeinen reduzierten Homologiefunktor $\tilde{h}_\bullet$.*

Beweis. Betrachte $(X, A) = (\mathrm{pt}, \mathrm{pt})$ mit den natürlichen Abbildungen $\iota = p = \mathrm{id}_X$. Nach Axiom (2) ist die Sequenz

$$\tilde{h}_n(X/A) \xleftarrow{p_*} \tilde{h}_n(X) \xleftarrow{\iota_*} \tilde{h}_n(A)$$

bei $\tilde{h}_n(X)$ exakt, also folgt

$$\tilde{h}_n(X) = \mathrm{im}(\mathrm{id}) = \ker(\mathrm{id}) = 0 \subset \tilde{h}_n(X) \ ,$$

das heißt, $\tilde{h}_n(\mathrm{pt}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und für jeden allgemeinen reduzierten Homologiefunktor. $\square$

Wir kennen bereits einen allgemeinen Homologiefunktor. Dieser wird uns später dabei helfen, weitere Homologiefunktoren zu konstruieren.

5.4. Folgerung (aus Satz 3.80 und den Propositionen 3.77 und 3.82). *Die stabilen Homotopiegruppen bilden einen allgemeinen Homologiefunktor $\pi^s_\bullet \colon \mathcal{T}_+ \to \mathcal{A}b$.*

Stabile Homotopiegruppen erfüllen aber nicht das Dimensionsaxiom, denn nach Satz 3.99 gilt $\pi^s_1(S^0) \cong \mathbb{Z}/2 \neq 0$.

5.5. Bemerkung. Wir betrachten die Rolle des Basispunktes in der Homologie. Dazu sei $X$ ein Raum mit Basispunktes $x_0$. Wegen der Homotopieinvarianz 5.2 (1) dürfen wir $X$, wenn nötig, durch einen schwach äquivalenten Raum $X \vee (I, 0)$ mit gutem Basispunkt $(I, 1)$ ersetzen.

(1) Es sei $X_+ = X \sqcup \{*\}$ ein Raum mit neuem Basispunkt $*$, dann betrachten wir die punktierten Abbildungen

$$\begin{aligned} &\iota \colon S^0 \longrightarrow X_+ && \text{mit} \quad S^0 = \{x_0, *\} \subset X_+ \ , \\ &p \colon X_+ \longrightarrow X = X_+/S^0 && \text{mit} \quad p(*) = x_0 \ , \\ &r \colon X_+ \longrightarrow S^0 && \text{mit} \quad r(x) = x_0 \quad \text{für alle } x \in X \ . \end{aligned}$$

Dann ist $S^0$ ein Retrakt von $X_+$, und $S^0 \hookrightarrow X_+$ ist eine Kofaserung. Nach Übung 5.84 zeigt die lange exakte Sequenz

$$\cdots \xleftarrow{0} \tilde{h}_n(X) \xleftarrow{p_*} \tilde{h}_n(X_+) \xleftarrow{\iota_*} \tilde{h}_n(S^0) \xleftarrow{0} \cdots \ ,$$

dass $\tilde{h}_n(X_+) \cong \tilde{h}_n(X) \oplus \tilde{h}_n(S^0)$, und wir erhalten einen Isomorphismus

$$p_* \colon \ker\bigl(r_* \colon \tilde{h}_k(X_+) \to \tilde{h}_k(S^0)\bigr) \longrightarrow \tilde{h}_n(X) \ .$$

Die linke Seite ist funktoriell in $X$ und hängt nicht von der Wahl des Basispunktes in $X$ ab. Sie ist sogar noch wohldefiniert, wenn $X$ überhaupt keinen guten Basispunkt besitzt. Allerdings hängt der Isomorphismus $p_*$ selbst von der Wahl von $x_0$ ab, siehe Übung 5.85.

(2) Zu jedem allgemeinen reduzierten Homologiefunktor $\tilde{h}_\bullet$ definieren wir einen allgemeinen *unreduzierten* Homologiefunktor $h_\bullet$ auf $\mathcal{T}$ durch

$$h_k(X) = \tilde{h}_k(X_+) \ .$$

Für Paare $(X, U)$ definiert man einen *relativen Homologiefunktor* $h_\bullet$ durch

$$h_k(X, U) = \tilde{h}_k(X /\!\!/ U) \ ,$$

siehe Übung 5.97 für CW-Komplexe. Die Eilenberg-Steenrod-Axiome [**ES**, Section I.3] fordern anstelle von Axiom 5.2 (2) eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longleftarrow h_{n-1}(U) \xleftarrow{\partial_n} h_n(X,U) \longleftarrow h_n(X) \longleftarrow h_n(U) \longleftarrow \cdots$$

für alle Paare $(X,U)$, nicht nur für Kofaserungen. Außerdem benötigt man ein Ausschneidungsaxiom, siehe Satz 7.46. Diese Forderungen sind dann zu 5.2 (2) äquivalent.

(3) Mit Hilfe der Sequenz aus (1) können wir $\tilde{h}_n(X)$ aus der unreduzierten Homologie rekonstruieren:

$$0 \longleftarrow \tilde{h}_n(X) \longleftarrow h_n(X) \xleftarrow{\iota_*} h_n(\mathrm{pt}) \longleftarrow 0 \tag{*}$$

Sei $X \neq \emptyset$, und $q\colon X \to \mathrm{pt}$ bezeichne die konstante Abbildung, dann erhalten wir

$$\tilde{h}_n(X) = \ker\bigl(q_*\colon h_n(X) \to h_n(\mathrm{pt})\bigr)\ .$$

Für $X = \emptyset$ ist die Abbildung $q$ nicht mehr definiert, und es gilt $\tilde{h}_n(X) = 0$. In diesem liefert die obige lange exakte Sequenz

$$\tilde{h}_{n-1}(\emptyset) \cong h_n(\mathrm{pt}) = \tilde{h}_n(S^0)\ .$$

Dies passt zur Homologiesequenz 5.2 (2), da wir $X_+ = X/\emptyset$ definiert hatten. Also können wir reduzierte Homologie sogar auf ganz $\mathcal{T}$ definieren.

(4) Wir erhalten wegen Satz 3.95, Folgerung 5.4 und (2) als Beispiel eines allgemeinen unreduzierten Homologiefunktors den gerahmten Bordismus

$$\Omega_\bullet^{\mathrm{fr}}(X) = \pi_\bullet^s(X_+)\ .$$

In Zukunft meinen wir immer reduzierte Homologiefunktoren, solange wir nicht anderes sagen. Als nächstes wollen wir einige möglichst allgemeine Sätze über Homologiefunktoren aus den Axiomen herleiten.

5.6. Satz (Mayer-Vietoris-Sequenz). *Es sei $X = A \cup B$, so dass $(A, A\cap B)$ und $(B, A\cap B)$ Kofaserungen sind, und es sei $\tilde{h}$ ein allgemeiner Homologiefunktor. Bezeichne die natürlichen Inklusionen mit*

$$\begin{tikzcd} A\cap B \arrow[r, hook, "a"] \arrow[d, hook, "b"'] & A \arrow[d, hook, "i"] \\ B \arrow[r, hook, "j"] & X\ . \end{tikzcd}$$

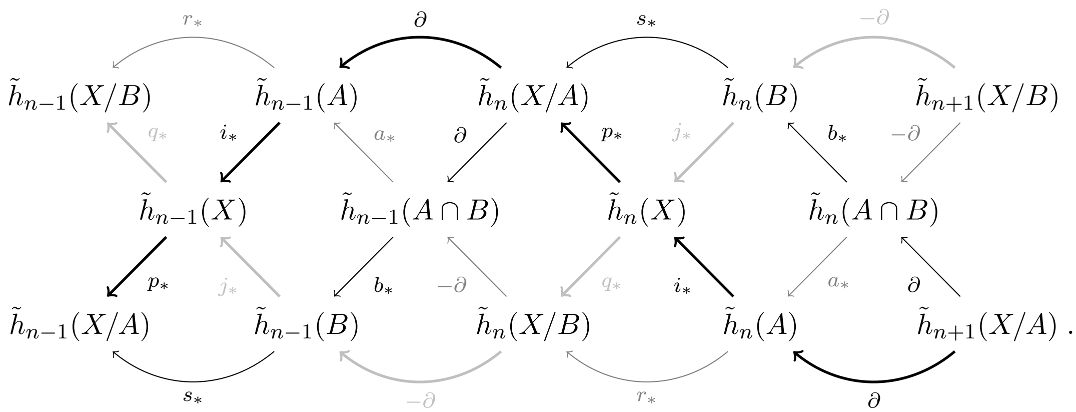
*Dann existiert ein natürlicher Verbindungshomomorphismus $\partial\colon \tilde{h}_n(X) \to \tilde{h}_{n-1}(A\cap B)$, so dass die Sequenz*

$$\cdots \longleftarrow \tilde{h}_{n-1}(A\cap B) \xleftarrow{\partial} \tilde{h}_n(X) \xleftarrow{i_*+j_*} \tilde{h}_n(A) \oplus \tilde{h}_n(B) \xleftarrow{(a_*,-b_*)} \tilde{h}_n(A\cap B) \longleftarrow \cdots$$

*exakt ist.*

Beweis. Wir wissen aus Folgerung 3.65, dass $(X,A)$ und $(X,B)$ unter den obigen Voraussetzungen ebenfalls Kofaserungen sind. Außerdem gilt $X/A \cong B/(A\cap B)$ und $X/B \cong A/(A\cap B)$. Wir fassen die $\tilde{h}$-Sequenzen für die Paare $(X,A)$, $(X,B)$, $(A, A\cap B)$ und $(B, A\cap B)$ im folgenden

Diagramm zusammen:




Die linke und die rechte Raute kommutieren, weil $\tilde h_\bullet$ ein Funktor ist. Die „runden Dreiecke" kommutieren wegen der Natürlichkeit der langen exakten Sequenz (2), angewandt auf die Paarabbildung $(B, A\cap B) \hookrightarrow (X, A)$ beziehungsweise $(A, A\cap B) \hookrightarrow (X, B)$, und weil $X/A \cong B/(A\cap B)$ beziehungsweise $X/B \cong A/(A\cap B)$. Die Kommutativität der mittleren Raute können wir erst später in Bemerkung 5.8 zeigen; sie wird im Folgenden auch nicht benutzt.

Als Verbindungshomomorphismus wählen wir $\partial \circ p_* = -\partial \circ q_*$. Da $\partial$ natürlich ist, ist dieser Verbindungshomomorphismus ebenfalls natürlich, hängt allerdings von der Reihenfolge der Mengen $A$ und $B$ ab. Um zu zeigen, dass die Sequenz exakt ist, veranstalten wir eine Diagrammjagd zwischen den (oben schwarz gezeichneten) exakten Sequenzen der Paare $(X, A)$ und $(B, A\cap B)$.

Beispielsweise folgt die Exaktheit bei $h_n(A)\oplus h_n(B)$ aus folgendem Argument. Sei zunächst $\gamma \in \tilde h_n(A\cap B)$. Aus der Kommutativität der rechten Raute folgt

$$\big((i_* + j_*) \circ (a_*, -b_*)\big)(\gamma) = (i_* \circ a_*)(\gamma) - (j_* \circ b_*)(\gamma) = 0 \ .$$

Seien jetzt $\alpha \in \tilde h_n(A)$ und $\beta \in \tilde h_n(B)$ gegeben, so dass $i_*\alpha + j_*\beta = 0$. Dann liegt $\xi = -j_*\beta = i_*\alpha$ im Bild von $i_*$, also im Kern von $p_*$. Es folgt $s_*\beta = -p_*\xi = 0$, also existiert ein Element $\gamma' \in \tilde h_n(A\cap B)$ mit $-b_*\gamma' = \beta$. Da $(i_*\circ a_*)\gamma' = (j_*\circ b_*)\gamma' = \xi = i_*\alpha$, also $i_*(\alpha - a_*\gamma') = 0$, existiert ein $\delta \in \tilde h_{n+1}(X/A)$ mit $\partial\delta = \alpha - a_*\gamma' \in \tilde h_n(A)$. Dann ist $\gamma = \gamma' + \partial\delta \in \tilde h_n(A\cap B)$ das gesuchte Urbild von $(\alpha, \beta)$.

Die Exaktheit an den anderen Stellen ist Inhalt der Übung 5.86. ☐

5.7. Bemerkung. Mit Hilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz sehen wir, dass das Summenaxiom (3) für endliche Summen bereits aus den Axiomen (1) und (2) folgt, denn mehr haben wir im obigen Beweis nicht gebraucht. Sei dazu $X = Y \vee Z$ mit Basispunkt in $Y \cap Z = \mathrm{pt}$, dann erhalten wir mit Lemma 5.3, dass

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\tilde h_{n-1}(\mathrm{pt})}_{=0} \longleftarrow \tilde h_n(X) \xleftarrow{i_*+j_*} \tilde h_n(Y)\oplus\tilde h_n(Z) \longleftarrow \underbrace{\tilde h_n(\mathrm{pt})}_{=0} \longleftarrow \cdots$$

5.8. Bemerkung. Aufgrund der Symmetrie des Diagramms im Beweis von Satz 5.6 erhalten wir analog zur Mayer-Vietoris-Sequenz eine zweite Sequenz

$$\cdots \longleftarrow \tilde h_{n-1}(X) \xleftarrow{\partial} \tilde h_n(A\cap B) \xleftarrow{\partial-\partial} \tilde h_n(X/A)\oplus\tilde h_n(X/B) \xleftarrow{(p_*,-q_*)} \tilde h_n(X) \longleftarrow \cdots$$

Nun kann man sich überzeugen, dass $X/(A\cap B) \cong (X/A)\vee(X/B)$, indem man $X/(A\cap B)$ als Pushout von $A/(A\cap B)$ längs $\mathrm{pt} \to B/(A\cap B)$ schreibt. Dann entspricht die obige Sequenz nach Bemerkung 5.7 gerade der exakten Sequenz des Paares $(X, A\cap B)$. Aus ihrer Exaktheit schließen wir, dass auch die mittlere Raute im obigen Diagramm kommutiert.

5.9. Bemerkung. Nach Folgerung 5.4 bilden die stabilen Homotopiegruppen $\pi_\bullet^s$ einen Homologiefunktor, somit ist die Mayer-Vietoris-Sequenz für $\pi_\bullet^s$ exakt. Wenn ähnliche Zusammenhangsvoraussetzungen für die Paare $(A, A \cap B)$ und $(B, A \cap B)$ wie in Folgerung 3.65 gelten, existiert eine ähnliche endliche exakte Sequenz für die „instabilen“ Homotopiegruppen $\pi_\bullet$. Wir überlassen Konstruktion und Beweis dem Leser als Übung 5.87. Allerdings muss man für $\pi_1$ aufpassen, da der Satz 2.42 von Seifert-van Kampen sich nur dann gut in die lange exakte Sequenz einfügt, wenn mindestens eine der Gruppen $\pi_1(A)$, $\pi_1(B)$ oder $\pi_1(A \cap B)$ verschwindet.

5.10. Satz. *Es sei $\tilde{h}_\bullet$ ein allgemeiner reduzierter Homologiefunktor und $k$, $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 1$. Dann existiert für jeden gut punktierten Raum $X$ ein natürlicher Isomorphismus*

$$\tilde{h}_k(S^n X) \cong \tilde{h}_{k-n}(X) \ . \tag{1}$$

*Falls $\tilde{h}_\bullet$ ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten $M$ in $\mathcal{M}od_R$ ist, gilt insbesondere*

$$\tilde{h}_k(S^n) \cong \begin{cases} M & \text{falls } k = n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases} \tag{2}$$

Aussage (1) liefert für $\tilde{h}_\bullet = \pi_\bullet^s$ eine offensichtliche Folgerung aus dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.74.

Jetzt wird auch der Name „Dimensionsaxiom“ klar: ein reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten $M \ncong 0$ „sieht“ die Dimension der Sphären $S^n$. Daher lassen sich manche derAnwendungen des Satzes 3.42 von Brouwer-Hopf aus (2) folgern, beispielsweise der Fixpunktsatz 3.44 von Brouwer und der Satz 3.51 von der Invarianz der Dimension. Für den Satz 3.48 vom Igel benötigen wir zusätzlich den Abbildungsgrad, siehe Satz 5.11 unten.

Beweis. Diesen Beweis können wir entweder analog zum Satz 3.42 oder mit Hilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz führen. Wir entscheiden uns für Letzteres. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Für $n \geq 1$ zerlegen wir $S^n X$ in zwei reduzierte Kegel $C_\pm^n X \cong (I, 0) \wedge \cdots \wedge (I, 0) \wedge X \cong D^n \wedge X$ mit Basispunkt auf dem Durchschnitt $S^{n-1}X = C_+^n X \cap C_-^n X$. Da $(C_\pm^n X, S^{n-1}X)$ Kofaserungen sind und $C_\pm^n X$ zusammenziehbar, erhalten wir mit Lemma 5.3 und Satz 5.6 die exakte Sequenz

$$\cdots \leftarrow \underbrace{\tilde{h}_{k-1}(C_+^n X) \oplus \tilde{h}_{k-1}(C_-^n X)}_{=0} \leftarrow \tilde{h}_{k-1}(S^{n-1}X) \xleftarrow{\partial} \tilde{h}_k(S^n X) \leftarrow \underbrace{\tilde{h}_k(C_+^n X) \oplus \tilde{h}_k(C_-^n X)}_{=0} \leftarrow \cdots$$

Wir erhalten induktiv den gesuchten Isomorphismus

$$\tilde{h}_k(S^n X) \cong \tilde{h}_{k-1}(S^{n-1}X) \cong \tilde{h}_{k-n}(X) \ .$$

Wenn $\tilde{h}_\bullet$ ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten $M$ in $\mathcal{M}od_R$ ist, folgt die zweite Behauptung aus der ersten und dem Dimensionsaxiom 5.2 (4). □

Wir betrachten jetzt stetige Abbildungen $f\colon S^n \to S^n$. Nach dem Satz 3.42 von Brouwer-Hopf und Übung 3.116 ist für alle $n \geq 1$ der Abbildungsgrad aus Definition 3.45 ein Ringisomorphismus $\deg\colon \pi_n(S^n) \to \mathbb{Z}$. Wegen Homotopieinvarianz hängt $f_*\colon \tilde{h}_k(S^n) \to \tilde{h}_k(S^n)$ nur vom Abbildungsgrad $\deg f$ ab. Für spätere Anwendungen ist die Charakterisierung des Abbildungsgrades für differenzierbare $f$ aus Folgerung 3.89 hilfreich, bei der es reicht, die Urbilder eines regulären Wertes von $f$ mit dem durch die jeweilige Orientierung von $df$ gegebenen Vorzeichen zu zählen.

Da $\mathcal{M}od_R$ additiv ist, ist $\mathrm{Hom}_R\big(\tilde{h}(S^n), \tilde{h}(S^n)\big)$ eine abelsche Gruppe, oder äquivalent ein $\mathbb{Z}$-Modul. Wir können also Elemente von $\mathrm{Hom}_R\big(\tilde{h}(S^n), \tilde{h}(S^n)\big)$ mit ganzen Zahlen multiplizieren.

5.11. Satz. *Sei $\tilde{h}_\bullet$ ein Homologiefunktor, und $k \in \mathbb{Z}$, $m$, $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon S^m \to S^n$ seien stetig.*

(1) *Falls $m < n$, gilt $f_* = 0\colon \tilde{h}_k(S^m) \to \tilde{h}_k(S^n)$.*

(2) *Falls $m = n$, gilt $f_* = \deg f\colon \tilde{h}_k(S^n) \to \tilde{h}_k(S^n)$.*
(3) *Falls $m > n$ und falls $\tilde{h}_\bullet$ das Dimensionsaxiom* (4) *erfüllt, gilt $f_* = 0\colon \tilde{h}_k(S^m) \to \tilde{h}_k(S^n)$.*

Insbesondere liefert dieser Satz eine weitere Charakterisierung des Abbildungsgrades. Allerdings können wir den Abbildungsgrad nur dann mit Hilfe von $\tilde{h}_\bullet$ bestimmen, wenn $\mathbb{Z}$ treu auf $\tilde{h}_\bullet(S^0)$ wirkt. Das ist beispielsweise nicht der Fall, wenn $\tilde{h}_\bullet$ ein gewöhnlicher Homologiefunktor mit Koeffizienten $\mathbb{Z}/n$ ist für ein $n \neq 0$.

Beweis. Nach Satz 3.42 (1) ist $f$ homotop zur konstanten Abbildung, falls $m < n$. In diesem Fall faktorisiert $f_*$ über $\tilde{h}_k(\mathrm{pt}) = 0$, und es folgt Behauptung (1).

Falls $\tilde{h}_\bullet$ das Dimensionsaxiom erfüllt und $m \neq n$, gilt $\tilde{h}_k(S^m) = 0$ oder $\tilde{h}_k(S^n) = 0$, und es folgt (3).

Zu (2) reicht es, zu zeigen, dass $\tilde{h}\colon \pi_n(S^n) \to \mathrm{End}_R\big(\tilde{h}_k(S^n)\big)$ mit $f \mapsto f_*$ ein Homorphismus abelscher Gruppen ist. Denn $\deg \mathrm{id}_{S^n} = 1$, und wegen Folgerung 3.46 und Funktorialität folgt

$$f_* = (\deg f \cdot \mathrm{id}_{S^n})_* = \deg f \cdot (\mathrm{id}_{S^n})_* = \deg f \ .$$

Es sei $S^{n-1} \subset S^n$ ein Äquator, der den Basispunkt erhält. Wir betrachten die Quotientenabbildung $d\colon S^n \to S^n/S^{n-1} \cong S^n \vee S^n$. Seien $f,\, g\colon S^n \to S^n$ gegeben, dann können wir die Summe $[f] + [g] \in \pi_n(S^n)$ nach Definition 3.1 darstellen durch die zusammengesetzte Abbildung

$$S^n \xrightarrow{d} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} S^n \ .$$

Wir wenden den Homologiefunktor $\tilde{h}_n$ an und erhalten

$$\tilde{h}_n(S^n) \xrightarrow{d_*} \tilde{h}_n(S^n) \oplus \tilde{h}_n(S^n) \xrightarrow{f_* \oplus g_*} \tilde{h}_n(S^n) \ . \tag{*}$$

Um die Abbildung $d_*$ besser zu verstehen, betrachten wir zunächst $f = \mathrm{id}_{S^n}$, $g = 0$. Dann ist $(f \vee g) \circ d$ homotop zur Identität, und wir erhalten

$$(\mathrm{id}_{\tilde{h}_n(S^n)} \oplus 0) \circ d_* = \mathrm{id}_{\tilde{h}_n(S^n)} \ .$$

Indem wir die Rollen von $f$ und $g$ vertauschen, sehen wir insgesamt, dass $d_* = \Delta$ die Diagonalabbildung in die direkte Summe ist.

Wir vergleichen jetzt das Diagramm (*) mit der Addition von Morphismen in $\mathcal{M}od_R$ nach Bemerkung 5.1 (3) und erhalten wie gewünscht

$$((f \vee g) \circ d)_* = (f_* \oplus g_*) \circ \Delta = f_* + g_* \in \mathrm{Hom}_R\big(\tilde{h}_n(S^n), \tilde{h}_n(S^n)\big) \ . \qquad \square$$

5.12. Bemerkung. Aussage (3) gilt nicht für allgemeine Homologiefunktoren. Dazu betrachten wir wieder $\pi^s_\bullet$. Es sei $f\colon S^3 \to S^2$ die Hopf-Faserung. Aus Satz 3.99 wissen wir, dass $0 \neq [f] \in \pi^s_3(S^2) = \pi^s_1(S^0)$. Außerdem sei $1 = [\mathrm{id}_{S^n}] \in \pi^s_0(S^0)$. Es folgt

$$f_*(1) = f_*[\mathrm{id}_{S^3}] = [f \circ \mathrm{id}_{S^3}] = [f] \neq 0 \in \pi^s_3(S^2) \ .$$

## 5.b. Zelluläre Homologie

Wir zeigen, dass sich die (gewöhnliche) Homologie $\tilde{h}_\bullet$ von CW-Komplexen allein aus den Koeffizienten $\tilde{h}_\bullet(S^0)$ und gewissen Daten der CW-Struktur berechnen lässt. Dieses Ergebnis ist aus mehreren Gründen interessant:

- Es zeigt, dass die Eilenberg-Steenrod-Axiome gewöhnliche Homologiefunktoren auf der Unterkategorie der CW-Komplexe bereits vollständig festlegen, in der Quillen-Modellstruktur also auf ganz $\mathcal{T}_+$;
- Es zeigt auch, dass gewöhnliche Homologiefunktoren mit beliebigen Koeffizienten in $\mathcal{M}od_R$ stets existieren;

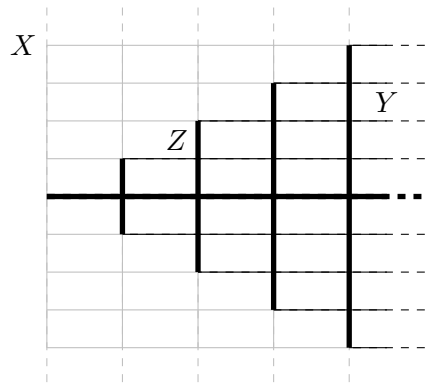



Abbildung 5.1. Das Teleskop einer Folge von CW-Komplexen

- Für einfach konstruierte Räume erhalten wir sehr effizientes Verfahren zur Bestimmung der Homologiegruppen.

Wir beginnen mit einigen Vorüberlegungen.

5.13. Proposition. *Es sei $\tilde{h}_\bullet$ ein Homologiefunktor, der das Summenaxiom 5.2* (3) *erfüllt, und es sei $X$ ein CW-Komplex mit einer aufsteigenden Folge $X_0 \subset X_1 \subset \dots$ von Unterkomplexen, so dass $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$. Für alle $k$ gilt dann*

$$\tilde{h}_k(X) = \operatorname{colim} \tilde{h}_k(X_i) \ .$$

Beweis. Anstelle von $X$ betrachten wir den CW-Komplex

$$Y = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \big([i, i+1]_+ \wedge X_i\big) \subset [0,\infty)_+ \wedge X \ ,$$

siehe Abbildung 5.1. Somit ist $Y$ die Vereinigung der Abbildungszylinder der Inklusionen $\iota_i \colon X_i \to X_{i+1}$. Die Projektion $[0,\infty)_+ \wedge X \to X$ induziert eine Abbildung $r \colon Y \to X$. Analog definieren wir

$$r_n \colon Y_n = \bigcup_{i\le n} \big([i, i+1]_+ \wedge X_i\big) \longrightarrow X_n \ .$$

Dann ist $r_n$ eine Deformationsretraktion, insbesondere eine schwache Äquivalenz.

Als nächstes zeigen wir, dass $r$ eine schwache Homotopieäquivalenz ist. Jede stetige Abbildung $S^k \to X$ trifft nach Proposition 4.38 nur endlich viele Zellen, und faktorisiert daher über eine der Inklusionen $X_i \to X$. Das gleiche gilt für Homotopien zwischen solchen Abbildungen. Analog faktorisieren Abbildungen $S^k \to Y$ und Homotopien zwischen ihnen über eine der Inklusionen $Y_i \to Y$. Da $X_i$ und $Y_i$ homotopieäquivalent sind, induziert $r$ einen Isomorphismus

$$\pi_k(Y) = \operatorname{colim} \pi_k(Y_i) \xrightarrow{r_*} \operatorname{colim} \pi_k(X_i) = \pi_k(X) \ .$$

Nach dem Satz 4.46 von Whitehead ist $r$ sogar eine Homotopieäquivalenz. Also reicht es, $\tilde{h}_\bullet(Y)$ zu bestimmen.

Wir schreiben $Y$ als Vereinigung zweier Unterkomplexe

$$A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \big([2i, 2i+1]_+ \wedge X_{2i}\big) \qquad \text{und} \qquad B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \big([2i+1, 2i+2]_+ \wedge X_{2i+1}\big) \subset Y \ .$$

Dann erhalten wir Homotopieäquivalenzen

$$A \simeq \bigvee_{i\in\mathbb{N}} X_{2i} \ , \qquad B \simeq \bigvee_{i\in\mathbb{N}} X_{2i+1} \ , \qquad \text{und} \qquad A \cap B \simeq \bigvee_{i\in\mathbb{N}} X_i \ .$$

Da es sich um Unterkomplexe handelt, sind $(A, A \cap B)$ und $(B, A \cap B)$ Kofaserungen, und wir betrachten die Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\begin{tikzcd}
\cdots & \tilde{h}_k(Y) \arrow[l] \arrow[d, equal] & \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \tilde{h}_k(X_{2i}) \oplus \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \tilde{h}_k(X_{2i+1}) \arrow[l] \arrow[d, equal] & \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \tilde{h}_k(X_i) \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[d, "\cong"', "\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}(-1)^i \mathrm{id}_{\tilde{h}_k(X_i)}"] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & \tilde{h}_k(Y) \arrow[l] & \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \tilde{h}_k(X_i) \arrow[l] & \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \tilde{h}_k(X_i) \arrow[l, "\psi"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Der Pfeil $\varphi$ wird nach Satz 5.6 für alle $i$ gegeben durch

$$\varphi|_{\tilde{h}_k(X_{2i})} = \mathrm{id}_{\tilde{h}_k(X_{2i})} - \iota_{2i*} \qquad \text{und} \qquad \varphi|_{\tilde{h}_k(X_{2i+1})} = \iota_{(2i+1)*} - \mathrm{id}_{\tilde{h}_k(X_{2i+1})} \ ,$$

also erhalten wir

$$\psi = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \big(\mathrm{id}_{\tilde{h}_k(X_i)} - \iota_{i*}\big) \ .$$

Sei $\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \in \ker \psi$, dann können wir induktiv $\alpha_i = 0 \in \tilde{h}_k(X_i)$ zeigen, also ist $\psi$ injektiv, und die Sequenz zerfällt in lauter kurze exakte Sequenzen. Mit der üblichen Charakterisierung des Kolimes folgt

$$\tilde{h}_k(Y) \cong \bigoplus_i \tilde{h}_k(X_i) \ / \ \mathrm{im}\, \psi \cong \mathrm{colim}\, h_k(X_i) \ . \qquad \square$$

Im folgenden sei $\tilde{h}_\bullet$ stets ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten $M = \tilde{h}_0(S^0)$ in $\mathcal{M}od_R$. Wir fixieren Homöomorphismen $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ und benutzen die Isomorphismen

$$\partial_n \colon \tilde{h}_n(S^n) \to \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1})$$

aus dem Beweis von Satz 5.10, um induktiv $\tilde{h}_n(S^n)$ mit $\tilde{h}_0(S^0) = M$ zu identifizieren.

Sei $(X, \{x_0\})$ ein CW-Paar wie in Definition 4.37 mit den $n$-Gerüsten $X^n$ für $n \geq -1$ und den Indexmengen $J^n$ für die $n$-Zellen für $n \geq 0$. Insbesondere gilt $X^{-1} = \{x_0\}$ und $X^0 \cong J^0 \sqcup \{x_0\}$. Wir schreiben

$$M^{\oplus J^n} = \bigoplus_{j\in J^n} M \qquad \text{und} \qquad \sum_{j\in J^n} a_j e_j^n = (a_j)_{j\in J^n} \in M^{\oplus J^n} \ ,$$

wobei wir verlangen, dass $a_j = 0$ außer für endlich viele $j \in J^n$.

Es seien $\Phi_j^n$ die charakteristischen Abbildungen von $X$ für $j \in J^n$. Für alle $n$ fassen wir $\Phi_j^n$ als Abbildung von Paaren $(D^n, S^{n-1}) \to (X^n, X^{n-1})$ auf und bezeichnen die induzierte punktierte Abbildung auf den Quotienten mit $\bar{\Phi}_j^n \colon S^n \to X^n/X^{n-1}$.

5.14. Lemma. *Es sei $k \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 0$. Wir erhalten natürliche Isomorphismen*

$$M^{\oplus J^n} \cong \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1}) \qquad \textit{mit} \qquad a_j e_j^n \longmapsto \tilde{h}_n \overline{\Phi}_j^n(a_j) \qquad \textit{für alle } j \in J^n \ , \tag{1}$$

$$0 \cong \tilde{h}_k\big(X^n/X^{n-1}\big) \qquad \textit{falls } k \neq n \ , \tag{2}$$

$$0 \cong \tilde{h}_k\big(X^n\big) \qquad \textit{falls } k > n \ , \tag{3}$$

$$\textit{und} \qquad \tilde{h}_k(X) \cong \tilde{h}_k\big(X^n\big) \qquad \textit{falls } n > k \ . \tag{4}$$

Beweis. Für jedes $n \geq 0$ erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{j\in J^n} (D^n, S^{n-1}) \arrow[r, "\bigcup_{j\in J^n} \Phi_j^n"] \arrow[d] & X^n \arrow[d] \\
\bigvee_{j\in J^n} S^n \arrow[r, "\bigvee_{j\in J^n} \bar{\Phi}_j^n", "\cong"'] & X^n/X^{n-1} \ ,
\end{tikzcd}$$

und die Abbildung $\bigvee_j \bar{\Phi}_j^n$ ist ein Homöomorphismus. Die Behauptungen (1) und (2) folgen aus dem Summenaxiom und aus Satz 5.10.

Punkt (3) folgt aus (2) für $n = 0$ und ergibt sich für $n > 0$ induktiv aus der langen exakten Sequenz des Paares $(X^n, X^{n-1})$ aus Axiom (2) und Behauptung (2) für $k > n$, da

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_k(X^n/X^{n-1})}_{\cong 0} \longleftarrow \tilde{h}_k(X^n) \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_k(X^{n-1})}_{\cong 0} \longleftarrow \cdots$$

Mit (2) und der langen exakten Sequenz des Paares $(X^{n+1}, X^n)$ schließen wir, dass $\tilde{h}_k(X^{n+1}) \cong \tilde{h}_k(X^n)$ für $n > k$, denn

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_k(X^{n+1}/X^n)}_{\cong 0} \longleftarrow \tilde{h}_k(X^{n+1}) \xleftarrow{\cong} \tilde{h}_k(X^n) \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_{k+1}(X^{n+1}/X^n)}_{\cong 0} \longleftarrow \cdots$$

Behauptung (4) folgt jetzt aus Proposition 5.13 mit $X_i = X^i$. $\square$

Nach dem obigen Lemma enthält die lange exakte Sequenz des Paares $(X^{n+1}, X^n)$ für alle $n$ einen Ausschnitt der Form

$$\underbrace{\tilde{h}_n(X^{n+1}/X^n)}_{\cong 0} \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_n(X^{n+1})}_{\cong \tilde{h}_n(X)} \xleftarrow{\iota_*^{n+1}} \tilde{h}_n(X^n) \xleftarrow{\partial^{n+1}} \underbrace{\tilde{h}_{n+1}(X^{n+1}/X^n)}_{\cong M^{\oplus J^{n+1}}} \xleftarrow{p_*^{n+1}} \tilde{h}_{n+1}(X^{n+1}) \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_{n+1}(X^n)}_{\cong 0} .$$

Wir definieren $d_n^{\mathrm{CW}} = p_*^{n-1} \circ \partial$ und setzen diese Ausschnitte zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & & & & \\
 & & \tilde{h}_n(X) \arrow[ul] & & & & \\
 & & & & 0 \arrow[dl] & & \\
 & & & \tilde{h}_n(X^n) \arrow[ul, "\iota_*^{n+1}"'] \arrow[dl, hook, "p_*^n"'] & & & \\
\cdots & & & & & & \\
\cdots & \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \arrow[ul] & \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1}) \arrow[l, "d_n^{\mathrm{CW}}"'] \arrow[dl, "\partial^n"] & & \tilde{h}_{n+1}(X^{n+1}/X^n) \arrow[ul, "\partial^{n+1}"'] \arrow[ll, "d_{n+1}^{\mathrm{CW}}"'] & \cdots \arrow[l] & \\
 & \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[ul, hook, "p_*^{n-1}"] & & & \tilde{h}_{n+1}(X^{n+1}) \arrow[ul, hook, "p_*^{n+1}"] & & \\
 & \cdots \arrow[dl] & 0 \arrow[ul] & & & 0 \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

zusammen. Indem wir die Exaktheit der Diagonalen ausnutzen, erhalten wir eine Kette natürlicher Isomorphismen

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_n(X) &\cong \tilde{h}_n\big(X^n\big) / \operatorname{im} \partial^{n+1} && \text{da } \iota_*^{n+1} \text{ surjektiv ist,} \\
&\cong \operatorname{im} p_*^n / \operatorname{im}\big(p_*^n \circ \partial^{n+1}\big) && \text{da } p_*^n \text{ injektiv ist,} \\
&= \ker \partial^n / \operatorname{im} d_{n+1}^{\mathrm{CW}} && \text{da } \operatorname{im} p_*^n = \ker \partial^n, \\
&= \ker d_n^{\mathrm{CW}} / \operatorname{im} d_{n+1}^{\mathrm{CW}} && \text{da } p_*^{n-1} \text{ injektiv ist.}
\end{aligned}$$

Der Quotient auf der rechten Seite ist wohldefiniert, da $\operatorname{im} d_{n+1}^{\mathrm{CW}} \subset \ker d_n^{\mathrm{CW}}$, oder äquivalent

$$d_n^{\mathrm{CW}} \circ d_{n+1}^{\mathrm{CW}} = p_*^{n-1} \circ (\partial^n \circ p_*^n) \circ \partial^{n+1} = 0 .$$

Mit unser Definition $X^{-1} = \{x_0\}$ funktioniert dieses Argument für alle $n \geq 0$. Wir erinnern uns an Definition 3.17 und Bemerkung 5.1 (3) und (4).

5.15. Definition. Ein *(Ketten-)Komplex* $(C_\bullet, d_\bullet)$ *über* $R$ ist eine Sequenz $(d_n \colon C_n \to C_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ von $R$-Moduln, so dass

$$d_n \circ d_{n+1} = 0 \colon C_{n+1} \longrightarrow C_{n-1}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Man definiert $R$-Moduln

$$\begin{aligned} B_n(C_\bullet, d_\bullet) = \operatorname{im} d_{n+1} \quad &\subset \quad Z_n(C_\bullet, d_\bullet) = \ker d_n \quad \subset \quad C_n \\ \text{und} \qquad H_n(C_\bullet, d_\bullet) = Z_n(C_\bullet, d_\bullet)/B_n(C_\bullet, d_\bullet) &= \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} \ . \end{aligned}$$

Elemente von $C_n$,$Z_n(C_\bullet, d_\bullet)$ und $B_n(C_\bullet, d_\bullet)$ heißen *$n$-Ketten*, *$n$-Zykel* beziehungsweise *$n$-Ränder* des Komplexes. Der $R$-Modul $H_n(C_\bullet, d_\bullet)$ heißt $n$-te *Homologie* des Komplexes und seine Elemente $n$-te *Homologieklassen.*

Eine *Kettenabbildung* $f_\bullet \colon (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$ vom Grad $a$ ist eine Sequenzabbildung vom Grad $a$. Die induzierten Abbildungen zwischen den Homologien bezeichnet man mit

$$H_n f_\bullet = f_* \colon H_n(C_\bullet, d_\bullet) \to H_{n+a}(C'_\bullet, d'_\bullet) \ .$$

Man überlegt sich leicht, dass sich jede Kettenabbildung $f_\bullet \colon (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$ zu Abbildungen

$$Z_n(C_\bullet, d_\bullet) \to Z_{n+a}(C'_\bullet, d'_\bullet) \qquad \text{und} \qquad B_n(C_\bullet, d_\bullet) \to B_{n+a}(C'_\bullet, d'_\bullet)$$

einschränken lässt, so dass die Abbildung $f_*$ tatsächlich wohldefiniert ist. Die Kettenkomplexe über $R$ bilden eine Kategorie $\mathcal{C}h_R$ mit den Kettenabbildungen als Morphismen, und die $n$-te Homologie ist ein Funktor $H_n \colon \mathcal{C}h_R \to \mathcal{M}od_R$.

5.16. Bemerkung. Die volle Unterkategorie der Kettenkomplexe $(C_\bullet, d_\bullet)$ mit $d_\bullet = 0$ wird auch als Kategorie $\mathcal{G}r\mathcal{M}od_R$ der graduierten $R$-Moduln bezeichnet; speziell sei $\mathcal{G}r\mathcal{A}b$ die Kategorie der graduierten abelschen Gruppen. Homologie ist ein Funktor $H_\bullet \colon \mathcal{C}h_R \to \mathcal{G}r\mathcal{M}od_R$. Er ist *graduiert,* das heißt für alle Kettenabbildungen $f_\bullet$ gilt $\deg f_* = \deg f_\bullet$. Zur Illustration dieser Konzepte sei Übung 5.95 empfohlen.

Wir verwenden im Folgenden Kleinbuchstaben $\tilde{h}$ für (reduzierte) Homologiefunktoren im Sinne der Eilenberg-Steenrod-Axiome 5.2 und Großbuchstaben für die Homologie von Kettenkomplexen.

Nach unseren obigen Überlegungen ist $\tilde{h}_k(X)$ zur Homologie eines Kettenkomplexes $(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet, d^{\mathrm{CW}}_\bullet)$ isomorph. Wir identifizieren $\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_n(X; M) = \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1})$ mit $M^{\oplus J^n}$ wie in Lemma 5.14 (1). Als nächstes suchen wir eine explizite Formel für den Randoperator $d^{\mathrm{CW}}_n \colon M^{\oplus J^n} \to M^{\oplus J^{n-1}}$. Wir betrachten dazu für $j \in J^n$ die Projektionsabbildung

$$q^n_j \colon X^n/X^{n-1} \longrightarrow X^n \Big/ \Big( X^{n-1} \cup \bigcup_{i\in J^n\setminus\{j\}} e^n_i \Big) \xrightarrow{(\overline{\Phi}^n_j)^{-1}} S^n \ .$$

Dann gilt

$$q^n_j \circ \overline{\Phi}^n_i = \begin{cases} \mathrm{id}_{S^n} & \text{falls } i = j \in J^n \ , \ \text{und} \\ 0 & \text{falls } i \neq j \ , \end{cases}$$

und für $\sum_{i\in J^n} a_i e^n_i \in M^{\oplus J^n} = \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1})$ folgt

$$(q^n_j)_* \sum_{i\in J^n} a_i e^n_i = \sum_{i\in J^n} \big(q^n_j \circ \overline{\Phi}^n_i\big)_*(a_i) = a_j \in \tilde{h}_n(S^n) \cong M \ .$$

Wir betrachten die Paarabbildungen $\Phi_i^n\colon (D^n, S^{n-1}) \to (X^n, X^{n-1})$ und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}) & \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[l, "(f_{ij}^n)_*"'] \arrow[d, "(\varphi_i^n)_*"'] & \tilde{h}_n(S^n) \arrow[l, "\partial^n", "\cong"'] \arrow[d, "(\bar{\Phi}_i^n)_*"'] \\
\tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \arrow[u, "(q_j^{n-1})_*"] & \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[l, "p_*^{n-1}"] & \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1}) \arrow[l, "\partial^n"]
\end{tikzcd}$$

für $i \in J^n$, $j \in J^{n-1}$ mit $f_{ji}^n = q_j^{n-1} \circ p^{n-1} \circ \varphi_i^n\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$. Dabei kommutiert das rechte Quadrat wegen der Natürlichkeit von $\partial_n$, und das linke nach Definition von $f_{ji}^n$. Nach Satz 5.11 (2) operiert $(f_{ji}^n)_*$ auf $M = \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1})$ durch Multiplikation mit dem Abbildungsgrad $d_{ij}^n = \deg f_{ji}^n$.

Insgesamt wird der zelluläre Randoperator $d_n^{\mathrm{CW}}$ für $n \geq 2$ also durch die ganzzahlige Matrix

$$d_n^{\mathrm{CW}} = (d_{ji}^n)_{j,i} \in M_{J^{n-1},J^n}(\mathbb{Z}) \subset \hom_R(M^{\oplus J^n}, M^{\oplus J^{n-1}})$$

beschrieben. Die Koeffizienten $d_{ji}^n$ dieser Matrix heißen auch die *Inzidenzzahlen* von $X$. Man beachte, dass $S^{n-1}$ kompakt ist und $\varphi_i^n$ nach Proposition 4.38 daher nur endlich viele Zellen $e_j^{n-1}$ trifft, so dass $e_i^n \in M \cong \mathrm{im}(\tilde{h}_n \overline{\Phi}_i^n)$ auf eine endliche Linearkombination, also ein Element der direkten Summe $M^{\oplus J^{n-1}}$ abgebildet wird. Man beachte auch, dass der reduzierte Homologiefunktor $\tilde{h}_\bullet$ in dieser Beschreibung des reduzierten zellulären Kettenkomplexes überhaupt nicht mehr auftaucht, sondern nur noch die Koeffizienten $M$. Das liegt an Folgerung 3.46 aus dem Satz 3.42 von Brouwer-Hopf, sowie an den Sätzen 5.10 und 5.11.

5.17. Definition. Es sei $X$ ein CW-Komplex und $M$ ein $R$-Modul. Der *reduzierte zelluläre Kettenkomplex* von $X$ mit Koeffizienten $M$ ist definiert als $\big(\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X;M), d_\bullet^{\mathrm{CW}}\big)$ mit $\tilde{C}_n^{\mathrm{CW}} = M^{\oplus J^n}$ und

$$d_n^{\mathrm{CW}} \sum_{i \in J^n} a_i e_i^n = \sum_{j \in J^{n-1}} \sum_{i \in J^n} \deg(q_j^{n-1} \circ p^{n-1} \circ \varphi_i^n)\, a_i\, e_j^{n-1} = \sum_{j \in J^{n-1}} \sum_{i \in J^n} d_{ji}^n a_i \cdot e_j^{n-1}\ .$$

Die Homologie $\tilde{H}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X;M) = H_\bullet\big(\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X;M), d_\bullet^{\mathrm{CW}}\big)$ dieses Komplexes heißt die *reduzierte zelluläre Homologie* von $X$ mit Koeffizienten in $M$.

Wir erinnern uns an die Definitionen 1.88 und 4.42 zellulärer Abbildungen zwischen CW-Komplexen. Die CW-Komplexe mit den zellulären Abbildungen bilden eine Kategorie $\mathcal{CW}$.

Es sei $Y$ ein CW-Komplex mit $\tilde{h}_n(Y^n/Y^{n-1}) = M^{\oplus K^n}$. Eine zelluläre Abbildung $f\colon X \to Y$ induziert Abbildungen $\bar{f}^n\colon X^n/X^{n-1} \to Y^n/Y^{n-1}$, also auch Abbildungen $f_{\#n} = \bar{f}_*^n\colon M^{\oplus J^n} \to M^{\oplus K^n}$ für alle $n$. Mit einem ähnlichen Argument wie oben sieht man, dass

$$f_{\#n} \sum_{j \in J^n} a_j e_j^n = \sum_{j \in J^n} \sum_{k \in K^n} \deg\big(q_k^n \circ \bar{f}^n \circ \overline{\Phi}_j^n\big)\, a_j e_k^n\ .$$

Die Familie $f_{\#\bullet}$ ist eine Kettenabbildung vom Grad 0, da das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \arrow[d, "\bar{f}_*^{n-1}"'] & \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[l, "p_*^{n-1}"'] \arrow[d, "f_*^{n-1}"'] & \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1}) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "\bar{f}_*^n"'] \\
\tilde{h}_{n-1}(Y^{n-1}/Y^{n-2}) & \tilde{h}_{n-1}(Y^{n-1}) \arrow[l, "p_*^{n-1}"'] & \tilde{h}_n(Y^n/Y^{n-1}) \arrow[l, "\partial"']
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Wir bezeichnen die induzierten Abbildungen mit

$$f_*^{\mathrm{CW}} = \tilde{H}^{\mathrm{CW}} f_n\colon \tilde{H}_n^{\mathrm{CW}}(X;M) \to \tilde{H}_n^{\mathrm{CW}}(Y;M)\ .$$

5.18. Satz (Zelluläre Homologie, Eindeutigkeit). *Sei $M$ ein $R$-Modul und $n \in \mathbb{Z}$.*

(1) *Die reduzierte zelluläre Homologie mit Koeffizienten $M$ ist ein Funktor auf der Kategorie $\mathcal{CW}_+$ der punktierten CW-Komplexe und der punktierten zellulären Abbildungen.*
(2) *Für jeden gewöhnlichen reduzierten Homologiefunktor $\tilde{h}_n$ mit Koeffizienten $M$ existiert ein natürlicher Isomorphismus $\tilde{h}_n|_{\mathcal{CW}_+} \to \tilde{H}_n^{\mathrm{CW}}(\,\cdot\,; M)$.*

Beweis. Wir haben zu jedem CW-Komplex $X$ einen graduierten Modul $H_\bullet^{\mathrm{CW}}(X; M)$ und zu jeder zellulären Abbildung $f\colon X \to Y$ eine induzierte Abbildung $f_*^{\mathrm{CW}}\colon \tilde{H}_n^{\mathrm{CW}}(X; M) \to \tilde{H}_n^{\mathrm{CW}}(Y; M)$ konstruiert. Um Funktorialität unabhängig von der Existenz eines Homologiefunktors $\tilde{h}$ zu zeigen, betrachten wir zelluläre Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$. Seien $\Phi_k^n$ und $\Psi_j^n$ die charakteristischen Abbildungen von $X$ beziehungsweise $Y$, und $q_j^n$ und $r_i^n$ die entsprechenden Kollaps-Abbildungen von $Y$ beziehungsweise $Z$.

Die Verkettung von $f_*^{\mathrm{CW}}$ und $g_*^{\mathrm{CW}}$ wird durch das Matrixprodukt

$$\big(\deg(r_i^n \circ g \circ \overline{\Psi}_j^n)\big)_{ij} \cdot \big(\deg(q_j^n \circ f \circ \overline{\Phi}_k^n)\big)_{jk}$$

beschrieben, während zu $(g \circ f)_*^{\mathrm{CW}}$ die Matrix

$$\big(\deg(r_i^n \circ g \circ f \circ \overline{\Phi}_k^n)\big)_{ik}$$

gehört. Funktorialität folgt, denn man kann zeigen, dass

$$\begin{aligned}\sum_j \deg(r_i^n \circ g \circ \overline{\Psi}_j^n) \cdot \deg(q_j^n \circ f \circ \overline{\Phi}_k^n) &= \sum_j \deg(r_i^n \circ g \circ \overline{\Psi}_j^n \circ q_j^n \circ f \circ \overline{\Phi}_k^n) \\ &= \deg(r_i^n \circ g \circ f \circ \overline{\Phi}_k^n)\ .\end{aligned}$$

Sei jetzt $\tilde{h}_\bullet$ ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten $M$. Wir haben oben Isomorphismen

$$\tilde{h}_n(X) \longleftarrow \tilde{h}_n\big(X^n\big)\big/\operatorname{im}\partial_{n+1} \longrightarrow \operatorname{im}\tilde{h}_n p^n\big/\operatorname{im}\big(\tilde{h}_n p^n \circ \partial_{n+1}\big) = \ker d_n/\operatorname{im} d_{n+1} = \tilde{H}_n^{\mathrm{CW}}(X; M)$$

konstruiert, die alle von natürlichen Abbildungen zwischen Homologiemoduln induziert werden. Also ist auch der zusammengesetzte Isomorphismus $\tilde{h}_n(X) \to \tilde{H}_n^{\mathrm{CW}}(X; M)$ natürlich, und es folgt (2). □

5.19. Bemerkung. Wir können uns zelluläre Homologie vereinfacht wie folgt vorstellen. Jede $n$-Zelle ist ein $n$-dimensionales Objekt in $X$ mit einem $(n-1)$-dimensionalen Rand, und Ketten $c \in \tilde{C}_n^{\mathrm{CW}}(X; M)$ sind $M$-Linearkombinationen davon. Den Rand $d_n^{\mathrm{CW}} c$ einer solchen Kette $c$ schreiben wir wieder als $M$-Linearkombination von $(n-1)$-Zellen, dabei hängen die Vorzeichen von einer Art „Orientierung“ auf dem Rand ab, siehe Folgerung 3.89. Wenn also der Rand von $c$ eine bestimmte Zelle $a$-mal „richtig herum“ und $b$-mal „falsch herum“ trifft, dann kommt diese Zelle $(a-b)$-mal in $d_n^{\mathrm{CW}} c$ vor.

Ketten $c$ mit Rand $d_n^{\mathrm{CW}} c = 0$ heißen Zykel. Wir stellen sie uns als „geschlossene“ $n$-dimensionale Objekte in $X$ vor. Jeder Zykel repräsentiert ein „Loch“ in $X^n$. Wenn dieses Loch in $X^{n+1}$ von einer Kette $b \in C_{n+1}^{\mathrm{CW}}(X; M)$ „gestopft“ wird, das heißt, wenn $c = d_{n+1}^{\mathrm{CW}} b$, vergessen wir es. Alle anderen Löcher bleiben nach Lemma 5.14 (4) dann auch in $X$ „ungestopft“. Somit dürfen wir uns $\tilde{H}_n^{\mathrm{CW}}(X; M)$ als Menge der Linearkombinationen von Löchern in $X$ vorstellen. Man vergleiche das mit der Beschreibung des gerahmten Bordismus in Bemerkung 3.96.

Ein Beispiel ist das Loch in der Mitte der $n$-Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, das sich nach den Sätzen 5.10 und 5.18 dadurch manifestiert, dass $H_n^{\mathrm{CW}}(S^n) \cong M$. Allerdings sehen wir dieses Loch erst „mit bloßem Auge“, wenn wir $S^n$ in den $\mathbb{R}^{n+1}$ einbetten, während die Homologie es immer findet.

5.20. Beispiel. Die reduzierte zelluläre Homologie lässt sich besonders einfach berechnen, wenn der zelluläre Randoperator $d_n^{\mathrm{CW}}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ verschwindet. Das passiert etwa dann, wenn $X$ keine Zellen in aufeinanderfolgenden Dimensionen hat. Ein Beispiel sind die komplex und quaternionisch projektiven Räume aus den Übungen 1.129 und 1.130, siehe Übung 5.88.

5.21. Beispiel. Wir betrachten jetzt den reell projektiven Raum $X = \mathbb{R}P^n$ mit der CW-Struktur aus Übung 1.130. Dann existiert neben $\{x_0\} = \mathbb{R}P^0$ genau eine Zelle $e^k$ in jeder Dimension $1 \leq k \leq n$, und die Verklebeabbildung ist die Projektion

$$\varphi^k \colon S^{n-1} \to X^{k-1} = \mathbb{R}P^{k-1} = S^{n-1}/\{1,-1\} \ .$$

Dabei wird der Äquator $S^{k-2}$ gerade auf den Unterkomplex $X^{k-2} = \mathbb{R}P^{k-2}$ abgebildet. Ähnlich wie bei der Konstruktion der „Summe“ stetiger Abbildungen erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
S^{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^k"'] & S^{k-1}/S^{k-2} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & S^{k-1} \vee S^{k-1} \arrow[d, "\varphi^k_+ \vee \varphi^k_-"] \\
\mathbb{R}P^{k-1} \arrow[r, "p^{k-1}"] & \mathbb{R}P^{k-1}/\mathbb{R}P^{k-2} \arrow[r, "q^{k-1}", "\cong"'] & S^{k-1} \ .
\end{tikzcd}$$

Also gilt $[q^{k-1} \circ \varphi^k] = [\varphi^k_+] + [\varphi^k_-] \in \pi_{k-1}(\mathbb{R}P^{k-1})$; hierbei werden $\varphi^k_\pm \colon S^{k-1} \to S^{k-1}$ durch die Einschränkung von $q^{k-1} \circ \varphi^k$ auf je eine der beiden Halbkugeln induziert. Da $\varphi^k_- = \varphi^k_+ \circ (-\mathrm{id})$ nach Konstruktion, folgt aus Beispiel 3.47 bei geeigneter Wahl der Verklebeabbildungen, dass

$$d_k^{\mathrm{CW}} = \deg\bigl(q^{k-1} \circ \varphi^k\bigr) = 1 + (-1)^k = \begin{cases} 2 & \text{falls } k \text{ gerade ist, und} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

(1) Wir wählen $\mathbb{Z}$ in der Kategorie $\mathcal{A}b \cong \mathcal{M}od_{\mathbb{Z}}$ als Koeffizienten. Für gerade $n$ und erhalten wir in den Graden 0 bis $n$ den reduzierten zellulären Kettenkomplex

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \cdots \xleftarrow{2} \mathbb{Z}$$

für ungerade $n$ hingegen

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \cdots \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \ ,$$

und daher

$$\tilde{H}_k^{\mathrm{CW}}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } k \text{ ungerade und } 0 < k < n, \\ \mathbb{Z} & \text{falls } k = n \text{ ungerade, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier taucht gelegentlich der Modul $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auf. Im Sinne von Bemerkung 5.19 beschreibt das Element $0 \neq c \in \tilde{H}_k^{\mathrm{CW}}(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ein „Loch“ in $\mathbb{R}P^k$, das in $\mathbb{R}P^{k+1}$ nicht gestopft wird; erst das zweimal umlaufene Loch $2c$ tritt als Rand einer $(k+1)$-Kette auf.

(2) Wir bleiben in der Kategorie $\mathcal{A}b$ und wählen $\mathbb{Z}/2$ als Koeffizienten. Da $2 \equiv 0$ in $\mathbb{Z}/2$, verschwindet der Randoperator komplett, und wir erhalten

$$\tilde{H}_k^{\mathrm{CW}}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } 0 < k \leq n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das gleiche Ergebnis erhalten in der Kategorie $\mathcal{V}ec_{\mathbb{Z}/2}$. Wir sehen also modulo 2 mehr „Löcher“ als über $\mathbb{Z}$.

(3) Es sei jetzt $\Bbbk$ ein Körper der Charakteristik $\neq 2$. Dann ist Multiplikation mit 2 invertierbar. Sowohl in der Kategorie $\mathcal{A}b$ als auch in $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ erhalten wir daher nur noch

$$\tilde{H}_k^{\mathrm{CW}}(\mathbb{R}P^n;\Bbbk) \cong \begin{cases} \Bbbk & \text{falls } k = n \text{ ungerade ist, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir wollen zelluläre Homologie zu einem Homologiefunktor bezüglich zellulärer Homologie machen. Dazu müssen wir die Eilenberg-Steenrod-Axiome 5.2 zeigen. Das Summenaxiom (3) und das Dimensionsaxiom (4) sind leicht zu überprüfen. Zur Homotopieinvarianz (1) und zur langen exakten Sequenz (2) skizzieren wir die Beweise nur, da wir später eine andere Konstruktion für beliebige Homologiefunktoren genauer betrachten wollen.

5.22. Definition. Seien $f_\bullet, g_\bullet\colon (C_\bullet, d_\bullet) \to (E_\bullet, e_\bullet)$ zwei Kettenabbildungen vom Grad $a$. Eine *Kettenhomotopie* $h_\bullet\colon f_\bullet \sim g_\bullet$ zwischen $f_\bullet$ und $g_\bullet$ ist eine Familie von Abbildungen $h_k\colon C_k \to E_{k+a+1}$, so dass

$$g_k - f_k = h_{k-1} \circ d_k + e_{k+a+1} \circ h_k\colon C_k \to E_{k+a}\ .$$

Falls eine solche Kettenhomotopie existiert, heißen $f_\bullet$ und $g_\bullet$ *kettenhomotop.*

5.23. Proposition. *Seien $f_\bullet$, $g_\bullet\colon (C_\bullet, d_\bullet) \to (E_\bullet, e_\bullet)$ zwei Kettenabbildungen vom Grad $a$. Wenn eine Kettenhomotopie $h_\bullet\colon f_\bullet \sim g_\bullet$ existiert, dann induzieren $f_\bullet$ und $g_\bullet$ die gleiche Abbildung*

$$f_* = g_*\colon H_\bullet(C_\bullet, d_\bullet) \to H_\bullet(E_\bullet, e_\bullet)\ .$$

Beweis. Für alle Zykel $c \in Z_k \subset C_k$ erhalten wir einen Rand

$$g_k(c) - f_k(c) = h_{k-1}(\underbrace{d_k(c)}_{=0}) + e_{k+a+1}(h_k(c))\ . \qquad \square$$

Man überprüft außerdem leicht, dass Kettenhomotopie eine Äquivalenzrelation auf Kettenabbildungen definiert, die mit der Verkettung von Kettenabbildungen verträglich ist, siehe Übung 5.90. In Analogie zur Homotopiekategorie topologischer Räume können wir daher eine naive Homotopiekategorie $\mathcal{H}\mathcal{C}h_R$ von Kettenkomplexen über $R$ definieren.

Eine zelluläre Homotopie induziert stets eine Kettenhomotopie zwischen den zugehörigen zellulären Kettenkomplexen, siehe Übung 5.91. Somit ist zelluläre Homologie in $\mathcal{CW}_+$ zellulär homotopieinvariant.

5.24. Bemerkung. In Analogie zu den schwachen Äquivalenzen aus Definition 4.45 definiert man schwache Äquivalenzen in der Kategorie $\mathcal{C}h_R$ als Kettenabbildungen, die Isomorphismen auf allen Homologiegruppen induzieren. Es gibt dazu passende Modellstrukturen auf $\mathcal{C}h_R$. Außerdem kann man Kettenhomotopie in diesem Sinne als Links- oder als Rechtshomotopie auffassen, siehe Übungen 5.92 und 5.93. Diese Konstruktionen bilden die Grundlage für die sogenannte *derivierte Kategorie* in der homologischen Algebra. Wir werden uns in Abschnitt 5.e ein bisschen mehr dazu anschauen.

Es sei jetzt $X$ ein CW-Komplex und $A \subset X$ ein Unterkomplex. Dann ist auch $\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(A;M)$ ein *Unterkettenkomplex* von $\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X;M)$, das heißt, es gilt $\tilde{C}_k^{\mathrm{CW}}(A;M) \subset \tilde{C}_k^{\mathrm{CW}}(X;M)$ für alle $k$, und die Inklusion ist mit den Differentialen $d_\bullet^{\mathrm{CW}}$ verträglich; das ergibt sich unmittelbar aus der obigen Konstruktion. Dann können wir den *Quotienten* $\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X;M)/\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(A;M)$ mit dem induzierten Differential betrachten, und erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow \big(\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X;M)/\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(A;M), \bar{d}_\bullet^{\mathrm{CW}}\big) \longleftarrow \big(\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X;M), d_\bullet^{\mathrm{CW}}\big) \longleftarrow \big(\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(A;M), e_\bullet^{\mathrm{CW}}\big) \longleftarrow 0$$

von Kettenkomplexen. Man überprüft leicht, dass $\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X;M)/\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(A;M)$ gerade der zelluläre Kettenkomplex des Quotienten $X/A$ ist, siehe Übung 5.97. Das folgende Lemma liefert uns dann die gesuchte lange exakte Sequenz aus Axiom (3).

5.25. Lemma (Schlangen-). *Es seien $(C_\bullet, \partial_\bullet)$, $(C'_\bullet, \partial'_\bullet)$ und $(C''_\bullet, \partial''_\bullet)$ Kettenkomplexe über $R$ und $f_\bullet\colon (C'_\bullet, \partial'_\bullet) \to (C_\bullet, \partial_\bullet)$ und $g_\bullet\colon (C_\bullet, \partial_\bullet) \to (C''_\bullet, \partial''_\bullet)$ seien Kettenabbildungen, so dass für alle $k$ die Sequenz*

$$0 \longrightarrow C'_k \overset{f_\bullet}{\hookrightarrow} C_k \overset{g_\bullet}{\twoheadrightarrow} C''_k \longrightarrow 0$$

*exakt ist. Dann existiert eine Folge natürlicher Transformationen $d_k\colon H_k(C''_\bullet, \partial''_\bullet) \to H_{k-1}(C'_\bullet, \partial'_\bullet)$, so dass die folgende Sequenz exakt ist:*

$$\cdots \longrightarrow H_k(C_\bullet, \partial_\bullet) \xrightarrow{g_*} H_k(C''_\bullet, \partial''_\bullet) \xrightarrow{d_k} H_{k-1}(C'_\bullet, \partial'_\bullet) \xrightarrow{f_*} H_{k-1}(C_\bullet, \partial_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

In gewissem Sinne entspricht die hier konstruierte Sequenz einer Faser- oder Kofasersequenz, ausgehend von einer „Faserung“ $g_\bullet$ oder einer „Kofaserung“ $f_\bullet$ in $\mathcal{C}h_R$ (nach Wahl einer passenden Modellstruktur), genauer entspricht sie den langen exakten Sequenzen 4.67 (3) beziehungsweise 4.72 (3). Insbesondere sollten wir hier eigentlich entsprechende Vorzeichen verwenden, siehe auch die Anmerkungen nach Definition 5.2.

Beweis. Dieser Beweis ist eine Diagrammjagd im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \arrow[d] & \arrow[d] & \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C'_k \arrow[r, hook] \arrow[d, "\partial'_k"'] & C_k \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\partial_k"'] & C''_k \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_k"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{k-1} \arrow[r, hook] \arrow[d] & C_{k-1} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & C''_{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \,. \\
 & & & &
\end{tikzcd}$$

Um das Bild von $[c''_k] \in H_k(C''_\bullet, \partial''_\bullet)$ zu bestimmen, wählen wir zunächst ein Urbild $c_k \in C_k$ von $c''_k$, dann bildet $\partial_k c_k$ auf $0 \in C''_{k-1}$ ab, also erhalten wir ein Urbild $c'_{k-1} \in C'_{k-1}$ von $\partial_k c_k$. Wir setzen $d_k[c''_k] = [c'_{k-1}]$ und lassen den Rest als Übung 5.94. □

Der Name des Lemmas ergibt sich, wenn man im obigen Diagramm an die Stelle der Komplexe ihre Homologien einträgt und die Verbindungshomomorphismen mit einzeichnet. Wir nennen die im Lemma konstruierten natürlichen Transformationen $d_k$ auch *Verbindungshomomorphismen.*

5.26. Satz (Zelluläre Homologie; Existenz). *Sei $M$ ein $R$-Modul und $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist die reduzierte zelluläre Homologie mit Koeffizienten $M$ ein $\mathcal{M}od_R$-wertiger Homologiefunktor $\tilde{H}^{\mathrm{CW}}_\bullet(\,\cdot\,; M)$ auf der Kategorie $\mathcal{CW}_+$ der punktierten CW-Komplexe und der punktierten zellulären Abbildungen.*

Beweis. Der Funktor ist CW-homotopieinvariant nach Proposition 5.23, und mit Hilfe des Schlangenlemmas 5.25 erhalten wir die Homologiesequenz für Paare von CW-Komplexen. Das Summen- und das Dimensionsaxiom ergeben sich leicht aus der Konstruktion. □

5.27. Folgerung. *Zu jedem $R$-Modul $M$ gibt es gewöhnliche reduzierte Homologiefunktoren mit Koeffizienten $M$ auf den Kategorien $k\mathcal{T}op$ und $kw\mathcal{H}$ und ihren punktierten Versionen, und zwar sowohl bezüglich der Quillen- als auch bezüglich der Strøm-Modellstruktur.*

Beweis. Sei $\mathcal{T} = k\mathcal{T}op$ oder $kw\mathcal{H}$. Wie in Bemerkung 5.5 (1) und (3) können wir auch zelluläre Homologie auf der unpunktierten CW-Kategorie $\mathcal{CW}$ definieren. Aufgrund von Homotopieinvarianz

faktorisiert $H_\bullet^{\mathrm{CW}}$ über die Homotopiekategorie $\mathcal{HCW}$, die nach Beispiel 4.64 (3) zur Homotopiekategorie $\mathrm{Ho}\mathcal{T}$ der Quillen-Modellstruktur äquivalent ist. Also erhalten wir den gesuchten Homologiefunktor für die Quillen-Modellstruktur als Verkettung

$$\tilde{h}_\bullet \colon \mathcal{T} \xrightarrow{\mathrm{Ho}} \mathrm{Ho}\mathcal{T}_+ \xleftarrow{\cong} \mathcal{HCW} \xrightarrow{H_\bullet^{\mathrm{CW}}} \mathcal{G}r\mathcal{M}od_R \ .$$

Analog verfahren wir im punktierten Fall. Der Funktor $\tilde{h}_\bullet$ ist invariant unter schwachen Äquivalenzen, also insbesondere unter Homotopieäquivalenzen. Somit ist er ebenfalls ein Homologiefunktor für die Ström-Modellstruktur. □

5.28. Bemerkung. Wir übertragen Bemerkung 5.5 auf die zelluläre Homologie.

(1) Wir betrachten den reduzierten zellulären Randoperator in Grad 1 etwas näher. Sei $j \in J^1$ und $i \in J^0 = X^0 \setminus \{x_0\}$, und sei $S^0 = \{1, -1\}$ mit Basispunkt 1. Dann erhalten wir die Matrixkoeffizienten

$$d_{ij}^1 = \deg(q_i^0 \circ \varphi_j^1) = \sum_{s \in (\varphi_j^1)^{-1}(i)} s \quad \in \quad \{-1, 0, 1\} \ ,$$

wobei wir hier $i$ als Punkt in $X^0 \setminus \{x_0\}$ verstehen.

(2) Wir definieren den *unreduzierten zellulären Kettenkomplex* $C_\bullet^{\mathrm{CW}}(X; W) = \tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X_+; W)$. In der obigen Formel für $d_{ij}^1$ erlauben wir jetzt $i \in X^0$. Die *unreduzierte zelluläre Homologie* bezeichnen wir mit

$$H_\bullet^{\mathrm{CW}}(X; W) = H_\bullet(C_\bullet^{\mathrm{CW}}(X; W); d_\bullet^{\mathrm{CW}}) = \tilde{H}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X_+; W) \ .$$

In Analogie zur Sequenz (*) auf Bemerkung 5.5 erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow \tilde{H}_n^{\mathrm{CW}}(X; W) \longleftarrow H_n^{\mathrm{CW}}(X; W) \longleftarrow H_n^{\mathrm{CW}}(\{x_0\}; W) \longleftarrow 0 \ .$$

Wenn $q \colon X \to \{x_0\}$ die konstante Abbildung bezeichne, folgt wieder

$$\tilde{H}_n^{\mathrm{CW}}(X; W) \cong \ker\big(q_* \colon H_n^{\mathrm{CW}}(X; W) \to H_n^{\mathrm{CW}}(\{x_0\}; W)\big) \ ,$$

und die reduzierte zelluläre Homologie ist ebenfalls unabhängig von der Wahl von $x_0$. Da $H_n^{\mathrm{CW}}(\{x_0\}; W) \cong \tilde{H}_n^{\mathrm{CW}}(S^0)$, folgt $H_n^{\mathrm{CW}}(X; W) \cong \tilde{H}_n^{\mathrm{CW}}(X; W)$ für alle $n \neq 0$ nach dem Dimensionsaxiom 5.2 (4).

(3) Wir definieren den *augmentierten zellulären Kettenkomplex* $\big(\bar{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X; M), \bar{d}_\bullet^{\mathrm{CW}}\big)$, indem wir die Abbildung $q_\# \colon C_0^{\mathrm{CW}}(X; W) \to C_0^{\mathrm{CW}}(\{x_0\}; W) = M$ in den unreduzierten Kettenkomplex mit einbauen. Das heißt, wir setzen

$$\bar{C}_n^{\mathrm{CW}}(X; M) = \begin{cases} C_n^{\mathrm{CW}}(X; M) & \text{falls } n \neq -1, \text{ und} \\ C_0^{\mathrm{CW}}(\{x_0\}; W) = M & \text{falls } n = -1, \end{cases}$$

$$\text{und} \qquad \bar{d}_n^{\mathrm{CW}} = \begin{cases} d_n^{\mathrm{CW}} & \text{falls } n \neq 0, \text{ und} \\ q_\# \colon C_0^{\mathrm{CW}}(X; W) \to M & \text{falls } n = 0. \end{cases}$$

Die Abbildung $\bar{d}_0^{\mathrm{CW}} = q_\#$ heißt *Augmentierung* und wird auch mit $\varepsilon$ bezeichnet. Aus der Konstruktion ergibt sich ein natürlicher Isomorphismus

$$H_\bullet\big(\bar{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X; M), \bar{d}_\bullet^{\mathrm{CW}}\big) \cong \ker\big(q_* \colon H_\bullet^{\mathrm{CW}}(X; W) \to H_\bullet^{\mathrm{CW}}(\{x_0\}; W)\big) \cong \tilde{H}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X; W) \ .$$

Da der augmentierte Kettenkomplex die gleiche Homologie wie der reduzierte Kettenkomplex liefert, aber keine Basispunkte benötigt, definiert man die reduzierte zelluläre Homologie später lieber als die Homologie des augmentierten Kettenkomplexes.

5.29. Bemerkung. Es gibt eine besonders elegante und vor allem funktorielle Möglichkeit, jedem topologischen Raum $X$ eine CW-Approximation zuzuordnen. Dazu betrachten wir den sogenannten *singulären* (*simplizialen*) *Komplex* von $X$. Zu jeder stetigen Abbildung $\sigma\colon \Delta^k \to X$ vom Standardsimplex $\Delta^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ nach $X$ betrachten wir eine $k$-Zelle in der Form eines Simplex, und wir kleben jede Seite dieses Simplexes an den $(k-1)$-Simplex, der der Einschränkung von $\sigma$ auf die jeweilige Seite entspricht. Dann lassen sich diese Abbildungen zu einer Abbildung von einem (zugegeben sehr großen) CW-Komplex $|\mathrm{sing}_\bullet X|$ nach $X$ verkleben, und man kann zeigen, dass es sich dabei um eine schwache Homotopieäquivalenz handelt. Tatsächlich ist diese Abbildung gerade die Einheit der Adjunktion $|\cdot| \dashv \mathrm{sing}_\bullet$ zwischen der geometrischen Realisierung und dem singulären Simplizialkomplex. Wir können jetzt also *singuläre Homologie* definieren als

$$H_\bullet(X;M) = H_\bullet^{\mathrm{CW}}(|\mathrm{sing}_\bullet X|\,;M)\ .$$

Der Vorteil gegenüber der CW-Approximation nach Satz 4.51 besteht darin, dass wir oben keine Wahlen in Abhängigkeit von $X$ getroffen haben. Für die reduzierte Homologie verwenden wir den augmentierten Komplex aus Bemerkung 5.28 (3).

5.30. Definition. Es sei $\Bbbk$ ein Körper, $h_\bullet$ ein unreduzierter gewöhnlicher Homologiefunktor mit Koeffizienten $\Bbbk$ und $X$ ein topologischer Raum, dann heißen die Dimensionen $b_k(X;\Bbbk) = \dim_\Bbbk h_k(X) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ der Homologie-Vektorräume von $X$ die *Betti-Zahlen* von $X$ über $\Bbbk$. Falls alle Betti-Zahlen endlich sind und fast alle verschwinden, ist die *Euler-Zahl* oder *Euler-Charakteristik* von $X$ definiert als

$$\chi(X) = \sum_k (-1)^k b_k(X;\Bbbk)\ .$$

Die Betti-Zahlen von $X$ hängen im allgemeinen vom gewählten Homologiefunktor $h_\bullet$ ab. Nach Satz 5.18 hängen sie nur von $\Bbbk$ ab, genauer von seiner Charakteristik, wenn $X$ ein CW-Komplex ist. Aber selbst für CW-Komplexe können verschiedene Körper unterschiedliche Betti-Zahlen liefern, siehe Beispiel 5.21. Die Euler-Zahl hängt zumindest für kompakte CW-Komplexe nicht von $\Bbbk$ ab, wie der folgende Satz zeigt. Dazu beachten wir, dass CW-Komplexe nach Satz 1.86 genau dann kompakt sind, wenn sie insgesamt nur aus endlich vielen Zellen bestehen.

5.31. Satz. *Sei $\Bbbk$ ein Körper und $X = X^n$ ein CW-Komplex mit endlich vielen Zellen in jeder Dimension $k$, und sei $c_k(X) = \#I^k < \infty$ die Anzahl der $k$-Zellen. Für alle $m$ gilt*

$$\sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} c_k(X) \geq \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} b_k(X,\Bbbk)\ , \tag{1}$$

$$c_m(X) \geq b_m(X,\Bbbk)\ , \tag{2}$$

$$\chi(X) = \sum_k (-1)^k c_k(X) \qquad \textit{falls } X \textit{ kompakt ist.} \tag{3}$$

Beweis. Man leitet (1) aus den Dimensionsformeln für $\Bbbk$-Vektorräume ab. Sei etwa $U \subset V$ ein Untervektorraum und $f\colon V \to W$ linear, dann gilt

$$\dim_\Bbbk U + \dim_\Bbbk (V/U) = \dim_\Bbbk V \qquad \text{und} \qquad \dim_\Bbbk V = \dim_\Bbbk \ker f + \dim_\Bbbk \operatorname{im} f\ .$$

Die Ungleichungen (2) und die Gleichung (3) folgen aus (1). Die Details sind Übung 5.96. □

5.32. Beispiel. Für die 2-Sphäre erhalten wir $\chi(S^2) = 2$, da die übliche CW-Struktur nur aus einer 0- und einer 2-Zelle besteht. Die Oberfläche eines konvexen Polyeders im $\mathbb{R}^3$ liefert eine andere CW-Struktur $X$ auf $S^2$ mit $e = c_0(X)$ „Ecken“, $k = c_1(X)$ „Kanten“ und $f = c_2(X)$ „Flächen“. Wir erhalten den *Eulerschen Polyedersatz*

$$2 = e - k + f\ .$$

## 5.c. Homologiefunktoren und Spektra

Wir haben im letzten Abschnitten gesehen, dass gewöhnliche Homologiefunktoren auf CW-Komplexen eindeutig bestimmt und (prinzipiell) mittels Kettenkomplexen berechenbar sind. Es bleibt die Existenz solcher Funktoren zu zeigen. In diesem Abschnitt geben wir eine Konstruktion allgemeiner Homologiefunktoren mit Hilfe von Spektren an. Ausgangspunkt hierfür ist Folgerung 5.4, wonach stabile Homotopiegruppen einen reduzierten Homologiefunktor bilden.

5.33. Bemerkung. Wir erinnern uns das Axiom (1) der Homotopieinvarianz in Definition 5.2. In der Strøm- (Quillen-) Modellstruktur bedeutet es, dass (schwach) homotopieäquivalente punktierte Räume isomorphe Homologie haben. Äquivalent dazu hätten wir auch fordern können, dass $\tilde{h}_\bullet\colon \mathcal{T}_+ \to \mathcal{M}od_R$ über die Homotopiekategorie $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$ zur jeweiligen Modellkategorie aus Definition 4.62 faktorisiert. Nach dem Fundamentalsatz 4.63 von Quillen ist diese Kategorie äquivalent zur „naiven“ Homotopiekategorie $\mathcal{HT}_{+cf}$ der fibrant-kofibranten Objekte in $\mathcal{T}_+$.

Mit anderen Worten legt $\tilde{h}_\bullet$ aufgrund des Axioms (1) einen naiv homotopieinvarianten Funktor $\tilde{h}_\bullet\colon \mathcal{HT}_{+cf} \to \mathcal{M}od_R$ fest, und umgekehrt definiert jeder solche Funktor einen homotopieinvarianten Funktor $\tilde{h}_\bullet\colon \mathcal{T}_+ \to \mathcal{M}od_R$ im Sinne von Axiom (1). Wir wollen uns das im Folgenden zunutze machen, um $\tilde{h}_\bullet(X)$ nur für „schöne“ Räume $X$ konstruieren zu müssen.

Konkret heißt das für die Strøm-Modellstruktur, dass wir nur gut punktierte Räume und gute Paare im Sinne von Definition 3.79 zu betrachten brauchen. Ein beliebiges Paar $(X, A)$ können wir zunächst durch den Abbildungszylinder der Inklusion $A \hookrightarrow X$ ersetzen, und diesen anschließend durch den Abbildungszylinder zur Inklusion des Basispunktes.

In der Quillen-Modellstruktur hingegen wenden wir die deutlich stärkeren Whitehead-Sätze wie in Bemerkung 4.53 erklärt an, um $(X, A)$ durch ein Paar von CW-Komplexen zu ersetzen.

Wir erinnern uns an die Kofasersequenz

$$SA \xleftarrow{q} X /\!\!/ A \xleftarrow{j} X \xleftarrow{\iota} A$$

einer Inklusion $A \hookrightarrow X$ aus Satz 4.67. Wenn wir eine andere Modellstruktur als die von Quillen oder die von Strøm benutzen, müssen wir uns überlegen, wie die zugehörige Kofasersequenz im einzelnen aussieht.

5.34. Proposition. *Es gibt eine Bijektion zwischen allgemeinen Homologiefunktoren $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$ und Paaren $(\tilde{h}_\bullet, \sigma_\bullet)$ aus je einem Funktor $\tilde{h}_k\colon \mathrm{Ho}\mathcal{T}_+ \to \mathcal{C}$ und einem natürlichen Stabilisierungsisomorphismus $\sigma_k\colon \tilde{h}_k(S\,\cdot\,) \to \tilde{h}_{k-1}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, mit folgenden Eigenschaften, so dass Homotopieinvarianz 5.2* (1) *und das Summenaxiom* (3) *gelten, sowie*

(2') Quotientenaxiom. *Für jede Kofaserung $(X, A)$ ist die folgende Sequenz exakt:*

$$\tilde{h}_k(X/A) \longleftarrow \tilde{h}_k(X) \longleftarrow \tilde{h}_k(A)\ .$$

*Dabei bezeichnet $\tilde{h}_\bullet$ in beiden Fällen denselben Funktor, und für alle Kofaserungen $(X, A)$ kommutiert das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \tilde{h}_k(SA) \arrow[d, "\sigma_k"'] & \tilde{h}_k(X/\!\!/A) \arrow[l, "q_*"'] \arrow[d] \\ \tilde{h}_{k-1}(A) & \tilde{h}_k(X/A) \arrow[l, "\partial_k"'] \end{tikzcd} \qquad (*)$$

*Eine natürliche Transformation zwischen zwei solchen Funktoren kommutiert genau dann mit den Randoperatoren $\partial_\bullet$, wenn sie mit den Stabilisierungsisomorphismen $\sigma_\bullet$ kommutiert.*

Wir haben in Satz 5.10 bereits einen natürlichen Stabilisierungshomomorphismus konstruiert. Aus technischen Gründen geben wir hier eine etwas andere Beschreibung.

Beweis. Es sei zunächst ein allgemeiner Homologiefunktor $\tilde{h}_\bullet$ gegeben. Wir betrachten die Abbildungen von Paaren $(X \cup_A ZA, A) \to (CA, A)$, bei der $X$ zu einem Punkt zusammengezogen wird, und $(X \cup_A ZA, A) \to (X, A)$, bei der der Zylinder $ZA$ auf $A$ gestaucht wird. Wegen der Natürlichkeit von $\partial$ erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{h}_{k-1}(A) \arrow[d, equal] & \tilde{h}_k(SA) \arrow[l, "\sigma_k=\partial_k"'] & \tilde{h}_k(CA) \arrow[l] \\
\tilde{h}_{k-1}(A) \arrow[d, equal] & \tilde{h}_k(X /\!\!/ A) \arrow[l, "\partial_k"'] \arrow[u, "q_*"] \arrow[d, "\cong"'] & \tilde{h}_k(X \cup_A ZA) \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d, "\cong"'] \\
\tilde{h}_{k-1}(A) & \tilde{h}_k(X/A) \arrow[l, "\partial_k"'] & \tilde{h}_k(X) \arrow[l] \; .
\end{tikzcd}$$

Mit Hilfe der oberen Sequenz definieren wir den natürlichen Stabilisierungshomomorphismus $\sigma$. Dann entspricht die linke Hälfte des Diagramms gerade (*). Das Quotientenaxiom (2') folgt aus der langen exakten Sequenz 5.2 (2).

Seien umgekehrt $(\tilde{h}_\bullet, \sigma_\bullet)$ gegeben. Wir wenden den Funktor $\tilde{h}_k$ auf die Kofasersequenz der Inklusion $A \hookrightarrow X$ an. Nach Satz 4.67 (1) ist jeder Abschnitt der Kofasersequenz aus zwei aufeinanderfolgen Abbildungen homotopieäquivalent zu einer Sequenz $Y/B \leftarrow Y \leftarrow B$ für eine passende Kofaserung $(Y, B)$, also ist die obere Sequenz im folgenden Diagramm wegen Homotopieinvarianz (1) und dem Quotientenaxiom (2') exakt. Wir konstruieren einen Ausschnitt aus der langen exakten Homologie-Sequenz des Paares $(X, A)$ als

$$\begin{tikzcd}
\tilde{h}_k(SX) \arrow[d, "\sigma_k"'] & \tilde{h}_k(SA) \arrow[l, "(S\iota)_*"'] \arrow[d, "\sigma_k"'] & \tilde{h}_k(X /\!\!/ A) \arrow[l, "q*"'] \arrow[d, "\cong"'] & \tilde{h}_k(X) \arrow[l, "j*"'] \arrow[dl] & \tilde{h}_k(A) \arrow[l, "\iota*"'] \\
\tilde{h}_{k-1}(X) & \tilde{h}_{k-1}(A) \arrow[l, "\iota*"'] & \tilde{h}_k(X/A) \arrow[l, "\partial_k"'] \; . & &
\end{tikzcd}$$

Das linke Quadrat kommutiert, da $\sigma_k$ natürlich ist, und das rechte ist genau das Diagramm (*) aus der Proposition.

Aus den obigen Konstruktionen folgt sofort, dass eine natürliche Transformation zwischen zwei solchen Funktoren genau dann mit $\sigma$ verträglich ist, wenn sie mit $\partial$ verträglich ist. □

Diese Überlegung vereinfacht die Konstruktion eines allgemeinen Homologiefunktors.

5.35. Lemma. *Es sei $\tilde{h}_\bullet \colon \mathcal{T}_+ \to \mathcal{C}$ ein allgemeiner reduzierter Homologiefunktor, und $E$ ein kofibranter Raum in $\mathcal{T}_+$. Dann definiert $\tilde{h}^E_\bullet(X) = \tilde{h}_\bullet(E \wedge X)$ für alle kofibranten Räume $X$ ebenfalls einen allgemeinen reduzierten Homologiefunktor.*

Wir nutzen hier also bereits Bemerkung 5.33 aus, um nur mit kofibranten Räumen arbeiten zu müssen. Wenn wir die Quillen-Modellstruktur benutzen, dürfen wir sogar annehmen, dass $E$ und $X$ CW-Komplexe sind.

Beweis. Es gilt $S(E \wedge X) \cong E \wedge (SX)$. Somit erbt $\tilde{h}^E_\bullet$ den Stabilisierungsisomorphismus $\sigma$ von $\tilde{h}_\bullet$.

Wenn $f \colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz ist, gilt das auch für $\mathrm{id}_E \wedge f \colon E \wedge X \to E \wedge Y$, und aus der Homotopieinvarianz (1) von $\tilde{h}_\bullet$ folgt die Homotopieinvarianz des neuen Funktors.

Der Einfachheit halber arbeiten wir ab jetzt wieder in der Strøm-Modellstruktur. Für ein gutes Paar $(X, A)$ ist auch $(E \wedge X, E \wedge A)$ ein gutes Paar nach Übung 3.132, und es gilt

$$(E \wedge X)/(E \wedge A) \cong E \wedge (X/A) \; .$$

Also erfüllt $\tilde{h}_\bullet^E$ genau wie $\tilde{h}_\bullet$ das Quotientenaxiom aus Proposition 5.34 (2').

Es sei jetzt $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie gut punktierter Räume. Mit den universellen Eigenschaften von Koprodukt und Smash-Produkt erhalten wir eine natürliche stetige Abbildung

$$\bigvee_{i\in I}(E\wedge X_i) \longrightarrow E\wedge \bigvee_{i\in I} X_i\ , \tag{*}$$

die als Abbildung von Mengen eine Bijektion ist, siehe Übung 3.131. Für jedes $i\in I$ induziert die Inklusion $E\wedge X_i \to \bigvee_{i\in I}(E\wedge X_i)$ eine Abbildung $X_i \to \hom\bigl(E, \bigvee_{i\in I}(E\wedge X_i)\bigr)$, und wir erhalten eine Abbildung

$$\bigvee_{i\in I} X_i \to \hom\Bigl(E, \bigvee_{i\in I}(E\wedge X_i)\Bigr)\ .$$

Nach Folgerung 4.34 ist $\cdot\wedge E$ linksadjungiert zu $\hom(E,\cdot)$, also schließen wir, dass (*) ein Homöomorphismus ist. Wir erhalten das Summenaxiom (3) für $\tilde{h}_\bullet^E$ aus dem Summenaxiom für $\tilde{h}_\bullet$, denn

$$\bigoplus_{i\in I}\tilde{h}_n(E\wedge X_i) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_n\Bigl(\bigvee_{i\in I}(E\wedge X_i)\Bigr) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_n\Bigl(E\wedge \bigvee_{i\in I} X_i\Bigr)\ . \qquad \square$$

Wir wären jetzt fertig, wenn wir einen Raum $E_0$ mit $\pi_0^s(E_0) = M \in \mathcal{A}b$ und $\pi_k^s(E_0) = 0$ für alle $k\neq 0$ angeben könnten. Denn dann würden wir $\tilde{h}_\bullet = \pi_\bullet^s$ wählen und erhielten einen Homologiefunktor mit Koeffizienten

$$\tilde{h}_k^{E_0}(S^0) = \pi_k^s(E_0\wedge S^0) = \pi_k^s(E_0)\ .$$

Leider geht es aber nicht so einfach. Denn $\pi_k^s(E_0)$ erkennen wir wegen Folgerung 3.78 erst am Raum $S^{k+2}E_0$. Um ein Element von $\pi_k^s(E_0)$ wie im Beweis von Satz 4.51 zu beseitigen, müssten wir also eine $(2k+3)$-Zelle an $S^{k+2}E_0$ ankleben. Den gleichen Effekt können wir in der Regel nicht dadurch erreichen, dass wir $E_0$ modifizieren.

Wir können stattdessen für $i\geq 2$ einen Raum $E_i$ betrachten mit $\pi_i(E_i)\cong M$ und $\pi_k(E_i)=0$ für $k\neq i$. Wir verschieben die Indizes entsprechend und setzen

$$\tilde{h}_k^i(X) = \pi_{k+i}^s(E_i\wedge X)\ .$$

Da $E_i$ und $E_i\wedge X$ dann $(i-1)$-zusammenhängend sind, sehen wir mit Folgerung 3.78, dass

$$\tilde{h}_k^i(S^0) = \pi_{k+i}^s(E_i) \cong \begin{cases} M & \text{für } k=0, \text{ und} \\ 0 & \text{für } i\neq k\leq i-2. \end{cases}$$

Für größere $k$ erhalten wir nach wie vor keine Aussage. Je größer $i$ ist, desto besser „approximieren“ wir also eine gewöhnliche Homologietheorie mit Koeffizienten $M$.

Wenn wir natürliche Transformationen zwischen den obigen allgemeinen Homologietheorien zu $E_i$ hätten, könnten wir jetzt eine gewöhnliche Homologietheorie $\tilde{h}$ mit Koeffizienten $M$ durch

$$\tilde{h}_k(X) = \varinjlim \tilde{h}_k^i(X) = \varinjlim \pi_{k+i}^s(E_i\wedge X) = \varinjlim \pi_{k+i}(E_i\wedge X)$$

konstruieren (zur letzten Gleichheit siehe Satz 5.38 unten). Das motiviert die folgende Definition.

5.36. Definition. Ein *Spektrum* $\mathbb{E} = (E_i, s_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ist eine Folge von CW-Komplexen $E_i$ und Inklusionsabbildungen $s_i\colon SE_i \to E_{i+1}$ von Unterkomplexen, den *Stabilisierungsabbildungen.*

Ein Spektrum $\mathbb{E}$ heißt *Suspensionsspektrum* oder *Einhängungsspektrum,* wenn ein $n_0$ existiert, so dass die Abbildungen $s_i$ für alle $i\geq n_0$ schwache Äquivalenzen sind, und $\Omega$-*Spektrum,* wenn die induzierten Abbildungen $E_i \to \Omega^1(E_{i+1}) = \hom(S^1, E_{i+1})$ für alle $i\geq n_0$ schwache Äquivalenzen sind.

Der Begriff des Spektrums ist eine „Stabilisierung“ des Begriffs des topologischen Raumes unter Einhängung. Das war die Hauptidee in den Arbeiten von Lima und Boardman, die Spektra zuerst definiert haben. Wir folgen hier dem Ansatz von Adams, nur CW-Spektra zu betrachten. Dadurch können wir später von „Zellen“ sprechen und konkrete Modelle für (Homotopieklassen von) Abbildungen angeben. In anderen Büchern heißen unsere Spektren teilweise auch Präspektren, da dort oft zusätzliche Anforderungen gestellt werden. Boardmans ursprünglicher Ansatz ist allgemeiner und abstrakter; wir kommen später darauf zurück, wenn wir Abbildungen zwischen Spektra definieren.

Mit Stabilisierung meinen wir, dass es bei einem Spektrum nur auf die Räume $E_i$ und Abbildungen $s_i$ für große $i$ ankommt. Beispielsweise können wir für alle $i < n_0$ stets $E_i = \mathrm{pt}$ setzen und für $s_i \colon \mathrm{pt} = SE_i \to E_{i+1}$ die konstante Abbildung wählen.

Da wir als Räume in der obigen Definition CW-Komplexe verwenden, ist es aufgrund der Sätze von Whitehead und Milnor egal, ob wir in der Definition von Suspensions- und $\Omega$-Spektren schwache Äquivalenzen oder Homotopieäquivalenzen verlangen.

Für ein Spektrum $\mathbb{E}$ und einen Homologiefunktor $\tilde{h}_\bullet$ definieren wir mit Lemma 5.35 neue Homologiefunktoren $\tilde{h}_\bullet^{\mathbb{E},i}$ durch

$$\tilde{h}_k^{\mathbb{E},i}(X) = \tilde{h}_{k+i}(E_i \wedge X)\ .$$

Die Stabilisierungsisomorphismen aus Proposition 5.34 liefern natürliche Transformationen

$$\tilde{h}_k^{\mathbb{E},i}(X) = \tilde{h}_{k+i}(E_i \wedge X) \xleftarrow[\cong]{\sigma_{k+i+1}} \tilde{h}_{k+i+1}(S^1 \wedge E_i \wedge X) \xrightarrow{(s_i \wedge \mathrm{id}_X)_*} \tilde{h}_{k+i+1}(E_{i+1} \wedge X) = \tilde{h}_k^{\mathbb{E},i+1}(X)\ .$$

Sie sind natürlich und mit den Stabilisierungsisomorphismen $\sigma_\bullet^{\mathbb{E},i}$ verträglich, also auch mit den Randoperatoren aus Definition 5.2. Wir müssen aber noch den Grenzprozess $i \to \infty$ verstehen.

5.37. Lemma. *Es sei $(\tilde{h}_\bullet^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ eine Folge allgemeiner Homologiefunktoren in der Kategorie $\mathcal{C} = \mathcal{M}od_R$ der (rechts-) $R$-Moduln, und es seien $\tau_\bullet^i \colon \tilde{h}_\bullet^i \to \tilde{h}_\bullet^{i+1}$ natürliche Transformationen, die mit den Randoperatoren $\partial$ verträglich sind. Dann ist auch der Kolimes*

$$\tilde{h}_\bullet(X) = \varinjlim \tilde{h}_\bullet^i(X)$$

*ein allgemeiner Homologiefunktor.*

Beweis. Nach Proposition 5.34 sind die $\tau_\bullet^i$ auch mit den Stabilisierungsisomorphismen $\sigma_\bullet^i$ verträglich. Also induzieren diese im Kolimes Stabilisierungsisomorphismen $\sigma_\bullet$ für $\tilde{h}_\bullet$.

Sei $f \colon X \to Y$ eine schwache Äquivalenz, dann sind alle $\tilde{h}_\bullet^i f \colon \tilde{h}_\bullet^i(X) \to \tilde{h}_\bullet^i(Y)$ Isomorphismen, also auch ihr Kolimes $\tilde{h}_\bullet f \colon \tilde{h}_\bullet(X) \to \tilde{h}_\bullet(Y)$, und es folgt Homotopieinvarianz (1).

Es sei $(X, A)$ ein gutes Paar, dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{h}_k^i(X/A) \arrow[d, "\tau_k^i"'] & \tilde{h}_k^i(X) \arrow[l, "q_*"'] \arrow[d, "\tau_k^i"'] & \tilde{h}_k^i(A) \arrow[l, "\iota_*"'] \arrow[d, "\tau_k^i"'] \\
\tilde{h}_k^{i+1}(X/A) \arrow[d, dashed] & \tilde{h}_k^{i+1}(X) \arrow[l, "q_*"'] \arrow[d, dashed] & \tilde{h}_k^{i+1}(A) \arrow[l, "\iota_*"'] \arrow[d, dashed] \\
\tilde{h}_k(X/A) & \tilde{h}_k(X) \arrow[l, "q_*"'] & \tilde{h}_k(A) \arrow[l, "\iota_*"']
\end{tikzcd}$$

Wir überprüfen Exaktheit der Grenzsequenz bei $X$. Für jedes $\alpha \in \tilde{h}_k(A)$ existiert ein $\alpha^i \in \tilde{h}_k^i(A)$, das im Kolimes auf $\alpha$ abgebildet wird. Es gilt $(q_* \circ \iota_*)(\alpha^i) = 0 \in \tilde{h}_k^i(X/A)$, wegen Kommutatität also auch $(q_* \circ \iota_*)(\alpha) = 0 \in \tilde{h}_k(X/A)$.

Zu jedem $\xi \in \ker(q_*) \subset \tilde{h}_k(X)$ gibt es ein $\xi^i \in \tilde{h}^i_k(X)$, das im Kolimes auf $\xi$ abgebildet wird, und ein $j \geq i$, so dass $\xi_j = \big(\tau_k^{j-1} \circ \cdots \circ \tau_k^i\big)(\xi^i) \in \ker(q^*) \subset \tilde{h}^j_k(X)$. Folglich existiert $\alpha^j \in \tilde{h}^j_k(A)$ mit $\iota_*(\alpha^j) = \xi^j$. Das Bild $\alpha$ in $\tilde{h}_k(A)$ wird dann auf $\xi$ abgebildet. Somit erhalten wir das Quotientenaxiom 5.34 (2').

Das Summenaxiom 5.2 (3) lässt sich ganz genauso elementweise überprüfen. Alternativ dazu können wir uns überlegen, das der Kolimes nach Definition 4.7 ein linksadjungierter Funktor und somit nach Lemma 4.14 mit Kolimiten verträglich ist. Da das Koprodukt ebenfalls ein Kolimes ist, ist es für eine Familie punktierter Räume $(X_j)_{j\in J}$ mit $X = \bigvee X_j$ egal, ob wir erst das Koprodukt $\tilde{h}^i_\bullet(X)$ der $\tilde{h}^i_\bullet(X_j)$ bilden und dann den Kolimes $\tilde{h}_\bullet(X)$, oder erst die Kolimiten $\tilde{h}_\bullet(X_j)$ und dann das Koprodukt. Nach Proposition 5.34 ist $\tilde{h}_\bullet$ also ein allgemeiner Homologiefunktor. $\square$

5.38. Satz und Definition. *Zu jedem Spektrum $\mathbb{E} = (E_i, s_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ existiert ein allgemeiner reduzierter Homologiefunktor $\tilde{E}_\bullet$ mit Werten in $\mathcal{A}b$, gegeben durch*

$$\tilde{E}_k(X) = \varinjlim \pi^s_{k+i}(E_i \wedge X) \cong \varinjlim \pi_{k+i}(E_i \wedge X)\ .$$

*Man nennt $\tilde{E}_\bullet$ den* (reduzierten) Homologiefunktor *zum Spektrum $\mathbb{E}$.*

Beweis. Aus den Lemmata 5.35 und 5.37 und der Konstruktion der natürlichen Transformationen $\tau$ nach Definition 5.36 folgt, dass $\tilde{E}_k$ ein reduzierter Kohomologiefunktor ist.

Die Abbildungen $\pi_{k+i}(E_i \wedge X) \to \pi^s_{k+i}(E_i \wedge X)$ liefern eine natürliche Abbildung

$$\varinjlim \pi_{k+i}(E_i \wedge X) \longrightarrow \varinjlim \pi^s_{k+i}(E_i \wedge X) = \tilde{E}_k(X) \tag{*}$$

Für die Umkehrabbildung repräsentieren wir $a \in \tilde{E}_k(X)$ durch ein Element $a_i \in \pi^s_{k+i}(E_i \wedge X)$, und dieses wiederum durch $a_{i,\ell} \in \pi_{k+i+\ell}(S^\ell E_i \wedge X)$. Betrachte dazu das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & & \cdots & & \\
 & & \pi_{k+2}(S^2E_0 \wedge X) \arrow[ur] \arrow[dr, "(Ss_0\wedge \mathrm{id}_X)_*"] & & \cdots & \\
 & \pi_{k+1}(SE_0 \wedge X) \arrow[ur, "S"'] \arrow[dr, "(s_0\wedge \mathrm{id}_X)_*"] & & \pi_{k+2}(SE_1 \wedge X) \arrow[dr, "(s_1\wedge \mathrm{id}_X)_*"] & & \cdots \\
\pi_k(E_0 \wedge X) \arrow[ur, "S"'] & & \pi_{k+1}(E_1 \wedge X) \arrow[ur, "S"'] & & \pi_{k+2}(E_2 \wedge X) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Mehrfaches Anwenden der Stabilisierungsabbildungen $s_\bullet$ liefert $a_{i+\ell,0} \in \pi_{k+i+\ell}(E_{i+\ell} \wedge X)$, welches das Bild von $a_i$ in $\pi^s_{k+i+\ell}(E_{i+\ell} \wedge X)$ und damit ebenfalls $a \in \tilde{E}_k(X)$ repräsentiert. Dann bilden wir $a$ auf das Bild von $a_{i+\ell,0}$ in $\operatorname{colim} \pi_{k+i}(E_i \wedge X)$ ab, das liefert die Umkehrabbildung zu (*). $\square$

5.39. Beispiel. Das *Sphärenspektrum* $\mathbb{S}$ ist definiert als $(S^i, s_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, mit $s_i = \mathrm{id}_{S^{i+1}} \colon SS^i \to S^{i+1}$. Es ist demnach ein Suspensionsspektrum. Der zugehörige Homologiefunktor besteht aus den stabilen Homotopiegruppen aus Folgerung 5.4. Wir erhalten also (noch) nichts Neues.

5.40. Bemerkung. Die obige Konstruktion ist sehr allgemein. Sie liefert uns im nächsten Abschnitt alle gewöhnlichen Homologiefunktoren mit Koeffizienten in $\mathcal{A}b$. Später lernen wir Spektren kennen, die verschiedene Bordismustheorien liefern.

Der Brownsche Darstellungssatz besagt, dass jeder allgemeine Homologiefunktor zur Quillen-Modellstruktur, der invariant unter gerichteten Kolimiten ist, von einem Spektrum herkommt. Dabei ist Invarianz unter gerichteten Kolimiten eine Verschärfung des Summenaxioms.

## 5.d. Das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum

Um die Existenz eines gewöhnlichen Homologiefunktors zu zeigen, müssen wir jetzt nur noch das passende Spektrum konstruieren. Da wir mit stabilen Homotopiegruppen starten, arbeiten wir zunaächst in der Kategorie $\mathcal{A}b = \mathcal{M}od_{\mathbb{Z}}$ der abelschen Gruppen. Mit einem kleinen Trick gelingt es uns dann, auch $R$-Moduln als Koeffizienten zuzulassen. Andere mögliche Konstruktionen gewöhnlicher Homologiefunktoren sind singuläre Homologie oder Garbenkohomologie.

Am Schluss dieses Abschnitts betrachten wir die so konstruierten Homologiefunktoren $\tilde{H}_\bullet(\,\cdot\,;G)$ genauer und beweisen insbesondere den Satz von Hurewicz, der die erste nicht verschwindende Homotopiegruppe eines zusammenhängenden Raumes mit der entsprechenden Homologiegruppe $\tilde{H}_k(X;\mathbb{Z})$ in Verbindung bringt. Als Folgerung erhalten wir auch eine homologische Fassung des Satzes 4.46 von Whitehead.

5.41. Definition. Es sei $G$ eine Gruppe und $n \geq 1$. Ein *Eilenberg-Mac Lane-Raum* zu $G$ im Grad $n$ ist ein punktierter CW-Komplex $K(G,n)$ in $\mathcal{T}_+$ mit $\pi_k(K(G,n)) = 0$ für alle $k \neq n$ zusammen mit einem Isomorphismus

$$\varphi\colon \pi_n\big(K(G,n)\big) \xrightarrow{\cong} G\,. \tag{1}$$

Ein *Eilenberg-Mac Lane-Spektrum* zur abelschen Gruppe $G$ ist ein Spektrum $\mathbb{H}G = (HG_n, s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, für das ein $n_0 \geq 1$ existiert, so dass $HG_n$ für alle $n \geq n_0$ ein Eilenberg-Mac Lane-Raum mit einem Isomorphismus $\varphi_n\colon \pi_n(HG_n) \to G$ ist, und so dass für alle $n \geq n_0$ das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} \pi_n(HG_n) \arrow[r, "S", "\cong"'] \arrow[d, "\varphi_n"', "\cong"] & \pi_{n+1}(SHG_n) \arrow[d, "s_{n*}"', "\cong"] \\ G & \pi_{n+1}(HG_{n+1}) \arrow[l, "\varphi_{n+1}", "\cong"'] \end{tikzcd}\,. \tag{2}$$

Ein Eilenberg-Mac Lane-Raum hat nur eine nicht verschwindende Homotopiegruppe. Dabei sind die Isomorphismen $\varphi$ wichtig. Die Notationen $K(G,n)$ und $HG_n$ sind beide gebräuchlich, die letztere passt etwas besser zu unser Notation für Spektra.

Nach Proposition 3.5 kann es Eilenberg-Mac Lane-Räume zu nicht-abelschen Gruppen nur in Grad 1 geben. Da diese in manchen Bereichen der Topologie und Geometrie recht wichtig sind, haben wir sie hier bereits mitdefiniert.

5.42. Beispiel. Wir können bereits einige Eilenberg-Mac Lane-Räume angeben.

(1) Der Kreis $S^1$ ist ein $K(\mathbb{Z},1)$ nach Beispiel 3.27.
(2) Nach Übung 3.104 ist der $n$-Torus $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ ein $K(\mathbb{Z}^n,1)$.
(3) Sei allgemeiner $(M,g)$ eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtpositiver Schnittkrümmung, dann ist ihre universelle Überlagerung $\tilde{M}$ nach dem Satz von Hadamard-Cartan zusammenziehbar. Nach Folgerung 3.26 ist $M$ dann ein $K(\pi_1(M),1)$.
(4) Der reell projektive Raum $\mathbb{R}P^\infty = \varinjlim S^n/(\mathbb{Z}/2)$ ist ein $K(\mathbb{Z}/2,1)$.
(5) Der komplex projektive Raum $\mathbb{C}P^\infty = \varinjlim S^{2n+1}/S^1$ ist ein $K(\mathbb{Z},2)$, siehe Beispiel 3.43 (1).
(6) Der quaternionisch projektive Raum $\mathbb{H}P^\infty$ ist kein Eilenberg-Mac Lane-Raum, denn es zwar $\pi_4(\mathbb{H}P^\infty) \cong \pi_4(S^4) = \mathbb{Z}$, aber $\pi_k(\mathbb{H}P^\infty) \cong \pi_{k-1}(S^3)$, siehe Beispiel 3.43 (2), und $\pi_5(\mathbb{H}P^\infty) \cong \pi_4(S^3) = \mathbb{Z}/2 \neq 0$ nach Satz 3.99.

5.43. Satz. *Zu jeder abelschen Gruppe $G$ existiert ein Eilenberg-MacLane-Spektrum $(HG_\bullet, s_\bullet)$ aus CW-Komplexen mit $HG_n = \mathrm{pt}$ für alle $n \leq 0$ und $HG_n \cong K(G,n)$ für alle $n \geq 1$. Diese können so konstruiert werden, dass $HG_n$ außer dem Basispunkt keine Zellen der Dimension $< n$*

*enthält. Die Räume $HG_n$ sind bis auf eine eindeutige Homotopieäquivalenz eindeutig, und die Abbildungen $s_n$ bis auf Homotopie.*

*Zu jedem Homomorphismus $f\colon G \to K$ existiert eine bis auf Homotopie eindeutige Familie von Abbildungen $Hf_n\colon HG_n \to HK_n$ zu $(HG_\bullet, s_\bullet)$ und $(HK_\bullet, t_\bullet)$, so dass die folgenden Diagramme für alle $n \geq 1$ kommutieren.*

$$\begin{tikzcd} SHG_{n-1} \arrow[r, "s_{n-1}"] \arrow[d, "SHf_{n-1}"'] & HG_n \arrow[d, "Hf_n"] \\ SHK_{n-1} \arrow[r, "t_{n-1}"] & HK_n \end{tikzcd} \qquad \textit{und} \qquad \begin{tikzcd} \pi_n(HG_n) \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] \arrow[d, "Hf_{n*}"'] & G \arrow[d, "f"] \\ \pi_n(HK_n) \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] & K \end{tikzcd} .$$

Die Zuordnung $G \rightsquigarrow (HG_\bullet, s_\bullet)$ ist fast funktoriell: seien $f\colon G \to K$ und $g\colon K \to L$ Homomorphismen abelscher Gruppen, dann sind die Abbildungen $H(g \circ f)$ und $Hg \circ Hf$ homotop. Man beachte, dass wir bei $Hf_\bullet$ nicht von „Abbildungen von Spektren“ sprechen — dieser Begriff hat später eine andere, allgemeinere Bedeutung.

Beweis. Unsere Konstruktion lehnt sich an den Beweis des CW-Approximationssatzes 4.51 an. Wir starten mit $HG_n = \mathrm{pt}$ für alle $n \leq 0$.

Sei jetzt $n \geq 1$ und $HG_{n-1}$ bereits konstruiert. Wir konstruieren ein CW-Paar $(HG_n, SHG_{n-1})$ und definieren $s_{n-1}\colon SHG_{n-1} \to HG_n$ als Inklusionsabbildung. Im Fall $n = 1$ wählen wir $\mathrm{pt} = SHG_0$ als 0-Skelett. Als Indexmenge $J_1^1$ wählen wir eine Erzeugermenge von $G$ und erhalten

$$HG_1^1 = \bigvee_{j \in J_1^1} S^1 \qquad \text{und} \qquad \pi_1(HG_1^1) = \coprod_{j \in J_1^1} \mathbb{Z} .$$

Als $J_1^2$ wählen wir eine Menge von Relationen, das sind Erzeuger von $\ker(\pi_1(HG_1^1) \twoheadrightarrow G)$ als Normalteiler in $\pi_1(HG_1^1)$, siehe Satz 2.52. Wir erhalten $HG_1^2$ durch entsprechendes Ankleben von 2-Zellen. Anschließend kleben wir induktiv $k$-Zellen für $k \geq 3$ so an, dass $\pi_{k-1}(HG_1) \cong \pi_{k-1}(HG_1^k) = 0$. Wegen Folgerung 4.44 existiert der in Definition 5.41 (1) verlangte Isomorphismus

$$\varphi\colon \pi_1(HG_1) \cong \pi_1(HG_1^2) \longrightarrow G .$$

Im Fall $n = 2$ ist die Abbildung $S\colon \pi_1(HG_1) \to \pi_2(SHG_1)$ nach dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.74 surjektiv. Nach Folgerung 3.78 gilt

$$\pi_2\big(S(HG_1^1)\big) = \pi_2^s\big(S(HG_1^1)\big) \cong \bigoplus_{j \in J_1^1} \pi_2^s(S^2) \cong \bigoplus_{j \in J_1^1} \mathbb{Z} ,$$

und diese Gruppe bildet surjektiv auf $G$ ab. Für jedes $j \in J_1^2$ realisiert $S\varphi_j^2\colon S^2 \to S(HG_1^1)$ dieselbe Relation in $G$ wie bei der Konstruktion von $HG_1^2$. Daher ist die Abbildung $\pi_2(SHG_1) \to \pi_2(HG_2)$ sogar ein Isomorphismus. Indem wir Zellen der Dimension $\geq 4$ an $SHG_1$ ankleben, erhalten einen $K(G, 2)$ zusammen mit dem kommutativen Diagramm in Definition 5.41 (2) für $n = 1$.

Für $n \geq 3$ ist $HG_{n-1}$ nach Voraussetzung ein $K(G, n-1)$ und daher $(n-2)$-zusammenhängend. Daher ist die Abbildung $\pi_{k-1}(HG_{n-1}) \to \pi_k(SHG_{n-1})$ nach dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.74 ein Isomorphismus für $k \leq 2n-3 \geq n$ und surjektiv für $k = 2n-2$, so dass $\pi_k(SHG_{n-1}) = \pi_{k-1}(HG_{n-1}) = 0$ für alle $k \leq 2n-2$ mit Ausnahme von $k = n$. Wir erhalten also einen $K(G, n)$, indem wir Zellen der Dimension $\geq 2n$ ankleben. Der Isomorphismus $\varphi_n\colon \pi_n(SHG_{n-1}) \cong \pi_n(HG_n) \to G$ ist durch das Diagramm in Definition 5.41 (2) bereits bestimmt.

Seien jetzt Eilenberg-Mac Lane-Spektren $\mathbb{H}G = (HG_n, s_n)$ und $\mathbb{H}K = (HK_n, t_n)$ wie im Satz gegeben. Wir nehmen zunächst an, dass $\mathbb{H}G = (HG_n, s_n)$ wie oben konstruiert wurde. Dann setzen wir $Hf_n = 0\colon \mathrm{pt} \to HK_n$ für $n \leq 0$. Für $n = 1$ wählen wir zu jeder 1-Zelle $e_k^1$ einen Repräsentanten $\gamma\colon S^1 \to HK_1$ des Bildes des entsprechenden Erzeugers von $G$ unter $f$ in $\pi_1(HK_1) = K$ und

definieren dadurch

$$Hf_1^1 \colon HG_1^1 = \bigvee_{j \in J^1} S^1 \to HK_1 \ .$$

Sei $\varphi_j^2$ die Anklebeabbildung einer 2-Zelle $e_j^2$ von $HG$. Da $f$ ein Gruppenhomorphismus ist, ist dann $Hf_1^1 \circ \varphi_j^2$ in $HK_1$ zusammenziehbar, und wir können $Hf_1^1$ zu $Hf_1^2 \colon HG_1^2 \to HK_1$ ausdehnen. Da $HK_1$ ein $K(K,1)$ ist, können wir $Hf_1$ induktiv auf allen höheren Skeletten definieren. Nach Konstruktion kommutiert das rechte Diagramm im Satz für $n = 1$.

Sei jetzt $n \geq 2$. Nach Konstruktion erhalten wir zunächst eine Abbildung

$$SHf_{n-1} \colon SHG_{n-1} \longrightarrow SHK_{n-1} \xrightarrow{t_{n-1}} HK_n \ ,$$

diese können wir wie oben Zelle für Zelle auf ganz $HG_n$ ausdehnen, so dass das linke Diagramm im Satz kommutiert. Das rechte Diagramm kommutiert dann ebenfalls, denn nach Konstruktion und Definition 5.41 (2) kommutieren alle Seiten des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_n(SHG_{n-1}) \arrow[dl, "(s_{n-1})_*", "\cong"'] \arrow[dd, "(SHf_{n-1})_*"'] \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] & & G \arrow[dd, "f"] & \pi_{n-1}(HG_{n-1}) \arrow[l, "S"', "\cong"] \arrow[dl, "\varphi"', "\cong"] \arrow[dd, "(Hf_{n-1})_*"] \\
\pi_n(HG_n) \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dd, "(Hf_n)_*"'] & & & & \\
 & \pi_n(SHK_{n-1}) \arrow[dl, "(t_{n-1})_*", "\cong"'] \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] & & K & \pi_{n-1}(HK_{n-1}) \arrow[l, "S"', "\cong"] \arrow[dl, "\varphi"', "\cong"] \\
\pi_n(HK_n) \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] & & & &
\end{tikzcd} \ .$$

mit Ausnahme der vorderen.

Falls das Spektrum $\mathbb{H}G$ nicht wie oben konstruiert wurde, sei $\mathbb{E}$ zu $G$ wie oben konstruiert. Wir erhalten kommutierende Abbildungen

$$\begin{tikzcd}
SHG_n \arrow[d] & SE_n \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & SHK_n \arrow[d] \\
HG_{n+1} & E_{n+1} \arrow[l] \arrow[r] & HK_{n+1} \ .
\end{tikzcd}$$

Nach dem Satz 4.46 von Whitehead sind die Abbildungen $E_n \to HG_n$ Homotopieäquivalenzen, so dass wir auch eine passende Abbildung $HG_n \to HK_n$ erhalten.

Seien schließlich eine weitere Folge von Abbildungen $g_n \colon HG_n \to HK_n$ mit $g_n|_{SHG_{n-1}} = Sg_{n-1}$ und $g_{n*} = f \colon \pi_n(HG_n) \to \pi_n(HK_n)$ gegeben. Da $\pi_k(HK_n) = 0$ für alle $k \neq n$, lässt sich induktiv eine Familie von Homotopien $h_n \colon HG_n \times I \to HK_n$ zwischen $Hf_n$ und $g_n$ konstruieren. $\square$

Mit den so konstruierten Eilenberg-Mac Lane-Spektren können wir jetzt gewöhnliche Homologiefunktoren konstruieren. Wir fassen unsere bisherigen Ergebnisse in einem Satz zusammen.

5.44. Satz. *Es sei $R$ ein Ring und $\mathcal{M}od_R$ die Kategorie der (Rechts-) $R$-Moduln.*

(1) *Für jeden $R$-Modul $M$ existiert ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor $\tilde{H}_\bullet(\,\cdot\,;M) \colon \mathcal{T}_+ \to \mathcal{M}od_R$ mit*

$$\tilde{H}_k(X;M) = \varinjlim \pi_{k+\ell}(HM_\ell \wedge X) \ ,$$

*der das Dimensionsaxiom 5.2 (4) mit $\tilde{H}_0(S^0;M) \cong M$ erfüllt.*

(2) *Zu jedem Modulhomomorphismus $f \colon M \to N$ existiert eine natürliche Transformation $\tau_{f,\bullet} \colon \tilde{H}_\bullet(\,\cdot\,;M) \to \tilde{H}_\bullet(\,\cdot\,;N)$, die mit den Randoperatoren aus Definition 5.2 (2) verträglich ist, so dass $\tau_{f,0}(S^0) = f \colon \tilde{H}_0(S^0;M) = M \to N = \tilde{H}_0(S^0;N)$.*

(3) *Sei $g \colon L \to M$ ein weiterer Modulhomomorphismus, dann gilt $\tau_{f,\bullet} \circ \tau_{g,\bullet} = \tau_{f \circ g,\bullet}$.*

(4) *In der Quillen-Modellstruktur ist jeder andere gewöhnliche reduzierte Homologiefunktor mit den obigen Eigenschaften zu* $\tilde{H}_\bullet(\,\cdot\,;M)$ *natürlich isomorph.*

Wir können (1)–(3) wie folgt interpretieren: es gibt einen Funktor $\tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,;\,\cdot\,)$ von der Kategorie $\mathcal{M}od_R$ in die Kategorie der gewöhnlichen Homologiefunktoren mit Werten in $\mathcal{M}od_R$, wobei Morphismen gerade natürliche Transformationen sind, die mit den Randoperatoren beziehungsweise den Stabilisierungs-Isomorphismen verträglich sind, siehe Proposition 5.34.

Beweis. Wir arbeiten hier mit $R = \mathbb{Z}$, so dass $\mathcal{M}od_R$ zur Kategorie $\mathcal{A}b$ der abelschen Gruppen äquivalent ist. Den allgemeinen Fall betrachten wir in Übung 5.99. Die Existenzaussage (1) folgt aus den Sätzen 5.38 und 5.43.

Wir konstruieren die natürliche Transformation zu (2) durch

$$\tau_{f,k}(X) = \varinjlim\big((Hf_\ell \wedge \mathrm{id}_X)_*\colon \pi_{k+\ell}(HM_\ell \wedge X) \longrightarrow \pi_{k+\ell}(HN_\ell \wedge X)\big)\ .$$

Behauptung (3) folgt, indem wir $(f \circ g)_\ell$ durch $f_\ell \circ g_\ell$ ersetzen, was aufgrund der Eindeutigkeitsaussage in Satz 5.43 möglich ist.

Zur Eindeutigkeit in der Quillen-Modellstruktur sei ein weiterer solcher Funktor $\tilde{h}_\bullet$ und ein Raum $Y$ in $\mathcal{T}$ gegeben. Es sei $g\colon X \to Y$ eine CW-Approximation von $Y$, dann sind die Abbildungen $g_*\colon \tilde{h}_k(X) \to \tilde{h}_k(Y)$ und $g_*\colon \tilde{H}_k(X;M) \to \tilde{H}_k(Y;M)$ Isomorphismen und durch Satz 4.51 eindeutig festgelegt. Mit Satz 5.18 (2) erhalten wir den in (4) gesuchten natürlichen Isomorphismus. □

5.45. Proposition. *Sei* $HM_\bullet$ *ein Eilenberg-Mac Lane-Spektrum zum* $R$*-Modul* $M$*. Für jeden topologischen Raum* $X$ *gilt*

$$\tilde{H}_k(X;M) = \pi_{k+\ell}(HM_\ell \wedge X) \qquad \text{für alle } \ell \geq k+2\ . \tag{1}$$

*Falls* $X$ *ein* $n$*-zusammenhängender Raum ist für ein* $n \geq 0$*, gilt sogar*

$$\tilde{H}_k(X;M) = \begin{cases} 0 & \text{für alle } k \leq n, \text{ und} \\ \pi_{k+\ell}(HM_\ell \wedge X) & \text{für alle } k > n \text{ und alle } \ell \geq \max(k-n,1)\ . \end{cases} \tag{2}$$

Beweis. Da alle auftretenden Funktoren unter schwachen Äquivalenzen invariant sind, dürfen wir nach Satz 4.51 annehmen, dass $X$ ein CW-Komplex ist. Wenn $X$ ein $n$-zusammenhängender Raum ist, dürfen wir außerdem annehmen, dass das $n$-Skelett nur aus einem Punkt besteht. Andernfalls setzen wir $n = -1$ und $X^{-1} = \mathrm{pt}$.

Wenn wir $HM_\ell$ wie im Beweis des Satzes 5.43 konstruieren, besteht $HM_\ell$ nur aus Zellen der Dimension $\geq \ell$. Also besteht $HM_\ell \wedge X$ nach der Konstruktion zu Proposition 4.54 (4) nur aus Zellen der Dimension $> n + \ell$. Es gilt

$$\pi_{k+\ell}(HM_\ell \wedge X) = 0 \qquad \text{für alle } k \leq n\ ,$$

also $\tilde{H}_k(X;M) = 0$ für alle $k \leq n$.

Es sei jetzt $k > n$. Da wir beim Übergang von $SHM_\ell$ zu $HM_{\ell+1}$ im Beweis von Satz 5.43 nur Zellen der Dimension $\geq 2(\ell+1)$ ankleben, ist die Abbildung

$$SHM_\ell \wedge X \xrightarrow{s_\ell \wedge \mathrm{id}_X} HM_{\ell+1} \wedge X$$

nach Folgerung 4.44 eine $(n+2\ell+2)$-zusammenhängende Abbildung. Außerdem ist $HM_\ell \wedge X$ ein $(n+\ell)$-zusammenhängender Raum. Nach dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.74 ist daher

$$\pi_{k+\ell}(HM_\ell \wedge X) \xrightarrow[\cong]{S} \pi_{k+\ell+1}(SHM_\ell \wedge X) \xrightarrow[\cong]{(s_\ell \wedge \mathrm{id}_X)_*} \pi_{k+\ell+1}(HM_{\ell+1} \wedge X\ ,$$

sofern $\ell \geq k - 2n$ und $\ell \geq k - n$. Mit Satz 5.44 (1) folgt (1) und der zweite Fall in (2). □

Wegen Beispiel 5.42 (1) können wir $H\mathbb{Z}_1 = S^1$ wählen. Nach Proposition 5.45 hat $\tilde{H}_n(S^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ einen offensichtlichen Erzeuger

$$\varepsilon_n = [\mathrm{id}_{S^{n+1}}] \in \pi_{n+1}(S^1 \wedge S^n) = \tilde{H}_n(S^n;\mathbb{Z}) \ .$$

5.46. Definition. Es sei $X$ ein topologischer Raum und $n \geq 1$. Dann ist der *Hurewicz-Homomorphismus* $\eta_n \colon \pi_n(X) \to \tilde{H}_n(X;\mathbb{Z})$ definiert durch

$$\eta_n([f]) = f_*(\varepsilon_n) \in \tilde{H}_n(X;\mathbb{Z}) \ .$$

Wir erinnern uns an die Abelisierung $G^{\mathrm{ab}} = G/[G,G]$ aus Bemerkung 2.17 (2).

5.47. Satz (Hurewicz). *Der Hurewicz-Homomorphismus ist ein Gruppenhomomorphismus. Wenn $X$ zusammenhängend ist, induziert $\eta_1$ den* Hurewicz-Isomorphismus

$$\pi_1(X)^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_1(X;\mathbb{Z}) \ . \tag{1}$$

*Wenn $X$ ein $n$-zusammenhängender Raum ist mit $n \geq 1$, erhalten wir den Hurewicz-Isomorphismus*

$$\eta_{n+1} \colon \pi_{n+1}(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{n+1}(X;\mathbb{Z}) \ . \tag{2}$$

Beweis. Wegen der Homotopieinvarianz von $\tilde{H}_\bullet(\,\cdot\,;\mathbb{Z})$ ist $\eta_n$ wohldefiniert. Seien $f, g \colon S^n \to X$ punktierte Abbildungen. Mit der „Einschnürungsabbildung“ $d^n \colon S^n \to S^n \vee S^n$ aus dem Beweis von Satz 5.11 gilt $[f]+[g] = [(f \vee g) \circ d^n] \in \pi_n(X)$. Die Einhängung dieser Abbildung ist $(Sf \vee Sg) \circ d^{n+1}$, somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\eta_n([f]+[g]) &= \big((f \vee g) \circ d^n\big)_*[\mathrm{id}_{S^{n+1}}] = \big[S\big((f \vee g) \circ d^n\big) \circ \mathrm{id}_{S^{n+1}}\big] \\ &= [(Sf \vee Sg) \circ d^{n+1}] = [Sf] + [Sg] = \eta_n([f]) + \eta_n([g]) \quad \in \quad \pi_{n+1}(SX) \ .\end{aligned}$$

Da $\pi_{n+1}(SX)$ linear nach $\tilde{H}_\bullet(X;\mathbb{Z})$ abbildet, ist $\eta_n \colon \pi_n(X) \to \tilde{H}_n(X;\mathbb{Z})$ ein Homomorphismus.

Aussage (2) folgt aus dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.74 und Proposition 5.45 (2), da

$$\pi_{n+1}(X) \cong \pi_{n+2}(S^1 \wedge X) \cong \tilde{H}_{n+1}(X;\mathbb{Z}) \ ,$$

und $\eta_{n+1}$ bildet $[f] \in \pi_{n+1}(X)$ auf

$$f_*[\varepsilon_{n+1}] = [(\mathrm{id}_{S^1} \wedge f) \circ \mathrm{id}_{S^{n+2}}] = [Sf] \in \pi_{n+2}(S^1 \wedge X)$$

ab. Somit entspricht $\eta_{n+1}$ gerade dem Einhängungsisomorphismus $S$ aus dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.74.

In Aussage (1) erhalten wir wie oben den surjektiven Einhängungshomomorphismus

$$\eta_1 = S \colon \pi_1(X) \twoheadrightarrow \pi_2(S^1 \wedge X) \cong \tilde{H}_1(X;\mathbb{Z}) \ .$$

Wir dürfen wieder annehmen, dass $X$ ein CW-Komplex mit 0-Skelett $X^0 = \mathrm{pt}$ ist. Indem wir Satz 2.52 wie im Beweis von Satz 5.43 benutzen, sehen wir, dass $\eta_1$ einen Isomorphismus $\pi_1(X)^{\mathrm{ab}} \to \tilde{H}_1(X;\mathbb{Z})$ induziert. □

5.48. Bemerkung. Den Satz von Hurewicz kann man auch „rückwärts“ anwenden: Wenn $X$ zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist und $\tilde{H}_k(X;\mathbb{Z}) = 0$ für alle $k \leq n$ gilt, dann ist $\eta_{n+1} \colon \pi_{n+1}(X) \to \tilde{H}_{n+1}(X;\mathbb{Z})$ ein Isomorphismus. Dazu wenden wir den Satz von Hurewicz induktiv für alle $k \leq n+1$ an.

Die Voraussetzung, dass $X$ einfach zusammenhängend ist, ist dabei wichtig. Es gibt nämlich sogenannte *perfekte* Gruppen $G \neq 0$, was bedeutet, dass $[G,G] = G$ gilt und somit $G^{\mathrm{ab}} = 0$. In diesem Fall ist $\tilde{H}_1(X;\mathbb{Z}) = 0$, aber $\eta_2 \colon \pi_2(X) \to \tilde{H}_2(X;\mathbb{Z})$ ist im allgemeinen kein Isomorphismus.

5.49. Bemerkung. Sowohl der Satz von Hurewicz als auch die Tatsache, dass der Randoperator im zellulären Kettenkomplex aus Definition Def5.26 allein durch die Inzidenzzahlen $d_{ij}^n \in \mathbb{Z}$ bestimmt ist, legen nahe, dass unter den gewöhnlichen Homologiefunktoren die ganzzahlige Homologie $\tilde{H}_\bullet(\,\cdot\,;\mathbb{Z})$ eine Sonderrolle annimmt. Man schreibt daher oft kurz $\tilde{H}_k(X)$ für $\tilde{H}_k(X;\mathbb{Z})$.

Zum Schluss formulieren wir den Satz 4.46 von Whitehead noch einmal mit Hilfe von Homologie um.

5.50. Satz (Whitehead, homologische Fassung). *Es sei $f\colon Y \to X$ eine punktierte Abbildung von zusammenhängenden, einfach zusammenhängenden CW-Komplexen, so dass $f_*\colon \tilde{H}_k(Y) \to \tilde{H}_k(X)$ für alle $k \geq 1$ ein Isomorphismus ist. Dann ist $f$ eine Homotopie-Äquivalenz.*

Beweis. Wir schreiben den Abbildungskegel $Cf$ als $Zf \cup_Y CY$, dabei ist $Zf$ zu $X$ homotopieäquivalent. Indem wir den Durchschnitt $Y$ etwas aufdicken, sehen wir mit dem Satz 2.42 von Seifert-van Kampen, dass $Cf$ einfach zusammenhängend ist. Wegen der langen exakten Homologiesequenz 5.2 (2) für das Paar $(Zf, Y)$ gilt $\tilde{H}_k(Cf) = 0$ für alle $k$. Somit ist $Cf$ nach Bemerkung 5.48 schwach zusammenziehbar.

Wir zeigen induktiv über $n$, dass dann auch $\pi_k(Zf, Y) = 0$ für alle $k \leq n$. Für $n = 1$ folgt das aus den Voraussetzungen. Sei die Behauptung für ein $n$ richtig, dann ist $(Zf, Y) \to (Cf, *)$ eine $(n+2)$-zusammenhängende Abbildung nach Proposition 3.68. Also erhalten wir einen Isomorphismus $\pi_{n+1}(Zf, Y) \cong \pi_{n+1}(Cf) = 0$.

Aber dann sind $Y \hookrightarrow Zf$ und $f$ schwache Äquivalenzen, somit ist $f$ eine Homotopieäquivalenz nach dem Satz 4.46 von Whitehead. □

Hätten wir anstelle von $\pi_1(X) = \pi_1(Y) = 0$ nur einen Isomorphismus $f_*\colon \pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ vorausgesetzt, so hätten wir zwar immer noch folgern können, dass $Cf$ schwach zusammenziehbar ist, aber nicht, dass alle $\pi_k(Zf, Y)$ verschwinden.

## 5.e. Die abgeleiteten Funktoren Tor und Ext

Für den nächsten Abschnitt benötigen wir einige Konstruktionen aus der homologischen Algebra, unter anderem Tensor- und Hom-Funktor und die daraus abgeleiteten Torsions- und Erweiterungsprodukte. Dabei beschränken wir uns der Einfachheit halber auf Moduln über Hauptidealringen, wobei wir speziell an $\mathcal{A}b = \mathcal{M}od_{\mathbb{Z}}$ denken.

Als erstes beschreiben wir das Tensorprodukt in der Kategorie $\mathcal{M}od_R$ der Moduln über einem kommutativen Ring $R$ mit Eins. Wir erinnern uns zunächst an den internen hom-Funktor

$$\hom(M, N) = \hom_R(M, N) = \left\{\, f\colon M \to N \;\middle|\; f \text{ ist linear.} \,\right\}$$

mit der Modulstruktur

$$(f+g)(m) = f(m) + g(m) \qquad \text{und} \qquad (rf)(m) = r\,f(m) = f(rm)$$

für alle $f$, $g \in \hom(M, N)$, alle $m \in M$ und alle $r \in R$. Dabei halten wir uns an die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes aus Bemerkung 4.28 (2). Sie ist äquivalent dazu, dass $\cdot \otimes M$ zu $\hom(M, \cdot\,)$ adjungiert ist, siehe Beispiel 4.27 (2). Dabei können wir die Abbildung $g\colon L \to \hom(M, N)$ aus Bemerkung 4.28 (2) als bilineare Abbildung $L \times M \to N$ auffassen. Das motiviert die folgende Konstruktion.

5.51. Definition. Es sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins, und es seien $M$ und $N$ Moduln über $R$. Dann definieren wir das *Tensorprodukt* $M \otimes_R N$ als den Quotient des Erzeugnisses der

Elemente von $M \times N$ unter der Relation $\sim$, die erzeugt wird von

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2, n) &\sim (m_1, n) + (m_2, n) \ , \\ (m, n_1 + n_2) &\sim (m, n_1) + (m, n_2) \\ \text{und} \qquad (mr, n) &\sim (m, n)r \sim (m, nr) \end{aligned}$$

für alle $r \in R$, $m$, $m_1$, $m_2 \in M$ und $n$, $n_1$, $n_2 \in N$. Für die Äquivalenzklasse von $(m, n)$ schreiben wir kurz $m \otimes n \in M \otimes N$. Dann erhalten wir eine Abbildung

$$\otimes \colon M \times N \longrightarrow M \otimes_R N \qquad \text{mit} \qquad (m, n) \longmapsto m \otimes n \ .$$

Wir lassen den Index $R$ beim Tensorprodukt und beim Homomorphismenmodul weg, wenn klar ist, über welchem Ring wir arbeiten.

5.52. Bemerkung. Man überprüft jetzt, dass Tensorprodukt und interner hom-Funktor alle Eigenschaften aus Definition 4.26 erfüllen, siehe Übung 5.101.

Das Tensorprodukt wird von Elementen der Form $m \otimes n$ erzeugt, diese heißen auch *zerlegbar*. Ein typisches Element von $M \otimes N$ ist somit eine Linearkombination solcher Elemente. Als Beispiel sei $R = \Bbbk$ ein Körper und $V$, $W$ seien endlich dimensionale $\Bbbk$-Vektorräume. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus $\hom(V, W) \cong V^* \otimes W$. Elemente der Form $\alpha \otimes w$ entsprechen genau den Abbildungen $f \colon V \to W$ vom Rang $\leq 1$. Abbildungen von höherem Rang lassen sich nur als Linearkombinationen zerlegbarer Elemente von $V^* \otimes W$ darstellen.

5.53. Bemerkung. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, dann bezeichne $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ die Kategorie mit denselben Objekten wie $\mathcal{C}$ und $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ für alle Objekte $A$, $B$. In Übung 5.102 (2) beweisen wir die Adjunktion

$$\hom(\,\cdot\,, M) \colon \mathcal{M}od_R \leftrightarrows \mathcal{M}od_R^{\mathrm{op}} \colon \hom(\,\cdot\,, M) \ .$$

Die Adjunktion $\cdot \otimes M \dashv \hom(M, \cdot\,)$ kennen wir bereits.

(1) Mit Hilfe dieser Adjunktionen zeigt man, dass

$$M \otimes \bigoplus_{i \in J} N_i \cong \bigoplus_{i \in J} M \otimes N_i \ , \qquad \Big(\bigoplus_{i \in J} M_i\Big) \otimes N \cong \bigoplus_{i \in J} M_i \otimes N \ ,$$

$$\hom\Big(M, \prod_{i \in J} N_i\Big) \cong \prod_{i \in J} \hom(M, N_i) \qquad \text{und} \qquad \hom\Big(\bigoplus_{i \in J} M_i, N\Big) \cong \prod_{i \in J} \hom(M_i, N) \ .$$

(2) Sei $f \colon A \to B$ eine $R$-lineare Abbildung. Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{coker}\big(f \otimes \mathrm{id}_M \colon A \otimes M \to B \otimes M\big) &\cong \operatorname{coker} f \otimes M \ , \\ \ker\big(f \circ \cdot \colon \hom(M, A) \to \hom(M, B)\big) &\cong \hom(M, \ker f) \\ \text{und} \qquad \ker\big(\cdot \circ f \colon \hom(B, M) \to \hom(A, M)\big) &\cong \hom(\operatorname{coker} f, M) \ , \end{aligned}$$

siehe Übung 5.103.

(3) Wir interpretieren (2) etwas anders. Gegeben sei eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0 \ . \tag{*}$$

Da $A' \cong \ker g$ und $A'' \cong \operatorname{coker} f$, sind auch die Sequenzen

$$A' \otimes M \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_M} A \otimes M \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}_M} A'' \otimes M \longrightarrow 0 \ ,$$

$$0 \longrightarrow \hom(M, A') \xrightarrow{f \circ \cdot} \hom(M, A) \xrightarrow{g \circ \cdot} \hom(M, A'')$$

$$\text{und} \qquad 0 \longrightarrow \hom(A'', M) \xrightarrow{\cdot \circ g} \hom(A, M) \xrightarrow{\cdot \circ f} \hom(A', M)$$

exakt. Man sagt daher auch, das Tensorprodukt sei *rechtsexakt,* und der interne hom-Funktor sei *linksexakt.*

Ein Funktor, der sowohl links- als auch rechtsexakt ist, überführt exakte Sequenzen in exakte Sequenzen. Man nennt ihn daher *exakt.*

5.54. Beispiel. Betrachte die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0\ .$$

Für $M = \mathbb{Z}/2$ erhalten wir exakte Sequenzen

$$\underbrace{\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2}_{\cong\mathbb{Z}/2} \xrightarrow{0} \underbrace{\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2}_{\cong\mathbb{Z}/2} \xrightarrow{\cong} \underbrace{\mathbb{Z}/2\otimes\mathbb{Z}/2}_{\cong\mathbb{Z}/2} \longrightarrow 0\ ,$$

$$0 \longrightarrow \underbrace{\hom(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z})}_{\cong 0} \xrightarrow{\cong} \underbrace{\hom(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z})}_{\cong 0} \xrightarrow{0} \underbrace{\hom(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)}_{\cong\mathbb{Z}/2}$$

$$\text{und}\qquad 0 \longrightarrow \underbrace{\hom(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)}_{\cong\mathbb{Z}/2} \xrightarrow{\cong} \underbrace{\hom(\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2)}_{\cong\mathbb{Z}/2} \xrightarrow{0} \underbrace{\hom(\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2)}_{\cong\mathbb{Z}}\ .$$

Man kann die obigen Sequenzen in natürlicher Weise zu langen exakten Sequenzen fortsetzen. In gewissem Sinne entspricht das den Faser- und Kofasersequenzen aus Abschnitt 4.f. Genauer gesagt könnten wir $A \hookrightarrow X \to X/A$ als „kurze exakte Sequenz von Räumen“ auffassen, wenn $A \hookrightarrow X$ eine Kofaserung ist. Gewöhnliche Homologie $\tilde{H}_0$ in Grad 0 ist gewissermaßen rechtsexakt, denn wir erhalten eine exakte Sequenz

$$\tilde{H}_0(A) \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \longrightarrow \tilde{H}_0(X/A) \longrightarrow 0\ .$$

Tatsächlich ist ganzzahlige Homologie $\tilde{H}_0$ im Grad 0 in geeignetem Sinne linksadjungiert zum Eilenberg-Mac Lane-Funktor $(A \mapsto HA_0)\colon \mathcal{A}b \to \mathcal{T}op_+$ aus Satz 5.43, den wir dort allerdings in Dimension 0 gar nicht definiert hatten. Um lange exakte Sequenzen zu erhalten, müssen wir $\tilde{H}_0$ durch $\tilde{H}_\bullet$ fortsetzen.

Analog dazu konstruieren wir mit Hilfe projektiver Auflösungen abgeleitete Funktoren Tor und Ext, die die Sequenzen aus Bemerkung 5.53 (3) fortsetzen. Da wir exakte Sequenzen benötigen, also Kerne, Kokerne, Bilder und Kobilder von Morphismen, arbeiten wir ab sofort in einer abelschen Kategorie, siehe Bemerkung 5.1 (4).

5.55. Definition. Es sei $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie. Ein Morphismus $f\colon A \to B$ heißt *Epimorphismus,* wenn $\operatorname{coker}(f) = 0$.

Ein Objekt $X$ heißt *projektiv,* wenn zu jedem Epimorphismus $f\colon A \to B$ und jedem Morphismus $g\colon X \to B$ ein Lift $h\colon X \to A$ existiert, das heißt, es kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r] & 0\ . \end{tikzcd}$$

Eine *projektive Auflösung* eines beliebigen Objektes $X$ ist ein Kettenkomplex $(X_\bullet, \partial_\bullet)$ aus projektiven Objekten zusammen mit einer Augmentierung $\partial_0\colon X_0 \to X$, so dass die Sequenz

$$\cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\partial_0} X \longrightarrow 0$$

exakt ist.

Unter der Auflösung selbst versteht man den Kettenkomplex $(X_\bullet, \partial_\bullet)$ ohne $X$, in den folgenden Beweisen ist es aber meistens einfacher, $X$ mit dazuzuschreiben. Dual zu „Epimorphismus“ und „projektiv“ sind übrigens die Begriffe „Monomorphismus“ und „injektiv“, die wir im Folgenden aber nicht brauchen werden.

5.56. Bemerkung. Jeder freie $R$-Modul $M$ ist projektiv, denn Epimorphismen über $R$ sind stets surjektiv, und es reicht, für jedes Basiselement $e$ ein Urbild von $g(e)$ unter $f$ zu finden. In Übung 5.104 sehen wir, dass ein $R$-Modul genau dann projektiv ist, wenn er direkter Summand eines freien $R$-Moduls ist.

5.57. Proposition. *Es sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins.*

(1) *Dann besitzt jeder $R$-Modul $M$ eine projektive Auflösung $M_\bullet$.*
(2) *Sei $f\colon M \to N$ eine Modulabbildung, sei $M_\bullet$ eine projektive Auflösung von $M$, und sei $N_\bullet$ eine beliebige Auflösung von $N$, das heißt, $N_\bullet$ ist ein Kettenkomplex mit $N_i = 0$ für $i < 0$ und $H_0(N_\bullet) = N$, $H_i(N_\bullet) = 0$ für $i \neq 0$. Dann existiert eine Kettenabbildung $f_\bullet\colon M_\bullet \to N_\bullet$, die $f$ induziert.*
(3) *Je zwei Abbildungen in (2) sind zueinander kettenhomotop. Insbesondere sind je zwei projektive Auflösung kettenhomotopieäquivalent auf bis auf Kettenhomotopie eindeutige Weise.*
(4) *Zu jeder kurzen exakten Sequenz von $R$-Moduln (*) existieren projektive Auflösungen $A'_\bullet \to A_\bullet \to A''_\bullet$ mit Kettenabbildungen $f_\bullet$, $g_\bullet$ zwischen ihnen, so dass die folgende Sequenz für alle $i \geq 0$ exakt ist und spaltet:*

$$0 \longrightarrow A'_i \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{g_i} A''_i \longrightarrow 0\ .$$

In (4) ergibt sich die Spaltung bereits daraus, dass $A''_i$ projektiv und $g_i$ surjektiv ist.

Beweis. Sei $M$ ein $R$-Modul. Wir wählen eine Erzeugermenge $E_0$ von $M$ und erhalten eine surjektive Abbildung $\partial_0\colon \langle E_0\rangle_R \to N_0$; man sagt auch, $\mathcal{M}od_R$ habe *genug projektive Objekte.* Das liefert eine kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow \ker(\partial_0) \longrightarrow \langle E_0\rangle_R \longrightarrow M \xrightarrow{\partial_0} 0\ .$$

Wir setzen $M_0 = \langle E_0\rangle_R$ und fahren induktiv fort mit $\ker(f_0)$. Auf diese Weise konstruieren wir die gesuchte projektive (sogar freie) Auflösung für (1).

Zu (2) betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, dashed, "f_1"'] \arrow[dr, dashed] & M_0 \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, dashed, "f_0"'] \arrow[dr] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "\partial'_1"] & N_0 \arrow[r, "\partial'_0"] & N \arrow[r] & 0\ .
\end{tikzcd}$$

Wir betrachten die Abbildung $f \circ \partial_0\colon M_0 \to N'_{-1} = N$. Da $\partial'_0\colon N_0 \to N'_{-1}$ surjektiv und $M_0$ projektiv ist, existiert ein Lift $f_0$. Wir fahren induktiv fort mit $N'_0 = \ker(\partial'_0)$, so dass $\partial'_1$ eine surjektive Abbildung $N_1 \to N'_0$ induziert. Da das obige Diagramm kommutiert, bildet $f_0 \circ \partial_1$ ebenfalls nach $N'_0 \subset N_0$ ab, und wir können die Konstruktion induktiv fortsetzen.

Eine Kettenhomotopie zwischen zwei Abbildungen $f_\bullet$, $f'_\bullet\colon M_\bullet \to N_\bullet$ besteht aus Abbildungen $h_i\colon M_i \to N_{i+1}$, so dass

$$\partial'_{i+1} \circ h_i + h_{i-1} \circ \partial_i = f_i - f'_i\ ,$$

wir dürfen also in (3) ohne Einschränkung $f_\bullet$ durch $f_\bullet - f'_\bullet$ und $f'_\bullet$ durch 0 ersetzen. Dann induziert $f_0$ eine Abbildung $M_0 \to N'_0 = \ker(\partial'_0)$, und da $\partial'_1$ eine surjektive Abbildung $N_1 \to N'_0$ induziert,

können wir erstere zu $h_0\colon M_0 \to N_1$ liften. Die Konstruktion geht jetzt induktiv weiter, analog zur obigen.

Seien zwei projektive Auflösungen $M_\bullet$, $N_\bullet$ eines festen Moduls $M$ gegeben, dann konstruieren wir Kettenabbildungen $f_\bullet\colon M_\bullet \to N_\bullet$ und $g_\bullet\colon N_\bullet \to M_\bullet$. Diese sind bis auf Kettenhomotopie eindeutig. Darüberhinaus sind auch $g_\bullet \circ f_\bullet$ und $f_\bullet \circ g_\bullet$ zur jeweiligen Identität kettenhomotop, so dass $f_\bullet$ und $g_\bullet$ wie behauptet Kettenhomotopieäquivalenzen sind.

Zu (4) beginnen wir mit zwei projektiven Auslösungen $(A'_\bullet, \partial'_\bullet)$ von $A'$ und $(A''_\bullet, \partial''_\bullet)$ von $A''$. Wir setzen $A_i = A'_i \oplus A''_i$ und wählen für $f_i$ die Inklusion des ersten Faktors, und für $g_i$ die Projektion auf den zweiten, so dass die Sequenz in (4) exakt ist und spaltet. Anschließend konstruieren wir $\partial_i\colon A_i \to A_{i-1}$ induktiv mit Hilfe des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A'_1 \arrow[r, "\partial'_1"] \arrow[d, "f_1"'] & A'_0 \arrow[r, two heads, "\partial'_0"] \arrow[d, "f_0"'] & A' \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r, dashed] & A'_1 \oplus A''_1 \arrow[r, dashed, "\partial_1"] \arrow[d, "g_1"'] & A'_0 \oplus A''_0 \arrow[r, two heads, dashed, "\partial_0"] \arrow[d, "g_0"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & A''_1 \arrow[r, "\partial''_1"] & A''_0 \arrow[r, two heads, "\partial''_0"] & A' \arrow[r] & 0 \,.
\end{tikzcd} \tag{†}$$

Das obere rechte Quadrat kommutiert genau dann, wenn $\partial_0 a'_0 = f(\partial'_0 a'_0)$ für alle $a'_0 \in A'_0 \subset A_0$. Daraus folgt $g(\partial_0 a'_0) = 0 = \partial''_0(g_0(a'_0))$. Wir müssen also nur noch $\partial_0|_{A''_0} = h\colon A''_0 \to A$ so festlegen, dass $g(h(a''_0)) = \partial''_0 a''_0$. Da $A''_0$ projektiv und $g$ surjektiv ist, geht das, und das rechte untere Quadrat kommutiert jetzt ebenfalls. Eine kurze Diagrammjagd zeigt, dass die so konstruierte Abbildung $\partial_0$ surjektiv ist.

Da die rechten Quadrate kommutieren, erhalten wir Abbildungen

$$0 \longrightarrow \ker(\partial'_0) \longrightarrow \ker(\partial_0) \longrightarrow \ker(\partial''_0) \longrightarrow 0 \,.$$

Nach der obigen Konstruktion gilt

$$\ker(\partial_0) = \left\{ (a'_0, a''_0) \in A'_0 \oplus A''_0 \;\middle|\; f(\partial'_0 a'_0) = -h(a''_0) \right\} ,$$

und man überprüft leicht, dass die obige Sequenz exakt ist. Deshalb können wir $\partial_i$ für $i \geq 1$ genau wie oben induktiv konstruieren. Insbesondere ist $(A_\bullet, \partial_\bullet)$ eine projektive Auflösung von $A$. □

5.58. Satz und Definition. *Es sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins.*

(1) *Es sei $F\colon \mathcal{M}od_R \to \mathcal{M}od_R$ ein rechtsexakter kovarianter Funktor, dann existiert eine Folge von Funktoren $LF_i\colon \mathcal{M}od_R \to \mathcal{M}od_R$ mit $LF_0 = F$ und $LF_i = 0$ für $i < 0$, wobei $LF_\bullet M \cong H_\bullet(FM_\bullet, F\partial_\bullet)$ für jede projektive Auflösung von $M$ gilt. Für jede exakte Sequenz (*) existiert eine Folge von natürlichen Transformationen $\partial_i\colon LF_i A'' \to LF_{i-1}A'$, so dass die Sequenz*

$$\cdots \longrightarrow LF_2 A'' \xrightarrow{\partial_2} LF_1 A' \xrightarrow{LF_1 f} LF_1 A \xrightarrow{LF_1 g} LF_1 A'' \xrightarrow{\partial_1} FA' \xrightarrow{Ff} FA \xrightarrow{Fg} FA'' \longrightarrow 0$$

*exakt ist. Wir nennen $(LF_\bullet, \partial_\bullet)$ den* linksderivierten Funktor *zu $F$.*

(2) *Es sei $G\colon \mathcal{M}od_R \to \mathcal{M}od_R$ ein linksexakter kontravarianter Funktor, dann existiert eine Folge von Funktoren $RG_i\colon \mathcal{M}od_R \to \mathcal{M}od_R$ mit $RG_0 = F$ und $RG_i = 0$ für $i < 0$, wobei $RG_\bullet M \cong H_{-\bullet}(GM_{-\bullet}, G\partial_{-\bullet})$ für jede projektive Auflösung von $M$ gilt. Für jede exakte Sequenz (*) existiert eine Folge von natürlichen Transformationen $\partial_i\colon RG_i A' \to RG_{i+1}A''$, so dass die Sequenz*

$$0 \longrightarrow GA'' \xrightarrow{Gg} GA \xrightarrow{Gf} GA' \xrightarrow{\partial_0} RG_1 A'' \xrightarrow{RG_1 g} RG_1 A \xrightarrow{RG_1 f} RG_1 A' \xrightarrow{\partial_1} RG_2 A'' \longrightarrow \cdots \,.$$

*exakt ist. Wir nennen* $(RG_\bullet, \partial_\bullet)$ *den* rechtsderivierten Funktor *zu* $G$.

Beweis. Für jeden $R$-Modul $M$ wählen wir eine projektive Auflösung $M_\bullet$ wie in Proposition 5.57 (1), auf die wir $F$ anwenden. Aus der Exaktheit der Auflösung folgt $F\partial_i \circ F\partial_{i+1} = 0$, also erhalten wir einen Kettenkomplex

$$\cdots \longrightarrow F(M_2) \xrightarrow{F\partial_2} F(M_1) \xrightarrow{F\partial_1} F(M_0) \longrightarrow 0 \ .$$

Wir setzen $LF_iM = H_i(F(M_\bullet), F\partial_\bullet)$. Da $F$ Kokerne erhält und $M = \operatorname{coker}\partial_1$, folgt $FM = \operatorname{coker} F\partial_1 = H_0(F(M_\bullet), F\partial_\bullet) = LF_0M$.

Sei $f\colon M \to N$ linear, und seien projektive Auflösungen wie oben gewählt, dann existiert nach Proposition 5.57 (2) eine Kettenabbildung $f_\bullet\colon M_\bullet \to N_\bullet$, und $LF_if\colon LF_iM \to LF_iN$ sei die induzierte Abbildung. Da $f_\bullet$ bis auf Homotopie eindeutig war, ist $f_\bullet$ ebenfalls bis Homotopie eindeutig, also hängt $LF_if$ nicht von der Wahl von $f_\bullet$ ab.

Genauso erhalten wir für je zwei projektive Auflösungen eines festen Moduls $M$ eindeutige Isomorphismen zwischen den dadurch konstruierten Moduln $LF_iM$. In diesem Sinne ist $LF_\bullet$ eindeutig durch $F$ bestimmt.

Um die lange exakte Sequenz in (1) zu konstruieren, wenden wir den Funktor $F$ auf die kurze exakte Sequenz von projektiven Auflösungen zu (*) aus Proposition 5.57 (4), das heißt, auf das Diagramm (†) an, wobei wir die rechte Spalte komplett durch 0 ersetzen. Da die vertikalen Sequenzen in (†) spalten, gehen sie unter $F$ wieder in spaltende kurze exakte Sequenzen über. Wir erhalten also eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Aus dem Schlangenlemma 5.25 ergibt sich die gesuchte lange exakte Sequenz.

Die Behauptung (2) beweisen wir ganz genauso, ersetzen aber überall $F$ durch $G$. Da $G$ kontravariant ist, erhalten wir alle Aussagen in (2). □

Um die abgeleiteten Funktoren zu kovarianten linksexakten oder kontravarianten rechtsexakten Funktoren zu definieren, müssten wir dual zur obigen Konstruktion mit injektiven Auflösungen arbeiten. Das beträfe beispielsweise den Funktor $\hom(M, \cdot\,)$, siehe Proposition 5.65.

5.59. Definition. Es sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins. Der linksderivierte Funktor zu $\otimes_R M$ heißt das *Torsionsprodukt* $\operatorname{Tor}^R_\bullet(\,\cdot\,, M)$. Der rechtsderivierte Funktor zu $\hom_R(\,\cdot\,, M)$ heißt das *Erweiterungsprodukt* $\operatorname{Ext}^\bullet_R(\,\cdot\,, M)$.

Wir werden nur den Spezialfall eines Hauptidealringes betrachten, wobei wir an $R = \mathbb{Z}$ und $\mathcal{C} = \mathcal{M}od_\mathbb{Z} = \mathcal{A}b$ denken. In diesem Fall schreiben wir $\operatorname{Tor}_R$ für $\operatorname{Tor}^R_1$ und $\operatorname{Ext}_R$ für $\operatorname{Ext}^1_R$; für $\operatorname{Tor}^R_0$ und $\operatorname{Ext}^0_R$ schreiben wir natürlich $\otimes_R M$ beziehungsweise $\hom_R(\,\cdot\,, M)$. Für beliebige $R$ dürfen wir jeden $R$-Modul $M$ als abelsche Gruppe, also als $\mathbb{Z}$-Modul auffassen. Das liefert uns Funktoren $\otimes_\mathbb{Z} M$, $\hom_\mathbb{Z}(\,\cdot\,, M)$, $\operatorname{Tor}_\mathbb{Z}(\,\cdot\,, M)$, $\operatorname{Ext}_\mathbb{Z}(\,\cdot\,, M)\colon \mathcal{A}b \to \mathcal{M}od_R$. Die folgende wichtige Tatsache benutzen wir ohne Beweis.

5.60. Proposition. *Sei $R$ ein Hauptidealring. Dann ist jeder Untermodul eines freien Moduls wieder frei.* □

5.61. Folgerung. *Es sei $R$ ein Hauptidealring und $M$ ein $R$-Modul. Dann existiert eine freie Auflösung der Form*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \ ,$$

*und für jeden weiteren $R$-Modul $N$ gilt* $\operatorname{Tor}^R_i(M, N) = \operatorname{Ext}^i_R(M, N) = 0$ *für alle* $i \notin \{0, 1\}$, *sowie*

$$\operatorname{Tor}_R(M, N) = \operatorname{Tor}^R_1(M, N) = \ker\bigl(f \otimes \mathrm{id}_N\colon M_1 \otimes N \to M_0 \otimes N\bigr)$$

*und* $$\operatorname{Ext}_R(M, N) = \operatorname{Ext}^1_R(M, N) = \operatorname{coker}\bigl(\,\cdot\, \circ f\colon \hom(M_0, N) \to \hom(M_1, N)\bigr) \ .$$

Beweis. Wir wählen eine Erzeugermenge $E$ von $M$ und betrachten das freie Erzeugnis $M_0 = \langle E \rangle_R$ von $E$ über $R$. Wir erhalten eine natürliche surjektive Abbildung $\langle E \rangle_R \to M$, ihr Kern sei $M_1$. So erhalten wir die gesuchte Auflösung. Satz 5.58 liefert die gesuchten Darstellungen von $\operatorname{Tor}_R(M,N)$ und $\operatorname{Ext}_R(M,N)$. □

5.62. Bemerkung. Die Konstruktion von Tor und Ext mit Hilfe von Satz 5.58 mag auf den ersten Blick willkürlich wirken. Es gibt mehrere Möglichkeiten, diese Funktoren in einen größeren Kontext einzuordnen.

(1) Grothendieck hat gezeigt, dass derivierte Funktoren universell sind unter allen Funktoren, die wie in Satz 5.58 einen gegebenen Funktor ergänzen und lange exakte Sequenzen der angegebenen Form liefern. Aufgrund dieser universellen Eigenschaft sind derivierte Funktoren bis auf eindeutige Isomorphismen eindeutig festgelegt.

(2) Wir können Proposition 5.57 in der Sprache der Modellkategorien formulieren. Wenn $R$ kein Körper ist, gibt es keine geeignete Modellstruktur auf $\mathcal{M}od_R$. Wir können $\mathcal{M}od_R$ aber einbetten in die Kategorie $\mathcal{C}h_R^{\geq}$ der nach unten beschränkten Kettenkomplexe; aus einem Modul $M$ wird dann der Komplex

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

Die Kategorie $\mathcal{C}h_R^{\geq}$ trägt eine Modellstruktur, deren schwache Äquivalenzen gerade die Kettenhomotopieäquivalenzen sind. Als Faserungen wählt man surjektive Abbildungen, und als Kofaserungen injektive Abbildungen mit projektivem Kokern. Eine projektive Auflösung von $M$ ist dann nichts anderes als eine fibrant-kofibrante Ersetzung von $M$.

(3) Man kann noch weiter gehen und die Adjunktionen aus Bemerkung 5.53 durch Adjunktionen von Funktoren auf $\mathcal{C}h_R^{\geq}$ ersetzen, die mit der Modellstruktur verträglich sind. Das liefe darauf hinaus, auch $N$ entsprechend aufzulösen. Im Falle von $\hom(\,\cdot\,, N)$ bräuchten wir eine zur obigen Modellstruktur duale Struktur auf der Kategorie $\mathcal{C}h_R^{\leq}$ der nach oben beschränkten Kettenkomplexe; diese wird mit Hilfe von injektiven Objekten definiert. Am Ende sind die derivierten Funktoren dann die auf den Homotopiekategorien induzierten Funktoren. Diese Definition sieht auf den ersten Blick wesentlich eleganter aus. Wenn man sie allerdings dekodiert, um derivierte Funktoren explizit zu verstehen, landet man wieder bei der gleichen Konstruktion wie oben.

Nachdem wir die Existenz von Torsions- und Erweiterungsprodukt sichergestellt haben, geben wir noch einige Eigenschaften an. Beispiele werden in Übung 5.105 betrachtet.

5.63. Proposition. *Sei $R$ ein Hauptidealring, und $A$, $B$ seien $R$-Moduln.*

(1) *Es gilt* $\operatorname{Tor}(A,B) = 0$, *wenn $A$ oder $B$ frei ist.*

(2) *Sei* $0 \to B \to C \to D \to 0$ *eine kurze exakte Sequenz, dann existiert eine natürliche lange exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}(A,B) \longrightarrow \operatorname{Tor}(A,C) \longrightarrow \operatorname{Tor}(A,D) \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow A \otimes C \longrightarrow A \otimes D \longrightarrow 0 .$$

(3) *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus* $\operatorname{Tor}_R(A,B) \cong \operatorname{Tor}_R(B,A)$.

Beweis. Wir lassen diesen Beweis als Übung 5.107. □

5.64. Bemerkung. Es sei $R$ wieder ein Hauptidealring und $A$ ein $R$-Modul. Wir definieren den *Torsionsuntermodul* von $A$ als

$$\operatorname{Tor}_R A = \left\{ a \in A \;\middle|\; ra = 0 \text{ für ein } r \in R \setminus \{0\} \right\} .$$

Ein Modul heißt $A$ heißt *Torsionsmodul,* wenn $A = \operatorname{Tor}_R A$. Der Name „Torsionsprodukt“ rührt daher, dass

$$\operatorname{Tor}_R(A,B) = \operatorname{Tor}_R(\operatorname{Tor}_R A, \operatorname{Tor}_R B) ,$$

das Torsionsprodukt „sieht“ also nur die Torsionsanteile der Faktoren. Für endlich erzeugte $R$-Moduln folgt das aus dem Elementarteilersatz und den expliziten Berechnungen einiger Torsionsprodukte in Übung 5.105. Den allgemeinen Fall wollen wir jetzt nicht untersuchen, siehe dazu aber Übung 5.108.

Ein $R$-Modul $A$ heißt *divisibel,* wenn zu jedem $a \in A$ und jedem $r \in R \setminus \{0\}$ ein $b \in A$ mit $a = rb$ existiert. Beispielsweise sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ divisible $\mathbb{Z}$-Moduln, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/n$ jedoch nicht. Divisible Moduln über Hauptidealringen sind injektiv, siehe Kommentar nach Definition 5.55. Die folgenden Eigenschaften des Erweiterungsproduktes geben wir ohne Beweis an. Den rechtsderivierten Funktor in (3) definiert man analog zu Satz 5.58, aber mit Hilfe injektiver Auflösungen.

5.65. Proposition. *Es sei $R$ ein Hauptidealring, und $A$, $B$ seien $R$-Moduln.*

(1) *Es gilt* $\operatorname{Ext}_R(A, B) = 0$, *wenn $A$ frei oder $B$ divisibel ist.*

(2) *Es sei* $0 \to B \to C \to D \to 0$ *eine kurze exakte Sequenz, dann existiert eine exakte Sequenz*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \hom_R(A, B) \longrightarrow \hom_R(A, C) \longrightarrow \hom_R(A, D) \longrightarrow \\ \longrightarrow \operatorname{Ext}_R(A, B) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R(A, C) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R(A, D) \longrightarrow 0\,. \end{aligned}$$

(3) *Der rechtsderivierte kovariante Funktor zu* $\hom_R(A, \cdot\,)$ *ist* $\operatorname{Ext}_R(A, \cdot\,)$.

5.66. Bemerkung. Der Name „Erweiterungsprodukt“ rührt daher, dass $\operatorname{Ext}_R(A, B)$ Erweiterungen von Moduln beschreibt. Eine Erweiterung von $A$ durch $B$ ist eine kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

bis auf Isomorphie, wobei zwei solche Sequenzen isomorph heißen, wenn es einen Sequenzabbildung zwischen ihnen gibt, die auf $A$ und $B$ jeweils durch die Identität gegeben ist. Eine freie Auflösung von $A$ liefert wegen Proposition 5.57 (2) eine bis auf Kettenhomotopie eindeutige Sequenzabbildung

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & A_0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & A \arrow[r] & 0\,. \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $f \in \hom(A_1, B)$ bis auf ein Element $h \circ a$ mit $h \in \hom(A_0, B)$ wohlbestimmt, wir erhalten also eine Klasse $[f] \in \operatorname{coker}(\hom(A_0, B) \to \hom(A_1, B)) = \operatorname{Ext}_R(A, B)$. Man kann zeigen, die obige Zuordnung eine Bijektion von der Menge der Erweiterungen nach $\operatorname{Ext}_R(A, B)$ liefert.

## 5.f. Das Moore-Spektrum und ein universelles Koffizienten-Theorem

Der Begriff „Koeffizienten“ hat in der Homologietheorie verschiedene Bedeutungen; eine, nämlich $(\tilde{h}_k(S^0))_{k \in \mathbb{Z}}$, haben wir in Abschnitt 5.a kennengelernt. In Abschnitt 5.b haben wir zelluläre Homologie betrachtet, hierbei handelte es sich um gewöhnliche Homologie mit Koeffizienten in einem Objekt $M$ einer abelschen Kategorie $\mathcal{C}$. In diesem Abschnitt geht es darum, einen gegebenen Homologiefunktor zusätzlich mit Koeffizienten in einer gegebenen abelschen Gruppe $A$ zu versehen. Im Falle der „gewöhnlichen“ Homologie mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen stimmen all diese Begriffe überein: wendet man die im Folgenden beschriebene Methode auf $\tilde{H}_\bullet = \tilde{H}_\bullet(\,\cdot\,; \mathbb{Z})$ und die Gruppe $A$ an, so erhält man $\tilde{H}_\bullet(\,\cdot\,; A)$.

Mit den Methoden aus diesem Abschnitt können wir einen Zusammenhang zwischen den Funktoren $\tilde{h}_\bullet(\,\cdot\,; A)$ und $\tilde{h}_\bullet$ mit und ohne Koeffizienten herstellen. Im nächsten Abschnitt sehen wir, dass dieses Resultat für gewöhnliche Homologie einen Spezialfall der Künneth-Formel für Produkte darstellt. Sei $M$ ein $R$-Modul und $X$ ein topologischer Raum. Man könnte vermuten, dass $H_k(X; M) \cong$

$H_k(X) \otimes M$ gilt. Nach Beispiel 5.20 stimmt das beispielsweise für $X = \mathbb{C}P^n$ oder $X = \mathbb{H}P^n$. Für $X = \mathbb{R}P^n$, $R = \mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/2$ liefert Beispiel 5.21 jedoch ein anderes Ergebnis.

5.67. Definition. Ein *Moore-Raum* zur abelschen Gruppe $A$ in Dimension $n \geq 1$ ist ein punktierter CW-Komplex $M(A,n)$ (oder kurz $MA_n$) in $\mathcal{T}_+$ mit abelscher Fundamentalgruppe, so dass $\tilde{H}_k(M(A,n)) = 0$ für alle $k \neq n$, zusammen mit einem Isomorphismus

$$\varphi\colon \tilde{H}_n(M(A,n)) \xrightarrow{\cong} A\ .$$

Ein *Moore-Spektrum* zur abelschen Gruppe $A$ ist ein Spektrum $\mathbb{M}A = (MA_n, s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, für das ein $n_0$ existiert, so dass $MA_n$ für alle $n \geq n_0$ ein Moore-Raum mit $\varphi_n\colon \tilde{H}_n(MA_n) \xrightarrow{\cong} A$ ist, und so dass für alle $n \geq n_0$ das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_n(MA_n) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & \tilde{H}_{n+1}(SMA_n) \arrow[d, "s_{n*}"] \\
A & \tilde{H}_{n+1}(MA_{n+1}) \arrow[l, "\varphi_{n+1}"']
\end{tikzcd}\ .$$

Der obere Pfeil im Diagramm bezeichnet den Stabilisierungs-Isomorphismus aus Proposition 5.34, siehe auch Satz 5.10. Da $\pi_1(M(A,n))$ abelsch ist, folgt für $k \leq n$ aus dem Satz 5.47 von Hurewicz induktiv, dass

$$\pi_k(M(A,n)) \cong \tilde{H}_k(M(A,n)) \cong \begin{cases} M & \text{falls } k = n, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } k < n. \end{cases}$$

Insbesondere ist $M(A,n)$ stets $(n-1)$-zusammenhängend nach Bemerkung 5.48.

Da die Räume $MA_n$ CW-Komplexe sind, sind $SMA_n$ und $MA_{n+1}$ homotopieäquivalent für alle $n \geq 1$ nach dem homologischen Satz 5.50 von Whitehead. Insbesondere ist jedes Moore-Spektrum ein Suspensionsspektrum, und wir können $MA_{n_0+k} = S^k MA_{n_0}$ wählen.

5.68. Beispiel. Wir betrachten einfache Beispiele von Moore-Räumen.

(1) Die Sphären $S^k$ sind Moore-Räume für $\mathbb{Z}$ in Dimension $k$, das Sphärenspektrum $\mathbb{S}$ ist also ein Moore-Spektrum $\mathbb{M}\mathbb{Z}$.
(2) Nach Beispiel 5.21 (1) ist die reelle projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$ ein Moore-Raum $M(\mathbb{Z}/2, 1)$.

5.69. Proposition. *Es sei $A$ eine abelsche Gruppe.*

(1) *Dann existieren Moore-Räume $MA_n$ für alle $n \geq 2$.*
(2) *Sei $F\colon A \to B$ ein Gruppenhomomorphismus, sei $n \geq 2$, und seien $MA_n$, $MB_n$ Moore-Räume mit Isomorphismen $\varphi_n\colon \tilde{H}_n(MA_n) \to A$ und $\psi_n\colon \tilde{H}_n(MB_n) \to B$, dann existiert eine Abbildung $f\colon MA_n \to MB_n$, so dass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_n(MA_n) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & \tilde{H}_n(MB_n) \arrow[d, "\psi_n"] \\
A \arrow[r, "F"] & B
\end{tikzcd}$$

*kommutiert.*
(3) *Die Moore-Räume $MA_n$ sind für $n \geq 2$ bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig bestimmt.*

Diese Proposition ist das topologische Analogon zu Proposition 5.57 (1), (2). Man beachte, dass die Abbildung $f$ im Allgemeinen nicht eindeutig durch $F$ bestimmt ist; Proposition 5.57 (3) überträgt sich also nicht, siehe Übung 5.111. Insbesondere sind auch die Homotopieäquivalenzen

zwischen zwei Moore-Räumen zur gleichen Gruppe $A$ in der gleichen Dimension $n$ nicht notwendigerweise bis auf Homotopie eindeutig. Es kommt noch schlimmer: es gibt keinen Funktor $\mathcal{A}b \to \mathcal{T}_+$, der jeder abelschen Gruppe $A$ einen Moore-Raum $MA_n$ zuordnet. Als Beispiel hat $\mathrm{id}_{M(\mathbb{Z}/2)_n}$ Ordnung 4 in $[M(\mathbb{Z}/2)_n, M(\mathbb{Z}/2)_n]^s$, während 1 Ordnung 2 in $\hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ hat, siehe [**H1**, Ex. 4L.7]. Insbesondere erhalten wir kein Analogon zum Satz 5.43 über Eilenberg-MacLane-Räume.

Beweis. Sei $A$ eine abelsche Gruppe. Es sei $a\colon \mathbb{Z}^{\oplus K} \to \mathbb{Z}^{\oplus J}$ eine freie Auflösung von $A$ wie in Proposition 5.57 (1). Wir erhalten einen Moore-Raum $MA_n$ zu $A$ als CW-Komplex mit je einer $n$-Zelle $e_j^n$ für jeden Erzeuger $j \in J$ von $A$, und je einer $(n+1)$-Zelle $e_k^{n+1}$ für jede Relation $k \in K$. Dabei ist die Verklebeabbildung $\varphi_k$ so gewählt, dass

$$\varphi_{k*}\colon \tilde{H}^n(S^n) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow \tilde{H}^n\big(\bigvee_{j\in J} S^n\big) \cong \mathbb{Z}^{\oplus J}$$

den Erzeuger von $\mathbb{Z}$ auf die entsprechende Relation in $\mathbb{Z}^{\oplus J}$ abbildet. Nach Satz 5.18 ist $MA_n$ ein Moore-Raum mit $\tilde{H}_n(MA_n) \cong A$, und (1) ist bewiesen. Wir können $MA_n$ auch als Abbildungskegel $C\varphi$ der Abbildung

$$\varphi\colon \bigvee_{k\in K} S^n \longrightarrow \bigvee_{j\in J} S^n$$

auffassen.

Zu (2) sei $F\colon A \to B$ gegeben, und sei $a$ eine freie Auflösung von $A$ wie oben. Sei $M(A,n)$ wie oben konstruiert, und sei $M(B,n)$ ein Moore-Raum zu $B$ gemäß Definition 5.70. Mit Hilfe von $F$ finden wir eine Abbildung

$$f_n\colon \bigvee_{j\in J} S^n \to M(B,n)\ ,$$

indem wir für jeden Erzeuger $j \in J$ von $A$ die Abbildung $f_n$ auf dem entsprechenden Summanden $S^n$ durch einen Repräsentanten von $F(j) \in A \cong \pi_n M(B,n)$ vorgeben. Dann liegen alle Bilder von Relationen $k \in K$ unter $a$ im Kern von $f_{n*}\colon \mathbb{Z}^{\oplus J} \cong \pi_n\big(\bigvee_{j\in J} S^n\big) \to \pi_n M(B,n)$, und wir können $f_n$ zu $f\colon M(A,n) \to M(B,n)$ fortsetzen.

Sei insbesondere $F = \mathrm{id}_A$, und sei $M(B,n)$ ein weiterer Moore-Raum zu $B = A$. Für $n \geq 2$ folgt (3) aus (2) und dem Satz 5.50 von Whitehead. □

Als Beispiel schreiben wir

$$\mathbb{Q} = \langle e_1, e_2, \dots\rangle / \langle e_1 - 2e_2, e_2 - 3e_3, \dots\rangle\ ,$$

wobei der Erzeuger $e_k$ jeweils auf $\frac{1}{k!} \in \mathbb{Q}$ abgebildet wird. So erhalten wir einen Moore-Raum $M\mathbb{Q}_n$ mit je abzählbar vielen Zellen in den Dimensionen $n$ und $n+1$.

Sei jetzt $MA_n$ ein Moore-Raum zur abelschen Gruppe $A$ in Dimension $n$. Nach Lemma 5.35 erhalten wir einen Homologiefunktor $\tilde{h}_\bullet$ mit

$$\tilde{h}_k(X) = \tilde{H}_{k+n}(MA_n \wedge X)$$

für alle Räume $X$. Wir bestimmen die Koeffizienten von $\tilde{h}_\bullet$ und erhalten

$$\tilde{h}_k(S^0) = \tilde{H}_{k+n}(MA_n) = \begin{cases} A & \text{falls } k = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 5.44 (4) liefert einen natürlichen Isomorphismus

$$\tilde{h}_\bullet \cong \tilde{H}_\bullet(\,\cdot\,; A)\ .$$

Das heißt, sobald wir das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum zu $\mathbb{Z}$ konstruiert haben, können wir alle weiteren gewöhnlichen Homologiefunktoren mit Werten in $\mathcal{A}b$ mit Hilfe von Moore-Räumen

erhalten. Dazu reicht ein einzelner Moore-Raum aus; wir brauchen also nicht das gesamte Moore-Spektrum zu betrachten. Mit Beispiel 5.68 erhalten wir

$$\tilde{H}_k(X;\mathbb{Z}) = \tilde{H}_{k+n}(S^n \wedge X) \qquad \text{und} \qquad \tilde{H}_k(X;\mathbb{Z}/2) = \tilde{H}_{k+1}(\mathbb{R}P^2 \wedge X)\ ,$$

die erste Gleichung ist gerade Satz 5.10.

Die obige Konstruktion funktioniert wegen Lemma 5.35 für jeden allgemeinen Homologiefunktor. Das motiviert die folgende Definition, die wegen der Eindeutigkeitsaussage in Proposition 5.69 möglich ist. Da Abbildungen zwischen Moore-Räumen nicht bis auf Homotopie eindeutig durch ihre Wirkung auf der Homologie festgelegt sind, ist die folgende Definition für gewöhnliche Homologie $\tilde{H}_\bullet(\,\cdot\,;A)$ etwas schwächer als die bisherigen Konstruktionen.

5.70. Definition. Es sei $\tilde{h}_\bullet$ ein allgemeiner Homologiefunktor, und es sei $MA_n$ ein Moore-Raum zur abelschen Gruppe $A$ in Dimension $n$. Dann definieren wir *$\tilde{h}_\bullet$-Homologie mit Koeffizienten in $A$* für alle gut punktierten Räume $X$ und alle $k$ durch

$$\tilde{h}_k(X;A) = \tilde{h}_{k+n}(MA_n \wedge X)\ .$$

Beispielsweise können wir die stabilen Homotopiegruppen eines Raumes $X$ mit $\mathbb{Z}/2$-Koeffizienten definieren durch

$$\pi_k^s(X;\mathbb{Z}/2) = \pi_{k+1}^s(\mathbb{R}P^2 \wedge X)\ .$$

5.71. Satz (Universelles Koeffiziententheorem für allgemeine Homologiefunktoren). *Es sei $A$ eine abelsche Gruppe und $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$ ein allgemeiner reduzierter Homologiefunktor mit Werten in der Kategorie $\mathcal{A}b = \mathcal{M}od_{\mathbb{Z}}$. Dann existiert für alle $k$ und alle $X$ eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \tilde{h}_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow \tilde{h}_k(X;A) \longrightarrow \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}}\big(\tilde{h}_{k-1}(X), A\big) \longrightarrow 0\ .$$

Nach Bemerkung 5.66 gibt es $\operatorname{Ext}\big(\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}}(\tilde{h}_{k-1}(X), A), \tilde{h}_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} A\big)$-viele Erweiterungen der obigen Form. Dabei können die mittleren Terme verschiedener Erweiterungen isomorph sein, müssen es aber nicht. Wir können aus dem obigen Satz also im Allgemeinen noch nicht einmal den Isomorphietyp von $\tilde{h}_k(X;A)$ ablesen. Es kann auch passieren, dass $\tilde{h}_k(X;\mathbb{Z}/m)$ kein $(\mathbb{Z}/m)$-Modul ist. Dass all das für gewöhnliche Homologie mit Einschränkungen doch geht, sehen wir im folgenden Abschnitt. In Übung 5.112 sehen wir, dass unter bestimmten Bedingungen ein $R$-Modul $A$ sogar für allgemeine Homologiefunktoren $\tilde{h}_\bullet$ zu $R$-Moduln $\tilde{h}_\bullet(X;A)$ führt.

Beweis. Es bezeichne $a\colon \mathbb{Z}^{\oplus K} \to \mathbb{Z}^{\oplus J}$ eine freie Auflösung von $A$ und $\varphi\colon \bigvee_K S^n \to \bigvee_J S^n$ die zugehörige Anklebeabbildung in der Konstruktion von $M(A,n)$ im Beweis von Proposition 5.69. Wir betrachten die Kofaserung

$$\bigvee_K S^n \wedge X \xrightarrow{\iota} Z\varphi \wedge X \xrightarrow{q} C\varphi \wedge X = MA_n \wedge X\ ,$$

siehe Übung 3.132, und erhalten die lange exakte Homologiesequenz

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow \tilde{h}_{k+n}\big(\textstyle\bigvee_K S^n \wedge X\big) &\xrightarrow{\tilde{h}_{k+n}\iota} \tilde{h}_{k+n}(Z\varphi \wedge X) \xrightarrow{\tilde{h}_{k+n}q} \tilde{h}_{k+n}(MA_n \wedge X) \xrightarrow{\partial_{k+n}} \\ &\longrightarrow \tilde{h}_{k+n-1}\big(\textstyle\bigvee_K S^n \wedge X\big) \xrightarrow{\tilde{h}_{k+n-1}\iota} \tilde{h}_{k+n-1}(Z\varphi \wedge X) \longrightarrow \cdots\end{aligned}$$

Da diese Sequenz exakt und natürlich ist, erhalten wir eine natürliche kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker}(\tilde{h}_{n+k}\iota) \longrightarrow \tilde{h}_{k+n}(MA_n \wedge X) \longrightarrow \ker(\tilde{h}_{n+k-1}\iota) \longrightarrow 0\ .$$

Der mittlere Term in dieser Sequenz ist $\tilde{h}_k(X;A)$ nach Definition 5.70.

Da $Z\varphi$ homotopieäquivalent zu $\bigvee_J S^n$ ist, erhalten wir mit dem Summenaxiom 5.2 (3) ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{h}_{k+n}\big(\bigvee_K S^n \wedge X\big) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\tilde{h}_{k+n}\iota"'] & \bigoplus_K \tilde{h}_{k+n}\big(S^n \wedge X\big) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \tilde{h}_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{\oplus K} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\tilde{h}_k(X)} \otimes_{\mathbb{Z}} a"] \\
\tilde{h}_{k+n}\big(Z\varphi \wedge X\big) \arrow[r, "\cong"] & \bigoplus_J \tilde{h}_{k+n}\big(S^n \wedge X\big) \arrow[r, "\cong"] & \tilde{h}_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{\oplus J} \ .
\end{tikzcd}$$

Aus dem Beweis von Satz 5.58 wissen wir, dass

$$\begin{aligned}
& \operatorname{coker}(\tilde{h}_{n+k}\iota) = \operatorname{coker}\big(\mathrm{id}_{\tilde{h}_k(X)} \otimes_{\mathbb{Z}} a\big) = \tilde{h}_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} A \\
\text{und} \qquad & \ker(\tilde{h}_{n+k-1}\iota) = \ker\big(\mathrm{id}_{\tilde{h}_{k-1}(X)} \otimes_{\mathbb{Z}} a\big) = \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}}\big(\tilde{h}_{k-1}(X), A\big) \ . \qquad \square
\end{aligned}$$

5.72. Beispiel. Wir kennen bereits die Homologie des reell projektiven Raumes aus Beispiel 5.21. Da

$$\operatorname{Tor}(\mathbb{Z}, \cdot\,) = 0 \qquad \text{und} \qquad \mathbb{Z} \otimes (\mathbb{Z}/2) \cong \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) \cong (\mathbb{Z}/2) \otimes (\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$$

erhalten wir Beispiel 5.21 (2) aus 5.21 (1), genauer

$$\tilde{H}_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \cong \begin{cases}
\mathbb{Z}/2 \cong (\mathbb{Z}/2) \otimes (\mathbb{Z}/2) & \text{falls } k \text{ ungerade und } 0 < k < n, \\
\mathbb{Z}/2 \cong \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) & \text{falls } k \text{ gerade und } 0 < k \leq n, \\
\mathbb{Z}/2 \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2 & \text{falls } k = n \text{ ungerade ist,} \\
0 \cong \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2) & \text{falls } k = n+1 \text{ gerade ist, und} \\
0 & \text{sonst.}
\end{cases}$$

Wenn andererseits Multiplikation mit 2 in $A$ invertierbar ist, dann erhalten wir 5.21 (3), da dann

$$A \otimes (\mathbb{Z}/2) = \operatorname{Tor}(A, \mathbb{Z}/2) = 0 \ .$$

5.73. Bemerkung. In Folgerung 5.83 sehen wir, dass die Koeffizientensequenz in Satz 5.71 für gewöhnliche Homologie stets spaltet, so dass

$$\tilde{H}_k(X; A) \cong \tilde{H}_k(X) \otimes A \ \oplus \ \operatorname{Tor}\big(\tilde{H}_{k-1}(X), A\big) \ .$$

Man könnte daher denken, dass $\tilde{H}(\,\cdot\,, A)$ im Vergleich zur gewöhnlichen ganzzahligen Homologie keine zusätzliche Information enthält. In Übung 5.110 sehen wir ein Beispiel dafür, dass das nicht stimmt: es gibt Räume $X$, $Y$, Abbildungen $f$, $g\colon X \to Y$ und eine Koeffizientengruppe $A$, so dass

$$\begin{aligned}
& f_* = g_*\colon \tilde{H}_k(X) \longrightarrow \tilde{H}_k(Y) && \text{für alle } k\text{, aber} \\
& f_* \neq g_*\colon \tilde{H}_k(X; A) \longrightarrow \tilde{H}_k(Y; A) && \text{für ein } k.
\end{aligned}$$

Dieses Verhalten erklärt sich dadurch, dass die Spaltung in Folgerung 5.83 nicht natürlich ist.

## 5.g. Produkträume und die Künneth-Formel

In diesem Abschnitt betrachten wir die gewöhnliche Homologie von Produkten topologischer Räume. Dabei arbeiten wir in der Quillen-Modellstruktur, um alle beteiligten Räume durch CW-Komplexe zu ersetzen. Gleichzeitig nutzen wir aus, dass Produkte von CW-Komplexen in der Kategorie $\mathcal{T}$ nach Proposition 4.54 (4) wieder CW-Komplexe sind. Wir bezeichnen die Kategorie der $\mathbb{Z}$-graduierten $R$-Moduln mit $\mathcal{G}r\mathcal{M}od_R$, das ist gerade die volle Unterkategorie von $\mathcal{C}h_R$ der Kettenkomplexe mit trivialem Differential $d_\bullet = 0$.

5.74. Definition. Es seien $(C_\bullet, d_\bullet)$ und $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ zwei Kettenkomplexe über einem Hauptidealring $R$, dann definieren wir ihr *Tensorprodukt* in $\mathcal{C}h_R$ und ihr *Torsionsprodukt* in $\mathcal{G}r\mathcal{M}od_R$ durch

$$(C \otimes_R C')_k = \bigoplus_{a+b=k} C_a \otimes_R C_b \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Tor}_R(C, C')_k = \bigoplus_{a+b=k} \mathrm{Tor}_R(C_a, C'_b) \ .$$

Auf dem Tensorprodukt betrachten wir den Randoperator

$$d_{\otimes,k} = \sum_{a+b=k} (d_a \otimes \mathrm{id}_{C'_b} + (-1)^a \mathrm{id}_{C_a} \otimes d'_b) \ .$$

Die Vorzeichen in $d_\otimes$ sind so gewählt, dass

$$d_{\otimes,k} \circ d_{\otimes,k+1} = 0 \ .$$

Das Ziel dieses Abschnitts ist der folgende Satz. Dabei fassen wir $H_\bullet(X;R)$ und $H_\bullet(Y;R)$ wieder als Objekte von $\mathcal{G}r\mathcal{M}od_R$ auf.

5.75. Satz (Topologische Künneth-Formel). *Es seien $X$, $Y$ gut punktierte topologische Räume und $R$ ein Hauptidealring. Dann existiert eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \big(\tilde{H}(X;R) \otimes_R \tilde{H}(Y;R)\big)_k \longrightarrow \tilde{H}_k(X \wedge Y;R) \longrightarrow \big(\mathrm{Tor}_R(\tilde{H}(X;R), \tilde{H}(Y;R))\big)_{k-1} \longrightarrow 0$$

*für alle $k$. Diese Sequenz spaltet, aber nicht auf natürliche Weise.*

Wir erinnern uns an die unreduzierte Homologie $H_\bullet(X;R) = \tilde{H}_\bullet(X_+;R)$ aus Bemerkung 5.5.

5.76. Folgerung. *Es seien $X$, $Y$ topologische Räume und $R$ ein Hauptidealring. Dann existiert eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \big(H(X;R) \otimes_R H(Y;R)\big)_k \longrightarrow H_k(X \times Y;R) \longrightarrow \big(\mathrm{Tor}_R(H(X;R), H(Y;R))\big)_{k-1} \longrightarrow 0 \ ,$$

*für alle $k$. Diese Sequenz spaltet, aber nicht auf natürliche Weise.*

Aufgrund der Bemerkungen 5.5 und 5.64 stimmen die $\mathrm{Tor}_R$-Terme in den Sequenzen aus 5.75 und 5.76 überein.

Beweis. Wir ersetzen $X$ und $Y$ im obigen Satz durch $X_+$ und $Y_+$ und nutzen die Beziehung $(X \times Y)_+ = X_+ \wedge Y_+$, so dass

$$H_\bullet(X \times Y;R) = \tilde{H}_\bullet((X \times Y)_+;R) = \tilde{H}_\bullet(X_+ \wedge Y_+;R) \ . \qquad \square$$

5.77. Folgerung. *Es sei $\Bbbk$ ein Körper, dann existieren natürliche Isomorphismen*

$$\big(H(X;\Bbbk) \otimes_\Bbbk H(Y;\Bbbk)\big)_k \cong H_k(X \times Y;\Bbbk) \ , \qquad \textit{und} \tag{1}$$

$$\big(\tilde{H}(X;\Bbbk) \otimes_\Bbbk \tilde{H}(Y;\Bbbk)\big)_k \cong \tilde{H}_k(X \wedge Y;\Bbbk) \ , \qquad \textit{falls } X, Y \textit{ gut punktiert sind.} \tag{2}$$

Beweis. Nach Satz 5.58 verschwindet in diesem Falle das Torsionsprodukt. $\square$

Der Beweis von Satz 5.75 besteht aus zwei Schritten. Zunächst konstruieren wir einen Isomorphismus zwischen dem zellulären Kettenkomplex eines Produktes von CW-Komplexen und dem Tensorprodukt der zellulären Kettenkomplexe der Faktoren. Anschließend zeigen wir, dass die Homologie eines Tensorproduktes von Kettenkomplexen in einer kurzen exakten Sequenz mit Tensor- und Torsionsprodukt der Homologien der Faktoren steht.

5.78. Proposition. *Es seien $X$ und $Y$ CW-Komplexe und $R$ ein Ring. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\big(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(X \wedge Y;R), d^{\mathrm{CW}}_\bullet\big) \xrightarrow{\cong} \big(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(X;R), d^{\mathrm{CW}}_\bullet\big) \otimes \big(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(Y;R), d^{\mathrm{CW}}_\bullet\big) \ .$$

Der analoge Satz für den singulären Kettenkomplex ist der Satz von Eilenberg-Zilber, und der obige Isomorphismus heißt dann auch Alexander-Whitney-Abbildung .

Beweis. Nach Proposition 4.54 (4) trägt $X \wedge Y$ in $\mathcal{T}_+$ wieder eine CW-Struktur. Wir betrachten die charakteristischen Abbildungen $\Phi_j^m \colon D^m \to X$ und $\Psi_k^n \colon D^n \to Y$ der Zellen $e_j^m$ und $e_k^n$ von $X$ beziehungsweise $Y$ für $j \in J^m$, $k \in K^n$. Dann sind

$$\Xi_{j,k}^{m+n} = \Phi_j^m \times \Psi_k^n \colon D^{m+n} \cong D^m \times D^n \longrightarrow X \times Y$$

die charakteristischen Abbildungen der Zellen $e_{j,k}^{m+n}$ von $X \times Y$. Wir erhalten den gesuchten Isomorphismus

$$\tilde{C}_p^{\mathrm{CW}}(X \wedge Y; R) \cong R^{\oplus \bigcup_{m+n=p}(J^m \times K^n)} \cong \bigoplus_{m+n=p} R^{\oplus J^m} \otimes_R R^{\oplus K^n} \cong \big(\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X;R) \otimes \tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(Y;R)\big)_p \,.$$

Wir zeigen Verträglichkeit mit $d^{\mathrm{CW}}$. Die Verklebeabbildung $\xi_{j,k}^{m+n}$ ergibt sich als Pushout

$$\begin{tikzcd}
 & X^{m-1} \wedge Y^n \arrow[rr] & & (X \wedge Y)^{m+n-1} \\
S^{m-1} \times D^n \arrow[ur, "\varphi_j^m \times \Psi_k^n"] \arrow[rr] & & S^{m+n-1} \arrow[ur, dashed, "\xi_{j,k}^{m+n}"] & \\
 & X^{m-1} \wedge Y^{n-1} \arrow[uu] \arrow[rr] & & X^m \wedge Y^{n-1} \arrow[uu] \\
S^{m-1} \times S^{n-1} \arrow[uu] \arrow[ur, "\varphi_j^m \times \psi_k^n"] \arrow[rr] & & D^m \times S^{n-1} \arrow[uu] \arrow[ur, "\Phi_j^m \times \psi_k^n"'] &
\end{tikzcd} .$$

Insbesondere trifft $\xi_{j,k}^{m+n}$ nur zwei Typen von $(m+n-1)$-Zellen von $X \wedge Y$, nämlich $e_{j',k}^{m+n-1}$ und $e_{j,k'}^{m+n-1}$, falls $\varphi_j^m$ die Zelle $e_{j'}^{m-1}$ beziehungsweise $\psi_k^n$ die Zelle $e_{k'}^{n-1}$ trifft. Seien $p_{j',k}^{m+n-1}$, $q_{j,k'}^{m+n-1} \colon (X \wedge Y)^{m+n-1} \to S^{m+n-1}$ die zugehörigen Kollaps-Abbildungen. Sei $p_{j'}^{m-1} \colon X^{m-1} \to S^{m-1}$ die Kollaps-Abbildung zu $e_{j'}^{m-1}$ und $q_k^n \colon Y^n \to S^n$ die Kollaps-Abbildung zu $e_k^n$, dann gilt

$$\begin{aligned}
p_{j',k}^{m+n-1}|_{X^{m-1} \wedge Y^n} &= p_{j'}^{m-1} \wedge q_k^n \,, & p_{j',k}^{m+n-1}|_{X^m \wedge Y^{n-1}} &= 0 \,, \\
q_{j,k'}^{m+n-1}|_{X^{m-1} \wedge Y^n} &= 0 \,, & \text{und} \qquad q_{j,k'}^{m+n-1}|_{X^m \wedge Y^{n-1}} &= p_j^m \wedge q_{k'}^{n-1} \,.
\end{aligned}$$

Die Abbildungen $p_{j',k}^{m+n-1} \circ \xi_{j,k}^{m+n}$ und $q_{j,k'}^{m+n-1} \circ \xi_{j,k}^{m+n} \colon S^{m+n-1} \to S^{m+n-1}$ aus Definition 5.17 entsprechen gerade den Verkettungen

$$\begin{aligned}
S^{m+n-1} &\twoheadrightarrow S^{m+n-1}/(D^m \times S^{n-1}) \cong S_+^{m-1} \wedge S^n \xrightarrow{(p_{j'}^{m-1} \circ \varphi_j^m) \wedge \mathrm{id}} S^{m-1} \wedge S^n \cong S^{m+n-1} \,, \\
S^{m+n-1} &\twoheadrightarrow S^{m+n-1}/(S^{m-1} \times D^n) \cong S^m \wedge S_+^{n-1} \xrightarrow{\mathrm{id} \wedge (q_{k'}^{n-1} \circ \psi_k^n)} S^m \wedge S^{n-1} \cong S^{m+n-1} \,.
\end{aligned}$$

Der Abbildungsgrad der rechten Abbildungen in der oberen Zeile ist gerade ein Koeffizient des Randoperators $d_X^{\mathrm{CW}}$ des Komplexes $C_\bullet^{\mathrm{CW}}(X;R)$. In der unteren Zeile erhalten wir den analogen Koeffizienten von $d_Y^{\mathrm{CW}}$. Es bleiben noch die Vorzeichen in Definition 5.74 zu erklären. Dazu betrachten wir die folgenden Verkettungen von Projektionen und überlegen uns wie in Abbildung 5.2, dass

$$\begin{aligned}
&\deg\big(S^{m+n-1} \twoheadrightarrow S_+^{m-1} \wedge S^n \twoheadrightarrow S^{m+n-1}\big) = 1 \\
\text{und} \qquad &\deg\big(S^{m+n-1} \twoheadrightarrow S^m \wedge S_+^{n-1} \twoheadrightarrow S^{m+n-1}\big) = (-1)^m \,.
\end{aligned}$$

Ähnlich beweist man Natürlichkeit, das heißt, Verträglichkeit mit zellulären Abbildungen. □

5.79. Satz (Algebraische Künneth-Formel). *Es seien $(C_\bullet, d_\bullet)$ und $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ zwei Kettenkomplexe über einem Hauptidealring $R$, und $C'_k$ sei frei für alle $k \in \mathbb{Z}$. Dann existiert eine natürliche kurze*

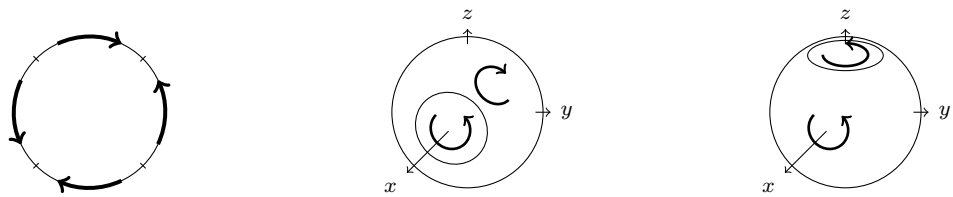



Abbildung 5.2. Produkte von Zellen und ihre Ränder

*exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \big(H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R H(C'_\bullet, d'_\bullet)\big)_n \xrightarrow{\mu} H_n\big((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (C'_\bullet, d'_\bullet)\big) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \operatorname{Tor}_R\big(H(C_\bullet, d_\bullet), H(C'_\bullet, d'_\bullet)\big)_{n-1} \longrightarrow 0$$

*für alle $n$, mit $\mu([c] \otimes [c']) = [c \otimes c']$. Wenn auch $C_\ell$ für alle $\ell \in \mathbb{Z}$ frei ist, spaltet die obige Sequenz, aber nicht auf natürliche Weise.*

Die obige Sequenz spaltet sogar, wenn nur einer der beiden Komplexe frei ist; das ist allerdings etwas schwerer zu zeigen.

Beweis. Es bezeichnen $Z'_\bullet$ und $B'_\bullet$ die Unterkomplexe der Zykel und Ränder von $(C'_\bullet, d'_\bullet)$, jeweils mit trivialem Randoperator. Nach Proposition 5.60 sind alle $Z'_k$ und $B'_k \subset C'_k$ frei. Wir erhalten spaltende kurze exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow Z'_k \longrightarrow C'_k \xrightarrow{d'_k} B'_{k-1} \longrightarrow 0 \tag{*}$$

$$\text{und} \qquad 0 \longrightarrow (C_\bullet \otimes Z'_\bullet)_n \longrightarrow (C_\bullet \otimes C'_\bullet)_n \xrightarrow{\pm(\mathrm{id}_C \otimes d')_n} (C_\bullet \otimes B'_\bullet)_{n-1} \longrightarrow 0\ ,$$

etwa, indem wir für alle $k$ ein Rechtsinverses $s_k \colon B'_{k-1} \to C'_k$ zu $d'_k$ durch Wahl auf einer Basis von $B'_{k-1}$ konstruieren. Das Vorzeichen von $(\mathrm{id}_C \otimes d')_k$ hängt wie in Definition 5.74 vom Grad in $C_\bullet$ ab. Die Komplexe $Z'_\bullet$ und $B'_\bullet$ haben keinen Randoperator und sind frei. Daher ist Tensorieren mit $Z'_\bullet$ und $B'_\bullet$ jeweils ein exakter Funktor, und es folgt

$$H_n\big((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (Z'_\bullet, 0)\big) \cong \big(H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R Z'_\bullet\big)_n$$
$$\text{und} \qquad H_n\big((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (B'_\bullet, 0)\big) \cong \big(H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R B'_\bullet\big)_n\ .$$

Das Schlangenlemma 5.25 liefert die lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \big(H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R Z'_\bullet\big)_n \longrightarrow H_n\big((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (C'_\bullet, d'_\bullet)\big) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \big(H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R B'_\bullet\big)_{n-1} \xrightarrow{\partial} \big(H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R Z'_\bullet\big)_{n-1} \longrightarrow \dots \tag{†}$$

Wir betrachten $z \otimes b' \in (Z_\bullet \otimes B'_\bullet)_{n-1}$, um das Bild von $[z \otimes b'] = [z] \otimes b' \in H_{n-1}((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R B'_\bullet)$ unter $\partial$ zu bestimmen. Es sei $z \otimes c' \in (Z_\bullet \otimes C'_\bullet)_n$ ein Urbild. Wie im Beweis des Schlangenlemmas 5.25 folgt

$$d_{\otimes,n}(z \otimes c') = \underbrace{(dz)}_{=0} \otimes c' \pm z \otimes (d'c') = z \otimes b' \in (Z_\bullet \otimes C'_\bullet)_{n-1}\ .$$

Da $b' \in B'_\bullet \subset Z'_\bullet$, ist $z \otimes b' \in Z_\bullet \otimes Z'_\bullet$ das gesuchte Urbild, und es folgt

$$\partial[z \otimes b'] = [z \otimes b'] = (\mathrm{id}_{C_\bullet} \otimes j_\bullet)_{n-1,*}[z \otimes b'] \in H_{n-1}\big((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R Z'_\bullet\big)\ ,$$

somit wird $\partial$ von der Inklusion $j_\bullet \colon B'_\bullet \to Z'_\bullet$ induziert.

Aus der langen exakten Sequenz (†) erhalten wir also eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker}(\mathrm{id}_{H(C_\bullet, d_\bullet)} \otimes j)_n \longrightarrow H_n\big((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (C'_\bullet, d'_\bullet)\big) \longrightarrow \ker(\mathrm{id}_{H(C_\bullet, d_\bullet)} \otimes j)_{n-1} \longrightarrow 0\ .$$

Indem wir die freie Auflösung

$$0 \longleftarrow H_k(C'_\bullet, d'_\bullet) \longleftarrow Z'_k \xleftarrow{j_k} B'_k \longleftarrow 0$$

betrachten, schließen wir, dass

$$\begin{aligned} &\operatorname{coker}(\mathrm{id}_{H(C_\bullet,d_\bullet)} \otimes j)_n \cong \big(H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R H(C'_\bullet, d'_\bullet)\big)_n \\ \text{und} \qquad &\ker(\mathrm{id}_{H(C_\bullet,d_\bullet)} \otimes j)_{n-1} \cong \operatorname{Tor}_R\big(H(C_\bullet, d_\bullet), H(C'_\bullet, d'_\bullet)\big)_{n-1} . \end{aligned}$$

Damit ist die Exaktheit der Sequenz im Satz bewiesen. Da die Abbildung $\mu$ von der Inklusion

$$Z_n(C_\bullet \otimes Z'_\bullet) \cong (Z_\bullet \otimes Z'_\bullet)_n \longrightarrow Z_n(C_\bullet \otimes C'_\bullet)$$

induziert wird, hat sie die obige Gestalt.

Wenn $C_\bullet$ und $C'_\bullet$ frei sind, spaltet (*) und die analoge Sequenz für $C_\bullet$. Also finden wir Linksinverse $p_\bullet \colon C_\bullet \to Z_\bullet$ und $p'_\bullet \colon C'_\bullet \to Z'_\bullet$ zu den Inklusionen $Z_\bullet \to C_\bullet$ beziehungsweise $Z'_\bullet \to C'_\bullet$. Dann ist $(p \otimes p')_\bullet$ ein Linksinverses zu $\mu$, falls wir zeigen können, dass $\mu$ auf $H_\bullet((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (C'_\bullet, d'_\bullet))$ wohldefiniert ist. Aber das ist der Fall, denn

$$(p \otimes p')(d_C \otimes \mathrm{id}_{C'} \pm \mathrm{id}_C \otimes d'C') \in B_\bullet \otimes Z'_\bullet + Z_\bullet \otimes B'_\bullet \subset \ker(Z_\bullet \otimes Z'_\bullet \to H_\bullet \otimes H'_\bullet) .$$

Also spaltet die Sequenz in diesem Fall, und der Satz ist bewiesen. □

Beweis von Satz 5.75. Es seien zunächst $X$ und $Y$ CW-Komplexe. Nach Satz 5.18 wird die gewöhnliche $R$-Homologie von $X$, $Y$ und $X \wedge Y$ durch deren zelluläre Kettenkomplexe berechnet, deren einzelne Moduln nach Konstruktion alle frei über $R$ sind. Somit folgt die topologische Künneth-Formel jetzt aus dem „Eilenberg-Zilber"-Satz 5.78 und der algebraischen Künneth-Formel 5.79.

Für gut punktierte Räume $X$, $Y$ wählen wir CW-Approximationen $f \colon X' \to X$ und $g \colon Y' \to Y$ nach dem Approximationssatz 4.51. Nach Satz 5.44 (1) ist gewöhnliche Homologie — so, wie wir sie dort konstruiert haben — unter schwachen Äquivalenzen invariant. Also erhalten wir Isomorphismen

$$f_* \colon \tilde{H}_\bullet(X'; R) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_\bullet(X; R) \qquad \text{und} \qquad g_* \colon \tilde{H}_\bullet(Y'; R) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_\bullet(Y; R) .$$

Nach Lemma 5.35 sind die Funktoren $\tilde{H}_\bullet(\,\cdot \wedge Y'; R)$ und $\tilde{H}_\bullet(X \wedge \cdot\,; R)$ ebenfalls unter schwachen Äquivalenzen invariant, da wir angenommen hatten, dass $X$ gut punktiert ist, und wir erhalten Isomorphismen

$$\tilde{H}_\bullet(X' \wedge Y'; R) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_\bullet(X \wedge Y'; R) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_\bullet(X \wedge Y; R) .$$

Also gilt die Künneth-Formel auch für gut punktierte Räume $X$ und $Y$.

Zu Abbildungen $f \colon X \to Z$ und $g \colon Y \to W$ und CW-Approximationen $X' \to X, \ldots, W' \to W$ erhalten wir nach Satz 4.51 zelluläre Abbildungen $f' \colon X' \to Z'$ und $g' \colon Y' \to W'$, so dass die Diagramme

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z' \arrow[r] & Z \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} Y' \arrow[r] \arrow[d, "g'"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ W' \arrow[r] & W \end{tikzcd}$$

kommutieren, und $f'$, $g'$ sind bis auf Homotopie eindeutig. Wegen der Natürlichkeitsaussage in Proposition 5.78 kommutiert auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(X' \wedge Y'; R) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(f' \wedge g')_\#"'] & \tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(X'; R) \otimes \tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(Y'; R) \arrow[d, "f'_\# \otimes g'_\#"] \\ \tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(Z' \wedge W'; R) \arrow[r, "\cong"] & \tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(Z'; R) \otimes \tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(W'; R) . \end{tikzcd}$$

Wir betrachten zum Schluss das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{H}_\bullet(X;R)\otimes_R \tilde{H}_\bullet(Y;R) \arrow[rr, dashed, "\cong"] \arrow[dd, "f_*\otimes g_*"] & & \tilde{H}_\bullet(X\wedge Y;R) \arrow[dd, "(f\wedge g)_*"] \\
\tilde{H}_\bullet(X';R)\otimes_R \tilde{H}_\bullet(Y';R) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dd, "f'_*\otimes g'_*"'] & & \tilde{H}_\bullet(X'\wedge Y';R) \arrow[ur, "\cong"] & \\
 & \tilde{H}_\bullet(Z;R)\otimes_R \tilde{H}_\bullet(W;R) \arrow[rr, dashed, "\cong"] & & \tilde{H}_\bullet(Z\wedge W;R)\,. \\
\tilde{H}_\bullet(Z';R)\otimes_R \tilde{H}_\bullet(W';R) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[rr, "\cong"] & & \tilde{H}_\bullet(Z'\wedge W';R) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[uu, "(f'\wedge g')_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Die Quadrate rechts und links kommutieren, da gewöhnliche Homologie und das Tensorprodukt Funktoren sind. Das vordere Quadrat kommutiert nach obiger Vorüberlegung, und da Homologie von Komplexen ein Funktor ist. Nach unser Konstruktion der gestrichelten Pfeile kommutieren das obere und das untere Quadrat. Also kommutiert auch das hintere Quadrat, und die Natürlichkeit der linken Abbildung in der Künneth-Sequenz ist gezeigt.

Um die Natürlichkeit der rechten Abbildung zu zeigen, benötigen wir auch die Funktorialität des Torsionsproduktes. Sie ergibt sich im ersten Argument aus Satz 5.58 (1), und im zweiten Argument aus den Überlegungen zu Proposition 5.63. Danach verläuft der Beweis analog zum vorigen. □

5.80. Bemerkung. Da wir zelluläre Homologie hier zum ersten Mal benutzt haben, um neue Morphismen zu konstruieren, und nicht, um bereits bekannte Morphismen zu beschreiben, wollen wir uns kurz überlegen, dass die Abbildungen in der Künneth-Sequenz in Satz 5.75 nicht von der Wahl der CW-Struktur (also auch nicht von der CW-Approximation) abhängen. Hierbei ist entscheidend, dass alle benutzten Konstruktionen natürlich sind.

Seien also etwa zwei CW-Approximationen $f_i\colon X_i' \to X$ mit $i = 0, 1$, gegeben, dann existieren nach Satz 4.51 bis auf Homotopie eindeutige zelluläre Abbildungen $k\colon X_0' \to X_1'$ und $\ell\colon X_1' \to X_0'$, so dass die Abbildungen

$$f_0 \sim f_1 \circ k\,, \qquad f_1 \sim f_0 \circ \ell\,, \qquad \ell \circ k \sim \mathrm{id}_{X_0'}\,, \qquad \text{und} \qquad k \circ \ell \sim \mathrm{id}_{X_1'}$$

jeweils homotop sind. Mit ähnlichen Überlegungen wie im obigen Beweis kommutiert

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_\bullet(X_0';R)\otimes_R \tilde{H}_\bullet(Y';R) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\cong"] \arrow[dd, shift right, "k_*\otimes\mathrm{id}"'] & & \tilde{H}_\bullet(X_0'\wedge Y';R) \arrow[dr, "\cong"] \arrow[dd, shift right, "(k\wedge\mathrm{id})_*"'] & \\
 & \tilde{H}_\bullet(X;R)\otimes_R \tilde{H}_\bullet(Y;R) \arrow[rr, dashed, "\cong"] & & \tilde{H}_\bullet(X\wedge Y;R)\,. \\
\tilde{H}_\bullet(X_1';R)\otimes_R \tilde{H}_\bullet(Y';R) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[rr, "\cong"] \arrow[uu, shift right, "\ell_*\otimes\mathrm{id}"'] & & \tilde{H}_\bullet(X_1'\wedge Y';R) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[uu, shift right, "(\ell\wedge\mathrm{id})_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Hieraus folgt, dass der hintere Pfeil unabhängig von der Wahl der CW-Approximation ist.

5.81. Beispiel. Wir betrachten den $n$-dimensionalen Torus $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$. Es gilt

$$H_k(S^n;R) \cong \begin{cases} R & \text{für } k = 0,\, n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

insbesondere sind die Homologiemoduln frei. Wegen Bemerkung 5.5, Proposition 5.63 (1) und Folgerung 5.76 gilt

$$H_k(T^n;R) \cong \begin{cases} R^{\binom{n}{k}} & \text{für } 0 \le k \le n, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \tilde{H}_k(T^n;R) \cong \begin{cases} R^{\binom{n}{k}} & \text{für } 1 \le k \le n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

5.82. Beispiel. Wir betrachten die Räume $S^2 \times S^4$ und $\mathbb{C}P^3$. Wegen Beispiel 5.20 und Folgerung 5.76 gilt

$$H_k(S^2 \times S^4; R) \cong H_k(\mathbb{C}P^3; R) \cong \begin{cases} R & \text{für } k = 0,\, 2,\, 4 \text{ oder } 6, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dennoch sind diese Räume nicht homotopieäquivalent, denn nach Beispiel 3.43 (1) gilt

$$\pi_3(\mathbb{C}P^3) \cong \pi_3(S^7) = 0 \ ,$$

aber mit Beispiel 3.43 (1) und Übung 3.104 gilt auch

$$\pi_3(S^2 \times S^4) \cong \pi_3(S^2) \times \pi_3(S^4) \cong \mathbb{Z} \ .$$

Wir sehen also

(1) Homologie- und Homotopiegruppen enthalten verschiedene Information.
(2) Trotz des homologischen Satzes 5.50 von Whitehead sind einfach zusammenhängende Räume mit isomorphen Homologiegruppen nicht notwendigerweise homotopieäquivalent.
(3) Wegen dieses Satzes gibt es weder eine Abbildung $f\colon S^2 \times S^4 \to \mathbb{C}P^3$ noch eine Abbildung $g\colon \mathbb{C}P^3 \to S^2 \times S^4$, die auf $H_\bullet(\,\cdot\,; R)$ einen Isomorphismus induziert.

In Übung 6.88 benutzen wir Produkte auf der Kohomologie, um die obigen Räume zu unterscheiden.

Als nächstes Beispiel betrachten wir $X$ beliebig und $Y = MA_n$ einen Moore-Raum. Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass

$$\tilde{H}_{k+n}(MA_n \wedge X) \cong \tilde{H}_k(X; A) \ .$$

Die kurze exakte Sequenz in der Künneth-Formel 5.75 ist die gleiche wie im universellen Koeffiziententheorem 5.71. Mit dem obigen Beweis erhalten wir den folgenden wichtigen Zusatz.

5.83. Folgerung (Universelles Koeffiziententheorem, Zusatz). *Es sei $A$ eine abelsche Gruppe und $\tilde{h} = \tilde{H}$ gewöhnliche Homologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Dann spaltet die kurze exakte Sequenz im universellen Koeffiziententheorem 5.71, allerdings nicht natürlich.*

Ein Beispiel folgt in Übung 5.114. Sei allgemeiner $A$ ein $R$-Modul, dann existiert eine natürliche Sequenz

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_k(X; R) \otimes_R A \longrightarrow \tilde{H}_k(X; A) \longrightarrow \operatorname{Tor}_R\big(\tilde{H}_{k-1}(X; R), A\big) \longrightarrow 0 \ ;$$

diese spaltet, aber nicht natürlich. Zum Beweis ersetzen wir $X$ durch einen CW-Komplex und argumentieren ähnlich wie im Beweis der algebraischen Künneth-Formel 5.79, siehe Übung 6.82.

## 5.h. Übungen zu Kapitel 5

*Übungen zu Abschnitt 5.a.*

5.84. Übung. Gegeben sei eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longleftarrow A_{n-1} \xleftarrow{h_n} C_n \xleftarrow{g_n} B_n \xleftarrow{f_n} A_n \xleftarrow{h_{n+1}} C_{n+1} \longleftarrow \ldots$$

in $\mathcal{C} = \mathcal{M}od_R$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(1) Für alle $n$ existiert $k_n\colon B_n \to A_n$ mit $k_n \circ f_n = \mathrm{id}_{A_n}$.
(2) Für alle $n$ exisiert $\ell_n\colon C_n \to B_n$ mit $g_n \circ \ell_n = \mathrm{id}_{C_n}$.
(3) Für alle $n$ existiert ein Isomorphismus $\varphi_n\colon B_n \to A_n \oplus C_n$, so dass $\varphi_n \circ f_n$ die natürliche Inklusion und $g_n \circ \varphi_n^{-1}$ die natürliche Projektion ist,.

Zeigen Sie außerdem, dass dann $h_n = 0$ gilt, und dass es natürliche Bijektionen zwischen den Mengen der möglichen Folgen $(k_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in (1), $(\ell_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in (2), sowie der $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in (3) gibt.

5.85. Übung. Es sei $X = \{0, \dots, n\}$ versehen mit der diskreten Topologie, und $0 \in X$ sei der Basispunkt. Es sei $\tilde{h}_\bullet$ ein reduzierter Homologiefunktor. Beschreiben Sie die Abbildung $p_*$ aus Bemerkung 5.5 (1) in Termen von $\tilde{h}_n(S^0)$ mit Hilfe des Summenaxioms 5.2 (3), indem Sie $X$ und $X_+$ darstellen als

$$X = \bigvee_{i=1}^{n} S^0 \qquad \text{und} \qquad X_+ = \bigvee_{i=0}^{n} S^0 \,.$$

5.86. Übung. Beweisen Sie die Exaktheit der Mayer-Vietoris-Sequenz 5.6 an einer der beiden fehlenden Stellen, also bei $\tilde{h}_n(X)$ oder bei $\tilde{h}_n(A \cap B)$.

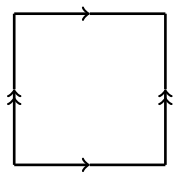
5.87. Übung. Es sei $X = A \cup B$, so dass $(A, A \cap B)$ und $(B, A \cap B)$ Kofaserungen seien, und es gelten Zusammenhangsvoraussetzungen wie in Folgerung 3.65. Konstruieren Sie ein Analogon zur Mayer-Vietoris-Sequenz 5.6 für die „unstabilen“ Homotopiegruppen $\pi_\bullet$ wie in Bemerkung 5.9. Wie weit lässt sich diese Sequenz nach links beziehungsweise rechts fortsetzen? Für $\pi_1$ kennen wir bereits den Satz 2.42 von Seifert-van Kampen. Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen lässt er sich in diese Sequenz „einbauen“?

*Übungen zu Abschnitt 5.b.*

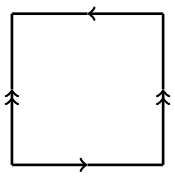
5.88. Übung. Es sei $n > 0$, und es sei $A$ Objekt einer abelschen Kategorie $\mathcal{C}$. Bestimmen Sie $H_k(\mathbb{C}P^n; A)$ und $H_k(\mathbb{H}P^n; A)$ für alle $k \geq 0$.

5.89. Übung. Berechnen Sie $\tilde{H}_\bullet^{CW}(X; \mathbb{Z})$ und $\tilde{H}_\bullet^{CW}(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ für die folgenden Räume:

(1) Fassen Sie den Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ als CW-Komplex auf, indem Sie in der linken Skizze gegenüberliegende Seiten identifizieren.
(2) Betrachten Sie die Kleinsche Flasche $X$, die aus einem Quadrat durch Identifikation gegenüberliegender Seiten gemäß der rechten Skizze entsteht. Fassen Sie $X$ für die Berechnung der Homologie als CW-Komplex mit Basispunkt, zwei 1-Zellen und einer 2-Zelle auf.



Torus



Kleinsche Flasche

5.90. Übung. Zeigen Sie:

(1) Kettenhomotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Kettenabbildungen zwischen zwei gegebenen Komplexen. Sie ist mit der Komposition von Kettenabbildungen verträglich.
(2) Kettenhomotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Kategorie der Kettenkomplexe.

5.91. Übung. Es seien $X$, $Y$ punktierte CW-Komplexe und $M$ ein $R$-Modul. Eine zelluläre Homotopie zwischen zellulären Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ ist eine zelluläre Abbildung $h\colon I_+ \wedge X \to Y$, wobei $I$ die CW-Struktur mit einer 1- und zwei 0-Zellen trage. Zeigen Sie: zelluläre Homotopien induzieren Kettenhomotopien zwischen den Abbildungen $f_\#$ und $g_\#\colon \tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X; M) \to C_\bullet^{\mathrm{CW}}(Y; M)$.

5.92. Übung. Sei $h_\bullet$ eine Kettenhomotopie zwischen Kettenabbildungen $f_\bullet$ und $g_\bullet\colon (C_\bullet, d_\bullet) \to (E_\bullet, e_\bullet)$ über $R$. Konstruieren Sie mit Hilfe von $h_\bullet$ eine Linkshomotopie zwischen $f_\bullet$ und $g_\bullet$ in $\mathcal{C}h_R$

im Sinne von Definition 4.60, und zwar mit dem Zylingerobjekt $(ZC_\bullet, zd_\bullet)$, mit

$$ZC_k = C_k \oplus C_k \oplus C_{k-1} \qquad \text{und} \qquad zd_k = \begin{pmatrix} d_k & & -\mathrm{id}_{C_{k-1}} \\ & d_k & \mathrm{id}_{C_{k-1}} \\ & & -d_{k-1} \end{pmatrix} .$$

Dabei wollen wir unter einer schwachen Äquivalenz eine Kettenabbildung verstehen, die Isomorphismen auf allen Homologiemoduln induziert.

5.93. Übung. Seien $f_\bullet$, $g_\bullet$, $h_\bullet$ wie in der vorigen Aufgabe. Konstruieren Sie aus diesen Daten eine Rechtshomotopie zwischen $f_\bullet$ und $g_\bullet$ in $\mathcal{C}h_R$.

5.94. Übung. Beweisen Sie das Schlangenlemma 5.25.

(1) Zeigen Sie: der Verbindungshomomorphismus ist wohldefiniert und natürlich als Transformation zwischen zwei Funktoren von der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen in der Kategorie $\mathcal{C}h_\mathcal{C}$ der Kettenkomplexe in $\mathcal{C}$ in die Kategorie $\mathcal{C}$.
(2) Beweisen Sie die Exaktheit der angegebenen Sequenz an mindestens einer Stelle.

5.95. Übung. Es sei $R$ ein Ring mit Eins. Wir identifizieren $R$ mit dem Kettenkomplex

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow R \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots ,$$

wobei sich $R$ in Grad 0 befinde.

(1) Sei $(C_\bullet, d_\bullet)$ ein Kettenkomplex in $\mathcal{C}h_R$ und $c_k \in C_k$. Unter welchen Bedingungen existiert ein Morphismus $R \to C_\bullet$ vom Grad $k$, der $1 \in R$ auf $c_k$ abbildet? Ist er eindeutig?
(2) Sei $c_k$ wie oben, und bezeichne $c_k \colon R \to C_\bullet$ den obigen Morphismus. Was beschreibt $c_{k*} = H_\bullet(c_k) \colon H_\bullet(R, 0) \to H_\bullet(C_\bullet, d_\bullet)$?
(3) Sei $f \colon (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$ eine Abbildung vom Grad $a$. Welchen Grad haben die Morphismen $f \circ c_k$ und $f_* \circ c_{k*}$, und was bezeichnen sie?

5.96. Übung. Beweisen Sie Satz 5.31.

5.97. Übung. Es sei $Y$ Unterkomplex eines CW-Komplexes $X$, und es sei $M$ ein $R$-Modul. Nach Bemerkung 5.5 (2) definiert man relative Homologiemoduln $H_k(X, Y; M) = \tilde{H}_k(X /\!\!/ Y; M)$. Zeigen Sie

(1) Es gilt $H_k(X, Y; M) \cong \tilde{H}_k(X/Y; M)$.
(2) Wir betrachten $\big(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(Y; M), d^{\mathrm{CW}}\big)$ als Unterkomplex von $\big(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(X; M), d^{\mathrm{CW}}\big)$, dann existiert ein natürlicher Quotientenkomplex $\big(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(X; M)/\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(Y; M), \bar{d}^{\mathrm{CW}}\big)$.
(3) Der Komplex aus (2) ist natürlich isomorph zu $\big(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(X/Y; M), d^{\mathrm{CW}}\big)$.

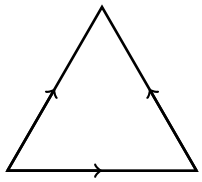
*Übungen zu Abschnitt 5.c.*

5.98. Übung. Vergleichen Sie die Stabilisierungs-Isomorphismen $\sigma_\bullet$ aus Proposition 5.34 mit den Isomorphismen aus Satz 5.10.

*Übungen zu Abschnitt 5.d.*

5.99. Übung. Es sei $R$ ein Ring und $\mathcal{M}od_R$ die Kategorie der (Rechts-) $R$-Moduln. Beweisen Sie Satz 5.44 für $R$, indem Sie ein $R$-Modul $M$ als abelsche Gruppe auffassen, und Elemente $r \in R$ als Endomorphismen von $M$. Interpretieren Sie $\tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,; M)$ als $R$-Modul und beweisen Sie die Aussagen (1)–(3).

5.100. Übung. Die „topologische Narrenkappe“ $X$ entsteht, indem man bei einem Dreieck alle drei Seiten gemäß der Skizze identifiziert. Wir wissen aus der Vorlesung, dass $\tilde{H}_\bullet^{CW}(X;\mathbb{Z}) = 0$.



(1) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von $X$.
(2) Zeigen Sie, dass $X$ zusammenziehbar ist.
(3) *Zusatz:* Geben Sie eine explizite Homotopie $X \times I \to X$ zwischen $\mathrm{id}_X$ und der Nullabbildung an.
(4) *Zusatz:* Basteln Sie ein Modell.

*Übungen zu Abschnitt 5.e.*

5.101. Übung. Sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins. Überprüfen Sie, dass Tensorprodukt und Hom-Funktor über $R$ mit $E = R$ alle Eigenschaften aus Definition 4.26 und Bemerkung 4.28 erfüllen. Somit ist die Kategorie $(\mathcal{M}od_R, \otimes_R, R)$ monoidal und abgeschlossen. Wie lautet ihr Exponentialgesetz?

5.102. Übung. Es sei $M$ ein Objekt in einer abgeschlossenen symmetrischen monoidalen Kategorie $\mathcal{C}$, siehe Definition 4.26 und Beispiel 4.27. Zeigen Sie:

(1) Man kann $\hom(\,\cdot\,, M)$ auf zwei Weisen als Funktor auffassen:
$$\hom(\,\cdot\,, M)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\,\mathrm{op}} \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \hom(\,\cdot\,, M)\colon \mathcal{C}^{\,\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\ .$$
(2) Die obigen Funktoren sind zueinander adjungiert:
$$\hom(\,\cdot\,, M)\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}^{\,\mathrm{op}} : \hom(\,\cdot\,, M)\ .$$

5.103. Übung. Beweisen Sie Bemerkung 5.53 (1) und (2) mit Hilfe der vorigen Aufgabe und Lemma 4.14.

*Hinweis:* Limiten in $\mathcal{C}$ werden zu Kolimiten in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ und umgekehrt.

Erinnern Sie sich, dass der Kern ein Limes und der Kokern ein Kolimes im Sinne von Definition 4.7 ist, siehe auch Bemerkung 5.1 (3).

5.104. Übung. Zeigen Sie, dass ein $R$-Modul $M$ genau dann projektiv ist, wenn er direkter Summand eines freien Moduls ist.

5.105. Übung. Es sei $R$ ein Hauptidealring, $r$, $s \in R$, und $B$ ein $R$-Modul. Zeigen Sie:
$$\mathrm{Tor}(R/r, B) \cong \hom(R/r, B) \cong \{\, b \in B \mid br = 0 \,\} \subset B\ , \tag{1}$$
$$\mathrm{Ext}(R/r, B) \cong (R/r) \otimes B \cong B/rB\ , \tag{2}$$
$$\mathrm{Tor}(R/r, R/s) \cong \mathrm{Ext}(R/r, R/s) \cong (R/r) \otimes (R/s) \cong \hom(R/r, R/s) \cong R/(r,s)\ , \tag{3}$$
wobei $(r,s)$ das von $r$ und $s$ erzeugte Ideal in $R$ bezeichne.

5.106. Übung. Zeigen Sie, dass sich Tor und Ext unter direkten Summen und Produkten analog zu $\otimes$ und hom in Bemerkung 5.53 verhalten.

5.107. Übung. Beweisen Sie Proposition 5.63.

5.108. Übung. Es sei $R$ ein Hauptidealring, $A$, $B$ seien $R$-Moduln, und $\mathrm{Tor}_R A$ bezeichne den Torsionsuntermodul aus Bemerkung 5.64. Zeigen Sie:

(1) Der Modul $A/\mathrm{Tor}_R A$ ist torsionsfrei.

(2) Jeder endlich erzeugte Untermodul von $A/\operatorname{Tor}_R A$ ist frei.
(3) Es gilt $\operatorname{Tor}_R(B, A/\operatorname{Tor}_R A) = 0$.
(4) Es gilt $\operatorname{Tor}_R(B, \operatorname{Tor}_R A) = \operatorname{Tor}_R(B, A)$.

*Hinweis:* Jedes Element in einem Tensorprodukt $X \otimes Y$ kann als endliche Linearkombination von Elementen der Form $x \otimes y$ mit $x \in X$, $y \in Y$ geschrieben werden.

5.109. Übung. Beweisen Sie Bemerkung 5.66.

*Übungen zu Abschnitt 5.f.*

5.110. Übung. Wir betrachten $A = \mathbb{Z}/n$ und konstruieren den Moore-Raum $MA_k$, indem wir eine $(k+1)$-Zelle mit einer Abbildung $\varphi\colon S^k \to S^k$ vom Grad $n$ an $S^k$ ankleben. Indem wir das $k$-Skelett $S^k$ auf einen Punkt abbilden, erhalten wir die Kollaps-Abbildung $f\colon MA_k \to MA_k/S^k \cong S^{k+1}$. Außerdem sei $g\colon MA_k \to S^{k+1}$ die konstante Abbildung. Zeigen Sie:

$$f_* = g_* = 0\colon \tilde{H}_\bullet(MA_k;\mathbb{Z}) \longrightarrow \tilde{H}_\bullet(S^{k+1};\mathbb{Z}) \qquad \text{für alle } k \geq 0, \tag{1}$$

$$g_* = 0\colon \tilde{H}_\bullet(MA_k;A) \longrightarrow \tilde{H}_\bullet(S^{k+1};A) \qquad \text{für alle } k \geq 0, \tag{2}$$

$$f_{k+1}\colon \tilde{H}_{k+1}(MA_k;A) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{k+1}(S^{k+1};A) \cong A\ . \tag{3}$$

5.111. Übung. Seien $A$, $B$ abelsche Gruppen. Wir betrachten den Raum $[MA_n, MB_n]$ der punktierten Abbildungen von $MA_n$ nach $MB_n$ bis auf Homotopie.

(1) Zeigen Sie mit Hilfe des Freudenthalschen Einhängungssatzes 3.74 und der Puppe-Sequenz aus Satz 4.67 (3), dass Stabilisieren für $n \geq 3$ den folgenden Isomorphismus liefert:
$$[MA_n, MB_n] \xrightarrow{S} [MA_{n+1}, MB_{n+1}]\ .$$
(2) Konstruieren Sie mit Hilfe der Puppe-Sequenz eine kurze exakte Sequenz der Form
$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}\bigl(A, \pi_{n+1}MB_n\bigr) \longrightarrow [MA_n, MB_n] \longrightarrow \hom(A,B) \longrightarrow 0\ .$$
(3) Es sei $n \geq 3$. Zeigen Sie mit der Homotopiesequenz 3.70 für Kofaserungen, dass
$$\pi_{n+1}(MB_n) \cong B \otimes \mathbb{Z}/2 = B/2B\ .$$
(4) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Ext}\bigl(A, B/2B\bigr) = 0$, wenn Multiplikation mit 2 in $B$ surjektiv oder in $A$ injektiv ist.

Man beachte, dass die Sequenz in (2) im Allgemeinen nicht spaltet.

5.112. Übung. Es sei $A$ ein $R$-Modul, und es gelte $\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}(A, A/2A) = 0$. Für $n \geq 3$ liefert die Modulstruktur auf $A$ nach der vorangegangenen Aufgabe eine Abbildung
$$R \hookrightarrow \hom_{\mathbb{Z}}(A,A) \cong [MA_n, MA_n]\ .$$
Zeigen Sie, dass man für jeden Homologiefunktor $\tilde{h}_\bullet$, jeden Raum $X$ und jedes $k$ die Gruppe $\tilde{h}_k(X;A)$ als $R$-Modul auffassen kann. Man erhält also einen $\mathcal{M}od_R$-wertigen Homologiefunktor.

5.113. Übung. Es sei $f\colon MA_n \to MB_n$ eine stetige punktierte Abbildung zwischen Moore-Räumen, so dass die induzierte Abbildung $f_*\colon A \cong \tilde{H}_n(MA_n) \to B \cong \tilde{H}_n(MB_n)$ injektiv ist. Zeigen Sie

(1) Dann ist der reduzierte Abbildungskegel $Cf$ ein Moore-Raum zu $C = B/f_*A$.
(2) Für jeden Homologiefunktor $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$ und jeden Raum $X$ erhalten wir die natürliche lange exakte *Bockstein-Sequenz*
$$\cdots \longleftarrow \tilde{H}_k(X;C) \longleftarrow H_k(X;B) \longleftarrow H_k(X;A) \xleftarrow{\partial} H_{k+1}(X;C) \longleftarrow \cdots$$

5.114. Übung. Wir fassen $A = \mathbb{Z}/n$ als $\mathbb{Z}$-Modul auf. Sei $MA_k$ der Moore-Raum und $f\colon MA_k \to S^{k+1}$ die Kollaps-Abbildung aus Übung 5.110.

(1) Geben Sie die Koeffizientensequenzen für $\tilde{H}_{k+1}(MA_k; A)$ und $\tilde{H}_{k+1}(S^{k+1}; A)$ aus Satz 5.71 an, und stellen Sie die von $f$ induzierte Sequenzabbildung in einem kommutativen Diagramm dar.
(2) Überprüfen Sie, dass beide Koeffizientensequenzen spalten, und dass die Spaltungen nicht natürlich sind.

*Übungen zu Abschnitt 5.g.*

5.115. Übung. Präzisieren Sie die Aussage, dass der in Proposition 5.78 konstruierte Isomorphismus

$$\big(\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X \wedge Y; R), d_\bullet^{\mathrm{CW}}\big) \xrightarrow{\cong} \big(\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X; R), d_\bullet^{\mathrm{CW}}\big) \otimes \big(\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(Y; R), d_\bullet^{\mathrm{CW}}\big)$$

natürlich ist, und beweisen Sie sie.

5.116. Übung. Wir wollen $I^n$ als CW-Komplex mit $\binom{n}{k} 2^{n-k}$ Zellen der Dimension $k$ darstellen. Wir orientieren $I^n \subset \mathbb{R}^n$ mit der Standardbasis, und wir orientieren die Rand-Hyperflächen von $I^n$ durch solche Basen des tangentialen $(n-1)$-dimensionalen Vektorraums, dass Voranstellen des äußeren Normalenvektors wieder eine positiv orientierte Basis des $\mathbb{R}^n$ liefert.

(1) Beschreiben Sie den zellulären Rand der $n$-Zelle von $I^n$.
(2) Betrachten Sie jetzt $I^m \times I^n = I^{m+n}$ und überprüfen Sie, dass sich der Rand der $(m+n)$-Zelle wie in Proposition 5.78 verhält.

5.117. Übung. Es sei $A = \mathbb{Z}/n$ und $B = \mathbb{Z}/m$ und $k$, $\ell \geq 2$.

(1) Berechnen Sie $\tilde{H}_\bullet(MB_\ell \wedge MA_k)$ und $\tilde{H}_\bullet(MB_\ell \wedge S^{k+1})$.
(2) Sei $f\colon MA_k \to S^{k+1}$ die obige Kollaps-Abbildung. Bestimmen Sie

$$(\mathrm{id}_{MB_\ell} \wedge f)_*\colon \tilde{H}_\bullet(MB_\ell \wedge MA_k) \longrightarrow \tilde{H}_\bullet(MB_\ell \wedge S^{k+1})\ .$$

(3) Konstruieren Sie wie in Übung 5.114 ein Beispiel dafür, dass die Künneth-Sequenz nicht natürlich spaltet.

5.118. Übung. Es seien $X, Y$ gut punktierte, $(n-1)$- beziehungsweise $(m-1)$-zusammenhängende Räume.

(1) Zeigen Sie, dass $X \wedge Y$ ein $(m+n-1)$-zusammenhängender Raum ist.
(2) Bestimmen Sie $\pi_{m+n}(X \wedge Y)$, falls $m$, $n \geq 2$.
(3) Zusatz: was können Sie über die restlichen Fälle aussagen?

KAPITEL 6

# Kohomologie

Kohomologie ist ein dualer Begriff zur Homologie, und wird ebenfalls durch Eilenberg-Steenrod-Axiome charakterisiert. Daher übertragen sich viele technische Resultate fast automatisch, beispielsweise existiert ein zellulärer Kokettenkomplex, der die gewöhnliche Kohomologie von CW-Komplexen ausrechnet.

Ausgehend von der zellulären Kohomologie beweisen wir ein universelles Koeffizententheorem, das Kohomologie mit Homologie in Verbindung bringt. Auch können wir einen Spezialfall der Künneth-Formel leicht beweisen. Schließlich konstruieren wir noch Produkte auf der zellulären Kohomologie, sowie eine Wirkung auf zellulärer Homologie.

In der zweiten Hälfte konstruieren wir Kohomologiefunktoren aus $\Omega$-Spektren. Eilenberg-Mac Lane-Spektren liefern gewöhnliche Kohomologiefunktoren. Als wichtige Beispiele allgemeiner Kohomologiefunktoren betrachten wir $K$-Theorie und Bordismustheorie. Da die Thom-Spektren für Bordismen keine $\Omega$-Spektren sind, führen wir am Ende des Kapitels die Kategorie von CW-Spektren ein; insbesondere überlegen wir uns einen sinnvollen Begriff für Morphismen von Spektren.

## 6.a. Axiome für Kohomologiefunktoren

Wir beginnen mit den Eilenberg-Steenrod-Axiomen und geben einige Konsequenzen an. Da vieles genauso wie in Kapitel 5 funktioniert, lassen wir die Beweise weg.

Die folgende Definition ist dual zu Definition 5.2. Wir arbeiten wieder in einer „schönen“ Kategorie $\mathcal{T}_+$ punktierter topologischer Räume, etwa $\mathcal{T}_+ = k\mathcal{T}op_+$ oder $\mathcal{T}_+ = kw\mathcal{H}_+$, versehen mit einer passenden Modellstruktur wie der Quillen- oder der Strøm-Modellstruktur. Aus technischen Gründen werden wir später wieder meistens die Quillen-Modellstruktur bevorzugen, da sie uns erlaubt, alle Räume durch CW-Komplexe zu ersetzen.

Unsere Kohomologiefunktoren sollen Werte in der Kategorie $\mathcal{M}od_R$ der Moduln über einem kommutativen Ring $R$ annehmen. Wie immer ist $R = \mathbb{Z}$ ein wichtiger Spezialfall.

6.1. Definition. Ein (*allgemeiner*) *reduzierter Kohomologiefunktor* $\left(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet\right)$ mit Werten in der Kategorie $\mathcal{M}od_R$ besteht aus einer Familie kontravarianter Funktoren

$$\tilde{h}^\bullet = \left(\tilde{h}^n \colon \mathcal{T}_+ \to \mathcal{M}od_R\right)_{n\in\mathbb{Z}} ,$$

und einer Familie natürlicher Transformationen $\delta_\bullet = (\delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $\delta_n(X,A)\colon \tilde{h}^n(A) \to \tilde{h}^{n+1}(X/A)$ für alle Kofaserungen $(X,A)$, die die folgenden *Eilenberg-Steenrod-Axiome* erfüllen.

(1) *Homotopieinvarianz.* Für jede schwache Äquivalenz $f\colon X \to Y$ ist $\tilde{h}^n\colon \tilde{h}^nY \to \tilde{h}^nX$ ein Isomorphismus.

(2) *Kohomologiesequenz.* Für jede Kofaserung $(X,A)$ ist die folgende Sequenz exakt:

$$\ldots \xrightarrow{\delta_{n-1}} \tilde{h}^n(X/A) \xrightarrow{\tilde{h}^n p} \tilde{h}^n(X) \xrightarrow{\tilde{h}^n \iota} \tilde{h}^n(A) \xrightarrow{\delta_n} \tilde{h}^{n+1}(X/A) \xrightarrow{\tilde{h}^{n+1} p} \ldots$$

(3) *Summenaxiom.* Sei $(X_i, x_i)_{i\in I}$ eine Familie gut punktierter Räume, dann ist die von den Inklusionsabbildungen $\iota_i\colon X_i \to \bigvee_{i\in I}(X_i, x_i)$ induzierte Abbildung

$$\prod_{i\in I} \tilde{h}^n \iota_i \colon \tilde{h}^n\Big(\bigvee_{i\in I}(X_i, x_i)\Big) \xrightarrow{\cong} \prod_{i\in I} \tilde{h}^n(X_i)$$

ein Isomorphismus.

Man nennt $\big(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet\big)$ einen (*gewöhnlichen*) *reduzierten Kohomologiefunktor* mit *Koeffizienten* $M$ in $\mathcal{M}od_R$, wenn zusätzlich das folgende Axiom gilt.

(4) *Dimensionsaxiom.*

$$\tilde{h}^n(S^0) = \begin{cases} M & \text{für } n = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In (3) brauchen wir das Produkt anstelle des Koproduktes in 5.2 (3), um einen Pfeil in die richtige Richtung definieren zu können. Das sieht auf den ersten Blick harmlos aus, macht aber später bei „großen“ Räumen Probleme. Zum ersten Mal erleben wir diesen Effekt bei der Künneth-Formel, siehe Satz 6.20. Für $\tilde{h}^n f$ schreiben wir auch kurz $f^*$.

6.2. Bemerkung. Wir sammeln einige elementare Eigenschaften.

(1) Wie in Lemma 5.3 gilt

$$\tilde{h}^\bullet(\mathrm{pt}) = 0\ .$$

für jeden reduzierten Kohomologiefunktor $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet)$.

(2) Das Summenaxiom folgt im Falle eines endlichen Bouquets aus den anderen Axiomen, siehe Bemerkung 5.7.

(3) Wie in Bemerkung 5.5 definieren wir einen unreduzierten Kohomologiefunktoren $(h^\bullet, \delta_\bullet)$ zu $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet)$ durch

$$h^k(X) = \tilde{h}^k(X_+)$$

und erhalten die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \tilde{h}(S^0) \longrightarrow h(X) \longrightarrow \tilde{h}(X) \longrightarrow 0\ .$$

Sobald man einen Basispunkt in $X$ auszeichnet, erhält man eine Spaltung dieser Sequenz. Für Paare $(X, Y)$ definieren wir die relative Kohomologie $h^k(X, Y) = \tilde{h}^k(X/\!\!/Y)$.

(4) Für je zwei im Sinne von Definition 4.60 homotope Abbildungen $f,\ g\colon X \to Y$ gilt

$$f^* = g^*\colon \tilde{h}^n(Y) \longrightarrow \tilde{h}^n(X)\ .$$

Im Folgenden meinen wir stets reduzierte Kohomologiefunktoren, solange wir nichts anderes sagen. In der Notation werden wir den Verbindungshomomorphismus $\delta_\bullet$ oft weglassen. Das folgende Resultat wird genauso bewiesen wie der analoge Satz 5.6.

6.3. Satz (Mayer-Vietoris-Sequenz). *Es sei $X = A \cup B$, so dass $(A, A\cap B)$ und $(B, A\cap B)$ Kofaserungen sind, und es sei $\tilde{h}^\bullet$ ein allgemeiner Kohomologiefunktor. Bezeichne die natürlichen Inklusionen mit*

$$\begin{tikzcd} A\cap B \arrow[r, hook, "a"] \arrow[d, hook, "b"'] & A \arrow[d, hook, "i"] \\ B \arrow[r, hook, "j"] & X\ . \end{tikzcd}$$

*Dann existiert ein natürlicher Verbindungshomomorphismus $\delta\colon \tilde{h}^n(A\cap B) \to \tilde{h}^{n+1}(X)$, so dass die Sequenz*

$$\cdots \longrightarrow \tilde{h}^{n-1}(A\cap B) \xrightarrow{\delta} \tilde{h}^n(X) \xrightarrow{(i^*, j^*)} \tilde{h}^n(A) \oplus \tilde{h}^n(B) \xrightarrow{a^* - b^*} \tilde{h}^n(A\cap B) \longrightarrow \cdots$$

*exakt ist.*

Beweis. Wir drehen im Beweis von Satz 5.6 alle Pfeile um. □

6.4. Folgerung. *Es sei $\tilde{h}^\bullet$ ein allgemeiner reduzierter Kohomologiefunktor und $k$, $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 1$. Dann existiert für jeden gut punktierten Raum $X$ ein natürlicher Isomorphismus*

$$\tilde{h}^k(S^n X) \cong \tilde{h}^{k-n}(X) \ . \tag{1}$$

*Falls $\tilde{h}_\bullet$ ein gewöhnlicher reduzierter Kohomologiefunktor mit Koeffizienten $M$ in $\mathcal{M}od_R$ ist, gilt insbesondere*

$$\tilde{h}^k(S^n) \cong \begin{cases} M & \text{falls } k = n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst} \ . \end{cases} \tag{2}$$

Auch über Abbildungen zwischen Sphären können wir Aussagen machen, analog zu Satz 5.11.

6.5. Folgerung. *Es sei $\tilde{h}^\bullet$ ein Kohomologiefunktor, es seien $k \in \mathbb{Z}$, $m$, $n \in \mathbb{N}$, und $f\colon S^m \to S^n$ sei stetig.*

(1) *Falls $m < n$, gilt $f^* = 0\colon \tilde{h}^k(S^n) \to \tilde{h}^k(S^m)$.*
(2) *Falls $m = n$, gilt $f^* = \deg f\colon \tilde{h}^k(S^n) \to \tilde{h}^k(S^n)$.*
(3) *Falls $m > n$ und $\tilde{h}^\bullet$ das Dimensionsaxiom 6.1 (4) erfüllt, gilt $f^* = 0\colon \tilde{h}^k(S^n) \to \tilde{h}^k(S^m)$.*

Aussage (3) muss für allgemeine Kohomologiefunktoren nicht gelten.

## 6.b. Der abgeleitete inverse Limes

Bei der Konstruktion der zellulären Homologie haben wir benutzt, dass Homologiefunktoren, die das Summenaxiom 5.2 (3) erfüllen, mit Kolimiten aufsteigender Folgen von Unterkomplexen eines CW-Komplexes vertauschen. Für Kohomologiefunktoren stimmt das nicht mehr. In Abschnitt 5.e hatten wir bereits die Ableitungen Tor und Ext von Tensorprodukt und internem Hom-Funktor kennengelernt. Hier führen wir eine Ableitung des inversen Limes ein, die wir brauchen, um ein Analogon von Proposition 5.13 für Kohomologiefunktoren zu formulieren.

Es sei $\mathcal{I}$ die Kategorie aus Beispiel 4.9 (3), erzeugt Morphismen

$$0 \longleftarrow 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow \cdots \ .$$

Unter einem *inversen System* in einer Kategorie $\mathcal{C}$ verstehen wir einen Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, also ein Diagramm der Form

$$A_0 \xleftarrow{f_1} A_1 \xleftarrow{f_2} A_2 \longleftarrow \cdots \ .$$

Den (*inversen*) *Limes* $\lim A_i$ haben wir in Beispiel 4.9 (3) kennengelernt. Wenn er existiert, schreiben wir ihn als Objekt $A$ mit Abbildungen $\bar{f}_i\colon A \to A_i$, so dass $\bar{f}_{i-1} = f_i \circ \bar{f}_i$. Wenn inverse Limiten in $\mathcal{C}$ existieren, erhalten wir nach Definition 4.7 die Adjunktion

$$\Delta\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C}^{\mathcal{I}} : \lim \ .$$

6.6. Bemerkung. Nach Proposition 4.10 lässt sich der inverse Limes als Pullback von Produkten schreiben; in vielen Kategorien wie $\mathcal{S}et$, $\mathcal{T}op$, $\mathcal{A}b$, $\mathcal{M}od_R$ sogar als Unterobjekt eines Produktes:

$$\lim A_i = \left\{ (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i \;\middle|\; a_{i-1} = f_i(a_i) \text{ für alle } i \geq 1 \right\} \quad \text{mit } \bar{f}_j\big((a_i)_i\big) = a_j \in A_j \text{ für alle } j \ .$$

6.7. Bemerkung. Wenn $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie ist, siehe Bemerkung 5.1 (4), zum Beispiel $\mathcal{M}od_R$, ist eine kurze exakte Sequenz in $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
 & \phantom{A} \arrow[d] & \phantom{A} \arrow[d] & \phantom{A} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A'_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, "f'_i"'] & A_i \arrow[r, "p_i"] \arrow[d, "f_i"'] & A''_i \arrow[r] \arrow[d, "f''_i"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_{i-1} \arrow[r, "\iota_{i-1}"] \arrow[d] & A_{i-1} \arrow[r, "p_{i-1}"] \arrow[d] & A''_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \phantom{A} & \phantom{A} & \phantom{A} &
\end{tikzcd} \tag{6.1}$$

bei dem alle Zeilen exakt sind.

Da lim nach Konstruktion ein rechtadjungierter Funktor ist, erhält er Limiten nach Lemma 4.14. Insbesondere ist er linksexakt im Sinne von Bemerkung 5.53 (3), das heißt, wir erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \lim A'_i \longrightarrow \lim A_i \longrightarrow \lim A''_i \ .$$

Der inverse Limes ist dual zum direkten Limes oder Kolimes. Im Beweis von Lemma 5.37 haben wir unter anderem gezeigt, dass der Kolimes in $\mathcal{M}od_R$ ein exakter Funktor ist, also kurze exakte Sequenzen in kurze exakte Sequenzen überführt. Für den inversen Limes gilt das nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

6.8. Beispiel. Wir betrachten $A'_i = 2\mathbb{Z} \subset A_i = \mathbb{Z}$ und $A''_i = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Als Abbildungen $f'_i$ und $f_i$ wählen wir Multiplikation mit 3, dann ist $f''_i = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$. Da es außer 0 keine ganzen Zahlen gibt, die beliebig oft durch 3 teilbar sind, erhalten wir mit Bemerkung 6.6, dass

$$0 \longrightarrow \underbrace{\lim 2\mathbb{Z}}_{=0} \longrightarrow \underbrace{\lim \mathbb{Z}}_{=0} \longrightarrow \underbrace{\lim \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_{=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \ .$$

Wir erhalten also keine kurze exakte Sequenz.

Wir wollen daher zeigen, dass es in der Kategorie $\mathcal{M}od_R$ der $R$-Moduln einen abgeleiteten Funktor $\lim^1$ gibt, der die obige Sequenz nach rechts exakt fortsetzt. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\delta\colon \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i \longrightarrow \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i \qquad \text{mit} \qquad (a_i)_i \longmapsto \big(f_{i+1}(a_{i+1}) - a_i\big)_i \ . \tag{6.2}$$

Offensichtlich gilt $\ker\delta = \lim A_i$.

6.9. Definition. Es sei $R$ ein Ring und $(A_i, f_i)$ ein inverses System in $\mathcal{M}od_R$. Betrachte die Abbildung $\delta\colon \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i \longrightarrow \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$ wie oben. Dann definieren wir den *abgeleiteten* (*inversen*) *Limes* durch

$$\lim^1 A_i = \operatorname{coker}\delta \ .$$

6.10. Satz. *Es sei $R$ ein Ring, und es sei eine kurze exakte Sequenz inverser Systeme in $\mathcal{M}od_R$ wie in* (6.1) *gegeben. Dann ist die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \lim A'_i \longrightarrow \lim A_i \longrightarrow \lim A''_i \longrightarrow \lim^1 A'_i \longrightarrow \lim^1 A_i \longrightarrow \lim^1 A''_i \longrightarrow 0$$

*natürlich und exakt.*

Beweis. Wir betrachten die natürliche kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \prod_{i\in\mathbb{N}} A'_i \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & \prod_{i\in\mathbb{N}} A''_i \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \prod_{i\in\mathbb{N}} A'_i \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{i\in\mathbb{N}} A''_i \arrow[r] \arrow[d] & 0 \,. \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Die Aussage des Satzes folgt jetzt aus dem Schlangenlemma 5.25. □

Ähnlich wie in Abschnitt 5.e wirkt die Konstruktion des abgeleiteten Limes eher ad hoc. Und sie hat auf den ersten Blick nichts zu tun mit der Konstruktion in Satz 5.58 oder mit den Überlegungen in Bemerkung 5.62. Dennoch kann man auch hier wieder zeigen, dass $\lim^1$ der korrekte rechtsderivierte Funktor $R\lim^1$ zum inversen Limes ist, und dass alle höheren $R\lim^k$ verschwinden.

Das folgende Analogon von Proposition 5.13 sieht formal ähnlich aus wie das universelle Koeffiziententheorem 5.71, siehe auch Satz 6.16 unten.

6.11. Satz (Milnor-Sequenz für allgemeine Kohomologie). *Es sei $\tilde{h}_\bullet$ ein Kohomologiefunktor, der das Summenaxiom 6.1* (3) *erfüllt, und es sei $X$ ein CW-Komplex mit einer aufsteigenden Folge $X_0 \subset X_1 \subset \dots$ von Unterkomplexen, so dass $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$. Dann existiert für alle $k$ eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \lim{}^1 \tilde{h}^{k-1}(X_i) \longrightarrow \tilde{h}^k(X) \longrightarrow \lim \tilde{h}^k(X_i) \longrightarrow 0 \,.$$

In Anwendungen sind die Räume $X_i$ oft endlich-dimensionale Räume, die den unendlichen Raum $X$ approximieren. Kohomologieklassen in $\tilde{h}^k(X)$ werden „sichtbar“ dadurch, dass man ihre Einschränkungen auf die $X_i$ betrachtet. Klassen in $\lim^1 \tilde{h}^{k-1}(X_i)$ sind somit „unsichtbar“, und werden daher gelegentlich auch *Geister* genannt.

Beweis. Wie im Beweis von Proposition 5.13 betrachten wir das zu $X$ homotopieäquivalente Teleskop

$$Y = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \big([i, i+1]_+ \wedge X_i\big) \subset [0,\infty)_+ \wedge X$$

als Vereinigung zweier Unterkomplexe

$$A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \big([2i, 2i+1]_+ \wedge X_{2i}\big) \qquad \text{und} \qquad B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \big([2i+1, 2i+2]_+ \wedge X_{2i+1}\big) \subset Y \,.$$

Dann erhalten wir Homotopieäquivalenzen

$$A \simeq \bigvee_{i\in\mathbb{N}} X_{2i} \,, \qquad B \simeq \bigvee_{i\in\mathbb{N}} X_{2i+1} \,, \qquad \text{und} \qquad A \cap B \simeq \bigvee_{i\in\mathbb{N}} X_i \,.$$

Wir betrachten die Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\cdots \to \underbrace{\tilde{h}^{k-1}(A) \oplus \tilde{h}^{k-1}(B)}_{=\bigoplus \tilde{h}^{k-1}(X_i)} \xrightarrow{\varphi^{k-1}} \underbrace{\tilde{h}^{k-1}(A\cap B)}_{=\bigoplus \tilde{h}^{k-1}(X_i)} \to \tilde{h}^k(Y) \to \underbrace{\tilde{h}^k(A) \oplus \tilde{h}^k(B)}_{=\bigoplus \tilde{h}^k(X_i)} \xrightarrow{\varphi^k} \underbrace{\tilde{h}^k(A\cap B)}_{=\bigoplus \tilde{h}^k(X_i)} \to \cdots$$

Analog zum Beweis von Proposition 5.13 zeigt man, dass die Abbildungen $\varphi^j$ bis auf ein Vorzeichen mit den jeweiligen Abbildungen $\delta$ aus (6.2) zu $A_i = \tilde{h}^j(X_i)$ übereinstimmen. Die Behauptung folgt jetzt direkt aus der obigen Mayer-Vietoris-Sequenz. □

6.12. Bemerkung. Wir geben ein Kriterium dafür an, dass $\lim^1$ verschwindet. Dazu überlegen wir uns, dass es in einem inversen System $(A_i, f_i)$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine absteigende Folge

$$A_i \supset \operatorname{im}(f_{i+1}) \supset \operatorname{im}(f_{i+1} \circ f_{i+2}) \supset \dots$$

gibt. Wenn diese Folge für jedes $i$ stationär wird, sagen wir, dass $(A_i, f_i)$ die *Mittag-Leffler-Bedingung* erfüllt.

Wir betrachten das inverse System $(A'_i, f'_i)$ mit

$$A'_i = \bigcap_{j \geq i} \operatorname{im}(f_{i+1} \circ \dots \circ f_j) \subset A_i \qquad \text{und} \qquad f'_i = f_i|_{A'_i} \colon A'_i \longrightarrow A'_{i-1} \ .$$

Sei $A''_i = A_i / A'_i$, dann induzieren die Abbildungen $f_i$ Morphismen $f''_i \colon A''_i \to A'_{i-1}$, und wir erhalten eine kurze exakte Sequenz inverser Systeme wie in (6.1).

In Übung 6.76 zeigen wir $\lim^1 A'_i = \lim^1 A''_i = 0$ mit der Mittag-Leffler-Bedingung für $(A_i, f_i)$. Aus Satz 6.10 folgt dann auch $\lim^1 A_i = 0$.

## 6.c. Zelluläre Kohomologie und ein universelles Koeffiziententheorem

In diesem Abschnitt führen wir den zellulären Kokettenkomplex ein, der die gewöhnliche Kohomologie eines CW-Komplexes ausrechnet. Mit Hilfe dieses Komplexes stellen wir einen Zusammenhang zwischen gewöhnlicher Homologie und Kohomologie her. Man beachte wie in Abschnitt 5.b, dass alle Resultate in diesem Abschnitt Konsequenzen der Eilenberg-Steenrod-Axiome sind.

Im Folgenden sei $R$ stets ein kommutativer Ring mit Eins, und $A$ sei ein $R$-Modul. Mit $A^I$ bezeichnen wir das Produkt über Kopien von $A$ mit Indexmenge $I$. Wir nehmen in diesem Abschnitt an, dass ein gewöhnlicher Kohomologiefunktor $\tilde{H}^\bullet$ mit Koeffizienten $A$ existiert. Wir benutzen die Isomorphismen aus Folgerung 6.4 und identifizieren

$$\tilde{H}^n(D^n/S^{n-1}; A) \cong \tilde{H}^n(S^n; A) \cong A \ .$$

Es sei $X$ ein CW-Komplex, und $\Phi^n_j \colon (D^n, S^{n-1}) \to (X^n, X^{n-1})$ seien die charakteristischen Abbildungen der Zellen von $X$ für $j \in J^n$, aufgefasst als Abbildungen von Paaren. Wir bezeichnen die induzierte punktierte Abbildung auf den Quotienten mit $\bar{\Phi}^n_j \colon S^n \to X^n/X^{n-1}$. Für $n = 0$ fixieren wir einen Punkt von $S^0$ als Basispunkt. Für $j \in J^0$ bezeichne $\bar{\Phi}^0_j \colon S^0 \to X^0 = X^0/X^{-1}$ die punktierte Abbildung, die den anderen Punkt von $S^0$ auf $e^0_j \in X^0 \setminus \{x_0\}$ abbildet.

6.13. Lemma. *Für $k \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 0$ erhalten wir natürliche Isomorphismen*

$$\tilde{H}^n(X^n/X^{n-1}; A) \cong A^{J^n} \qquad \textit{mit} \qquad \alpha \longmapsto \big((\overline{\Phi}^n_j)^*(\alpha)\big)_{j \in J^n} \ , \tag{1}$$

$$\tilde{H}^k\big(X^n/X^{n-1}; A\big) \cong 0 \qquad \textit{falls } k \neq n \ , \tag{2}$$

$$\tilde{H}^k\big(X^n; A\big) \cong 0 \qquad \textit{falls } k > n \ , \tag{3}$$

$$\textit{und} \qquad \tilde{H}^k\big(X^n; A\big) \cong \tilde{H}^k(X; A) \qquad \textit{falls } n > k \ . \tag{4}$$

Beweis. Wir gehen wie im Beweis von Lemma 5.14 vor. In (1) erhalten wir wegen des Summenaxioms hier ein Produkt. In (4) benutzen wir, dass die Folge $\tilde{H}^k(X^n; A)$ in $n$ stationär wird, so dass der abgeleitete Limes in Satz 6.11 verschwindet. □

Die folgende Definition ist völlig analog zu Definition 5.15.

6.14. Definition. Es sei $R$ ein Ring. Ein (*Koketten-*)*Komplex* $(C^\bullet, d_\bullet)$ über $R$ ist eine Sequenz $(d_n\colon C^n \to C^{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ linearer Abbildungen, so dass

$$d^n \circ d^{n-1} = 0\colon C^{n-1} \longrightarrow C^{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Man definiert $B^n(C^\bullet, d_\bullet) \subset Z^n(C^\bullet, d_\bullet) \subset C^n$ und $H^n(C^\bullet, d_\bullet)$ in $\mathcal{C}$ durch

$$\begin{aligned} Z^n(C^\bullet, d_\bullet) &= \ker d_n \ , \\ B^n(C^\bullet, d_\bullet) &= \operatorname{im} d_{n-1} \\ \text{und} \qquad H^n(C^\bullet, d_\bullet) &= Z^n(C^\bullet, d_\bullet)/B^n(C^\bullet, d_\bullet) \ . \end{aligned}$$

Elemente von $C^n$, $Z^n(C^\bullet, d_\bullet)$ und $B^n(C^\bullet, d_\bullet)$ heißen *$n$-Koketten*, *$n$-Kozykel* beziehungsweise *$n$-Koränder* des Komplexes. Der Modul $H^n(C^\bullet, d_\bullet)$ heißt die $n$-te *Kohomologie* des Komplexes.

Eine *Kokettenabbildung* $f^\bullet\colon (C^\bullet, d_\bullet) \to (C'^\bullet, d'_\bullet)$ vom Grad $a$ ist eine Sequenzabbildung vom Grad $a$. Die induzierten Abbildungen zwischen den Kohomologien bezeichnet man mit

$$H^n f^\bullet = f^*\colon H^n(C^\bullet, d_\bullet) \to H^{n+a}(C'^\bullet, d'_\bullet) \ .$$

Wir betrachten die Inklusion $\iota_{n+1}\colon X^n \to X^{n+1}$ und die Projektion $p_{n+1}\colon X^{n+1} \to X^{n+1}/X^n$. Mit den Isomorphismen aus Lemma 6.13 erhalten wir aus den langen exakten Sequenzen der Paare $(X^{n+1}, X^n)$, $(X^n, X^{n-1})$ und $(X^{n-1}, X^{n-2})$ das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dr] & & & & \\
 & & & \tilde{H}^n(X;A) \arrow[dr, hook, "\iota_{n+1}^*"] & & & \\
 & & & & \tilde{H}^n\big(X^n;A\big) \arrow[ur] \arrow[dr, "\delta_n"] & & \\
 & \cdots \arrow[dr] & & & & & \\
\cdots \arrow[r] & \tilde{H}^{n-1}\big(X^{n-1}/X^{n-2};A\big) \arrow[rr, "\delta_{\mathrm{CW}}^{n-1}"] \arrow[dr, "p_{n-1}^*"'] & & \tilde{H}^n\big(X^n/X^{n-1};A\big) \arrow[ur, "p_n^*"] \arrow[rr, "\delta_{\mathrm{CW}}^n"] & & \tilde{H}^{n+1}\big(X^{n+1}/X^n;A\big) \arrow[r] \arrow[dr, "p_{n+1}^*"'] & \cdots \\
 & & \tilde{H}^{n-1}\big(X^{n-1};A\big) \arrow[ur, "\delta_{n-1}"'] \arrow[dr] & & & \tilde{H}^{n+1}\big(X^{n+1};A\big) \arrow[dr] & \\
 & \cdots \arrow[ur, hook] & & 0 & & & 0 \ .
\end{tikzcd}$$

6.15. Satz (Zelluläre Kohomologie). *Es sei $\tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,;A)$ ein gewöhnlicher Kohomologiefunktor mit Koeffizienten $A$ über $R$. Für alle $n$ definiere*

$$\tilde{C}^n_{\mathrm{CW}}(X;A) = \hom_R\big(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_n(X;R), A\big) \ , \tag{1}$$

$$\delta^n_{\mathrm{CW}} = \big(d^{\mathrm{CW}}_{n+1}\big)^*\colon \tilde{C}^n_{\mathrm{CW}}(X;A) \longrightarrow \tilde{C}^{n+1}_{\mathrm{CW}}(X;A) \ , \qquad \textit{und} \tag{2}$$

$$f^{\#n} = f^*_{\#n}\colon \tilde{C}^n_{\mathrm{CW}}(Y;A) \longrightarrow \tilde{C}^n_{\mathrm{CW}}(X;A) \tag{3}$$

*für alle zellulären Abbildungen $f\colon X \to Y$. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\tilde{H}^n(X) \cong H^n\big(\tilde{C}^\bullet_{\mathrm{CW}}(X;A), \delta^\bullet_{\mathrm{CW}}\big) \ . \tag{4}$$

Man sagt dazu auch, der *zelluläre Kokettenkomplex* $\big(\tilde{C}^\bullet_{\mathrm{CW}}(X;A), \delta^\bullet_{\mathrm{CW}}\big)$ entstehe durch *Dualisieren* aus dem zellulären Kettenkomplex. Wichtig ist dabei, dass wir den zellulären Kettenkomplex mit Koeffizienten im zugrundeliegenden Ring $R$ bilden und die Koeffizienten $A$ für die Kohomologie erst durch den Funktor $\hom_R(\,\cdot\,, A)$ einführen.

Beweis. Da wir stets Ringe mit Eins betrachten, gilt $\hom_R(R,A) \cong A$. Mit Definition 5.17 und Lemma 6.13 (1) identifizieren wir

$$\tilde{H}^n(X^n/X^{n-1};A) \cong A^{J^n} \cong \hom_R(R,A)^{J^n} \qquad \text{und} \qquad \tilde{C}_n^{\mathrm{CW}}(X;R) \cong R^{\oplus J^n} \ .$$

Für die in (1) definierten Moduln existieren nach Bemerkung 5.53 natürliche Isomorphismen

$$\tilde{C}^n_{\mathrm{CW}}(X;A) \cong \hom_R\bigl(R^{\oplus J^n},A\bigr) \cong \hom_R(R,A)^{J^n} \cong \tilde{H}^n(X^n/X^{n-1};A) \ .$$

Wie in Definition 5.17 betrachte

$$d^{n+1}_{ji} = \deg f^{n+1}_{ji} \qquad \text{mit} \qquad f^{n+1}_{ji} = q^n_j \circ p_n \circ \varphi^{n+1}_i \colon S^n \longrightarrow S^n \ ,$$

hierbei sei $\varphi^{n+1}_i \colon S^n \to X^n$ die Anklebeabbildung der Zelle $e^{n+1}_i$, und $q^n_j \colon X^n/X^{n-1} \to S^n$ die Kollapsabbildung zur Zelle $e^n_j$. Für jedes $i \in J^{n+1}$ gibt es dann nur endlich viele $j \in J^n$, für die $d^{n+1}_{ij} \neq 0$. Um den Korandoperator $\delta^n_{\mathrm{CW}} = \delta_n \circ p_n^*$ zu bestimmen, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}^n(S^n;A) \arrow[r, "(f^{n+1}_{ji})^*"] \arrow[d, "(q^n_j)^*"'] & \tilde{H}^n(S^n;A) \arrow[r, "\delta_n", "\cong"'] & \tilde{H}^{n+1}(D^{n+1}/S^n;A) \\
\tilde{H}^n(X^n/X^{n-1};A) \arrow[r, "p_n^*"] & \tilde{H}^n(X^n;A) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[u, "(\varphi^{n+1}_i)^*"] & \tilde{H}^{n+1}(X^{n+1}/X^n;A) \arrow[u, "(\bar{\Phi}^{n+1}_i)^*"']
\end{tikzcd}$$

für $i \in J^{n+1}$, $j \in J^n$. Nach Folgerung 6.5 (2) wirkt $(f^{n+1}_{ji})^*$ auf $A \cong \tilde{H}^n(S^n;A)$ durch Multiplikation mit dem Abbildungsgrad $d^{n+1}_{ji}$.

Seien $\alpha = (a_j)_{j\in J^n} \in A^{J^n} \cong \tilde{C}^n_{\mathrm{CW}}(X;A)$ und $c = \sum_{i\in J^{n+1}} r_i \in R^{\oplus J^{n+1}}$ gegeben. Aus Definition 5.17 und der obigen Überlegung folgt

$$\bigl(\delta^n_{\mathrm{CW}}(\alpha)\bigr)(c) = \left(\sum_{j\in J^n} d^{n+1}_{ji} a_j\right)_{i\in J^{n+1}} (c) = \sum_{j\in J^n}\sum_{i\in J^{n+1}} r_i d^{n+1}_{ji} a_j = \alpha\bigl(d^{\mathrm{CW}}_{n+1}(c)\bigr) \ .$$

Jetzt haben wir die mittlere Zeile im obigen kommutativen Diagramm mit dem in (1)–(2) beschriebenen Komplex identifiziert. Der Beweis von (3) verläuft analog, und wir zeigen (4) durch Diagrammjagd, analog zum Beweis von Satz 5.18. □

Aufgrund von Satz 6.15 könnte man wieder erwarten, dass $\tilde{H}^n(X;A) \cong \hom\bigl(\tilde{H}_n(X;R),A\bigr)$ gilt. Für die Räume $\mathbb{C}P^n$ und $\mathbb{H}P^n$ stimmt das tatsächlich, siehe dazu Beispiel 5.20. Ähnlich wie beim universellen Koeffiziententheorem 5.71, bei der Künneth-Formel 5.75 und bei der Milnor-Sequenz 6.11 gilt die allgemeine Aussage auch hier nur bis auf einen derivierten Funktor.

6.16. Satz (Universelles Koeffiziententheorem für gewöhnliche Kohomologie). *Es sei $R$ ein Hauptidealring und $\tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,;A)$ ein gewöhnlicher Kohomologiefunktor mit Koeffizienten $A$ in der Kategorie $\mathcal{M}od_R$. Dann existiert für alle $n$ und alle CW-Komplexe $X$ eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_R\bigl(\tilde{H}_{n-1}(X;R),A\bigr) \longrightarrow \tilde{H}^n(X;A) \longrightarrow \hom_R\bigl(\tilde{H}_n(X;R),A\bigr) \longrightarrow 0 \ .$$

*Diese Sequenz spaltet, allerdings nicht natürlich.*

6.17. Bemerkung. Die Abbildung $\tilde{H}^n(X;A) \to \hom_R\bigl(\tilde{H}_n(X;R),A\bigr)$ induziert durch Auswerten (siehe Bemerkung 4.28 (1)) die sogenannte *Kronecker-Paarung* oder das *Kronecker-Produkt*

$$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle \colon \tilde{H}^n(X;A) \times \tilde{H}_n(X;R) \longrightarrow \hom_R\bigl(\tilde{H}_n(X;R),A\bigr) \times \tilde{H}_n(X;R) \xrightarrow{\mathrm{ev}} A \ .$$

Für $\alpha \in \tilde{H}^n(X;A)$ und $c \in \tilde{H}_n(X;R)$ schreiben wir $\langle c,\alpha\rangle$ oder $\alpha(c) \in A$.

6.18. Folgerung. *Es sei $\Bbbk$ ein Körper und $\tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,;V)$ ein gewöhnlicher Kohomologiefunktor mit Koeffizienten $V$ in der Kategorie $\mathcal{V}ec_\Bbbk$. Dann existiert für alle $n$ und alle CW-Komplexe $X$ ein natürlicher Isomorphismus*

$$\tilde{H}^n(X;V) \cong \hom_\Bbbk\big(\tilde{H}_n(X;\Bbbk), V\big)\ .$$

Beweis. Nach Proposition Prop5.68 (1) verschwindet das Erweiterungsprodukt über Körpern. $\square$

Beweis von Satz 6.16. Der Einfachheit halber schreiben wir $C_n$, $Z_n$, $B_n$ und $H_n$ für die Moduln der Ketten, Zykel, Ränder und die Homologie des Komplexes $\big(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(X;R), d^{\mathrm{CW}}_\bullet\big)$, und $C^n$, $H^n$ für die Koketten und die Kohomologie des Komplexes $\big(\tilde{C}^\bullet_{\mathrm{CW}}(X;A), \delta^{\mathrm{CW}}_\bullet\big)$.

Es bezeichne $\iota_n\colon B_n \to Z_n$ die natürliche Inklusion. Nach Definition der Homologie erhalten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow H_n \longleftarrow Z_n \xleftarrow{\iota} B_n \longleftarrow 0\ .$$

Da $B_n$ und $Z_n$ als Untermoduln von $C_n$ nach Proposition 5.57 (1) frei sind, ist das eine freie Auflösung von $H_n$. Nach Satz 5.58 liefert der Funktor $\hom_R(\,\cdot\,,A)$ eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \hom_R(H_n,A) \longrightarrow \hom_R(Z_n,A) \xrightarrow{\iota_n^*} \hom_R(B_n,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R(H_n,A) \longrightarrow 0\ .$$

Wir betrachten eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$\begin{tikzcd}
0 & B_n \arrow[l] \arrow[d, "0"] & C_{n+1} \arrow[l, "d_{n+1}"'] \arrow[d, "d_{n+1}"] & Z_{n+1} \arrow[l] \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[l] \\
0 & B_{n-1} \arrow[l] & C_n \arrow[l, "d_n"'] & Z_n \arrow[l] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}\ , \qquad (*)$$

wobei die äußeren Komplexe triviales Differential haben. Da die Zeilen aus freien Moduln bestehen, liefert der Funktor $\hom_R(\,\cdot\,,A)$ eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \hom_R(B_n,A) \arrow[r] & C^{n+1} \arrow[r] & \hom_R(Z_{n+1},A) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hom_R(B_{n-1},A) \arrow[r] \arrow[u, "0"] & C^n \arrow[r] \arrow[u, "\delta_n"] & \hom_R(Z_n,A) \arrow[r] \arrow[u, "0"] & 0
\end{tikzcd}\ ,$$

wobei wir die mittlere Spalte nach Satz 6.15 mit dem Komplexe $\big(\tilde{C}^\bullet_{\mathrm{CW}}(X;A), \delta^{\mathrm{CW}}_\bullet\big)$ identifizieren.

Wir wenden das Schlangenlemma 5.25 an. Da die äußeren Komplexe triviales Differential haben, ändert sich nichts beim Übergang zur Kohomologie. Eine kurze Diagrammjagd zeigt, dass der Verbindungshomomorphismus gerade $\iota_n^*$ ist, also erhalten wir die lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \hom_R(Z_{n-1},A) \xrightarrow{\iota_{n-1}^*} \hom_R(B_{n-1},A) \longrightarrow H^n \longrightarrow \hom_R(Z_n,A) \xrightarrow{\iota_n^*} \hom_R(B_n,A) \longrightarrow \cdots$$

Hieraus ergibt sich die kurze exakte Sequenz im Satz.

Da die Ränder $B_n$ frei sind, spalten die Zeilen in (*), und wir erhalten Abbildungen $p_n\colon C_n \to Z_n$ mit $p_n|_{Z_n} = \mathrm{id}_{Z_n}$. Wir wenden auf das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "d_{n+1}"'] & B_n \arrow[d, "\iota_n"] \arrow[dl, hook] \\
C_n \arrow[r, "p_n"] & Z_n
\end{tikzcd}\ .$$

den Funktor $\hom_R(\,\cdot\,, A)$ an und erhalten

$$\begin{tikzcd} C^{n+1} & \hom_R(B_n; A) \arrow[l, "d_{n+1}^*"'] \\ C^n \arrow[u, "\delta_n"] \arrow[ur] & \hom_R(Z_n; A) \arrow[l, "p_n^*"'] \arrow[u, "\iota_n^*"'] \end{tikzcd} .$$

Wir sehen, dass die Einschränkung von $p_n^*$ auf $\ker \iota_n^* = \hom_R(H_n, A)$ nach $\ker \delta_n \subset C^n$ abbildet, also induziert $p_n^*$ die gesuchte Spaltungsabbildung

$$p_n^*|_{\ker \iota_n^*} \colon \hom_R(H_n, A) \longrightarrow \ker \delta_n \twoheadrightarrow H^n(X; A) . \qquad \square$$

Mit ähnlichen Methoden zeigt man auch das am Ende von Abschnitt 5.g erwähnte universelle Koeffiziententheorem für die Homologie, siehe Übung 6.82.

6.19. Beispiel. Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}P^n$ aus Beispiel 5.21 und $R = A = \mathbb{Z}$. Es gilt

$$\hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} , \qquad \operatorname{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0 = \hom(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Ext}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2 .$$

Somit erhalten wir

$$\tilde{H}^k(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} 0 \cong \hom(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) & \text{falls } k \text{ ungerade und } 0 < k < n, \\ \mathbb{Z}/2 \cong \operatorname{Ext}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) & \text{falle } k \text{ gerade und } 0 < k \leq n, \\ \mathbb{Z} \cong \hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) & \text{falls } k = n \text{ ungerade}, \\ 0 \cong \operatorname{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) & \text{falls } k = n+1 \text{ gerade, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

Im Vergleich zu Beispiel 5.21 (1) treten die Torsionsanteile jetzt jeweils im um 1 höheren Grad auf, während die freien Gruppen ihren Platz beibehalten. Dieses Verhalten erklärt sich aus Übung 5.105.

Sei jetzt $R = A = \mathbb{Z}/2$. Da $R$ ein Körper ist, verschwinden alle Erweiterungsprodukte, und es gilt $\hom_{\mathbb{Z}/2}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$. Mit Beispiel 5.21 (2) erhalten wir

$$\tilde{H}^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 \cong \hom_{\mathbb{Z}/2}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) & \text{falls } 0 < k \leq n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2}$$

Das gleiche Ergebnis hätten wir für $R = \mathbb{Z}$ und $A = \mathbb{Z}/2$ aus Beispiel 5.21 (1) erhalten, allerdings mit etwas mehr Rechenarbeit, ähnlich wie in Beispiel 5.72.

Sei schließlich $\Bbbk$ ein Körper der Charakteristik $\neq 2$. Aus Beispiel 5.21 (3) folgt

$$\tilde{H}^k(\mathbb{R}P^n; \Bbbk) \cong \begin{cases} \Bbbk & \text{falls } k = n \text{ ungerade ist, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3}$$

Als nächstes betrachten wir eine Künnethformel für Kohomologie. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf Koeffizienten in einem Körper $\Bbbk$.

6.20. Satz (Kohomologische Künneth-Formel). *Es seien $X$, $Y$ topologische Räume, und es sei $\Bbbk$ ein Körper. Wir nehmen an, dass $\tilde{H}^k(X; \Bbbk)$ für alle $k \geq 0$ endlich-dimensional ist. Dann gibt es natürliche Isomorphismen*

$$H^n(X \times Y; \Bbbk) \cong \big(H^\bullet(X; \Bbbk) \otimes_\Bbbk H^\bullet(Y; \Bbbk)\big)_n , \qquad \textit{und} \tag{1}$$

$$\tilde{H}^n(X \wedge Y; \Bbbk) \cong \big(\tilde{H}^\bullet(X; \Bbbk) \otimes_\Bbbk \tilde{H}^\bullet(Y; \Bbbk)\big)_n , \qquad \textit{falls } X \textit{ und } Y \textit{ gut punktiert sind.} \tag{2}$$

Allgemeinere Formulierungen, zum Beispiel über Hauptidealringen, sind möglich; allerdings benötigt man stets eine „Endlichkeitsbedingung“ für einen der beiden Räume, siehe Übung 6.83.

Beweis. Seien $V$, $W$ zwei $\Bbbk$-Vektorräume. Zu zwei Elementen $\alpha \in V^* = \hom_{\Bbbk}(V, \Bbbk)$ und $\beta \in W^* = \hom_{\Bbbk}(W, \Bbbk)$ existiert eine bilineare Abbildung

$$V \times W \longrightarrow \Bbbk \qquad \text{mit} \qquad (v, w) \longmapsto \alpha(v)\,\beta(w)\ .$$

Nach der charakteristischen Eigenschaft 4.28 (2) des Tensorproduktes existiert daher eine Abbildung

$$\alpha \otimes \beta \colon V \otimes W \to \Bbbk \qquad \text{mit} \qquad v \otimes w \longmapsto \alpha(v)\,\beta(w)\ .$$

Die Zuordnung $(\alpha, \beta) \to \alpha \otimes \beta \in (V \otimes W)^*$ ist ebenfalls bilinear, also erhalten wir eine natürliche Abbildung

$$V^* \otimes W^* \longrightarrow (V \otimes W)^*\ . \tag{*}$$

Sei jetzt einer der beiden Vektorräume endlich-dimensional, etwa $V$, mit Basis $(v_1, \ldots, v_p)$. Dann erhalten wir eine duale Basis $(v^1, \ldots, v^p)$ von $V^*$ mit $v^i(v_j) = \delta_{ij}$. Jedes Element von $V^* \otimes W^*$ lässt sich dann darstellen als

$$\sum_{i=1}^{p} v^i \otimes \beta^i\ ,$$

mit $\beta^1, \ldots, \beta^p \in W^*$ beliebig. Sei umgekehrt $\gamma \in (V \otimes W)^*$, dann ist nach Bemerkung 4.28 die Abbildung

$$\gamma \circ \big(\otimes_{V,W}(v_i)\big) \colon W \longrightarrow \Bbbk \qquad \text{mit} \qquad w \longmapsto \gamma(v_i \otimes w)$$

linear, und wir setzen $\beta_i = \gamma \circ (\otimes_{V,W}(v_i)) \in W^*$. Jedes Element $u \in V \otimes W$ lässt sich schreiben als

$$u = \sum_{i=1}^{p} v_i \otimes w_i$$

mit $w_1, \ldots, w_p \in W$ beliebig. Einsetzen in $\gamma$ liefert

$$\gamma(u) = \sum_{i=1}^{p} \gamma(v_i \otimes w_i) = \sum_{i=1}^{p} \beta^i(w_i) = \sum_{i,j=1}^{p} (v^j \otimes \beta^j)(v_i \otimes w_i) = \left(\sum_{i=1}^{p} v^i \otimes \beta^i\right)(u)\ .$$

Daher ist die Abbildung (*) in diesem Fall ein Isomorphismus.

Wir beweisen die Aussage (2); der Beweis von (1) ist analog. Nach den Folgerungen 5.77 (2), 6.18 und der obigen Vorarbeit gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{H}^n(X \wedge Y; \Bbbk) &\cong \tilde{H}_n(X \wedge Y; \Bbbk)^* \cong \left(\bigoplus_{k=0}^{n} \tilde{H}_k(X; \Bbbk) \otimes_{\Bbbk} \tilde{H}_{n-k}(Y; \Bbbk)\right)^* \\
&\cong \bigoplus_{k=0}^{n} \tilde{H}_k(X; \Bbbk)^* \otimes_{\Bbbk} \tilde{H}_{n-k}(Y; \Bbbk)^* \cong \big(\tilde{H}_\bullet(X; \Bbbk)^* \otimes \tilde{H}_\bullet(Y; \Bbbk)^*\big)_n \\
&\cong \big(\tilde{H}^\bullet(X; \Bbbk) \otimes \tilde{H}^\bullet(Y; \Bbbk)\big)_n\ .
\end{aligned}$$

□

Wenn beide Vektorräume unendlich-dimensional sind, ist die Abbildung (*) kein Isomorphismus mehr. Denn jedes Element von $V^* \otimes W^*$ hat „endlichen Rang“, das heißt, lässt sich als endliche Linearkombination zerlegbarer Elemente $\alpha^i \otimes \beta^i$ schreiben. Wenn wir unendlich viele linear unabhängige $\alpha^i \in V^*$ und $\beta^i \in W^*$ für $i \in I$ finden können, erhalten wir ein Element von „unendlichem Rang“

$$\sum_{i \in I} \alpha^i \otimes \beta^i \in (V \otimes W)^* \setminus V^* \otimes W^*\ .$$

## 6.d. Produkte

In diesem Abschnitt zeigen wir, wie man zumindest für CW-Komplexe Produkte zwischen Kohomologiegruppen definieren kann. Im nächsten Kapitel lernen wir einen abstrakten Zugang kennen, der Produkte auch für verallgemeinerten Kohomologiefunktoren konstruiert. Da wir im Moment nur zellulär arbeiten, können wir das Kürzel „CW“ in der Notation weglassen.

Es seien $X$, $Y$ CW-Komplexe und $R$ ein kommutativer Ring mit Eins. Es seien

$$\alpha \in \hom_R\big(C_k(X;R),R\big) = \tilde{C}^k(X;R) \qquad \text{und} \qquad \beta \in \hom_R\big(C_\ell(Y;R),R\big) = \tilde{C}^\ell(Y;R)$$

Koketten, dann erhalten wir wie im Beweis von Satz 6.20 eine Abbildung

$$\alpha \otimes \beta \colon \tilde{C}_k(X;R) \otimes_R \tilde{C}_\ell(Y;R) \longrightarrow R\,.$$

Da $\tilde{C}_k(X;R) \otimes_R \tilde{C}_\ell(Y;R)$ nach Definition 5.74 und Proposition 5.78 ein direkter Summand von

$$\big(\tilde{C}_\bullet(X;R) \otimes_R \tilde{C}_\bullet(Y;R)\big)_{k+\ell} \cong \tilde{C}_{k+\ell}(X \wedge Y;R) \tag{*}$$

ist, können wir $\alpha \otimes \beta$ auf eindeutige Weise mit Satz 6.15 zu einer Kokette

$$\alpha \wedge \beta \in \hom_R\big(\tilde{C}_{k+\ell}(X \wedge Y;R),R\big) \cong C^{k+\ell}(X \wedge Y;R)$$

fortsetzen, die auf allen anderen Summanden des Tensorproduktes verschwindet. Das liefert eine Abbildung

$$\wedge \colon \tilde{C}^\bullet(X;R) \times \tilde{C}^\bullet(Y;R) \longrightarrow C^\bullet(X \wedge Y;R)$$

Sei jetzt $\alpha \in \tilde{C}^k(X;R)$ wie oben, dann setzen wir

$$\tilde{C}_k(X;R) \otimes_R \tilde{C}_\ell(Y;R) \xrightarrow{\alpha\otimes\mathrm{id}} R \otimes_R \tilde{C}_\ell(Y;R) \cong \tilde{C}_\ell(Y;R)$$

durch 0 auf alle anderen Summanden des Tensorproduktes (*) fort. Das liefert eine Abbildung

$$/ \colon \tilde{C}_{k+\ell}(X \wedge Y;R) \otimes_R C^k(X;R) \longrightarrow C_\ell(Y;R)\,.$$

6.21. Proposition und Definition. *Die obigen Abbildungen $\wedge$ und $/$ induzieren für CW-Komplexe $X$, $Y$ natürliche* äußere Produkte

$$\wedge \colon \tilde{H}^\bullet(X;R) \otimes_R \tilde{H}^\bullet(Y;R) \longrightarrow \tilde{H}^\bullet(X \wedge Y;R)\,,$$
$$\textit{und} \qquad / \colon \tilde{H}_\bullet(X \wedge Y;R) \otimes_R \tilde{H}^\bullet(X;R) \longrightarrow \tilde{H}_\bullet(Y;R)\,,$$

*das* Smash-Produkt, *sowie das* Schräg- *oder* Slant-Produkt. *Diese haben für alle $\alpha \in \tilde{H}^k(X;R)$, $\beta \in \tilde{H}^\ell(Y;R)$, $\gamma \in \tilde{H}^m(Z;R)$ und $a \in \tilde{H}_k(X;R)$, $b \in \tilde{H}_{k+\ell}(X \wedge Y;R)$, $c \in \tilde{H}_{k+\ell+m}(X \wedge Y \wedge Z;R)$ die folgenden Eigenschaften.*

(1) Assoziativität. *Es gilt*

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \in \tilde{H}^{k+\ell+m}(X \wedge Y \wedge Z;R)$$
$$\textit{und} \qquad (c/\alpha)/\beta = c/(\alpha \wedge \beta) \in \tilde{H}_m(Z;R)\,.$$

(2) Einselement. *Für das Element $1 \in R \cong \tilde{H}^0(S^0;R)$ gilt*

$$1 \wedge \alpha = \alpha \wedge 1 = \alpha \in \tilde{H}^k(X;R) \qquad \textit{und} \qquad a/1 = a \in \tilde{H}_k(X;R)\,.$$

(3) Stabilität. *Für die Stabilisierungs-Isomorphismen $\sigma$ gilt*

$$(\sigma\alpha) \wedge \beta = \sigma(\alpha \wedge \beta) = (-1)^k \alpha \wedge (\sigma\beta) \in \tilde{H}^{k+\ell+1}\big(S(X \wedge Y);R\big)\,,$$
$$(\sigma b)/(\sigma\alpha) = b/\alpha \in \tilde{H}_\ell(Y;R) \qquad \textit{und} \qquad (\sigma b)/\alpha = (-1)^k \sigma(b/\alpha) \in \tilde{H}_{\ell+1}(Y;R)\,.$$

(4) Adjunktion. *Für das Kronecker-Produkt gilt*

$$\langle b/\alpha, \beta\rangle = \langle b, \alpha \wedge \beta\rangle \qquad \textit{und} \qquad a/\alpha = \langle a, \alpha\rangle \in R \cong \tilde{H}_0(S^0;R)\,.$$

(5) Transposition. *Die Transpositionsabbildung* $t\colon X\wedge Y \to Y\wedge X$ *sei gegeben durch* $t(x\wedge y) = y\wedge x$, *dann gilt*

$$t^*(\beta\wedge\alpha) = (-1)^{k\ell}\alpha\wedge\beta\ .$$

„Natürlichkeit“ für das Schräg-Produkt bedeutet, dass

$$\big((f\wedge g)_* b\big)/\alpha = g_*\big(b/(f^*\alpha)\big) \in \tilde H_\ell(W;R) \tag{6.3}$$

für alle $f\colon X\to Z$, $g\colon Y\to W$, $\alpha\in\tilde H^k(Z;R)$ und $b\in\tilde H_{k+\ell}(X\wedge Y;R)$ gilt. Es ist kontraintuitiv, beim Schräg-Produkt von rechts auf den linken Faktor eines Produktes einzuwirken, aber so erhalten wir alle obigen Eigenschaften. In der Literatur finden sich auch andere Konventionen, die dann meist zu zusätzlichen Vorzeichenfaktoren führen.

Später werden wir sehen, dass Natürlichkeit und die Eigenschaften (1)–(3) die beiden äußeren Produkte bereits eindeutig festlegen. Die Notation „/“ ist etwas irreführend, da hier multipliziert und nicht dividiert wird. Immerhin gelten einzelne „Bruchrechenregeln“, und die Grade der beteiligten Klassen verhalten sich so wie erwartet.

Beweis. Zunächst zeigen wir Wohldefiniertheit des Smash-Produktes, das heißt, das Produkt von Kozykeln ist wieder ein Kozykel, und exakt, falls einer der Faktoren exakt ist. Beides folgt mit Proposition 5.78 und Satz 6.15, denn für $\alpha$, $\beta$ wie oben und $v\in\tilde C_\bullet(X;R)$, $w\in\tilde C_\bullet(Y;R)$ gilt

$$\begin{aligned}\big(\delta^{k+\ell}(\alpha\wedge\beta)\big)(v\otimes w) &= (\alpha\wedge\beta)\big(d_{k+\ell+1}(v\otimes w)\big) = \alpha(dv)\cdot\beta(w) + (-1)^k\alpha(v)\cdot\beta(dw)\\ &= \big(\delta^k\alpha(v)\big)\cdot\beta(w) + (-1)^k\alpha(v)\cdot\big(\delta^\ell\beta(w)\big) = \big(\delta^k\alpha\wedge\beta + (-1)^k\alpha\wedge\delta^\ell\beta\big)(v\otimes w)\ .\end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass $\alpha(v)\neq 0$ nur dann, wenn $v\in C_k(X;R)$. Analog ist auch das Schrägprodukt wohldefiniert.

Assoziativität (1) folgt, da das Smashprodukt auf Koketten bereits assoziativ ist. Natürlichkeit lässt sich ebenfalls leicht überprüfen. Für das Schrägprodukt erhalten wir Assoziativität auf Ketten- und Kokettenniveau, indem wir Ketten der Form $c = x\otimes y\otimes z$ mit $x\in\tilde C_k(X;R)$, $y\in\tilde C_\ell(Y;R)$ und $z\in\tilde C_m(Z;R)$ betrachten:

$$\big((x\otimes y\otimes z)/\alpha\big)/\beta = \big(\alpha(x)\,y\otimes z\big)/\beta = \alpha(x)\,\beta(y)\,z = (x\otimes y\otimes z)/(\alpha\wedge\beta)\ .$$

Es sei $e^0$ die nichttriviale Nullzelle von $S^0$, dann ist $e = 1e^0$ ein Erzeuger von $\tilde C_0(S^0;R)\cong R$. Es gilt $S^0\wedge X\cong X\cong X\wedge S^0$, und wir identifizieren $v\in\tilde C_k(X;R)\cong\tilde C_k(S^0\wedge X;R)$ mit $e\otimes v\in\tilde C_0(S^0;R)\otimes_R\tilde C_k(X;R)$. Das Element $1\in R\cong\tilde H^0(S^0;R)$ wird repräsentiert durch $\varepsilon\in\tilde C^0(S^0;R)$ mit $\varepsilon(e)=1$. Es folgt

$$(\varepsilon\wedge\alpha)(v) = (\varepsilon\wedge\alpha)(e\otimes v) = \varepsilon(e)\cdot\alpha(v) = \alpha(v)\ .$$

Genauso erhalten wir die anderen Aussage in (2).

Die Aussagen (3)–(5) bleiben Übung 6.85. □

6.22. Beispiel. Wir benutzen die Stabilisierungsisomorphismen und definieren induktiv Erzeuger

$$e_k = \sigma^k(1)\in\tilde H_k(S^kS^0;R) = \tilde H_k(S^k) \qquad\text{und}\qquad \varepsilon^k = \sigma^k(1)\in\tilde H^k(S^k)\ .$$

Dann folgt aus (2), (3) induktiv

$$\begin{aligned}\varepsilon^k\wedge\varepsilon^\ell = (\sigma^k1)\wedge(\sigma^\ell1) = \sigma^k\big(1\wedge(\sigma^\ell1)\big) = \sigma^{k+\ell}1 = \varepsilon^{k+\ell}\\ \text{und}\qquad e_{k+\ell}/\varepsilon^k = (\sigma^ke_\ell)/(\sigma^k1) = e_\ell/1 = e_\ell\ .\end{aligned}$$

Wie in (4) gilt

$$\langle e_{k+\ell}/\varepsilon^k,\varepsilon^\ell\rangle = \langle e_\ell,\varepsilon^\ell\rangle = 1 = \langle e_{k+\ell},\varepsilon^{k+\ell}\rangle = \langle e_{k+\ell},\varepsilon^k\wedge\varepsilon^\ell\rangle\ .$$

Diese Relationen stehen nicht im Widerspruch zu den Vorzeichen in (3) und (5), denn die Transpositionsabbildung $t\colon S^{k+\ell} \to S^{k+\ell}$ hat Abbildungsgrad $(-1)^{k\ell}$, und für (3) ergibt sich daraus

$$\varepsilon^k \wedge (\sigma\varepsilon^\ell) = (-1)^{k(\ell+1)}(\sigma\varepsilon^\ell) \wedge \varepsilon^k = (-1)^{k(\ell+1)}\sigma(\varepsilon^\ell \wedge \varepsilon^k) = (-1)^k\sigma(\varepsilon^k \wedge \varepsilon^\ell)\ .$$

Wir benutzen das Kronecker-Produkt und nutzen aus, dass $\tilde{H}^\ell(S^\ell; R) \cong R$:

$$\langle (\sigma e_{k+\ell})/\varepsilon^k, \sigma\varepsilon^\ell\rangle = \langle \sigma e_{k+\ell}, \varepsilon^k \wedge \sigma\varepsilon^\ell\rangle = (-1)^k = (-1)^k\langle e_{k+\ell}/\varepsilon^k, \varepsilon^\ell\rangle = (-1)^k\langle \sigma(e_{k+\ell}/\varepsilon^k), \sigma\varepsilon^\ell\rangle\ .$$

Da $(X \times Y)_+ = (X_+) \wedge (Y_+)$, lässt sich ein Kreuz-Produkt

$$\times = \wedge\colon \tilde{H}^\bullet(X_+; R) \otimes_R \tilde{H}^\bullet(Y_+; R) \to \tilde{H}^\bullet\big((X \times Y)_+; R\big)$$

für unreduzierte Kohomologie konstruieren. Falls $R = \Bbbk$ ein Körper ist und die Endlichkeitsvoraussetzungen aus Satz 6.20 gelten, entsprechen diese äußeren Produkte gerade den Komponenten der Isomorphismen aus der kohomologischen Künneth-Formel. Auch für Homologietheorien können wir die „linken“ Abbildungen in den Künneth-Sequenzen aus Satz 5.75 und Folgerung 5.76 als Smash- beziehungsweise Kreuzprodukte auffassen, die dann ähnliche Eigenschaften haben.

Die folgende Konstruktion hingegen lässt sich in der Homologie nicht einfach nachmachen. Sei $X$ ein topologischer Raum, dann bezeichne $\Delta_X\colon X \to X \wedge X$ die *Diagonalabbildung* mit $\Delta_X(x) = (x, x)$. Falls $X$ ein CW-Komplex ist, ist $\Delta_X$ in der Regel nicht zellulär. Nach Satz 4.43 lässt sich $\Delta_X$ jedoch zellulär approximieren. Da alle zellulären Approximationen punktiert homotop sind, ist es für die folgenden Konstruktionen egal, welche wir jeweils wählen.

6.23. Definition. Sei $X$ ein CW-Komplex, $\Delta'_X$ eine zelluläre Approximation der Diagonalabbildung, $R$ ein Ring, und $k, \ell \geq 0$. Die *inneren Produkte,* nämlich das *Cup-Produkt* $\smile\colon \tilde{H}^k(X; R) \times \tilde{H}^\ell(X; R) \to \tilde{H}^{k+\ell}(X; R)$ sowie das *Cap-Produkt* $\frown\colon \tilde{H}_{k+\ell}(X; R) \times \tilde{H}^k(X; R) \to \tilde{H}_\ell(X; R)$ sind für alle $\alpha \in \tilde{H}^k(X; R)$, $\beta \in \tilde{H}^\ell(X; R)$ und $c \in \tilde{H}_{k+\ell}(X; R)$ definiert durch

$$\alpha \smile \beta = \Delta'^*_X(\alpha \wedge \beta) \in \tilde{H}^{k+\ell}(X; R) \qquad \text{und} \qquad c \frown \alpha = (\Delta'_{X*}c)/\alpha \in \tilde{H}_\ell(X; R)\ .$$

Um Verwechselungen mit dem Mengensymbolen „$\cup$“ und „$\cap$“ zu vermeiden, schreiben wir „$\smile$“ und „$\frown$“ für die inneren Produkte.

6.24. Proposition. *Die inneren Produkte sind natürlich und haben folgende Eigenschaften.*

(1) Assoziativgesetz. *Es gilt*

$$(\alpha \smile \beta) \smile \gamma = \alpha \smile (\beta \smile \gamma) \qquad \textit{und} \qquad (c \frown \alpha) \frown \beta = c \frown (\alpha \smile \beta)\ .$$

(2) Einselement. *Sei* $p\colon X \to \mathrm{pt}$ *die konstante Abbildung, dann ist* $1 = p_+^*(1) \in \tilde{H}^0(X_+; R) = H^0(X; R)$ *neutrales Element für beide Produkte.*

(3) Adjunktion. *Es gilt*

$$\langle b \frown \alpha, \beta\rangle = \langle b, \alpha \smile \beta\rangle\ .$$

(4) *Das Cup-Produkt ist* graduiert kommutativ, *das heißt, für alle* $\alpha \in \tilde{H}^k(X; R)$ *und* $\beta \in \tilde{H}^\ell(X; R)$ *gilt*

$$\beta \smile \alpha = (-1)^{k\ell}\alpha \smile \beta\ .$$

Insbesondere bildet die reduzierte Kohomologie $\big(\tilde{H}^\bullet(X; R), \smile\big)$ einen graduiert kommutativen Ring, den *Kohomologiering* von $X$, und $\big(\tilde{H}_\bullet(X; R), \frown\big)$ ist ein Modul über diesem Ring. Dabei könnte man in der Homologie die Koeffizienten sogar durch einen beliebigen $R$-Modul $A$ ersetzen.

Beweis. Natürlichkeit und Assoziativität folgen sofort aus Proposition 6.21 (1). Das Verhalten der Eins in (2) erhalten wir aus 6.21 (2), indem wir im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}^0(X_+;R) \times \tilde{H}^k(X_+;R) \arrow[r, "\wedge"] & \tilde{H}^k(X_+ \wedge X_+;R) \arrow[r, "\Delta'^*_X"] & \tilde{H}^k(X_+;R) \\
\tilde{H}^0(S^0;R) \times \tilde{H}^k(X_+;R) \arrow[r, "\wedge"] \arrow[u, "p_+^* \times \mathrm{id}_X^*"] & \tilde{H}^k(S^0 \wedge X_+;R) \arrow[u, "(p_+ \wedge \mathrm{id}_X)^*"] \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

unten links das Element $1 \in R = H^0(S^0;R)$ einsetzen.

Es sei $T\colon \tilde{H}^\bullet(X;R) \otimes_R \tilde{H}^\bullet(X;R) \to \tilde{H}^\bullet(X;R) \otimes_R \tilde{H}^\bullet(X;R)$ gegeben durch $T(\alpha \otimes \beta) = (-1)^{k\ell} \beta \otimes \alpha$ für $\alpha \in \tilde{H}^k(X;R)$ und $\beta \in \tilde{H}^\ell(X;R)$. Es sei $\Delta'_X$ eine zelluläre Approximation der Diagonalen $\Delta_X$ und $t$ die Transpositionsabbildung, dann ist auch $\Delta''_X = t \circ \Delta'_X$ eine zelluläre Approximation der Diagonalen. Nach Proposition 6.21 (4) kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}^\bullet(X;R) \otimes_R \tilde{H}^\bullet(X;R) \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "T"'] & \tilde{H}^\bullet(X \wedge X;R) \arrow[r, "\Delta''^*_X"] \arrow[d, "t^*"'] & \tilde{H}^\bullet(X;R) \\
\tilde{H}^\bullet(X;R) \otimes_R \tilde{H}^\bullet(X;R) \arrow[r, "\wedge"] & \tilde{H}^\bullet(X \wedge X;R) \arrow[ur, "\Delta'^*_X"'] &
\end{tikzcd}$$

Daraus folgt (3). □

6.25. Bemerkung. Zur Erinnerung: es sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins. Dann ist eine (assoziative) *$R$-Algebra* ein Ring $(A, +, *)$, der gleichzeitig ein unitärer $R$-Modul ist. Die Addition ist für beide Strukturen die gleiche, und die Algebren-Multiplikation „$*$“ in $A$ ist $R$-bilinear. Da jede abelsche Gruppe ein $\mathbb{Z}$-Modul ist, ist ein Ring das gleiche wie eine (assoziative) $\mathbb{Z}$-Algebra. Insbesondere ist $\big(\tilde{H}^\bullet(X;R), \smile\big)$ eine $R$-Algebra, die *Kohomologiealgebra.*

Eine Algebra besitzt genau dann ein Einselement, wenn es einen Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to A$ gibt, so dass $\varphi(r) * a = a * \varphi(r) = ra$, denn dann gilt $1 = \varphi(1)$. Zu jeder $R$-Algebra $A$ lässt sich ein Einselement hinzufügen. Dazu definieren wir $B = A \oplus R$ mit der Multiplikation

$$(a, r) * (b, s) = (a * b + sa + rb, rs)$$

und erhalten $1_B = (0, 1)$ als neues Einselement (wenn $A$ bereits ein Einselement hatte, übernimmt $1_B$ jetzt diese Rolle). Für die Einbettung $\iota\colon A \to B$ gilt die folgende universelle Eigenschaft: zu jedem Algebren-Homomorphismus $f\colon A \to C$ in eine $R$-Algebra $C$ mit Eins $1_C$ existiert genau ein Homorphismus $F\colon B \to C$ mit $F \circ \iota = f$ und $F(1_B) = 1_C$. Wegen (2) macht diese Konstruktion aus der reduzierten die unreduzierte Kohomologiealgebra

$$H^\bullet(X;R) = \tilde{H}^\bullet(X;R) \oplus R \qquad \text{mit} \qquad (\alpha, r) \smile (\beta, s) = (\alpha \smile \beta + s\alpha + r\beta, rs)\ .$$

Insbesondere ist die unreduzierte Kohomologie eine $R$-Algebra mit Eins, und die unreduzierte Homologie bildet einen unitären Modul.

Wenn $X = \coprod_{i \in I} X_i$ mehrere Zusammenhangskomponenten hat und der Basispunkt $x_0$ in $X_0$ mit $0 \in I$ liegt, dann folgt

$$\tilde{H}^\bullet(X;R) = \tilde{H}^\bullet(X_0;R) \oplus \prod_{i \in I \setminus \{0\}} H^\bullet(X_i;R) \qquad \text{und} \qquad H^\bullet(X;R) = \prod_{i \in I} H^\bullet(X_i;R)\ .$$

Insbesondere hängt die reduzierte Kohomologiealgebra im Allgemeinen von der Wahl der Zusammenhangskomponente des Basispunktes ab, die unreduzierte jedoch nicht. Außerdem können wir die reduzierte Kohomologiealgebra aus der unreduzierten durch Einschränkung zurückerhalten.

Schließlich lässt sich das äußere Produkt aus dem unreduzierten Cup-Produkt rekonstruieren. Seien dazu $p\colon X \times Y \to X$ und $q\colon X \times Y \to Y$ die Projektionen, dann kann zeigen, dass

$$(p^*\alpha) \smile (q^*\beta) = \Delta^*_{X\times Y}\big((p^*\alpha) \times (q^*\beta)\big) \in H^\bullet(X \times Y; R) \ .$$

Wir erhalten auch das reduzierte äußere Produkt, da das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^k(X;R) \otimes_R H^\ell(Y;R) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, two heads] & H^{k+\ell}(X \times Y; R) \arrow[d, two heads] \\ \tilde{H}^k(X;R) \otimes_R \tilde{H}^\ell(Y;R) \arrow[r, "\wedge"] & \tilde{H}^{k+\ell}(X \wedge Y; R) \end{tikzcd}$$

kommutiert und die kurze exakte Sequenz in Bemerkung 6.2 (3) spaltet. Es ist also egal, in welchem der vier möglichen Settings (reduziert/unreduziert, innen/außen) wir zuerst Produkte definieren.

Da das Cup-Produkt eine Approximation der Diagonalen erfordert, ist es in Einzelfällen nicht immer einfach zu berechnen. Um wenigstens das Cup-Produkt auf $\mathbb{C}P^n$ angeben zu können, führen wir zunächst relative Produkte ein. Dazu seien $A$, $B \subset X$ Unterkomplexe eines CW-Komplexes $X$, dann induziert $\Delta_X$ eine *relative Diagonalabbildung*

$$\Delta_{X;A,B}\colon X/(A \cup B) \longrightarrow X/A \wedge X/B \ . \tag{6.4}$$

6.26. Definition. Es sei $X$ ein CW-Komplex mit Unterkomplexen $A$, $B \subset X$. Dann definieren wir die *relativen inneren Produkte*, das *relative Cup-Produkt* $\smile\colon \tilde{H}^k(X/A;R) \times \tilde{H}^\ell(X/B;R) \to \tilde{H}^{k+\ell}(X/(A \cup B);R)$ und das *relative Cap-Produkt* $\frown\colon \tilde{H}_{k+\ell}(X/(A \cup B);R) \times \tilde{H}^k(X/A;R) \to \tilde{H}_\ell(X/B;R)$ für alle $\alpha \in H^k(X/A;R)$, $\beta \in H^\ell(X/B;R)$ und $c \in H_{k+\ell}(X/(A \cup B);R)$ durch

$$\alpha \smile \beta = \Delta^*_{X;A,B}(\alpha \wedge \beta) \qquad \text{und} \qquad c \frown \alpha = \big((\Delta_{X;A,B})_* c\big)/\alpha \ .$$

Für die relativen Produkte gilt Proposition 6.24 analog, insbesondere sind sie natürlich. Das wollen wir im Folgenden ausnutzen.

6.27. Beispiel. Es sei $k + \ell = n$. Die folgenden Überlegungen funktionieren aber für jeden Ring $R$, wir schreiben daher der Einfachheit halber die Koeffizienten nicht mit. Wir stellen $\mathbb{C}P^n$ wie in Übung 1.130 als CW-Komplex mit je einer Zelle der Dimension $2k$ für alle $0 \le k \le n$ dar. Die Zellen bis zur Dimension $2k$ bilden dabei einen zu $\mathbb{C}P^k$ homöomorphen Unterraum. Nach Lemma 6.13 „trägt“ die $2k$-Zelle eine Kohomologieklasse $\alpha$, die unter den natürlichen Abbildungen

$$\mathbb{C}P^k \xrightarrow{p_k} \mathbb{C}P^k/\mathbb{C}P^{k-1} \xleftarrow{\cong} S^{2k}$$

der Klasse $\varepsilon^{2k}$ aus Beispiel 6.22 entspricht. Sie verhält sich natürlich unter Inklusionen $\mathbb{C}P^m \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ für $k \le m \le n$, und wir erhalten

$$\alpha \in \tilde{H}^{2k}(\mathbb{C}P^n) \xleftarrow{\cong} \tilde{H}^{2k}(\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1}) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^{2k}(S^{2k}) \ni \varepsilon^{2k} \ .$$

Es seien $\beta \in \tilde{H}^{2\ell}(\mathbb{C}P^n)$ und $\gamma \in \tilde{H}^{2n}(\mathbb{C}P^n)$ entsprechend konstruiert. Dann behaupten wir, dass

$$\alpha \smile \beta = \gamma \ . \tag{*}$$

Sei insbesondere $\omega \in \tilde{H}^2(\mathbb{C}P^n) \cong R$ ein Erzeuger, dann erhalten wir Ringisomorphismen

$$\big(\tilde{H}^\bullet(\mathbb{C}P^n), \smile\big) \cong (\omega R[\omega])/\omega^{n+1} \qquad \text{und} \qquad \big(H^\bullet(\mathbb{C}P^n), \smile\big) \cong R[\omega]/\omega^{n+1} \ .$$

Um (*) zu beweisen, benötigen wir einige geometrische Vorüberlegungen. Dazu schreiben wir Punkte in $\mathbb{C}P^n$ als $[x : y : z]$ mit $x \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{C}^k$ und $z \in \mathbb{C}^\ell$, wobei $(x, y, z) \neq 0$, siehe Beispiel 3.33. Wir betrachten die Teilmengen

$$A = \big\{\, [0 : y : z] \;\big|\; \|y\| \ge \|z\| \,\big\} \qquad \text{und} \qquad B = \big\{\, [0 : y : z] \;\big|\; \|z\| \ge \|y\| \,\big\} \ .$$

Wir nehmen hier an, dass $\mathbb{C}P^n$ eine CW-Struktur trägt, so dass $A$ und $B$ Unterkomplexe sind, und wählen einen Basispunkt in $A \cap B \neq \emptyset$. Die obigen Teilmengen enthalten jeweils als Deformationsretrakt

$$A \supset \left\{ [0:y:0] \;\middle|\; y \neq 0 \right\} \cong \mathbb{C}P^{k-1} \qquad \text{und} \qquad B \supset \left\{ [0:0:z] \;\middle|\; z \neq 0 \right\} \cong \mathbb{C}P^{\ell-1} \ ,$$

Wir können die zugehörigen Homotopieäquivalenzen auf ganz $\mathbb{C}P^n$ ausdehnen und erhalten Homotopieäquivalenzen

$$\mathbb{C}P^n/A \simeq \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1} \quad \text{und} \quad \mathbb{C}P^n/B \simeq \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1} \ .$$

Außerdem gilt $A \cup B \cong \mathbb{C}P^{n-1}$.

Zusammen mit den obigen Homotopieäquivalenzen induziert die relative Diagonalabbildung eine Abbildung

$$\Delta' \colon \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{n-1} \longrightarrow (\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1}) \wedge (\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1}) \ ,$$

so dass das linke Quadrat im folgenden Diagramm bis auf Homotopie kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}P^n \arrow[r, two heads, "p_n"] \arrow[d, "\Delta_{\mathbb{C}P^n}"'] & \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{n-1} \arrow[d, "\Delta'"'] & (D^{2k} \times D^{2\ell})/\partial(D^{2k} \times D^{2\ell}) \arrow[l, "\bar{\Phi}_{2n}"', "\cong"] \arrow[d, "\cong"] \\
\mathbb{C}P^n \wedge \mathbb{C}P^n \arrow[r, two heads, "p_k \wedge p_\ell"] & \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1} \wedge \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1} & (D^{2k}/\partial D^{2k}) \wedge (D^{2\ell}/\partial D^{2\ell}) \arrow[l, hook', "\bar{\Phi}_{2k} \wedge \bar{\Phi}_{2\ell}"']
\end{tikzcd} \ .$$

Für das rechte Quadrat betrachten wir eine stetige Abbildung $\bar{\Phi}_{2n}$, die für $y \in D^{2k} \setminus \partial D^{2k}$ und $z \in D^{2\ell} \setminus \partial D^{2\ell}$ gegeben wird durch

$$\bar{\Phi}_{2n}(y,z) = \left[ (1-|y|^2)(1-|z|^2) : (1-|z|^2)\, y : (1-|y|^2)\, z \right] \ .$$

Mit der Künneth-Formel 6.20 erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}^{2k}(\mathbb{C}P^n) \otimes_R \tilde{H}^{2\ell}(\mathbb{C}P^n) \arrow[d, "\wedge"'] & \tilde{H}^{2k}(\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1}) \otimes_R \tilde{H}^{2\ell}(\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1}) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\wedge"'] & \tilde{H}^{2k}(S^{2k}) \otimes_R \tilde{H}^{2\ell}(S^{2\ell}) \arrow[d, "\wedge"', "\cong"] \\
\tilde{H}^{2n}(\mathbb{C}P^n \wedge \mathbb{C}P^n) \arrow[d, "\Delta^*_{\mathbb{C}P^n}"'] & \tilde{H}^{2n}(\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1} \wedge \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1}) \arrow[l] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\Delta'^*"'] & \tilde{H}^{2n}(S^{2k} \wedge S^{2\ell}) \arrow[d, "\cong"] \\
\tilde{H}^{2n}(\mathbb{C}P^n) & \tilde{H}^{2n}(\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{n-1}) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] & \tilde{H}^{2n}(S^{2n}) \ .
\end{tikzcd}$$

Wir können die Klassen $\alpha$ und $\beta$ von $\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1}$ beziehungsweise $\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1}$ zurückholen, dabei spielt es wegen Homotopieinvarianz keine Rolle, welchen projektiven Unterraum wir jeweils herausteilen. Wenn wir links oben $\alpha \otimes \beta$ einsetzen, erhalten wir rechts oben $\varepsilon^{2k} \otimes \varepsilon^{2\ell}$, und wegen Beispiel 6.22 daher unten rechts $\varepsilon^{2n}$. Also steht unten links $\gamma = \alpha \smile \beta$.

## 6.e. Spektren und Kohomologiefunktoren

Ähnlich wie in Abschnitt 5.c wollen wir Kohomologietheorien durch Spektren darstellen. Aus technischen Gründen beschränken wir uns dabei zunächst einmal auf $\Omega$-Spektren. Das reicht, um neben gewöhnlicher Homologie noch $K$-Theorie einzuführen. Im Anschluss werden wir die zugehörigen Kohomologiefunktoren und Spektren beschreiben. Im nächsten Kapitel führen wir dann eine Kategorie von CW-Spektren ein, mit der wir auch allgemeinere Kohomologiefunktoren beschreiben können, beispielsweise Bordismus.

Wir erinnern uns an die Adjunktion $S \dashv \Omega$ zwischen Einhängungs- und Schleifenraumfunktor, und an die Definition 5.36 eines $\Omega$-Spektrums $(E_\bullet, s_\bullet)$, bestehend aus CW-Komplexen $E_i$ mit

Basispunkt und Inklusionen $s_i\colon SE_i \to E_{i+1}$ von Unterkomplexen, so dass die adjungierte Abbildung $E_i \to \Omega E_{i+1}$ für alle $i \geq n_0$ eine schwache Homotopieäquivalenz ist. Nach dem Satz 4.55 von Milnor ist $\Omega E_{i+1}$ homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex, daher ist $E_i \to \Omega E_{i+1}$ sogar eine Homotopieäquivalenz. Die folgende Konstruktion ist dual zu Satz 5.38.

6.28. Satz und Definition. *Zu jedem $\Omega$-Spektrum $\mathbb{E} = (E_i, s_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ existiert ein reduzierter $\mathcal{A}b$-wertiger Kohomologiefunktor $(\tilde{E}^\bullet, \delta_\bullet)$ mit*

$$\tilde{E}^k(X) = \operatorname{colim}[S^\ell X, E_{k+\ell}]\ .$$

*Wir nennen $\tilde{E}^\bullet$ den durch $\mathbb{E}$* dargestellten Kohomologiefunktor.

Beweis. Nach der Definition eines $\Omega$-Spektrums wird die Folge $[S^\ell X, E_{k+\ell}] \cong [X, \Omega^\ell E_{k+\ell}]$ stationär, sobald $k+\ell \geq n_0$. Für die folgenden Konstruktionen wählen wir daher $\ell$ in Abhängigkeit von $k$ und $n_0$ hinreichend groß. Da $[S^\ell X, E_{k+\ell}]$ nach Bemerkung 3.75 (2) eine abelsche Gruppe ist für alle $\ell \geq 2$, ist $\tilde{E}^k(X)$ eine abelsche Gruppe.

Für $f\colon Y \to X$ definieren wir $\tilde{E}^k f = f^*\colon \tilde{E}^k(X) \to \tilde{E}^k(Y)$ durch $f^*([a]) = [a \circ S^\ell f]$ für alle $a\colon S^\ell X \to E_{k+\ell}$, somit sind die $\tilde{E}^k$ kontravariante Funktoren.

Es sei $(X, Y)$ eine abgeschlossene Kofaserung, dann ist auch $(S^\ell X, S^\ell Y)$ eine abgeschlossene Kofaserung. Wir betrachten die Puppe-Sequenz 4.67 (3) und erhalten die lange exakte Kohomologie-Sequenz 6.1 (2) mit Hilfe des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & {[S^\ell X, E_{k+\ell}]} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & {[S^\ell Y, E_{k+\ell}]} \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, "\delta"] & & & \\
\cdots \arrow[r] & {[S^{\ell+1} X, E_{k+\ell+1}]} \arrow[r] & {[S^{\ell+1} Y, E_{k+\ell+1}]} \arrow[r] & {[S^\ell(X/Y), E_{k+\ell+1}]} \arrow[r] & {[S^\ell X, E_{k+\ell+1}]} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Mit der universellen Eigenschaft des Bouquets und dem Homöomorphismus (*) aus dem Beweis von Lemma 5.35 erhalten wir das Summenaxiom 6.1 (3), da

$$\tilde{E}^k\left(\bigvee_{i\in I} X_i\right) = \left[S^\ell \bigvee_{i\in I} X_i, E_{k+\ell}\right] \cong \left[\bigvee_{i\in I} S^\ell X_i, E_{k+\ell}\right] \cong \prod_{i\in I} [S^\ell X_i, E_{k+\ell}] = \prod_{i\in I} \tilde{E}^k(X_i)\ . \qquad \square$$

6.29. Bemerkung. Umgekehrt gilt der *Brownsche Darstellungssatz:* Sei $\tilde{h}^\bullet$ ein $\mathcal{A}b$-wertiger verallgemeinerter Kohomologiefunktor, dann gibt es ein $\Omega$-Spektrum $E_\bullet$ und einen natürlichen Isomorphismus $\tilde{E}^\bullet \to \tilde{h}^\bullet$ auf der Kategorie der CW-Komplexe. Mit anderen Worten: schränkt man sich auf die Kategorie der zu CW-Komplexen homotopieäquivalenten Räume ein, dann ist jeder Kohomologiefunktor wie in Definition 6.28 durch ein Spektrum darstellbar.

Wir betrachten das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum $\mathbb{H}A$ aus Satz 5.43 zu einer abelschen Gruppe $A$. Nach Definition 5.41 (2) induziert die Abbildung $s_k\colon SHA_k \to HA_{k+1}$ eine schwache Äquivalenz $HA_k \to \Omega HA_{k+1}$ für $k \geq n_0$. Daher ist jedes Eilenberg-Mac Lane-Spektrum ein $\Omega$-Spektrum. Außerdem ist die Zuordnung $A \mapsto HA_\bullet$ bis auf Homotopie funktoriell, und wir erhalten ein Analogon zu Satz 5.44.

6.30. Satz. *Es sei $R$ ein Ring und $\mathcal{M}od_R$ die Kategorie der (Rechts-) $R$-Moduln.*

(1) *Für jeden $R$-Modul $M$ existiert ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor $\tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,; M)\colon \mathcal{T}_+ \to \mathcal{M}od_R$ mit*

$$\tilde{H}^k(X; M) = \varinjlim [S^\ell X, HM_{k+\ell}]\ ,$$

*der das Dimensionsaxiom 6.1 (4) mit $\tilde{H}^0(S^0; M) \cong M$ erfüllt.*

(2) *Zu jedem Modulhomomorphismus* $f\colon M \to N$ *existiert eine natürliche Transformation* $\tau_f^\bullet\colon \tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,;M) \to \tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,;N)$*, die mit den Korandoperatoren aus Definition 6.1* (2) *verträglich ist, so dass* $\tau_f^0(S^0) = f\colon \tilde{H}^0(S^0;M) = M \to N = \tilde{H}^0(S^0;N)$.

(3) *Sei* $g\colon L \to M$ *ein weiterer Modulhomomorphismus, dann gilt* $\tau_f^\bullet \circ \tau_g^\bullet = \tau_{f\circ g}^\bullet$.

(4) *Jeder andere gewöhnliche reduzierte Homologiefunktor mit den obigen Eigenschaften ist auf der vollen Unterkategorie der punktierten CW-Komplexe zu* $\tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,;M)$ *natürlich isomorph.*

Wir können diesen Satz wieder so interpretieren, dass es einen Funktor $\tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,;\,\cdot\,)$ von der Kategorie $\mathcal{M}od_R$ in die Kategorie der gewöhnlichen Kohomologiefunktoren mit Werten in $\mathcal{M}od_R$ gibt.

Beweis. Der Beweis von (1)–(3) verläuft völlig analog zu dem von Satz 5.44: man betrachtet zunächst den Fall $R = \mathbb{Z}$ inklusive Funktorialität. Anschließend betrachtet man für beliebige $R$ einen $R$-Modul $M$ als abelsche Gruppe mit einer Abbildung $R \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$, um auch Kohomologie als $\mathcal{M}od_R$-wertigen Funktor interpretieren zu können.

Dabei benutzen wir Satz 6.28, um zu zeigen, dass $\tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,;A)$ ein reduzierter Kohomologiefunktor ist. Das Dimensionsaxiom folgt aus Definition 5.41, denn sei $A$ eine abelsche Gruppe, dann gilt

$$\tilde{H}^k(S^0;A) \cong [S^\ell, HA_{\ell+k}] = \pi_\ell(HA_{\ell+k}) \cong \begin{cases} A & \text{falls } k = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle hinreichend großen $\ell$. Sei $f\colon A \to B$ ein Morphismus abelscher Gruppen, dann existiert nach Satz 5.43 eine zugehörige Familie von Abbildungen $Hf_n\colon HA_n \to HB_n$, und für ein hinreichend großes $\ell$ definieren wir

$$\tau_f^k = Hf_{k+\ell} \circ \cdot\colon H^k(\,\cdot\,;A) \cong [S^\ell\,\cdot\,, HA_{k+\ell}] \longrightarrow [S^\ell\,\cdot\,, HB_{k+\ell}] \cong H^k(\,\cdot\,;B)\ .$$

Aussage (4) folgt aus dem Satz 6.15 über die zelluläre Kohomologie. □

6.31. Bemerkung. Ich möchte hier eine harmlose Bemerkung zum universellen Koeffiziententheorem 6.16 und zur obigen Konstruktion einschieben. Es sei $X$ ein hinreichend schöner Raum, beispielsweise ein CW-Komplex, und $A$ eine abelsche Gruppe. Da es keine Homologie in negativen Geraden gibt, erhalten wir Isomorphismen

$$\hom_{\mathbb{Z}}(\tilde{H}_0(X), A) \xleftarrow{\cong} \tilde{H}^0(X;A) \xrightarrow{\cong} [X, HA_0]\ .$$

Hierbei sei $HA_0$ die Menge $A$ als diskreter topologischer Raum, mit Basispunkt $0 \in A$. Stetige Abbildungen nach $A$ sind demnach lokal-konstante Abbildungen, und zwei Abbildungen sind genau dann homotop, wenn sie identisch sind. Die Addition in $A$ macht aus $[X, HA_0]$ eine abelsche Gruppe. Das heißt, wir ordnen jeder Zusammenhangskomponente von $X$ ein Element aus $A$ zu, und das entspricht der naiven Vorstellung von Kohomologie in Grad 0.

Wir erhalten somit eine etwas naive Adjunktion von Funktoren

$$\tilde{H}_0\colon \mathcal{T}_+ \leftrightarrows \mathcal{A}b : H\,\cdot_0\ .$$

Wäre $\tilde{H}_0$ ein Funktor zwischen abelschen Kategorien, dann wäre $\tilde{H}_0$ rechtsexakt nach Bemerkung 5.53. In der Tat, wenn wir $Y \hookrightarrow X \to X/Y$ als kurze exakte Sequenz in $\mathcal{T}_+$ auffassen, falls $Y \hookrightarrow X$ eine Kofaserung ist, dann macht $\tilde{H}_0$ daraus die lange exakte Homologiesequenz, die rechts nach $\tilde{H}_0(X/Y)$ abbricht.

Das ist zwar keine tiefsinnige Erkenntnis, denn wir haben ja im obigen Argument bereits benutzt, dass $\tilde{H}_{-1}(X) = 0$ für alle $X$. Aber wir könnten wir die höheren Homologiegruppen $\tilde{H}_k$ jetzt gewissermaßen als „linksderivierte“ Funktoren auffassen. Später sehen wir, in welchem Sinne die höheren Eilenberg-Mac Lane-Räume „rechtsderivierte“ Funktoren sind.

6.32. Bemerkung. Wir haben bisher noch nichts über die Verträglichkeit mit Modellstrukturen gesagt. Wenn wir das Symbol $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ in den obigen Konstruktionen als naive Homotopieklassen interpretieren, erhalten wir Kohomologiefunktoren für die Strøm-Modellstruktur. Daher erhalten wir die Aussage (4) aus Satz 6.30 zunächst auch nur auf der Kategorie $\mathcal{CW}_+$.

Wenn wir in einer anderen Modellstruktur arbeiten, müssen wir $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ gemäß Definition 4.62 interpretieren. Wegen Bemerkung 4.61 reicht es dafür, in $[X, Y]$ den Raum $X$ durch einen kofibranten und den Raum $Y$ durch einen fibranten Raum zu ersetzen. Wir führen das exemplarisch für die Quillen-Modellstruktur vor und bezeichnen den oben konstruierten „naiven“ Kohomologiefunktor mit $\tilde{E}^\bullet$, und den entsprechenden Kohomologiefunktor für die Quillen-Modellstruktur mit $\tilde{\mathcal{E}}^\bullet$. Dass diese Funktoren nicht gleich sind, zeigt Übung 6.90.

In der Quillen-Modellstruktur sind alle Räume fibrant. Da Spektren hier immer im zweiten Argument von $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ auftauchen, dürfen wir mit einer beliebigen Definition von Spektren arbeiten, insbesondere auch mit den CW-Spektren $\mathbb{E}$ aus in Definition 5.36. Da CW-Komplexe in der Quillen-Modellstruktur kofibrant sind, gilt $\tilde{\mathcal{E}}^\bullet|_{\mathcal{CW}_+} = \tilde{E}^\bullet|_{\mathcal{CW}_+}$. Um $\tilde{\mathcal{E}}^\bullet(X)$ für einen beliebigen Raum $X$ zu bestimmen, ersetzen wir $X$ durch eine CW-Approximation $f\colon X' \to X$ wie in Satz 4.51 und definieren

$$\tilde{\mathcal{E}}^k(X) = \tilde{E}^k(X')\ .$$

Sei $g\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung, dann erhalten wir eine CW-Approximation $h\colon Y' \to Y$ und eine bis auf Homotopie eindeutige Abbildung $g'\colon X' \to Y'$, so dass $g \circ f$ zu $h \circ g'$ homotop ist. Wir konstruieren daher Abbildungen $\tilde{\mathcal{E}}^\bullet g$ und eine natürliche Transformation $\tilde{E}^\bullet \to \tilde{\mathcal{E}}^\bullet$ wie folgt:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{E}^k(X) \arrow[r, "\tilde{E}^k f"] & \tilde{E}^k(X') = \tilde{\mathcal{E}}^k(X) \\
\tilde{E}^k(Y) \arrow[u, "\tilde{E}^k g"] \arrow[r, "\tilde{E}^k h"] & \tilde{E}^k(Y') = \tilde{\mathcal{E}}^k(Y)\ . \arrow[u, "\tilde{E}^k g' = \tilde{\mathcal{E}}^k g"']
\end{tikzcd}$$

Wenn $g\colon X \to Y$ eine schwache Äquivalenz war, dann ist $g'$ jetzt eine Homotopieäquivalenz, und somit ist $\tilde{\mathcal{E}}^k g = \tilde{E}^k g'$ ein Isomorphismus.

Mit dieser Methode können wir in Satz 6.30 nicht nur Invarianz unter schwachen Homotopieäquivalenzen erzwingen, sondern wegen Satz 6.15 auch die Eindeutigkeit des so konstruierten Kohomologiefunktors für die Quillen-Modellstruktur auf ganz $\mathcal{T}_+$. In der Literatur wird häufig zunächst singuläre Kohomologie eingeführt. Dabei wird jeder Raum implizit durch einen CW-Komplex (sogar durch eine simpliziale Menge) ersetzt, so dass singuläre Kohomologie automatisch invariant unter schwachen Homotopieäquivalenzen ist. Insbesondere ist unser für die Quillen-Struktur modifizierter gewöhnlicher Kohomologiefunktor also zur singulären Kohomologie natürlich isomorph.

Übrigens ist das entsprechende Problem bei der Konstruktion von Homologiefunktoren in Satz 5.38 nicht aufgetreten: hier stehen sowohl $X$ als auch $E_k$ im rechten Argument von $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$. Und da sowohl in der Quillen- als auch in der Strøm-Modellstruktur alle Objekte fibrant sind, müssen wir nichts ersetzen, um von naiven Homotopieklassen von Abbildungen zu Homotopieklassen bezüglich der Quillen-Modellstruktur überzugehen.

## 6.f. Vektor- und Prinzipalbündel

In diesem Abschnitt definieren wir Vektorbündel, das sind spezielle Faserbündel, deren Fasern eine lineare Struktur tragen. Ein Beispiel ist das Tangentialbündel einer differerenzierbaren Mannigfaltigkeit. In Abschnitt 3.i hatten wir bereits das Normalenbündel kennengelernt. Aus diesem Grund spielen Vektorbündel in der Differentialgeometrie und -topologie eine Rolle. Wir wählen

einen etwas vereinfachten Zugang, bei dem wir uns auf Vektorbündel über CW-Komplexen konzentrieren. Die Argumente für die größere Klasse der parakompakten Räume finden sich unter anderem in [**At**], [**tD2**] und [**H2**].

6.33. Definition. Eine *topologische Gruppe* ist ein topologischer Raum $G$ mit Basispunkt $e \in G$ und zwei stetigen Abbildungen $*\colon G \times G \to G$ und $\cdot^{-1}\colon G \to G$, so dass $(G, *, e, \cdot^{-1})$ die Gruppenaxiome erfüllt.

Eine *stetige* (Links-) *Wirkung* von $G$ auf einem topologischen Raum $X$ ist eine stetige Abbildung $G \times X \to X$ mit $(g, x) \mapsto g \cdot x$, so dass

$$g \cdot (h \cdot x) = (g * h) \cdot x \qquad \text{und} \qquad e \cdot x = x \qquad \text{für alle } x \in X \text{ und } g,\, h \in G.$$

Entsprechend definieren wir (stetige) Rechtswirkungen $(x, g) \mapsto x \,.\, g$.

Beispiele sind zum einen beliebige Gruppen $G$, versehen mit der diskreten Topologie. Zum anderen sei $\Bbbk$ ein topologischer (Schief-) Körper, das heißt, ein (Schief-) Körper mit einer Topologie, bezüglich der alle Rechenoperationen stetig sind, beispielsweise $\Bbbk = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$. Dann sind alle Matrixgruppen $G \subset GL(n, \Bbbk)$ mit der Unterraumtopologie zu $GL(n, \Bbbk) \subset \Bbbk^{n \times n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ topologische Gruppen. Wir interessieren uns vor allem für die Gruppen

$$U(n, \Bbbk) = \left\{ A \in GL_n(\Bbbk) \;\middle|\; A^* A = E_n \right\} = \begin{cases} O(n) & \text{für } \Bbbk = \mathbb{R}, \\ U(n) & \text{für } \Bbbk = \mathbb{C}, \text{ und} \\ Sp(n) & \text{für } \Bbbk = \mathbb{H}. \end{cases} \tag{6.5}$$

Die Matrizen mit Determinante 1 bilden Untergruppen $SO(n) \subset O(n)$ sowie $SU(n) \subset U(n)$. Über $\mathbb{H}$ ist keine Determinante definiert.

Wir wollen jetzt $\Bbbk$-Vektorbündel mit einer $G$-Struktur einführen. Dazu benutzen wir den Begriff des Prinzipalbündels und des assoziierten Bündels. Wir erinnern uns dazu an den Begriff des Faserbündels aus Definition 3.30, und an lokale Trivialisierungen.

6.34. Definition. Es sei $G$ eine topologische Gruppe. Ein *$G$-Hauptfaser-* oder auch *Prinzipalbündel* über einem topologischen Raum $B$ ist ein Faserbündel $p\colon P \to B$ mit typischer Faser $G$ und einer Rechtswirkung $P \times G \to P$, falls jeder Punkt $b \in B$ eine Umgebung $U \subset B$ mit einer lokalen Trivialisierung $\varphi\colon p^{-1}(U) \to U \times G$ besitzt, für die das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \times G \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\varphi \times \mathrm{id}_G"'] & p^{-1}(U) \arrow[d, "\varphi"] \\ U \times G \times G \arrow[r, "\mathrm{id}_U \times *"] & U \times G\,. \end{tikzcd}$$

Sei $f\colon A \to B$ stetig. Eine *$G$-Prinzipalbündelabbildung über $f$* ist eine Abbildung $F\colon Q \to P$ zwischen $G$-Prinzipalbündel $p\colon P \to B$ und $q\colon Q \to A$, so dass die Diagramme

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "F"] \arrow[d, "q"'] & P \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} Q \times G \arrow[r, "F \times \mathrm{id}_G"] \arrow[d] & P \times G \arrow[d] \\ Q \arrow[r, "F"] & P\,. \end{tikzcd}$$

kommutieren. Ein Isomorphismus von *$G$-Prinzipalbündeln* über $B$ ist eine $G$-Prinzipalbündelabbildung über $\mathrm{id}_B$. Die Menge der Isomorphieklassen von $G$-Prinzipalbündeln über $B$ wird mit $\mathrm{Bun}_G(B)$ bezeichnet.

Insbesondere ist die $G$-Wirkung frei, ihre Bahnen sind gerade die Fasern von $p$, und lokal ist jedes $G$-Prinzipalbündel isomorph zum trivialen Bündel $U \times G$, auf dem $G$ durch Rechtsmultiplikation

auf dem zweiten Faktor wirkt. Eine $G$-Prinzipalbündelabbildung bildet Fasern auf Fasern ab und ist mit den $G$-Wirkungen verträglich.

6.35. Bemerkung. Sei $p\colon P \to B$ ein $G$-Prinzipalbündel und $f\colon A \to B$ stetig, dann erhält man das *zurückgezogene* $G$-Prinzipalbündel $f^*p\colon f^*P \to A$ und eine Abbildung $F\colon f^*P \to P$, so dass die Diagramme

$$\begin{tikzcd} f^*P \arrow[r, "F"] \arrow[d, "f^*p"'] & P \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} f^*P \times G \arrow[r] \arrow[d, "F\times \mathrm{id}_G"'] & f^*P \arrow[d, "F"] \\ P \times G \arrow[r] & P \end{tikzcd}$$

kommutieren. Sei $\varphi\colon p^{-1}(U) \to U \times G$ eine lokale Trivialisierung von $P$, dann existiert eine lokale Trivialisierung von $f^*P$ über $f^{-1}(U)$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} (f^*p)^{-1}\big(f^{-1}(U)\big) \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & f^{-1}(U) \times G \arrow[d, "f\times \mathrm{id}_G"] \\ p^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] & U \times G \end{tikzcd}$$

kommutiert, insbesondere existiert zu jedem $y \in A$ eine lokale Trivialisierung über einer Umgebung von $y$.

(1) Einer $G$-Prinzipalbündelabbildung $F\colon Q \to P$ über $f\colon A \to B$ entspricht dann genau ein Isomorphismus der $G$-Prinzipalbündel $f^*P$ und $Q$.
(2) Falls $f\colon A \to B$ eine Inklusion ist, schreiben wir kurz $P|_A$ für $f^*P = p^{-1}(A)$.
(3) Über dem einpunktigen Raum ist jedes $G$-Prinzipalbündel trivial. Also entspricht eine Trivialisierung $P \cong B \times G$ genau einer $G$-Prinzipalbündelabbildung $F\colon P \to G$ über $B \to \mathrm{pt}$.

Für die nächste Konstruktion erinnern wir uns an Quotienten nach Gruppenwirkungen aus Definition 2.60.

6.36. Proposition und Definition. *Es sei $G$ eine topologische Gruppe, $p\colon P \to B$ ein $G$-Prinzipalbündel, und $F$ ein topologischer Raum mit einer Linkswirkung von $G$. Dann erhält man ein Faserbündel $q\colon P \times_G F \to B$, mit $P \times_G F = (P \times F)/G$, das* zu $P$ assoziierte Faserbündel *mit Faser $F$, wobei $g \in G$ durch $(x, f) \mapsto (xg^{-1}, gf)$ wirke, mit $q([x, f]) = p(x)$.*

Beweis. Es sei $\varphi\colon p^{-1}(U) \to U \times G$ eine lokale Trivialisierung wie in Definition 6.34. In dieser Trivialisierung wirkt $h \in G$ durch $(u, g, f) \mapsto (u, gh^{-1}, hf)$. Indem wir $h = g$ wählen, können wir $(u, g, f)$ durch $(u, e, gf)$ darstellen. Also existiert eine lokale Trivialisierung $\psi$ von $q^{-1}(U) \subset P \times_G F$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} P \times F \arrow[d] & p^{-1}(U) \times F \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\varphi\times \mathrm{id}_F"] \arrow[d] & U \times G \times F \arrow[d, "\mathrm{id}_U \times \cdot"] \\ P \times_G F & q^{-1}(U) = p^{-1}(U) \times_G F \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\psi"] & U \times F\,. \end{tikzcd}$$

□

Falls die typische Faser $F$ eine bestimmte Struktur trägt und $G$ diese Struktur erhält, können wir auf allen Fasern eines assoziierten Bündels $P \times_G F$ eine entsprechende Struktur einführen. Die obigen lokalen Trivialisierungen erhalten diese Struktur dann ebenfalls, die Zusatzstruktur ist also lokal trivial. Wir benutzen das in der folgenden Definition, um lokal triviale Strukturen auf Faserbündeln auf abstrakte Weise einzuführen. Anschließend machen wir diese Konstruktion anhand von Vektorbündeln konkret.

6.37. Definition. Es sei $q\colon E \to B$ ein Faserbündel mit typischer Faser $F$ und $G$ eine topologischer Gruppe mit einer Linkswirkung auf $F$. Eine *$G$-Struktur* auf $E$ besteht aus einem $G$-Prinzipalbündel $p\colon P \to B$ und einem Isomorphismus $\Phi\colon P \times_G F \to E$ von Faserbündeln, das heißt, einem Homöomorphismus, für den $q \circ \Phi$ gerade die Projektionsabbildung $P \times_G F \to B$ ist. Wir nennen $G$ die *Strukturgruppe.*

Es seien $q\colon E \to B$ und $r\colon D \to A$ Faserbündel mit $G$-Strukturen $\Phi\colon P \times_G F \to E$ und $\Psi\colon Q \times_G F \to D$, und $f\colon A \to B$ sei stetig. Eine Bündelabbildung $L\colon E \to D$ ist eine *Abbildung von Bündeln mit $G$-Struktur* über $f$, wenn es eine $G$-Prinzipalbündelabbildung $K\colon P \to Q$ gibt, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
P \times F \arrow[r, two heads] \arrow[d, "K \times \mathrm{id}_G"'] & P \times_G F \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & E \arrow[r, "q"] \arrow[d, "L"'] & B \arrow[d, "f"] \\
Q \times F \arrow[r, two heads] & Q \times_G F \arrow[r, "\Psi"] & D \arrow[r, "r"] & A
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Ein *Isomorphismus von Bündeln mit $G$-Struktur* über $B$ ist eine Abbildung von Bündeln mit $G$-Struktur über $\mathrm{id}_B$. Wir betrachten zwei $G$-Strukturen auf einem Bündel $F$ als *gleich,* wenn $\mathrm{id}_F$ ein Isomorphismus von Bündeln mit $G$-Struktur zwischen ihnen ist.

Falls $F = \Bbbk^r$ ist und $G$ durch linear Isomorphismen wirkt, nennen wir ein Faserbündel mit typischer Faser $F$ und $G$-Struktur ein *$\Bbbk$-Vektorbündel vom Rang $r$ mit $G$-Struktur,* oder kurz ein $G$-Vektorbündel. *Vektorbündelabbildungen* und *-isomorphismen* definieren wir entsprechend.

Eigentlich müssten wir der Wirkung von $G$ auf $F$ auch einen Namen geben, etwa $\rho\colon G \times F \to F$, und von einer $(G, \rho)$-Struktur sprechen. Da aber $\rho$ in den meisten Fällen klar sein wird, haben wir es weggelassen. Analog zu Bemerkung 6.35 können wir Bündel mit $G$-Struktur zurückziehen, und Abbildungen von Bündeln mit $G$-Struktur als Isomorphismen von Bündeln mit $G$-Struktur mit dem zurückgezogenen Bündel betrachten.

6.38. Bemerkung. Wir wollen den obigen Begriff etwas motivieren, dabei konzentrieren wir uns vor allem auf Vektorbündel.

(1) Wenn $F$ eine $G$-invariante Struktur $\mathcal{S}$ trägt, dann trägt das assoziierte Bündel $E = P \times_G F$ eine entsprechende faserweise Struktur. Lokale Trivialisierungen $\varphi$ von $P$ über $U \subset B$ induzieren lokale Trivialisierungen $\psi$ von $E$ wie im Beweis von Proposition 6.36, die $E_b = q^{-1}(b)$ für alle $b \in U$ strukturerhaltend auf $F$ abbilden.

Sei etwa $V \to B$ ein Vektorbündel, etwa $V = P \times_G \Bbbk^r$, sei $b \in B$, seien $v = [x, \xi]$ und $w = [x, \eta] \in V_b$ mit $x \in P_b$ und $\xi$, $\eta \in \Bbbk^r$, und seien $\lambda$, $\mu \in \Bbbk$. Dann setzen wir

$$v\lambda + w\mu = [x, \xi\lambda + \eta\mu] \ .$$

Sei $y \in P_b$ ein weiterer Punkt in der selben Faser von $P$, dann existiert ein $g \in G$ mit $y = xg^{-1}$, und es gilt $v = [y, g\xi]$, $w = [y, g\eta]$. Da $g \in G$ linear wirkt, folgt

$$[y, (g\xi)\lambda + (g\eta)\mu] = [y, g(\xi\lambda + \eta\mu)] = [x, \xi\lambda + \eta\mu] = v\lambda + w\nu \ ,$$

mithin sind Addition und Multiplikation mit Skalaren auf $V_b$ wohldefiniert.

Bei geeigneter Wahl von $G$ können wir auf Vektorbündeln auch zusätzliche Strukturen wie Orientierungen und Skalarprodukte einführen, siehe Bemerkung 6.40 unten.

(2) Wenn die Gruppe $G$ isomorph zur Automorphismengruppe von $F$ mit einer vorgegebenen Struktur ist, aufgefasst als Unterraum des Abbildungsraums $kC(F, F)$ aus Abschnitt 4.c, dann können wir das obige $G$-Prinzipalbündel identifizieren mit dem Unterraum von $kC(F, E)$, der alle strukturerhaltenden Abbildungen von $F$ in eine Faser $E$ enthält.

Sei etwa $V \to B$ ein $\Bbbk$-Vektorbündel vom Rang $r$, und sei $G = GL(r, \Bbbk)$ die Automorphismengruppe von $\Bbbk^r$. Ein Vektorraumisomorphismus $x\colon \Bbbk^r \to V_b$ entspricht gerade der Festelegung einer Basis $v_1 = x(e_1), \ldots, v_r = x(e_r)$ von $V_b$. Wir erhalten somit ein $GL(r, \Bbbk)$-Prinzipalbündel $P = P_{GL}(V)$, das sogenannte *Rahmenbündel* von $V$, durch

$$P_{GL}(V) = \left\{ (v_1, \ldots, v_r) \in P^r \;\middle|\; p(v_1) = \cdots = p(v_r),\ (v_1, \ldots, v_r) \text{ Basis von } V_{p(v_1)} \right\}$$

und einen Vektorbündelisomorphismus $P_{GL}(V) \times_{GL(r,\Bbbk)} \Bbbk^r \to V$ mit

$$[(v_1, \ldots, v_r), (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)] \longmapsto v_1\lambda_1 + \cdots + v_r\lambda_r \in V\ .$$

6.39. Beispiel. Wir geben zunächst einfache Beispiele von Vektorbündeln an. In Abschnitt 3.i hatten wir bereits das Normalenbündel einer Mannigfaltigkeit kennengelernt.

(1) Das *triviale Vektorbündel* $\underline{\Bbbk}^r = B \times \Bbbk^r \to B$ ist assoziiert zum trivialen Prinzipalbündel $B \times G$ mit $G = GL(r, \Bbbk)$.

(2) Der $\Bbbk$-projektive Raum $\Bbbk P^n$ ist der Raum aller eindimensionalen Unterräume von $\Bbbk^{r+1}$. Das tautologische Bündel $\tau$ über $\Bbbk P^n$ ist ein $\Bbbk$-Vektorbündel vom Rang 1. Es hat als Faser über einem Unterraum $L \subset \Bbbk^{r+1}$ genau diesen Unterraum. Wir können die Quotientenabbildung $p\colon P = \Bbbk^{r+1} \setminus \{0\} \to \Bbbk P^n$ als ein $GL(1, \Bbbk)$-Prinzipalbündel auffassen, wobei $GL(1, \Bbbk) = \Bbbk^\times = \Bbbk \setminus \{0\}$ gilt. Dann ist $\tau$ zu diesem Prinzipalbündel assoziiert.

Das *Möbiusband* ist das tautologische Bündel über $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$. Es ist bis auf Isomorphie das einzige nichttriviale reelle Vektorbündel über $S^1$ vom Rang 1.

(3) Es sei $M$ eine $n$-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, dann ist das Tangentialbündel $TM$ von $M$ ein reelles Vektorbündel vom Rang $n$. Dabei liefern die Ableitungen von Karten $\psi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ lokale Trivialisierungen der Form $d\psi\colon TU \to TV \cong V \times \mathbb{R}^n$. Das zugehörige $GL(n, \mathbb{R})$-Prinzipalbündel konstruieren wir wie in Bemerkung 6.38 (2).

(4) Eine Riemannsche Metrik $g$ ist ein Skalarprodukt $g_x$ auf $T_xM$, das differenzierbar von $x \in M$ abhängt. Indem wir auf die obigen lokalen Trivialisierungen das Gram-Schmidt-Verfahren anwenden, erhalten wir orthonormale lokale Trivialisierungen. Das zugehörige $O(n)$-Prinzipalbündel konstruieren wir in Bemerkung 6.40 (2). Man beachte, dass die lokalen Trivialisierungen $d\varphi$ zu Karten $\varphi$ nur dann selbst orthonormal sein können, wenn $(M, g)$ flach ist, das heißt, wenn der Riemannsche Krümmungstensor verschwindet.

(5) Für $n$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten ist das Tangentialbündel analog ein $\mathbb{C}$-Vektorbündel vom Rang $n$.

6.40. Bemerkung. Wir wollen Bemerkung 6.38 anhand von Vektorbündeln mit einer zusätzlichen Struktur veranschaulichen. Dabei können wir die folgenden Punkte wahlweise als Definition der entsprechenden Zusatzstruktur auffassen, oder, falls wir schon eine Definition kennen, als Beschreibung mittels einer $G$-Struktur. Das $Gl(n, \Bbbk)$-Prinzipalbündel zu einem Vektorbündel $V \to B$ hatten wie in Bemerkung 6.38 (2) bereits als Rahmenbündel von $V$ konstruiert.

(1) Eine *Orientierung* auf einem reellen Vektorbündel $V$ ist eine faserweise Orientierung von $V$. Als typische Faser betrachten wir $\mathbb{R}^r$ mit der Standardorientierung, als Automorphismengruppe erhalten wir $GL(r, \mathbb{R})^+$. Für uns ist ein orientiertes Vektorbündel also ein $GL(r, \mathbb{R})^+$-Vektorbündel. Wir konstruieren ein solches Bündel $P_{GL^+}(V)$ mit $V \cong P_{GL^+}(V) \times_{GL(r,\mathbb{R})^+} \mathbb{R}^r$, indem wir in Bemerkung 6.38 (2) nur orientierte Basen zulassen. Das Möbiusband aus Beispiel 6.39 (2) trägt keine Orientierung, also auch keine $GL_1(\mathbb{R})^+$-Struktur.

(2) Ein *Euklidisches Vektorbündel* ist ein Vektorbündel $V$ mit einem faserweisen Skalarprodukt auf jeder Faser. Die typische Faser ist in diesem Falle $\mathbb{R}^r$ mit dem Standardskalarprodukt und Automorphismengruppe $O(r)$. Wir erhalten das zugehörige Bündel $P_O(V)$, indem wir in der obigen Konstruktion nur Orthonormalbasen zulassen. Analog verfahren wir mit

orientierten Euklidischen Vektorbündeln; diese tragen entsprechend eine $SO(r)$-Struktur. Falls $B$ ein parakompakter Raum ist, also insbesondere Partitionen der Eins zu beliebigen offenen Überdeckungen zulässt, kann man auf jedem reellen Vektorbündel ein faserweises Skalarprodukt wählen. Zu jeder $GL(r,\mathbb{R})$- ($SL(r,\mathbb{R})$-) Struktur erhält man also immer eine $O(r)$- ($SO(r)$-) Struktur falls $B$ parakompakt ist; diese ist sogar bis auf Isomorphie eindeutig.

(3) Die Gruppe $SO(n)$ hat eine zweifache Überlagerung $\mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$, die für $n \geq 2$ zusammenhängend und für $n \geq 3$ die universelle Überlagerung ist. Man kann die $SO(n)$-Wirkung auf $\mathbb{R}^n$ zurückziehen auf die Gruppe $\mathrm{Spin}(n)$. Eine *Spin-Struktur* auf einem reellen Vektorbündel $V$ vom Rang $n$ ist also ein Isomorphismus $P_{\mathrm{Spin}} \times_{\mathrm{Spin}(n)} \mathbb{R}^n \to V$. Das Bündel $P_{\mathrm{Spin}}$ ist dabei stets eine zweifache Überlagerung des Bündels $P_{SO}$ aus (2), insbesondere induziert eine Spin-Struktur (in unser Beschreibung) stets ein faserweises Skalarprodukt auf $V$. Da $\mathrm{Spin}(n)$ nicht effektiv wirkt, kann man $P_{\mathrm{Spin}}$ jedoch nicht wie in Bemerkung 6.38 (2) explizit angeben. Tatsächlich gibt es $O(n)$-Bündel, die keine Spin-Struktur zulassen, und auch solche, die mehrere verschiedene Spin-Strukturen erlauben.

(4) Sei $r = 2k$. Eine $GL(k,\mathbb{C})$-Struktur macht aus einem reellen Vektorbündel $V$ vom Rang $2k$ ein komplexes vom Rang $k$, die typische Faser $\mathbb{C}^k$ ist über $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{R}^{2k}$ isomorph. Der Multiplikation mit $i$ entspricht ein reeller Automorphismus $J$ mit $J^2 = -1$; diesen nennt man auch eine *komplexe Struktur* auf $V$. Eine $U(k)$-Struktur entspricht der zusätzlichen Wahl eines Hermiteschen Skalarprodukts auf jeder Faser.

(5) Es gibt $2n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten $M$, deren Tangentialbündel mit einer Struktur $J$ wie in (4) versehen werden können. In diesem Fall sprechen wir von einer *fast komplexen* Struktur auf $M$. Eine fast komplexe Struktur erlaubt im Allgemeinen nicht, einen passenden komplexen Mannigfaltigkeitsatlas von $M$ zu wählen, fast komplexe Strukturen auf $TM$ sind somit schwächer als die komplexen Strukturen aus Beispiel 6.39 (5).

(6) Das triviale Bündel aus Beispiel 6.39 (1) hat als Strukturgruppe die triviale Gruppe $G = \{e\}$. In diesem Fall lassen wir in der Konstruktion aus Bemerkung 6.38 (2) für jede Faser nur die Standardbasis zu, erhalten also ein $\{e\}$ Prinzipalbündel $P \cong B$.

## 6.g. Klassifikation von Prinzipalbündeln

In diesem Abschnitt wollen wir $G$-Prinzipalbündel, und damit nach Bemerkung 6.58 auch Vektorbündel, für eine große Klasse von topologischen Räumen durch Homotopieklassen von Abbildungen in einen sogenannten klassifizierenden Raum $BG$ beschreiben. In den nächsten Abschnitten benutzen wir diese Methode, um zwei weitere Familien von Homologie- und Kohomologiefunktoren zu konstruieren.

Für die folgenden Konstruktionen benötigen wir Partitionen der Eins. Dazu definieren wir den *Träger* einer Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ als Teilmenge

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{\, x \in X \mid f(x) \neq 0 \,\}}\,.$$

6.41. Definition. Es sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung eines topologischen Raumes $X$. Eine $\mathcal{U}$ *untergeordnete Partition der Eins* ist eine Familie stetiger Funktionen $\rho_j\colon X \to I$ mit $j$ aus einer Indexmenge $J$, so dass die folgenden Axiome gelten.

(1) *Lokale Endlichkeit.* Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung $U \subset X$, so dass $\mathrm{supp}(\rho_j) \cap U = \emptyset$ für fast alle $j \in J$.

(2) *Unterordnung unter* $\mathcal{U}$. Zu jedem $j$ existiert ein $U \in \mathcal{U}$, so dass $\mathrm{supp}(\rho_j) \subset U$.

(3) *Partition der Eins.* Es gilt

$$\sum_{j\in J} \rho_j = 1 \ .$$

Wegen Bedingung (1) ist die Summe in (3) endlich. Wir werden Bedingung (2) benutzen, um lokale Konstruktionen innerhalb der Mengen $U \in \mathcal{U}$ auf ganz $X$ zu übertragen.

6.42. Bemerkung. Ohne Beweis geben wir eine Reihe von Resultaten zu Partitionen der Eins an.

(1) Wenn $X$ normal ist (siehe Definition 1.27) und $\mathcal{U}$ lokal endlich, das heißt jeder Punkt $x \in X$ hat eine Umgebung $V$, so dass $U \cap V = \emptyset$ für fast alle $U \in \mathcal{U}$, dann besitzt $\mathcal{U}$ eine untergeordnete Partition der Eins. Der Beweis benutzt unter anderem das Lemma 1.30 von Urysohn.
(2) Ein Hausdorff-Raum heißt *parakompakt,* wenn jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ eine lokal endliche Verfeinerung $\mathcal{V}$ besitzt. Das heißt, zu jedem $V \in \mathcal{V}$ existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $V \subset U$, und zu jedem $x \in X$ existiert eine Umgebung $W$ mit $V \cap W = \emptyset$ für fast alle $V \in \mathcal{V}$. Unter anderem sind metrische Räume, kompakte Räume und CW-Komplexe stets parakompakt.
(3) Parakompakte Räume sind immer normal. Insbesondere gibt es zu jeder offenen Überdeckung eines parakompakten Raumes stets eine untergeordnete Partition der Eins.

6.43. Lemma (Homotopielemma für Prinzipalbündel). *Es sei $X$ parakompakt und $p\colon P \to X \times I$ ein $G$-Prinzipalbündel. Dann gibt es eine Abbildung von $G$-Prinzipalbündeln $P \to P|_{X\times\{0\}}$ über der Abbildung $\pi\colon X \times I \to X \times I$ mit $\pi(x,t) = (x,0)$.*

Wegen Bemerkung 6.35 (1) ist $P$ also isomorph zum Rückzug eines $G$-Prinzipalbündels auf $X \cong X \times \{0\}$. Der Name des Lemmas erklärt sich aus dem nächsten Resultat.

6.44. Folgerung. *Es sei $X$ parakompakt, und $f$, $g\colon X \to Y$ seien homotope Abbildungen. Sei $P \to Y$ ein Prinzipalbündel, dann sind $f^*P$ und $g^*P \to X$ isomorph.* □

Mit den Überlegungen aus dem letzten Abschnitt ergibt sich das analoge Resultat für Vektorbündel. Der folgende Beweis funktioniert im Wesentlichen genauso für beliebige Faserbündel.

Beweis von Lemma 6.43. Wir wählen eine Überdeckung $\mathcal{V}$ von $X \times I$, so dass $P|_V$ trivial ist für alle $V \in \mathcal{V}$. Für jeden Punkt $x \in X$ reichen wegen Kompaktheit von $I$ endlich viele Menge $V_1$, $\ldots$, $V_n \in \mathcal{V}$ aus, um $\{x\}\times I$ zu überdecken. Wir finden daher eine Unterteilung $0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ und eine offene Menge $U \subset X$, so dass $U \times [t_{i-1}, t_i] \subset V_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Indem wir die gegebenen lokalen Trivialisierungen auf diesen Teilmengen zusammensetzen, erhalten wir im ersten Schritt eine lokale Trivialisierung von $P|_{U\times I}$. Wir können also eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von $X$ so wählen, dass $P|_{U\times I}$ für alle $U \in \mathcal{U}$ trivial ist.

Im nächsten Schritt konstruieren wir eine lokal endliche Folge von Funktionen $\rho_n\colon X \to I$ mit Summe 1, so dass die Teilmengen $U_n = \rho_n^{-1}((0,1]) \subset X$ eine offene Überdeckung von $X$ bilden, und $P|_{U_n\times I}$ für alle $n$ trivial ist. Dazu sei $(\rho_j)_{j\in J}$ eine $\mathcal{U}$ untergeordnete Partition der Eins. Für jede endliche Teilmenge $\emptyset \neq E \subset J$ sei

$$\rho_E(x) = \max\bigl(0, \min_{j\in E}(\rho_j(x)) - \max_{j\notin E}(\rho_j(x))\bigr) \ ,$$

da die Familie $(\rho_j)_{j\in J}$ lokal endlich ist, sind diese Funktionen stetig, und wir betrachten die Teilmengen $U_E \subset X$, auf denen $\rho_E$ positiv ist. Falls $U_E \cap U_F \neq \emptyset$, gilt entweder $E \subset F$ oder $F \subset E$. Wir erhalten daher eine Überdeckung von $X$ aus Mengen der Form

$$U_n = \dot{\bigcup_{E\subset J, \#E=n}} U_E$$

für $n \geq 1$. Da $\rho_j$ lokal endlich war, ist diese Familie ebenfalls lokal endlich. Jede Teilmenge $U_E$ ist im Träger jeder Funktion $\rho_j$ mit $j \in E$ enthalten, insbesondere lässt sich $P$ aus $U_E \times I$, und daher auch auf $U_n \times I$ trivialisieren. Zu guter Letzt sei

$$\rho_n = n \cdot \max_{E \subset J, \# E = n} \rho_E \ ,$$

dann ist die Familie $\rho_n$ wieder lokal endlich mit Summe 1.

Im letzten Schritt konstruieren wir die gesuchte Abbildung $F \colon P \to P|_{X \times \{0\}}$ induktiv über $n$. Für $n \geq 0$ sei

$$Y_n = \left\{ (x,t) \;\middle|\; 0 \leq t \leq \rho_1(x) + \cdots + \rho_n(x) \right\} , \qquad \text{so dass} \qquad X \times I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n \ .$$

Wir schreiben $P_n = P|_{Y_n}$ und $\pi_n = \pi|_{Y_n}$. Dann gilt $\pi_0 = \mathrm{id}_{Y_0}$, und wir setzen $F|_{Y_0} = \mathrm{id}_{Y_0}$. Sei jetzt $n \geq 1$, und sei $F|_{P_n}$ als $G$-Prinzipalbündelabbildung über $\pi_{n-1}$ bereits konstruiert. Das Bild von $Y_n \setminus Y_{n-1}$ unter $\pi$ in $X \times \{0\} \cong X$ ist genau die disjunkte Vereinigung der $U_E$ mit $\# E = n$, wir können also $F|_{P_n}$ über den Teilmengen

$$(Y_n \setminus Y_{n-1}) \cap (U_E \times I)$$

einzeln konstruieren. Dazu benutzen wir zunächst die Trivialisierungen, um eine $G$-Prinzipalbündelabbildung von $P$ über dieser Teilmenge auf die Einschränkung von $P$ auf den Graphen von $\rho_1 + \cdots \rho_{n-1}$ zu konstruieren. Diese verketten wir mit $F|_{P_{n-1}}$ um $F$ auf $P_n$ fortzusetzen. Da die ursprünglich Partition der Eins lokal endlich war, hat jeder Punkt eine Umgebung $W$, so dass die Einschränkung von $P$ auf $W \times I$ in endlich vielen Schritten definiert ist. Insbesondere ist die Abbildung $F$ stetig und leistet das gewünschte. □

Wir erinnern uns an die Verbund-Konstruktion aus Übung 3.114. Für eine topologische Gruppe $G$ definieren wir

$$EG = \operatorname*{colim}_{n \to \infty} G^{*n} \ , \tag{6.6}$$

wobei $G^{*n}$ den $n$-fachen Verbund mit sich selbst bezeichne. Es sei

$$\Delta^n = \left\{ (s_0, \ldots, s_n) \in [0,1]^{n+1} \;\middle|\; s_0 + \cdots + s_n = 1 \right\}$$

der Standardsimplex. Dann gilt

$$G^{*(n+1)} \cong G^{n+1} \times \Delta^n / \sim \ ,$$

wobei die Relation $\sim$ erzeugt wird durch

$$(g_0, \ldots, g_n; s_0, \ldots, s_n) \sim (g_0, \ldots, g_i', \ldots, g_n; s_0, \ldots, s_n) \qquad \text{wenn } s_i = 0,$$

mit $i \in \{0, \ldots, n\}$ beliebig. Wir erhalten natürliche Einbettungen $G^{*n} \hookrightarrow G^{*n} * G \cong G^{*(n+1)}$, bezüglich der wir den obigen Kolimes bilden. Elemente können wir als $((g_i)_i, (s_i)_i)$ schreiben, wobei $s_i = 0$ für fast alle $i$ und $s_0 + \cdots = 1$ gelten muss. Aufgrund der obigen Äquivalenzrelation spielt der Wert von $g_i$ keine Rolle, wenn $s_i = 0$. Tatsächlich ist $EG$ die geometrische Realisierung eines sogenannten *simplizialen Raums.*

Sei $G$ selbst $k$-zusammenhängend mit $k \geq -1$, dann folgt aus Übung 3.115 induktiv, dass $G^{*n}$ ein $(n(k+2)-2)$-fach zusammenhängender Raum ist. Insbesondere ist $EG$ schwach zusammenziehbar. Wenn wir $EG$ als CW-Komplex schreiben können (zum Beispiel, wenn $G$ eine diskrete Gruppe oder eine Matrixgruppe ist), ist $EG$ nach dem Satz 4.46 von Whitehead sogar zusammenziehbar.

Die Gruppe $G$ wirkt stetig von rechts auf $EG$ durch

$$\big((g_i)_i, (s_i)_i\big) \,.\, g = \big((g_i g)_i, (s_i)_i\big) \ .$$

Diese Wirkung ist frei. Für den Quotienten schreiben wir

$$BG = EG/G \ . \tag{6.7}$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Teilmenge

$$E_i = \operatorname*{colim}_{n \geq i} \{ (g_0, \ldots, g_n; s_0, \ldots, s_n) \mid s_i \neq 0 \} \subset EG \qquad \text{und} \qquad B_i = E_i/G \subset BG \,. \tag{6.8}$$

Da $E_i \cap G^{*(n+1)}$ für alle $n$ offen ist, ist $E_i$ in $EG$ offen. Außerdem ist $E_i$ invariant unter der obigen $G$-Wirkung, also sei $B_i = E_i/G \subset BG$ der Quotient. Dann ist $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von $BG$. Für Punkte $q = ((g_i)_i, (s_i)_i) \in E_i$ ist die Koordinate $g_i \in G$ aufgrund der Verbund-Konstruktion wohldefiniert und nach Definition der Kolimes-Topologie stetig. Also ist $EG \to BG$ lokal trivial, und insbesondere ein $G$-Prinzipalbündel.

6.45. Definition. Ein $G$-Prinzipalbündel $E \to B$ heißt *universell,* und $B$ heißt *klassifizierender Raum* für $G$-Prinzipalbündel, wenn es für jedes $G$-Prinzipalbündel $P \to X$ über einem parakompakten Raum $X$ eine bis auf Homotopie eindeutige Abbildung $f\colon X \to B$ und einen Isomorphismus $P \cong f^*E$ von $G$-Prinzipalbündeln gibt. In diesem Fall heißt $f$ die *klassifizierende Abbildung* von $P \to X$.

6.46. Bemerkung. Wir würden gern den Funktor $\mathrm{Bun}_G\colon \mathcal{T}_+ \to \mathcal{S}et$ mit einem Funktor der Form $[\,\cdot\,, B]$ gleichsetzen, wobei $B$ ein klassifizierender Raum sei. Doch leider können wir nur für parakompakte Räume $X$ zeigen, dass das Zurückziehen des universellen Bündels einen natürlichen Isomorphismus $[X, B] \cong \mathrm{Bun}_G(X)$ liefert; hierzu brauchen wir auch das Homotopielemma 6.43. Aus dem gleichen Grund können wir auch nicht einfach sagen, dass $B$ durch eine universelle Eigenschaft bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig charakterisiert ist.

Die Quillen-Modellstruktur bietet einen möglichen Ausweg. Wir können den Funktor $\mathrm{Bun}_G$ umdefinieren, indem wir zunächst jeden Raum $X$ mit Hilfe des CW-Approximationssatzes 4.51 durch einen schwach homotopieäquivalenten CW-Komplex $X'$ ersetzen. Die Approximationsabbildung $X' \to X$ liefert uns eine Abbildung $\mathrm{Bun}_G(X) \to \mathrm{Bun}_G(X')$, und wir betrachten $\mathrm{Bun}_G(X')$ anstelle von $\mathrm{Bun}_G(X)$. Da CW-Komplexe parakompakt sind, gilt jetzt $\mathrm{Bun}_G(X') \cong [X', B] \cong [X, B]$ in der Notation von Definition 4.62.

Alternativ können wir den Funktor $\mathrm{Bun}_G$ über beliebigen Räumen umdefinieren, indem wir nur solche Bündel $P \to X$ zulassen, für die eine trivialisierende Überdeckung mit einer untergeordneten Partition der Eins existiert. Alle Beweise in diesem Abschnitt lassen sich auf diese Klasse von Bündeln ausdehnen, siehe [**tD2**, Chapter 14], und dieser Zugang passt zur Strøm-Modellstruktur.

Wir werden zeigen, dass das oben konstruierte Bündel $EG \to BG$ ein universelles $G$-Prinzipalbündel ist. Zur offenen Überdeckung $BG = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ existiert eine untergeordnete Partition der Eins, also ist $BG$ tatsächlich bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig bestimmt, wenn wir zusätzlich fordern, dass das universelle Bündel eine trivialisierende Überdeckung mit einer untergeordneten Partition der Eins zulässt. Für geeignete Gruppen $G$ ist $BG$ übrigens parakompakt. Das gilt insbesondere für diskrete Gruppen, und für die klassischen Matrixgruppen wie $U(n, \Bbbk)$ und $SU(n, \Bbbk)$ aus (6.5).

6.47. Satz (Klassifikation von $G$-Prinzipalbündeln). *Das Bündel $EG \to BG$ ist ein universelles $G$-Prinzipalbündel.*

Beweis. Es sei $X$ parakompakt, dann existiert nach Lemma 6.43 eine wohldefinierte Abbildung $[X, BG] \to \mathrm{Bun}_G(X)$. Zur Surjektivität betrachten wir ein $G$-Prinzipalbündel $P \to X$ über einem parakompakten Raum $X$ und suchen eine Abbildung $F\colon P \to EG$ von $G$-Prinzipalbündeln über einer stetigen Abbildung $f\colon X \to BG$. Wie im Beweis des Homotopielemmas 6.43 wird $X$ von abzählbar vielen offenen Mengen $U_n \subset X$ überdeckt, auf denen $P$ trivial ist, und es gibt Funktionen $\rho_n\colon X \to I$, die außerhalb $U_n$ verschwinden, und deren (lokal endliche) Summe 1 ist. Es seien $\varphi_n\colon P|_{U_n} \to U_n \times G$ lokale Trivialisierungen, dann erhalten wir die gesuchte Abbildung $F\colon P \to EG$ mit

$$F(y) = \big(((\mathrm{pr}_G \circ \varphi_n)(x))_n, (\rho_n(x))_n\big) \qquad \text{für alle } y \in P \,,$$

wobei $\mathrm{pr}_G$ die Projektion $U_n \times G \to G$ bezeichne. Sie ist mit den $G$-Wirkungen verträglich und induziert daher eine Abbildung $f\colon X \to BG$. Da die Überdeckung $(U_n)_n$ lokal endlich ist, existiert zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U$ und eine Zahl $n_0$, so dass $U \cap U_n = \emptyset$ für alle $n \geq n_0$. Die obige Abbildung ist stetig von $P|_U$ in den $n$-fachen Verbund von $G$, daher ist $F$ insgesamt stetig, und somit auch $f$.

Zur Injektivität der Zuordnung $[X, BG] \to \mathrm{Bun}_G(X)$ sei zunächst $F\colon P \to EG$ eine Abbildung von $G$-Prinzipalbündeln über $f\colon X \to BG$, gegeben in der Form

$$F(y) = \big(g_0(y), g_1(y), \dots; s_0(y), s_1(y), \dots\big)\ .$$

Mit Hilfe einer Teleskophomotopie ist die obige Abbildung homotop zu

$$F_1(y) = \big(g_0(y), e, g_1(y), e, \dots; s_0(y), 0, s_1(y), 0, \dots\big)\ ;$$

dabei spielen die Einträge in $G$ an den ungeraden Stellen keine Rolle, da die entsprechenden $s$-Koordinaten alle verschwinden. Die obige Homotopie hat für $i \geq 1$ und $t \in [2^{-i}, 2^{1-i}]$ die Gestalt

$$\begin{aligned} h(y,t) = \big(&g_0(y), \dots, g_{i-1}(y), g_i(y), g_i(y), g_{i+1}(y), g_{i+1}(y), \dots; \\ &s_0(y), \dots, s_{i-1}(y), (2-2^i t)\, s_i(y), (2^i t - 1)\, s_i(y), \dots\big)\ . \end{aligned}$$

Eine zweite Abbildung $F'\colon P \to EG$ homotopieren wir entsprechend zu

$$F_1'(y) = \big(e, g_0'(y), e, g_1'(y), e, \dots; 0, s_0'(y), 0, s_1'(y), 0, \dots\big)\ .$$

Zwischen diesen zwei Abbildungen gibt es jetzt eine Homotopie

$$h(y,t) = \big(g_0(y), g_0'(y), g_1(y), g_1'(y), \dots; (1-t)s_0(y), ts_0'(y), (1-t)s_1(y), ts_1'(y), \dots\big)\ .$$

All diese Homotopien sind mit den $G$-Wirkungen verträglich, daher erhalten wir entsprechende Homotopien zwischen den zugrundeliegenden Abbildungen $f$, $f'\colon X \to BG$. □

Wir erinnern uns an die Gruppen $U(n, \Bbbk)$ aus (6.5) und nennen $\Bbbk$-Vektorbündel mit passendem Skalarprodukt entsprechend $\Bbbk$-Hermitesch. Somit ist „$\mathbb{R}$-Hermitesch“ gleichbedeutend mit „Euklidisch“.

6.48. Folgerung (Klassifikation von Vektorbündeln). *Für parakompakte Räume $X$ werden $\Bbbk$-Vektorbündel vom Rang $n$ klassifiziert durch $[X, BU(n, \Bbbk)]$, für $\Bbbk = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$. Orientierte reelle Vektorbündel werden klassifiziert durch $[X, BSO(n)]$.*

Beweis. Wir benutzen eine Partition der Eins, um $\Bbbk$-Hermitesche Metriken in lokalen Trivialisierungen zu globalen Metriken zusammenzukleben. Die Isomorphieklasse des so entstandenen $\Bbbk$-Hermiteschen Vektorbündels hängt nicht von der Wahl der Metrik ab. Nach Bemerkung 6.40 entspricht dieser Isomorphieklasse genau eine Isomorphieklasse von $U(n, \Bbbk)$-Rahmenbündeln, und diese werden nach Satz 6.47 durch $[X, BU(n, \Bbbk)]$ klassifiziert. Zu orientierten reellen Vektorbündeln konstruieren wir entsprechend $SO(n)$-Rahmenbündel. □

6.49. Bemerkung. Es gibt noch einen weiteren Zugang zu klassifizierenden Räumen, der besonders gut für die Gruppen $U(n, \Bbbk)$ funktioniert. Hierzu sei $G_n(\Bbbk^N)$ die Grassmann-Mannigfaltigkeit der $n$-dimensionalen Unterräume von $\Bbbk^N$. Die Einbettung $\Bbbk^N \cong \Bbbk^N \times \{0\} \hookrightarrow \Bbbk^{N+1}$ induziert eine Einbettung $G_n(\Bbbk^N) \to G_n(\Bbbk^{N+1})$, und wir definieren die unendliche Grassmannsche $G_n(\Bbbk)$ als Kolimes der $G_n(\Bbbk^N)$. Für $\Bbbk = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ ist $G_n(\Bbbk^N)$ ein klassifizierender Raum für die Gruppe $U(n, \Bbbk)$, und somit homotopieäquivalent zum obigen Raum $BU(n, \Bbbk)$.

Für die unendlich-dimensionalen projektiven Räume $\Bbbk P^\infty = G_1(\Bbbk)$ lässt sich sogar ein expliziter Homöomorphismus zu $BU(1, \Bbbk)$ angeben, siehe Übung. Da $\mathbb{R}P^\infty$ ein Modell für den Eilenberg-Mac Lane-Raum $H(\mathbb{Z}/2)_1$ und $\mathbb{C}P^\infty$ ein Modell für $H\mathbb{Z}_2$ ist, entsprechen auf parakompakten Räumen $X$ die Isomorphieklassen reeller (komplexer) Geradenbündel gerade Kohomologieklassen

in $H^1(X;\mathbb{Z}/2)$ ($H^2(X)$). Das ist ein möglicher Zugang zu charakteristischen Klassen. Auf der anderen Seite ist $\mathbb{H}P^\infty$ kein Eilenberg-Mac Lane-Raum, siehe Beispiel 5.42 (6), daher gibt es für quaternionische Geradenbündel keine analoge Interpretation als Kohomologieklassen.

## 6.h. Topologische $K$-Theorie

Wir benutzen Vektorbündel jetzt, um einen allgemeinen Kohomologiefunktor zu konstruieren und das zugehörige Spektrum anzugeben. Wir werden hier nicht alle Sätze beweisen. Bis jetzt hatten all unsere Vektorbündel konstante Dimension auf ganz $X$. Das werden wir in Zukunft nicht mehr fordern.

Konstruktionen wie direkte Summe, Tensorprodukt, oder Bilden des dualen Moduls lassen sich faserweise auch für Vektorbündel durchführen. Dazu betrachten wir zunächst zwei Prinzipalbündel $P$, $Q \to X$ mit Strukturgruppe $G$ beziehungsweise $H$. Ihr Pullback wird mit $P \times_X Q$ bezeichnet und ist ein $G \times H$-Prinzipalbündel. Falls $G$ auf $\Bbbk^k$ und $H$ auf $\Bbbk^\ell$ wirkt, liefern die jeweiligen universellen Eigenschaften $G \times H$-Wirkungen auf $\Bbbk^k \oplus \Bbbk^\ell$ und, falls $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, auf $\Bbbk^k \otimes_\Bbbk \Bbbk^\ell$. Analog erhalten wir eine Wirkung von $G \times H$ auf dem $\mathbb{H}$-Vektorraum $\mathbb{H}^k \otimes \mathbb{R}^\ell$, falls $G$ auf $\mathbb{H}^k$ und $H$ auf $\mathbb{R}^\ell$ wirkt. Außerdem wirkt $G$ auf dem Dualraum von $\Bbbk^k$ durch $(g^*)^{-1}$.

6.50. Definition. Es sei $X$ ein topologischer Raum. Ein $\Bbbk$-*Vektorbündel* $p\colon V \to X$ besteht aus einer lokalkonstanten Funktion $r\colon X \to \mathbb{N}$ und je einem $\Bbbk$-Vektorbündel $p\colon p^{-1}(r^{-1}(n)) \to r^{-1}(n)$ vom Rank $n$ für alle $n$. Wir nennen $r$ den *lokalen Rang* von $V$. Ein $\Bbbk$-*Vektorbündelisomorphismus* $F\colon V \to W$ von $\Bbbk$-Vektorbündeln $p\colon V \to X$, $q\colon W \to X$ besteht aus je einer Vektorbündelabbildung $F_n\colon p^{-1}(r^{-1}(n)) \to q^{-1}(r^{-1}(n))$.

Es seien $V$ und $W \to X$ zwei $\Bbbk$-Vektorbündel vom lokalen Rang $r$ beziehungsweise $s\colon X \to \mathbb{N}$ mit $V|_{r^{-1}(k)} = P_k \otimes_{G_k} \Bbbk^k$ und $W|_{s^{-1}(\ell)} = Q_\ell \otimes_{H_\ell} \Bbbk^\ell$ für alle $k$, $\ell$. Wir definieren die *Whitney-Summe* $V \oplus W$, das *Whitney-Produkt* $V \otimes_\Bbbk W$ (falls $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und das duale Bündel $V^*$ durch

$$\begin{aligned}
(V \oplus W)|_{r^{-1}(k)\cap s^{-1}(\ell)} &= (P_k \times_X Q_\ell) \times_{G_k \times H_\ell} (\Bbbk^k \oplus \Bbbk^\ell)\ , \\
(V \otimes_\Bbbk W)|_{r^{-1}(k)\cap s^{-1}(\ell)} &= (P_k \times_X Q_\ell) \times_{G_k \times H_\ell} (\Bbbk^k \otimes_\Bbbk \Bbbk^\ell) \\
\text{und} \qquad V^*|_{r^{-1}(k)} &= P_k \times_G (\Bbbk^k)^*\ .
\end{aligned}$$

All diese Konstruktionen sind mit Zurückziehen von Vektorbündeln verträglich. Ein Tensorprodukt über $\mathbb{H}$ existiert leider nicht; stattdessen können wir quaternionische Vektorbündel mit reellen tensorieren, und erhalten wieder quaternionische Vektorbündel. Weitere Konstruktionen sind möglich, beispielsweise ist $\hom(V,W) \cong V^* \otimes_\Bbbk W$ ein innerer Hom-Funktor für Vektorbündel.

Direkte Summe und Whitney-Produkt machen aus der Menge der reellen oder komplexen Vektorbündel bis auf Isomorphismus einen kommutativen Semiring. Die sogenannte „Grothendieck-Konstruktion“ macht daraus einen Ring.

6.51. Definition. Ein *virtuelles* $\Bbbk$-*Vektorbündel* auf $X$ ist ein Paar $V \ominus W$ von $\Bbbk$-Vektorbündeln $p\colon V \to X$ und $q\colon W \to X$. Zwei *virtuelle* $\Bbbk$-*Vektorbündel* $V \ominus W$ und $T \ominus U$ über $X$ heißen *äquivalent,* kurz $V \ominus W \sim T \ominus U$, wenn es virtuelle $\Bbbk$-Vektorbündel $R$, $S \to X$ gibt, so dass $V \oplus R \cong T \oplus S$ und $W \oplus R \cong U \oplus S$. Direkte Summe und Tensorprodukt (falls $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) übertragen sich auf virtuelle Vektorbündel und sind mit Äquivalenz verträglich.

Der Ring (falls $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) beziehungsweise die Gruppe (falls $\Bbbk = \mathbb{H}$) der virtuellen $\Bbbk$-Vektorbündel auf $X$ wird mit $K^0_\Bbbk(X)$ bezeichnet. Für punktierte Räume $X$ bezeichne $\iota\colon \mathrm{pt} \to X$ die Inklusion des Basispunktes, dann definieren wir $\tilde{K}^0_\Bbbk(X) = \ker\bigl(\iota^*\colon K^0_\Bbbk(X) \to K^0_\Bbbk(\mathrm{pt})\bigr)$.

Sei schließlich $f\colon Y \to X$ stetig. Das Zurückziehen von Vektorbündeln induziert

$$f^*\colon K^0_\Bbbk(X) \longrightarrow K^0_\Bbbk(Y)\ , \qquad \text{und} \qquad f^*\colon \tilde{K}^0_\Bbbk(X) \longrightarrow \tilde{K}^0_\Bbbk(Y)$$

falls $f$ punktiert ist.

6.52. Beispiel. Nach dem Satz 3.48 vom Igel ist das Tangentialbündel $TS^{2n}$ nicht trivial. Betrachten wir die übliche Einbettung $S^{2n} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$, dann ist das Normalenbündel $\nu S^{2n}$ trivial, denn für jeden Punkt $p \in S^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ bildet der Ortsvektor $p$ zugleich eine Basis des eindimensionalen Normalenraums $\nu_p S^{2n}$, siehe Abschnitt 3.i. Indem wir $T_p S^{2n}$ und $\nu_p S^{2n}$ als Unterräume von $\mathbb{R}^{2n+1}$ auffassen, erhalten wir $\mathbb{R}$-Vektorbündelisomorphismen

$$T_p S^{2n} \oplus \underline{\mathbb{R}} \xrightarrow{\cong} T_p S^{2n} \oplus \nu_p S^{2n} \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbb{R}}^{2n+1} \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbb{R}}^{2n} \oplus \underline{\mathbb{R}} \,.$$

Somit ist das Tangentialbündel äquivalent (aber nicht isomorph!) zu einem trivialen Vektorbündel. Man sagt daher, dass $TS^{2n}$ *stabil trivial* ist. Außerdem sehen wir, dass die Kürzungsregel für die Whitney-Summe nicht gilt.

Der Übergang von $\Bbbk$-Vektorbündeln zu virtuellen $\Bbbk$-Vektorbündeln in Definition 6.50 entspricht dem Übergang von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$. Da die Halbgruppe der $\Bbbk$-Vektorbündel jedoch keine Kürzungseigenschaft besitzt, mussten wir etwas sorgfältiger vorgehen.

6.53. Bemerkung. Wir sammeln ein paar nützliche Eigenschaften (ohne Beweise).

(1) Jedes $\Bbbk$-Vektorbündel $V$ über einem parakompakten Raum $X$ lässt sich mit einem faserweisen Skalarprodukt ausstatten, das in den Trivialisierungen stetig vom Basispunkt abhängt. Daher dürfen wir annehmen, dass $p\colon p^{-1}(r^{-1}(n)) \to r^{-1}(n)$ in diesem Fall ein $U(n,\Bbbk)$-Vektorbündel ist. Auf der anderen Seite kann man auch zeigen, dass $U(n,\Bbbk)$ ein Deformationsretrakt von $GL_n(\Bbbk)$ und somit $BU(n,\Bbbk)$ ein Deformationsretrakt von $BGL_n(\Bbbk)$ ist.
(2) Zu jedem Vektorbündel $W$ über einem kompakten Raum existiert ein sogenanntes *komplementäres Vektorbündel* $U$, so dass $W \oplus U \cong \underline{\Bbbk}^N$ für ein hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$. Insbesondere lässt sich jedes virtuelle $\Bbbk$-Vektorbündel $V \ominus W$ über einem kompakten Raum $X$ durch das äquivalente virtuelle $\Bbbk$-Vektorbündel $(V \oplus U) \ominus \underline{\Bbbk}^N$ ersetzen. Für nicht kompakte Räume ist diese Aussage im Allgemeinen nicht richtig.
(3) Whitney-Summe und Whitney-Produkt erfüllen die üblichen Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze jeweils bis auf natürliche Isomorphismen. Dadurch wird $K^0_\Bbbk(X)$ für alle $X$ zu einem kommutativen Ring mit Einselement $\underline{\Bbbk}$, falls $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Außerdem können wir $K^0_{\mathbb{H}}(X)$ als $K^0_{\mathbb{R}}(X)$-Modul auffassen.
(4) Alle obigen Konstruktionen sind mit Zurückziehen verträglich. Wir erhalten also einen kontravarianten Funktor $K^0_\Bbbk$ von der Kategorie $\mathcal{T}op$ oder $kw\mathcal{H}$ in die Kategorie der kommutativen Ringe ($\Bbbk = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) beziehungsweise der $K^0_{\mathbb{R}}$-Moduln ($\Bbbk = \mathbb{H}$).
(5) Ein $\Bbbk$-Vektorbündel über einem Punkt ist ein $\Bbbk$-Vektorraum und wird klassifiziert durch seine Dimension $n \in \mathbb{N}$. Ein virtuelles $\Bbbk$-Vektorbündel über einem Punkt wird somit durch seine virtuelle Dimension $n = \mathbb{Z}$ klassifiziert.

Zu einer Kohomologietheorie fehlt uns unter anderem die lange exakte Sequenz. Daher wollen wir $\Omega$-Spektren $\mathbb{K}$ für komplexe und $\mathbb{KO}$ für reelle $K$-Theorie konstruieren, so dass $\tilde{K}^0_{\mathbb{C}}(X) = [X, K_0]$ und $\tilde{K}^0_{\mathbb{R}}(X) = [X, KO_0]$ zumindest für kompakte $X$ gilt. Dazu betrachten wir die Folge von Gruppen $\mathrm{pt} = U(0,\Bbbk) \hookrightarrow U(1,\Bbbk) \hookrightarrow \dots$, wobei die Inklusionsabbildung einer Matrix $A \in U(n,\Bbbk)$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U(n+1,\Bbbk) \tag{6.9}$$

zuordnet. Wir definieren topologische Gruppen

$$U(\Bbbk) = \operatorname*{colim}_{n\to\infty} U(n,\Bbbk) = \begin{cases} O & \text{falls } \Bbbk = \mathbb{R}, \\ U & \text{falls } \Bbbk = \mathbb{C}, \text{ und} \\ Sp & \text{falls } \Bbbk = \mathbb{H}. \end{cases}$$

Wir erhalten Folgen von Inklusionen $EU(n,\Bbbk) \hookrightarrow EU(n+1,\Bbbk)$ und $BU(n,\Bbbk) \hookrightarrow BU(n+1,\Bbbk)$ und, da sowohl $E\cdot$ als auch $U(\Bbbk)$ als Kolimiten konstruiert sind und Kolimiten kommutieren, ein universelles $U(\Bbbk)$-Prinzipalbündel

$$EU(\Bbbk) = \operatorname*{colim}_{n\to\infty} EU(n,\Bbbk) \longrightarrow BU(\Bbbk) = \operatorname*{colim}_{n\to\infty} BU(n,\Bbbk) \cong EU/U\ .$$

6.54. Satz. *Sei $X$ ein kompakter punktierter CW-Komplex, dann gilt*

$$\tilde{K}^0_{\Bbbk}(X) = [X, \mathbb{Z}\times BU(\Bbbk)]\ .$$

Für den Satz ist es nicht nötig, dass $X$ ein CW-Komplex ist; es macht den Beweis aber einfacher. Falls $X$ nicht kompakt ist, erhalten wir immer noch eine Abbildung $\tilde{K}^0_{\Bbbk}(X) \to [X, \mathbb{Z}\times BU(\Bbbk)]$, allerdings ist diese nicht immer ein Isomorphismus. Wir wählen Basispunkte in allen $BU(\Bbbk)$ und betrachten als Beispiel den Raum

$$X = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} BU(k,\Bbbk)\ .$$

Dann gibt es kein virtuelles Vektorbündel $V\ominus W$ auf $X$, so dass $(V\ominus W)|_{BU(k,\Bbbk)} \sim (VU(k,\Bbbk)\ominus \underline{\Bbbk}^k)$, insbesondere erfüllt der Funktor $\tilde{K}^0_{\Bbbk}$ nicht das Summenaxiom aus Definition 6.1 (3).

Beweis. Es sei $V\ominus W$ ein virtuelles $\Bbbk$-Vektorbündel über $X$, dann existiert $U\to X$, so dass $U\oplus W \cong \underline{\Bbbk}^n$ auf ganz $X$. Wir dürfen $U\oplus V$ mit einem Skalarprodukt ausstatten. Dann sei $r\colon X\to\mathbb{Z}$ der lokale Rang des Bündels $U\oplus V$, und es sei $f_m\colon r^{-1}(m)\to BU(m,\Bbbk)$ die klassifizierende Abbildung des Bündels $(U\oplus V)|_{r^{-1}(m)}$. Wir definieren $F\colon X\to\mathbb{Z}\times BU(\Bbbk)$ durch

$$F(x) = (m-n, f_m(x)) \in \{m-n\}\times BU(m,\Bbbk) \subset \mathbb{Z}\times BU(\Bbbk) \qquad \text{für alle } m \text{ und alle } x\in r^{-1}(m).$$

Da isomorphe Vektorbündel nach Satz 6.47 homotope klassifizierende Abbildungen haben, können wir Wohldefiniertheit zeigen, indem wir $V\ominus W$ um ein $\Bbbk$-Vektorbündel $R$ zu $(V\oplus R)\ominus(W\oplus R)$ „erweitern“ und die neue klassifizierende Abbildung mit $F$ vergleichen. Dazu wählen wir wie oben ein $\Bbbk$-Vektorbündel $S$, so dass $W\oplus R\oplus S\cong\underline{\Bbbk}^\ell$. Das heißt, wir haben das obige Bündel $U$ durch $U' = R\oplus S$ ersetzt. Wir erhalten einen $\Bbbk$-Vektorbündel-Isomorphismus

$$V\oplus U\oplus\underline{\Bbbk}^\ell \cong V\oplus U\oplus W\oplus U' \cong V\oplus U'\oplus\Bbbk^n\ .$$

Nach Konstruktion von $U(m,\Bbbk)\subset U(m+\ell,\Bbbk)$ und $BU(m,\Bbbk)\subset BU(m+\ell,\Bbbk)$ wird das Bündel $V\oplus U\oplus\underline{\Bbbk}^\ell$ nach wie vor durch

$$F\colon X \longrightarrow \{m-n\}\times BU(m,\Bbbk) \subset \{(m+\ell)-(n+\ell)\}\times BU(m+\ell,\Bbbk) \subset \mathbb{Z}\times BU(\Bbbk)$$

klassifiziert. Diese Abbildung ist homotop zur klassifizierenden Abbildung für $V\oplus U'\oplus\Bbbk^n$, und es folgt Wohldefiniertheit.

Zur Surjektivität betrachten wir $F\colon X\to\mathbb{Z}\times BU(\Bbbk)$. Wir können $BU(\Bbbk)$ mit einer CW-Struktur versehen, so dass die Unterräume $BU(n,\Bbbk)$ Unterkomplexe sind. Da $X$ kompakt ist, faktorisiert eine zelluläre Approximation von $F$ über $\mathbb{Z}\times BU(n,\Bbbk)$ für ein $n\in\mathbb{N}$. Wir schreiben $F=(r,f)$, und ohne Einschränkung gelte $n\ge r$ auf ganz $X$. Dann klassifiziert $F$ das $\Bbbk$-Vektorbündel

$$\big(f^*VU(n,\Bbbk)\big)\ominus\underline{\Bbbk}^{n-r}\ .$$

Zur Injektivität sei $H\colon X \times I \to \mathbb{Z} \times BU(\Bbbk)$ eine zelluläre Homotopie, ohne Einschränkung faktorisiere $H$ durch $\mathbb{Z} \times BU(n, \Bbbk)$ Nach dem Homotopielemma 6.43 sind die durch $H_0$ und $H_1$ induzierten virtuellen Bündel isomorph, also insbesondere äquivalent. $\square$

Es bleibt zu zeigen, dass $BU(\Bbbk)$ zu einem $\Omega$-Spektrum gehört. Dazu bezeichne $\tau_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}P^1 \cong S^2$ das tautologische Bündel. Man kann zeigen (Übung), dass

$$\tau_{\mathbb{C}} \oplus \tau_{\mathbb{C}} \cong \underline{\mathbb{C}} \oplus \tau_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \tau_{\mathbb{C}} \ ,$$

oder kurz $(\tau_{\mathbb{C}} \ominus \underline{\mathbb{C}})^2 = 0 \in K^0(S^2)$. Da $\tau_{\mathbb{C}} \ominus \underline{\mathbb{C}}|_{\mathrm{pt}} = 0$, gilt sogar $\tau_{\mathbb{C}} \ominus \underline{\mathbb{C}} \in \tilde{K}^0(S^2)$.

6.55. Satz (Bott-Periodizität). *Für jeden gut punktierten kompakten topologischen Raum existiert ein Isomorphismus*

$$\sigma^2\colon \tilde{K}^0(X) \longrightarrow \tilde{K}^0(S^2 X) \ ,$$

*dabei wird* $\sigma^2(V \ominus W) \in \tilde{K}^0(S^2 X)$ *dargestellt durch das virtuelle* $\mathbb{C}$*-Vektorbündel*

$$(\tau_{\mathbb{C}} \ominus \underline{\mathbb{C}}) \boxtimes_{\mathbb{C}} (V \ominus W) = p_{S^2}^*(\tau_{\mathbb{C}} \ominus \underline{\mathbb{C}}) \otimes_{\mathbb{C}} p_X^*(V \ominus W) \in \tilde{K}^0(S^2 X) \ .$$

Das „äußere Tensorprodukt "$\boxtimes$" entspricht dabei dem Smash-Produkt aus Definition 6.21, siehe Bemerkung 6.59. Für den Beweis, dass $\sigma^2$ einen Isomorphismus $\tilde{K}^0(X) \to \tilde{K}^0(S^2 X)$ induziert, verweisen wir auf [**At**] und [**H2**, Theorem 2.2]. Als Konsequenz können wir jetzt das $\Omega$-Spektrum für $K$-Theorie angeben.

6.56. Satz und Definition. *Komplexe $K$-Theorie ist der allgemeine Kohomologiefunktor zum $\Omega$-Spektrum $\mathbb{K}$ mit*

$$K_n = \begin{cases} \mathbb{Z} \times BU & \textit{falls } n \textit{ gerade ist, und} \\ U & \textit{falls } n \textit{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Mit Satz 6.28 sehen wir, dass $K$-Theorie ein allgemeiner Kohomologiefunktor ist, der wegen Satz 6.54 für kompakte Räume mit der Konstruktion in Definition 6.50 übereinstimmt. Insbesondere erhalten wir eine lange exakte $K$-Theorie-Sequenz für Kofaserungen und eine Mayer-Vietoris-Sequenz. Da sich lange exakte Sequenzen in komplexer $K$-Theorie wegen Bott-Periodizität alle sechs Einträge wiederholen, heißen sie auch *Sechs-Term-Sequenzen.* Nach Satz 5.38 existiert auch ein allgemeiner Homologiefunktor zum obigen Spektrum, die sogenannte *$K$-Homologie.* Da ihre geometrische Interpretation etwas schwieriger ist, geben wir sie hier nicht an.

Auf der anderen Seite erfüllt $K^\bullet$ im Gegensatz zu $K^0_{\mathbb{C}}$ das Summenaxiom. Um beide Funktoren unterscheiden zu können, schreiben wir daher $K$ für den Kohomologiefunktor. Analog schreiben wir $KO$ für reelle $K$-Theorie. Diese Notation ist nicht Standard, sondern folgt Definition 5.38. In der Literatur wird oft auch unsere „naive" $K$-Theorie mit $K$ beziehungsweise $KO$ bezeichnet.

Beweis. Wir müssen zwei Stabilisierungsabbildungen so konstruieren, dass $\mathbb{K}$ ein $\Omega$-Spektrum wird, und wir Bott-Periodizität erhalten. Als erstes betrachten wir das Faserbündel $EU \to BU$ mit Faser $U$, diese ist nach Bemerkung 4.70 (4) homotopieäquivalent zur Homotopiefaser. Mithilfe der Fasersequenz aus Satz 4.72 und der zugehörigen langen exakten Sequenz sehen wir, dass $U$ schwach äquivalent zu $\Omega(BU)$ ist, da $EU$ zusammenziehbar ist. Außerdem sieht der Schleifenfunktor nur die Zusammenhangskomponente des Basispunktes, so dass $\Omega BU \cong \Omega(\mathbb{Z} \times BU)$. Nach den Sätzen 4.46 und 4.55 von Whitehead und Milnor sind also $U$ und $\Omega(\mathbb{Z} \times BU)$ homotopieäquivalent, und wir erhalten eine Abbildung $U \to \Omega(\mathbb{Z} \times BU)$. Die Adjunktion zwischen Einhängungs- und Schleifenfunktor liefert die erste Stabilisierungsabbildung $s\colon SU \to \mathbb{Z} \times BU$.

Wir konstruieren als nächstes eine Abbildung $S^2(\mathbb{Z} \times BU) \to \mathbb{Z} \times BU$, so dass die induzierte Abbildung $\pi_k(\mathbb{Z} \times BU) \to \pi_{k+2}(BU)$ für alle $k \geq 0$ ein Isomorphismus ist. Dazu schreiben wir $\mathbb{Z} \times BU$ als

$$\mathbb{Z} \times BU = \varinjlim X_n \qquad \text{mit} \qquad X_n = \{-n, \ldots, n\} \times Y_n \qquad \text{und} \qquad Y_n = \big(U(n)^{*n}\big)/U(n)$$

und nutzen aus, dass $X_n$ ist und die natürlichen Inklusionen $X_n \to X_{n+1}$ Kofaserungen sind. Auf $X_n$ definieren wir das virtuelle $\Bbbk$-Vektorbündel $V_n$ durch

$$V_n|_{\{\ell\}\times Y_n} = VU(n)|_{Y_n} \ominus \underline{\mathbb{C}}^{n-\ell} \ .$$

Dann sei $F_n\colon S^2X_n \to BU$ die klassifizierende Abbildung des virtuellen Vektorbündels

$$(\tau_{\mathbb{C}} - \underline{\mathbb{C}}) \boxtimes V_n \longrightarrow X_n \ ,$$

für ein hinreichend großes $N$ gilt also $(\tau_{\mathbb{C}} - \underline{\mathbb{C}}) \boxtimes V_n \cong F_n^* V_N$. Da $V_n \cong V_{n+1}|_{X_n}$, ist $F_n$ homotop zu $F_{n+1}|_{X_n}$. Da $X_n \subset X_{n+1}$ eine Kofaserung ist, können wir die $F_n$ induktiv so durch homotope Abbildungen ersetzen, dass schließlich $F_n = F_{n+1}|_{X_n}$ für alle $n$ gilt. Dadurch erhalten wir eine Abbildung

$$F\colon S^2(\mathbb{Z}\times BU) \cong \varinjlim S^2X_n \longrightarrow BU \ .$$

Sei jetzt $[f] \in \tilde{K}^0(S^k) = \pi_k(\mathbb{Z}\times BU)$, dann repräsentiert $f$ ein virtuelles $\mathbb{C}$-Vektorbündel $V \to S^k$. Da $S^k$ kompakt ist, faktorisiert $f$ über ein $X_n$, und es folgt $V \cong f^*V_n$ und

$$(\tau_{\mathbb{C}} - \underline{\mathbb{C}}) \boxtimes V \cong (S^2 f)^*\big((\tau_{\mathbb{C}} - \underline{\mathbb{C}}) \boxtimes V_n\big) \cong (S^2 f \circ F_n)^* V_N \ .$$

Bott-Periodizität 6.55 und Bemerkung 3.10 liefern somit einen Isomorphismus

$$\pi_k(\mathbb{Z}\times BU) \xrightarrow{F_*\circ S^2} \pi_{k+2}(BU) \xrightarrow{\cong} \pi_k(\Omega^2 BU) \ .$$

Also induziert $F\colon S^2(\mathbb{Z}\times BU) \to \mathbb{Z}\times BU$ eine schwache Äquivalenz $\mathbb{Z}\times BU \to \Omega^2(\mathbb{Z}\times BU)$. Verketten mit der Homotopieäquivalenz $\Omega(\mathbb{Z}\times BU) \to U$ liefert eine schwache Äquivalenz $\mathbb{Z}\times BU \to \Omega U$. Via Adjunktion erhalten wir die zweite Stabilisierungsabbildung $s\colon S(\mathbb{Z}\times BU) \to U$. Damit haben wir das gesuchte $\Omega$-Spektrum konstruiert. □

6.57. Bemerkung. Da $\mathbb{K}$ ein $\Omega$-Spektrum ist, folgt für alle $n \in \mathbb{Z}$, dass

$$\tilde{K}^n(S^0) = \pi_0(K_n) \cong \pi_{2k-n}(\mathbb{Z}\times BU) \cong \pi_{2k-n-1}(U) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } n \text{ gerade ist, und} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \end{cases}$$

wobei $2k - n > 0$ gelte, da $\pi_0(U) = 0$ und $\pi_1(U) = \mathbb{Z}$ nach Übung 6.97.

6.58. Bemerkung. Wir geben das reelle Analogon ohne weitere Erläuterungen an.

(1) Es sei $\tau_{\mathbb{H}} \to \mathbb{H}P^1 \cong S^4$ das tautologische Bündel. Wie bei der komplexen Bott-Periodizität 6.55 erhalten wir für kompakte CW-Komplexe $X$ einen Isomorphismus

$$\sigma^4\colon \tilde{K}^0_{\mathbb{R}}(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{K}^0_{\mathbb{H}}(S^4X) \qquad \text{mit} \qquad (V \ominus W) \mapsto (\tau_{\mathbb{H}} \ominus \underline{\mathbb{H}}) \boxtimes_{\mathbb{R}} (V \ominus W) \ .$$

Da wir mit einem virtuellen $\mathbb{H}$-Bündel tensorieren, landen wir in quaternionischer $K$-Theorie.

(2) Das Tensorieren eines Rechts- mit einem Links-$\mathbb{H}$-Vektorbündel liefert ein reelles Vektorbündel, da $\mathbb{H}$ nicht kommutativ ist. Wenn $\tau_{\mathbb{H}}$ eine Links-$\mathbb{H}$-Vektorbündel ist, ist das duale Vektorbündel $\tau_{\mathbb{H}}^*$ ein Rechts-$\mathbb{H}$-Vektorbündel. Wir erhalten einen weiteren Isomorphismus

$$\sigma^4\colon \tilde{K}^0_{\mathbb{H}}(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{K}^0_{\mathbb{R}}(S^4X) \qquad \text{mit} \qquad (V \ominus W) \mapsto (\tau_{\mathbb{H}}^* \ominus \underline{\mathbb{H}}) \boxtimes_{\mathbb{H}} (V \ominus W) \ .$$

Zusammen mit (1) ergibt sich hieraus reelle Bott-Periodizität mit Periode 8, nämlich

$$\sigma^8\colon \tilde{K}^0_{\mathbb{R}}(X) \cong \tilde{K}^0_{\mathbb{R}}(S^8X) \ .$$

(3) Ähnlich wie in Satz 6.56 können wir zu einem $\Omega$-Spektrum $\mathbb{KO}$ „auffüllen“ mit

$$\begin{aligned} KO_8 &= \mathbb{Z} \times BO\ , & KO_{8k+1} &= U/O\ , & KO_{8k+2} &= Sp/U\ , & KO_{8k+3} &= Sp\ , \\ KO_{8k+4} &= \mathbb{Z} \times BSp\ , & KO_{8k+5} &= U/Sp\ , & KO_{8k+6} &= O/U\ , & KO_{8k+7} &= O\ , \end{aligned}$$

Zumindest die Stabilisierungsabbildungen $S^1 \wedge O \to \mathbb{Z} \times BO$ und $S^1 \wedge Sp \to \mathbb{Z} \times BSp$ kommen wie oben zustande. Wir bilden $U/O$ als Kolimes von $U(n)/O(n)$, indem wir reelle als komplexe Matrizen auffassen; entsprechend konstruieren wir $Sp/U$. Umgekehrt bilden wir $O/U$ als Kolimes von $O(2n)/U(n)$, indem wir komplexe Matrizen mit reellen Matrizen identifizieren, die eine zusätzliche komplexe Struktur auf $\mathbb{R}^{2n}$ festhalten; analog bilden wir $U/Sp$. Als Koeffizientengruppen erhalten wir

$$\widetilde{KO}^{8k-n}(S^0) \cong \pi_0(KO_{8k-n}) \cong \pi_{8k+n}(\mathbb{Z} \times BO) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } n = 0,\, 4, \\ \mathbb{Z}/2 & \text{für } n = 1,\, 2, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(4) Wegen (2) und (3) gibt es auch einen mit quaternionischer $K$-Theorie verwandten allgemeinen Kohomologiefunktor: für kompakte CW-Komplexe gilt

$$\widetilde{KSp}^k_{\mathbb{H}}(X) \cong \widetilde{KO}^k(S^4 X) \cong \widetilde{KO}^{k\pm 4}(X)\ .$$

6.59. Bemerkung. Zur Konstruktion der Bott-Periodizität hatten wir das äußere Tensorprodukt benutzt. Seien $\Bbbk$-Vektorbündel $V \to X$ und $W \to Y$ mit $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ gegeben, dann lautet die allgemeine Definition

$$V \boxtimes W = (p_X^* V) \otimes_{\Bbbk} (p_Y^* W) \longrightarrow X \times Y\ ,$$

dabei ist „$\otimes$“ wieder das Whitney-Produkt, und $p_X \colon X \times Y \to X$ und $p_Y \colon X \times Y \to Y$ sind die Projektionen im Produkt. Da das Whitney-Produkt bis auf eindeutige Isomorphismen assoziativ ist, gilt das auch fürs äußere Tensorprodukt.

(1) Seien $X = (X, x_0)$ und $Y = (Y, y_0)$ punktiert, und seien $V|_{x_0}$ und $W|_{y_0}$ von virtueller Dimension 0, dann ist $V \boxtimes W|_{X \vee Y}$ trivial von virtueller Dimension 0, und $V \boxtimes W$ stellt ein wohldefiniertes Element in $\tilde{K}^0_{\Bbbk}(X \wedge Y)$ dar. Wir erhalten ein Analogon zum Smash-Produkt aus Definition 6.21. Es ist ebenfalls assoziativ und kommutativ bis auf natürliche Isomorphismen, insbesondere also assoziativ und kommutativ auf $\tilde{K}^0_{\Bbbk}$.

(2) Das Einselement $1 \in \tilde{K}^0_{\Bbbk}(S^0)$ wird repräsentiert durch ein $\Bbbk$-Vektorbündel vom Rang 0 auf dem Basispunkt und Rang 1 auf dem anderen Punkt der $S^0$.

(3) Die Stabilisierungsisomorphismen $\sigma^2$ in Satz 6.55 und $\sigma^8$ in Bemerkung 6.58 (2) wurden mit Hilfe des äußeren Produktes definiert. Es sei $n_0 = 2$ falls $\Bbbk = \mathbb{C}$ und $n_0 = 8$ falls $\Bbbk = \mathbb{R}$. In Analogie zu Proposition 6.21 (3) gilt daher

$$(\sigma^{n_0} V) \boxtimes_{\mathbb{C}} W = \sigma^{n_0}(V \boxtimes_{\mathbb{C}} W) = V \boxtimes_{\mathbb{C}} (\sigma^{n_0} W) \in \tilde{K}^0\big(S^{n_0}(V \wedge W)\big)\ .$$

(4) Seien jetzt $X, Y$ kompakte CW-Komplexe, und seien $\alpha \in \tilde{K}^k_{\Bbbk}(X)$ und $\beta \in \tilde{K}^\ell_{\Bbbk}(Y)$ für $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $0 \le k,\, \ell < n_0$. Es gibt natürliche Isomorphismen

$$\sigma^{n_0-k} \colon \tilde{K}^k_{\Bbbk}(X) \cong [X, \Omega^{n_0-k}(\mathbb{Z} \times BU(\Bbbk))] \xrightarrow{\cong} [S^{n_0-k}X, \mathbb{Z} \times BU(\Bbbk)] \cong \tilde{K}^0_{\Bbbk}(S^{n_0-k}X)\ ,$$

also identifizieren wir $\alpha$ mit $V = \sigma^{n_0-k}\alpha \in \tilde{K}^0_{\Bbbk}(S^{n_0-k}X)$ und $\beta$ mit $W = \sigma^{n_0-\ell}\beta \in \tilde{K}^0_{\Bbbk}(S^{n_0-k}Y)$ und definieren

$$\alpha \cdot \beta = \sigma^{k+\ell}(V \boxtimes_{\Bbbk} W) \in K^{k+\ell}_{\Bbbk}\big(X \wedge Y\big)\ .$$

Beim Vertauschen von $\alpha$ und $\beta$ haben wir im Zwischenschritt zusätzlich eine Transpositionsabbildung $S^{k+\ell} \to S^{\ell+k}$ anzuwenden. Wie in Proposition 6.21 (3) gilt daher

$$t^*(\beta \cdot \alpha) = (-1)^{k\ell} V\alpha \cdot \beta \ .$$

(5) Wir haben festgestellt, dass es kein Produkt $\tilde{K}^0_{\mathbb{H}}(X) \times \tilde{K}^0_{\mathbb{H}}(Y) \to \tilde{K}^0_{\mathbb{H}}(X \wedge Y)$ gibt. Das erklärt sich, indem wir $\tilde{K}^0_{\mathbb{H}}$ wie in Bemerkung 6.58 (4) mit $\tilde{K}^4_{\mathbb{R}}$ identifizieren.

Wir haben jetzt also zwei allgemeine Kohomologiefunktoren mit Produkten definiert. Zur geometrischen Interpretation der Verbindungshomomorphismen in den langen exakten Sequenzen und zu den Produkten zwischen höheren $K$-Gruppen haben wir leider noch nichts sagen können.

## 6.i. Bordismus

Wir kennen bereits den gerahmten (Ko-) Bordismus, dabei ging es um Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$ mit trivialem Normalenbündel. In diesem Abschnitt wollen wir Bordismustheorien zu anderen Strukturen auf $M$ betrachten. Die Pontryagin-Thom-Konstruktion funktioniert dabei ähnlich wie in Satz 3.86, insbesondere können wir Zusatzstrukturen nur über das Normalenbündel einführen (in Satz 3.86 hatten wir eine Trivialisierung des Normalenbündels zugrundegelegt). Wir betrachten daher zunächst einmal normale Strukturen.

Die Pontryagin-Thom-Konstruktion legt es nahe, zu normalen Strukturen sogenannte Thom-Spektren zu konstruieren. Die Struktur eines Spektrums ergibt sich hier allein aus geometrischen Überlegungen, insofern könnte man die Konstruktionen in diesem Abschnitt als Motivation für Spektren und die zugehörigen (Ko-) Homologiefunktoren betrachten. Allerdings sind Thom-Spektren typischerweise weder Einhängungs- noch $\Omega$-Spektren. Daher werden wir die zugehörigen Kohomologiefunktoren hier zunächst nur auf kompakten CW-Komplexen betrachten. Außerdem ergibt sich eine schöne geometrische Interpretation nur für glatte Mannigfaltigkeiten.

Wir wollen von Untermannigfaltigkeiten zu abstrakten Mannigfaltigkeiten übergehen. Wie üblich nennen wir eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand *geschlossen.* Wir zitieren einen Satz aus der Differentialtopologie.

6.60. Satz (Einbettungs-, Whitney). *Jede geschlossene $m$-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit lässt sich für alle $n \geq 2m$ in den $\mathbb{R}^n$ einbetten.*

Wir können $n$ beliebig vergrößern, indem wir eine lineare Einbettung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n'}$ nachschalten. Je zwei Einbettungen $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ und $g\colon M \to \mathbb{R}^{n'}$ sind in einem größeren $\mathbb{R}^N$ homotop, dazu definiere etwa $h\colon I \times M \to \mathbb{R}^{n+n'+1}$ durch

$$h(s,p) = \big(s, (1-s)\cdot f(p), s \cdot g(p)\big) \ .$$

Es bezeichne $\nu f \to M$ das Normalenbündel von $\operatorname{im} f \subset \mathbb{R}^n$, siehe Abschnitt 3.i. Sei $g$ die Verkettung

$$g\colon M \xhookrightarrow{f} \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^N \ , \tag{6.10}$$

dann folgt $\nu g = \underline{\mathbb{R}}^{N-n} \oplus \nu f$. Wir betrachten die natürlichen Inklusionen $\iota_n\colon O(n) \to O(n+1)$ aus (6.9). Sei $\vartheta\colon M \to BO(n-k)$ eine klassifizierende Abbildung für $\nu_{\mathbb{R}^n} M$, dann ist

$$B\iota_{N-m-1} \circ \cdots \circ B\iota_{n-m} \circ \vartheta\colon M \longrightarrow BO(N-m)$$

eine klassifizierende Abbildung für $\nu_{\mathbb{R}^N} M$. Außerdem sind Normalenbündel homotoper Einbettung $f$ und $g$ nach dem Homotopielemma 6.43 isomorph, und der Isomorphismus ist bis auf Homotopie eindeutig durch die Homotopie zwischen $f$ und $g$ bestimmt.

6.61. Definition. Es sei $M$ eine $m$-dimensionale geschlossene glatte Mannigfaltigkeit, und es sei $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ eine Einbettung. Das *stabile Normalenbündel* $\nu^s M \in K^0 O(M)$ ist definiert als

$$\nu^s M = [\nu f \ominus \underline{\mathbb{R}}^n] \in KO^0(M) \ .$$

Aus den obigen Vorüberlegungen folgt, dass die $K$-Theorieklasse $\nu^s M$ nicht von der Einbettung $f$, sondern nur von $M$ selbst abhängt. Das gilt insbesondere auch für den Rang $-m$ von $\nu^s M$. Das Normalenbündel ist komplementär zum Tangentialbündel, siehe Bemerkung 6.53 (2), und tatsächlich gilt $\nu^s M = -[TM] \in K^0(M)$.

Wir haben in Definition 6.37 $G$-Strukturen auf reellen Vektorbündeln $V \to X$ vom Rang $k$ als Isomorphismen $V \cong P_G \times_G \mathbb{R}^k$ eingeführt. Nach dem Klassifikationssatz 6.47 wird das zugrundeliegende Prinzipalbündel durch eine Abbildung $\vartheta_G\colon X \to BG$ klassifiziert. Da $G$ linear auf $\mathbb{R}^k$ wirkt, erhalten wir eine Homorphismus $\rho\colon G \to GL(k,\mathbb{R})$ und die davon induzierte Abbildung $B\rho\colon BG \to BGl(k,\mathbb{R})$. Sei $\vartheta_{GL}\colon X \to BGL(k,\mathbb{R})$ die klassifizierende Abbildung des Rahmenbündels $P_{GL}(V)$, dann entspricht eine $G$-Struktur auf $V$ genau einem Lift $\vartheta_G$ von $\vartheta_{GL}$ im linken Diagramm

$$\begin{tikzcd} & BG \arrow[d, "B\rho"] \\ X \arrow[ur, "\vartheta_G"] \arrow[r, "\vartheta_{GL}"'] & BGL(k,\mathbb{R}) \end{tikzcd} , \qquad \begin{tikzcd} & BG \arrow[d, "B\rho"] \\ X \arrow[ur, "\vartheta_G"] \arrow[r, "\vartheta_O"'] & BO(k) \end{tikzcd} .$$

Im Folgenden ist $G$ stets kompakt. Dann ist die obige Abbildung $\rho$ konjugiert zu einer Abbildung mit Werten in $O(k) \subset BGL(k,\mathbb{R})$, und das Vektorbündel $V$ trägt eine mit der $G$-Struktur verträgliche Metrik. Das liefert uns das rechte Diagramm oben.

Im Falle des stabilen Normalenbündels betrachten wir eine Folge von Abbildungen $\vartheta_{O(k)}\colon M \to BO(k)$ mit $B\iota_k \circ \vartheta_{O(k)} = \vartheta_{O(k+1)}$. Wir suchen daher nach einer entsprechenden Folge von Strukturgruppen $G_k$ mit Abbildungen $G_k \to G_{k+1}$ und $\rho_k\colon G_k \to O(k)$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} BG_k \arrow[r] \arrow[d, "B\rho_k"'] & BG_{k+1} \arrow[d, "B\rho_{k+1}"] \\ BO(k) \arrow[r, "B\iota_k"] & BO(k+1) \end{tikzcd}$$

kommutiert. Ein Lift $\vartheta_{G_k}$ von $\vartheta_{O(k)}$ liefert durch Verkettung Lifts $\vartheta_{G_{k'}}$ von $\vartheta_{O(k')}$ für alle $k' > k$. Im Übrigen ist es im Folgenden nicht notwendig, dass die Räume $BG_k$ klassifizierende Räume von Gruppen sind und die Abbildungen $B\rho_k$ von Gruppenhomomorphismen induziert werden.

Wir wissen bereits, dass alle Einbettungen einer Mannigfaltigkeit in einen Euklidischen Raum beim Übergang zu einer hinreichend großen Dimension homotop werden. Wir wissen auch, dass klassifizierende Abbildungen nur bis auf Homotopie eindeutig bestimmt sind. Daher brauchen wir auch einen Begriff für Homotopien für die obigen Lifts. Wichtig ist dabei, dass die Liftungseigenschaft im Verlauf der Homotopie nicht verloren geht. All diese Vorüberlegungen motivieren die folgende Definition.

6.62. Definition. Eine *stabile lineare Struktur* $\mathbb{B} = (B_k, b_k, c_k)$ besteht aus einer Folge von CW-Komplexen $B_k$ und Abbildungen $b_k\colon B_k \to B_{k+1}$ und $c_k\colon B_k \to BO(n)$, so dass für alle $n$ gilt

$$B\iota_k \circ c_k = c_{k+1} \circ b_k \ .$$

Eine *stabile normale* $\mathbb{B}$*-Struktur* $(\iota, \vartheta_k)$ auf einer $m$-dimensionalen geschlossenen glatten Mannigfaltigkeit $M$ besteht aus einer Einbettung $\iota\colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ und einem Lift $\vartheta_k\colon M \to B_k$ der klassifizierenden Abbildung $\vartheta\colon M \to BO(k)$.

Eine Homotopie zu einer weiteren stabilen normalen $\mathbb{B}$-Struktur $(\iota', \vartheta'_\ell)$ besteht aus eine Einbettung $J\colon M \times I \to \mathbb{R}^N \times I$ für ein $N \geq \max(m+k, m+\ell)$, mit $J(x,s) \in \mathbb{R}^N \times \{s\}$, so dass ein $\varepsilon > 0$ mit $J(x,s) = (\iota(x) \times \{0\}, s)$ für $s \in [0,\varepsilon]$ und $J(x,s) = (\iota'(x) \times \{0\}, s)$ für $s \in [1-\varepsilon, 1]$, und einem Lift $\Theta_{N-m}$ der klassifizierenden Abbildung $\Theta\colon M \times I \to BO(N-m)$ des Normalenbündels von $J$, so dass

$$\Theta|_{M\times\{0\}} = B\iota_{N-m-1} \circ \cdots \circ B\iota_k \circ \vartheta\ , \qquad \Theta_{N-m}|_{M\times\{0\}} = b_{N-m-1} \circ \cdots \circ b_k \circ \vartheta_k\ ,$$
$$\Theta|_{M\times\{1\}} = B\iota_{N-m-1} \circ \cdots \circ B\iota_\ell \circ \vartheta'\ , \qquad \Theta_{N-m}|_{M\times\{1\}} = b_{N-m-1} \circ \cdots \circ b_\ell \circ \vartheta'_\ell\ .$$

Eine $\mathbb{B}$-*Mannigfaltigkeit* $(M, [\iota, \vartheta])$ ist eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer Homotopieklasse stabiler normaler $\mathbb{B}$-Strukturen.

6.63. Bemerkung. Wir betrachten einige stabile lineare Strukturen.

(1) Wenn wir keine weitere Struktur festlegen wollen, wählen wir $B_k = BO(k)$ und $c_k = \mathrm{id}_{BO(k)}$. Die zugehörige stabile lineare Struktur heiße $\mathbb{BO}$.
(2) Zu jeder Orientierung von $TM$ gehört genau eine Orientierung von $\nu f$, so dass das Hintereinanderhängen zweier orientierter Basen eine orientierte Basis des umgebenden $\mathbb{R}^{m+k}$ liefert und umgekehrt. Diese Orientierung von $\nu f$ ist invariant unter Stabilisierung, und wird klassifiziert durch $c_k\colon BSO(k) \to BO(k)$; wenn wir $BSO(k) = EO(k)/SO(k)$ wählen, ist $c_k$ eine zweifache Überlagerung. Eine normale $\mathbb{BSO}$-Struktur auf $M$ entspricht also genau einer Orientierung des Tangentialbündels $TM$.
(3) Völlig analog existiert zu jeder Spinstruktur von $TM$ eine passende Spinstruktur von $\nu f$, und diese ist ebenfalls invariant unter Stabilisierung. Wir betrachten dazu die stabile lineare Struktur $\mathbb{B}\mathrm{Spin}$ mit $c_k\colon B\mathrm{Spin}(n) \to BO(n)$; die Homotopiefaser dieser Abbildung ist $\mathbb{R}P^\infty$.
(4) In Analogie zu den fast komplexen Strukturen aus Bemerkung 6.40 (5) definieren wir die stabile komplexe Struktur $\mathbb{BU}$ klassifiziert durch $c_k\colon B_k = BU(\ell) \to BO(k)$ für $k = 2\ell$. und $c_k = B\iota_{k-1} \circ c_{k-1}\colon BU(\ell) \to BO(k)$ für $k = 2\ell+1$. Auf ähnliche Weise erhalten wir auch die stabilen linearen Strukturen $\mathbb{BSU}$ und $\mathbb{B}Sp$.
(5) Wenn wir für alle $k$ die triviale Gruppe $G_k = \{e\}$ wählen, ist $B_k = BG_k$ zusammenziehbar. Das Normalenbündel lässt eine solche $\mathbb{B}$fr-Struktur genau dann zu, wenn es trivial ist.

In Abschnitt 3.i hatten wir gesehen, dass es verschiedene, nicht äquivalente Trivialisierungen des Normalenbündels geben kann. Als Trivialisierungen von abstrakten Bündeln sind sie jedoch isomorph. Zur Unterscheidung ist daher die obige umständliche Definition nötig.

Es sei $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit. Wie in Abschnitt 3.i identifizieren wir für ein Intervall $J \subset \mathbb{R}$ positiver Länge das relative Normalenbündel $\nu_{J\times N}(J \times M)$ mit $p_M^* \nu_N M = J \times \nu_N M$. Daher können wir die klassifizierenden Abbildungen beider Normalenbündel vergleichen.

6.64. Definition. Es sei $0 \leq k \leq n$, sei $\mathbb{B}$ eine stabile lineare Struktur, sei $N$ eine $n$-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und $m = n-k$.

(1) Eine *normale* $\mathbb{B}$-*Struktur* auf einer $m$-dimensionalen kompakten glatten Untermannigfaltigkeit $M \subset N$ ist eine Abbildung $\vartheta\colon M \to B_k$, so dass $c_k \circ \vartheta\colon M \to BO(k)$ das relative Normalenbündel $\nu_N M$ klassifiziert. Dann heißt das Paar $(M, \vartheta)$ eine $m$-dimensionale $\mathbb{B}$-*Untermannigfaltigkeit* von $N$.

(2) Ein $\mathbb{B}$-*Bordismus* $(W, \Theta)$ zwischen $m$-dimensionalen $\mathbb{B}$-Untermannigfaltigkeiten $(M_i, \vartheta_i)$ von $N$ mit $i = 0, 1$ besteht aus einer glatten kompakten $(m+1)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $W \subset I \times N$ mit Rand $\partial W \subset \partial I \times N$ und Krägen

$$W \cap \big([0,\varepsilon) \times N\big) = [0,\varepsilon) \times M_0 \quad \text{und} \quad W \cap \big((1-\varepsilon,1] \times N\big) = (1-\varepsilon,1] \times M_1$$

für ein geeignetes $\varepsilon > 0$, und einer normalen $\mathbb{B}$-Struktur $\Theta\colon W \to B_k$, so dass

$$\bar\vartheta|_{[0,\varepsilon)\times M_0} = \vartheta_0 \circ \pi_{M_0} \qquad \text{und} \qquad \bar\vartheta|_{(1-\varepsilon,1]\times M_1} = \vartheta_1 \circ \pi_{M_1}\ .$$

Wenn $M_0 = \emptyset$ gilt, nennen wir $(M_1, \vartheta_1)$ eine $\mathbb{B}$-nullbordante Mannigfaltigkeit und $(W, \Theta)$ einen $\mathbb{B}$-*Nullbordismus.*

(3) Zwei $m$-dimensionale $\mathbb{B}$-Untermannigfaltigkeiten von $N$ heißen $\mathbb{B}$-*bordant,* wenn ein $\mathbb{B}$-Bordismus zwischen ihnen existiert. Es bezeichne $\Omega^k_{\mathbb{B}}(N)$ die Menge aller $\mathbb{B}$-Bordismusklassen von $m$-dimensionalen $\mathbb{B}$-Untermannigfaltigkeiten von $N$.

Wie in Bemerkung 3.85 überprüft man, dass $\mathbb{B}$-Bordismus eine Äquivalenzrelation ist.

Eine Abbildung $f\colon L \to N$ heißt *transversal* zu einer Untermannigfaltigkeit $M \subset N$ in $N$, wenn $\operatorname{im}(df_p) + T_{f(p)}M = T_{f(p)}N$ für jeden Punkt $\in f^{-1}(M) \subset L$ gilt. In diesem Fall ist $f^{-1}M \subset L$ eine $\dim L + \dim M - \dim N$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wenn $f$ eine Einbettung ist, dann ist $\operatorname{im} f \cap M$ entsprechend eine $\dim L + \dim M - \dim N$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $N$.

Wir erinnern uns an den Begriff einer eigentlichen Abbildung aus Übung 4.77. Eine Untermannigfaltigkeit $M \subset N$ heißt *eigentlich,* wenn die Inklusion $M \hookrightarrow N$ eigentlich ist. Insbesondere sind geschlossene Untermannigfaltigkeiten immer eigentlich.

6.65. Satz (Transversalitäts-). *Sei $N$ eine glatte Mannigfaltigkeit, sei $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit, und sei $f\colon L \to N$ eine glatte Abbildung. Wir nehmen an, dass entweder*

(1) *die Mannigfaltigkeit $L$ kompakt und $M$ eigentlich, oder*
(2) *die Abbildung $f$ eigentlich und $M$ kompakt ist.*

*Dann existiert eine zu $f$ homotope Abbildung $g$ transversal zu $M$. Wenn $f$ eine Einbettung war, kann auch $g$ als Einbettung gewählt werden. In Situation* (2) *kann die Homotopie* mit kompaktem Träger *oder auch* kompakt getragen *gewählt werden, das heißt, außerhalb einer kompakten Teilmenge von $L$ stationär.*

Diesen Satz haben wir implizit bereits in Abschnitt 3.i benutzt, um Surjektivität der Pontryagin-Thom-Abbildung zu zeigen. Mit

6.66. Proposition und Definition. *Es sei $\mathbb{B}$ eine stabile lineare Struktur, $N$ eine $n$-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, und $(M, \vartheta)$ eine $n-k$-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von $N$ mit normaler $\mathbb{B}$-Struktur.*

(1) *Es sei $f\colon L \to N$ eine eigentliche, zu $M$ transversale Abbildung. Dann repräsentiert $\vartheta \circ df$ eine normale $\mathbb{B}$-Struktur auf $f^{-1}(M)$, und die Bordismusklasse von $(f^{-1}(M), \vartheta \circ df)$ hängt nur von der Bordismusklasse von $(M, \vartheta)$ und von der Klasse von $f$ modulo kompakt getragener Homotopien ab. Insbesondere ist $\Omega^k_{\mathbb{B}}$ ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten und der glatten eigentlichen Abbildungen in die Kategorie $\mathcal{S}et$.*

(2) *Die Abbildung $b_k \circ \vartheta\colon M \to B_{k+1}$ ist eine normale $\mathbb{B}$-Struktur auf $M \times \{0\} \subset N \times \mathbb{R}$. Insbesondere erhalten wir eine Abbildung*

$$s_k\colon \Omega^k_{\mathbb{B}}(N) \to \Omega^{k+1}_{\mathbb{B}}(N \times \mathbb{R})\ .$$

(3) *Durch Stabilisieren erhalten wir einen kontravarianten Funktor*

$$MB^k(N) = \operatorname{colim} \Omega^{k+\ell}_{\mathbb{B}}(N \times \mathbb{R}^\ell)$$

*wie in* (1)*, aber mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen.*

Beweis. Wenn $f$ zu $M$ transversal ist, induziert $df$ eine Vektorbündelabbildung $\nu_L(f^{-1}(M)) \to \nu_N M$, somit beschreibt $\vartheta \circ df$ eine normale $\mathbb{B}$-Struktur auf $f^{-1}(M)$.

Zur Homotopieinvarianz überlegt man sich, dass man eine Homotopie $h\colon L \times I \to N$ zwischen zwei zu $M$ transversalen Abbildungen $f_i\colon L \to N$, $i = 0, 1$, transversal zu $M$ und auf $[0, \varepsilon]$ sowie auf $[1-\varepsilon, 1] \subset I$ stationär wählen kann. Dann definiert $\vartheta \circ dh$ wie oben eine normale $\mathbb{B}$-Struktur auf dem Kobordismus $h^{-1}(M) \subset L \times I$, passend zu den normalen $\mathbb{B}$-Strukturen auf $f_i^{-1}(M)$.

Sei $(W, \Theta)$ mit $W \subset M \times I$ ein $\mathbb{B}$-Bordismus zwischen $(M_0, \vartheta_0)$, $(M_1, \vartheta_1)$, und $F\colon L \times I \to N \times I$ transversal zu $W$ und homotop zu $f \times \mathrm{id}_I$ mit kompaktem Träger in $L \times (0,1)$. Dann erhalten wir einen $\mathbb{B}$-Bordismus $(F^{-1}(M), \Theta \circ dF)$ zwischen den zwei $\mathbb{B}$-Untermannigfaltigkeiten $(f^{-1}(M_i), \vartheta_i \circ df)$ für $i = 0, 1$.

Zu (2) betrachten wir $M \times \{0\}$ als Untermannigfaltigkeit von $N \times \mathbb{R}$ mit $\nu_{N\times\mathbb{R}} M \cong \nu_N M \oplus \underline{\mathbb{R}}$, mit klassifizierender Abbildung

$$B\iota_k \circ c_k \circ f = c_{k+1} \circ (b_k \circ f_k)\colon M \longrightarrow BO(k+1)\ ,$$

somit ist $f_{k+1} = b_k \circ f_k\colon M \to B_{k+1}$ eine normale $\mathbb{B}$-Struktur auf $M \times \{0\}$. Völlig analog induziert ein $\mathbb{B}$-Bordismus in $N$ einen $\mathbb{B}$-Bordismus in $N \times \mathbb{R}$, und wir erhalten eine natürliche Abbildung

$$\Omega^k_{\mathbb{B}}(N) \longrightarrow \Omega^{k+1}_{\mathbb{B}}(N \times \mathbb{R})\ .$$

Wie in Bemerkung 3.87 trägt $\Omega_{\mathbb{B}}(N \times \mathbb{R}^\ell)$ die Struktur einer abelschen Halbgruppe für $\ell \geq 2$, dabei addiert man $G$-Bordismusklassen, indem man geeignete Repräsentanten durch Verschieben disjunkt macht und dann vereinigt, und wir erhalten (3). $\square$

Anhand des Beweises von Punkt (1) sehen wir, warum es sinnvoll ist, Mannigfaltigkeiten mit normaler Struktur bis auf Bordismus zu betrachten, und als „Grad“ die Kodimension zu verwenden.

Für die stabilen linearen Strukturen $\mathbb{B} = \mathbb{BO}$, $\mathbb{BSO}$, $\mathbb{B}\mathrm{Spin}$, $\mathbb{BU}$, $\mathbb{BSU}$, $\mathbb{B}Sp$ und $\mathbb{B}\mathrm{fr}$ aus Bemerkung 6.63 bezeichnet man die zugehörigen Mengen von Kobordismusklassen üblicherweise mit $\Omega_O$, $\Omega_{SO}$, $\Omega_{\mathrm{Spin}}$, $\Omega_U$, $\Omega_{SU}$, $\Omega_{Sp}$ und $\Omega_{\mathrm{fr}}$, und die zugehörigen Funktoren in (3) mit $MO$, …, $MSp$ und $M_{\mathrm{fr}}$.

Wir definieren das tautologische Vektorbündel $VO(k) = EO(k) \times_{O(k)} \mathbb{R}^k \to BO(k)$ wie in Definition 6.36 mit der Euklidischen Metrik gemäß Bemerkung 6.40 (1). Zu einer stabilen linearen Struktur $\mathbb{B} = (B_k, b_k, c_k)$ wie in Definition 6.62 erhalten wir Euklidische Vektorbündel $c_k^* VO(k) \to B_k$ vom Rang $k$ zusammen mit Vektorbündelabbildungen

$$\begin{tikzcd} c_k^* VO(k) \oplus \underline{\mathbb{R}} \arrow[r] \arrow[d] & c_{k+1}^* VO(k+1) \arrow[d] \\ B_k \arrow[r, "b_k"] & B_{k+1}\ . \end{tikzcd}$$

Der Beweis der in der folgenden Definition enthaltenen Behauptungen bleibt Übung.

6.67. Proposition und Definition. *Es sei $V \to X$ ein Euklidisches Vektorbündel, dann definieren wir das* Ball- *und das* Sphärenbündel *sowie den* Thom-Raum *von $V$ als*

$$DV = \big\{\, v \in V \;\big|\; \|v\| \leq 1 \,\big\}\ , \qquad SV = \big\{\, v \in V \;\big|\; \|v\| = 1 \,\big\} \qquad \textit{und} \qquad MV = DV/SV\ . \tag{1}$$

*Jede Abbildung $F\colon V \to W$ Euklidischer Vektorbündel induziert Abbildungen $DF\colon DV \to DW$ und $SF\colon SV \to SW$ von Faserbündeln und eine punktierte Abbildung $MF\colon MV \to MW$.*

*Zu einer stabilen linearen Struktur $\mathbb{B} = (B_k, b_k, c_k)$ definieren wir das* Thom-Spektrum $\mathbb{MB}$ *durch*

$$MB_k = M\big(c_k^* VO(k)\big) \qquad \textit{und} \qquad s_k\colon S^1 \wedge MB_k \cong M\big(c_k^* VO(k) \oplus \underline{\mathbb{R}}\big) \longrightarrow MB_{k+1}\ . \tag{2}$$

Man beachte, dass die Konstruktion von $MF$ nur für faserweise Isomorphismen funktioniert. Wenn der Basisraum $X$ kompakt ist, können wir $MV$ alternativ auch als Einpunktkompaktifizierung des Totalraums von $V$ betrachten. Das erlaubt es, auch ohne Wahl einer Euklidischen Metrik Thom-Räume zu konstruieren.

6.68. Satz (von der Röhrenumgebung). *Es sei $N$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $M \subset N$ eine eigentliche Untermannigfaltigkeit. Dann existiert eine Metrik auf dem Normalenbündel $\nu_N M \to M$ und eine Einbettung $a\colon D\nu_N M \to N$, deren Differential $da|_M$ gerade der natürliche Isomorphismus $\nu_N M \oplus TM \cong f^*TN$ ist.*

Wir erinnern uns an die Konstruktion von Kohomologiefunktoren zu $\Omega$-Spektren in Satz 6.28. Obwohl Thom-Spektren keine $\Omega$-Spektren sind, können wir entsprechende Konstruktion hier wiederholen. Allerdings können wir nicht unmittelbar folgern, dass wir einen Kohomologiefunktor $M_B^\bullet$ zum Thom-Spektrum $\mathbb{MB}$ erhalten.

6.69. Satz (Pontryagin-Thom). *Es bezeichne $\dot{N}$ die Einpunktkompaktifizierung von $N$. Für alle $0 \le k \le n$ und alle stabilen linearen Strukturen $\mathbb{B}$ gilt*

$$\Omega^k_{\mathbb{B}}(N) \cong [\dot{N}, MB_k]\ .$$

*Die Stabilierungsabbildung aus Definition 6.66* (2) *entspricht der Abbildung*

$$[\dot{N}, MB_k] \xrightarrow{S} [S\dot{N}, SMB_k] \xrightarrow{s_k\circ} [S\dot{N}, MB_{k+1}]\ .$$

Wenn $N$ kompakt ist, ist die Einpunktkompaktifizierung $\dot{N} = N_+$. Für $\ell \ge 2$ ist $\Omega_{\mathbb{B}}(N \times \mathbb{R}^\ell)$ eine abelsche Halbgruppe, siehe oben. Aus dem obigen Satz und Bemerkung 3.75 folgt, dass $\Omega_{\mathbb{B}}(N \times \mathbb{R}^\ell) \cong [S^\ell \dot{N}, MB_{k+\ell}]$ sogar eine abelsche Gruppe ist.

Beweis. Wir gehen vor wie im Beweis von Satz 3.86. Es sei $(M, \vartheta)$ eine $\mathbb{B}$-Untermannigfaltigkeit von $N$. Nach Konstruktion existiert eine Vektorbündelabbildung $\Theta\colon \nu_N M \to c_k^* VO(k)$ über $\vartheta$. Nach Satz 6.68 existiert eine Einbettung $a\colon D\nu_N M \to N$. Es bezeichne $*$ den Basispunkt in $MB_k$. Wir definieren $\varphi\colon \dot{N} \to MB_k$ ähnlich wie in (3.7) durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} \Theta(v) & \text{falls } x = a(v) \text{ für ein } v \in D\nu_N M \setminus S\nu_N M, \text{ und} \\ * & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wieder stetig, und lässt sich stetig auf die Einpunktkompaktifizierung $\dot{N}$ von $N$ fortsetzen. Sie hängt bis auf Homotopie nicht von den Wahlen von $\Theta$ und $a$ ab.

Um zu zeigen, dass $[\varphi] \in [\dot{N}, MB_k]$ invariant unter $\mathbb{B}$-Bordismen ist, betrachten wir einen $\mathbb{B}$-Bordismus $(W, \bar{\vartheta})$ zwischen $(M_0, \vartheta_0)$ und $(M_1, \vartheta_1)$. Es seien $\varphi_i\colon S^n \to MB_k$ für $i = 0, 1$ wie oben konstruiert. Die obige Konstruktion liefert jetzt auch für $W$ eine Abbildung $\Phi\colon I \times N \to MB_k$, die sich stetig auf die Einpunktkompaktifizierung $I_+ \wedge \dot{N}$ fortsetzen lässt. Einschränken auf $\{i\} \times S^n$ liefert für $i = 0, 1$ dann die obigen Abbildungen $\varphi_i$. Somit stellt $\Phi$ eine Homotopie zwischen $\varphi_0$ und $\varphi_1$ dar.

Um Surjektivität zu zeigen, sei $\varphi\colon \dot{N} \to MB_k$ gegeben. Wir betrachten

$$B_k \cong \left\{ v \in c_k^* VO(k) \;\middle|\; v = 0 \right\} \subset c_k^* DVO(k)$$

als Unterraum von $MB_k$. Es seien $BO_i(k) \subset BO(k)$ die trivialisierenden Teilmengen aus (6.8) und $U_i = c_k^{-1}(BO_i(k)) \subset B_k$, dann ist $V_i = c_k^* VO(k)|_{U_i}$ trivial, und $\psi_i\colon V_i \to \mathbb{R}^k$ bezeichne die zugehörige lokale Trivialisierung. Da $\dot{N}$ kompakt ist, wird $\operatorname{im}\varphi$ von $MB_k \setminus B_k$ und endlich vielen der Mengen $DV_i \setminus SV_i \subset MB_k$ überdeckt. Man kann $\varphi$ daher wegen des Transversalitätssatzes 6.65

sukzessive durch homotope Abbildungen so ersetzen, dass für diese endlich vielen Indizes $i$ die zusammengesetzten Abbildungen

$$\varphi^{-1}(DV_i \setminus SV_i) \xrightarrow{\varphi} DV_i \setminus SV_i \xrightarrow{\psi_i} \mathbb{R}^k$$

den Nullpunkt 0 als regulären Wert besitzen. Dabei modifiziert man $\varphi$ immer nur auf kompakten Teilmengen von $N$. Wir dürfen $\varphi$ als eine zu $B_k \subset MB_k$ transversale Abbildung auffassen.

Die Urbilder von 0 unter den Abbildungen $\psi_i \circ \varphi$ setzen sich dann zusammen zu einer kompakten Untermannigfaltigkeit $M = \varphi^{-1}(B_k) \subset N \subset \dot{N}$. Außerdem induziert $\varphi$ eine Abbildung $\Theta\colon \nu_N M \to c_k^* VO(k)$ über $\vartheta = \varphi|_M\colon M \to B_k$. Somit haben wir $\varphi$ eine $m$-dimensionale $\mathbb{B}$-Untermannigfaltigkeit von $N$ zugeordnet. Man überprüft leicht, dass $(M, \vartheta)$ ein Urbild von $[\varphi]$ unter der obigen Abbildung $\Omega_G(N) \to [\dot{N}, MB_k]$ darstellt.

Zur Injektivität seien $(M_i, \vartheta_i)$ zwei $\mathbb{B}$-Untermannigfaltigkeiten von $N$ für $i = 0, 1$, und $\varphi_i\colon \dot{N} \to MB_k$ seien wie oben konstruiert. Es sei $\Phi\colon I_+ \wedge \dot{N} \to MB_k$ eine Homotopie zwischen $\varphi_0$ und $\varphi_1$. Wie oben können wir $\Phi$ relativ zu $(\partial I)_+ \wedge \dot{N}$ transversal zum Nullschnitt $B_k \subset MB_k$ deformieren. Dann ist $W = \Phi^{-1}(B_k) \subset I \times N$ ein $\mathbb{B}$-Bordismus zwischen $(M_0, \vartheta_0)$ und $(M_1, \vartheta_1)$ wird.

Damit ist gezeigt, dass die obige Abbildung $\Omega_G(N) \to [\dot{N}, MG]$ bijektiv ist. Wie in Bemerkung 3.87 ist $\Omega_G(N \times \mathbb{R}^\ell) \to [S^\ell \dot{N}, MG]$ ein Halbgruppenhomomorphismus für $\ell \geq 1$, insbesondere ist $\Omega_G(\mathbb{R}^\ell \times N)$ dann sogar eine Gruppe. Aus der obigen Konstruktion ergibt sich auch die Aussage über den Stabilisierungshomomorphismus $\Omega^k_{\mathbb{B}}(N) \to \Omega^{k+1}_{\mathbb{B}}(N \times \mathbb{R})$ . □

Um Bordismus als (unreduzierte) Homologietheorie zu verstehen, gehen wir vor wie in Definition 3.93, gehen aber jetzt von $\mathbb{B}$-Mannigfaltigkeiten aus, dargestellt als Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$ wie in Definition 6.62. Bordismen zwischen ihnen definieren wir wie in Definition 6.64.

6.70. Definition. Es sei $\mathbb{B}$ eine stabile lineare Struktur, es sei $X$ ein topologischer Raum, und es sei $k \geq 0$.

(1) Ein *singulärer $\mathbb{B}$-$k$-Zykel* $(M, [\vartheta, \iota], f)$ in $X$ besteht aus einer $k$-dimensionalen $\mathbb{B}$-Mannigfaltigkeit $(M, [\vartheta, \iota])$ und einer stetigen Abbildung $f\colon M \to X$.
(2) Zwei singuläre $\mathbb{B}$-$k$-Zykel $(M_i, [\vartheta_i, \iota_i], f_i)$ mit $i = 0, 1$ heißen $\mathbb{B}$-*bordant* in $X$, wenn ein $\mathbb{B}$-Bordismus $(W, [\bar{\vartheta}, \bar{\iota}])$ zwischen ihnen und eine Abbildung $F\colon W \to X$ mit $F|_{M_i} = f_i$ existiert.
(3) Die Menge aller $\mathbb{B}$-Bordismusklassen $[(M, [\theta, \iota], f)]$ in $X$ wird mit $\Omega^{\mathbb{B}}_k(X)$ bezeichnet. Für jede stetige Abbildung $g\colon X \to Y$ erhalten wir eine Abbildung $g_*\colon \Omega^{\mathbb{B}}_k(X) \to \Omega^{\mathbb{B}}_k(Y)$ via

$$g\big([(M, \theta, f)]\big) = [(M, \theta, g \circ f)] \ .$$

Man sieht leicht, dass $g_*$ in (3) auch Bordismen $(W, [\bar{\vartheta}, \bar{\iota}], F)$ korrekt auf Bordismen $(W, [\bar{\vartheta}, \bar{\iota}], g \circ F)$ in $Y$ abbildet. Auf diese Weise wird $\Omega^{\mathbb{B}}_k$ zu einem kovarianten Funktor. Die $\mathbb{B}$-Bordismusklassen bilden eine abelsche Halbgruppe unter disjunkter Vereinigung mit neutralem Element $\emptyset$.

Man beachte die Notation: wir haben soeben $\Omega^{\mathbb{B}}_k(X)$ definiert, im Gegensatz zu den $\Omega^k_{\mathbb{B}}(N)$, $\Omega_{SO(k)}(N)$ und $\Omega_{U(k)}(N)$ aus Definition 6.64. Ein wichtiger Unterschied besteht darin, dass wir in Definition 6.64 das relative Normalenbündel von $M$ in einer Mannigfaltigkeit $N$ betrachtet haben, während es hier um das stabile Normalenbündel von $M$, also die $K$-Theorie-Klasse von $\nu M$ im umgebenden Raum $\mathbb{R}^n$ geht, und $M$ erst anschließend nach $X$ abgebildet wird.

Die Pontryagin-Thom-Konstruktion zeigt, dass $\Omega^{\mathbb{G}}_\bullet$ eine allgemeine unreduzierte Homologietheorie ist, siehe Satz 3.95 für den gerahmten Fall. Wir erinnern wir uns an Satz 5.38.

6.71. Folgerung. *Es sei $\mathbb{B}$ eine stabile lineare Struktur, es sei $X$ ein topologischer Raum, und $k \geq 0$. Dann gilt*

$$\Omega^{\mathbb{B}}_k(X) \cong MB_k(X) = \widetilde{MB}_k(X_+) \ .$$

Beweis. Es sei $(M, [\vartheta, \iota])$ eine $k$-dimensionale $\mathbb{B}$-Mannigfaltigkeit, mit dem Satz 6.60 von Whitney repräsentiert als Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Außerdem sei $f\colon M \to X$ gegeben. Für $a\colon D\nu \to \mathbb{R}^n$ wie in Satz 6.68 definieren wir $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to MG_{n-k} \wedge X_+$ durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} \big(f(p), \Theta(v)\big) \in X \times c^*_{n-k}\big(DVO(n-k) \setminus SVO(n-k)\big) & \text{falls } x = a(v) \text{ mit } v \in D\nu_p M, \\ * & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Abbildung ist stetig und lässt sich stetig auf $S^n$ fortsetzen. Analog verfahren wir mit $\mathbb{B}$-Bordismen in $X$. Stabilisierung entspricht dem Übergang von $\mathbb{R}^n$ zu $\mathbb{R}^{n+1}$, und macht aus $\varphi$ bis auf Homotopie die Abbildung

$$S^{n+1} \xrightarrow{S\varphi} SMB_{n-k} \xrightarrow{s_{n-k}} MB_{n+1-k}\,.$$

Nach Satz 5.38 erhalten wir ein Element von $MB_k(X_+) = \operatorname{colim} \pi_n(MB_{n-k} \wedge X_+)$.

Zur Surjektivität der Abbildung $\Omega_k^{\mathbb{B}}(X) \to MB_k(X_+)$ sei $\varphi\colon S^n \to MB_{n-k} \wedge X_+$ gegeben, und es sei $U = \varphi^{-1}((MB_{n-k} \wedge X_+) \setminus \{*\}) \subset \mathbb{R}^n$. Wie im Beweis von Satz 6.69 lässt sich $\varphi$ auf einer kompakten Teilmenge von $U$ transversal zu $B_{n-k}$ deformieren, so dass $M = \varphi^{-1}(B_{n-k} \times X) \subset \mathbb{R}^n$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit wird. Die Mannigfaltigkeit $M$ trägt eine $\mathbb{B}$-Struktur $\vartheta$ wie gehabt, und $f = p_X \circ \varphi|_M$ liefert die gesuchte Abbildung nach $X$. Genauso verfahren wir mit Homotopien, und erhalten Injektivität. $\square$

6.72. Bemerkung. Historisch gesehen war orientierter Bordismus der erste Versuch von Poincaré, so etwas wie „Homologie“ zu definieren. Mit den Arbeiten von Pontryagin und Thom können wir Bordismus mittlerweile als allgemeinen Homologiefunktor verstehen. Das Hauptproblem mit dieser Definition besteht aber darin, dass das Dimensionsaxiom verletzt ist. Während nämlich alle orientierten $k$-Mannigfaltigkeiten für $1 \le k \le 3$ orientiert nullbordant sind, ist $\Omega_4^{SO} \cong \widetilde{MSO}_4(S^0) \cong \mathbb{Z}$ und wird erzeugt von $\mathbb{C}P^2$. Dennoch ist es oft genug möglich, Homologieklassen durch singuläre Zykel darzustellen.

Was sich beim Versuch, Homologie zu definieren, als Manko herausgestellt hat, erweist sich bei der Klassifikation von Mannigfaltigkeiten als wertvolles Hilfsmittel. Typische Invarianten von Bordismusklassen sind charakteristische Zahlen. Mit ihrer Hilfe erkennt man, dass die Gruppen $\Omega_{4k}^{SO}$ allesamt unendlich sind. Diese charakteristischen Zahlen spielen eine gewisse Rolle in der Differentialtopologie, beispielsweise in der Indextheorie.

Schließlich kann bei geeigneter Wahl eines Raumes $X$ Bordismustheorie auch für kompliziertere Klassifikationsprobleme genutzt werden. Gesucht seien beispielsweise geschlossene orientierte $k$-dimensionale Mannigfaltigkeiten $M$ mit einem komplexen Geradenbündel $L \to M$ bis auf Bordismen $W$, auf die sich $L$ fortsetzen lässt. Da Geradenbündel auf $L$ nach Satz 6.47 durch Abbildungen nach $BU(1) \cong \mathbb{C}P^\infty$ beschrieben werden, interessieren wir uns für die Bordismusgruppe $\mathbb{M}SO_k(BU(1)_+)$. Verallgemeinerungen des universellen Koeffiziententheorems helfen bei der Bestimmung solcher Bordismusgruppen.

6.73. Bemerkung. Wir wollen jetzt Produkte betrachten. Wichtig ist dabei, dass die direkte Summe zweier $\mathbb{B}$-Vektorbündel wieder ein $\mathbb{B}$-Vektorbündel ist. Als erstes wählen wir dazu Abbildungen $m\colon BO(k) \times BO(\ell) \to BO(k+\ell)$, so dass darüber Abbildungen von Vektorbündeln $VO(k) \times VO(\ell) \to VO(k+\ell)$ existieren. Anschließend wählen wir analog Abbildungen $\mu\colon B_k \times B_\ell \to B_{k+\ell}$, so dass

$$\begin{tikzcd} B_k \times B_\ell \arrow[r, "\mu_{k,\ell}"] \arrow[d, "c_k \times c_\ell"'] & B_{k+\ell} \arrow[d, "c_{k+\ell}"] \\ BO(k) \times BO(\ell) \arrow[r, "m_{k,\ell}"] & BO(k+\ell) \end{tikzcd}$$

kommutiert. All diese Abbildungen müssen gewisse Verträglichkeiten untereinander und mit den Abbildungen $b_k$, $B\iota_k$ erfüllen, auf die wir hier noch nicht eingehen wollen. Dann existieren Abbildungen von Vektorbündeln und Thom-Räumen

$$c_k^* VO(k) \times c_\ell^* VO(\ell) \longrightarrow c_{k+\ell}^* VO(k+\ell) \qquad \text{und} \qquad MB_k \wedge MB_\ell \longrightarrow MB_{k+\ell} \ .$$

Wir können zunächst ein Produkt von $\mathbb{B}$-Mannigfaltigkeiten $(M_i, [\vartheta_i, \iota_i])$ mit $i = 0, 1$ einführen, nämlich

$$(M_0, [\vartheta_0, \iota_0]) \times (M_1, [\vartheta_1, \iota_1]) = \big(M_0 \times M_1, [\mu_{k,\ell} \circ (\vartheta_0 \times \vartheta_1), \iota_0 \times \iota_1]\big) \ ,$$

da $\mu_{k,\ell} \circ (\vartheta_0 \times \vartheta_1)$ eine $\Bbbk$-Struktur auf dem Normalenbündel $\nu\iota_0 \times \nu\iota_1$ definiert. Es ist mit Bordismen verträglich. Falls $M_0$ Kodimension $k$ in $\mathbb{R}^m$ und $M_1$ Kodimension $\ell$ in $\mathbb{R}^n$ hat, liefert die Pontryagin-Thom-Konstruktion Elemente $[\varphi_0] \in \pi_m(MB_k)$ und $[\varphi_1] \in \pi_n(MB_\ell)$, und das Produkt wird dargestellt durch das Bild unter der Abbildung

$$\pi_m(MB_k) \times \pi_n(MB_\ell) \xrightarrow{\wedge} \pi_{m+n}(MB_k \wedge MB_\ell) \longrightarrow \pi_{m+n}(MB_{k+\ell}) \ .$$

Völlig analog erhalten wir ein äußeres Produkt von Kobordismen in Mannigfaltigkeiten $N_0$ und $N_1$, dargestellt durch die Abbildung

$$\times \colon [\dot{N}_0, MB_k] \times [\dot{N}_1, MB_\ell] \xrightarrow{\wedge} \big[\dot{N}_0 \wedge \dot{N}_1, MB_k \wedge MB_\ell\big] \longrightarrow \big[(N_0 \times N_1)^{\cdot}, MB_{k+\ell}\big] \ .$$

Auch hier ist das Produkt zweiter Untermannigfaltigkeiten das kartesische Produkt in $N_0 \times N_1$ mit der passenden normalen $\mathbb{B}$-Struktur.

Um ein inneres Produkt zu konstruieren, sei $\Delta \colon N \to N \times N$ eine geeignete Approximation der Diagonalabbildung, transversal zum kartesischen Produkt der betrachteten Untermannigfaltigkeiten. Dann erhalten wir mit Proposition 6.66 (1) das innere Produkt

$$\smile \colon [\dot{N}, MB_k] \times [\dot{N}, MB_\ell] \xrightarrow{\times} \big[\dot{N} \wedge \dot{N}, MB_{k+\ell}\big] \xrightarrow{\Delta^*} \big[\dot{N}, MB_{k+\ell}\big] \ .$$

Fall $M_0$ zu $M_1$ transversal ist, können wir für $\Delta$ die Diagonalbbildung selbst wählen. In diesem Fall liegt $(M_0, \vartheta_0) \smile (M_1, \vartheta_1)$ die Untermannigfaltigkeit $M_0 \cap M_1$ der Kodimension $k+\ell$ zugrunde. Aus dem kartesischen Produkt wird also der Durchschnitt. Wenn wir bis hier alles korrekt definiert haben, ist das neutrale Element für das innere Produkt gerade die Mannigfaltigkeit $N$ selbst, vorausgesetzt sie ist kompakt, aufgefasst als Untermannigfaltigkeit der Kodimension 0 mit trivialer $\mathbb{B}$-Struktur.

Wenn wir stabilisieren, können wir auch Untermannigfaltigkeiten von $N \times \mathbb{R}^m$ betrachten, die größere Dimension als $N$ haben. Als Kobordismusklassen haben diese Mannigfaltigkeiten negativen Index. Wir erhalten also einen Ring $\Omega_{\mathbb{B}}^\bullet(N)$ mit Elementen vom Grad $k \le \dim N$.

Das Schräg-Produkt $\Omega_{n-k}^{\mathbb{B}}(N \times X) \times \Omega_{\mathbb{B}}^\ell(N) \to \Omega_{n-k-\ell}^{\mathbb{B}}(X)$ entspricht der Abbildung

$$/ \colon \pi_n(MB_k \wedge \dot{N} \wedge X_+) \times [\dot{N}, MB_\ell] \longrightarrow \pi_n(MB_k \wedge MB_\ell \wedge X_+) \longrightarrow \pi_n(MB_{k+\ell} \wedge X_+)$$

$$\text{mit} \quad ([f], [\varphi]) \ \longmapsto \ \big(S^n \xrightarrow{f} MB_k \wedge \dot{N} \wedge X_+ \xrightarrow{\mathrm{id}\wedge\varphi\wedge\mathrm{id}} MB_\ell \wedge MB_k \wedge X_+ \longrightarrow MB_{k+\ell} \wedge X_+\big) \ .$$

Es bildet einen $(n-\ell)$-Zykel und einen $k$-Kozykel auf einen $(n-k-\ell)$-Zykel ab. Mit Hilfe der Diagonalabbildung erhalten wir das Cap-Produkt

$$\frown \colon \pi_n(MB_k \wedge \dot{N}) \times [\dot{N}, MB_\ell] \xrightarrow{\Delta_* \times \mathrm{id}} \pi_n(MB_k \wedge \dot{N} \wedge \dot{N}) \times [\dot{N}, MB_\ell] \xrightarrow{/} \pi_n(MB_{k+\ell} \wedge \dot{N}) \ .$$

Wenn $f \colon M_0 \to N$ zu $M_1 \subset N$ transversal ist, liegt dem Cap-Produkt wieder der Durchschnitt zugrunde, genauer die Einschränkung $f \colon f^{-1}(M_1) \to N$. Falls $N$ kompakt ist, wirkt $N$ wieder als neutrales Element.

Zu guter Letzt wollen wir annehmen, dass $N$ selbst eine kompakte $n$-dimensionale $\mathbb{B}$-Mannigfaltigkeit ist. Dann können wir $\mathrm{id}_N\colon N \to N$ als *Fundamentalklasse* $[N] \in \Omega_n^{\mathbb{B}}(N)$ betrachten. Wir erhalten einen Isomorphismus

$$[N] \frown \cdot : \Omega_{\mathbb{B}}^k(N) \longrightarrow \Omega_{n-k}^{\mathbb{B}}(N) \ ,$$

die sogenannte *Poincaré-Dualität.*

6.74. Beispiel. Wir wollen uns den Unterschied zwischen Bordismus und Kobordismus anhand von orientierten Mannigfaltigkeit — genauer, Mannigfaltigkeiten mit $\mathbb{BSO}$-Struktur — anschauen.

Es sei $N$ zunächst eine beliebige, nicht notwendig orientierte, $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Ein $k$-Zykel in $N$ besteht aus einer Abbildung $f\colon M \to N$, wobei $M$ kompakt und $k$-dimensional ist mit oriertem stabilen Normalenbündel. Nach Bemerkung 6.63 (2) legt das eine Orientierung auf $TM$ fest. Man sagt dann auch, dass $M$ selbst orientiert ist.

Auf der anderen Seite ist ein $\ell$-Kozykel eine $(n-\ell)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit $L \subset N$, deren Normalenbündel $\nu_N L$ in $N$ orientiert ist. Man sagt auch, $L$ sei *relativ zu $N$ orientiert.* Wenn $N$ selbst eine Orientierung trägt, erhält man analog zu Bemerkung 6.63 (2) auch eine Orientierung von $L$. Das entspricht gerade der Poinc'are-Dualität $\Omega_{\mathbb{B}}^{n-\ell}(N) \cong \Omega_\ell^{\mathbb{B}}(N)$.

Zu guter Letzt darf die Dimension $k$ eines Zykels beliebig groß sein. Das bedeutet, das wegen Poincaré-Dualität auch Kozykel beliebig hohe Dimension haben dürfen (und demnach negativen Grad $n-k$). Um $f\colon M \to N$ als Kozykel zu realisieren, betten wir $M$ zusätzlich mit dem Satz 6.60 in den $\mathbb{R}^N$ ein und kombinieren beides zu einer Abbildung $M \hookrightarrow N \times \mathbb{R}^N$, dargestellt nach Pontryagin-Thom durch $[S^N \wedge \dot{N}, MB_{N+n-k}]$. Der Grad dieses Kozykels ist somit $(N+n-k) - N = n-k$.

## 6.j. Übungen zu Kapitel 6

*Übungen zu Abschnitt 6.a.*

6.75. Übung. Beweisen Sie die Exaktheit der Mayer-Vietoris-Sequenz 6.3 für Kohomologie-Funktoren.

*Übungen zu Abschnitt 6.b.*

6.76. Übung. Es seien inverse Systeme $(A_i, f_i)$, $(A_i', f_i')$ und $(A_i'', f_i'')$ wie in Bemerkung 6.12 gegeben.

(1) Zeigen Sie, dass alle $f_i'$ surjektiv sind. Folgern Sie daraus

$$\lim{}^1 A_i' = 0 \ .$$

(2) Zeigen Sie, dass für jedes $i$ ein $j \geq i$ existiert mit $f_{i+1}'' \circ \cdots \circ f_k'' = 0$ für alle $k \geq j$, falls $(A_i, f_i)$ die Mittag-Leffler-Bedingung erfüllt. Folgern Sie, dass dann

$$\lim{}^1 A_i'' = 0 \ .$$

6.77. Übung. Schreiben Sie das inverse System aus Beispiel 6.8 als

$$(A_\bullet', f_\bullet) = \big(3^0\mathbb{Z} \hookleftarrow 3^1\mathbb{Z} \hookleftarrow 3^2\mathbb{Z} \hookleftarrow \cdots\big)$$

mit den offensichtlichen Inklusionen und betrachten Sie die inversen Systeme $A_i = \mathbb{R}$, $A_i'' = \mathbb{R}/3^i\mathbb{Z}$, so dass Sie eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow (A_\bullet', f_\bullet') \longrightarrow (A_\bullet, f_\bullet) \longrightarrow (A_\bullet'', f_\bullet'') \longrightarrow 0$$

von inversen Systemen erhalten.

(1) Zeigen Sie, dass $(A_\bullet, f_\bullet)$ und $(A_\bullet'', f_\bullet'')$ die Mittag-Leffler-Bedingung erfüllen.
(2) Berechnen Sie $\lim^1 A_i'$ mit der langen exakten Sequenz aus Satz 6.10.

*Übungen zu Abschnitt 6.c.*

6.78. Übung. Es seien $X = \mathbb{R}P^2 \times S^3$ und $Y = S^2 \times \mathbb{R}P^3$.

(1) Zeigen Sie, dass $X$ und $Y$ isomorphe Homotopiegruppen haben.
(2) Bestimmen Sie die ganzzahligen Homologiegruppen von $X$ und $Y$.
(3) Bestimmen Sie die ganzzahligen Kohomologiegruppen von $X$ und $Y$.

6.79. Übung. Konstruieren Sie die Stabilisierungs-Isomorphismen für zelluläre Homologie und Kohomologie.

(1) Geben Sie zuerst mit Hilfe von Proposition 5.78 Isomorphismen
$$\phi_n \colon \tilde{C}_n^{\mathrm{CW}}(X;A) \longrightarrow \tilde{C}_{n+1}^{\mathrm{CW}}(S^1 \wedge X;A)$$
mit $\phi_{n-1} \circ d_n^{\mathrm{CW}} = -d_{n+1}^{\mathrm{CW}} \circ \phi_n$ an.
(2) Zeigen Sie, dass diese mit den Isomorphismen aus Satz 5.10 beziehungsweise Folgerung 6.4 übereinstimmen. *Hinweis:* Betrachten Sie die Kofaserung $X \hookrightarrow CX = (I,0) \wedge X$ und gehen Sie vor wie im Beweis von Satz 3.42 (4).

6.80. Übung. Bestimmen Sie für $1 \leq k \leq n$ die folgenden Kronecker-Produkte.
$$\tilde{H}^k_{\mathrm{CW}}(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z}) \times \tilde{H}_k^{\mathrm{CW}}(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}\,, \tag{a}$$
$$\tilde{H}^k_{\mathrm{CW}}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}) \times \tilde{H}_k^{\mathrm{CW}}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}\,, \tag{b}$$
$$\tilde{H}^k_{\mathrm{CW}}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2) \times \tilde{H}_k^{\mathrm{CW}}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\,, \tag{c}$$
$$\tilde{H}^k_{\mathrm{CW}}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2) \times \tilde{H}_k^{\mathrm{CW}}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\,. \tag{d}$$

6.81. Übung. Betrachten Sie *einen* der Räume $X_1$, $X_2$ aus Aufgabe 2.88 mit der dort angegebenen CW-Struktur. Bestimmen Sie die zellulären Randoperatoren und berechnen Sie die unreduzierte zelluläre Homologie und Kohomologie dieses Raumes.

6.82. Übung. Es sei $R$ ein Hauptidealring und $A$ ein $R$-Modul. Dann existiert für jeden topologischen Raum $X$ eine natürliche exakte Sequenz
$$0 \longrightarrow \tilde{H}_k(X;R) \otimes_R A \longrightarrow \tilde{H}_k(X;A) \longrightarrow \mathrm{Tor}_R\big(\tilde{H}_{k-1}(X;R), A\big) \longrightarrow 0$$
wie in Satz 5.71. Diese Sequenz spaltet (allerdings nicht natürlich).

*Hinweis:* Beweisen Sie diese Aussage zunächst für CW-Komplexe mit den Methoden aus dem Beweis von Satz 6.16. Beutzen Sie dann Natürlichkeit und die Invarianz der gewöhnlichen Homologie unter schwachen Äquivalenzen.

6.83. Übung. Es seien $X$, $Y$ CW-Komplexe und $R$ ein Hauptidealring. Formulieren und beweisen Sie eine Künneth-Formel für $\tilde{H}^\bullet_{\mathrm{CW}}(X \wedge Y;R)$. Nehmen Sie dazu an, dass einer der beiden Faktoren *von endlichem Typ* ist, das heißt, in jeder Dimension nur endlich viele Zellen besitzt.

6.84. Übung. Es sei $X$ ein zusammenhängender CW-Komplex mit $\tilde{H}^\bullet(X) = 0$.

(1) Folgern Sie aus dem universellen Koeffiziententheorem 6.16, dass $\tilde{H}_\bullet(X) = 0$.
(2) Sei $X$ außerdem einfach zusammenhängend. Folgern Sie aus dem homologischen Satz 5.50 von Whitehead, dass $X$ zusammenziehbar ist.

*Übungen zu Abschnitt 6.d.*

6.85. Übung. Beweisen Sie einige der fehlenden Aussagen in Proposition 6.21.

(1) Zeigen Sie zunächst einige der Aussagen in (3) und (5) zum Smashprodukt.
(2) Beweisen Sie dann die zweite Aussage in (4) auf Ketten- / Kokettenniveau.
(3) Leiten Sie daraus alle anderen Aussagen über das Schrägprodukt ab.

6.86. Übung. Bestimmen Sie für alle $n \geq 1$ die Kohomologieringe (insbes. ihre multiplikative Struktur)

$$\tilde{H}^\bullet_{\mathrm{CW}}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}) \qquad \text{und} \qquad \tilde{H}^\bullet_{\mathrm{CW}}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2)\ .$$

6.87. Übung. Es bezeichne $[\mathbb{C}P^n] \in H_{2n}(\mathbb{C}P^n;R)$ die von der $2n$-Zelle erzeugte Homologieklasse. Zeigen Sie, dass $\big(H_\bullet(\mathbb{C}P^n;R),\frown\big)$ ein freier $(H^\bullet(\mathbb{C}P^n;R),\smile)$-Modul mit Erzeuger $[\mathbb{C}P^n]$ ist.

*Hinweis:* Bestimmen Sie zunächst das Kronecker-Produkt $\langle[\mathbb{C}P^n],\omega^n\rangle$.

6.88. Übung. Wir betrachten die Räume aus Beispiel 5.82.

(1) Berechnen Sie die Kohomologie-Algebra von $S^2 \times S^4$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ oder einem Körper $\Bbbk$, und zeigen Sie insbesondere, dass das Cup-Produkt von zwei Kohomologieklassen von Grad 2 verschwindet.
(2) Folgern Sie, dass $\mathbb{C}P^3$ und $S^2 \times S^4$ nicht homotopieäquivalent sind.

*Übungen zu Abschnitt 6.e.*

6.89. Übung. Es bezeichne $H^\bullet(\,\cdot\,;\mathbb{Z})$ die unreduzierte Kohomologie zum Eilenberg-Mac Lane-Spektrum $\mathbb{H}\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass für jeden topologischen Raum $X$ gilt

$$H^0(X;\mathbb{Z}) = [X,\mathbb{Z}] \qquad \text{und} \qquad H^1(X;\mathbb{Z}) = [X,S^1]\ .$$

6.90. Übung. Zeigen Sie: die radiale Projektion vom „topologischen Huhn“ $X$ aus Beispiel 4.52 auf $S^1$ ist nicht zusammenziehbar. Folgern Sie, dass $\tilde{H}^1(X) = [X,H\mathbb{Z}_1] \neq 0$ mit der „naiven“ Interpretation von $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ gilt, obwohl $X$ schwach zusammenziehbar ist.

6.91. Übung. Sei $\mathbb{E}$ ein $\Omega$-Spektrum und $B \subset A \subset X$ seien beliebige Räume. Beweisen Sie die Exaktheit einer der Sequenzen

$$\cdots \longleftarrow E_k(X,A) \longleftarrow E_k(X,B) \longleftarrow E_k(A,B) \xleftarrow{\partial} E_{k+1}(X,A) \longleftarrow \cdots\ ,$$
$$\cdots \longrightarrow E^k(X,A) \longrightarrow E^k(X,B) \longrightarrow E^k(A,B) \xrightarrow{\delta} E^{k+1}(X,A) \longrightarrow \cdots\ .$$

Orientieren Sie sich dazu an Übung 3.110.

*Übungen zu Abschnitt 6.f.*

6.92. Übung. Zeigen Sie: Die Konstruktionen vor Definition 6.45, die jeder Gruppe $G$ einen schwach zusammenziehbaren Raum $EG$ mit freier $G$-Wirkung und einen klassifizierenden Raum $BG$ zuordnen, so dass $BG = EG/G$, sind Funktoren von der Kategorie der topologischen Gruppen in die Kategorie $kw\mathcal{H}$.

6.93. Übung. Es sei $H \subset G$ Untergruppe einer topologischen Gruppe. Zeigen Sie, dass der Raum $EG/H$ zu $BH$ homotopieäquivalent ist. Folgern Sie, dass der Quotient $G/H$ die Homotopiefaser der natürlichen Abbildung $BH \to BG$ ist.

6.94. Übung. Überlegen Sie sich, dass die Menge der positiv definiten selbstadjungierten Matrizen über $\Bbbk = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ konvex ist. Folgern Sie, dass jedes $\Bbbk$-Vektorbündel vom Rang $r$ über einem CW-Komplex eine $U(r,\Bbbk)$-Struktur trägt. Da $BGL_r(\Bbbk)$ als CW-Komplex dargestellt werden kann, gibt es daher eine klassifizierende Abbildung $BGL_r(\Bbbk) \to BU(r,\Bbbk)$ für das tautologische Bündel.

6.95. Übung. Wir betrachten die Gruppe $O(1) \cong \mathbb{Z}/2 \cong S^0$. Zeigen Sie:

(1) Der Raum $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist homöomorph zum Verbund von $n$ Kopien der $S^0$.
(2) Der Raum $BO(1)$ ist homotopieäquivalent zu $\mathbb{R}P^\infty \cong K(\mathbb{Z}/2,1)$, siehe Beispiel 5.42 (4).
(3) Für jeden topologischen Raum gilt $\mathrm{Bun}_{O(1)}(X) \cong H^1(X,\mathbb{Z}/2)$.

Die einem reellen Vektorbündel $V \to X$ vom Rang 1 entsprechende Kohomologieklasse $w_1(V) \in H^1(X, \mathbb{Z}/2)$ heißt auch *erste Stiefel-Whitney-Klasse.*

6.96. Übung. Wir betrachten die Gruppe $U(1) \cong SO(2) \cong S^1 \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(1) Der Raum $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ ist homöomorph zum Verbund von $n$ Kopien der $S^1$.
(2) Der Raum $BU(1)$ ist homotopieäquivalent zu $\mathbb{C}P^\infty \cong K(\mathbb{Z}, 2)$, siehe Beispiel 5.42 (5).
(3) Für jeden topologischen Raum gilt $\mathrm{Bun}_{U(1)}(X) \cong H^2(X, \mathbb{Z})$.

Die einem komplexen Vektorbündel $V \to X$ vom Rang 1 entsprechende Kohomologieklasse $c_1(V) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ heißt auch *erste Chern-Klasse.*

*Übungen zu Abschnitt 6.h.*

6.97. Übung. Die übliche Wirkung von $U(n+1)$ auf $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ induziert eine Abbildung

$$p\colon U(n+1) \ni g \mapsto g \cdot e_1 \in S^{2n+1} \ .$$

(1) Zeigen Sie, dass $p$ ein Faserbündel mit Faser $U(n) \subset U(n+1)$ ist.
(2) Folgern Sie, dass $\iota_n\colon U(n) \hookrightarrow U(n+1)$ eine $(2n)$-zusammenhängende Abbildung ist.
(3) Bestimmen Sie $\pi_k(U(n))$ für $k = 0, 1$ und alle $n$.
(4) Aufgrund von Bott-Periodizität gilt

$$\varinjlim \pi_k(U(n)) = \varinjlim \pi_{k+2}(U(n))$$

für alle $k$, wobei der Limes über $n$ läuft. Welche $\pi_k(U(n))$ können Sie mit dieser Information bestimmen?

**Übungen zu Abschnitt 6.i.**

6.98. Übung. Es seien $V \to X$, $W \to Y$ Euklidische Vektorbündel. Zeigen Sie:

(1) Eine Abbildung Euklidischer Vektorbündel im Sinne von Definition 6.37 induziert eine Abbildung von Thom-Räumen $MV \to MW$.
(2) Das kartesische Produkt $V \times W$ ist ein Euklidisches Vektorbündel über $X \times Y$ mit Thom-Raum $MV \wedge MW$.

6.99. Übung. Es sei $N$ eine Mannigfaltigkeit mit Untermannigfaltigkeiten $M_0$, $M_1$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen aus Bemerkung 6.73:

(1) Die Diagonalabbildung $\Delta\colon N \to N \times N$ ist genau dann zu $M_0 \times M_1 \subset N \times N$ transversal, wenn $M_0$ zu $M_1$ transversal ist.
(2) In jedem Fall gilt $\Delta^{-1}(M_0 \times M_1) = M_0 \cap M_1$.

KAPITEL 7

# Ringspektra und Multiplikative Kohomologiefunktoren

In diesem Kapitel geht es um eine allgemeine Sprache für Produkte, wie wir sie zur gewöhnlichen Kohomologie, zur $K$-Theorie und zu Kobordismen bereits kennengelernt haben. Dazu führen wir zum einen eine axiomatische Beschreibung multiplikativer (Ko-) Homologiefunktoren ein. Zum anderen machen wir aus den CW-Spektren aus Definition 5.36 eine Kategorie, indem wir Abbildungen hinzufügen. Anschliësend definieren wir auch reduzierte Pdoukte von Spektren, in Anlehnung an die Konstruktionen mit Thom-Spektren in Bemerkung 6.73. Ein multiplikativer (Ko-) Homologiefunktor lässt sich durch ein Spektrum $\mathbb{E}$ mit einer Abbildung $\mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ beschreiben.

Auf der einen Seite ist die Kategorie der CW-Spektren sehr technisch. Auf der anderen Seite ist ihre (naive) Homotopiekategorie ein brauchbares Modell für die stabile Homotopiekategorie zur Quillen-Modellstruktur. Es gibt mittlerweile viele andere Kategorien von „Spektren“, in denen sich manche Konstruktionen präzise durchführen lassen, die wir hier nur modulo Homotopien betrachten können. Jede dieser Kategorien erfordert zur Konstruktion einen gewissen technischen Aufwand. Sie alle liefern am Ende äquivalente stabile Homotopie-Kategorien.

## 7.a. Die stabile CW-Kategorie

Die Hauptidee bei einem Spektrum ist wie bei jedem „Grenzwert“, dass es nie auf den „Anfangsteil“ des Spektrums ankommt. Wir beginnen zunächst mit der Kategorie der endlichen punktierten CW-Komplexe. Diese Kategorie hat viele schöne Eigenschaften. Ausgehend hiervon lässt sich Boardmans Konstruktion nach Vogt in drei Schritten durchführen.

(1) Zunächst „stabilisieren“ wir, das heißt, wir ersetzen die zellulären Abbildungen von $X$ nach $Y$ durch den Kolimes von Abbildungen von $S^nX$ nach $S^nY$. Diesen Schritt können wir auch auffassen als formales Invertieren des Einhängunsfunktors.
(2) Anschließend „vervollständigen“ wir, das heißt, wir gehen zu unendlichen CW-Komplexen über. Als Objekte erhalten wir jetzt die Spektren aus Definition 5.36. Die Abbildungen beschreiben wir in Definition 7.1 unten.
(3) Zu guter Letzt definieren wir Homotopien, indem wir zu einem Spektrum $\mathbb{E}$ ein Zylinderobjekt $\mathbb{E} \wedge I_+$ angeben und Abbildungen $\mathbb{E} \wedge I_+ \to \mathbb{F}$ im Sinne von (2) betrachten.

Wichtig ist die Reihenfolge der Schritte, die zwar zu einer technisch aufwändigen Definition von Abbildungen führt, aber dafür die gewünschten Eigenschaften liefert. Wir werden die obigen Schritte allerdings nicht einzeln betrachten.

Es gibt mehrere Gründe, sich diese Mühe zu machen, und man wird mit einigen guten Eigenschaften belohnt.

(1) Spektra erben viele schöne Eigenschaften von CW-Komplexen. Beispielsweise gilt der Satz 7.11 von Whitehead.
(2) In der Kategorie $\mathcal{SCW}$ der CW-Spektra ist die Einhängung nach Bemerkung 7.2 stets invertierbar. Daher ist jede Konstruktion in dieser Kategorie automatisch stabil.
(3) In der stabilen Homotopiekategorie $\mathcal{HSCW}$ verhält sich jedes Spektrum so wie ein $\Omega$-Spektrum, genauer gesagt, gilt Lemma 7.7. Auf diese Weise kann man jedem Spektrum nicht nur einen Homologie-, sondern auch einen Kohomologiefunktor zuordnen.

(4) In der Kategorie $\mathcal{HSCW}$ lassen sich Morphismen addieren, und nach Bemerkung 7.12 sind endliche Koprodukte gleichzeitig auch Produkte. Somit ist $\mathcal{HSCW}$ additiv.
(5) In der Kategorie der Spektra gibt es wegen Satz 7.14 und Bemerkung 7.16 keinen Unterschied mehr zwischen Faser- und Kofasersequenzen. Genauer gesagt, kann man $\mathcal{HSCW}$ mit der Struktur einer triangulierten Kategorie ausstatten.

Wir betrachten CW-Komplexe immer als Räume mit fixierten Zellen und charakteristischen Abbildungen. Auf der Einhängung eines punktierten CW-Komplexes $X$ fixieren wir die folgende Zellstruktur. Wenn wir den Basispunkt als $-1$-Skelett betrachten, entspricht dabei jeder $n$-Zelle mit charakteristischer Abbildung $\Phi^n\colon D^n \to X$ für $n \geq 0$ eine $(n+1)$-Zelle mit charakteristischer Abbildung $\Phi^{n+1} = s\Phi^n$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
I \times D^n \arrow[d, two heads] & & D^{n+1} \arrow[ll, "\cong"'] \arrow[d] \arrow[dr, "s\Phi^n"] & \\
(I \times D^n)/(\partial I \times D^n) \arrow[r, "\cong"] & S^1 \wedge D^n_+ \arrow[r, "S\Phi^n_+"'] & & SX
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Unter einer *zellulären Inklusion* verstehen wir die Inklusion eines Unterkomplexes. In diesem Sinne präzisieren wir Definition 5.36.

7.1. Definition. Es seien $\mathbb{E} = (E_i, s_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, $\mathbb{F} = (F_i, t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ CW-Spektren.

(1) Eine *strikte Abbildung* $\mathbf{f}\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ von Spektren besteht aus einer Folge zellulärer Abbildungen $f_i\colon E_i \to F_i$, so dass $Sf_i = f_{i+1} \circ s_i$ für alle $i$.
(2) Für $k \in \mathbb{Z}$ ist eine *$k$-Zelle* von $\mathbb{E}$ eine Folge $(e_{i+k})_{i\geq i_0}$ von $(i+k)$-Zellen von $E_i$ mit charakteristischen Abbildungen $\Phi^{i+k}\colon D^{i+k} \to E_i$ für $i \geq i_0 \geq -k$, so dass $\Phi^{i+k+1} = s_i \circ s\Phi^{i+k}_+$, und so dass es keine Zelle $e_{i_0+k-1}$ von $E_{i_0-1}$ gibt, deren Stabilisierung der Zelle $e_{i_0+k}$ von $E_{i_0}$ entspricht. Ein Spektrum mit endlich (abzählbar) vielen Zellen heißt *endlich* (*abzählbar*).
(3) Ein *Unterspektrum* $\mathbb{U}$ eines CW-Spektrums $\mathbb{E}$ ist eine Folge von Unterkomplexen $U_i \subset E_i$ mit $\operatorname{im}(s_i|_{SF_i}) \subset U_{i+1}$. Ein Unterspektrum $\mathbb{U}$ von $\mathbb{E}$ heißt *kofinal,* wenn es zu jeder Zelle $(e_{i+k})_{i\geq i_0}$ ein $j_0 \geq i_0$ gibt, so dass $e_{j+k}$ eine Zelle von $U_j$ ist für alle $j \geq j_0$.
(4) Es seien $\mathbb{E}$ und $\mathbb{F}$ CW-Spektren. Wir definieren den Raum der *Abbildungen* von $\mathbb{E}$ nach $\mathbb{F}$ als
$$\operatorname{Hom}(\mathbb{E}, \mathbb{F}) = \operatorname*{colim}_{\mathbb{U}\subset\mathbb{E} \text{ kofinal}} \left\{ \mathbf{f}\colon \mathbb{U} \to \mathbb{F} \;\middle|\; \mathbf{f} \text{ strikt} \right\} .$$

Die graduierte Kategorie der CW-Spektren und ihrer Abbildungen wird mit $\mathcal{SCW}$ bezeichnet.

In einem kofinalen Unterspektrum taucht jede Zelle irgendwann einmal auf. Die kofinalen Unterspektren eines CW-Spektrum bilden ein gerichtetes System, das heißt, der Durchschnitt zweier kofinaler Unterspektren ist wieder eins. Eine Abbildung $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ zwischen CW-Spektra ist eine Äquivalenzklasse strikter Abbildungen $\mathbf{f}\colon \mathbb{U} \to \mathbb{F}$, wobei $\mathbb{U} \subset \mathbb{E}$ ein kofinales Unterspektrum sei. Dabei heißen zwei solche Abbildungen $\mathbf{f}\colon \mathbb{U} \to \mathbb{F}$ und $\mathbf{g}\colon \mathbb{V} \to \mathbb{F}$ äquivalent, wenn es ein kofinales Unterspektrum $\mathbb{W} \subset \mathbb{U} \cap \mathbb{V}$ gibt, so dass $f_i|_{W_i} = g_i|_{W_i}$ für alle $i$. Der Merkvers hierzu lautet „Erst die Zellen, später die Abbildungen.“

Außerdem enthält das Urbild eines kofinalen Unterspektrums von $\mathbb{F}$ unter einer strikten Abbildung $\mathbf{f}\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ ein kofinales Unterspektrum von $\mathbb{E}$, und ein kofinales Unterspektrum eines kofinalen Unterspektrums von $\mathbb{E}$ ist auch in $\mathbb{E}$ kofinal, siehe Übung 7.53. Aus diesem Grund lassen sich Abbildungen verknüpfen.

7.2. Bemerkung. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ erhalten wir einen Verschiebefunktor $\Sigma^n\colon \mathcal{SCW} \to \mathcal{SCW}$ mit
$$\Sigma^n\mathbb{E} = \mathbb{E}[n] = (E_{i+n}, s_{i+n})_{i\in\mathbb{N}} .$$

Das Spektrum $\mathbb{E} \wedge S^1 = (SE_i, Ss_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ liegt kofinal in $\Sigma\mathbb{E}$, denn $E_i \wedge S^1 \cong SE_i \subset E_{i+1}$. Also ist es uns gelungen, den Einhängungsfunktor $S\colon \mathcal{CW} \to \mathcal{CW}$ zu invertieren.

Zu jedem CW-Komplex $X$ gehört das Einhängungsspektrum $\mathbb{S}X = (S^iX, S^{i+1}\mathrm{id}_X)_i$, und jede zelluläre Abbildung $f\colon X \to Y$ liefert durch Einhängen eine strikte Abbildung von Spektra. Jedes endliche CW-Spektrum $\mathbb{E}$ ist isomorph zu $(\mathbb{S}E_n)[n]$, denn da es nur endlich viele Zellen gibt, gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$, so dass $E_n$ bereits alle Zellen enthält, und $(\mathbb{S}E_n)[n] \subset \mathbb{E}$ ist kofinal. Das gilt insbesondere auch für alle kofinalen Unterspektren eines endlichen CW-Spektrums. Eine Abbildung $\mathbf{f}\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ können wir realisieren als $f_n\colon E_n \to F_n$, und es folgt

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{S}X, \mathbb{S}Y) = \operatorname{colim} C_{\mathrm{CW}}(S^nX, S^nY)\ .$$

Die Unterkategorie der endlichen CW-Spektren entspricht also genau dem Schritt (1) der Einleitung.

Beim anschließenden Vervollständigen bilden wir den Kolimes über alle endlichen CW-Unterspektren. Da wir jetzt nicht mehr garantieren können, dass eine Abbildung alle Zellen bereits in einem festen Grad $n$ „sieht“, müssen wir kofinale Unterspektren einführen.

Wir versehen den Raum $I_+$ mit der einfachst möglichen Zellstruktur, so dass es nur eine 1-Zelle gibt. Die folgende Definition lässt sich so wie die obige umschreiben in Termen von Äquivalenzklassen strikter Abbildungen, siehe Übung 7.54.

7.3. Definition. Eine Homotopie zwischen Abbildungen $f$, $g\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ im Grad $k$ von CW-Spektra ist eine Abbildung $h\colon \mathbb{E} \wedge I_+ \to \mathbb{F}$ vom Grad $k$, so dass $h|_{\mathbb{E}\wedge\{0\}_+} = f$ und $h|_{\mathbb{E}\wedge\{1\}_+} = g$. Die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen wird mit $[\mathbb{E}, \mathbb{F}]$ bezeichnet. Die Kategorie der CW-Spektra mit Homotopieklassen von Abbildungen heißt *stabile Homotopiekategorie* und wird mit $\mathcal{HSCW}$ bezeichnet.

Hierzu überprüft man, dass Homotopie wie immer eine Äquivalenzrelation definiert, die mit Verkettung von Abbildungen verträglich ist, siehe wieder Übung 7.54. Außerdem ist $[\mathbb{E}, \mathbb{F}]$ eine abelsche Gruppe. Seien etwas $f$, $g\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ gegeben, dann finden wir ein kofinales Unterspektrum $\mathbb{U}$, auf dem $f$ und $g$ durch strikte Abbildungen $\mathbf{f}$ und $\mathbf{g}$ darstellbar sind. Wir betrachten das Unterspektrum $\mathbb{V}$ mit

$$V_k = \mathrm{im}\big((s_{k-1} \circ Ss_{k-2})|_{S^2U_{k-2}}\big) \qquad \text{für } k \geq 0$$

und $V_k = \mathrm{pt}$ sonst. Es ist kofinal in $\mathbb{U}$ und daher auch in $\mathbb{E}$, da jede Zelle entweder bei $k = 0$ oder zwei Schritte später auftaucht als in $\mathbb{U}$. Wir schränken $\mathbf{f}$ und $\mathbf{g}$ beide auf $\mathbb{V}$ ein. Nach Bemerkung 3.75 (2), (3) lassen sich $f_k$ und $g_k$ addieren, und es gilt $S(f_k + g_k) = Sf_k + Sg_k$. Da $SV_k \subset V_{k+1}$ eine Kofaserung ist, können wir diese Homotopie auf $V_{k+1}$ ausdehnen und erhalten so Schritt für Schritt eine strikte Abbildung $\mathbb{V} \to \mathbb{F}$, die $f+g$ repräsentiert. Im nächsten Abschnitt sehen wir, dass $\mathcal{HSCW}$ eine additive Kategorie ist.

7.4. Definition. Die *$k$-te Homotopiegruppe* eines CW-Spektrums $\mathbb{E}$ ist definiert als $\pi_k(\mathbb{E}) = [\Sigma^k\mathbb{S}, \mathbb{E}]$. Für eine Abbildung $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ von Spektren definieren wir $f_*\colon \pi_k(\mathbb{E}) \to \pi_k(\mathbb{F})$ wie üblich durch $f_*([g]) = [f \circ g]$.

Nach der obigen Vorüberlegung ist $\pi_k(\mathbb{E})$ für alle $k$ eine abelsche Gruppe, somit erhalten wir Funktoren $\pi_k\colon \mathcal{HSCW} \to \mathcal{Ab}$.

7.5. Bemerkung. Da das Spektrum $\Sigma^k\mathbb{S}$ aus nur einer Zelle besteht, die ab dem $(-k)$-ten Schritt sichtbar ist, können wir leicht alle kofinalen Unterspektren angeben: zu jedem $\ell \geq -k$ existiert ein kofinales Unterspektrum $\mathbb{U}$ mit $U_i = \mathrm{pt}$ für $i < \ell$ und $U_i = S^{i+k}$ für $i \geq \ell$. Jede Abbildung $f\colon \Sigma^k\mathbb{S} \to \mathbb{E}$ kann auf einem dieser Unterspektren dargestellt werden und wird dann bestimmt durch $f_\ell\colon S^{\ell+k} \to E_\ell$. Daher gilt

$$\pi_k(\mathbb{E}) = \varinjlim \pi_{k+\ell}(E_\ell)\ .$$

Indem wir $\mathbb{E}$ durch das Spektrum $\mathbb{E} \wedge X$ ersetzen, erhalten wir jetzt eine neue Schreibweise für die allgemeinen Homologiefunktoren aus Satz 5.38:

$$\tilde{E}_k(X) = \varinjlim \pi_{k+\ell}(E_\ell \wedge X) = \pi_k(\mathbb{E} \wedge X) = [\Sigma^k \mathbb{S}, \mathbb{E} \wedge X] \ .$$

Insbesondere haben wir den Kolimes in der Definition der stabilen Kategorie $\mathcal{HSCW}$ versteckt.

7.6. Bemerkung. Um Kohomologietheorien in den Griff zu bekommen, könnten wir jedes Spektrum $\mathbb{E}$ durch ein $\Omega$-Spektrum ersetzen. Die Stabilisierungsabbildungen induzieren via Exponentialgesetz Abbildungen

$$E_i \xrightarrow{s_i} \Omega E_{i+1} \xrightarrow{\Omega s_{i+1}} \Omega^2 E_{i+2} \longrightarrow \dots \ .$$

Wir können den CW-Approximationssatz 4.51 auf die obigen Räume rechts anwenden und die Abbildungen $\Omega^k s_{i+k}$ mit Satz 4.43 sukzessiv durch homotope zelluläre Abbildungen ersetzen, um (nach dem Satz 4.55 homotopieäquivalente) CW-Komplexe zu konstruieren:

$$F_i \longrightarrow \varinjlim \Omega^{k-i} E_k \ .$$

Dieses Verfahren ist leider nur bis auf Homotopien funktoriell, liefert aber zumindest ein $\Omega$-CW-Spektrum $\mathbb{F}$ und isomorphe Kohomologiegruppen

$$\tilde{E}^i(X) = [X, F_i] \ .$$

Im Folgenden zeigen wir, dass wir in der stabilen Homotopiekategorie eine viel einfachere Beschreibung von Kohomologiefunktoren zur Verfügung haben.

Um Abbildungen zwischen CW-Spektra induktiv Zelle für Zelle zu konstruieren, brauchen wir eine geeignete Induktionsreihenfolge. Da es $k$-Zellen für beliebig kleine (auch negative) $k \in \mathbb{Z}$ geben kann, zum Beispiel im $K$-Theorie-Spektrum $\mathbb{K}$ aus Satz 6.56, ist eine Induktion über $k$ nicht mehr möglich. Stattdessen sei $e_k$ eine Zelle in $\mathbb{E}$, die zum ersten Mal in $E_\ell$ auftritt. Aufgrund der Kompaktheit von $S^{k+\ell-1}$ ist das Bild der Anklebeabbildung $\varphi\colon S^{k+\ell-1} \to E_\ell$ von $e_k$ in einem minimalen endlichen Unterkomplex $Y \subset E_\ell$ enthalten. In allen höheren Schritten $E_{\ell+j}$ ist die entsprechende Zelle an den Unterkomplex $S^j Y \subset E_{\ell+j}$ angeklebt, der gleich vielen Zellen entält. Wir nennen die Anzahl der Zellen von $Y$ daher die *Höhe* der Zelle $e_k$. Sie ist wohldefiniert und invariant unter dem Übergang zu kofinalen Unterspektren. Alle Zellen der Höhe $\leq n$ bilden ein CW-Unterspektrum $\mathbb{E}^n$, und wir erhalten die *Schichtfiltrierung*

$$* = \mathbb{E}^{-1} \subset \mathbb{E}^0 \subset \mathbb{E}^1 \subset \dots \qquad \text{mit} \qquad \mathbb{E} = \varinjlim \mathbb{E}^n \ .$$

Ersetzt man also die Dimension einer Zelle durch ihre Höhe, so sieht alles wieder so ähnlich wie bei CW-Komplexen aus.

7.7. Lemma. *Es sei $X$ ein CW-Komplex und $\mathbb{E}$ ein CW-Spektrum. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus abelscher Gruppen*

$$[\mathbb{S}X, \mathbb{E}] \xrightarrow{\cong} [X, \Omega^\infty \mathbb{E}] \ , \qquad \textit{mit} \qquad \Omega^\infty \mathbb{E} = \varinjlim \Omega^k E_k \ .$$

Man beachte, dass $\Omega^\infty \mathbb{E}$ kein CW-Komplex, sondern nach dem Satz 4.55 von Milnor nur ein topologischer Raum vom Homotopietyp eines CW-Komplexes ist. Nach Übergang zu (naiven) Homotopiekategorien erhalten wir die gewünschte Adjunktion

$$\mathbb{S}\cdot : \mathcal{HCW}_+ \leftrightarrows \mathcal{HSCW} : \Omega^\infty$$

Beweis. Es sei $f\colon \mathbb{S}X \to \mathbb{E}$ eine Abbildung, dargestellt durch $\mathbf{f}$ auf einem kofinalen Unterspektrum $\mathbb{U} \subset \mathbb{S}X$. Wir definieren $g\colon X \to \Omega^\infty\mathbb{E}$ durch Induktion über die Höhe der Zellen von $X$. Es sei also $e_k$ eine $k$-Zelle von $X$, und es sei $Y \subset X$ der kleinste Unterkomplex, der $\partial e_k$ enthält. Es existiert $\ell > 0$, so dass die zu $e_k$ gehörige Zelle von $\mathbb{S}X$ in $U_\ell$ vorkommt, und es folgt $S^\ell Y \subset U_\ell$.

Nach Induktionsannahme haben wir $g$ bereits auf $Y$ definiert, so dass

$$g\colon Y \longrightarrow \Omega^j E_j \longrightarrow \Omega^\infty\mathbb{E}$$

unter der Exponentialabbildung der Abbildung $f_j\colon S^jY \to E_j$ entspricht. Man beachte, dass wir $j$ beliebig groß wählen können, ohne $g$ zu verändern, also $j = \ell$ annehmen dürfen. Wir erhalten eine Fortsetzung auf $e_k$ aufgrund des kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd} S^\ell X \supset S^\ell Y \arrow[r, "f_\ell"] & E_\ell \\ S^{k+\ell-1} \arrow[u, "S^\ell\varphi"] \arrow[r, hook] & S^\ell D^k_+ \arrow[u] \end{tikzcd} .$$

Da eine Homotopie gerade einer Abbildung von $(SX) \wedge I_+ \cong \mathbb{S}(X \wedge I_+)$ entspricht, bildet die obige Konstruktion Homotopieklassen auf Homotopieklassen ab. Das entsprechende Argument wird uns auch die Homotopieinvarianz der inversen Konstruktion garantieren.

Zur Konstruktion der Umkehrabbildung sei $g\colon X \to \Omega^\infty\mathbb{E}$ gegeben. Wir konstruieren einen Repräsentanten $\mathbf{f}\colon \mathbb{U} \to \mathbb{E}$ induktiv über die Höhe der Zellen von $X$. Es seien also $e_k$ und $Y$ wie oben. Nach Induktionsannahme gilt $S^jY \subset U_j$ für ein $j$, und es sei $f_j\colon S^jY \to E_j$ eine zelluläre Approximation der zu $g|_Y\colon Y \to \Omega^j E_j$ via Exponentialgesetz adjungierten Abbildung $S^jY \to E_j$.

Da $\Omega^\infty\mathbb{E}$ ein Kolimes und $D^k$ kompakt ist, faktorisiert $g|_{\bar{e}_k}$ über einen der Räume $\Omega^\ell E_\ell$ gemäß Übung 4.81. Dann ist $f_{\ell_j}|_{S^\ell Y} = S^{\ell-j}(f_j|_{S^jY})$ eine zelluläre Approximation der zu $g\colon Y \to \Omega^\ell E_\ell$ adjungierten Abbildung. Wir können daher $f_{\ell_j}$ zu einer zellulären Approximation $S^\ell(Y \cup e_k) \to E_\ell$ der zu $g|_{Y\cup e_k}$ adjungierten Abbildung fortsetzen. $\square$

Mit der obigen Konstruktion finden wir auch einen Isomorphismus

$$[\mathbb{S}X, \Sigma^i\mathbb{E}] \cong [X, \Omega^\infty\Sigma^i\mathbb{E}] = \Big[X, \varinjlim \Omega^{k-i}E_k\Big] .$$

Das motiviert die folgende Definition, die aufgrund von Satz 6.28 und Bemerkung 7.6 tatsächlich einen Kohomologiefunktor liefert.

7.8. Definition. Es sei $\mathbb{E}$ ein CW-Spektrum. Dann definieren wir einen allgemeinen reduzierten Kohomologiefunktor $\tilde{E}^\bullet\colon \mathcal{CW}_+ \to \mathcal{A}b$ durch

$$\tilde{E}^i(X) = \big[\mathbb{S}X, \mathbb{E}[i]\big] .$$

Wenn der CW-Komplex $X$ kompakt ist, faktorisiert jede stetige Abbildung $X \to \Omega^\infty\Sigma^i\mathbb{E}$ über einen der Räume $\Omega^{k-i}E_k$, und wir erhalten

$$\tilde{E}^i(X) = \varinjlim[X, \Omega^{k-i}E_k] = \varinjlim[S^{k-i}X, E_k] .$$

Im Allgemeinen gilt das jedoch nicht für beliebige CW-Komplexe. Genau dieses Problem hatten wir bereits bei der Definition von $K$-Theorie, siehe den Kommentar nach Satz 6.54. Aus dem gleichen Grund konnten wir Kobordismus in Abschnitt 6.j noch nicht als Kohomologietheorie einführen.

## 7.b. Eigenschaften der stabilen Homotopiekategorie

In diesem Abschnitt fassen wir weitere wichtige Eigenschaften der Kategorie $\mathcal{HSCW}$ zusammen.

7.9. Bemerkung. Zu jeder Abbildung $f\colon \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ lässt sich bis auf eindeutige Isomorphismen ein Abbildungszylinder $Zf = \mathbb{F} \wedge I_+ \cup_f \mathbb{E}$ und ein Abbildungskegel $Cf$ konstruieren. Denn sei $\mathbf{f}\colon \mathbb{U} \to \mathbb{E}$ ein Repräsentant von $f$, dann erhalten wir ein Spektrum, bestehend aus den Räumen $Zf_i = ((U_i \wedge I_+) \cup_{f_i} E_{i-k})$. Ein anderer Repräsentant liefert ein anderes Spektrum, das mit dem obigen ein kofinales Unterspektrum gemeinsam hat, so dass wir zwischen je zwei so konstruierten Abbildungszylinder auf verträgliche Weise eindeutige Isomorphismen angeben können. Wir bezeichnen die natürliche Inklusion mit $\iota\colon \mathbb{F} \to Zf$, repräsentiert durch die Inklusionen $\mathbb{U} \to Zf$. Den Abbildungskegel können wir entsprechend als Quotienten $Zf/\operatorname{im}\iota$ konstruieren.

Wir beginnen mit dem Satz von Whitehead. Dazu übertragen wir den Begriff der schwachen (Homotopie-) Äquivalenz aus Definition 4.45 auf Spektren.

7.10. Definition. Eine Abbildung $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ von Spektren heißt *schwache* (*Homotopie-*) *Äquivalenz,* wenn $f_*\colon \pi_k(\mathbb{E}) \to \pi_k(\mathbb{F})$ für alle $k$ ein Isomorphismus ist.

7.11. Satz (Whitehead). *Jede schwache Homotopieäquivalenz $f\colon \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ von Spektren ist eine stabile Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Wir kopieren den Beweis von Satz 4.46. Wir ersetzen $\mathbb{E}$ durch den punktierten Abbildungszylinder $Zf$. Ähnlich wie der Abbildungskegel in Bemerkung 7.9 ist auch $Zf$ bis auf stabile Isomorphismen eindeutig definiert. Die üblichen Deformationsretraktionen $Zf_n \wedge I_+ \to Zf_n$ von $Zf_n$ auf $E_n$ setzen sich zu einer Homotopie $Zf \wedge I_+ \to Zf$ zusammen, denn sei $f_n$ auf $U_n \subset F_n$ definiert, dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
S(Zf_n) \wedge I_+ \arrow[r, Rightarrow] & Z(Sf_n) \wedge I_+ \arrow[r] \arrow[d] & SE_n \arrow[d] \\
& Zf_{n+1} \wedge I_+ \arrow[r] & E_{n+1} \,.
\end{tikzcd}$$

Somit ist $\mathbb{E}$ Deformationsretrakt von $Zf$, und es reicht zu zeigen, dass auch $\mathbb{F}$ ein Deformationsretrakt von $Zf$ ist. Wir ersetzen also $\mathbb{E}$ durch $Zf$ und dürfen daher ohne Einschränkung annehmen, dass $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$ ein schwach äquivalentes Unterspektrum ist.

Es bezeichne wieder $* = \mathbb{E}^{-1} \subset \mathbb{E}^0 \subset \dots$ die Schichtfiltrierung von $\mathbb{E}$. Wir konstruieren induktiv stabile Homotopien $h^n\colon (\mathbb{E}^n \cup \mathbb{F}) \wedge I_+ \to \mathbb{E}$, so dass $h^n(\,\cdot\,,0) = \mathrm{id}$, $\operatorname{im} h^n(\,\cdot\,,1) \subset \mathbb{F}$ und $h^n|_{(\mathbb{E}^{n-1}\cup\mathbb{F})\wedge I_+} = h^{n-1}$. Zunächst sei $h^{-1}$ die stationäre Homotopie auf $\mathbb{F}$.

Sei jetzt $n \geq 0$ und sei $h^{n-1}$ gegeben, dann setzen wir $h^{n-1}$ Zelle für Zelle zu $h^n$ fort. Sei also $e_j^{k_0}$ eine $k_0$-Zelle der Höhe $n$ in $E_{\ell_0}$, die nicht zu $\mathbb{F}$ gehört. Um $h^{n-1}$ auf diese Zelle fortzusetzen, suchen wir ein geeignetes $\ell \geq \ell_0$ und eine Abbildung $h^n_{\ell,j}$ wie im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
D^k \arrow[r, "\times 0"] \arrow[d, "\Phi_j^k"'] & D^k \times I \arrow[d, dashed, "h^n_{\ell,j}"'] & S^{k-1} \times I \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\varphi_j^k \times \mathrm{id}_I"] \\
E_\ell^n \cup F_\ell \arrow[r, hook] & E_\ell & (E_\ell^{n-1} \cup F_\ell) \wedge I_+ \arrow[l, "h_\ell^{n-1}"'] \,,
\end{tikzcd}$$

dabei sei $e^k$ die $e_{k_0}$ entsprechende Zelle von $E_\ell$. Wie im Beweis von Satz 4.46 bilden die äußeren Pfeile zusammen eine Abbildung $a_\ell\colon (D^k, S^{k-1}) \to (E_\ell, F_\ell)$.

Wir betrachten die langen exakten Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
\cdots & \pi_{k-1}(E_\ell) \arrow[l] \arrow[d] & \pi_{k-1}(F_\ell) \arrow[l, "\iota_{\ell *}"'] \arrow[d] & \pi_k(E_\ell, F_\ell) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d] & \pi_k(E_\ell) \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & \pi_k(E_{\ell+1}) \arrow[l] & \pi_k(F_{\ell+1}) \arrow[l, "\iota_{(\ell+1)*}"'] & \pi_{k+1}(E_{\ell+1}, F_{\ell+1}) \arrow[l, "\partial"'] & \pi_{k+1}(E_{\ell+1}) \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd},$$

dabei konstruieren wir Stabilisierungshomomorphismen für die relativen Homotopiegruppen wie im Beweis von Satz 3.80. Da Kolimiten wie im Beweis von Lemma 5.37 exakt sind, verschwindet $[a_\ell] \in \pi_k(E_\ell, F_\ell)$ für hinreichend große $\ell$. Also erhalten wir die gesuchte Fortsetzung $h^n_{\ell,j}$ als Homotopie von $a_\ell$ relativ zu $S^{k-1}$ zu einer Abbildung $D^k \to F_\ell$. $\square$

7.12. Bemerkung. Unter einer *präadditiven Kategorie* versteht man eine Kategorie, in der alle Morphismenmengen abelsche Gruppen sind und die Komposition bilinear ist. Man kann zeigen, dass für eine Kategorie $\mathcal{C}$ folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) Die Kategorie $\mathcal{C}$ ist präadditiv, und für je zwei Objekte existiert ihr Koprodukt.
(2) Die Kategorie $\mathcal{C}$ ist präadditiv, und für je zwei Objekte existiert ihr Produkt.
(3) Für je zwei Objekte $X$, $Y$ existiert ein Objekt $X \oplus Y$, das sowohl Produkt als auch Koprodukt ist.

Kategorien, die diese Eigenschaften haben, heißen *additiv,* und $X \oplus Y$ heißt direkte Summe, siehe Bemerkung 5.1 (2). Abelsche Kategorien sind insbesondere additiv, somit sind $\mathcal{M}od_R$, $\mathcal{A}b$ und $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ additiv, siehe Beispiel 4.27.

In Übung 7.56 überprüfen wir Eigenschaft (3) für die stabile Homotopiekategorie $\mathcal{HSCW}$. In Übung 7.57 wird (1) für $\mathcal{HSCW}$ bewiesen und daraus (3) abstrakt abgeleitet. Insbesondere ist die Kategorie $\mathcal{HSCW}$ additiv.

Die Äquivalenz von Produkt und Koprodukt gilt nur für Spektra; für Räume ist sie im Allgemeinen falsch. Wir können uns aber überlegen, dass Produkte und Koprodukte in $\mathcal{CW}_+$ auch in $\mathcal{HCW}_+$ die entsprechenden universellen Eigenschaften erfüllen. Aus der Adjunktion in Lemma 7.7 schließen wir dann mit Lemma 4.14, dass der Einhängungsfunktor $\mathbb{S}\colon \mathcal{HCW}_+ \to \mathcal{HSCW}$ mit Koprodukten und der adjungierte Funktor $\Omega^\infty\colon \mathcal{HSCW} \to \mathcal{HCW}_+$ mit Produkten verträglich ist.

Ein wichtiges Werkzeug im Beweis von Satz 6.28 war die Puppe-Sequenz für Kofasersequenzen aus Satz 4.67. In Satz 4.72 hatten wir eine Eckmann-Hilton-duale lange exakte Sequenz für Fasersequenzen formuliert. In der Kategorie $\mathcal{HSCW}$ müssen wir nicht mehr zwischen Faser- und Kofasersequenzen unterscheiden.

7.13. Definition. Zwei komponierbare Abbildungen $\mathbb{G} \xrightarrow{g} \mathbb{H} \xrightarrow{h} \mathbb{K}$ bilden eine *Kofasersequenz* in $\mathcal{HSCW}$, wenn es eine Abbildung $f\colon \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ und ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{H} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{K} \arrow[d, "\sim"'] \\
\mathbb{F} \arrow[r, "f"] & \mathbb{E} \arrow[r, "\iota"] & Cf
\end{tikzcd}$$

gibt, das bis auf Homotopie kommutiert, und in dem die vertikalen Pfeile Homotopieäquivalenzen sind.

Der folgenden Satz verallgemeinert nicht nur den Satz 4.67 über Kofasersequenzen von Räumen und die Barratt-Puppe-Sequenz, sondern in gewissem Sinne auch Satz 4.72 (3).

7.14. Satz. *Zu jeder Abbildung von Spektren $f\colon \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ existiert eine Sequenz*

$$\cdots \longrightarrow \Sigma^{-1}(Cf) \xrightarrow{\Sigma^{-1}\delta} \mathbb{F} \xrightarrow{f} \mathbb{E} \xrightarrow{\iota} Cf \xrightarrow{\delta} \Sigma\mathbb{F} \longrightarrow \cdots, \tag{1}$$

*in der je zwei aufeinanderfolgende Abbildungen eine Kofasersequenz bilden. Für jedes Spektrum $\mathbb{G}$ erhalten wir exakte Sequenzen*

$$\cdots \longrightarrow [\mathbb{G},\mathbb{F}] \xrightarrow{f_*} [\mathbb{G},\mathbb{E}] \xrightarrow{\iota_*} [\mathbb{G},Cf] \xrightarrow{\delta_*} [\mathbb{G},\Sigma\mathbb{F}] \longrightarrow \cdots \tag{2}$$

$$\textit{und} \qquad \cdots \longrightarrow [\Sigma\mathbb{F},\mathbb{G}] \xrightarrow{\delta^*} [Cf,\mathbb{G}] \xrightarrow{\iota^*} [\mathbb{E},\mathbb{G}] \xrightarrow{f^*} [\mathbb{F},\mathbb{G}] \longrightarrow \cdots\ . \tag{3}$$

Sequenzen vom Typ (1) oder dazu homotopieäquivalente Sequenzen könnte man lange Kofasersequenzen nennen. Aufgrund von (1) reicht es aber, zugehörige kurze Kofasersequenzen $\mathbb{G} \to \mathbb{H} \to \mathbb{K}$ wir in Definition 7.13 anzugeben. Die Sequenz in (3) heißt *Puppe-Sequenz.* Die Punkte (2) und (3) bilden in gewissem Sinne ein homotopietheoretisches Pendant zum Schlangenlemma 5.25.

Beweis. Es sei $f$ als strikte Abbildung auf $\mathbb{U} \subset \mathbb{F}$ definiert. Zum Beweis von (1) reicht es, die Abbildungen aus Satz 4.67 (*) zwischen beteiligten Räumen $U_k \subset F_k$, $E_k$ und $Cf_k$ und die Homotopieäquivalenzen aus dem Beweis von Satz 4.67 (1) zu Abbildungen von Spektren zusammenzusetzen. Dabei müssen wir allerdings die „Vorzeichen“ entsprechend abändern.

Zu (2) und (3) beweisen wir zunächst folgende Hilfsaussage. Gegeben sei ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & \mathbb{E} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "b"'] & Cf \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, dashed, "c"'] & \Sigma\mathbb{F} \arrow[d, "\Sigma a"'] \\
\mathbb{G} \arrow[r, "g"] & \mathbb{H} \arrow[r, "h"] & Cg \arrow[r, "k"] & \Sigma\mathbb{G}
\end{tikzcd} \tag{*}$$

(bis auf die Abbildung $c$), bei dem die Zeilen Kofasersequenzen wie in (1) seien, und in dem das linke Quadrat bis auf Homotopie kommutiert. Dann behaupten wir, dass eine Abbildung $c$ von Spektren existiert, so dass das gesamte obige Diagramm bis auf Homotopie kommutiert.

Wir ersetzen $\mathbb{E}$ und $\mathbb{G}$ durch kofinale Unterspektren, auf denen $b$ beziehungsweise $g$ strikt definiert sind, und anschließend $\mathbb{F}$ durch ein kofinales Unterspektrum, auf dem $a$ und $f$ strikt definiert sind. Gleichzeitig ersetzen wir auch $Cf$ durch das entsprechende kofinale Unterspektrum, ähnlich wie in Bemerkung 7.9.

Es bezeichne $H\colon \mathbb{F} \wedge I_+ \to \mathbb{H}$ eine Homotopie mit $H(\,\cdot\,,t) = g \circ a$ für $t \le \frac{1}{2}$ und $H(\,\cdot\,,1) = b \circ f$. Dann definieren $b$ und $H$ zusammen eine strikte Abbildung $Zf = (\mathbb{F} \wedge I_+) \cup_f \mathbb{E} \to \mathbb{H}$. Wir betrachten anstelle von $\mathbb{E}$ den Abbildungszylinder $Zf$ und anstelle von $b$ die soeben konstruierte Abbildung. Jetzt sind alle Abbildungen im linken Quadrat strikt, und das Quadrat kommutiert auch strikt.

Wir definieren $\bar{c}\colon Zf \to Zg$ durch Zusammensetzen der Abbildungen im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F} \wedge \left[0,\frac{1}{2}\right]_+ \arrow[d, "a\wedge(2\,\cdot\,)"'] & \mathbb{F} \times \left\{\frac{1}{2}\right\} \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] \arrow[d, "a"'] & \mathbb{F} \wedge \left[\frac{1}{2},1\right]_+ \arrow[d, "H"'] & \mathbb{F} \times \{1\} \arrow[l, hook'] \arrow[d, "f"'] \\
\mathbb{G} \wedge I_+ & \mathbb{G} \times \{1\} \arrow[l, hook'] \arrow[r, "g"] & \mathbb{H} & \mathbb{E}\,, \arrow[l, "b"']
\end{tikzcd}$$

dann induziert $\bar{c}$ eine Abbildung $c\colon Cf \to Cg$, so dass das mittlere Quadrat strikt kommutiert. Man überzeugt sich leicht, dass das rechte Quadrat bis auf eine Homotopie kommutiert, die nur die Parametrisierung des $S^1$-Faktors in $S^1 \wedge \mathbb{F} \subset \Sigma\mathbb{F}$ verschiebt. Da wir in der Vorbereitung nur $\mathbb{E}$ durch ein homotopieäquivalentes Spektrum und einige andere Spektra durch isomorphe (da kofinale) Unterspektra ersetzt haben, folgt auch die ursprüngliche Behauptung.

In (2) betrachten wir Exaktheit an der Stelle $[\mathbb{G},\mathbb{E}]$; wegen (1) folgt die Exaktheit dann auch an allen anderen Stellen. Aus $\iota \circ f \sim 0$ folgt $\operatorname{im} f_* \subset \ker \iota_*$. Sei jetzt $a\colon \mathbb{G} \to \mathbb{E}$ gegeben, so dass $[a] \in \ker \iota_*$, und sei $h\colon \mathbb{G} \wedge I \to Cf$ eine Nullhomotopie von $\iota \circ a$. Dann betrachten wir das

Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G} \arrow[r, hook, "\cdot\times\{1\}"] \arrow[d, "a"'] & \mathbb{G}\wedge I \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & \mathbb{G}\wedge S^1 \arrow[r, hook, "s"] \arrow[d, dashed, "c"'] & \Sigma\mathbb{G} \arrow[d, "\Sigma a"'] \\
\mathbb{E} \arrow[r, "\iota"] & Cf \arrow[r, "\delta"] & \Sigma\mathbb{F} \arrow[r, "\Sigma f"] & \Sigma\mathbb{E}
\end{tikzcd}$$

vom Typ (*), dabei ist $s$ die Strukturabbildung von $\mathbb{G}$, und daher nach Bemerkung 7.2 ein Isomorphismus. Wir finden daher $c\colon \mathbb{G}\wedge S^1 \to \mathbb{F}\wedge S^1$, so dass $\Sigma f\circ c \sim \Sigma a$. Da $\Sigma$ invertierbar ist, folgt $[a] = f_*[\Sigma^{-1}c] \in \operatorname{im} f_*$.

In (3) gilt $\operatorname{im}\iota^* \subset \ker f^*$, sei also $b\colon \mathbb{E}\to\mathbb{G}$ mit $[b]\in\ker f^*$ gegeben. In Analogie zu Bemerkung 4.66 betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F} \arrow[r, "f"] & \mathbb{E} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "b"'] & Cf \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, dashed, "c"'] & \Sigma\mathbb{F} \\
* \arrow[r] & \mathbb{G} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbb{G} \arrow[r] & *
\end{tikzcd}$$

und erhalten das gesuchte Element $[c]\in[Cf,\mathbb{G}]$ mit $\iota^*[c]=[b]$. $\square$

7.15. Bemerkung. Wir sammeln einige Anwendungen der obigen exakten Sequenzen auf Homologie- und Kohomologiefunktoren. Dabei treffen wir zunächst auf einige alte Bekannte.

(1) Es sei $(X,A)$ eine Kofaserung. Da alle Abbildungen in Satz 4.67 (*) bis auf Vorzeichen mit Einhängung verträglich sind, erhalten wir die Kofasersequenz

$$\mathbb{S}A \longrightarrow \mathbb{S}X \longrightarrow \mathbb{S}(X/A)$$

Für $\mathbb{G}=\mathbb{S}$ wird die Sequenz (2) zur langen exakten stabilen Homotopiesequenz aus Satz 3.80. Sei $\mathbb{G}$ ein beliebiges Spektrum, dann liefert Satz 7.14 (3) die lange exakte Sequenz der $E$-Kohomologiesequenz aus Definition 7.8.

(2) Es sei $(X,A)$ wie oben und $\mathbb{E}$ ein beliebiges Spektrum, dann erhalten wir eine Kofasersequenz

$$\mathbb{E}\wedge X \longrightarrow \mathbb{E}\wedge A \longrightarrow \mathbb{E}\wedge(X/A)\ .$$

Für $\mathbb{G}=\mathbb{S}$ wird die Sequenz aus Satz 7.14 (2) nach Bemerkung 7.5 zur langen exakten $E$-Homologiesequenz.

(3) Es sei $\mathbb{Z}^{\oplus K}\to\mathbb{Z}^{\oplus J}$ freie Auflösung einer abelschen Gruppe $A$ und $n\geq 2$. Die Konstruktion des Moore-Raums $MA_n$ aus Proposition 5.69 liefert eine Kofasersequenz

$$\bigvee_K S^n \longrightarrow \bigvee_J S^n \longrightarrow MA_n\ .$$

Sei $X$ ein weiterer Raum, und sei $\mathbb{E}$ ein Spektrum. Wir erhalten die langen Sequenzen

$$\cdots\longrightarrow \underbrace{\big[\mathbb{S},\mathbb{E}\wedge\textstyle\bigvee_K S^n\wedge X\big]}_{\tilde E_{-n}(X)^{\oplus K}} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes a} \underbrace{\big[\mathbb{S},\mathbb{E}\wedge\textstyle\bigvee_J S^n\wedge X\big]}_{\tilde E_{-n}(X)^{\oplus J}} \longrightarrow \underbrace{\big[\mathbb{S},\mathbb{E}\wedge MA_n\wedge X\big]}_{\tilde E_{-n}(X;A)} \longrightarrow\cdots$$

und
$$\cdots\longrightarrow \underbrace{\big[\mathbb{S}X,\mathbb{E}\wedge\textstyle\bigvee_K S^n\big]}_{\tilde E^{n}(X)^{\oplus K}} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes a} \underbrace{\big[\mathbb{S}X,\mathbb{E}\wedge\textstyle\bigvee_J S^n\big]}_{\tilde E^{n}(X)^{\oplus J}} \longrightarrow \underbrace{\big[\mathbb{S}X,\mathbb{E}\wedge MA_n\big]}_{\tilde E^{n}(X;A)} \longrightarrow\cdots\ .$$

Die erste Sequenz haben wir im Beweis des universellen Koeffiziententheorems 5.71 benutzt. Aus der zweiten erhalten wir analoge natürliche kurze exakte Sequenzen für Kohomologiefunktoren

$$0\longrightarrow \tilde E^n(X)\otimes_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow \tilde E^n(X;A) \longrightarrow \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}}\big(\tilde E^{n+1}(X),A\big)\longrightarrow 0\ .$$

Später, wenn wir ein reduziertes Produkt für Spektren zur Verfügung haben, betrachten wir das Moore-Spektrum $\mathbb{M}A$ aus Definition 5.67 und schreiben $\mathbb{E} \wedge \mathbb{M}A$ für das Spektrum zu $\tilde{E}_\bullet(\,\cdot\,; A)$ und $\tilde{E}^\bullet(\,\cdot\,; A)$, siehe Bemerkung 7.31.

(4) Allgemeiner sei $A \to B \to C$ eine kurze exakte Sequenz abelscher Gruppen, und $n \geq 2$. Wie in Übung 5.113 existiert eine Kofasersequenz $MA_n \to MB_n \to MC_n$. Wie oben erhalten wir die *Bockstein-Sequenzen*

$$\cdots \longrightarrow \tilde{E}_n(X; A) \longrightarrow \tilde{E}_n(X; B) \longrightarrow \tilde{E}_n(X; C) \xrightarrow{\partial} \tilde{E}_{n-1}(X; A) \longrightarrow \cdots$$

und
$$\cdots \longrightarrow \tilde{E}^n(X; A) \longrightarrow \tilde{E}^n(X; B) \longrightarrow \tilde{E}^n(X; C) \xrightarrow{\delta} \tilde{E}^{n+1}(X; A) \longrightarrow \cdots .$$

Noch allgemeiner erhalten wir analoge Koeffizientensequenzen, wann immer wir eine Kofasersequenz von Spektra gegeben haben.

7.16. Bemerkung. Analog zu Kofasersequenzen kann man auch Fasersequenzen betrachten. Da das nichts neues ergibt, fassen wir die entsprechenden Überlegungen nur kurz zusammen. Die Konstruktion der Homotopiefaser ist nach Übung 7.58 mit Einhängung verträglich. Homotopiefasern sind im Allgemeinen keine CW-Komplexe, haben aber nach einer Verallgemeinerung des Satzes 4.55 den Homotopietyp von CW-Komplexen. Wir können also bis auf Homotopieäquivalenz die Homotopiefaser $Ff$ einer Abbildung $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ von Spektren bilden. Wir nennen eine Komposition von Abbildungen $\mathbb{F} \to \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ eine *Fasersequenz* von Spektren, wenn sie ähnlich wie in Definition 7.13 zur Sequenz vom Typ $Ff \to \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ homotopieäquivalent ist.

Als nächstes zeigen wir in Übung 7.59, dass zu jeder Fasersequenz wie oben eine natürliche lange exakte Sequenz der Form

$$\cdots \longrightarrow \pi_k(\mathbb{F}) \longrightarrow \pi_k(\mathbb{E}) \longrightarrow \pi_k(\mathbb{B}) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(\mathbb{F}) \longrightarrow \cdots$$

gehört. Jetzt folgt aus dem Satz von Whitehead, dass jede Kofasersequenz von Spektren eine Fasersequenz ist und umgekehrt, siehe Übung 7.60.

Die Kategorie $\mathcal{HSCW}$ ist eine sogenannte *triangulierte Kategorie.* Das heißt, sie ist additiv, besitzt einen invertierbaren *Verschiebungsfunktor,* nämlich $\Sigma$, und es gibt eine Klasse sogenannter *ausgezeichneter Dreiecke,* das sind Sequenzen wie in Satz 7.14 (1). Hier bezeichnet man mit dem Wort „Dreieck“ eine Sequenz, in der sich die Objekte alle drei Schritte bis auf eine Verschiebung wiederholen. Da Verschiebung ein Funktor ist, reicht es, drei aufeinanderfolgende Abbildungen anzugeben. Ein Isomorphismus von Dreiecken ist dann ein Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & A[1] \arrow[d, "\cong"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & A'[1] \,.
\end{tikzcd}$$

7.17. Definition. Eine *triangulierte Kategorie* ist eine additive Kategorie $\mathcal{C}$ mit einem invertierbaren Verschiebefunktor $\Sigma\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, geschrieben $A \mapsto A[1]$, und einer Klasse *exakter* oder *ausgezeichneter Dreiecke,* für die folgende Axiome gelten.

(1) Wenn zwei Dreiecke isomorph sind, ist das eine genau dann exakt, wenn das andere exakt ist.

(2) Für jede Abbildung $f\colon A \to B$ existiert ein exaktes Dreieck

$$A \xrightarrow{f} B \longrightarrow C \longrightarrow A[1] \,,$$

und im Falle $f = \mathrm{id}_A$ gilt $C \cong 0$.

(3) Es sei

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1]$$

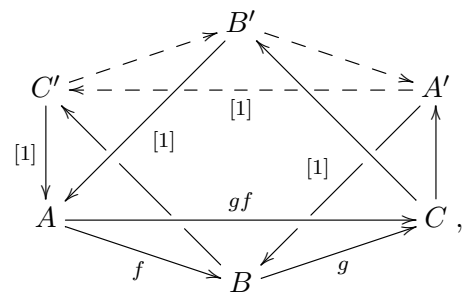
exakt, dann sind die folgenden Dreiecke ebenfalls exakt:

$$B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1] \xrightarrow{-f[1]} B[1] \qquad \text{und} \qquad C[-1] \xrightarrow{-h[-1]} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C\ .$$

(4) *Oktaederaxiom.* Gegeben seien exakte Dreiecke

$$A \xrightarrow{f} B \to C' \to A[1]\ , \qquad B \xrightarrow{g} C \to A' \to B[1]\ , \qquad A \xrightarrow{gf} C \to B' \to A[1]$$

im Diagramm




wobei „[1]“ Pfeile bezeichne, die den Grad um eins erhöhen. Dann existieren gestrichelte Abbildungen so, dass das gestrichelte Dreieck ebenfalls exakt ist und die anderen vier Dreiecke sowie das Quadrat BCB'C' kommutieren.

Das Dreieck in (2) ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, allerdings nicht unbedingt bis auf eindeutige Isomorphismen. Die Vorzeichen in (3) passen genau zu den Vorzeichen in den Kofaser- und Fasersequenzen 4.67 (*) und 4.72 (*). Im Oktaederaxiom sind nur die Abbildungen $f$ und $g$ gegeben, die soliden exakten Dreiecke ergeben sich daraus durch (2). Wenn wir uns $f$ und $g$ als Inklusionen und $C' \cong B/A$ und $B' \cong C/A$ als Quotienten vorstellen, dann besagt das Oktaederaxiom anschaulich, dass $A' \cong C/B \cong (C/A)/(B/A)$.

Die Homotopiekategorie $\mathcal{HC}h_R$ der Kettenkomplexe $\mathcal{C}h_R$ über einem Ring $R$, bei der Morphismen somit Kettenabbildungen bis auf Kettenhomotopie sind, erfüllt ebenfalls die Eigenschaften einer triangulierten Kategorie. Die ausgezeichneten Dreiecke kommen dabei von algebraischen Abbildungskegeln von Kettenkomplexen und den zugehörigen Sequenzen. Anstelle des Satzes 7.14 tritt das Schlangenlemma 5.25.

## 7.c. Das reduzierte Produkt von Spektren

Wir haben in den Abschnitten 6.d und 6.h bereits Produkte auf der gewöhnlichen Kohomologie und der $K$-Theorie kennengelernt. Ziel dieses Kapitels ist es, Produkte so allgemein wie möglich zu beschreiben. In Analogie mit Proposition 6.21 formulieren wir einige Forderungen an diese Produkte.

Unter einer abelschen Kategorie mit Tensorprodukt wollen wir eine abelsche Kategorie mit einer monoidalen Struktur verstehen, die eine universelle Eigenschaft wie in Beispiel 4.27 (2) erfüllt. Wir erinnern uns an die Stabilisierungsisomorphismen $\sigma\colon \tilde{h}^k(X) \to \tilde{h}^{k+1}(SX)$ und die Transpositionsabbildung $t\colon X \wedge Y \to Y \wedge X$.

7.18. Definition. Ein (*reduzierter*) *multiplikativer Kohomologiefunktor* $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet, \wedge, \varepsilon)$ über einem Ring $R$ besteht aus einem reduzierten Kohomologiefunktor $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet)$ mit Werten in $\mathcal{M}od_R$, einer Familie natürlicher Transformationen

$$\wedge_{k,\ell}\colon \tilde{h}^k \otimes \tilde{h}^\ell \longrightarrow \tilde{h}^{k+\ell}(\,\cdot\,\wedge\,\cdot\,)$$

von Funktoren $kw\mathcal{H}_+ \times kw\mathcal{H}_+ \to \mathcal{M}od_R$ und einem Element $\varepsilon \in \tilde{h}^0(S^0)$, so dass für alle Räume $X$, $Y$, $Z$ und alle $\alpha \in \tilde{h}^k(X)$, $\beta \in \tilde{h}^\ell(Y)$, $\gamma \in \tilde{h}^m(Z)$ gilt:

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \in \tilde{h}^{k+\ell+m}(X \wedge Y \wedge Z) \ , \tag{1}$$

$$\alpha \wedge \varepsilon = \alpha = \varepsilon \wedge \alpha \in \tilde{h}^k(X) \ , \tag{2}$$

$$(\sigma\alpha) \wedge \beta = \sigma(\alpha \wedge \beta) = (-1)^k \alpha \wedge (\sigma\beta) \in \tilde{h}^{k+\ell+1}(S^1 \wedge X \wedge Y) \ . \tag{3}$$

Wir nennen $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet, \wedge, \varepsilon)$ (*graduiert*) *kommutativ,* wenn darüberhinaus

$$t^*(\beta \wedge \alpha) = (-1)^{k\ell} \alpha \wedge \beta \in \tilde{h}^{k+\ell}(X \wedge Y) \ . \tag{4}$$

Da wir das äußere Produkt mittels des Tensorproduktes als natürliche Transformation eingeführt haben, ist es automatisch bilinear. Aus (1), (2) folgt insbesondere auch, dass die Koeffizienten $\tilde{h}^\bullet(S^0) \in \mathcal{M}od_R$ eine graduierte $R$-Algebra bilden. Falls $\tilde{h}^\bullet$ kommutativ ist, bildet $\tilde{h}^\bullet(X)$ für alle $X$ einen $\tilde{h}^\bullet(S^0)$-Modul, anderfalls einen $\tilde{h}^\bullet(S^0)$-Bimodul. Aus dem Assoziativgesetz (1) mit $Y = S^0$ folgt, dass wir das äußere Produkt sogar als natürliche Transformation $\tilde{h}^\bullet \otimes_{\tilde{h}^\bullet(S^0)} \tilde{h}^\bullet \to \tilde{h}^\bullet(\,\cdot\, \wedge \,\cdot\,)$ auffassen dürfen.

7.19. Definition. Es sei $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet, \wedge, \varepsilon)$ ein reduzierter multiplikativer Kohomologiefunktor mit Werten in $\mathcal{C}$. Ein $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet, \wedge, \varepsilon)$-*Rechtsmodul-Homologiefunktor* $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet, /)$ besteht aus einem reduzierten Homologiefunktor $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$ mit Werten in $\mathcal{C}$ und einer Familie natürlicher Abbildungen

$$/_{k,\ell} \colon \tilde{h}_{k+\ell}(X \wedge Y) \otimes \tilde{h}^k(X) \longrightarrow \tilde{h}_\ell(Y) \ ,$$

so dass für alle Räume $X$, $Y$, $Z$, alle $\alpha \in \tilde{h}^k(X)$, $\beta \in \tilde{h}^\ell(Y)$, $\gamma \in \tilde{h}^m(Z)$ und alle $a \in \tilde{h}_n(X)$, $b \in \tilde{h}_{k+\ell}(X \wedge Y)$, $c \in \tilde{h}_{k+\ell+m}(X \wedge Y \wedge Z)$ gilt:

$$(c/\alpha)/\beta = c/(\alpha \wedge \beta) \in \tilde{h}_m(Z) \ , \tag{1}$$

$$a/\varepsilon = a \in \tilde{h}_n(X) \ , \tag{2}$$

$$\begin{aligned} (\sigma b)/(\sigma\alpha) &= b/\alpha \in \tilde{h}_\ell(Y) \\ \text{und} \qquad (\sigma b)/\alpha &= (-1)^k \sigma(b/\alpha) \in \tilde{h}_{\ell+1}(Y) \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Außerdem definieren wir das *Kroneckerprodukt* durch

$$\langle a, \alpha \rangle = a/\alpha \in \tilde{h}_{n-k}(S^0) \ . \tag{4}$$

Hierbei bedeutet „Natürlichkeit“ das gleiche wie in (6.3). Analog können wir auch Kohomologiefunktoren mit Hilfe eines äußeren Produktes zu $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet, \wedge, \varepsilon)$-Links- beziehungsweise Rechtsmoduln machen.

Nachdem wir multiplikative Kohomologiefunktoren definiert haben, können wir wie in Abschnitt 6.d fortfahren. Insbesondere können wir innere Produkte wie in Definition 6.23 erklären, dann gilt Proposition 6.24 analog. Beispiele sind allerdings schwieriger zu berechnen als für gewöhnliche Kohomologie, da wir keinen zellulären Komplex zur Verfügung haben. Wir verschieben diese Betrachtungen auf später und versuchen zunächst, multiplikative Kohomologiefunktoren durch Spektren zu realisieren.

Dazu beginnen wir mit einem Kohomologiefunktor $\tilde{E}^\bullet = [\mathbb{S}\,\cdot\,, \mathbb{E}]_{-\bullet}$. Der Einfachheit halber sei $\mathbb{E}$ ein $\Omega$-Spektrum, und $[\alpha] \in \tilde{E}^k(X)$ und $[\beta] \in \tilde{E}^\ell(Y)$ seien repräsentiert durch $\alpha \colon X \to E_k$ und $\beta \colon Y \to E_\ell$. Wir nehmen an, dass es ein externes Produkt auf $\tilde{E}^\bullet$ analog zum Produkt aus Proposition 6.21 gibt. Wenn es unter Abbildungen von beliebigem Grad natürlich ist, dann folgt

$$[\alpha] \wedge [\beta] = \big(\alpha^*[\mathrm{id}_{E_k}]\big) \wedge \big(\beta^*[\mathrm{id}_{E_\ell}]\big) = (\alpha \wedge \beta)^*\big([\mathrm{id}_{E_k}] \wedge [\mathrm{id}_{E_\ell}]\big) \ .$$

Zu bestimmen ist somit die Klasse

$$[\mathrm{id}_{E_k}] \wedge [\mathrm{id}_{E_\ell}] \in \tilde{E}^{k+\ell}(E_k \wedge E_\ell) = [E_k \wedge E_\ell, E_{k+\ell}] \ .$$

Also suchen wir geeignete Abbildungen $\mu_{k,\ell}\colon E_k \wedge E_\ell \to E_{k+\ell}$ für alle $k$, $\ell \in \mathbb{Z}$. Dann erhalten wir ein externes Produkt $[a] \wedge [b]$ als Verkettung

$$X \wedge Y \xrightarrow{\alpha\wedge\beta} E_k \wedge E_\ell \xrightarrow{\mu_{k,\ell}} E_{k+\ell} \ .$$

Sei jetzt $[b] \in \tilde{E}_{k+\ell}(X \wedge Y)$ repräsentiert durch $b\colon S^{k+\ell+m} \to E_m \wedge X \wedge Y$ und $[\alpha]$ wie oben, dann definieren das Schräg-Produkt $[b]/[\alpha] \in \tilde{E}_\ell(Y)$ als Verkettung

$$S^{k+\ell+m} \xrightarrow{b} E_m \wedge X \wedge Y \xrightarrow{\mathrm{id}\wedge\alpha\wedge\mathrm{id}} E_m \wedge E_k \wedge Y \xrightarrow{\mu_{m,k}} E_{m+k} \wedge Y \ .$$

Genauso sind wir in Bemerkung 6.73 bei der Konstruktion der äußeren Produkte vorgegangen. Anschließend können wir wie in Definition 6.23 innere Produkte definieren.

Um die in Proposition 6.21 für die Produkte auf der gewöhnlichen Kohomologie gezeigten Eigenschaften allgemein zu erhalten, müssen die Abbildungen $\mu_{k,\ell}$ die entsprechenden Eigenschaften erfüllen. Am einfachsten lässt sich all das beschreiben, indem man zunächst ein Spektrum $\mathbb{E} \wedge \mathbb{E}$ konstruiert, und dann eine Abbildung $\mu\colon \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ von Spektren. Dadurch wird das externe Produkt stabil im Sinne von Proposition 6.21 (3). Wenn wir (Ko-) Homologie mit anderen Koeffizienten betrachten wollen, benötigen wir entsprechend auch ein reduziertes Produkt $\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$. Dieses Produkt soll bis auf Homotopie in kohärenter Weise assoziativ, unitär und graduiert kommutativ sein. Dazu folgen wir Adams [**Ad**] und Switzer [**Sw**] und beginnen mit einem ganzen Sammelsurium sogenannter naiver reduzierter Produkte.

Zur Vereinfachung betrachten wir zunächst nur Spektren $\mathbb{E} = (E_\bullet, s_\bullet)$ und $\mathbb{F} = (F_\bullet, t_\bullet)$ mit $E_n = F_n = \mathrm{pt}$ für alle $n < 0$. Wir konstruieren ein ebensolches Spektrum $\mathbb{G}$, so dass $G_n = E_{k(n)} \wedge F_{\ell(n)}$ mit Funktionen $k$, $\ell\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $k(n) + \ell(n) = n$. Um Stabilisierungsabbildungen $u_n$ definieren zu können, erlauben wir für jedes $n$ nur zwei Fälle.

(1) Es gilt $k(n+1) = k(n) + 1$ und $\ell(n+1) = \ell(n)$, und wir setzen

$$u(n) = s_{k(n)} \wedge \mathrm{id}_{F_{\ell(n)}}\colon S(E_{k(n)} \wedge F_{\ell(n)}) \cong (SE_{k(n)}) \wedge F_{\ell(n)} \longrightarrow E_{k(n)+1} \wedge F_{\ell(n)} \ .$$

(2) Es gilt $k(n+1) = k(n)$ und $\ell(n+1) = \ell(n) + 1$, und wir setzen

$$u(n) = \mathrm{id}_{E_{k(n)}} \wedge \big((-1)^{k(n)} t_{\ell(n)}\big)\colon S(E_{k(n)} \wedge F_{\ell(n)}) \cong E_{k(n)} \wedge (SF_{\ell(n)}) \longrightarrow E_{k(n)} \wedge F_{\ell(n)+1} \ .$$

Hierbei nutzen wir aus, dass $SX = S^1 \wedge X$ und $X \wedge S^1$ natürlich homöomorph sind. Das Vorzeichen in (2) entspricht dem in Proposition 6.21 (3). Wir realisieren es, indem wir $S^n$ künftig als Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$ betrachten, durch

$$-t_\ell(r, y) = t_\ell(-r, y) \ ,$$

so dass $-t_\ell$ zu $t_\ell$ in $[SF_\ell, F_{\ell+1}]$ invers ist. Generell stellen wir uns auf den Standpunkt, dass das reduzierte Produkt von Räumen (bis auf natürliche Homöomorphismen) assoziativ und kommutativ ist, und versehen nur Abbildungen mit Vorzeichen.

Die Abbildung $(k, \ell)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ beschreibt also einen Zickzack-Pfad nach rechts oben. Diese Zickzack-Pfade kodieren wir wie folgt. Es sei $B \subset \mathbb{N}$ eine Teilmengen, dann definieren wir $\varphi_A\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$\varphi_A(n) = \#\big\{\, k \in A \;\big|\; k < n \,\big\} \ .$$

Beispielsweise ist $\varphi_\mathbb{N} = \mathrm{id}_\mathbb{N}$ und $\varphi_\emptyset \equiv 0$. Falls $A = B \mathbin{\dot\cup} C \subset \mathbb{N}$, erhalten wir

$$\varphi_A = \varphi_B + \varphi_C \ ,$$

und $\varphi_{B\cup C}(n) \mapsto (\varphi_B(n), \varphi_C(n))$ liefert einen Zickzack-Pfad wie oben falls $A$ unendlich ist.

7.20. Definition. Es sei $A = B \dot\cup C \subset \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge, dann definieren wir ein *naives reduziertes Produkt* $\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F} = (G_k, u_k)_k$ durch

$$G_{\varphi_A(n)} = E_{\varphi_B(n)} \wedge F_{\varphi_C(n)} \ ,$$
$$u_{\varphi_A(n)} = \begin{cases} s_{\varphi_B(n)} \wedge \mathrm{id} & \text{falls } \varphi_B(n+1) = \varphi_B(n) + 1, \text{ und} \\ \mathrm{id} \wedge \big((-1)^{\varphi_B(n)} t_{\varphi_C(n)}\big) & \text{falls } \varphi_C(n+1) = \varphi_C(n) + 1. \end{cases}$$

Falls $A$ endlich ist, liefert die obige Definition immer noch den Anfang eines Spektrums; auch diesen Fall werden wir betrachten.

7.21. Beispiel. Es sei $\mathbb{E}$ ein Spektrum und $X$ ein Raum. Dann gilt

$$\mathbb{E} \wedge_{\mathbb{N},\emptyset} \mathbb{S}X = \mathbb{E} \wedge X \tag{1}$$
$$\text{und} \qquad \mathbb{E} \wedge_{\emptyset,\mathbb{N}} \mathbb{S}X = E_0 \wedge \mathbb{S}X \ . \tag{2}$$

7.22. Proposition. *Es seien $A = B \dot\cup C \subset \mathbb{N}$, und $B$ und $C$ seien unendlich. Dann ist das naive Produkt $\wedge_{B,C} \colon \mathcal{SCW}_0 \times \mathcal{SCW}_0 \to \mathcal{SCW}_0$ natürlich.*

Beweis. Wenn $B$ unendlich ist und $\mathbb{U} \subset \mathbb{E}$ kofinal, dann ist $\mathbb{U} \wedge_{B,C} \mathbb{F} \subset \mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}$ kofinal. Denn sei $c$ eine Zelle von $\mathbb{E}$ mit $c_k \in U_k$ für ein $k$. Da $B$ unendlich ist, gibt es ein $n_0$, so dass $B$ mindestens $k$ Elemente kleiner $n_0$ enthält, somit taucht $c$ in $U_{\varphi_B(n)}$ für alle $n \geq n_0$ auf.

Wenn $B$ und $C$ unendlich sind, können wir zu $f \colon \mathbb{E} \to \mathbb{P}$ und $g \colon \mathbb{F} \to \mathbb{Q}$ daher eine Abbildung

$$f \wedge_{B,C} g \colon \mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{P} \wedge_{B,C} \mathbb{Q}$$

definieren. Es gilt $\mathrm{id}_{\mathbb{E}} \wedge_{B,C} \mathrm{id}_{\mathbb{F}} = \mathrm{id}_{\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}}$, und das naive reduzierte Produkt ist ebenfalls mit der Verkettung von Abbildungen verträglich. □

Wenn $B$ hingegen endlich ist, etwa $\#B = k$, und $c$ eine Zelle, die in $E_k$ bereits existiert, in $U_k$ jedoch noch nicht, dann fehlt diese Zelle in $\mathbb{U} \wedge_{B,C} \mathbb{P}$. Also ist $\mathbb{U} \wedge_{B,C} \mathbb{P}$ nicht immer kofinal in $\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{P}$.

Abbildungen vom Grad ungleich 0 können wir noch nicht betrachten, denn seien $f \colon \mathbb{E} \to \mathbb{P}$ und $g \colon \mathbb{F} \to \mathbb{Q}$ vom Grad $k$ beziehungsweise $\ell$, dann erhielten wir

$$f_{\varphi_B(n)} \wedge g_{\varphi_C(n)} \colon E_{\varphi_B(n)} \wedge F_{\varphi_C(n)} \longrightarrow P_{\varphi_B(n)+k} \wedge Q_{\varphi_C(n)+\ell} \ ,$$

und die Räume rechts gehören unter Umständen nicht zum Spektrum $\mathbb{P} \wedge_{B,C} \mathbb{Q}$.

Wir fassen jetzt alle naiven Produkte in einem großen Spektrum zusammen. Die Konstruktion ähnelt dem Teleskop aus dem Beweis von Proposition 5.13, allerdings verwenden wir diesmal einen zweidimensionalen „Basisraum“. Zur Motivation: als $n$-ter Raum von $\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$ kommen alle Smash-Produkte $E_k \wedge F_\ell$ mit $k+\ell$ in Frage. Die Stabilisierungsabbildungen stellen zwischen diesen Räumen Beziehungen her. Wir können hier auch wieder Spektren mit $E_k \neq \mathrm{pt}$ für $k < 0$ zulassen.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & E_{k-1} \wedge F_{\ell+1} & & \\
\cdots \arrow[r] & E_{k-1} \wedge F_\ell \wedge S^1 \arrow[u, "\mathrm{id}\wedge (-1)^{k-1} t_\ell"'] \arrow[r, "s_{k-1}\wedge\mathrm{id}"] & E_k \wedge F_\ell & \\
\cdots \arrow[r] & E_{k-1} \wedge F_{\ell-1} \wedge S^2 \arrow[u, "\mathrm{id}\wedge (-1)^{k-1} t_{\ell-1}"'] \arrow[r, "s_{k-1}\wedge\mathrm{id}"] & E_k \wedge F_{\ell-1} \wedge S^1 \arrow[u, "\mathrm{id}\wedge (-1)^{k} t_{\ell-1}"'] \arrow[r, "s_{k}\wedge\mathrm{id}"] & E_{k+1} \wedge F_{\ell-1} \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Dabei achten wir zunächst einmal nicht auf die genaue Reihenfolge der Faktoren in den einzelnen reduzierten Produkten. Mit $-t_\ell\colon F_\ell \wedge S^1 \to F_{\ell+1}$ bezeichnen wir wieder die Abbildung $y \wedge t \mapsto t_\ell(y \wedge (1-t))$.

Wir können sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Richtung Teleskope bilden, die sich an den Ecken des Diagramms überschneiden. Dazu betrachten wir

$$\Big( \bigvee_{k+\ell\le n} \big(\{(k,\ell)\}_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^{n-k-\ell}\big) \vee \bigvee_{k+\ell\le n-1} \big([k,k+1]_+ \wedge \{\ell\}_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^{n-k-\ell}\big) \\ \vee \bigvee_{k+\ell\le n-1} \big(\{k\}_+ \wedge [\ell,\ell+1]_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^{n-k-\ell}\big)\Big) \Big/ \sim ,$$

dabei verkleben wir an den unteren Enden der Intervalle mit der Identität. Mit $S^{n-k-\ell} = S^1 \wedge S^{n-k-\ell-1}$ verkleben wir an den oberen Enden via

$$[k,k+1]_+ \wedge \{\ell\}_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^1 \wedge S^{n-k-\ell-1} \ni (k+1,\ell,x,y,u,z) \\ \sim \big(k+1,\ell,s(x,u),y,z\big) \in \{(k+1,\ell)\}_+ \wedge E_{k+1} \wedge F_\ell \wedge S^{n-k-\ell-1} \tag{7.1}$$

und

$$\{k\}_+ \wedge [\ell,\ell+1]_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^1 \wedge S^{n-k-\ell-1} \ni (k,\ell+1,x,y,u,z) \\ \sim \big(k,\ell+1,x,t(y,(-1)^k u),z\big) \in \{(k,\ell+1)\}_+ \wedge E_k \wedge F_{\ell+1} \wedge S^{n-k-\ell-1} . \tag{7.2}$$

Dadurch entstehen über den Quadraten $(k,k+1)\times(\ell,\ell+1)$ „Löcher“, die wir als nächstes stopfen wollen. Wir verschieben zunächst den Punkt $(k,\ell,x,y,u,v,z) \in \{(k,\ell)\}_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^1 \wedge S^1 \wedge S^{n-k-\ell-2}$ mit $k+\ell \le n-2$ zunächst nach oben, dann nach rechts, und erhalten

$$(k,\ell,x,y,u,v,z) \longmapsto \big(k,\ell+1,x,t(y,(-1)^k u),v,z\big) \longmapsto \big(k+1,\ell+1,s(x,v),t(y,(-1)^k u),z\big) .$$

Umgekehrt verschieben wir $(k,\ell,x,y,v,-u,z) \in \{(k,\ell)\}_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^1 \wedge S^1 \wedge S^{n-k-\ell-2}$ zunächst nach rechts, dann nach oben, und erhalten wieder

$$(k,\ell,x,y,v,-u,z) \longmapsto \big(k+1,\ell,s(x,v),y,-u,z\big) \longmapsto \big(k+1,\ell+1,s(x,v),t(y,(-1)^k u),z\big) .$$

Wir können also nicht ganz naiv den Raum $[k,k+1]_+\wedge[\ell,\ell+1]_+\wedge E_k\wedge F_\ell\wedge S^{n-k-\ell}$ einkleben, sondern müssen die Koordinaten $(u,v)$ von $S^2 = S^1\wedge S^1$ beim Einkleben entlang $\partial([k,k+1]\times[\ell,\ell+1])$ um $\frac{\pi}{2}$ rotieren lassen. Dazu ersetzen wir $[k,k+1]_+\wedge[\ell,\ell+1]_+\wedge S^2$ durch den Thom-Raum $MV$ eines festen zweidimensionalen reellen Vektorbündels $V \to I^2$. Welches wir wählen, ist egal, allerdings wählen wir über jedem Quadrat das gleiche. An dieser Stelle zeigt sich die Bedeutung der Vorzeichen in Definition 7.20 und (7.1), (7.2) — ohne sie würde sich beim Umlaufen um $\partial([k,k+1]\times[\ell,\ell+1])$ die Orientierung der $S^2$ ändern, und wir könnten nichts passendes einkleben.

Um die Notation zu vereinfachen, sei $e_{k,\ell}$ eine der Zellen $\{(k,\ell)\}$, $[k,k+1]\times\{\ell\}$, $\{k\}\times[\ell,\ell+1]$ oder $[k+1]\times[\ell+1]$ mit unterer linker Ecke $(k,\ell)$, und $d$ sei ihre Dimension. Wir betrachten also die Räume

$$P_n = \Big( \bigvee_{\substack{e_{k,\ell} \\ k+\ell+d\le n}} MV \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^{n-k-\ell-d}\Big) \Big/ \sim , \tag{7.3}$$

wobei $V \to e_{k,\ell}$ jetzt ein $d$-dimensionales Vektorbündel sei. Als Stabilisierungsabbildungen wählen wir die Inklusionen $P_n \wedge S^1 \hookrightarrow P_{n+1}$, und haben ein Spektrum $\mathbb{P} = \mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$ definiert.

7.23. Proposition. *Seien $B$, $C \subset \mathbb{N}$ disjunkte Teilmengen. Dann gibt es in den folgenden drei Fällen natürliche $\mathcal{HSCW}_0$-Isomorphismen $\eta_{B,C}\colon \mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F} \to \mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$.*

(1) *Die Mengen $B$, $C$ sind beide unendlich.*
(2) *Die Menge $B$ ist endlich, $C$ ist unendlich, und $SE_k \cong E_{k+1}$ für alle $k \ge \#B$.*

(3) *Die Menge $B$ ist unendlich, $C$ ist endlich, und $SF_\ell \cong F_{\ell+1}$ für alle $\ell \geq \#C$.*

Beweis. Es sei $\mathbb{G}$ ein Spektrum und $\mathbb{TG}$ das Teleskop mit

$$TG_n = G_n \times \{n\} \vee \bigvee_{m=-\infty}^{n-1} S^{n-m} G_m \wedge [m, m+1]_+ \Big/ \sim .$$

Das Teleskop ist funktoriell, denn sei $g\colon \mathbb{G} \to \mathbb{P}$ gegeben und auf einem kofinalen Unterspektrum $\mathbb{U} \subset \mathbb{G}$ strikt. Wir konstruieren $Tg$ auf einem kofinalen Unterspektrum $\mathbb{V} \subset \mathbb{TG}$ Zelle für Zelle durch Induktion über die Schichtfiltrierung. Sei etwa $c$ eine Zelle, die in $E_k$ und in $U_\ell$ jeweils erstmalig auftritt, dann ist sie an Zellen angeklebt, die in $E_k$ und $U_\ell$ bereits vorhanden sind. Dann nehmen wir die Zelle $c$ über $[k, n]$ für alle $n \geq \ell$ zu $V_n \subset TG_n$ hinzu. Da $g_n$ auf $c$ für alle $n \geq \ell$ definiert ist, können wir $Tg\colon \mathbb{V} \to \mathbb{TP}$ definieren.

Es bezeichne $\pi_n\colon TG_n \to G_n \times \{n\}$ die offensichtliche Projektion; sie ist eine Deformationsretraktion vermöge einer Teleskophomotopie wie im Beweis von Satz 1.93, und liefert eine strikte Homotopieäquivalenz $\pi\colon \mathbb{TG} \to \mathbb{G}$. Wir konstruieren eine Homotopieinverse $f\colon \mathbb{G} \to \mathbb{TG}$. Sei dazu $c$ eine $j$-Zelle, die erstmals in $G_n$ auftritt, mit charakteristischer Abbildung $\Phi\colon S^{n+j-1} \to G_n$. Alle Zellen im Rand von $c$ trete ebenfalls spätestens in $G_n$ auf, somit ist $f \circ \varphi\colon S^{n+j-1} \to TG_n$ bereits definiert, und wir nehmen an, dass $\pi_n \circ f \circ \varphi$ zur Anklebeabbildung $\varphi\colon S^{n+j-1} \to G_n \times \{n\}$ homotop ist. Da $(D^{n+j}, S^{n+j-1})$ eine Kofaserung ist, können wir diese Homotopie zu einer Homotopie von $\Phi$ fortsetzen, und erhalten so eine Fortsetzung von $f$ auf $c$. Die so konstruierte Abbildung $f$ ist dann sogar eine strikte Homotopieäquivalenz. Mit einem ähnlichen Argument sieht man, dass für alle $g\colon \mathbb{G} \to \mathbb{P}$ das folgende Diagramm bis auf Homotopie kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f", "\sim"'] & \mathbb{P} \arrow[d, "\sim"] \\ \mathbb{TG} \arrow[r, "Tg"] & \mathbb{TP} . \end{tikzcd}$$

Als nächstes definieren wir $\gamma\colon \mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \to \mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$. Es beschreibe $(r(t), s(t)) \in \mathbb{R}^2$ den Zickzackpfad mit $r(\varphi_{B\cup C}(n)) = \varphi_B(n)$ und $s(\varphi_{B\cup C}(n)) = \varphi_C(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $(r, s)|_{[m,m+1]}$ für alle $m$ linear sei. Es sei $k = \varphi_B(m)$ und $\ell = \varphi_C(m)$ mit $k + \ell \leq n$. Dann definieren wir $\gamma_n$ auf

$$[k+\ell, k+\ell+1]_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^{n-m} \subset TG_n$$

für $t \in [k+\ell, k+\ell+1]$, $x \in E_k$, $y \in F_\ell$, $z \in S^{n-k-\ell}$ durch

$$\gamma_n(t, x, y, z) = \big(r(t), s(t), x, y, z\big) .$$

Diese stückweisen Definitionen legen $\gamma_n$ stetig auf $TG_n$ fest, und sind kompatibel mit Stabilisierung. Wir erhalten daher sogar eine strikte Abbildung $\gamma\colon \mathbb{T}(\mathbb{E}\wedge_{B,C}\mathbb{F}) \to \mathbb{E}\wedge\mathbb{F}$. Mit dem gleichen Argument wie in Proposition 7.22 ist diese Konstruktion unter den Bedingungen (1), (2) oder (3) natürlich.

Um zu zeigen, dass $\eta_{B,C} = \gamma \circ f\colon \mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F} \to \mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$ eine stabile Homotopieäquivalenz ist, betrachten wir zunächst Bedingung (1). Wir konstruieren ein Unterspektrum $\mathbb{U} \subset \mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$, so dass $U_{k+\ell}$ für $k = \varphi_B(m)$, $\ell = \varphi_C(n)$ wie oben aus allen Zellen oberhalb von $(-\infty, k] \times (-\infty, \ell]$ besteht. Aufgrund der Bedingung (1) ist dieses Unterspektrum kofinal in $\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$. Der Raum $U_{k+\ell}$ enthält $\{(k, \ell)\}_+ \wedge E_k \wedge F_\ell$ als Deformationsretrakt. Ähnlich wie oben erhalten wir als Homotopieinverses von $\eta_{B,C}$ eine strikte Abbildung $\mathbb{U} \to \mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}$.

Im Fall (2) enthalte $U_{k+\ell}$ stattdessen alle Zellen oberhalb von $\mathbb{R} \times (-\infty, \ell]$, falls $k = \varphi_B(m) \geq \#B$. Dann ist $\mathbb{U}$ wieder kofinal, und $U_{k+\ell}$ enthält $\{(k, \ell)\}_+ \wedge E_k \wedge F_\ell$ als Deformationsretrakt, da in allen $E_r$ mit $r \geq k$ keine neuen Zellen hinzukommen. Der Fall (3) funktioniert analog. $\square$

7.24. Bemerkung. Aufgrund der Natürlichkeit von $\pi$ und $\gamma$ im vorangegangenen Beweis kommutiert für disjunkte Teilmengen $B$, $C$, $D \subset \mathbb{N}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge_{B\cup C,D} \mathbb{G} & \mathbb{T}\big((\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge_{B\cup C,D} \mathbb{G}\big) \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\gamma"] & (\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G} \\
\big(\mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F})\big) \wedge_{B\cup C,D} \mathbb{G} \arrow[u, "\pi\wedge\mathrm{id}"] \arrow[d, "\gamma\wedge\mathrm{id}"'] & \mathbb{T}\big((\mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F})) \wedge_{B\cup C,D} \mathbb{G}\big) \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[u, "T(\pi\wedge\mathrm{id})"] \arrow[d, "T(\gamma\wedge\mathrm{id})"'] & \big(\mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F})\big)\mathbb{G} \arrow[u, "\pi\wedge\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\gamma\wedge\mathrm{id}"'] \\
(\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge_{B\cup C,D} \mathbb{G} & \mathbb{T}\big((\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge_{B\cup C,D} \mathbb{G}\big) \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\gamma"] & (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G}\,.
\end{tikzcd}$$

Wir werden später benutzen, dass dann das folgende Diagramm bis auf Homotopie kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge_{B\cup C,D} \mathbb{G} \arrow[r, "\eta_{B\cup C,D}"] \arrow[d, "\eta_{B,C}\wedge\mathrm{id}"'] & (\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G} \arrow[d, "\eta_{B,C}\wedge\mathrm{id}"] \\
(\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge_{B\cup C,D} \mathbb{G} \arrow[r, "\eta_{B\cup C,D}"] & (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G}\,.
\end{tikzcd}$$

Als nächstes erinnern wir uns an die Struktur einer monoidalen Kategorie aus Definition 4.26. Da wir hier zusätzlich eine Symmetrie zwischen $\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$ und $\mathbb{F} \wedge \mathbb{E}$ einführen wollen, benötigen wir natürliche $\mathcal{HSCW}$-Isomorphismen

$$\alpha_{\mathbb{E},\mathbb{F},\mathbb{G}} \colon (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge \mathbb{G})\,,$$
$$\tau_{\mathbb{E},\mathbb{F}} \colon \mathbb{E} \wedge \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F} \wedge \mathbb{E}\,, \qquad \lambda_{\mathbb{E}} \colon \mathbb{S} \wedge \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E} \qquad \text{und} \qquad \rho_{\mathbb{E}} \colon \mathbb{E} \wedge \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{E}\,,$$

die insgesamt acht Relationen zu erfüllen haben. Für die naiven reduzierten Produkte gibt es analoge Isomorphismen in $\mathcal{SCW}$, die sogar strikt sind. Wir werden daher versuchen, die obigen $\mathcal{HSCW}$-Isomorphismen so zu konstruieren, dass sie über die Abbildungen aus Proposition 7.23 mit den entsprechenden Isomorphismen naiver reduzierter Produkte verträglich sind.

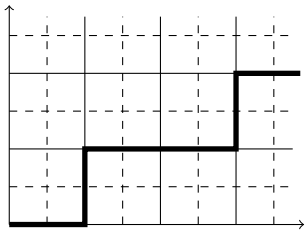
Wir erinnern uns an Beispiel 7.21 (1) und wählen für $\lambda_{\mathbb{E}}$ und $\rho_{\mathbb{E}}$ Homotopieinverse der Abbildungen

$$\eta_{\emptyset,\mathbb{N}} \colon \mathbb{E} = \mathbb{S} \wedge_{\emptyset,\mathbb{N}} \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{S} \wedge \mathbb{E} \qquad \text{und} \qquad \eta_{\mathbb{N},\emptyset} \colon \mathbb{E} = \mathbb{E} \wedge_{\mathbb{N},\emptyset} \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{E} \wedge \mathbb{S}\,.$$

Zur Konstruktion von $\tau_{\mathbb{E},\mathbb{F}}$ überlegen wir uns zunächst, dass das reduzierte Produkt von Räumen nach Bemerkung 3.73 (2) kommutativ ist. Daher bestehen die naiven Produkte $\mathbb{E}\wedge_{B,C}\mathbb{F}$ und $\mathbb{F}\wedge_{B,C}\mathbb{E}$ bis auf einen natürlichen Homöomorphismus aus den gleichen Räumen $E_{\varphi_B(n)} \wedge F_{\varphi_C(n)}$. Allerdings passen die Stabilisierungsabbildungen nicht unbedingt zusammen. Wenn etwa $\varphi_B(n+1) = \varphi_B(n)+1$, betrachten wir

$$\begin{aligned} s_{\varphi_B(n)} \wedge \mathrm{id} \colon SE_{\varphi_B(n)} \wedge F_{\varphi_C(n)} &\longrightarrow E_{\varphi_B(n)+1} \wedge F_{\varphi_C(n)} \\ \text{und} \qquad \mathrm{id} \wedge \big((-1)^{\varphi_C(n)} s_{\varphi_B(n)}\big) \colon F_{\varphi_C(n)} \wedge SE_{\varphi_B(n)} &\longrightarrow F_{\varphi_C(n)} \wedge E_{\varphi_B(n)+1}\,. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Wir müssen also vermeiden, dass $\varphi_C(n)$ ungerade ist, wenn $\varphi_B(n+1) = \varphi_B(n) + 1$.



$B = \{0, 1, 4, 5, 6, 7, 10, \dots\}$
$C = \{2, 3, 8, 9, \dots\}$

Genauso vermeiden wir, dass $\varphi_B(n)$ ungerade ist, wenn $\varphi_C(n+1) = \varphi_C(n)+1$, indem wir fordern, dass $B$ und $C$ von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen $2k$, $2k+1 \in \mathbb{N}$ je entweder beide oder keines enthalten, denn dann verläuft unser Zickzackpfad immer je zwei Schritte in die gleiche Richtung. Unter dieser Bedingung erhalten wir einen strikten Isomorphismus $\tau_{B,C}\colon \mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F} \to \mathbb{F} \wedge_{C,B} \mathbb{E}$.

7.25. Proposition. *Zu je zwei Spektren $\mathbb{E}$ und $\mathbb{F}$ gibt es ein Spektrum $\mathbb{Q}$ und stabile Homotopieäquivalenzen $\iota_0\colon \mathbb{E} \wedge \mathbb{F} \to \mathbb{Q}$ und $\iota_1\colon \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \to \mathbb{Q}$ vom Grad 0, so dass für alle disjunkten Teilmengen $B$, $C \subset \mathbb{N}$, von denen jede für jedes $k \in \mathbb{N}$ jeweils entweder alle vier Zahlen $4k$, $4k+1$, $4k+2$ und $4k+3$ enthält oder keine von ihnen, das folgende Diagramm bis auf stabile Homotopie kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \arrow[r] \arrow[d, "T\tau_{B,C}"'] & \mathbb{E} \wedge \mathbb{F} \arrow[dr, "\iota_0"] & \\
& & \mathbb{Q} \\
\mathbb{T}(\mathbb{F} \wedge_{C,B} \mathbb{E}) \arrow[r] & \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \arrow[ur, "\iota_1"'] &
\end{tikzcd} .$$

Dann können wir $\tau_{\mathbb{E},\mathbb{F}} = \iota_1^{-1} \circ \iota_0 \in [\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}, \mathbb{F} \wedge \mathbb{E}]_0$ definieren.

Beweis. Wir konstruieren $\mathbb{Q}$ als Zylinder von zweidimensionalen Teleskopen, betrachten in $Q_n$ also Zellen über $[k,k+1] \times [\ell,\ell+1] \times I$ mit $k+\ell \le n-2$. Für $r = 0 \in I$ fügen wir eine Kopie von $\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$ ein, und für $r = 1 \in I$ eine Kopie von $\mathbb{F} \wedge \mathbb{E}$, bei der die Rollen von $k$ und $\ell$ vertauscht sind. Aufgrund der Vorzeichenwahlen in (7.1), (7.2) können wir für $2i+2j \le n-2$ Zylinder der Form

$$[2i,2i{+}2]_+ \wedge \{2j\}_+ \wedge I_+ \wedge E_{2i} \wedge F_{2j} \wedge S^{n-2i-2j} \qquad \text{und} \qquad \{2i\}_+ \wedge [2j,2j{+}2]_+ \wedge I_+ \wedge E_{2i} \wedge F_{2j} \wedge S^{n-2i-2j}$$

einkleben, wobei $E_{2i}$ und $F_{2j}$ bei $r = 1$ formal die Plätze tauschen.

Über dem Rand des Quaders $e = [2i,2i+2] \times [2j,2j+2] \times I$ für $2i+2j \le n-4$ erhalten wir dadurch den Raum

$$MV' \wedge E_{2i} \wedge F_{2j} \wedge S^{n-2i-2j-4} ,$$

dabei ist $MV'$ der Thom-Raum eines vierdimensionalen Vektorbündels $V' \to \partial e \cong S^2$, klassifiziert durch $\alpha \in \pi_2(BSO(4)) \cong \pi_1(SO(4)) \cong \mathbb{Z}/2$, siehe Satz 3.98 und Bemerkung 6.58 (3). Diese Bündel hängt nicht von $n$, $i$ und $j$ ab, sondern nur von der obigen Wahl von $V \to I^2$.

Wenn wir zu größeren Quadern $e' = [4i,4i+4] \times [4j,4j+4] \times I$ für $4i+4j \le n-8$ übergehen, wird das analog konstruierte achtdimensionale Vektorbündel $V'' \to \partial e'$ durch $4\alpha = 0$ klassifiziert, lässt sich also auf $e'$ fortsetzen. Wir fixieren eine solche Fortsetzung $W \to e$ und kleben den Raum

$$MW \wedge E_{4i} \wedge F_{4j} \wedge S^{n-4i-4j-8}$$

entsprechend ein.

Mit Lemma 6.43 erhalten wir die gesuchten Homotopieäquivalenzen $\iota_0$ und $\iota_1$, definiert jeweils auf dem kofinalen Unterspektrum von $\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$ beziehungsweise $\mathbb{F} \wedge \mathbb{E}$, das jeweils nur aus Quadraten $[4i,4i+4] \times [4j,4j+1]$ und den Räumen $E_{4i}$ und $F_{4j}$ aufgebaut wurde. Aufgrund unser Bedingung an die Mengen $B$ und $C$ reicht das, um die horizontalen Pfeile im obigen Diagramm zu erhalten. Da wir über den Intervallen $[4i,4i+4] \times \{4j\}$ und $\{4i\} \times [4j,4j+4]$ triviale Zylinder gebildet haben, kommutiert das obige Diagramm. □

Es seien $B$, $C$, $D \subset \mathbb{N}$ paarweise disjunkte Teilmengen. Das reduzierte Produkt von Räumen ist nach Bemerkung 3.73 (2) bis auf einen natürlichen Homöomorphismus assoziativ. Wir erhalten Abbildungen

$$\alpha_{B,C,D}\colon (E_{\varphi_B(n)} \wedge F_{\varphi_C(n)}) \wedge G_{\varphi_D(n)} \cong E_{\varphi_B(n)} \wedge (F_{\varphi_C(n)} \wedge G_{\varphi_D(n)}) .$$

Nach Konstruktion der naiven reduzierten Produkte liefern diese zusammen einen strikten Isomorphismus der Spektren $(\mathbb{E}\wedge_{B,C}\mathbb{F})\wedge_{B\cup C,D}$ und $\mathbb{E}\wedge_{B,C\cup D}(\mathbb{F}\wedge_{C,D})$, dazu überprüft man Verträglichkeit mit den Vorzeichen in (7.1) und (7.2).

7.26. Proposition. *Für alle Spektren $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ existiert ein Spektrum $\mathbb{P}$ und Homotopieäquivalenzen $\iota_0\colon \mathbb{P}\to(\mathbb{E}\wedge\mathbb{F})\wedge\mathbb{G}$, und $\iota_1\colon \mathbb{P}\to\mathbb{E}\wedge(\mathbb{F}\wedge\mathbb{G})$, so dass für alle Tripel paarweise disjunkter Teilmengen $B$, $C$, $D\subset\mathbb{N}$ mit $\#(B\cup C)=\#(C\cup D)=\infty$ das folgende Diagramm bis auf Homotopie kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{E}\wedge_{B,C}\mathbb{F})\wedge\mathbb{G} & \big(\mathbb{T}(\mathbb{E}\wedge_{B,C}\mathbb{F})\big)\wedge\mathbb{G} \arrow[l, "\pi\wedge\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\gamma\wedge\mathrm{id}"] & (\mathbb{E}\wedge\mathbb{F})\wedge\mathbb{G} \\
(\mathbb{E}\wedge_{B,C}\mathbb{F})\wedge_{B\cup C,D}\mathbb{G} \arrow[u, "\eta_{B\cup C,D}"] \arrow[d, "\alpha_{B,C,D}"'] & \mathbb{T}\big((\mathbb{E}\wedge_{B,C}\mathbb{F})\wedge_{B\cup C,D}\mathbb{G}\big) \arrow[l, "\pi"'] \arrow[ul, "\gamma"'] \arrow[u, "\gamma_0'"'] \arrow[d, "T\alpha_{B,C,D}"'] \arrow[dr, "\kappa_0"] & \mathbb{P} \arrow[u, "\iota_0"', "\sim"] \arrow[d, "\iota_1"', "\sim"] \\
\mathbb{E}\wedge_{B,C\cup D}(\mathbb{F}\wedge_{C,D}\mathbb{G}) \arrow[d, "\eta_{B,C\cup D}"] & \mathbb{T}\big(\mathbb{E}\wedge_{B,C\cup D}(\mathbb{F}\wedge_{C,D}\mathbb{G})\big) \arrow[l, "\pi"'] \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[d, "\gamma_1'"] \arrow[ur, "\kappa_1"'] & \\
\mathbb{E}\wedge(\mathbb{F}\wedge_{C,D}\mathbb{G}) & \mathbb{E}\wedge\big(\mathbb{T}(\mathbb{F}\wedge_{C,D}\mathbb{G})\big) \arrow[l, "\mathrm{id}\wedge\pi"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\wedge\gamma"] & \mathbb{E}\wedge(\mathbb{F}\wedge\mathbb{G})\,.
\end{tikzcd}$$

Beweis. Das Produkt $\mathbb{K}=(\mathbb{E}\wedge\mathbb{F})\wedge\mathbb{G}$ besteht aus vierdimensionalen Teleskopen der Form

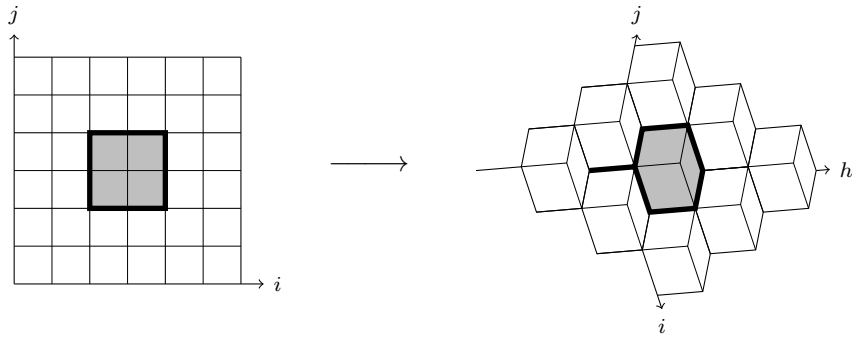
$$\begin{aligned}
K_n &= \Big(\bigvee_{e_{i,j},e_{h,k}} MW\wedge\big(MV\wedge E_i\wedge F_j\wedge S^{h-i-j-d}\big)\wedge G_k\wedge S^{n-h-k-\delta}\Big)\Big/\sim \\
&\cong \Big(\bigvee_{e_{i,j},e_{h,k}} M(V\boxplus W)\wedge E_i\wedge F_j\wedge G_k\wedge S^{n-i-j-k-d-\delta}\Big)\Big/\sim\,. \qquad (7.5)
\end{aligned}$$

Hierbei sind $e_{i,j}$, $e_{h,k}$ wieder Zellen der Dimensionen $d$, $\delta\le 2$ mit unterer linker Ecke $(i,j)$ beziehungsweise $(h,k)$, wobei $i+j+d\le h\le n-k-\delta$. Außerdem sind $V\to e_{i,j}$ und $W\to e_{h,k}$ wieder reelle Vektorbündel vom Rang $d$ beziehungsweise $\delta$. Verklebt sind die einzelnen Blöcke wie in (7.3).

Wir konstruieren $\mathbb{P}'$ aus dreidimensionalen Teleskopen, indem wir die überflüssige Richtung $h$ eliminieren. Dazu betrachten wir den Komplex $C_n^3\subset\mathbb{R}^3$ bestehend aus Würfeln der Kantenlänge 1 mit ganzzahligen Koordinaten und alle ihren Seiten, so dass die Summe aller Koordinaten $\le n$ bleibt. Wir definieren eine Abbildung $\vartheta=\varphi\otimes\mathrm{id}\colon C_n^3\to\mathbb{R}^4$, die die Faktoren in Richtung von $k$ unverändert lässt, so dass

$$\begin{aligned}
\mathrm{im}(\varphi|_{\{(i,j)\}}) &= \{(i,j,i+j)\}\,,\\
\mathrm{im}(\varphi|_{[i,i+1]\times\{j\}}) &= \{(i,j)\}\times[i+j,i+j+1]\cup[i,i+1]\times\{(j,i+j+1)\}\,,\\
\mathrm{im}(\varphi|_{\{i\}\times[j,j+1]}) &= \{(i,j)\}\times[i+j,i+j+1]\cup\{i\}\times[j,j+1]\times\{i+j+1\}\,,\\
\mathrm{im}(\varphi|_{[i,i+1]\times[j,j+1]}) &= \{(i,j)\}\times[i+j,i+j+1]\cup[i,i+1]\times\{j\}\times[i+j+1,i+j+2]\\
&\quad\cup\{i\}\times[j,j+1]\times[i+j+1,i+j+2]\cup[i,i+1]\times[j,j+1]\times\{i+j+2\}\,.
\end{aligned}$$

Hierbei legt $\varphi$ auf den Rändern jeder Zelle die Abbildung im Inneren bis auf Homotopie eindeutig fest, und wir können vereinbaren, dass $\varphi$ auf den Zellen halber Kantenlänge affin ist.




Das Bild von $\vartheta$ enthält nur Zellen der Dimension $\leq 3$ und ist ein Deformationsretrakt der $K_n$ zugrunde liegenden Teilmenge $C_n^4 \subset \mathbb{R}^4$. Wir vergessen Basispunkte für den Moment, ersetzen die reduzierten Produkte in der Konstruktion von $K_n$ durch kartesische Produkte und stellen uns den so erhaltenen Raum als „Bündel“ $\bar{K}_n \to C_n^4$ vor. Dann ist die Einschränkung dieses Bündels auf $\operatorname{im}\vartheta$ ein Deformationsrektrakt, denn wegen Lemma 6.43 sind die Vektorbündel $V$ und $W$ auf jeder Zelle trivial. Es bezeichne $\bar{P}_n = \vartheta^*\bar{K}_n$ den Rückzug dieses Bündels nach $C_n^3$ und $\bar{\iota}_0 \colon \bar{P}_n \to K_n$ die zugehörige Einbettung. Da $C_n^3$ zusammenziehbar ist, ist auch $P_n = \bar{P}_n / C_n^3$ homotopieäquivalent zu $K_n$, und $\iota_0 \colon P_n \to K_n$ ist eine Homotopieäquivalenz.

Wir betrachten die Struktur des Raumes $P_n$, dabei bezeichne $e_{i,j,k} \cong I^d$ eine Zelle der Dimension $0 \leq d \leq 3$ mit linker unterer Ecke $(i,j,k)$.

(0) Über den Null-Zellen haben wir den Raum $E_i \wedge F_j \wedge G_k \wedge S^{n-i-j-k}$.
(1) Über den Eins-Zellen betrachten wir die Räume $I_+ \wedge E_i \wedge F_j \wedge G_k \wedge S^{n-i-j-k}$, die wir wie in (7.1), (7.2) mit den korrekten Vorzeichen an die obigen Räume ankleben.
(2) Über den Zwei-Zellen betrachten wir $MV \wedge E_i \wedge F_j \wedge G_k \wedge S^{n-i-j-k-2}$. Dabei entspricht das Bündel $V \to e_{i,j,k}$ entweder dem Bündel $V \to I^2$ in (7.5), falls $e_{i,j,k}$ in $i$-$j$-Richtung liegt, oder dem isomorphen Bündel $W \to I^2$ in den anderen Fällen.
(3) Über jeder Drei-Zelle betrachten wir $MV \wedge E_i \wedge F_j \wedge G_k \wedge S^{n-i-j-k-3}$, dabei ist $V \to I^3$ jetzt ein reelles Bündel vom Rang 3. Da $\pi_3(BSO(3)) = \pi_2(SO(3)) = 0$, hängt dieses Bündel bis auf Isomorphie nur von seiner Einschränkung auf $\partial I^3$ ab.

Wenn wir anstelle $\mathbb{K} = (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G}$ das Spektrum $\mathbb{L} = \mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge \mathbb{G})$ betrachten, erhalten wir einen genauso konstruierten Raum. Daher können wir auch eine Homotopieäquivalenz $\iota_1 \colon P_n \to L_n$ angeben.

Als nächstes konstruieren wir $\kappa_0 \colon \mathbb{T}((\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge_{B \cup C, D} \mathbb{G}) \to \mathbb{P}$ analog zu $\gamma$ im Beweis von Proposition 7.23. Die Verkettung $i_0 \circ \kappa_0$ faktorisiert in natürlicher Weise über $(\mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F})) \wedge \mathbb{G}$, und wir erhalten die Abbildungen $\gamma_0'$. Analog konstruieren wir $\kappa_1$ und $\gamma_1'$. Man überprüft leicht, dass das obige Diagramm dann bis auf Homotopie kommutiert. $\square$

Der folgende Satz fasst die wichtigsten Eigenschaften des reduzierten Produktes zusammen.

7.27. Satz. *Die Kategorie* $(\mathcal{HSCW}, \wedge, \mathbb{S})$ *ist eine* graduiert symmetrische monoidale Kategorie. *Inbesondere ist das reduzierte Produkt ein* graduierter Bifunktor, *das heißt, für komponierbare Abbildungen* $f$, $g$, $p$ *und* $q$ *vom Grad* $k$, $\ell$, $m$ *beziehungsweise* $n$ *gilt*

$$(g \wedge q) \circ (f \wedge p) = (-1)^{kn} (g \circ f) \wedge (q \circ p) \ ,$$

*und es existieren natürliche Isomorphismen*

$$\alpha_{\mathbb{E},\mathbb{F},\mathbb{G}} \colon (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge \mathbb{G}) \ ,$$
$$\tau \colon \mathbb{E} \wedge \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \ , \qquad \lambda \colon \mathbb{S} \wedge \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E} \qquad \textit{und} \qquad \rho \colon \mathbb{E} \wedge \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{E} \ ,$$

*so dass die folgenden Diagramme kommutieren:*

$$\begin{tikzcd}
 & \big((\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G}\big) \wedge \mathbb{H} \arrow[r, "\alpha_{\mathbb{E},\mathbb{F},\mathbb{G}} \wedge \mathrm{id}_{\mathbb{H}}"] \arrow[dl, "\alpha_{\mathbb{E}\wedge\mathbb{F},\mathbb{G},\mathbb{H}}"'] & \big(\mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge \mathbb{G})\big) \wedge \mathbb{H} \arrow[d, "\alpha_{\mathbb{E},\mathbb{F}\wedge\mathbb{G},\mathbb{H}}"] \\
(\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge (\mathbb{G} \wedge \mathbb{H}) \arrow[dr, "\alpha_{\mathbb{E},\mathbb{F},\mathbb{G}\wedge\mathbb{H}}"'] & & \\
 & \mathbb{E} \wedge \big(\mathbb{F} \wedge (\mathbb{G} \wedge \mathbb{H})\big) & \mathbb{E} \wedge \big((\mathbb{F} \wedge \mathbb{G}) \wedge \mathbb{H}\big) \arrow[l, "\mathrm{id}_{\mathbb{E}} \wedge \alpha_{\mathbb{F},\mathbb{G},\mathbb{H}}"']
\end{tikzcd} \ , \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E} \wedge \mathbb{F} \arrow[r, "\tau_{\mathbb{E},\mathbb{F}}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathbb{E}\wedge\mathbb{F}}"'] & \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \arrow[r, "\tau_{\mathbb{F},\mathbb{E}}"] & \mathbb{E} \wedge \mathbb{F}
\end{tikzcd} \ , \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathbb{F} \wedge \mathbb{E}) \wedge \mathbb{G} \arrow[r, "\alpha_{\mathbb{F},\mathbb{E},\mathbb{G}}"] & \mathbb{F} \wedge (\mathbb{E} \wedge \mathbb{G}) \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathbb{F}} \wedge \tau_{\mathbb{E},\mathbb{G}}"] & \\
(\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G} \arrow[ur, "\tau_{\mathbb{E},\mathbb{F}} \wedge \mathrm{id}_{\mathbb{G}}"] \arrow[dr, "\alpha_{\mathbb{E},\mathbb{F},\mathbb{G}}"'] & & & \mathbb{F} \wedge (\mathbb{G} \wedge \mathbb{E}) \ , \\
 & \mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge \mathbb{G}) \arrow[r, "\tau_{\mathbb{E},\mathbb{F}\wedge\mathbb{G}}"'] & (\mathbb{F} \wedge \mathbb{G}) \wedge \mathbb{E} \arrow[ur, "\alpha_{\mathbb{F},\mathbb{G},\mathbb{E}}"'] &
\end{tikzcd} \tag{3}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{S} \wedge \mathbb{E}) \wedge \mathbb{F} \arrow[r, "\alpha_{\mathbb{S},\mathbb{E},\mathbb{F}}"] \arrow[rr, bend right, "\lambda_{\mathbb{E}} \wedge \mathrm{id}_{\mathbb{F}}"'] & \mathbb{S} \wedge (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \arrow[r, "\lambda_{\mathbb{E}\wedge\mathbb{F}}"] & \mathbb{E} \wedge \mathbb{F}
\end{tikzcd} \ , \tag{4}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{E} \wedge \mathbb{S}) \wedge \mathbb{F} \arrow[r, "\alpha_{\mathbb{E},\mathbb{S},\mathbb{F}}"] \arrow[rr, bend right, "\rho_{\mathbb{E}} \wedge \mathrm{id}_{\mathbb{F}}"'] & \mathbb{E} \wedge (\mathbb{S} \wedge \mathbb{F}) \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbb{E}} \wedge \lambda_{\mathbb{F}}"] & \mathbb{E} \wedge \mathbb{F}
\end{tikzcd} \ , \tag{5}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{S} \arrow[r, "\alpha_{\mathbb{E},\mathbb{F},\mathbb{S}}"] \arrow[rr, bend right, "\rho_{\mathbb{E}\wedge\mathbb{F}}"'] & \mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge \mathbb{S}) \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbb{E}} \wedge \rho_{\mathbb{F}}"] & \mathbb{E} \wedge \mathbb{F}
\end{tikzcd} \ , \tag{6}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S} \wedge \mathbb{E} \arrow[r, "\tau_{\mathbb{S},\mathbb{E}}"] \arrow[rr, bend right, "\lambda_{\mathbb{E}}"'] & \mathbb{E} \wedge \mathbb{S} \arrow[r, "\rho_{\mathbb{E}}"] & \mathbb{E}
\end{tikzcd} \ , \tag{7}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S} \wedge \mathbb{S} \arrow[r, shift left, "\tau_{\mathbb{S},\mathbb{S}}"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}_{\mathbb{S}\wedge\mathbb{S}}"'] & \mathbb{S} \wedge \mathbb{S}
\end{tikzcd} \ . \tag{8}$$

Üblicherweise werden diese acht Kohärenzbedingungen gemeinsam aufgeführt. Nach einem Satz von Mac Lane folgen alle anderen Kohärenzen (wenn sie denn gelten) aus den obigen. Allerdings braucht man von den Aussagen (4) und (6) nur eine.

Beweis. Aus den Proposition 7.22 und 7.23 folgt die Natürlichkeit des reduzierten Produktes unter Abbildungen vom Grad 0. Mit den Propositionen 7.23–7.26 können wir jede der Bedingungen (1)–(7) durch eine äquivalente Bedingung an naive Produkte ersetzen. Dazu wählen wir für jedes am Diagramm beteiligte Spektrum eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit folgenden Nebenbedingungen.

- Wenn ein Sphärenspektrum $\mathbb{S}$ zusammen mit $\lambda$ oder $\rho$ auftritt, ordnen wir ihm stets die leere Menge zu, alle anderen Teilmengen seien unendlich.
- Jede Teilmenge enthalte für jedes $k \in \mathbb{N}$ entweder alle vier Zahlen $4k, \ldots, 4k+3$ oder keine von ihnen.
- Alle Teilmengen für ein festes Diagramm seien paarweise disjunkt.

Anschließend überprüfen wir, dass das so erhaltene Diagramm naiver Produkte strikt kommutiert. Nur Bedingung (8) überprüfen wir von Hand in Übung 7.62.

Es bleibt das Verhalten unter Abbildungen von verschiedenen Graden zu prüfen (später).

□

## 7.d. Ringspektren und Produkte

Wir benutzen das soeben eingeführte reduzierte Produkt von Spektra, um Produkte wie in den Propositionen 6.21 und Definition 6.23 zu formalisieren. Dadurch erhalten wir automatisch Stabilitätseigenschaften analog zu Proposition 6.21 (3).

7.28. Definition. Ein *Ringspektrum* $(\mathbb{E}, \mu, \varepsilon)$ besteht aus einem Spektrum $\mathbb{E}$, einer *Multiplikation* $\mu\colon \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ und einer *Einheitsabbildung* $\varepsilon\colon \mathbb{S} \to \mathbb{E}$, so dass die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{E} \wedge \mathbb{E}) \wedge \mathbb{E} \arrow[r, "\mu\wedge\mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha_{\mathbb{E},\mathbb{E},\mathbb{E}}"'] & \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \arrow[dr, "\mu"] & \\
\mathbb{E} \wedge (\mathbb{E} \wedge \mathbb{E}) \arrow[r, "\mathrm{id}\wedge\mu"] & \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \arrow[r, "\mu"'] & \mathbb{E}
\end{tikzcd} \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S} \wedge \mathbb{E} \arrow[r, "\varepsilon\wedge\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\lambda"'] & \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \arrow[d, "\mu"] & \mathbb{E} \wedge \mathbb{S} \arrow[l, "\varepsilon\wedge\mathrm{id}"'] \arrow[dl, "\rho"] \\
& \mathbb{E} &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

in $\mathcal{HSCW}$ kommutieren. Es heißt (*graduiert*) *kommutativ,* wenn auch das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \arrow[r, "\tau"] \arrow[rr, bend right, "\mu"'] & \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \arrow[r, "\mu"] & \mathbb{E}\,.
\end{tikzcd} \tag{3}$$

Ein (*Rechts-*) *Modulspektrum* $(\mathbb{F}, \nu)$ über einem Ringspektrum $(\mathbb{E}, \mu, \varepsilon)$ besteht aus einem Spektrum $\mathbb{F}$ und einer Multiplikation $\nu\colon \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \to \mathbb{F}$, so dass die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{F} \wedge \mathbb{E}) \wedge \mathbb{E} \arrow[r, "\nu\wedge\mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha_{\mathbb{F},\mathbb{E},\mathbb{E}}"'] & \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \arrow[dr, "\nu"] & \\
\mathbb{F} \wedge (\mathbb{E} \wedge \mathbb{E}) \arrow[r, "\mathrm{id}\wedge\mu"] & \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \arrow[r, "\nu"'] & \mathbb{F}
\end{tikzcd} \tag{4}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F} \wedge \mathbb{S} \arrow[r, "\mathrm{id}\wedge\varepsilon"] \arrow[rr, bend right, "\rho"'] & \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \arrow[r, "\nu"] & \mathbb{F}
\end{tikzcd} \tag{5}$$

in $\mathcal{HSCW}_0$ kommutieren. Analog definiert man Linksmodulspektren über $(\mathbb{E}, \mu, \varepsilon)$.

Wir nehmen also wieder an, dass alle Ringspektren eine Eins haben, die auf allen Modulspektren durch die Identität wirkt. Im Folgenden schreiben wir kurz $\mathbb{E}$ oder $\mathbb{F}$ für Ring- beziehungsweise Modulspektren, wenn Multiplikation und Einheitsabbildung klar sind.

7.29. Bemerkung. Wenn wir Multiplikationsabbildungen $\mu_{k,\ell}\colon E_k \to E_\ell \to E_{k+\ell}$ und $\varepsilon_k\colon S^k \to E_k$ angeben können, die (1) und (2) im Sinne „naiver" Produkte sowie die Stabilitätsbedingung

$$\mu_{k+1,\ell} \circ \big(s_k \wedge \mathrm{id}_{F_\ell}\big) = s_{k+\ell} \circ S\mu_{k,\ell} = \mu_{k,\ell+1} \circ \big(\mathrm{id}_{E_k} \wedge (-1)^k s_\ell\big)$$

für alle $k$ und $\ell$ erfüllen, erhalten wir die obigen Abbildungen $\mu$ und $\varepsilon$ sogar strikt wie in Übung 7.61 und haben ein Ringspektrum konstruiert.

Dabei tritt an Stelle von (3) die Bedingung

$$\mu_{\ell,k} = \mu_{k,\ell} \circ \tau_{\ell,k}\ .$$

Man beachte, dass $\tau_{k,\ell}\colon E_k \wedge E_\ell \to E_\ell \wedge E_k$ der natürlichen Abbildung aus Bemerkung 3.73 (2) nur bis auf das Vorzeichen $(-1)^{k\ell}$ entspricht; dies ergibt sich aus (7.4) und der obigen Stabilitätsbedingung. Daher sind kommutative Ringspektren in Wirklichkeit nur graduiert kommutativ.

Um ein Modulspektrum zu konstruieren, benötigen wir entsprechend Abbildungen $\nu_{k,\ell}\colon E_k \wedge F_\ell \to F_{k+\ell}$, die (4) und (5) im „naiven" Sinne erfüllen.

7.30. Beispiel. Wir kennen bereits einige Ring- und Modulspektren.

(1) Das Sphärenspektrum ist ein Ringspektrum, dabei ist $\mu_{k,\ell}\colon S^k \wedge S^\ell \to S^{k+\ell}$ der natürliche Homöomorphismus. Das Sphärenspektrum ist kommutativ, siehe Satz 7.27 (8) und Übung 7.62. Jedes Spektrum $\mathbb{E}$ ist ein Rechtsmodulspektrum über $\mathbb{S}$ mit $\nu = \rho$.

(2) Das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum $\mathbb{H}R$ über einem Ring $R$ aus Abschnitt 5.d ist ein Ringspektrum, siehe Übung 7.63. Dabei sind Multiplikation und Einheitsabbildung von $\mathbb{H}R$ durch die Multiplikation und die Eins in $R$ festgelegt. Es ist kommutativ, wenn $R$ kommutativ ist, siehe Übung 7.64. Sei $A$ ein Links-$R$-Modul, dann ist $\mathbb{H}A$ ein Linksmodulspektrum über $\mathbb{H}R$.

(3) Zur reellen und komplexen $K$-Theorie gehören die Ringspektren $\mathbb{K}$ und $\mathbb{KO}$, siehe Bemerkung 6.59. Das Spektrum $\mathbb{K}Sp \cong \Sigma^4\mathbb{KO}$ zur quaternionischen $K$-Theorie ist ein $\mathbb{KO}$-Modulspektrum.

(4) Die Thom-Spektren $\mathbb{M}O$, $\mathbb{M}U$, $\mathbb{M}SO$ zu den diversen Bordismus- und Kobordismusfunktoren sind ebenfalls Ringspektren, siehe Bemerkung 6.73.

7.31. Bemerkung. Es sei $(\mathbb{E}, \mu, \varepsilon)$ ein Ringspektrum und $\mathbb{F}$ ein beliebiges Spektrum, dann ist $(\mathbb{F} \wedge \mathbb{E}, \mathrm{id} \wedge \mu)$ ein Rechtsmodulspektrum über $\mathbb{E}$ nach Übung 7.65. Insbesondere ist $\mathbb{E} \cong \mathbb{S} \wedge \mathbb{E} \cong \mathbb{E} \wedge \mathbb{S}$ selbst sowohl Links- als auch Rechtsmodulspektrum über sich selbst.

Als Beispiel für $\mathbb{F}$ können wir das Moore-Spektrum $\mathbb{M}A$ zu einer abelschen Gruppe $A$ aus Definition 5.67 wählen. Auf diese Weise erhalten wir $\mathbb{E}$-Homologie und -Kohomologie mit Koeffizienten in $A$, siehe Definition 5.70 und Bemerkung 7.15 (3), (4).

Im Folgenden können wir jederzeit $(\mathbb{F}, \nu)$ durch $(\mathbb{E}, \mu)$, aufgefasst als Rechtsmodulspektrum, ersetzen.

7.32. Definition. Es sei $(\mathbb{E}, \mu, \varepsilon)$ ein Ringspektrum und $(\mathbb{F}, \nu)$ ein Rechts-$\mathbb{E}$-Modulspektrum. Dann definieren wir zwei externe Produkte, das Smash-Produkt $\wedge\colon \tilde{F}^k(X) \times \tilde{E}^\ell(Y) \to \tilde{F}^{k+\ell}(X \wedge Y)$ und das Schräg-Produkt $/\colon \tilde{F}_{k+\ell}(X \wedge Y) \times \tilde{E}^k(X) \to \tilde{F}_\ell(Y)$ für alle $\alpha \in [\mathbb{S}X, \mathbb{F}]_{-k} = \tilde{F}^k(X)$, $\beta \in [\mathbb{S}Y, \mathbb{E}]_{-\ell} = \tilde{E}^\ell(Y)$, $\gamma \in [\mathbb{S}X, \mathbb{E}]_{-k} = \tilde{E}^k(X)$ und $b \in [\mathbb{S}, \mathbb{F} \wedge X \wedge Y]_{k+\ell} = \tilde{F}_{k+\ell}(X \wedge Y)$ durch

$$\alpha \wedge \beta\colon \mathbb{S} \wedge X \wedge Y \cong \mathbb{S} \wedge X \wedge \mathbb{S} \wedge Y \xrightarrow{\alpha\wedge\beta} \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \xrightarrow{\nu} \mathbb{F} \tag{1}$$

$$\text{und} \qquad b/\gamma\colon \mathbb{S} \xrightarrow{b} \mathbb{F} \wedge X \wedge Y \cong \mathbb{F} \wedge \mathbb{S} \wedge X \wedge Y \xrightarrow{\mathrm{id}\wedge\gamma\wedge\mathrm{id}} \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \wedge Y \xrightarrow{\nu\wedge\mathrm{id}} \mathbb{F} \wedge Y\ . \tag{2}$$

Im Fall von $\Omega$-Spektren entsprechen die obigen Definitionen genau der vorläufigen Beschreibung am Anfang von Abschnitt 7.c. Aus der Konstruktion der zellulären externen Produkte in Abschnitt 6.e kann man schließen, dass die obigen Produkte mit denen aus Proposition 6.21 übereinstimmen. Wie immer erhalten wir unreduzierte Varianten, indem wir $X$ und $Y$ durch $X_+$ und $Y_+$ ersetzen.

Wegen Satz 7.27 (5) ist es in (1) und (2) unerheblich, wie wir das neutrale Element $\mathbb{S}$ des reduzierten Produktes einfügen. Genauso ist es wegen Satz 7.27 (1) unerheblich, wie wir in (2) klammern.

7.33. Proposition. *Es sei $\mathbb{E}$ ein Ring- und $\mathbb{F}$ ein $\mathbb{E}$-Rechtsmodulspektrum. Die obigen externen Produkte erfüllen alle Eigenschaften aus den Definitionen 7.18 und 7.19. Insbesondere ist $(\tilde{E}^\bullet, \delta_\bullet, \wedge, \varepsilon)$ ein multiplikativer Kohomologiefunktor und $(\tilde{F}_\bullet, \partial_\bullet, /)$ ein Rechtsmodul darüber. Wenn $\mathbb{E}$ kommutativ ist, ist auch $(\tilde{E}^\bullet, \delta_\bullet, \wedge, \varepsilon)$ (graduiert) kommutativ. Wenn wir in Definition 7.18* (1)–(3) *jeweils $\alpha$ durch ein Element von $\tilde{F}^\bullet(X)$ ersetzen, sehen wir, dass $(\tilde{F}^\bullet, \delta_\bullet, \wedge)$ ebenfalls ein (kohomologischer) $(\tilde{E}^\bullet, \delta_\bullet, \wedge, \varepsilon)$-Rechtsmodul ist.*

Beweis. Zur Natürlichkeit nutzen wir aus, dass das reduzierte Produkt von Spektren ein graduierter Bifunktor ist. Es seien $f\colon U \to X$ und $g\colon V \to Y$ stetig. Dann ist $(f^*\alpha)\wedge(g^*\beta) = (f\wedge g)^*(\alpha\wedge\beta)$ definiert durch

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}\wedge U\wedge V \arrow[d, "\mathrm{id}\wedge f\wedge g"'] & \mathbb{S}\wedge U\wedge\mathbb{S}\wedge V \arrow[l, "\mathrm{id}\wedge\mathrm{id}\wedge\lambda", "\cong"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\wedge f\wedge\mathrm{id}\wedge g"] & & \\
\mathbb{S}\wedge X\wedge Y & \mathbb{S}\wedge X\wedge\mathbb{S}\wedge Y \arrow[l, "\mathrm{id}\wedge\mathrm{id}\wedge\lambda", "\cong"'] \arrow[r, "\alpha\wedge\beta"] & \mathbb{F}\wedge\mathbb{E} \arrow[r, "\nu"] & \mathbb{F}\,.
\end{tikzcd}$$

Für $x \in [\mathbb{S}, \mathbb{F}\wedge V\wedge U]_{k+\ell}$ wird $f_*(x/g^*\beta) = ((g\wedge f)_* x)/\beta$ dargestellt durch

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S} \arrow[r, "x"] & \mathbb{F}\wedge V\wedge U \arrow[r, "\rho^{-1}\wedge g\wedge\mathrm{id}", "\cong"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\wedge g\wedge f"'] & \mathbb{F}\wedge\mathbb{S}\wedge Y\wedge U \arrow[r, "\mathrm{id}\wedge\beta\wedge\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\wedge\mathrm{id}\wedge\mathrm{id}\wedge f"'] & \mathbb{F}\wedge\mathbb{E}\wedge U \arrow[r, "\nu\wedge\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\wedge\mathrm{id}\wedge f"'] & \mathbb{F}\wedge U \arrow[d, "\mathrm{id}\wedge f"] \\
& \mathbb{F}\wedge Y\wedge X & \mathbb{F}\wedge\mathbb{S}\wedge Y\wedge X \arrow[l, "\mathrm{id}\wedge\lambda\wedge\mathrm{id}", "\cong"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\wedge\beta\wedge\mathrm{id}"] & \mathbb{F}\wedge\mathbb{E}\wedge X \arrow[r, "\nu\wedge\mathrm{id}"] & \mathbb{F}\wedge X\,.
\end{tikzcd}$$

Zu den restlichen Punkten betrachtet man wieder kommutative Diagramme und benutzt die passenden Eigenschaften aus Satz 7.27 und Definition 7.28, siehe Übung 7.67. □

7.34. Bemerkung. Es sei $\mathbb{E}$ ein Ringspektrum. Mithilfe der natürlichen Transformationen $\lambda$ und $\rho$ erhalten wir einen Isomorphismus $\mathbb{S}\wedge\mathbb{S} \cong \mathbb{S}$. Daher erhalten wir eine Multiplikation auf den *Koeffizienten* $\pi_\bullet(\mathbb{E}) \cong \tilde{E}^\bullet(S^0) \cong \tilde{E}_\bullet(S^0)$ durch

$$\alpha\wedge\beta\colon \mathbb{S} \cong \mathbb{S}\wedge\mathbb{S} \xrightarrow{\alpha\wedge\beta} \mathbb{E}\wedge\mathbb{E} \xrightarrow{\mu} \mathbb{E}\,.$$

Somit erhalten wir den *Koeffizientenring*

$$E^\bullet = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{E}^n(S^0)$$

von $\mathbb{E}$. Es handelt sich dabei um einen $\mathbb{Z}$-graduierten Ring, das heißt, jedes Element ist eine Summe homogener Elemente, also von Elementen mit einem wohldefinierten Grad in $\mathbb{Z}$, und beim Multiplizieren addieren sich die Grade. Sollte $\mathbb{E}$ kommutativ sein, ist $E^\bullet$ *graduiert kommutativ,* das heißt,

$$ab = (-1)^{k\ell} ba \qquad \text{falls } a \in E^k \text{ und } b \in E^\ell.$$

Sei $\mathbb{F}$ ein $\mathbb{E}$-Modulspektrum, zum Beispiel $\mathbb{F} = \mathbb{E}$. Nach Definition 7.32 sind $\tilde{F}_\bullet(X)$ und $\tilde{F}^\bullet(X)$ für jeden Raum graduierte $E^\bullet$-Module, und für stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$ sind $f_*\colon \tilde{F}_\bullet(X) \to$

$\tilde{F}_\bullet(Y)$ und $f^*\colon \tilde{F}^\bullet(Y) \to \tilde{F}^\bullet(X)$ rechts-$E^\bullet$-lineare Abbildungen, siehe Übung 7.68. Wir erhalten somit Funktoren

$$\tilde{F}_\bullet\ , \quad \tilde{F}^\bullet\colon \mathcal{H}kw\mathcal{H}_+ \to \mathcal{M}od_{E^\bullet}\ .$$

Schließlich überprüft man noch, dass die externen Produkte im zweiten Argument rechts-$E^\bullet$-linear sind. Wenn $\mathbb{E}$ kommutativ ist, erhält man auch eine Linearität im ersten Argument.

7.35. Beispiel. Wir betrachten die Koeffizientenringe einiger Spektra.

(1) Der Koeffizientenring des Eilenberg-Mac Lane-Spektrums $\mathbb{H}R$ ist $R = HR^0 = HR^\bullet$. Insbesondere können wir gewöhnliche Kohomologie mit Koeffizienten in einem $R$-Modul $A$ jetzt endlich als $\mathcal{M}od_R$-wertigen Funktor verstehen.

(2) Aufgrund von Bott-Periodizität fasst man komplexe $K$-Theorie gern als $\mathbb{Z}/2$-graduierten Funktor auf. Der Koeffizientenring ist dann $K^\bullet = K^0 = \mathbb{Z}$. Über $\mathbb{Z}$ hingegen erhalten wir den Koeffizientenring

$$K^k = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k \text{ gerade ist, und} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Analog betrachten wir reelle $K$-Theorie als $\mathbb{Z}/8$-graduierten Funktor.

(3) Die diversen Bordismusfunktoren haben in der Regel kompliziertere Koeffizientenringe. Beispielsweise wird $MU^\bullet$ frei erzeugt von je einem Erzeuger in Grad $2k$ für $k \geq 0$.

7.36. Bemerkung. Wie in Bemerkung 6.17 gibt es auch ein *Kronecker-Produkt* $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\colon \tilde{E}_\bullet(X) \times \tilde{E}^\bullet(X) \to E^\bullet$, definiert durch $\langle a, \alpha\rangle = a/\alpha \in \tilde{E}_\bullet(S^0) = E^\bullet$. Die Rechenregeln aus Proposition 6.21 (4) übertragen sich entsprechend.

Es seien $A, B \subset X$ Teilmengen, so dass $(X, A)$, $(X, B)$ und $(X, A \cup B)$ punktierte Kofaserungen sind. Wie in (6.4) definieren wir eine relative Diagonalabbildung

$$\Delta_{X;A,B}\colon X/(A \cup B) \longrightarrow X/A \wedge X/B\ .$$

7.37. Definition. Es sei $\mathbb{E}$ ein Ring- und $\mathbb{F}$ ein Rechts-$\mathbb{E}$-Modulspektrum, es sei $X$ ein topologischer Raum mit Teilmengen $A, B \subset X$, so dass $(X, A)$, $(X, B)$ und $(X, A \cup B)$ punktierte Kofaserungen sind. Dann definieren wir die *inneren Produkte*, das *Cup-Produkt* $\smile\colon \tilde{F}^k(X/A) \times \tilde{E}^\ell(X/B) \to \tilde{F}^{k+\ell}(X/(A \cup B))$ und das *Cap-Produkt* $\frown\colon \tilde{F}_{k+\ell}(X/(A \cup B)) \times \tilde{E}^k(X/A) \to \tilde{F}_\ell(X/B)$ für alle $\alpha \in F^k(X/A)$, $\beta \in E^\ell(X/B)$ und $c \in F_{k+\ell}(X/(A \cup B))$ durch

$$\alpha \smile \beta = \Delta_X^*(\alpha \wedge \beta) \qquad \text{und} \qquad c \frown \alpha = (\Delta_{X*}c)/\alpha\ .$$

Wir bezeichnen $(\tilde{E}^\bullet(X), \smile)$ als die reduzierte *$E$-Kohomologiealgebra* von $X$.

Diese Definition ist also völlig analog zu Definition 6.26; die unreduzierten Varianten erhalten wir analog. Aufgrund der folgenden Eigenschaften können wir tatsächlich von Kohomologieringen und (Ko-) Homologiemoduln sprechen. Außerdem sind $(\tilde{F}^\bullet(X), \smile)$ und $(\tilde{F}_\bullet(X), \frown)$ Rechts-$(\tilde{E}^\bullet(X), \smile)$-Moduln.

7.38. Proposition. *Die inneren Produkte sind natürlich und haben folgende Eigenschaften.*

(1) Assoziativgesetz. *Es gilt*

$$(\alpha \smile \beta) \smile \gamma = \alpha \smile (\beta \smile \gamma) \qquad \textit{und} \qquad (c \frown \alpha) \frown \beta = c \frown (\alpha \smile \beta)\ .$$

(2) Einselement. *Sei* $p\colon X \to \mathrm{pt}$ *die konstante Abbildung, dann ist* $1 = p_+^*(\varepsilon) \in \tilde{H}^0(X_+; R) = H^0(X; R)$ *neutrales Element für beide Produkte.*

(3) Adjunktion. *Es gilt*

$$\langle b \frown \alpha, \beta\rangle = \langle b, \alpha \smile \beta\rangle\ .$$

(4) *Wenn* $\mathbb{E}$ *kommutativ ist, ist das Cup-Produkt graduiert kommutativ, das heißt, für alle* $\alpha \in \tilde{E}^k(X;R)$ *und* $\beta \in \tilde{E}^\ell(X;R)$ *gilt*

$$\beta \smile \alpha = (-1)^{k\ell} \alpha \smile \beta \ .$$

Beweis. Das ist eine unmittelbare Folgerung aus Proposition 7.33. □

7.39. Bemerkung. Als erste Anwendung zeigen wir, dass das Cup-Produkt auf $\tilde{E}^\bullet(SX)$ verschwindet. Dazu sei

$$SX = X \wedge \big([0,1]/\{0,1\}\big) \ , \qquad A = X \wedge \big(\big[0,\tfrac{1}{2}\big],0\big) \ , \qquad \text{und} \qquad B = X \wedge \big(\big[\tfrac{1}{2},1\big],1\big) \ .$$

Dann gilt $A \cup B = SX$. Außerdem sind $A$, $B \cong CX$ zusammenziehbar, und nach Proposition 3.62 sind die Quotientenabbildungen $p\colon SX \to SX/A$ und $q\colon SX \to SX/B$ Homotopieäquivalenzen. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{E}^k(SX/A) \times \tilde{E}^\ell(SX/B) \arrow[r, "\smile"] \arrow[d, "p^*\times q^*"', "\cong"] & \tilde{E}^{k+\ell}(SX/SX) = 0 \arrow[d] \\
\tilde{E}^k(SX) \times \tilde{E}^\ell(SX) \arrow[r, "\smile"] & \tilde{E}^{k+\ell}(SX) \ .
\end{tikzcd}$$

7.40. Bemerkung. Wie in Bemerkung 6.25 ist $\tilde{E}^\bullet(X)$ eine $E^\bullet$-Algebra ohne Eins. Wir können eine Eins hinzufügen und erhalten die unreduzierte Kohomologie-Algebra $E^\bullet(X)$. Während $\tilde{E}^\bullet(X)$ als $E^\bullet$-Modul unabhängig von der Wahl des Basispunktes ist, sieht $\tilde{E}^\bullet(X)$ als $E^\bullet$-Algebra zumindest die Zusammenhangskomponente des Basispunktes. Die unreduzierte Kohomologie-Algebra $E^\bullet(X)$ ist wiederum basispunktunabhängig.

7.41. Definition. Es sei $X$ ein zusammenhängender topologischer Raum und $E^\bullet$ eine multiplikative Kohomologiefunktor. Wenn es $k \geq 0$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \tilde{E}^\bullet(X)$ gibt, so dass

- $\alpha_1 \smile \cdots \smile \alpha_k \neq 0$ falls $k \geq 0$, und
- $\beta_1 \smile \cdots \smile \beta_{k+1} = 0$ für alle $\beta_1, \ldots, \beta_{k+1} \in \tilde{E}^\bullet(X)$,

dann hat $X$ die *$E$-Cup-Länge* $\mathrm{cl}_E(X) = k$, andernfalls $\mathrm{cl}_E(X) = \infty$.

Wenn es ein $k \geq 0$ gibt, so dass $\mathrm{cl}_E(X) \leq k$ für alle multiplikativen Kohomologiefunktoren $E^\bullet$ und $\mathrm{cl}_E(X) = k$ für mindestens einen, dann hat $X$ die *Cup-Länge* $\mathrm{cl}(X) = k$, andernfalls $\mathrm{cl}(X) = \infty$.

Wir müssen in der obigen Definition auf jeden Fall mit der reduzierten $E$-Kohomologie arbeiten, anderfalls erhielten wir beliebig lange Produkte der Form $1 \cdots 1 \neq 0$.

7.42. Beispiel. Die Cup-Länge ist ein sehr grobes Maß für die Komplexität eines topologischen Raumes.

(1) Jeder zusammenziehbare Raum $X$ hat Cup-Länge $\mathrm{cl}(X) = 0$. Sei umgekehrt $X$ ein zusammenhängender, einfach zusammenhängender CW-Komplex mit $\mathrm{cl}_H(X) = 0$ für die ganzzahlige Kohomologie, dann ist $X$ zusammenziehbar nach Übung 6.84.
(2) Nach Bemerkung 7.40 gilt $\mathrm{cl}(SX) \leq 1$ für alle Suspensionen.
(3) In Übung 7.71 sehen wir, dass $\mathrm{cl}(\mathbb{C}P^n) = \mathrm{cl}(\mathbb{H}P^n) = n$.

7.43. Proposition. *Es sei $X$ ein zusammenhängender CW-Komplex der Dimension $m$. Dann gilt* $\mathrm{cl}(X) \leq m$.

Beweis. Wir nehmen an, dass das 0-Skelett $X^0$ nur aus dem Basispunkt besteht, indem wir Satz 4.51 auf $(X, \{x_0\})$ anwenden. Seien jetzt $1 \leq p$, $q \leq m$, und sei $\Delta'_{X;X^{p-1},X^{q-1}}$ eine zelluläre

Approximation der Diagonalen $\Delta_{X;X^{p-1},X^{q-1}}$. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[d, two heads] & & X \wedge X \arrow[d, two heads] \\
X/X^{p+q-1} \arrow[r, "\Delta'_{X;X^{p-1},X^{q-1}}"] & (X \wedge X)/(X^{p-1} \wedge X \cup X \wedge X^{q-1}) \arrow[r, equal] & (X/X^{p-1}) \wedge (X/X^{q-1}) \,.
\end{tikzcd}$$

Für $\alpha \in \tilde{E}^k(X/X^{p-1})$ und $\beta \in \tilde{E}^\ell(X/X^{q-1})$ folgt $\alpha \smile \beta \in \tilde{E}^{k+\ell}(X/X^{p+q-1})$. Da $\tilde{E}^\bullet(X) = \tilde{E}^\bullet(X/X^0)$, liegen induktiv alle $p$-fachen Produkte in $\tilde{E}^\bullet(X/X^{p-1})$. $\square$

## 7.e. Allgemeine singuläre Homologie und Kohomologie

Bisher haben wir durch Spektren gegebene Homologie und -Kohomologie immer nur für CW-Komplexe betrachtet. Um Dualitätssätze für Mannigfaltigkeiten zu formulieren, benötigen wir eine allgemeinere Definition. Dazu ersetzen wir beliebige Paare von Räumen durch schwach äquivalente CW-Paare ähnlich wie in Abschnitt 4.d.

Sei $(Z, U)$ ein beliebiges Paar topologischer Räume. Mit Satz 4.51 finden wir zunächst eine CW-Approximation $A \to U$. Sei $g\colon A \to Z$ die zusammengesetzte Abbildung, dann ersetzen wir $Z$ durch den Abbildungszylinder $Zg$. Anschließend konstruieren wir ein CW-Modell $(X, A)$ für $(Zg, A)$. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] & Zg \arrow[r, "\sim"] & Z \\
 & A \arrow[ul, hook] \arrow[u, hook] \arrow[ur, "g"] \arrow[r] & U \arrow[u, hook] \,.
\end{tikzcd}$$

Dabei sind sowohl $A$ als auch $X$ jeweils bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig, und die Homotopieäquivalenzen selbst sind ebenfalls bis auf Homotopie eindeutig bestimmt. Wir nennen $(X, A) \to (Z, U)$ eine *Approximation* von $(Z, U)$ *durch ein CW-Paar.*

Sei jetzt $f\colon (Z, U) \to (W, V)$ seine stetige Abbildung von Paaren und $(X, A) \to (Z, U)$, $(Y, B) \to (W, V)$ seien Approximationen durch CW-Paare. Mit Satz 4.51 konstruieren wir zunächst eine Abbildung $A \to B$, dann eine Abbildung $g\colon X \to Y$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[rr] & & W \\
X \arrow[ur, "g"] \arrow[rr] \arrow[uu, hook] & & Z \arrow[ur, "f"] \arrow[uu, hook] & \\
 & B \arrow[uu, hook] \arrow[rr] & & V \arrow[uu, hook] \\
A \arrow[uu, hook] \arrow[ur] \arrow[rr] & & U \arrow[uu, hook] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

bis auf Homotopie kommutiert. Wieder sind alle Abbildungen bis auf Homotopie eindeutig bestimmt. Da $(X, A)$ eine Kofaserung ist, können wir $g$ als Abbildung von Paaren $(X, A) \to (Y, B)$ wählen.

7.44. Definition. Es sei $\mathbb{E}$ ein Spektrum. Es sei $f\colon (Z, U) \to (W, V)$ eine Abbildung von Paaren, und es sei $g\colon (X, A) \to (Y, B)$ eine Approximation durch CW-Paare. Dann definieren wir die *singuläre $E$-Homologie* $E_\bullet(Z, U) = \tilde{E}_\bullet(X/A)$ und

$$f_* = g_*\colon E_\bullet(Z, U) = \tilde{E}_\bullet(X/A) \longrightarrow \tilde{E}_\bullet(Y/B) = E_\bullet(W, V) \,,$$

und analog die *singuläre $E$-Kohomologie.*

Insbesondere ist auch $E_\bullet(Z) = E_\bullet(X) = \tilde{E}_\bullet(X_+)$ im Falle $U = \emptyset$. Im Spezialfall $\mathbb{E} = \mathbb{H}G$ sprechen wir einfach von *singulärer Homologie* und *Kohomologie.*

7.45. Bemerkung. Man überprüft die folgenden Behauptungen.

(1) Nach Übung 7.69 sind singuläre $E$-Homologie und -Kohomologie Funktoren $\mathcal{HP}air \to \mathcal{A}b$.
(2) Für Tripel $U \subset V \subset W$ existieren natürliche exakte Sequenzen

$$\cdots \longleftarrow E_{n-1}(V,W) \xleftarrow{\partial} E_n(U,V) \longleftarrow E_n(U,W) \longleftarrow E_n(V,W) \longleftarrow \cdots ,$$
$$\cdots \longrightarrow E^{n-1}(V,W) \xrightarrow{\delta} E^n(U,V) \longrightarrow E^n(U,W) \longrightarrow E^n(V,W) \longrightarrow \cdots$$

wie in Übung 6.91. Im Fall $W = \emptyset$ erhalten wir die langen exakten Sequenzen eines Paares; diese sind Bestandteil der Eilenberg-Steenrod-Axiome.
(3) Singuläre $E$-Homologie und -Kohomologie sind invariant unter schwachen Äquivalenzen. Insbesondere sind die Homologie-Funktoren aus den Definitionen 5.38 und 7.44 natürlich isomorph. Für Kohomologie gilt das wegen Übung 6.90 jedoch nicht.

Punkt (1) entspricht den Eilenberg-Steenrod-Axiomen 1, 2 und 6 [**ES**, Section I.3]. Punkt (2) für $W = \emptyset$ entspricht den Axiomen 3 und 4. Das Ausschneidungsaxiom 5 behandeln wir im folgenden Satz, und das Dimensionsaxiom 7 verlangen wir nur für gewöhnliche singuläre (Ko-) Homologie.

7.46. Satz (Ausschneidung, Mayer-Vietoris-Sequenz). *Es sei $\mathbb{E}$ ein Spektrum, und es sei $X = U \cup V$ mit $U$, $V \subset X$ offen. Dann induziert die Inklusionsabbildung $(U, U \cap V) \hookrightarrow (X, V)$ Isomorphismen*

$$E_\bullet(U, U \cap V) \xrightarrow{\cong} E_\bullet(X,V) \qquad \textit{und} \qquad E^\bullet(X,V) \xrightarrow{\cong} E^\bullet(U, U \cap V) \ . \tag{1}$$

*Unter den gleichen Voraussetzungen sind die folgenden Mayer-Vietoris-Sequenzen exakt:*

$$\cdots \longleftarrow \tilde{E}_{n-1}(U \cap V) \xleftarrow{\partial} \tilde{E}_n(X) \longleftarrow \tilde{E}_n(U) \oplus \tilde{E}_n(V) \xleftarrow{-} \tilde{E}_n(U \cap V) \longleftarrow \cdots , \tag{2}$$
$$\cdots \longrightarrow \tilde{E}^{n-1}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} \tilde{E}^n(X) \longrightarrow \tilde{E}^n(U) \oplus \tilde{E}^n(V) \xrightarrow{-} \tilde{E}^n(U \cap V) \longrightarrow \cdots . \tag{3}$$

Allgemeiner dürfen wir beliebige Teilmengen $U$, $V \subset X$ mit $\mathring{U} \cup \mathring{V} = X$ zulassen. Ohne eine Bedingung geht es sicher nicht, dazu betrachte man etwa das Beispiel $[0,1] = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Beweis. Wir bestimmen zunächst eine CW-Approximation $C \to U \cap V$. Wie oben finden wir dann Approximationen $(A,C) \to (U, U \cap V)$ und $(B,C) \to (V, U \cap V)$. Zu zeigen ist, dass die natürliche Abbildung $A \cup_C B \to X$ eine schwache Äquivalenz ist. Dazu zerlegt man den Abbildungskegel der natürlichen Abbildung

$$D = A \cup_{C \times \{0\}} C \times [0,1] \cup_{C \times \{1\}} B \longrightarrow X$$

geschickt in zwei offene Mengen, die jeweils den Abbildungskegel von $A \to U$ beziehungsweise $B \to V$ als Deformationsretrakt enthalten, und deren Durchschnitt den Abbildungskegel von $C \to U \cap V$ als Deformationsrektrakt enthält. Diese drei kleinen Abbildungskegel sind nach Voraussetzung schwach zusammenziehbar. Nach dem Ausschneidungssatz 3.38 von Blakers-Massey gilt das dann auch für den obigen Abbildungskegel von $D \to X$. Die natürliche Abbildung $D \twoheadrightarrow A \cup_C B$ ist eine Homotopieäquivalenz, also ist $(A \cup_C B, B)$ eine CW-Approximation von $(X,V)$.

Jetzt erhalten wir die gesuchten natürlichen Isomorphismen

$$E_\bullet(U, U \cap V) \cong \tilde{E}_\bullet(A/C) = \tilde{E}_\bullet\big((A \cup_C B)/B\big) \cong E_\bullet(X,V) \ ,$$
$$E^\bullet(X,V) \cong \tilde{E}^\bullet\big((A \cup^C B)/B\big) = \tilde{E}^\bullet(A/C) \cong E^\bullet(U, U \cap V) \ .$$

Die angegebenen Mayer-Vietoris-Sequenzen folgen daraus. Wir können sie auch direkt aus den Sätzen 5.6 und 6.3 ableiten. □

7.47. Proposition. *Es sei $\mathbb{E}$ ein Spektrum, und es seien $(U_i)_i$, $(V_i)_i$ aufsteigende Folgen von Teilmengen von $X$ mit $V_i \subset U_i$. Für das Paar $(U,V) = \left(\bigcup_i U_i, \bigcup_i V_i\right)$ gilt*

$$E_\bullet(U,V) = \varinjlim E_\bullet(U_i,V_i)\ ,$$

*falls es zu jedem Paar $(K,L) \subset (U,V)$ kompakter Teilmengen ein $i \in \mathbb{N}$ mit $(K,L) \subset (U_i,V_i)$ gibt.*

Beweis. Aufgrund der Definition des Kolimes gibt es eine natürliche Abbildung

$$\varphi\colon \varinjlim E_\bullet(U_i,V_i) \longrightarrow E_\bullet(U,V)\ .$$

Wegen Bemerkung 7.45 (3) wird eine Homologieklasse $[a] \in E_k(U,V)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ dargestellt durch eine Abbildung $a\colon S^{n+k} \to E_n \wedge (U/\!\!/V)$. Es sei $\iota\colon V \to U$ die Inklusion, dann schreibe $U/\!\!/V \cong Z\iota \cup_V CV$. Da $S^{n+k}$ kompakt ist, liegt das Bild von $a$ in $K \cup_{K\cap V} ((K\cap V)\times I) \cup_L CL$ für geeignete Kompakta $K \subset U$ und $L \subset V \cap K$, und der obige Raum ist homotopieäquivalent zu $K/\!\!/L$. Wenn es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $(K,L) \subset (U_i,V_i)$ gibt, folgt $[a] \in \operatorname{im}\varphi$. Somit ist $\varphi$ surjektiv. Die Injektivität wird analog bewiesen. □

7.48. Bemerkung. Sei $\mathbb{E}$ ein Ringspektrum und $\mathbb{F}$ ein Rechts-$\mathbb{E}$-Modulspektrum. Man definiert externe Produkte auf der singulären (Ko-)Homologie, indem man alle betroffenen Raumpaare durch Paare von CW-Komplexen approximiert. Dazu überlegt man sich zunächst, dass das Produkt solcher Approximationen wieder das Produkt der ursprünglichen Räume approximiert, siehe Übung 7.70. Wir erhalten also externe Produkte

$$\begin{aligned} &\wedge\colon F^k(Z,U) \times E^\ell(W,V) \longrightarrow F^{k+\ell}(Z\times W, U\times W \cup Z\times V) \\ \text{und}\qquad &/\colon F_{k+\ell}(Z\times W, U\times W \cup Z\times V) \times E^k(Z,U) \longrightarrow F_\ell(W,V) \end{aligned}$$

wie in Definition 7.32. Mit dem gleichen Argument beweist man auch ein Analogon der Künneth-Formel aus Satz 6.20.

Anschließend überlegt man sich, dass Approximation durch Paare von CW-Komplexen auch mit der Diagonalabbildung verträglich ist, und erhält in Analogie zu Definition 7.37 die internen Produkte

$$\begin{aligned} &\smile\colon F^k(Z,U) \times E^\ell(Z,V) \longrightarrow F^{k+\ell}(Z, U\cup V) \\ \text{und}\qquad &\frown\colon F_{k+\ell}(Z, U\cup V) \times E^k(Z,U) \longrightarrow F_\ell(Z,V)\ . \end{aligned}$$

7.49. Bemerkung. In den meisten Lehrbüchern wird nur gewöhnliche singuläre (Ko-) Homologie definiert, und zwar über Kettenkomplexe, die von singulären Simplizes oder Würfeln erzeugt werden. Man kann jetzt beweisen, dass diese Definition Funktoren liefert, die die gleichen Axiome erfüllen wie die singuläre (Ko-) Homologie aus Definition 7.44 zu den Eilenberg-Mac Lane-Spektren. Insbesondere ist auch die „klassische“ singuläre (Ko-) Homologie invariant unter schwachen Äquivalenzen. Zusammen mit den Sätzen 5.18 und 6.15 sehen wir, dass beide Herangehensweisen natürlich isomorphe Funktoren liefern.

7.50. Definition. Es sei $X \neq \emptyset$ ein zusammenhängender topologischer Raum. Wenn es ein $k \geq 0$ und zusammenziehbare offene Teilmengen $U_0, \ldots, U_k \subset X$ gibt, so dass

- $X = U_0 \cup \cdots \cup U_k$, und
- es keine zusammenziehbaren offenen Teilmengen $V_1, \ldots, V_k \subset X$ mit $X = V_1 \cup \cdots \cup V_k$ gibt,

dann hat $X$ die *Lusternik-Shnirelman-Kategorie* $LS(X) = k$, andernfalls $LS(X) = \infty$.

Man beachte, dass das Wort Kategorie hier nicht die mittlerweile übliche Bedeutung hat.

7.51. Beispiel. Ähnlich der Cup-Länge aus Definition 7.41 ist die Lusternik-Shnirelmann-Kategorie ein sehr grobes Maß für die Komplexität eines topologischen Raumes.

(1) Ein Raum zusammenhängender Raum $X$ hat genau dann $LS(X) = 0$, wenn $X$ zusammenziehbar ist.
(2) Es gilt $LS(SX_+) \leq 1$, denn $SX_+$ ist die Vereinigung zweier offener Kegel $CX \setminus X \times \{1\}$.
(3) Es gilt $LS(\mathbb{R}P^n) = LS(\mathbb{C}P^n) = LS(\mathbb{H}P^n) = n$ nach Übung 7.71.

7.52. Proposition. *Es sei $X$ ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Dann gilt die Ungleichung* $\mathrm{cl}(X) \leq LS(X)$.

Beweis. Es sei $X = U_1 \cup \cdots \cup U_{k+1}$, und $U_1, \ldots, U_{k+1} \subset X$ seien offen und zusammenziehbar. Da $X$ wegzusammenhängend ist, ist $\tilde{E}^\bullet(X)$ unabhängig vom Basispunkt $x_0$. Wir dürfen also $x_0 \in U_i$ annehmen. Dann ist die natürliche Abbildung $E^\bullet(X, U_i) \to \tilde{E}^\bullet(X)$ ein Isomorphismus. Seien jetzt $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1} \in \tilde{E}^\bullet(X)$ gegeben, dann existieren Urbilder $\alpha_i \in E^\bullet(X, U_i)$. Es folgt

$$\alpha_1 \smile \cdots \smile \alpha_{k+1} \in E^\bullet(X, U_1 \cup \cdots \cup U_{k+1}) = E^\bullet(X, X) = 0 \,. \qquad \square$$

## 7.f. Übungen zu Kapitel 7

*Übungen zu Abschnitt 7.a.*

7.53. Übung. Beweisen Sie die folgende Aussagen über kofinale Unterspektren.
(1) Es sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$ kofinal und $\mathbb{V} \subset \mathbb{E}$ kofinal, dann ist auch $\mathbb{U} \subset \mathbb{E}$ kofinal.
(2) Es sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{E}$ kofinal und $\mathbb{V} \subset \mathbb{E}$ ein Unterspektrum, dann ist $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} \subset \mathbb{V}$ kofinal.
(3) Es sei $\mathbb{V} \subset \mathbb{F}$ kofinal und $\mathbf{f}\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ eine strikte Abbildung, dann enthält $\mathbf{f}^{-1}(\mathbb{V})$ ein kofinales Unterspektrum von $\mathbb{E}$.

7.54. Übung. (1) Es seien $f, g\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ Abbildungen. Erklären Sie Definition 7.3 in Termen strikter Abbildungen auf kofinalen Unterspektren.
(2) Zeigen Sie in dieser Sprache, dass Homotopie auf Abbildungen eine Äquivalenzrelation definiert.
(3) Zeigen Sie in dieser Sprache, dass Verkettung von Abbildungen mit Homotopie verträglich ist.

*Übungen zu Abschnitt 7.b.*

7.55. Übung. Es seien $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ CW-Spektren.
(1) Definieren Sie ein geeignetes CW-Spektrum $\mathbb{E} \vee \mathbb{F}$ mit Abbildungen $i\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E} \vee \mathbb{F}$ und $j\colon \mathbb{F} \to \mathbb{E} \vee \mathbb{F}$.
(2) Zeigen Sie, dass „$\vee$“ in $\mathcal{SCW}$ die universelle Eigenschaft eines Koproduktes erfüllt.
(3) Konstruieren Sie Abbildungen $p\colon \mathbb{E} \vee \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ und $q\colon \mathbb{E} \vee \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ vom Grad 0, so dass $p \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$, $q \circ j = \mathrm{id}_{\mathbb{F}}$ und $p \circ j = q \circ i = 0$.

7.56. Übung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.
(1) Es seien $X$ und $Y$ punktierte CW-Komplexe, dann ist $S^kX \vee S^kY \hookrightarrow S^kX \times S^kY$ eine $(2k-2)$-zusammenhängende Abbildung.
(2) Es seien $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ und $\mathbb{E} \vee \mathbb{F}$ die Spektren aus Aufgabe 7.55. Zeigen Sie mit Teil (1) und Aufgabe 7.55, dass $\mathbb{E} \vee \mathbb{F}$ die universelle Eigenschaft eines Produkts in $\mathcal{HSCW}$ erfüllt.

7.57. Übung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.
(1) Die Verknüpfung von Abbildungen in der Kategorie $\mathcal{HSCW}$ ist bilinear bezüglich der Addition.
(2) Das Koprodukt aus Aufgabe 7.55 ist auch ein Koprodukt in $\mathcal{HSCW}$. Insbesondere existieren alle Koprodukte in $\mathcal{HSCW}$.
(3) Schließen Sie hieraus mit Hilfe abstrakter Argumente (alternativ zu Aufgabe 7.56), dass jedes Koprodukt gleichzeitig ein Produkt ist.

7.58. Übung. Es sei $Ff$ die Homotopiefaser einer Abbildung $f\colon X \to Y$, und $FSf$ die Homotopiefaser ihrer Einhängung. Konstruieren Sie mit der universellen Eigenschaft aus Bemerkung 4.71 (2) eine natürliche Abbildung $SFf \to FSf$. Zu einer Abbildung von Spektren $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ erhalten wir also eine Folge von Räumen $Ff_k$ mit natürlichen Abbildungen $Ff_k \to E_k$ und $SFf_k \to Ff_{k+1}$. Zeigen Sie, dass es ein CW-Spektrum $\mathbb{F}$, Abbildungen $g\colon \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ und schwache Homotopieäquivalenzen $h_k\colon F_k \to Ff_k$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
F_{k+1} \arrow[rr, "g_{k+1}"] \arrow[dr, "h_{k+1}"'] & & E_{k+1} \\
& Ff_{k+1} \arrow[ur] & \\
SF_k \arrow[uu] \arrow[rr, "Sg_k"] \arrow[dr, "Sh_k"'] & & SE_k \arrow[uu] \\
& SF_k \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

7.59. Übung. Es sei $\mathbb{F} \to \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ eine Fasersequenz von Spektren. Konstruieren Sie analog zu Satz 4.72 eine natürliche lange Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \pi_k(\mathbb{F}) \longrightarrow \pi_k(\mathbb{E}) \longrightarrow \pi_k(\mathbb{B}) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(\mathbb{F}) \longrightarrow \cdots$$

und beweisen Sie ihre Exaktheit.

7.60. Übung. Betrachten Sie den soliden Teil des Diagramms aus CW-Spektren

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f"'] & \mathbb{H} \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{K} \arrow[d, dashed, "h"'] \\
\mathbb{F} \arrow[r] & \mathbb{E} \arrow[r] & \mathbb{B}\,,
\end{tikzcd}$$

wobei die obere Zeile eine Kofaser- und die untere eine Fasersequenz sei, und zeigen Sie:

(1) Gegeben eine der beiden Abbildungen $f$ oder $h$, so dass das entsprechende Rechteck bis auf Homotopie kommutiert, lässt sich die andere so konstruieren, dass das andere Rechteck ebenfalls bis auf Homotopie kommutiert.
(2) Wenn zwei der Abbildungen $f$, $g$, $h$ Homotopieäquivalenzen sind, dann auch die dritte.
(3) Eine Sequenz von Spektren ist genauso dann eine Fasersequenz, wenn sie eine Kofasersequenz ist.

*Übungen zu Abschnitt 7.c.*

7.61. Übung. Es seien $\mathbb{E} = (E_k, s_k)_k$, $\mathbb{F} = (F_\ell, t_\ell)_\ell$, $\mathbb{G} = (G_m, u_m)_m$ CW-Spektren. Zeigen Sie:

(1) Eine Folge von Abbildungen $\mu_{k,\ell}\colon E_k \wedge F_\ell \to G_{k+\ell}$ induziert genau dann für alle $A = B \mathbin{\dot\cup} C \subset \mathbb{N}$ mit $\#A = \infty$ eine strikte Abbildung $\mu_{B,C}\colon \mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F} \to \mathbb{G}$, wenn für alle $k$, $\ell$ gilt, dass

$$\mu_{k+1,\ell} \circ \big(s_k \wedge \mathrm{id}_{F_\ell}\big) = u_{k+\ell} \circ S\mu_{k,\ell} = \mu_{k,\ell+1} \circ \big(\mathrm{id}_{E_k} \wedge (-1)^k t_\ell\big)\ .$$

(2) Wenn die Bedingung aus (1) erfüllt ist, existiert eine bis auf Homotopie eindeutige Abbildung $\mu\colon \mathbb{E} \wedge \mathbb{F} \to \mathbb{G}$, so dass $\mu_{B,C} \sim \mu \circ \eta_{B,C}$.

7.62. Übung. Konstruieren Sie Homotopieäquivalenzen $\mu_{k,\ell}\colon S^k \wedge S^\ell \to S^{k+\ell}$, die den Bedingungen aus Aufgabe 7.61 (1) genügen, mit $\mu_{0,0} = \mathrm{id}_{S^0}\colon S^0 \wedge S^0 \to S^0$. Es bezeichne $\tau_{k,\ell}\colon S^k \wedge S^\ell \to S^\ell \wedge S^k$ den Vertauschungshomöomorphismus mit $\tau(x \wedge y) = y \wedge x$. Zeigen Sie, dass $\mu_{\ell,k} \circ \tau_{k,\ell}$ zu $(-1)^{k\ell}\mu_{k,\ell}$ homotop ist, wobei $-1\colon S^{k+\ell} \to S^{k+\ell}$ eine beliebige Abbildung vom Abbildungsgrad $-1$ bezeichne.

*Übungen zu Abschnitt 7.d.*

7.63. Übung. Es sei $\mathbb{HZ} = (H\mathbb{Z}_k, s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum zu $\mathbb{Z}$, und es bezeichne $1_k \in \pi_k(H\mathbb{Z}_k) \cong \mathbb{Z}$ den kanonischen Erzeuger mit $s_k \circ S1_k = s_{k+1}$.

(1) Konstruieren Sie Abbildungen $\mu_{k,\ell}\colon H\mathbb{Z}_k \wedge H\mathbb{Z}_\ell \to H\mathbb{Z}_{k+\ell}$, die den Bedingungen aus Aufgabe 7.61 (1) genügen, mit $\mu_{k,\ell}(1_k \wedge 1_\ell) = 1_{k+\ell}$, und beweisen Sie Eindeutigkeit bis auf Homotopie.

(2) Zeigen Sie, dass für alle $k$, $\ell$, $m \geq 0$ die folgenden Paare von Abbildungen jeweils homotop sind:

$$\begin{aligned} \mu_{k+\ell,m} \circ (\mathrm{id}_{H\mathbb{Z}_k} \wedge \mu_{\ell,m}) &\sim \mu_{k,\ell+m} \circ (\mu_{k,\ell} \wedge \mathrm{id}_{H\mathbb{Z}_m}) \ , \\ \mu_{0,k} \circ (1_0 \wedge \mathrm{id}_{H\mathbb{Z}_k}) &\sim \mathrm{id}_{H\mathbb{Z}_k}\colon S^0 \wedge H\mathbb{Z}_k \longrightarrow H\mathbb{Z}_k \ , \\ \text{und} \qquad \mu_{k,0} \circ (\mathrm{id}_{H\mathbb{Z}_k} \wedge 1_0) &\sim \mathrm{id}_{H\mathbb{Z}_k}\colon H\mathbb{Z}_k \wedge S^0 \longrightarrow H\mathbb{Z}_k \ . \end{aligned}$$

7.64. Übung. Es seien $\mu_{k,\ell}\colon H\mathbb{Z}_k \wedge H\mathbb{Z}_\ell \to H\mathbb{Z}_{k+\ell}$ die Abbildungen aus Aufgabe 7.63. Es bezeichne $\tau_{k,\ell}\colon H\mathbb{Z}_k \wedge H\mathbb{Z}_\ell \to H\mathbb{Z}_\ell \wedge H\mathbb{Z}_k$ den Vertauschungshomöomorphismus mit $\tau(x\wedge y) = y\wedge x$. Zeigen Sie:

(1) Es gibt für alle $k \geq 1$ eine bis auf Homotopie eindeutige Abbildung $-1\colon H\mathbb{Z}_k \to H\mathbb{Z}_k$, so dass $(-1)_* = -\mathrm{id}_{\pi_k(H\mathbb{Z}_k)}$.

(2) Für alle $k$, $\ell \geq 0$ sind die Abbildungen $\mu_{\ell,k} \circ \tau_{k,\ell}$ und $(-1)^{k+\ell} \circ \mu_{k,\ell}\colon H\mathbb{Z}_k \wedge H\mathbb{Z}_\ell \to H\mathbb{Z}_{k+\ell}$ homotop.

7.65. Übung. Es sei $(\mathbb{E}, \mu, \varepsilon)$ ein Ringspektrum und $\mathbb{F}$ ein beliebiges Spektrum. Beweisen Sie mit Hilfe von Satz 7.27 und Definition 7.28, dass $(\mathbb{F} \wedge \mathbb{E}, \mathrm{id} \wedge \mu)$ ein $\mathbb{E}$-Modulspektrum ist.

7.66. Übung. Es sei $A$ eine abelsche Gruppe und $\mathbb{M}A$ ihr Moore-Spektrum. Zeigen Sie, dass

$$\pi_k(\mathbb{HZ} \wedge \mathbb{M}A) \cong \begin{cases} A & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Konstruieren Sie eine stabile Abbildung $\mathbb{H}A \to \mathbb{HZ} \wedge \mathbb{M}A$, die auf allen $\pi_k$ Isomorphismen induziert.

7.67. Übung. Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 7.27 und Definition 7.28, dass die externen Produkte aus Definition 7.32 mindestens eine der in den Definitionen 7.19 und 7.19 geforderten Eigenschaften haben.

7.68. Übung. Es sei $\mathbb{E}$ ein Ring- und $\mathbb{F}$ ein Rechts-$\mathbb{E}$-Modulspektrum. Überprüfen Sie Bemerkung 7.34, wonach $\tilde{F}_\bullet(X)$ und $\tilde{F}^\bullet(X)$ für jeden Raum $X$ graduierte Rechts-$E^\bullet$-Moduln sind, und stetige Abbildungen graduiert $E^\bullet$-lineare Abbildungen induzieren. Dabei bedeutet „graduiert“ wieder, dass sich bei der Multiplikation homogener Elemente die Grade addieren.

*Übungen zu Abschnitt 7.e.*

7.69. Übung. Es sei $f\colon (Z,U) \to (W,V)$ eine stetige Abbildung beliebiger Paare. Beweisen Sie die Definition 7.44 zugrunde liegende Behauptung, wonach $f^*\colon E^\bullet(W,V) \to E^\bullet(Z,U)$ nicht von der Wahl der Abbildung $g\colon (X,A) \to (Y,B)$ von Approximationen durch Paare von CW-Komplexen abhängt. Zeigen Sie dann, dass $E^\bullet$ ein homotopieinvarianter Funktor ist.

7.70. Übung. Es seien $(X,A) \to (Z,U)$ und $(Y,B) \to (W,V)$ Approximationen durch Paare von CW-Komplexen. Zeigen Sie, dass $(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$ eine Approximation von $(Z \times W, U \times W \cup Z \times V)$ durch Paare von CW-Komplexen ist.

*Hinweis:* Arbeiten Sie mit Abbildungskegeln, und beginnen Sie mit dem Spezialfall $U = V = \emptyset$.

7.71. Übung. Es sei $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathrm{cl}(\Bbbk P^n) \geq n$, indem Sie ein nicht verschwindendes Cup-Produkt in einem geeigneten reduzierten multiplikativen Kohomologiering von $\Bbbk P^n$ angeben.
(2) Zeigen Sie, dass $LS(\Bbbk P^n) \leq n$.

Aus Proposition 7.52 folgt dann $LS(\Bbbk P^n) = \mathrm{cl}(\Bbbk P^n) = n$.

KAPITEL 8

# Dualität

In allgemeinen monoidalen Kategorien gibt es einen Begriff von starker Dualität. In der stabilen Homotopiekategorie $\mathcal{HSCW}$ der CW-Spektren ist das die sogenannte Spanier-Whitehead- oder $S$-Dualität. Beim Übergang von einem Raum zu seinem Dualraum vertauschen Homologie und Kohomologie ihre Rollen. Motiviert von unseren Überlegungen zur Poincaré-Dualität in der Bordismustheorie führen wir Orientierungen und Fundamentalklassen ein. Anschließend beweisen wir den Thom-Isomorphismussatz und Poincaré-Dualität, indem wir den Thom-Isomorphismus mit Spanier-Whitehead-Dualität kombinieren.

## 8.a. Spanier-Whitehead-Dualität

In diesem Kapitel führen wir eine stabile Dualität zwischen topologischen Räumen $X$ und $X^*$ ein, so dass die Homologie von $X$ genau die Kohomologie von $X^*$ ist und umgekehrt. Streng genommen handelt es sich um eine Dualität zwischen (Einhängungs-) Spektren. Sie funktioniert besonders gut für endliche Spektren, oder äquivalent für endliche CW-Komplexe. Kompakte glatte Mannigfaltigkeiten sind typische Beispiele hierfür, und wir können das Dual einer kompakten Mannigfaltigkeit explizit angeben als Thom-Spektrum ihres stabilen Normalenbündels; dazu folgen wir Dold und Puppe [**DP**]. Im nächsten Abschnitt beweisen wir den Thom-Isomorphismus-Satz und erhalten als Korollar verschiedene Dualitätssätze für glatte Mannigfaltigkeiten.

Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine monoidale Kategorie, siehe Abschnitt 4.c. Wir erinnern uns auch an die natürlichen Isomorphismen $\lambda$ und $\rho$ aus Definition 4.26. In einer monoidalen Kategorie heißt ein Objekt $B$ *schwach dual* zu $A$, wenn es für alle Objekte $C$ eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C \otimes A, E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B) \tag{8.1}$$

gibt. Für $C = B$ entspricht dann $\mathrm{id}_B \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, B)$ der *schwachen Auswertungsabbildung*

$$\varepsilon = \varepsilon_A \colon B \otimes A \to E\ .$$

Wenn zu jedem Objekt $A$ ein duales Objekt $DA = B$ existiert, erhält man durch Auswahl von $DA$ einen kontravarianten Funktor $D \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Falls nicht, kann man zur vollen Unterkategorie $\mathcal{C}^*$ der dualisierbaren Objekte übergehen. Dabei ist $E$ dual zu sich selbst, wir setzen also $DE = E$. Der zu $f \colon A \to B$ *duale Morphismus* $Df \colon DB \to DA$ wird so definiert, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} DB \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes f"] \arrow[d, "Df\otimes\mathrm{id}"'] & DB \otimes B \arrow[d, "\varepsilon_B"] \\ DA \otimes A \arrow[r, "\varepsilon_A"] & E \end{tikzcd} \tag{8.2}$$

kommutiert.

Wenn $\mathcal{C}$ symmetrisch monoidal ist und auch $DA$ ein schwaches Dual besitzt, können wir eine natürliche Abbildung $\delta_A \colon A \to DDA$ angeben, die gemäß (8.1) der Identität $\mathrm{id}_{DA}$ entspricht. Dann nennen wir $A$ *reflexiv,* wenn $\delta_A$ ein Isomorphismus ist.

8.1. Beispiel. Es sei $\mathcal{C}$ eine abgeschlossene monoidale Kategorie. Dann hat jedes Objekt $C$ ein schwach duales Objekt $D = \hom(C, E)$, und $\varepsilon_C = \mathrm{ev}_{C,E}$ ist die schwache Auswertungsabbildung aufgrund der universellen Eigenschaft aus Bemerkung 4.28 (1). Der duale Morphismus zu $f\colon A \to B$ ist $\hom(f, E)\colon \hom(B, E) \to \hom(A, E)$.

Noch konkreter sei $\mathcal{C} = \mathcal{V}ec_{\Bbbk}$, dann ist $DV = V^*$ der Dualraum, $\varepsilon_V\colon V^* \otimes V \to \Bbbk$ die Auswertungsabbildung mit $\alpha \otimes v \mapsto \alpha(v)$, und $f^*\colon W^* \to V^*$ ist der duale Morphismus zu $f\colon V \to W$. Ein Vektorraum $V$ ist reflexiv, wenn $V \cong (V^*)^*$ gilt, also genau dann, wenn er endlich-dimensional ist. Daher heißen reflexive Objekte manchmal auch *endlich.*

8.2. Proposition und Definition. *Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine monoidale Kategorie. Für Objekte $A$, $B$ von $\mathcal{C}$ und einen Morphismus $\varepsilon\colon B \otimes A \to E$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *Es gibt eine Ko-Auswertungsabbildung $\eta\colon E \to A \otimes B$, so dass*

$$\mathrm{id}_A\colon A \xrightarrow{\lambda^{-1}} E \otimes A \xrightarrow{\eta\otimes\mathrm{id}} A \otimes B \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\varepsilon} A \otimes E \xrightarrow{\rho} A\,, \tag{1a}$$

$$\mathrm{id}_B\colon B \xrightarrow{\rho^{-1}} B \otimes E \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\eta} B \otimes A \otimes B \xrightarrow{\varepsilon\otimes\mathrm{id}} E \otimes B \xrightarrow{\lambda} B\,. \tag{1b}$$

(2) *Für alle Objekte $C$, $D$ von $\mathcal{C}$ ist die natürliche Abbildung $\varphi_{C,D}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D \otimes B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C \otimes A, D)$ bijektiv, wobei*

$$\varphi_{C,D}(f)\colon C \otimes A \xrightarrow{f\otimes\mathrm{id}} D \otimes B \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\varepsilon} D \otimes E \xrightarrow{\rho} D\,.$$

*Falls eine dieser Aussagen gilt, heißt $A$* stark dualisierbar *mit* starkem Dual *$B$.*

Äquivalent zur obigen Definition ist die Forderung, dass es eine Adjunktion $\cdot \otimes A \dashv \cdot \otimes B$ von Funktoren auf $\mathcal{C}$ gibt. Eigenschaft (1) entspricht Definition 4.1, wohingegen $\varepsilon$ und $\eta$ gerade Einheit und Koeinheit dieser Adjunktion aus Bemerkung 4.2 darstellen. Später benutzen wir Eigenschaft (1) zum Nachweis der starken Dualität. In den Anwendungen arbeiten wir oft mit (2), siehe Bemerkung 8.5. Eigenschaft (2) impliziert, dass starke Duale insbesondere schwache Duale im Sinne von (8.1) sind.

In einer symmetrischen monoidalen Kategorie spielen $A$ und $B$ die gleiche Rolle. Also ist $A$ genau dann starkes Dual von $B$, wenn $B$ starkes Dual von $A$ ist, und stark dualisierbare Objekte sind automatisch reflexiv.

Beweis. Die Behauptung ist die Äquivalenz zweier Definitionen adjungierter Funktoren, die folgenden Argumente sind daher Standard. Sei (1) erfüllt, dann definieren wir eine Umkehrabbildung $\psi_{C,D}$ zu $\varphi_{C,D}$ durch

$$\psi_{C,D}(g)\colon C \xrightarrow{\rho^{-1}} C \otimes E \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\eta} C \otimes A \otimes B \xrightarrow{g\otimes\mathrm{id}} D \otimes B\,.$$

Um zu sehen, dass $\varphi_{C,D} \circ \psi_{C,D} = \mathrm{id}$, benutzen wir (1a) im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C \otimes A \arrow[r] \arrow[drrr, equal] & C \otimes E \otimes A \arrow[r, "\eta"] & C \otimes A \otimes B \otimes A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varepsilon"] & D \otimes B \otimes A \arrow[d, "\varepsilon"] \\
& & C \otimes A \otimes E \arrow[r, "g"] \arrow[d] & D \otimes E \arrow[d] \\
& & C \otimes A \arrow[r, "g"] & D\,.
\end{tikzcd}$$

Entsprechend folgt $\psi_{C,D} \circ \varphi_{C,D} = \mathrm{id}$ aus (1b).

Wenn umgekehrt (2) gilt, sei $\eta = \varphi_{E,A}^{-1}(\lambda)$. Dann folgt (1a) aus der Definition von $\varphi_{E,A}$, denn

$$\begin{tikzcd} E \otimes A \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\lambda"'] & A \otimes B \otimes A \arrow[d, "\varepsilon"] \\ A & A \otimes E \arrow[l, "\rho"'] \end{tikzcd} .$$

Nach Definition von $\varphi_{C,D}$ gilt $\varepsilon = \varphi_{B,E}(\lambda^{-1})$. Wir können jetzt $\psi_{C,D}$ wie oben definieren und $\varphi_{C,D} \circ \psi_{C,D} = \mathrm{id}$ überprüfen. Da $\varphi_{C,D}$ bijektiv ist, ist $\psi_{C,D}$ die Umkehrabbildung. Also gilt $\psi_{B,E}(\varepsilon) = \lambda^{-1}$, und daraus folgern wir (1b) ähnlich wie oben. □

8.3. Beispiel. Selbst in abgeschlossenen monoidalen Kategorien ist nicht immer jedes Objekt stark dualisierbar.

(1) Ein $\Bbbk$-Vektorraum ist genau dann stark dualisierbar, wenn er endlich-dimensional ist.
(2) Sei $R$ kommutativer Ring mit Eins. Dann ist ein $R$-Modul genau dann stark dualisierbar, wenn er endlich erzeugt und projektiv ist.

Da $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ und $\mathcal{M}od_R$ symmetrisch monoidal sind, ist Dualität hier eine symmetrische Relation.

8.4. Definition. Das starke Dual in der stabilen Homotopiekategorie $(\mathcal{HSCW}, \wedge, \mathbb{S})$ heißt *Spanier-Whitehead-Dual* oder *S-Dual.* Wenn $\mathbb{S}X$ zu $\Sigma^{-n}\mathbb{S}Y$ stark dual ist, heißt $Y$ ein Spanier-Whitehead-Dual vom *Grad* $n$ mit *Auswertungsabbildung* $\varepsilon_n \colon Y \wedge X \to S^n$.

8.5. Bemerkung. Da die monoidale Kategorie $\mathcal{HSCW}$ nach Satz 7.27 graduiert symmetrisch ist, ist dann $X$ auch ein Spanier-Whitehead-Dual zu $Y$. Dualisierbare Räume sind also reflexiv, was auch in der Kategorie $\mathcal{HSCW}$ eine starke Einschränkung ist. Immerhin kann man zeigen, dass endliche CW-Spektren immer ein ebenfalls endliches duales Spektrum besitzen.

Wir müssen etwas mit den Vorzeichen aufpassen. Es sei $Y$ ein Spanier-Whitehead-Dual von $X$ vom Grad $n$. Zur Auswertungsabbildung $\varepsilon_n \colon Y \wedge X \to S^n$ gehört nach Definition 8.2 (1) eine Koauswertungsabbildung $\eta_n \colon S^n \to X \wedge Y$, so dass

$$\mathrm{id}_{S^n X} \colon S^n \wedge X \xrightarrow{\eta_n \wedge \mathrm{id}} X \wedge Y \wedge X \xrightarrow{\mathrm{id} \wedge \varepsilon_n} X \wedge S^n \xrightarrow{\tau} S^n \wedge X ,$$

$$\mathrm{id}_{S^n Y} \colon S^n \wedge Y \xrightarrow{(-1)^n \tau_0} Y \wedge S^n \xrightarrow{\mathrm{id} \wedge \eta_n} Y \wedge X \wedge Y \xrightarrow{\varepsilon_n \wedge \mathrm{id}} S^n \wedge Y .$$

Hierbei sei $\tau_0$ die „naive“ Transposition aus Bemerkung 3.73 (2). Da sowohl $S^n$ als auch $Y$ der $n$-te Raum des jeweiligen Spektrums sind, entspricht $\tau_{n,n} = (-1)^{n \cdot n} \tau_0$ genau der Transposition gemäß Satz 7.27.

8.6. Bemerkung. Wir geben eine (ko-) homologische Interpretation der Bedingung (2) in Definition 8.2. Es sei $\mathbb{E}$ ein Spektrum, das wir gemäß Beispiel 7.30 (1) als Linksmodulspektrum über dem Sphärenspektrum $\mathbb{S}$ auffassen. Außerdem repräsentiert $\eta_n$ eine Homologieklasse $[\eta_n] \in \pi_n^s(X \wedge Y)$. Unter der Annahme, dass $X$ ein endlicher CW-Komplex ist, sei $[a] \in E^k(X)$ gegeben durch $a \colon S^\ell X \to E_{k+\ell}$. Aus Definition 7.32 und der Konstruktion von $\psi$ im Beweis vom Proposition 8.2 ergibt sich, dass

$$\psi_{\mathbb{S},\mathbb{E}}(a) = \eta_n / a \colon S^{n+\ell} \xrightarrow{S^\ell \eta_n} S^\ell X \wedge Y \xrightarrow{a \wedge \mathrm{id}} E_{k+\ell} \wedge Y .$$

Das gleiche Argument funktioniert auch für stabile Abbildungen $a \in [\mathbb{S}X, \mathbb{E}]_{-k}$. Also erhalten wir eine (ko-) homologische Dualität

$$\psi_{\mathbb{S},\mathbb{E}} = \eta_n / \cdot \colon \tilde{E}^k(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{E}_{n-k}(Y) .$$

Um Spanier-Whitehead-Duale zu konstruieren, benötigen wir noch einen neuen Begriff.

8.7. Definition. Eine abgeschlossene Teilmenge $Y \subset X$ heißt *Umgebungsretrakt,* wenn es eine Umgebung $U \subset X$ von $Y$ und eine Retraktion $p\colon U \to Y$ gibt. Letztere heißt dann auch *Umgebungsretraktion.*

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, wie wir Räume und Paare von Räumen durch Paare von CW-Komplexen approximieren können. Den Ausschneidungssatz 7.46 können wir als Satz über solche Approximationen verstehen. Wir arbeiten im Folgenden daher nicht mit CW-Komplexen, sondern mit Raumpaaren. Eine Approximation durch Paare von CW-Komplexen ist im Folgenden stets möglich, vereinfacht die Situation jedoch nicht. Wir erinnern uns an die Schreibweise $X|x = (X, X \setminus \{x\})$ aus Abschnitt 3.e. Allgemeiner sei $X|A = (X, X \setminus A)$ für jede Teilmenge $A \subset X$. Mit $C(X|x) = X /\!\!/ (X \setminus \{x\})$ und $C(X|A) = X /\!\!/ (X \setminus A)$ bezeichnen wir die zugehörigen Homotopiequotienten.

8.8. Satz (Spanier-Whitehead-Dualität). *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Umgebungsretrakt. Dann ist $C(\mathbb{R}^n|K)$ ein Spanier-Whitehead-Dual von $K_+$ vom Grad $n$.*

Beweis. Wir folgen dem Beweis von Dold und Puppe, siehe [**DP**, Chapter 3]. Wir fassen $K$ als 0-ten Raum des Spektrums $\mathbb{S}K$ auf, und $C(\mathbb{R}^n|K)$ als $n$-ten Raum des dualen Spektrums. Eine Auswertungsabbildung $\varepsilon_n\colon C(\mathbb{R}^n|K) \wedge K_+ \to S^n$ wird gegeben durch

$$\varepsilon_n((x,t) \wedge k) = (x-k, t) \in C(\mathbb{R}^n|0) \xrightarrow{\sim} S^n \ .$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn sie bildet Basispunkt auf Basispunkt ab, und wenn $(x,t)$ nicht in der Basis des Kegels liegt, also $t < 1$, gilt $x \notin K$, somit $x - k \neq 0$.

Es sei $R > 0$ so groß, dass $K \subset B_R(0)$. Mit dem Lemma 1.30 von Urysohn finden wir eine stetige Abschneidefunktion $\psi\colon \mathbb{R}^n \to I$ mit $\psi|_K \equiv 1$ und $\operatorname{supp}\psi \subset U$. Außerdem sei $p\colon U \to K$ die Umgebungsretraktion. Wir konstruieren eine Koauswertungsabbildung $\eta_n\colon S^n \to K_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|K)$ für $(x,t) \in C(\mathbb{R}^n|B_R(0)) \sim S^n$ durch

$$\eta_n(x,t) = p(x) \wedge \big(x, \psi(x)\, t\big) \ .$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn da $\operatorname{supp}\psi \subset U$, brauchen wir $p(x)$ nur auf Punkte $x \in U$ anzuwenden. Und schließlich ist $|x| \geq R$ falls $t < 1$, also insbesondere $x \notin K$. Sobald wir gezeigt haben, dass $\varepsilon_n$ und $\eta_n$ die Bedingungen aus Bemerkung 8.5 erfüllen, folgt auch die Eindeutigkeit von $\eta_n$ bis auf stabile Homotopie.

Wir überprüfen die Bedingungen aus Proposition 8.2 (1). Zu (1a) betrachten wir die Verkettung

$$\begin{aligned} S^n \wedge K_+ \sim C(\mathbb{R}^n|B_R(0)) \wedge K_+ &\xrightarrow{\eta_n \wedge \mathrm{id}} K_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|K) \wedge K_+ \xrightarrow{\mathrm{id} \wedge \varepsilon_n} K_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|0) \sim K_+ \wedge S^n \\ (x,t) \wedge k &\longmapsto p(x) \wedge (x, \psi(x)\, t) \wedge k \longmapsto p(x) \wedge (x-k, \psi(x)\, t) \ . \end{aligned}$$

Um eine Homotopie zur Transpositionsabbildung $\tau\colon S^n \wedge K_+ \to K_+ \wedge S^n$ zu finden, ersetzen wir im Bild $K$ zunächst durch $U$. Das Element $(x-k, \psi(x)\, t) \in C(\mathbb{R}^n|0)$ „sieht“ nur Punkte von kleinem Abstand $|x-k|$. Genauer gesagt, wählen wir $r > 0$ so klein, dass $x \in U$ falls $k \in K$ und $|x-k| < r$. Mit einer weiteren Abschneidefunktion erreichen wir, dass $(x,t) \wedge k$ auf den Basispunkt abgebildet wird, wenn $|x-k| \geq r$. Daher ist die obige Abbildung als Abbildung nach $U_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|0)$ homotop zu

$$C(\mathbb{R}^n|B_R(0)) \wedge K_+ \ni (x,t) \wedge k \longmapsto k \wedge (x-k, \psi(x)\, t) \in K_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|0) \ .$$

Mit Hilfe der Retraktionsabbildung $p$ können wir diese Homotopie auf $K_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|0)$ „herunterdrücken“. Die obige Abbildung ist wiederum homotop zu

$$C(\mathbb{R}^n|B_R(0)) \wedge K_+ \ni (x,t) \wedge k \longmapsto k \wedge (x, \psi(x)\, t) \in K_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|0) \ ,$$

indem wir $x - k$ durch $x - sk$ ersetzen. Denn falls $(x,t)$ nicht in der Basis des Kegels liegt (also falls $t < 1$), ist $|x| \geq R$, somit $x - sk \neq 0$ für alle $s \in I$.

Zu (1b) betrachten wir die Verkettung

$$\begin{aligned} C(\mathbb{R}^n|K) \wedge C(\mathbb{R}^n|B_R(0)) &\xrightarrow{\mathrm{id}\wedge\eta_n} C(\mathbb{R}^n|K) \wedge K_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|K) \xrightarrow{\varepsilon_n\wedge\mathrm{id}} C(\mathbb{R}^n|0) \wedge C(\mathbb{R}^n|K) \\ (y,u)\wedge(x,t) &\longmapsto (y,u)\wedge p(x)\wedge(x,\psi(x)\,t) \longmapsto (y-p(x),u)\wedge(x,\psi(x)\,t)\ . \end{aligned}$$

Wie im obigen Beweis dürfen wir annehmen, dass alle Punkte $(y,u)\wedge(x,t)$ auf den Basispunkt abgebildet werden, es sei denn $|y-p(x)|<r$ und $|x-p(x)|<r$; letzteres gilt bei geeigneter Wahl von $r$, da $p(x)=x$ für alle $x\in K$. Wir ersetzen zunächst $x$ durch $y+v$ und erhalten als neue Abbildung $(y,v)\mapsto(y-p(y+v),u)\wedge(y+v,\psi(y+v)t)$. Indem wir $y$ durch $y-sv$ ersetzen, erhalten wir eine Homotopie $(y,v)\mapsto(y-sv-p(y+(1-s)v),u)\wedge(y+(1-s)v,\psi(y+(1-s)v)\,t)$ von wohldefinierten Abbildungen zu $(y,v)\mapsto(-(v+p(y)-y),u)\wedge(y,\psi(y)\,t)$ Zum Schluss dürfen wir $v$ durch $v+y-p(y)$ ersetzen und erhalten eine Abbildung, die zu $(-1)^n\,\tau_0$ homotop ist. Mit Bemerkung 8.5 ist der Satz bewiesen. □

Wir erinnern uns an den Whitney-Einbettungssatz 6.60, den Satz 6.68 von der Röhrenumgebung, die Definition 6.67 des Thom-Raumes eines Vektorbündels und die Definition 6.61 des stabilen Normalenbündels.

8.9. Definition. Es sei $f\colon M\to\mathbb{R}^n$ eine Einbettung einer $m$-dimensionalen glatten geschlossenen Mannigfaltigkeit. Das *normale Thom-Spektrum* $\mathbb{M}\nu$ von $f$ ist als Einhängungsspektrum definiert durch

$$M\nu_k = \begin{cases} \mathrm{pt} & \text{falls } k<n, \text{ und} \\ S^{k-n}M\nu & \text{falls } k\ge n. \end{cases} \tag{1}$$

Wenn $M$ einen Rand hat, definieren wir das *relative normale Thom-Spektrum* $\mathbb{M}\bar\nu$ durch

$$M\bar\nu_k = M\nu_k/M(\nu|_{\partial M})_k\ . \tag{2}$$

Der Raum $M\bar\nu_k$ heißt auch *relativer Thom-Raum.* Aus den Vorüberlegungen zu Definition 6.61 folgt, dass $\mathbb{M}\nu$ und $\mathbb{M}\bar\nu$ bis auf stabile Isomorphismen nicht von der Wahl der Einbettung $f$ abhängen. An der folgenden Konstruktion erkennt man gut, dass Spanier-Whitehead-Dualität eine stabile Konstruktion ist.

8.10. Folgerung. *Das relative normale Thom-Spektrum einer glatten kompakten Mannigfaltigkeit $M$ mit Rand ist Spanier-Whitehead-dual zu $M$. Dabei faktorisiert die Koauswertungsabbildung $\eta_n\colon S^n\to M_+\wedge M\bar\nu_n$ zu einer Einbettung $f\colon M\to\mathbb{R}^n$ über die Kollaps-Abbildung $S^n\to M\bar\nu$.*

Beweis. Es sei $f\colon M\to\mathbb{R}^n$ eine Einbettung gemäß Satz 6.60, und es sei $D\nu_{\mathbb{R}^n}M\subset\mathbb{R}^n$ eine Röhrenumgebung gemäß Satz 6.68. Dann ist $M$ Deformationsretrakt von $D\nu_{\mathbb{R}^n}M$, also ist $M\subset\mathbb{R}^n$ insbesondere ein Umgebungsretrakt. Wie im Beweis von Satz 8.8 ist $C(D\nu_{\mathbb{R}^n}M|M)$ ein Spanier-Whitehead-Dual von $M$ vom Grad $n$, und $C(D\nu_{\mathbb{R}^n}M|M)$ ist homotopieäquivalent zum Thom-Raum $M\nu_{\mathbb{R}^n}M=M\nu_n$.

Wenn $M$ einen Rand hat, können wir jede Einbettung $f\colon M\to\mathbb{R}^n$ zu einer Einbettung

$$\bar f\colon \bar M = M\cup_{\partial M}(\partial M\times[0,\varepsilon]) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

fortsetzen, da $\partial M$ kompakt ist. Dann ist $M$ Retrakt einer Röhrenumgebung $D\bar\nu$ des Normalenbündels $\bar\nu\to\bar M$, und $C(D\bar\nu|M)$ ist homotopieäquivalent zu $M\bar\nu_n$. Die Abbildung $\eta_n$ aus dem Beweis von Satz 8.8 lässt sich zerlegen als

$$\begin{aligned} \eta_n\colon C(\mathbb{R}^n|B_R(0)) &\xrightarrow{c} M\bar\nu_n \xrightarrow{(p\wedge\mathrm{id})\circ\Delta} M_+\wedge M\bar\nu_n \\ (x,t) &\longmapsto \big(x,\psi(x)\,t\big) \longmapsto p(x)\wedge\big(x,\psi(x)\,t\big)\ , \end{aligned}$$ □

dabei ist $c\colon S^n\to M\bar\nu_n$ die Kollaps-Abbildung.

## 8.b. Orientierungen und Thom-Isomorphismen

Wir definieren einen geeigneten Orientierungsbegriff für topologische Mannigfaltigkeiten, und für eine bestimmte Art „Bündel“, und zwar als ganzzahlige Kohomologieklasse. Anschließend verallgemeinern wir diesen Begriff auf allgemeine multiplikative Kohomologiefunktoren. Danach beweisen wir den Thom-Isomorphismus-Satz.

Zur Motivation sei zunächst $V$ ein reeller Vektorraum. Unter einer Orientierung von $V$ versteht man eine Äquivalenzklasse gleich orientierter Basen, dabei heißen zwei Basen gleich orientiert, wenn die zugehörige Basiswechselmatrix positive Determinante hat. Ein Vektorraum mit Orientierung heißt *orientierter Vektorraum.* Der Raum $\mathbb{R}^n$ trage fortan diejenige Orientierung, für die die Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ positiv orientiert ist. Ein linearer Isomorphismus $\varphi\colon V \to W$ orientierter Vektorräume heißt *orientiert,* wenn er orientierte Basen auf orientierte Basen abbildet.

Sei jetzt $p\colon V \to X$ ein reelles Vektorbündel vom Rang $r$ wie in Abschnitt 6.f. Unter einer Orientierung von $V$ verstehen wir eine Orientierung jeder einzelnen Faser, so dass es einen Atlas $\mathcal{A} = \{\, (U_i, \varphi_i) \mid i \in I \,\}$ wie in Definition 6.34 gibt, für die alle $(\varphi_i|_{V_x})^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to V_x$ orientierte Isomorphismen sind, siehe Bemerkung 6.40 (1).

Für eine topologische Definition betrachten wir $g \in GL(r, \mathbb{R})$ als Abbildung $g\colon \mathbb{R}^r|0 \to \mathbb{R}^r|0$. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \cong \tilde{H}^{r-1}(\mathbb{R}^r) \arrow[r] & \tilde{H}^{r-1}(\mathbb{R}^r \setminus \{0\}) \arrow[r, "\delta", "\cong"'] \arrow[d, "g^*"'] & H^r(\mathbb{R}^r|0) \arrow[r] \arrow[d, "g^*"] & \tilde{H}^r(\mathbb{R}^r) \cong 0 \\
0 \cong \tilde{H}^{r-1}(\mathbb{R}^r) \arrow[r] & \tilde{H}^{r-1}(\mathbb{R}^r \setminus \{0\}) \arrow[r, "\delta", "\cong"'] & H^r(\mathbb{R}^r|0) \arrow[r] & \tilde{H}^r(\mathbb{R}^r) \cong 0
\end{tikzcd}$$

für ganzzahlige Kohomologie. Die beiden mittleren Kohomologiegruppen sind jeweils isomorph zu $\mathbb{Z}$, da $(D^r, S^{r-1})$ ein Deformationsretrakt des Paares $\mathbb{R}^r|0$ ist. Nach Beispiel 3.47 hat die Abbildung $g$ den Abbildungsgrad $\deg g = \operatorname{sign} \det g$, somit ist $g^* = \pm\mathrm{id}$, je nachdem, ob $g$ orientierungserhaltend ist oder nicht. Also verhalten sich die zwei Erzeuger von $H^r(\mathbb{R}^r|0) \cong \mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul unter linearen Isomorphismen genau wie Orientierungen. Daher nennen wir einen Erzeuger von $H^r(\mathbb{R}^r|0)$ eine *Orientierung* des $\mathbb{R}^r$.

Um Orientierungen auf $V$ zu erhalten, die stetig von Faser zu Faser variieren, identifizieren wir $X$ mit dem Nullschnitt von $V$ und erinnern uns an den Thom-Raum $MV$, der zu $C(V|X)$ homotopieäquivalent ist. Wir definieren eine $\mathbb{Z}$-Orientierung von $V$ als eine Klasse $\omega \in H^\bullet(V|X)$, so dass $\iota_x^*\omega \in H^\bullet(V_x|0)$ den $\mathbb{Z}$-Modul $H^\bullet(V_x|0) \cong H^\bullet(\mathbb{R}^n|0) \cong \mathbb{Z}$ für alle $x \in X$ erzeugt; dabei sei $\iota_x\colon V_x \to V$ die Inklusionsabbildung.

Diesen Orientierungsbegriff verallgemeinern wir für beliebige multiplikative Kohomologiefunktoren. Sei $\mathbb{E}$ ein Ringspektrum. Wir nennen ein Element $\alpha \in E^\bullet(\mathbb{R}^r|0)$ einen *Erzeuger,* wenn die Abbildung

$$E^\bullet \to E^\bullet(\mathbb{R}^r|0) \qquad \text{mit} \qquad \beta \mapsto \alpha \wedge \beta$$

ein Isomorphismus ist. Zwei Erzeuger unterscheiden sich um eine Einheit des Koeffizientenrings $E^\bullet$. Im Falle gewöhnlicher Kohomologie ist $\alpha$ vom Grad $r$, aber das muss für allgemeine $\mathbb{E}$ nicht so sein.

8.11. Definition. Es sei $E$ ein multiplikativer Kohomologiefunktor und $V \to X$ ein Vektorbündel vom Rang $r$. Eine *$E$-Orientierung* oder auch *Thom-Klasse* von $V$ im Grad $n$ ist ein Element $\omega \in E^n(V|X)$, so dass $\iota_x^*\omega$ für alle $x \in X$ den $E^\bullet$-Modul $E^\bullet(V_x|x)$ erzeugt.

Für einen Ring $R$ sprechen wir von $R$-Orientierbarkeit, wenn Orientierungen bezüglich des Eilenberg-Mac Lane-Spektrums $\mathbb{H}R$ gemeint sind.

8.12. Bemerkung. Nicht jedes Vektorbündel ist orientierbar. Beispielsweise ist das Möbiusband nicht $\mathbb{Z}$-orientierbar, denn bei einem Umlauf um die Basis $S^1$ geht jeder Erzeuger in sein Negatives über.

Die obige Vorüberlegung legt nah, eine Überlagerung $X_{V,\mathbb{E}} \to X$ der punktweisen $E$-Orientierungen von $V$ einzuführen. Als Faser $X_{V,\mathbb{E},x}$ wählen wir die Menge aller Erzeuger von $E^\bullet(V_x|x) \cong E^{\bullet+m}$, und lokale Trivialisierungen von $X_{V,\mathbb{E}}$ konstruieren wir mit Hilfe von lokalen Trivialisierungen von $V$. Dann liefert jede $E^\bullet$-Orientierung $\omega$ von $V$ einen Schnitt $o\colon X \to X_{V,\mathbb{E}}$ mit $o(x) = \iota_x^*\omega$; diese Abbildung ist für allgemeine $\mathbb{E}$ aber werder injektiv noch surjektiv. Für gewöhnliche Kohomologie erhalten wir Bijektivität mit Hilfe des Dimensionsaxioms, vergleiche [**H1**, Theorem 3.26].

Im folgenden Satz nutzen wir aus, dass $p\colon V \to X$ eine Homotopieäquivalenz ist. In der relativen Situation $V \to (X, Y)$ betrachten wir wie in Definition 8.9 den relativen Thom-Raum

$$M\bar{V} = MV/M(p^{-1}(Y)) \ .$$

8.13. Satz (Thom-Isomorphismen). *Es sei $\mathbb{E}$ ein Ringspektrum und $\mathbb{F}$ ein Rechts-$\mathbb{E}$-Modulspektrum. Es sei $p\colon V \to X$ ein Vektorbündel vom Rang $r$, und $X$ sei ein endlicher CW-Komplex oder eine kompakte Mannigfaltigkeit. Es sei $\omega \in E^n(MV)$ eine $E$-Orientierung. Für jeden Unterkomplex beziehungsweise jede abgeschlossene Untermannigfaltigkeit $Y \subset X$ gibt es Isomorphismen*

$$\vartheta_{k+n}\colon \tilde{F}_{k+n}(M\bar{V}) \xrightarrow{\frown\omega} F_k(V, V|_Y) \xrightarrow{p_*} \tilde{F}_k(X/Y) \tag{1}$$

$$\textit{und} \qquad \vartheta^k\colon \tilde{F}^k(X/Y) \xrightarrow{p^*} F^k(V, V_Y) \xrightarrow{\smile\omega} \tilde{F}^{n+k}(M\bar{V}) \ . \tag{2}$$

*Wenn $\mathbb{E}$ graduiert kommutativ ist, gilt für alle $\beta \in E^\ell(X)$, dass*

$$\vartheta_{k-\ell+n}(a \frown p^*\beta) = (-1)^{\ell n}\vartheta_{k+n}(a) \frown \beta \qquad \textit{und} \qquad \vartheta^{k+\ell}(\alpha \smile \beta) = (-1)^{\ell n}\vartheta^k(\alpha) \smile p^*\beta \ . \tag{3}$$

Die Voraussetzungen an $X$ können weiter abgeschwächt werden; das erfordert allerdings zusätzliche Argumente. Wenn $\mathbb{E}$ graduiert kommutativ ist, erhalten wir $E^\bullet(X)$-Modulisomorphismen machen, indem an Stelle von $\vartheta$ Thom-Isomorphismen $\Theta$ definieren durch

$$\begin{aligned} \Theta_{k+n} = (-1)^{kn}\vartheta_{k+n}\colon \tilde{F}_{k+n}(M\bar{V}) &\xrightarrow{\cong} \tilde{F}_k(X/Y) \\ \text{und} \qquad \Theta^k = (-1)^{kn}\vartheta^k\colon \tilde{F}^k(X/Y) &\xrightarrow{\cong} \tilde{F}^{k+n}(M\bar{V}) \ . \end{aligned} \tag{8.3}$$

Beweis. Wir beginnen mit dem Fall $Y = \emptyset$. Wenn das Bündel $V \cong \mathbb{R}^r \times X$ trivial ist, dann ist der Thom-Raum homotopieäquivalent zu $S^rX_+$. Es bezeichne $\Delta\colon MV = DV/SV \to MV \wedge DV_+$ die relative Diagonalabbildung. Die zusammengesetzte Abbildung

$$MV = DV/SV \xrightarrow{\Delta} (DV/SV) \wedge DV_+ \xrightarrow{\mathrm{id}\wedge p_+} (DV/SV) \wedge X_+$$

ist gerade die $r$-fache Einhängung der Diagonalabbildung $\Delta_{X_+}\colon X_+ \to X_+ \wedge X_+ = (X \times X)_+$. Es sei $\omega = \sigma^r\omega_0$ mit $\omega_0 \in E^{n-r}(X)$. Zusammen mit der Definition des Cap-Produktes und der Natürlichkeit des Schräg-Produktes liefert Definition 7.19 (3) ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{F}_{k+n}(S^rX_+) \arrow[r, "\Delta_*"] & \tilde{F}_{k+n}(S^rX_+ \wedge DV_+) \arrow[r, "/\omega"] \arrow[d, "(\mathrm{id}\wedge p_+)_*", "\cong"'] & F_k(DV) \arrow[d, "p_*", "\cong"'] \\
& \tilde{F}_{k+n}(S^rX_+ \wedge X_+) \arrow[r, "/\sigma^r\omega_0"] & F_k(X) \arrow[d, equal] \\
\tilde{F}_{k+n-r}(X_+) \arrow[r, "\Delta_{X_+*}"] \arrow[uu, "\sigma^r", "\cong"'] & \tilde{F}_{k+n-r}(X_+ \wedge X_+) \arrow[r, "/\omega_0"] \arrow[u, "\sigma^r", "\cong"'] & \tilde{F}_k(X) \ .
\end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $\vartheta_{k+n}$ genau dann ein Isomorphismus, wenn das Cap-Produkt mit $\omega_0$ in der unteren Zeile ein Automorphismus von $F_\bullet(X)$ ist. Genauso ist $\vartheta^k$ genau dann ein Isomorphismus, wenn das Cup-Produkt mit $\omega_0$ ein Automorphismus von $F^\bullet(X)$ ist.

Fixiere $x_0 \in X$ und $\iota\colon \{x_0\} \to X$. Da $\iota^*\omega_0 \in E^{n-r}(\{x_0\}) \cong E^{n-r}$ nach Voraussetzung ein Erzeuger vom Grad $n-r$ ist, ist das (Cap- oder Cup-) Produkt mit $\omega_0$ genau dann ein Automorphismus, wenn das Produkt mit $\omega_0 \smile (\iota^*\omega_0)$ ein Isomorphismus ist. Wir dürfen ab jetzt daher $n = r$ und $\iota_+^*\omega_0 = 1$ annehmen. Es folgt $\omega_0 = 1 + \alpha \in E^0(X)$ mit $\alpha \in \ker \iota_+^* = \tilde{E}^0(X)$ und $\omega = s^r(1+\alpha)$. Wir nehmen zunächst an, dass $X$ ein zusammenhängender, $m$-dimensionaler CW-Komplex ist. Nach Proposition 7.43 gilt $\alpha^{m+1} = 0$, daher ist $(1+\alpha)$ invertierbar mit

$$(1+\alpha)^{-1} = 1 - \alpha \pm \cdots + (-1)^m \alpha^m \ ,$$

und die Abbildungen (1), (2) sind Isomorphismen. Wenn $X$ eine zusammenziehbare Teilmenge einer kompakten Mannigfaltigkeit ist, ist das Argument sogar noch einfacher. Wenn $X$ nicht zusammenhängend ist, betrachten wir jede Zusammenhangskomponente einzeln und erhalten das gleiche Ergebnis.

Falls $V \to X$ nicht trivial und $X$ ein CW-Komplex ist, können wir die CW-Struktur durch Unterteilen verfeinern und $X$ als Vereinigung endlich vieler CW-Komplexe $X_1, \ldots, X_N$ schreiben, auf denen $V$ trivial ist. Falls $X$ eine kompakte Mannigfaltigkeit ist, überdecken wir $M$ dann durch $N$ zusammenziehbare offene Teilmengen. Wir schließen durch Induktion über $N$; den Fall $N = 1$ haben wir bereits behandelt. Seien also $\vartheta_{k+n}$ und $\vartheta^k$ Isomorphismen für alle $U \subset X$, die als $(N-1)$-fache Vereinigung $U = X_1 \cup \cdots \cup X_{n-1}$ von Teilmengen $X_i$ wie im ersten Schritt geschrieben werden können. Dann trifft das auch auf $W = (X_1 \cup \cdots \cup X_{n-1}) \cap X_n$ zu. Wir schreiben $V_U$ und $V_W$ für die Einschränkungen von $V$ und betrachten ein kommutatives Diagramm aus Mayer-Vietoris-Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & F_{k+n}(V_W|W) \arrow[r] \arrow[d, "\vartheta_{k+n}", "\cong"'] & F_{k+n}(V_U|U) \oplus F_{k+n}(V_{X_n}|X_n) \arrow[r] \arrow[d, "\vartheta_{k+n}", "\cong"'] & F_{k+n}(V|X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\vartheta_{k+n}"'] & F_{k+n-1}(V_W|W) \arrow[r] \arrow[d, "\vartheta_{k+n}", "\cong"'] & {} \\
\arrow[r] & F_k(W) \arrow[r] & F_k(U) \oplus F_k(X_n) \arrow[r] & F_k(X) \arrow[r, "\partial"] & F_{k-1}(W) \arrow[r] & {} \ .
\end{tikzcd}$$

Aus dem Fünfer-Lemma folgt die Behauptung.

Für $Y \neq \emptyset$ folgt die Behauptung mit dem Fünferlemma aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & \tilde{F}_{k+n}\big(M(V|Y)\big) \arrow[r] \arrow[d, "\vartheta_{k+n}", "\cong"'] & \tilde{F}_{k+n}(MV) \arrow[r] \arrow[d, "\vartheta_{k+n}", "\cong"'] & \tilde{F}_{k+n}(M\bar{V}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\vartheta_{k+n}"'] & \tilde{F}_{k+n-1}\big(M(V|Y)\big) \arrow[r] \arrow[d, "\vartheta_{k+n}", "\cong"'] & {} \\
\arrow[r] & F_k(Y) \arrow[r] & F_k(X) \arrow[r] & F_k(X,Y) \arrow[r, "\partial"] & F_{k-1}(Y) \arrow[r] & {} \ .
\end{tikzcd}$$

Genauso beweist man (2). Schließlich folgt (3) aus der Konstruktion der Thom-Isomorphismen, da man jeweils $p^*\beta$ und $\omega$ vertauschen muss. $\square$

Üblicherweise nennt man eine glatte Mannigfaltigkeit $E$-orientiert, wenn ihr Tangentialbündel eine $E$-Orientierung trägt. Wir haben bisher aber nur mit dem Normalenbündel gearbeitet. Sei $M \to \mathbb{R}^n$ eine Einbettung mit Normalenbündel $\nu M \to M$. Dann zerfällt $\mathbb{R}^n$ für alle $x \in M$ als direkte Summe in $\nu_x M$ und $T_x M$. Für die Whitney-Summe gilt daher

$$\nu M \oplus TM \cong \underline{\mathbb{R}}^n \to M \ .$$

Das reicht, um mit Hilfe des Thom-Isomorphismus normale und tangentiale Orientierungen zu vergleichen. Denn das triviale Bündel lässt sich immer orientieren, indem man einen Erzeuger

von $E^\bullet$ mit der Abbildung $q\colon C(\underline{\mathbb{R}}^n|X) \to C(\mathbb{R}^n|0)$ zurückzieht. Wenn nichts anderes gesagt wird, wählen wir dazu die *Standardorientierung* $\omega_{\underline{\mathbb{R}}^n} = q^*(s^n\varepsilon)$.

8.14. Folgerung. *Es sei $X$ wie in Satz 8.13, es sei $\mathbb{E}$ ein Ringspektrum, und es seien $p\colon V \to X$, $q\colon W \to X$ reelle Vektorbündel. Wir bezeichnen die Projektion von $U = V \oplus W$ auf die Summanden mit $\bar{p}\colon U \to W$ und $\bar{q}\colon U \to V$. Wenn zwei der drei Bündel $V$, $W$ und $U = V \oplus W$ $E$-Orientierungen $\omega_V$, $\omega_W$ beziehungsweise $\omega_U$ tragen, dann lässt sich die dritte Orientierung eindeutig so festlegen, dass*

$$\omega_U = \bar{q}^*\omega_V \smile \bar{p}^*\omega_W \in E^\bullet(MU)\ .$$

Beweis. Das faserweise Produkt $DV \times_X DW$ is homöomorph zu $DU$. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} DU \arrow[r, "\bar{q}"] \arrow[d, "\bar{p}"'] & DV \arrow[d, "p"] \\ DW \arrow[r, "q"] & X\ . \end{tikzcd}$$

Es gilt $DU \cong p^*DW = q^*DV$ und $SU \cong q^*SV \cup p^*SW$. Es folgt, dass $DU_x/SU_x \cong DV_x/SV_x \wedge DW_x/SW_x$ für alle $x \in X$. Der Thom-Raum $MU = DU/SU$ ist zu den relativen Thom-Räumen von $p^*W \to (DV, SV)$ und von $q^*V \to (DW, SW)$ homöomorph. Wir ziehen eine gegebene Orientierung $\omega_W \in \tilde{E}^m(MW)$ längs $\bar{p}\colon DU/q^*SV \to MV$ zurück und betrachten den relativen Thom-Isomorphismus

$$\vartheta^k = \bar{q}^*(\,\cdot\,) \smile (p^*\omega_W)\colon \tilde{E}^k(MV) \longrightarrow \tilde{E}^{k+m}(MU)\ .$$

Gegeben $\omega_V$ erhalten wir ein eindeutiges $\omega_U$ wie in der Proposition und umgekehrt. Indem wir auf die Fasern an der Stelle $x \in X$ einschränken, sehen wir, dass mit zweiten auch die dritte Klasse eine Orientierung ist. □

8.15. Bemerkung. Wir wollen noch kurz begründen, dass ein orientiertes reelles Vektorbündel vom Rang $r$ im Sinne von Bemerkung 6.40 (1), nach Wahl einer Metrik also ein $SO(r)$-Vektorbündel, stets eine eindeutige zugehörige $\mathbb{Z}$-Orientierung besitzt. Dazu gehen wir ähnlich vor wie im Beweis von Satz 8.13, dabei benutzen wir mehrfach das Dimensionsaxiom. Insbesondere übertragen sich die folgenden Argumente nicht ohne weiteres auf andere Kohomologiefunktoren wie beispielsweise $K$-Theorie.

Im ersten Schritt sei also $V \to X$ trivial, so dass $MV \cong S^rX_+$. Es folgt $\tilde{H}^r(MV) \cong \tilde{H}^r(S^r) \times H^0(X)$. Auf jeder Zusammenhangskomponente $X_0$ legt die gegebene Orientierung einen Erzeuger von $\tilde{H}^r(S^r)$ fest, und wir erhalten als Thom-Klasse das äußere Produkt mit $1 \in H^0(X_0)$. Der einzige weitere Erzeuger von $\tilde{H}^r(S^rX_{0+})$ entspricht der entgegengesetzten Orientierung, mithin haben wir Existenz und Eindeutigkeit.

Im zweiten Schritt sei Existenz und Eindeutigkeit der Thom-Klasse über Vereinigungen von bis zu $n$ trivialisierenden Teilmengen bereits gezeigt. Wir betrachten die Einschränkung von $V$ auf $U = U_0 \cup \cdots \cup U_n$ und erhalten eine Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \tilde{H}^{r-1}\big(MV|_{(U_0\cup\cdots\cup U_{n-1})\cap U_n}\big) &\xrightarrow{\delta} \tilde{H}^r\big(MV|_{U_0\cup\cdots\cup U_n}\big) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \tilde{H}^r\big(MV|_{U_0\cup\cdots\cup U_{n-1}}\big) \oplus \tilde{H}^r\big(MV|_{U_n}\big) \xrightarrow{-} \tilde{H}^r\big(MV|_{(U_0\cup\cdots\cup U_{n-1})\cap U_n}\big) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung existieren Thom-Klassen für $V|_{U_0\cup\cdots\cup U_{n-1}}$ und $V|_{U_n}$. Wegen der Eindeutigkeitsaussage stimmen Sie auf $V_{(U_0\cup\cdots\cup U_{n-1})\cap U_n}$ überein, somit existiert eine Thom-Klasse für $V|_{(U_0\cup\cdots\cup U_{n-1})\cap U_n}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt Satz 8.13 bereits für $V|_{(U_0\cup\cdots\cup U_{n-1})\cap U_n}$, insbesondere gilt $0 = \tilde{H}^{r-1}\big(MV|_{(U_0\cup\cdots\cup U_{n-1})\cap U_n}\big)$, und wir erhalten auch Eindeutigkeit.

8.16. Beispiel. Sphären, Tori, komplex und quaternionisch projektive Räume sind stets $\mathbb{Z}$-orientierbar.

Der reell projektive Raum $\mathbb{R}P^m$ ist nach Beispiel 5.21 genau dann orientierbar, wenn $m$ ungerade ist.

## 8.c. Poincaré-Dualität

Aus Spanier-Whitehead-Dualität leiten wir mit Hilfe des Thom-Isomorphismus Poincaré-Dualität ab. Wir diskutieren einige Schlussfolgerungen. Insbesondere betrachten wir die Schnittform.

Es sei jetzt $M$ eine glatte kompakte, $m$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ sei eine Einbettung. Zu einer $E$-Orientierung des Tangentialbündels vom Grad $r$, gibt es gemäß Folgerung 8.14 eine $E$-Orientierung $\omega_\nu \in E^{n-r}(M\nu)$ des Normalenbündels $p\colon \nu \to M$, wenn wir die triviale Orientierung vom Grad $n$ auf dem trivialen Bündel $TM \oplus \nu$ festlegen. In vielen Fällen $r = m$ wird gelten, das muss aber nicht zwangsläufig so sein. Wir erinnern uns an die Koauswertung zur Spanier-Whitehead-Dualität,

$$\eta\colon S^n \to M_+ \wedge M\bar{\nu}\ .$$

8.17. Proposition und Definition. *Es sei $M$ eine glatte, kompakte, $m$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand mit einer tangentialen $E$-Orientierung vom Grad $\ell$. Es sei $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ eine Einbettung und $\omega_\nu \in E^{n-\ell}(M\nu)$ die zugehörige normale Orientierung. Mit Spanier-Whitehead-Dualität erhalten wir eine Fundamentalklasse $[M] \in E_\ell(M, \partial M)$, dargestellt durch $[M] = \Theta_n([\eta]/1)$, unabhängig von der Wahl von $f$.*

Beweis. Man beachte, dass zur Konstruktion von $[M]$ an Stelle der vollen Koauswertungsabbildung $\eta$ nur die Kollaps-Abbildung $q\colon S^n \to M\bar{\nu}$ gebraucht wird, da die Klasse $1 \in E^0(M_+)$ längs der Projektion $M_+ \to S^0$ zurückgezogen wird.

Es reicht, der Abbildung $f$ die Einbettung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ hinterherzuschalten, da verschiedene Einbettungen nach Verlängerung in einen hinreichend großen Euklidischen Raum homotop werden. Wir erhalten als Kollaps-Abbildung jetzt

$$q'\colon S^{n+k} \xrightarrow{q \wedge \mathrm{id}_{S^k}} M\bar{\nu} \wedge S^k \cong M\overline{(\nu \oplus \underline{\mathbb{R}}^k)}\ .$$

Da $M\bar{\nu}$ Grad $n$ hat, folgt $[q'] = (-1)^{kn}\sigma^k[q]$. An die normale Thom-Klasse $\omega_\nu$ wird wie in Folgerung 8.14 von rechts die triviale Orientierungsklasse des $\mathbb{R}^k$ multipliziert, was die neue Thom-Klasse $(-1)^{k(n-\ell)}\sigma^k\omega_\nu \in E^{n+k-\ell}(S^kM\nu)$ liefert. Es folgt

$$\begin{aligned}\Theta_{n+k}([q']) &= (-1)^{(n+k-\ell)\ell}\, p_*\big((-1)^{kn}\sigma^k[q] \frown (-1)^{k(n-\ell)}\sigma^k\omega_\nu\big)\\ &= (-1)^{(n-\ell)\ell} p_*([q] \frown \omega_\nu) = \Theta_n([q]) = [M]\ .\end{aligned}$$

□

8.18. Satz (Poincaré-Dualität). *Es sei $M$ eine glatte, kompakte, $m$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand mit einer tangentialen $E$-Orientierung vom Grad $\ell$, und es sei $[M] \in E_\ell(M, \partial M)$ die zugehörige Fundamentalklasse. Dann gibt es einen $E^\bullet(M)$-Modulisomorphismus*

$$\wp = [M] \frown \cdot\colon E^\bullet(M) \xrightarrow{\cong} E_{\ell-\bullet}(M, \partial M)\ .$$

Wir nennen $\wp$ eine *Poincaré-Dualität* vom Grad $\ell$. In den meisten Fällen wird $\ell = m$ sein, und wir brauchen den Grad nicht zu erwähnen.

Beweis. Wir betrachten eine Einbettung $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ wie oben mit zugehöriger Koauswertungsabbildung $\eta\colon S^n \to M_+ \wedge M\bar{\nu}$ und schreiben

$$[M] \frown \alpha = \Theta_n([\eta]/1) \frown \alpha = \Theta_n([\eta]/\alpha)\ .$$

Dann ist $\wp$ einfach die Verkettung des Isomorphismus aus Bemerkung 8.6 zur Spanier-Whitehead-Dualität mit dem Thom-Isomorphismus. Wegen der Konstruktion von $\Theta$ in (8.3) ist $\wp$ ein $E^\bullet(M)$-Modulisomorphismus. $\square$

Streng genommen ist die obige Aussage bereits ein Spezialfall der Poincaré-Lefschetz-Dualität falls $\partial M \neq \emptyset$, diese behandelt den Fall $\partial M = A \cup B$, wobei $A$ und $B$ Untermannigfaltigkeiten mit gemeinsamem Rand $\partial A = \partial B = A \cap B$ seien. Dann gilt

$$[M] \frown \cdot : E^\bullet(M, A) \xrightarrow{\cong} E_{\ell-\bullet}(M, B) \ .$$

Wir wollen noch einen weiteren wichtigen Spezialfall diskutieren, nämlich $A = \partial M$ und $B = \emptyset$. Für das folgende betten wir ihn in ein kommutatives Diagramm langer exakter Sequenzen ein.

8.19. Satz. *Es sei $M$ eine glatte, kompakte, $m$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand mit einer tangentialen $E$-Orientierung vom Grad $\ell$, und es sei $[M] \in E_\ell(M, \partial M)$ die zugehörige Fundamentalklasse. Dann existiert eine Orientierung auf $\partial M$ mit zugehöriger Fundamentalklasse $[\partial M] = \partial[M] \in E_{\ell-1}(\partial M)$, so dass das folgende Diagramm bis auf das Vorzeichen kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & E^{k-1}(\partial M) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\cong"', "{[\partial M]\frown}"] & E^k(M, \partial M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "{[M]\frown}"] & E^k(M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "{[M]\frown}"] & E^k(\partial M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "{[\partial M]\frown}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & E_{\ell-k}(\partial M) \arrow[r] & E_{\ell-k}(M) \arrow[r] & E_{\ell-k}(M, \partial M) \arrow[r, "\partial"] & E_{\ell-k-1}(\partial M) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Beweis. Dual zum Auschnitt

$$\partial M_+ \longrightarrow M_+ \longrightarrow M/\partial M \longrightarrow S\partial M_+$$

des Paares $(M_+, \partial M_+)$ ist die Kofasersequenz

$$SM\nu|_{\partial M} \longleftarrow M\bar{\nu} \longleftarrow M\nu \longleftarrow M\nu|_{\partial M} \ .$$

Dies zeigt man entweder allgemein wie in [**Sw**, Lemma 14.31] oder geometrisch wie im Beweis von Satz 8.8. Für den geometrischen Beweis können wir benutzen, dass $SM\nu|_{\partial M}$ gerade der Thom-Raum des Normalenbündels von $\partial M \subset S^n$ ist. Die obige Sequenz ist wiederum eine Sequenz von Thom-Räumen zum Normalenbündel von $M \subset S^n$ über der Kofasersequenz

$$S\partial M_+ \longleftarrow M/\partial M \longleftarrow M_+ \longleftarrow \partial M_+ \ .$$

Das mittlere Quadrat im obigen Diagramm kommutiert wegen der Natürlichkeit des Schräg-Produktes. Für die beiden äußeren Quadrate benutzen wir zusätzlich die Konstruktion der Verbindungshomomorphismen für die (Ko-) Homologiesequenzen von Paaren in Proposition 5.34 und Satz 6.28. Für das rechte Quadrat betrachten wir dazu das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{E}^k(M) \arrow[r] \arrow[d, "\iota^*"'] & \tilde{E}_{n-k}(M\bar{\nu}) \arrow[r, "\Theta_\nu"] \arrow[d, "D\iota_*"'] & \tilde{E}_{\ell-k}(M/\partial M) \arrow[d, "j_*"'] \arrow[dr, "\partial"] & \\
\tilde{E}^k(\partial M) \arrow[r] & \tilde{E}_{n-k}(M\nu_{\partial M}) \arrow[r, "\Theta_\nu"] & \tilde{E}_{\ell-k}(S\partial M_+) & \tilde{E}_{\ell-1-k}(\partial M_+) \arrow[l, "\sigma", "\cong"']
\end{tikzcd} \ . \qquad \square$$

In den folgenen Überlegungen dürfen wir $\mathbb{Z}$ durch einen beliebigen Hauptidealring $R$ ersetzen. Es sei $A$ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul. Aus den Übungen 5.105–5.108 schließen wir, dass es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} A \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow 0$$

gibt, in der $A/\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} A$ ein freier Modul ist. Mit dem universellen Koeffiziententheorem 6.16 erhalten wir natürliche Isomorphismen

$$\begin{aligned} H^k(M)/\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^k(M) &\xrightarrow[\cong]{\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle} \hom_{\mathbb{Z}}\big(H_k(M),\mathbb{Z}\big) \xrightarrow[\cong]{\wp^*} \hom_{\mathbb{Z}}\big(H^{m-k}(M)/\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{m-k}(M),\mathbb{Z}\big) \\ [\alpha] &\longmapsto \langle\,\cdot\,,\alpha\rangle \longmapsto \langle [M] \frown \cdot\,,\alpha\rangle = \langle [M],\,\cdot \smile \alpha\rangle\,. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Im mittleren Schritt haben wir ausgenutzt, dass jeder Homomorphismus nach $\mathbb{Z}$ auf dem Torsionsuntermodul verschwindet. Dabei heißt „natürlich“ hier allerdings nur, dass die Isomorphismen verträglich sind mit Abbildungen $f\colon M \to N$ zwischen orientierten Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension vom Abbildungsgrad 1, das heißt, mit $f_*[M] = [N]$.

8.20. Folgerung. *[aus Satz 8.18] Es sei $M$ eine glatte, geschlossene, orientierbare, zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Wenn eine Klasse $\alpha \in H^k(M) \setminus \{0\}$* primitiv *ist in dem Sinne, dass es keine Klasse $\gamma$ und kein $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,0,1\}$ mit $\alpha = n\gamma$ gibt, dann existiert eine Klasse $\beta \in H^{m-k}(M)$, so dass $\alpha \smile \beta$ ein Erzeuger von $H^m(M) \cong \mathbb{Z}$ ist.*

Beweis. Als erstes überlegt man sich, dass Torsionsklassen nie primitiv sind, denn aus $n\alpha = 0$ folgt $(n+1)\alpha = \alpha$. Wenn $\alpha$ primitiv ist, dann kann man $\alpha$ zu einer Basis von $H^k(M)/\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}}(M)$ ergänzen. Aufgrund der obigen Isomorphismen gibt es ein Element $\beta$ in der dazu dualen Basis von $H^{m-k}(M)/\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{m-k}(M)$, so dass $\langle [M], \beta \smile \alpha\rangle = 1$. Aufgrund von Poincaré-Dualität ist $\beta \smile \alpha = \pm\alpha \smile \beta$ dann ein Erzeuger des $\mathbb{Z}$-Moduls $H^m(M)$. □

8.21. Bemerkung. Es sei $\Bbbk$ ein Körper. Wir erinnern uns an die Definition der Betti-Zahlen und der Eulerzahl aus Definition 5.30, betrachten hier allerdings *unreduzierte* Betti-Zahlen $b_k(M;\Bbbk) = \dim H_k(M;\Bbbk)$.

(1) Nach dem universellen Koeffiziententheorem 6.16 gilt

$$b_k(M;\Bbbk) = \dim H_k(M;\Bbbk) = \dim H^k(M;\Bbbk)\,.$$

Wenn $M$ orientiert ist, ist wegen Folgerung 8.20 die Paarung $H^k(M;\Bbbk) \times H^{m-k}(M;\Bbbk) \to \Bbbk$ mit $(\alpha,\beta) \mapsto \langle [M], \alpha \smile \beta\rangle$ nicht ausgeartet. Folglich gilt

$$b_k(M;\Bbbk) = b_{m-k}(M;\Bbbk)\,.$$

(2) Wenn $M$ außerdem zusammenhängend ist, gilt $\tilde{H}_k(M;\Bbbk) = 0$ für alle $k \le 0$ nach Proposition 5.45. Wegen Bemerkung 5.5 (3) folgt $H_k(M) \cong 0$ für $k < 0$ und $H_0(M) \cong \mathbb{Z}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} &b_k(M;\Bbbk) = 0 \qquad \text{für alle } k < 0 \text{ und alle } k > m, \text{ und} \\ &b_0(M;\Bbbk) = b_m(M;\Bbbk) = 1\,. \end{aligned}$$

Wir dürfen $\langle [M], \cdot \smile \cdot\rangle$ auf $H^k(M) \times H^{m-k}(M)$ betrachten. Wegen Proposition 7.38 (4) gilt

$$\langle [M], \beta \smile \alpha\rangle = (-1)^{k(m-k)} \langle [M], \alpha \smile \beta\rangle$$

für $\alpha \in H^k(M;R)$ und $\beta \in H^{m-k}(M;R)$. Das Produkt verschwindet, wenn einer der beiden Faktoren ein Torsionselement ist. Auch dieses Produkt lässt sich für geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeiten definieren, die nicht glatt sein müssen.

8.22. Definition. Es sei $M$ eine orientierte, geschlossene, glatte $m$-dimensionale Mannigfaltigkeit, und $R$ ein Hauptidealring oder ein Körper, dann heißt

$$\langle [M], \cdot \smile \cdot\rangle\colon H^k(M)/\operatorname{Tor}_R H^k(M) \times H^{m-k}(M)/\operatorname{Tor}_R H^{m-k}(M) \to R$$

das *Schnittprodukt* auf $H^\bullet(M;R)/\operatorname{Tor}_R H^\bullet(M;R)$.

Es sei $m = \dim M = 2n$ gerade, dann ist die *Schnittform* $Q_R$ von $M$ gerade die Einschränkung des Schnittproduktes auf $H^n(M;R)/\operatorname{Tor}_R H^n(M;R)$. Wenn $4|m$ gilt, seien $b_n^\pm(M) = b_n^\pm(M;\mathbb{R})$ die maximalen Dimensionen von Unterräumen von $H^n(M;\mathbb{R})$, auf denen $Q_\mathbb{R}$ positiv beziehungsweise negativ definit ist. Dann heißt $\sigma(M) = b_n^+(M) - b_n^-(M)$ die *Signatur* von $M$.

Man beachte, dass $Q_\mathbb{R}$ nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz durch $\sigma(M)$ bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt ist.

8.23. Bemerkung. Es sei $M$ eine orientierbare, geschlossene, glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $m$.

(1) Wenn $m$ ungerade ist, verschwindet die Eulerzahl, denn

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k b_k(M;\Bbbk) = \sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}} \left((-1)^k + (-1)^{m-k}\right) b_k(M;\Bbbk) = 0\ .$$

In Bemerkung 8.51 sehen wir, dass $M$ dafür noch nicht einmal orientierbar sein muss.

(2) Wenn $m = 2n$ und $n$ gerade ist, haben $\chi(M)$, $\sigma(M)$ und $b_n(M;\mathbb{R})$ die gleiche Parität, denn

$$\chi(M) - b_n(M;\mathbb{R}) = 2\sum_{k=0}^{n-1} b_k(M;\mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad b_n(M;\mathbb{R}) - \sigma(M) = 2b_n^-(M)\ .$$

(3) Wenn $m = 2n$ und $n$ ungerade ist, ist $b_n(M;\mathbb{R})$ gerade, denn nur auf gerade-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen gibt es nicht-ausgeartete antisymmetrische Bilinearformen.

Die *zusammenhängende Summe* $M = M_1 \# M_2$ zweier $m$-dimensionaler glatter Mannigfaltigkeiten $M_1$, $M_2$ wird konstruiert, indem man aus jeder Mannigfaltigkeit eine zu $D^m \subset \mathbb{R}^m$ diffeomorphe Teilmenge wählt, ihr Inneres $B^m$ entfernt, und beide Mannigfaltigkeiten entlang der entstandenen Ränder $S^{m-1}$ mit einer Isometrie verklebt. Das Resultat ist wieder eine glatte Mannigfaltigkeit. Wenn $M_1$ und $M_2$ zusammenhängend sind, hängt das Resultat bis auf Diffeomorphie nicht von der Wahl der Teilmenge $D^m$ ab, jedoch unter Umständen davon, welche der beiden Homotopieklasse von Isometrien $S^{m-1} \to S^{m-1}$ man wählt. Deshalb fixiert man Orientierungen von $M_1$ und $M_2$ und verklebt so, dass $M$ eine Orientierung trägt, die sich zu der gegebenen Orientierung auf $M_i \setminus D^m$ einschränkt.

8.24. Folgerung (aus Satz 8.19). *Die Signatur ist invariant unter orientierten Bordismen. Insbesondere verschwindet die Signatur für nullbordante Mannigfaltigkeiten und ist additiv unter zusammenhängenden Summen.*

Beweis. Es sei $m = \dim M = 2n$, und $n$ sei gerade. Außerdem sei $M = \partial W$, und $W$ sei so orientiert, dass $M$ die Randorientierung trägt. Wir arbeiten der Einfachheit halber über $\mathbb{Q}$ und betrachten einen Ausschnitt

$$\begin{tikzcd}
H^n(W;\mathbb{Q}) \arrow[r, "\iota^*"] \arrow[d, "\cong"'] & H^n(M;\mathbb{Q}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\cong"'] & H^{n+1}(W,M;\mathbb{Q}) \arrow[d, "\cong"'] \\
H^{n+1}(W,M;\mathbb{Q})^* \arrow[r, "\delta^*"] & H^n(M;\mathbb{Q})^* \arrow[r, "(\iota^*)^*"] & H^n(W;\mathbb{Q})^*
\end{tikzcd}$$

aus dem Diagramm aus Satz 8.19, wobei die senkrechten Pfeile jeweils Einsetzen in die Schnittform bezeichnen. Es folgt, dass die Schnittform einen Isomorphismus

$$\operatorname{im}(\iota^*) \xrightarrow{\cong} \left(H^n(M;\mathbb{Q})/\operatorname{im}(\iota^*)\right)^*$$

induziert. Wir können eine Basis von $\operatorname{im}(\iota^*)$ so zu einer Basis von $H^*(M;\mathbb{Q})$ ergänzen, dass die Schnittform durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

dargestellt wird, wobei $A\colon \operatorname{im}(\iota^*) \to H^n(M;\mathbb{Q})$ ein Isomorphismus auf sein Bild ist. Hieraus folgt $\operatorname{sign}(M) = 0$ für alle orientiert nullbordanten glatten Mannigfaltigkeiten.

Sei $M_0$ zu $M_1$ orientiert bordant, dann ist $M_1 \sqcup (-M_0)$ nullbordant, wobei $-M_0$ die Mannigfaltigkeit $M_0$ mit der entgegengesetzten Orientierung bezeichne. Da die Signatur unter disjunkter Vereinigung offensichtlich additiv ist, folgt

$$\operatorname{sign}(M_1) = \operatorname{sign}\bigl(M_1 \sqcup (-M_0)\bigr) + \operatorname{sign}(M_0) = \operatorname{sign}(M_0)\ .$$

Außerdem ist $M_1 \# M_2$ zu $M_1 \sqcup M_2$ orientiert bordant, so dass $\operatorname{sign}(M_1 \# M_2) = \operatorname{sign}(M_1) + \operatorname{sign}(M_2)$. □

8.25. Beispiel. Es sei $\mathbb{C}P^2$ die komplex projektive Ebene mit einer festen Orientierung, so dass $\mathbb{C}P^2$ Signatur 1 hat. Mit $\overline{\mathbb{C}P}^2$ bezeichnen wir die entgegengesetzt orientierte projektive Ebene. Es gibt keinen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus zwischen ihnen, da $\overline{\mathbb{C}P}^2$ Signatur $-1$ hat.

Wir betrachten $M = \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ und $M' = \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$. Mit der Mayer-Vietoris-Sequenz 6.3 überprüft man, dass

$$H^k(M) \cong H^k(M') \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0 \text{ oder } k = 4, \\ \mathbb{Z}^2 & \text{falls } k = 2, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dennoch sind $M$ und $M'$ nicht diffeomorph, denn $M$ hat eine definite und $M'$ eine indefinite Schnittform (Übung).

Es gibt auch ein Analogon zu (8.4) für Torsions-Elemente. Dazu sei $A$ ein $\mathbb{Z}$-Modul und $\alpha \in \operatorname{Ext}(A,\mathbb{Z})$. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ und stellen $M$ mit Satz **??** als endlichen CW-Komplex dar. Wir erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^k(M;\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & C^k(M;\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & C^k(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{k+1}(M;\mathbb{Z}) \arrow[r] & C^{k+1}(M;\mathbb{Q}) \arrow[r] & C^{k+1}(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] & 0\ .
\end{tikzcd}$$

von Kokettenkomplexen. Es sei jetzt $\beta \in C^{k+1}(M;\mathbb{Z})$ geschlossen mit $[\beta] \in \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{k+1}(M;\mathbb{Z})$, und es sei $n > 0$ minimal mit $n[\beta] = 0$. Dann existiert $\gamma \in C^k(M;\mathbb{Z})$ mit $\delta\gamma = n\beta$, und wir betrachten das Bild $\bar\beta$ von $\frac{\gamma}{n}$ in $C^k(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Es gilt $\delta\bar\beta = 0 \in C^{k+1}(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Somit repräsentiert $[\bar\beta] \in H^k(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ein Urbild von $[\beta]$ unter $\delta$ in der Kohomologie-Sequenz

$$\cdots \longrightarrow H^k(M;\mathbb{Q}) \longrightarrow H^k(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(M;\mathbb{Z}) \longrightarrow \underbrace{H^{k+1}(M;\mathbb{Q})}_{\cong \hom_{\mathbb{Z}}(H_{k+1}(M),\mathbb{Q})} \longrightarrow \cdots\ .$$

Da $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ divisibel sind, gilt nach Proposition 5.65 und dem universellen Koeffiziententheorem 6.16, dass

$$H^k(M;\mathbb{Q}) \cong \hom_{\mathbb{Z}}(H_k(M),\mathbb{Q}) \qquad \text{und} \qquad H^k(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \hom_{\mathbb{Z}}(H_k(M),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\ .$$

Nun ist $\bar\beta$ nur bis auf ein Element von $\hom_{\mathbb{Z}}(H_k(M),\mathbb{Q})$ bestimmt, aber diese Abbildungen verschwinden auf $\operatorname{Tor}_Z H_k(M)$. Zusammen mit Poincaré-Dualität 8.18 erhalten wir ein wohldefiniertes

Produkt

$$(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\colon \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{m-k}(M) \times \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{k+1}(M) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \qquad \text{mit} \qquad (\alpha,\beta) = \langle [M] \frown \alpha, \bar\beta\rangle\ . \tag{8.5}$$

8.26. Definition. Es sei $M$ eine glatte, geschlossene, orientierte $m$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann heißt das obige Produkt $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\colon \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{m-k}(M) \times \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{k+1}(M) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ das *Verschlingungsprodukt* auf $\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^\bullet(M)$. Falls $\dim M = 2n-1$ ungerade ist, ist die *Verschlingungsform* $q$ von $M$ die Einschränkung des Verschlingungsproduktes auf $\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^n(M)$.

8.27. Proposition. *Es sei $M$ eine glatte, geschlossene, orientierte Mannigfaltigkeit. Das Verschlingungsprodukt ist nicht ausgeartet, das heißt, zu jedem $\alpha \in \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{k+1}(M) \setminus \{0\}$ existiert ein $\beta \in \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{m-k}(M)$ mit $(\alpha,\beta) \neq 0$. Seien $p$, $q > 0$ minimal mit $p\alpha = q\beta = 0$, dann gilt $(\alpha,\beta) \in \big(\frac{1}{\operatorname{ggT}(p,q)}\mathbb{Z}\big)/\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Für $\alpha \in H^{k+1}(M)$ und $\beta \in H^{m-k}(M)$ gilt*

$$(\beta,\alpha) = -(-1)^{km}(\alpha,\beta)\ .$$

Insbesondere ist die Verschlingungsform symmetrisch, wenn $m \equiv 3 \bmod 4$, und antisymmetrisch, wenn $m \equiv 1 \bmod 4$. Anstelle des „unnatürlichen“ Isomorphismus zwischen $\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{m-k}(M) \cong \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H_k(M)$ und $\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{k+1}(M)$ liefert das Verschlingungsprodukt eine nicht ausgeartete Paarung, ähnlich wie es das Schnittprodukt für die freien Anteile tut.

Beweis. Als erstes überlegt man sich, dass es eine wohldefinierte Abbildung

$$H^k(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})/\operatorname{im} H^k(M;\mathbb{Q}) \cong \hom_{\mathbb{Z}}\big(H_k(M),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\big)\ /\ \operatorname{im}\hom_{\mathbb{Z}}\big(H_k(M),\mathbb{Q}\big) \longrightarrow \hom_{\mathbb{Z}}\big(\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H_k(M),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\big)$$

gibt, da $\mathbb{Q}$-wertige Abbildungen auf Torsionselementen verschwinden. Dann überprüft man, dass die Abbildung ein Isomorphismus ist. Da $0 \neq \bar\alpha \in H^k(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})/\operatorname{im} H^k(M;\mathbb{Q})$, existiert also ein $b \in \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H_k(M)$ mit $\langle b,\bar\alpha\rangle \neq 0$, und wir wählen $\beta = \wp^{-1} b$.

Es seien $\alpha \in C^{k+1}(M;\mathbb{Z})$, $\beta \in C^{m-k}(M;\mathbb{Z})$ und $p$, $q$ wie oben gegeben. Wir betrachten $\bar\alpha \in C^k(M;\mathbb{Q})$ und $\bar\beta \in C^{m-k-1}(M;\mathbb{Z})$, so dass $p\bar\alpha$ und $q\bar\beta$ ganzzahlig sind mit $\delta(p\bar\alpha) = p\alpha$ und $\delta(q\bar\beta) = q\beta$. Dann gilt

$$0 = \langle [M], \delta(\bar\alpha \smile \bar\beta)\rangle = \langle [M], \alpha \smile \bar\beta\rangle + (-1)^k \langle [M], \bar\alpha \smile \beta\rangle = (\alpha,\beta) + (-1)^{k(m-k-1)}(\beta,\alpha)\ ,$$

außerdem ist $(-1)^{k(k+1)} = 1$.

Um die letzte Behauptung zu zeigen, schreiben wir $\operatorname{ggT}(p,q) = ap + bq$ mit $a$, $b \in \mathbb{Z}$ und berechnen

$$\operatorname{ggT}(p,q)\cdot(\alpha,\beta) = a(p\alpha,\beta) + b(\alpha,q\beta) = 0\ . \qquad \square$$

8.28. Bemerkung. Wir können außerdem den Satz 5.47 von Hurewicz benutzen, um die erste nichtverschwindende reduzierte Homologiegruppe zu bestimmen. Sei etwa $M$ eine geschlossene, orientierbare, zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit. Dann gilt $H_1(M) \cong \pi_1(M)^{\mathrm{ab}} \cong H^2(M)$, und $H^1(M) \cong \operatorname{Hom}(\pi_1(M),\mathbb{Z}) \cong H_2(M)$ sind isomorph zum freien Anteil $H_1(M)/\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H_1(M)$. Also werden alle (Ko-) Homologiegruppen bis auf Isomorphie von $\pi_1(M)$ festgelegt. Ein gutes Beispiel ist $\mathbb{R}P^3$ mit $\pi_1(\mathbb{R}P^3) \cong \mathbb{Z}/2$, siehe Übung 2.89 und Beispiel 5.21.

## 8.d. Eulerklasse und Gysin-Sequenz

In diesem Abschnitt definieren wir die Euler-Klasse eines orientierten Vektorbündels. Sie stellt ein Hindernis gegen die Existenz eines nirgends verschindenden Schnitts dar.

Es sei $p\colon V \to X$ ein Vektorbündel. Wir erinnern uns an den Begriff eines Schnittes aus Bemerkung 3.29, also einer Abbildung $s\colon X \to V$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_X$. Jedes Vektorbündel hat einen kanonischen Schnitt, den Nullschnitt $s_0$ mit $s_0(x) = 0 \in V_x$ für alle $x \in X$. Wir identifizieren $X$ mit $\operatorname{im} s_0$.

Je zwei Schnitte $s_0$, $s_1$ eines Vektorbündels sind homotop vermöge $s(x,t) = (1-t)\, s_0(x) + t\, s_1(x)$, insbesondere ist jeder Schnitt zum Nullschnitt homotop. Wenn $s_0$ und $s_1$ auf einem Unterraum $Y \subset X$ übereinstimmen, erhalten wir eine Homotopie relativ zu $Y$.

Sei $s$ ein Schnitt ohne Nullstellen von $V$, das heißt, es gilt $s(x) \neq 0$ für alle $x \in X$. Gegeben eine Metrik auf $V$ wie in Definition 6.67, ist $s$ zu einem Schnitt $s_1$ des Sphärenbündels $SV \to X$ mit $s_1(x) = \frac{s(x)}{|s(x)|}$ homotop. Wir schreiben auch kurz $s_1 = \frac{s}{|s|}$. Sei schließlich $X$ parakompakt, $Y \subset X$ abgeschlossen und $s$ ein Schnitt von $V|_Y$. Mit dem Lemma von Tietze können wir $s$ auf einer trivialisierenden Teilmenge $U \subset X$ von $Y \cap U$ auf ganz $U$ fortsetzen. Mit Hilfe einer Partition der Eins erhalten wir dann eine Fortsetzung von $s$ auf ganz $X$. Und wir haben gerade gesehen, dass je zwei solche Fortsetzungen relativ $Y$ homotop sind. Daher ist die folgende Definition möglich. Allgemeiner sei $X$ normal und parakompakt, dann lässt sich jeder Schnitt von einem abgeschlossenen Unterraum $Y \subset X$ auf ganz $X$ fortsetzen.

8.29. Definition. Es sei $V \to X$ ein Vektorbündel mit einer $E$-Thom-Klasse $\omega \in \tilde{E}^r(MV)$, und es sei $s\colon X \to V$ ein Schnitt. Dann heißt $e(V) = s^*\omega \in E^r(X)$ die *Eulerklasse* von $V$ zur durch $\omega$ gegebenen Orientierung.

Sei jetzt $Y \subset X$ ein Unterraum, und sei $s_Y\colon Y \to SV$ ein Schnitt des Sphärenbündels $SV|_Y$ über $Y$. Sei $s\colon Y \to V$ eine Fortsetzung von $s_Y$, dann heißt $e(V, s_Y) = s^*\omega \in E^r(X,Y)$ die *relative Eulerklasse* von $V$ zu $\omega$ und $s_Y$.

Im Falle $\mathbb{E} = \mathbb{H}R$ sprechen wir auch von der $R$-Eulerklasse, oder kurz von der Eulerklasse, falls $R = \mathbb{Z}$. Die Eulerklasse ist natürlich in folgendem Sinne. Sei $f\colon (Z,W) \to (X,Y)$ eine Abbildung, sei

$$\begin{tikzcd} f^*V \arrow[r, "F"] \arrow[d] & V \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

das zurückgeholte Bündel mit Thom-Klasse $F^*\omega$ und Schnitt $f^*s_Y\colon W \to f^*V$, dann gilt

$$e(f^*V, f^*s_Y) = f^*e(V, s_Y)\ .$$

8.30. Proposition. *Sei $M$ eine glatte, kompakte, $m$-dimensionale Mannigfaltigkeit, sei $V \to M$ ein orientiertes reelles Vektorbündel vom Rang $m$ mit Thom-Klasse $\omega \in \tilde{H}^m(MV)$, und sei $s_\partial\colon \partial M \to SV$ ein Schnitt von $V|_{\partial M}$. Dann existiert eine Fortsetzung von $s_\partial$ zu einem Schnitt von $SV$ auf ganz $X$ genau dann, wenn $e(V, s_\partial) = 0 \in H^m(M, \partial M)$.*

Im Falle, dass $M$ keinen Rand hat, ist die Eulerklasse also das Hindernis gegen einen Schnitt ohne Nullstellen.

Beweis. Falls eine Fortsetzung $s$ ohne Nullstellen existiert, gilt offensichtlich $s^*\omega = 0$.

Sei umgekehrt $s^*\omega = 0$. Wir dürfen annehmen, dass $M$ zusammenhängend ist, da wir ansonsten jede Zusammenhangskomponente einzeln betrachten können. Nach dem Transversalitätssatz 6.65 dürfen wir annehmen, dass $s$ transversal zum Nullschnitt $s_0$ ist. Insbesondere hat $s$ nur endlich viele Nullstellen, da $M$ kompakt ist. Da $M$ zusammenhängend ist, finden wir eine offene Umgebung $B^m \cong U \subset M \setminus \partial M$ aller Nullstellen mit Abschluss $\overline{U} \cong D^m$. Da $s$ außerhalb $U$ keine Nullstellen hat, reicht es, $s|_{\overline{U}}$ zu betrachten. Zurückziehen von $s^*\omega$ auf $(\overline{U}, \partial U) \cong (D^m, S^{m-1})$ liefert die Klasse $(s|_{\overline{U}})^*\omega = 0 \in H^m(\overline{U}, U)$. Wir dürfen also $(M, \partial M)$ durch $(\overline{U}, \partial U) \cong (D^m, S^{m-1})$ ersetzen.

Nach Lemma 6.43 ist $V|_{\overline{U}}$ trivial, und wir identifizieren $(DV|_{\overline{U}}, SV|_{\overline{U}})$ mit $\overline{U} \times (D^m, S^{m-1})$. Der Schnitt $s$ induziert dann eine Abbildung $\bar{s}\colon S^m \to S^m$, und es gilt

$$0 = e(V|_{\overline{U}}, s_{\partial U}) = \deg \bar{s} \in \mathbb{Z} \cong H^m(D^m, S^{m-1})\ .$$

Falls $m \geq 2$, entspricht das Element $\partial[s] \in \pi_{m-1}(S^{m-1})$ in der Homotopiesequenz des Paares $(D^m, S^{m-1})$ gerade der Einschränkung $s_{\partial U}$ von $s$ auf $\partial U$. Insbesondere ist $s_{\partial U}$ homotop zu einer konstanten Abbildung, und wir können $s_{\partial U}$ zu einer konstanten Abbildung ohne Nullstellen fortsetzen. Im Fall $m = 1$ funktioniert ein ähnliches Argument. $\square$

An Stelle einer Mannigfaltigkeit dürfen wir hier auch einen CW-Komplex der Dimension $\leq m$ betrachten. Im Beweis müssen wir dann alle möglichen Fortsetzungen von $s$ auf das $(m-1)$-Gerüst betrachten. Sobald die Dimension größer wird, gibt es allerdings zusätzliche Hindernisse gegen die Existenz eines Scnittes ohne Nullstellen.

8.31. Satz (Gysin-Sequenz). *Es sei $\mathbb{E}$ ein Ring- und $\mathbb{F}$ ein Rechts-$\mathbb{E}$-Modulspektrum und $p\colon V \to X$ ein Vektorbündel mit einer $E$-Thom-Klasse $\omega \in E^r(MV)$ über einem CW-Komplex $X$. Es sei $Y \subset X$ ein Unterkomplex. Dann gibt es natürliche exakte Sequenzen*

$$\begin{aligned}
\cdots \longleftarrow F_{k+r-1}(SV, SV|_Y) &\xleftarrow{p^!} F_k(X,Y) \xleftarrow{e(V)\frown} F_{k+r}(X,Y) \xleftarrow{p_*} F_{k+r}(SV, SV|_Y) \longleftarrow \cdots \\
\cdots \longrightarrow F^{k+r-1}(SV, SV|_Y) &\xrightarrow{p_!} F^k(X,Y) \xrightarrow{e(V)\smile} F^{k+r}(X,Y) \xrightarrow{p^*} F^{k+r}(SV, SV|_Y) \longrightarrow \cdots .
\end{aligned}$$

In der Regel ist $r$ gerade der Rang von $V$. Die Abbildung $p_!\colon F^{k+r-1}(SV, SV|_Y) \to F^k(X,Y)$ heißt auch *Gysin-Abbildung* oder *Integration über die Faser.* Der letztere Name rührt von der Beschreibung dieser Abbildung in der de Rham-Kohomologie her, wo tatsächlich über die Fasern von $p$ integriert wird und sich der Formengrad daher um die Faserdimension $(r-1)$ verringert. Ähnlich wie beim Thom-Isomorphismus können wir hier eine Folge von Abbildungen von Rechts-$E^\bullet(X)$-Moduln erhalten, indem wir die Vorzeichen der Abbildungen von und nach $F_k(X,Y)$ beziehungsweise $F^k(X,Y)$ in Abhängigkeit von $k$ und $r$ geeignet abändern. Falls $\mathbb{F} = \mathbb{E}$ gilt und $\mathbb{E}$ graduiert kommutativ ist, können wir dazu mit $e(V)$ von links anstatt von rechts multiplizieren.

Beweis. Im Falle $Y = \emptyset$ betrachten wir die $F$-Kohomologiesequenz des Paares $(DV, SV)$ und wenden Homotopieinvarianz und den Thom-Isomorphismus aus Satz 8.13 an. Außerdem sei $s\colon X \to DV$ ein Schnitt. Für $F$-Kohomologie kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \tilde{F}^{k+r-1}(SV_+) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dd, equal] & \tilde{F}^{k+r}(MV) \arrow[r, "j^*"] & \tilde{F}^{k+r}(DV_+) \arrow[r, "\iota^*"] \arrow[dd, shift right, "s^*"'] & \tilde{F}^{k+r}(SV_+) \arrow[r] \arrow[dd, equal] & \cdots \\
& & \tilde{F}^k(DV_+) \arrow[u, "\smile\omega"', "\cong"] \arrow[ur, "\smile j^*\omega"'] \arrow[d, shift left, "s^*"] & & & \\
\cdots \arrow[r] & \tilde{F}^{k+r-1}(SV_+) \arrow[r, "p_!"] & \tilde{F}^k(X_+) \arrow[u, shift left, "p^*"] \arrow[r, "\smile s^*\omega"] & \tilde{F}^{k+r}(X_+) \arrow[r, "p^*"] \arrow[uu, shift right, "p^*"', "\cong"] & \tilde{F}^{k+r}(SV_+) \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Dabei wird $p_!$ durch das linke Rechteck definiert. Den relativen Fall beweist man mit der Homologiesequenz des Tripels $(DV, SV \cup DV|_Y, DV|_Y)$. Der Beweis für Homologie verläuft ebenfalls analog. $\square$

8.32. Beispiel. Die Hopf-Faserung $p\colon S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ aus Beispiel 3.43 ist das Einheitssphärenbündel des tautologischen Vektorbündels $\tau \to \mathbb{C}P^n$ mit

$$\tau_{[z_0:\cdots:z_n]} = \mathbb{C} \cdot (z_0, \ldots, z_n) \subset \mathbb{C}^{n+1} .$$

Da $\tau$ ein komplexes Geradenbündel ist, ist $\tau$ als reelles Vektorbündel vom Rang 2 orientierbar. Aus der Gysin-Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \underbrace{H^{-2}(\mathbb{C}P^n)}_{=0} \longrightarrow H^0(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{p^*} \underbrace{H^0(S^{2n+1})}_{\cong\mathbb{Z}} \longrightarrow \underbrace{H^{-1}(\mathbb{C}P^n)}_{=0} \longrightarrow \underbrace{H^1(\mathbb{C}P^n)}_{=0} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \underbrace{H^1(S^{2n+1})}_{=0} \longrightarrow \underbrace{H^0(\mathbb{C}P^n)}_{\cong\mathbb{Z}} \xrightarrow{\smile e(\tau)} H^2(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{p^*} \underbrace{H^2(S^{2n+1})}_{=0} \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \underbrace{H^{2n-1}(S^{2n+1})}_{=0} \longrightarrow \underbrace{H^{2n-2}(\mathbb{C}P^n)}_{\cong\mathbb{Z}} \xrightarrow{\smile e(\tau)} H^{2n}(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{p^*} \underbrace{H^{2n}(S^{2n+1})}_{=0} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \underbrace{H^{2n-1}(\mathbb{C}P^n)}_{=0} \longrightarrow H^{2n+1}(\mathbb{C}P^n) \longrightarrow \underbrace{H^{2n+1}(S^{2n+1})}_{\cong\mathbb{Z}} \longrightarrow \underbrace{H^{2n}(\mathbb{C}P^n)}_{\cong\mathbb{Z}} \longrightarrow \underbrace{H^{2n+2}(\mathbb{C}P^n)}_{=0} \longrightarrow \cdots$$

können wir nicht nur die gesamte Kohomologie des Raumes $\mathbb{C}P^n$ ablesen. Wir sehen auch, dass Multiplikation $\smile e(\tau)\colon H^{2k}(\mathbb{C}P^n) \to H^{2k+2}(\mathbb{C}P^n)$ für $0 \le k \le n-1$ ein Isomorphismus ist, erhalten also auch das Cup-Produkt, siehe Beispiel 6.27. Es folgt außerdem, dass $e(\tau)^k$ ein additiver Erzeuger von $H^{2k}(\mathbb{C}P^n)$ für alle $k \le n$ ist. Analog verfahren wir mit dem quaternionisch projektiven Raum. Für den reell projektiven Raum benutzen wir Kohomologie mit Koeffizienten $\mathbb{Z}/2$.

## 8.e. Euler- und Lefschetzzahl

Falls $X$ stark dualisierbar ist, definieren wir die Lefschetz-Zahl einer Abbildung $F\colon X \to X$ als „Spur“ mit Hilfe der Spanier-Whitehead-Dualität. Der Lefschetz-Fixpunktsatz erlaubt es, aus der Lefschetz-Zahl Aussagen über die Fixpunkte von $F$ abzuleiten. Schließlich stellen wir eine Beziehung zwischen Lefschetz-Zahl und Euler-Klasse her.

8.33. Definition. Ein Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwischen zwei (symmetrischen) monoidalen Kategorien $(\mathcal{C}, \otimes, E_{\mathcal{C}})$ und $(\mathcal{D}, \otimes, E_{\mathcal{D}})$ heißt (*symmetrisch*) *monoidal,* wenn $FE_{\mathcal{C}} = E_{\mathcal{D}}$, und wenn es eine natürliche Transformation $\mu\colon FX \otimes FY \to F(X \otimes Y)$ gibt, die mit den natürlichen Transformationen aus Definition 4.26 (und der Transposition $\tau$) verträglich ist.

Wir werden uns insbesondere für solche Funktoren $F$ interessieren, für die $\mu$ ein Isomorphismus ist. In dem Fall sagen wir, dass $F$ *Tensorprodukte erhält.*

8.34. Beispiel. Wir erinnern uns an die Kategorien $\mathcal{G}r\mathcal{M}od_R$ und $\mathcal{C}h_R$ der graduierten $R$-Moduln der $R$-Kettenkomplexe aus Definition 5.15 und Bemerkung 5.16.

(1) Nach Proposition 5.78 ist der zelluläre Kettenfunktor $\mathcal{CW} \to \mathcal{C}h_R$ monoidal und erhält Tensorprodukte.
(2) Aufgrund der algebraischen Künneth-Formel 5.79 ist Homologie $H\colon \mathcal{C}h_R \to \mathcal{G}r\mathcal{M}od_R$ ein monoidaler Funktor. Er erhält Tensorprodukte, wenn $R = \Bbbk$ ein Körper ist, da dann alle Torsionsprodukte verschwinden.
(3) Aufgrund der topologischen Künneth-Formel 5.75 ist reduzierte Homologie $HR\colon \mathcal{HT}_+ \to \mathcal{G}r\mathcal{M}od_R$ ein monoidaler Funktor. Entsprechend liefert unreduzierte Homologie einen monoidalen Funktor $\mathcal{HT}op \to \mathcal{G}r\mathcal{M}od_R$. Beide erhalten Tensorprodukte, wenn $R = \Bbbk$ ein Körper ist.
(4) Die Homologie zu einem Ringspektrum liefert einen monoidalen Funktor, siehe Übung 8.57.
(5) Wir können Homologie auch für Spektra definieren, und erhalten einen monoidalen Funktor $HR\colon \mathcal{HSCW} \to \mathcal{G}r\mathcal{M}od_R$, der Tensorprodukte erhält, falls $R = \Bbbk$ ein Körper ist.

Da nicht alle monoidalen Funktoren Tensorprodukte erhalten, betrachten wir stark dualisierbare Objekte $A$, so dass $FA \otimes FX \cong F(A \otimes X)$ für alle $X$.

8.35. Proposition und Definition. *Es sei $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein monoidaler Funktor, und $A$ ein Objekt von $\mathcal{C}$ mit einem starken Dual $A^*$ mit Auswertungsabbildung $\varepsilon_A\colon A^* \otimes A \to E$ und Koauswertungsabbildung $\eta_A\colon E \to A \otimes A^*$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *für alle Objekte $X$ von $\mathcal{C}$ ist $\mu_{A,X}\colon FA \otimes FX \to F(A \otimes X)$ ein Isomorphismus;*
(2) *die Abbildung $\mu_{A,A^*}\colon FA \otimes FA^* \to F(A \otimes A^*)$ ist ein Isomorphismus;*
(3) *es existiert eine Abbildung $g\colon E_{\mathcal{D}} \to FA \otimes FA^*$ mit $\mu \circ g = F\eta_A\colon E_{\mathcal{D}} \to F(A \otimes A^*)$;*
(4) *es ist $FA^*$ starkes Dual von $FA$ in $\mathcal{D}$, so dass $\varepsilon_{FA} = F\varepsilon_A \circ \mu_{A^*,A}$ und $\mu_{A,A^*} \circ \eta_{FA} = F\eta_A$.*

*In diesem Fall heißt $A$ ein $F$-*flaches Objekt.

Die Bezeichnung $F$-flach erinnert an den Begriff „flach“ in der kommutativen Algebra, der Moduln beschreibt, mit denen das Tensorprodukt exakt ist.

Beweis. Die Richtungen (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) sind klar. Zu (3) $\Rightarrow$ (4) setzen wir $\varepsilon_{FA} = F\varepsilon_A \circ \mu_{A^*,A}$ und $\eta_{FA} = g$, und betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "\lambda^{-1}"] \arrow[d, "F\lambda^{-1}"'] & FE_{\mathcal{C}} \otimes FA \arrow[r, "g\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dl] \arrow[d, "F\eta_A\otimes\mathrm{id}"'] & FA \otimes FA^* \otimes FA \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon_{FA}"] & \\
F(E_{\mathcal{C}} \otimes A) \arrow[dr, "F(\eta_A\otimes\mathrm{id})"'] & F(A \otimes A^*) \otimes FA \arrow[d] & FA \otimes F(A^* \otimes A) \arrow[dl] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes F\varepsilon_A"] & FA \otimes FE_{\mathcal{C}} \arrow[dl] \arrow[d, "\rho"] \\
& F(A \otimes A^* \otimes A) \arrow[r, "F(\mathrm{id}\otimes\varepsilon_A)"'] & F(A \otimes E_{\mathcal{C}}) \arrow[r, "F\rho"'] & FA
\end{tikzcd}$$

zu Definition 8.2 (1a), in dem alle unbezeichneten Pfeile Anwendungen von $\mu$ sind. Zu 8.2 (1b) erhalten wir ein analoges Diagramm.

Zu (4) $\Rightarrow$ (1) sei $X$ ein beliebiges Objekt. Dann betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned}
F(A \otimes X) \xrightarrow{\lambda^{-1}} E_{\mathcal{D}} \otimes F(A \otimes X) \xrightarrow{\eta_{FA}\otimes\mathrm{id}} FA \otimes FA^* \otimes F(A \otimes X) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mu} \\
\longrightarrow FA \otimes F(A^* \otimes A \otimes X) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes F(\varepsilon\otimes\mathrm{id})} FA \otimes F(E_{\mathcal{C}} \otimes X) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes F\lambda} FA \otimes FX\ .
\end{aligned}$$

Mit Proposition 8.2 überprüft man, dass diese Abbildung zu $\mu_{A,X}$ invers ist. $\square$

8.36. Definition. Es sei $\mathcal{C}$ eine symmetrische monoidale Kategorie, und es sei $A^*$ ein starkes Dual eines Objektes $A$. Dann definieren wir die *Spur* $\mathrm{tr}_A f \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}} E$ eines Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}} A$ als Verkettung

$$\mathrm{tr}_A f\colon E \xrightarrow{\eta} A \otimes A^* \xrightarrow{\tau} A^* \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes f} A^* \otimes A \xrightarrow{\varepsilon} E\ .$$

Wenn klar $A$ aus dem Kontext klar ist, schreiben wir für $\mathrm{tr}_A$ auch kurz tr.

8.37. Beispiel. Diese Definition verallgemeinert den klassischen Begriff aus der linearen Algebra.

(1) Es sei $V$ ein endlich-dimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum und $V^*$ sein Dualraum. Nach Wahl von dualen Basen $(v_1, \ldots, v_n)$ von $V$ und $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ von $V^*$ erfüllt $\eta\colon \Bbbk \to V \otimes V^*$ mit

$$\eta(r) = \sum_{i=1}^{n} r\, v_i \otimes \alpha^i$$

genau die Bedingungen aus Definition 8.2 (1). Mithin wird die Spur von $f \in \operatorname{End}_{\Bbbk} V$ gegeben durch Multiplikation mit der üblichen Spur:

$$\operatorname{tr}_V : r \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha^i\big(r\, f(v_i)\big) = r \operatorname{Tr} f \ .$$

(2) Genauso erhalten wir eine Spur für endliche erzeugte freie Moduln $R^n$ über einem beliebigen kommutativen Ring $R$. Ein endlich erzeugter projektives Modul $A$ ist stets direkter Summand eines endlich erzeugten freien Moduls $R^n$. Sei $p\colon R^n \to A$ die Projektion auf $A$, und sei $\tilde{f}\colon R^n \to R^n$ eine beliebige Fortsetzung von $f \in \operatorname{End}_R A$, dann gilt

$$\operatorname{tr}_A(f) = \operatorname{tr}_{R^n}(p\tilde{f}) \in R \ .$$

Da die Spur durch Definition 8.36 eindeutig bestimmt ist, gilt die obige Formel unabhängig von den Abbildungen $A \hookrightarrow R^n \twoheadrightarrow A$.

(3) Falls $R$ ein Hauptidealring (beispielsweise $\mathbb{Z}$) und $A$ ein endlich erzeugter $R$-Modul ist, erhalten wir eine natürliche exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}_R A \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/\operatorname{Tor}_R A \longrightarrow 0 \ ,$$

siehe Übung 5.108. Jeder Endomorphismus $f \in \operatorname{End}_R A$ bildet Torsionselemente auf Torsionselemente ab und induziert daher $\bar{f} \in \operatorname{End}_R(A/\operatorname{Tor}_R A)$. Also können wir die obige Definition der Spur erweitern zu

$$\operatorname{tr}_A(f) = \operatorname{tr}_{A/\operatorname{Tor}_R A}\big(\bar{f}\big) \ .$$

(4) Wir erinnern uns an das Tensorprodukt auf der Kategorie $\mathcal{C}h_R$ der Kettenkomplexe über $R$ aus Definition 5.74. Die Transposition $\tau\colon C_\bullet \otimes D_\bullet \to D_\bullet \otimes C_\bullet$ definieren wir für $c \in C_k$ und $d \in D_\ell$ durch

$$\tau(c \otimes d) = (-1)^{k\ell} d \otimes c \ .$$

Der Vorzeichenfaktor sorgt für Verträglichkeit mit den Differentialen auf $C_\bullet \otimes D_\bullet$ und $D_\bullet \otimes C_\bullet$.

Ein Kettenkomplex $C_\bullet$ der Form

$$\cdots \longleftarrow 0 \longleftarrow C_i \xleftarrow{\partial_{i+1}} C_{i+1} \longleftarrow \cdots \longleftarrow C_{j-1} \xleftarrow{\partial_j} C_j \longleftarrow 0 \longleftarrow \cdots$$

ist stark dualisierbar, wenn die Moduln $C_i, \ldots, C_j$ projektiv und endlich erzeugt sind. In diesem Fall ist das starke Dual $C_\bullet^*$ der Komplex

$$\cdots \longleftarrow 0 \longleftarrow C_j^* \xleftarrow{\partial_j^*} C_{j-1}^* \longleftarrow \cdots \longleftarrow C_{i+1}^* \xleftarrow{\partial_{i+1}^*} C_i^* \longleftarrow 0 \longleftarrow \cdots \ ,$$

wobei der Modul $C_k^*$ jeweils an der Stelle $-k$ steht. Das neutrale Element ist der Komplex $E_\bullet$ mit $E_0 = R$ und $E_k = 0$ für $k \neq 0$. Wir erhalten Auswertungs- und Koauswertungsabbildung jeweils als

$$\varepsilon(\alpha \otimes c) = \delta_{k\ell}\varepsilon_{C_k, C_k^*}(\alpha, c) = \alpha(c) \in R \qquad \text{für } \alpha \in C_k^*,\ c \in C_\ell, \text{ und}$$

$$\eta(r) = \big(\eta_{C_k, C_k^*}(r)\big)_k \in \bigoplus_{k=i}^{j} C_k \otimes C_k^* \cong (C_\bullet \otimes C_\bullet^*)_0 \ .$$

Mit diesen Vorbereitungen können wir die Spur einer Kettenabbildung $f_\bullet\colon C_\bullet \to C_\bullet$ zwischen endlichen erzeugten, projektiven Kettenkomplexen mit Hilfe von (1) angeben als

$$\operatorname{tr}_{C_\bullet}(f_\bullet) = \sum_{k=i}^{j} (-1)^k \operatorname{Tr}(f_i) \ .$$

Dabei rührt das Vorzeichen vom Vorzeichen der Transposition $\tau$ auf $C_k \otimes C_k^*$. Aufgrund des Vorzeichenfaktors wird diese Spur manchmal auch als *Superspur* bezeichnet.

(5) Wir betrachten die Kategorie $\mathcal{G}r\mathcal{M}od_R$ der $\mathbb{Z}$-graduierten $R$-Moduln als volle Unterkategorie von $\mathcal{C}h_R$. Damit die Einbettung $\mathcal{G}r\mathcal{M}od_R \hookrightarrow \mathcal{C}h_R$ und der vergessliche Funktor $\mathcal{C}h_R \to \mathcal{G}r\mathcal{M}od_R$ monoidal werden, definieren wir $\tau$ mit dem gleichen Vorzeichen wie oben. Dann gelten die gleichen Formeln für das starke Dual und die Spur.

Auch die folgenden Eigenschaften der Spur sind ähnlich wie in der linearen Algebra.

8.38. Proposition. *Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine symmetrische monoidale Kategorie, und es seien $A$, $B$ stark dualisierbar. Die Spur hat dann folgende Eigenschaften.*

(1) *Es gilt $\operatorname{tr}_E(f) = f$ für alle $f\colon E \to E$.*
(2) *Es gilt $\operatorname{tr}_A(f^*) = \operatorname{tr}_{A^*}(f)$ für alle $f\colon A \to A$, dabei sei $f^*\colon A^* \to A^*$ die duale Abbildung, siehe* (8.2).
(3) *Für $f\colon A \to A$ und $g\colon B \to B$ gilt $\operatorname{tr}_{A\otimes B}(f \otimes g) = \operatorname{tr}_A(f) \circ \operatorname{tr}_B(g)$.*
(4) *Für $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$ gilt $\operatorname{tr}_A(g \circ f) = \operatorname{tr}_B(f \circ g)$.*

Beweis. Dieser Beweis ist Übung 8.59. □

8.39. Proposition. *Es sei $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein monoidaler Funktor zwischen symmetrischen monoidalen Kategorien, es sei $A$ ein $F$-flaches Objekt und $f \in \operatorname{End}_{\mathcal{C}} A$. Dann gilt*

$$\operatorname{tr}_{FA}(Ff) = F(\operatorname{tr}_A f)\ .$$

Beweis. Wir wenden $F$ auf die Definition der Spur an und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{tr}_{FA}(Ff)\colon E_{\mathcal{D}} \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & FA \otimes FA^* \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\mu"'] & FA^* \otimes FA \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes Ff"] \arrow[d, "\mu"'] & FA^* \otimes FA \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\mu"'] & E_{\mathcal{D}} \arrow[d, equal] \\
F(\operatorname{tr}_A f)\colon FE_{\mathcal{C}} \arrow[r, "F\eta"] & F(A \otimes A^*) \arrow[r, "F\tau"] & F(A^* \otimes A) \arrow[r, "F(\mathrm{id}\otimes f)"] & F(A^* \otimes A) \arrow[r, "F\varepsilon"] & FE_{\mathcal{C}}
\end{tikzcd}$$

aufgrund der Natürlichkeit von $\mu$ und der Eigenschaften (2), (3) aus Definition 8.35. □

8.40. Bemerkung. Wir betrachten einen endlich erzeugten, freien Kettenkomplex $(C_\bullet, d_\bullet)$ über einem Körper $\Bbbk$ und eine Kettenabbildung $F_\bullet\colon (C_\bullet, d_\bullet) \to (C_\bullet, d_\bullet)$. Dann induziert $F_\bullet$ eine Abbildung $F_* \in \operatorname{End}\bigl(H_\bullet(C_\bullet, d_\bullet)\bigr)$, und wegen Beispiel 8.34 (3) und obiger Proposition gilt

$$\operatorname{tr}_{H_\bullet(C_\bullet)}(F_*) = \operatorname{tr}_{C_\bullet}(F_\bullet) \in \operatorname{End}_{\Bbbk} \Bbbk \cong \Bbbk\ .$$

Da $\operatorname{tr}_{\Bbbk^n}(\mathrm{id}_{\Bbbk^n}) = n$, entspricht der Spezialfall $F_\bullet = \mathrm{id}_{C_\bullet}$ gerade dem algebraischen Teil von Satz 5.31.

Wir erinnern uns an Spanier-Whitehead-Dualität. Sei $K^*$ ein Spanier-Whitehead-Dual von $K_+$ vom Grad $n$, dann haben wir Auswertungs- und Koauswertungsabbildungen $\varepsilon\colon K^* \wedge K_+ \to S^n$ und $\eta\colon S^n \to K_+ \wedge K^*$. Insbesondere nimmt die Spur $\operatorname{tr}_{K_+}$ Werte in den Endomorphismen von $\mathbb{S}$ im Grad 0 an, also in $\pi_0^s(S^0) \cong \mathbb{Z}$.

8.41. Definition. Es sei $K_+$ ein stark dualisierbarer topologischer Raum und $f\colon K \to K$ eine stetige Abbildung. Dann heißt $\operatorname{tr}_{K_+}(f) \in \pi_0(\mathbb{S}) \cong \mathbb{Z}$ die *Lefschetz-Zahl* von $F$.

Sei etwa $K^*$ ein Spanier-Whitehead-Dual von $K_+$ im Grad $n$, dann ist die Lefschetz-Zahl der Abbildungsgrad der gemäß Definition 8.36 konstruierten Abbildung

$$S^n \xrightarrow{\eta_n} K_+ \wedge K^* \xrightarrow{\tau} K^* \wedge K_+ \xrightarrow{\mathrm{id}\wedge f} K^* \wedge K_+ \xrightarrow{\varepsilon_n} S^n\ .$$

8.42. Folgerung. *Es sei $K$ ein stark dualisierbarer topologischer Raum und $f\colon K \to K$ stetig. Für einen Körper $\Bbbk$ bezeichne $j\colon \mathbb{Z} \to \Bbbk$ den Ringhomomorphismus mit $j(1) = 1$. Dann ist $H_k(K;\Bbbk)$ endlich dimensional und nur für endlich viele $k$ nicht $0$, und es gilt*

$$j\big(\mathrm{tr}_K(f)\big) = \mathrm{tr}_{H_\bullet(K;\Bbbk)}(f_*) = \sum_k (-1)^k \,\mathrm{tr}_{H_k(K;\Bbbk)}(f_{*k}) \in \Bbbk\ .$$

*Falls $K$ ein endlicher CW-Komplex und $f$ zellulär ist, gilt*

$$j\big(\mathrm{tr}_K(f)\big) = \mathrm{tr}_{C_\bullet^{\mathrm{CW}}(K;\Bbbk)}(f_\#) = \sum_k (-1)^k \,\mathrm{tr}_{C_k^{\mathrm{CW}}(K;\Bbbk)}(f_{\#k})\ .$$

*Insbesondere gilt $\mathrm{tr}_K(\mathrm{id}_K) = j\big(\chi(K)\big)$ für die Eulerzahl aus Definition 5.30.*

Für Körper der Charakteristik 0 wie $\Bbbk = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist $j$ injektiv, also geht durch Übergang zur $\Bbbk$-Homologie keine Information verloren. Über $\mathbb{Z}$ erhalten wir mit der modifizierten Spur aus Beispiel 8.37 (3) das gleiche Ergebnis (Übung). Wir können die Definitionen 8.33 und 8.35 auch für kontravariante Funktoren formulieren. In diesem Fall erhalten wir (Übung)

$$j\big(\mathrm{tr}_K(f)\big) = \mathrm{tr}_{H^\bullet(K;\Bbbk)}(f^*) = \sum_k (-1)^k \,\mathrm{tr}_{H^k(K;\Bbbk)}(f^{*k})\ ,$$

und analog im zellulären Fall.

Beweis. Das folgt aus den Beispielen 8.34 (1) und (2), 8.37 (4) und Proposition 8.39. □

Um den Lefschetzschen Fixpunktsatz zu formulieren, müssen wir erst den Fixpunktindex einer Abbildung definieren. Da Fixpunktmengen nicht immer schön sein müssen, folgen wir Dold [**D**, VII.5], arbeiten allerdings mit Abbildungsgraden, nicht mit Fundamentalklassen. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig, dann bezeichnen wir die *Fixpunktmenge* von $f$ mit

$$U_f = \big\{\, x \in U \;\big|\; f(x) = x \,\big\}\ .$$

8.43. Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig, so dass $U_f \subset U$ kompakt ist. Es sei $\psi\colon \mathbb{R}^n \to I$ eine Abschneidefunktion mit $\operatorname{supp}\psi \subset U$ und $\psi|_{U_f} = 1$, dann induziert $\psi$ eine Abbildung $\bar\psi\colon S^n \to C(U|U_f)$ mit $x \mapsto (x, \psi(x))$. Der *Fixpunktindex* $\mathrm{ind}(f)$ von $f$ auf $U_f$ ist der Abbildungsgrad der Abbildung

$$F\colon S^n \xrightarrow{\bar\psi} C(U|U_f) \xrightarrow{\mathrm{id}-f} C(\mathbb{R}^n|0) \xrightarrow{\sim} S^n\ . \tag{1}$$

Sei $X \subset U \subset \mathbb{R}^n$ ein Umgebungsretrakt mit Retraktion $p\colon U \to X$ wie in Definition 8.7, und sei $f\colon X \to X$ eine Abbildung mit kompakter Fixpunktmenge $X_f$. Dann definieren wir den Fixpunktindex von $f$ als

$$\mathrm{ind}(f) = \mathrm{ind}\big(f \circ p\colon U \to X \hookrightarrow \mathbb{R}^n\big)\ . \tag{2}$$

Insgesamt erhalten wir in (1) die Abbildung

$$x \longmapsto \big(x - f(x), \psi(x)\big)\ .$$

Es ist leicht zu sehen, dass unterschiedliche Abschneidefunktionen homotope Abbildungen liefern. Für die Konstruktion einer Abschneidefunktion ist aber wichtig, dass $U_f \subset U$ kompakt ist.

8.44. Beispiel. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ wie oben.

(1) Falls $f$ auf $U$ keine Fixpunkte hat, nimmt die Abbildung $F$ in Definition 8.43 den Wert 0 nie an, also folgt $\mathrm{ind}(f) = \deg(F) = 0$.
(2) Es gelte $0 \in U$, und es sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine Matrix, für die 1 kein Eigenwert ist, so dass $U_f = \{0\}$. Dann hat $f$ den Fixpunktindex $\mathrm{ind}\, f = \operatorname{sign}\det(E_n - A)$ nach Beispiel 3.47.

8.45. Proposition. *Der Fixpunktindex hat folgende Eigenschaften, dabei seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig und $U_f \subset U$ kompakt wie oben.*

(1) Additivität. *Es gelte $U = V \cup W$ mit $V$, $W \subset \mathbb{R}^n$ offen, so dass $U_f = V_f \dot\cup W_f$. Dann gilt*

$$\operatorname{ind}(f) = \operatorname{ind}(f|_V) + \operatorname{ind}(f|_W) \ .$$

(2) Homotopieinvarianz. *Es sei $h\colon U \times I \to \mathbb{R}^n$ eine Homotopie, so dass die Menge*

$$U_h = \left\{ (x,t) \;\middle|\; h(x,t) = x \in U \right\} \subset U \times I$$

*kompakt ist. Dann haben alle $f_t = h(\,\cdot\,,t)$ den gleichen Fixpunktindex.*

(3) Einheit. *Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f(x) = x_0$ die konstante Abbildung. Dann gilt* $\operatorname{ind} f = 1$, *falls $x_0 \in U$, und* $0$ *sonst.*

(4) Multiplikativität. *Es sei $g\colon V \to \mathbb{R}^m$ eine weitere Abbildung mit $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $V_g \subset V$ kompakt. Dann gilt* $\operatorname{ind}(f \times g) = \operatorname{ind}(f) \cdot \operatorname{ind}(g)$.

(5) Stabilität. *Es bezeichne $p\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n \times \{0\}$ die Projektionsabbildung. Dann hat die Abbildung $f \circ p\colon U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ den gleichen Fixpunktindex wie $f$.*

Eigenschaft (1) impliziert auch, dass der Index lokal in einer Umgebung der Fixpunkte berechnet werden kann. Dazu sei $V \subset U$ eine kleine Umgebung von $U_f$ und $W = U \setminus U_f$.

Beweis. Zu (1) wählen wir $\psi_1$, $\psi_2$ mit $\operatorname{supp}\psi_1 \in V$, $\operatorname{supp}\psi_2 \in W$ und $\psi_1|_{V_f} = 1 = \psi_2|_{W_f}$. Da $\mathbb{R}^n$ normal ist, können wir sogar $\operatorname{supp}\psi_1 \cap \operatorname{supp}\psi_2 = \emptyset$ verlangen. Dann sind $\psi = \psi_1 + \psi_2$, $\psi_1$, $\psi_2$ Abschneidefunktionen für $f$, $f|_V$, $f|_W$ wie in Definition 8.43. Seien $F$, $F_1$, $F_2\colon S^n \to S^n$ die zugehörigen Abbildungen, dann gilt $[F] = [F_1] + [F_2] \in \pi_n(S^n)$, und es folgt die Behauptung.

Zu (2) wählen wir eine Abschneidefunktion $\bar\psi\colon \mathbb{R}^n \times I \to I$ mit $\operatorname{supp}\bar\psi \subset U \times I$ und $\bar\psi|_{U_h} = 1$. Analog zur obigen Konstruktion von $F$ erhalten wir jetzt eine Abbildung

$$H\colon S^n \times I \xrightarrow{\tilde{\bar\psi}} C(U \times I|U_h) \xrightarrow{p-h} C(\mathbb{R}^n|0) \xrightarrow{\sim} S^n \ ,$$

wobei $p\colon C(U \times I|U_h) \to C(\mathbb{R}^n|0)$ von der Projektion $\mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ induziert sei. Dann ist für jedes $t$ die Einschränkung $F_t$ von $H$ auf $S^n \times \{t\}$ das Analogon zu $F$ für die Einschränkung $f_t$ von $h$ auf $U \times \{t\}$. Insbesondere sind alle $F_t$ homotop, und es folgt die Behauptung.

Im Falle $x_0 \notin U$ folgt Behauptung (3) bereits aus Beispiel 8.44 (1). Wir nehmen jetzt $x_0 = 0 \in U$ an. Dann ist die zugehörige Abbildung $F$ homotop zur Identität, und es folgt die Behauptung.

Zu (4) überlegt man sich, dass die zu $f \times g$ konstruierte Abbildung $H\colon S^{n+m} \to S^{n+m}$ zu $F \wedge G$ homotop ist, und dass $\deg(F \wedge G) = \deg(F) \cdot \deg(G)$ (Übung).

Schließlich ist (5) eine direkte Folgerung aus (3) und (4) mit $g = p$. □

8.46. Satz (Lefschetzscher Fixpunktsatz). *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Umgebungsretrakt, und es sei $f\colon K \to K$ stetig. Es bezeichne $K_f$ die Menge der Fixpunkte von $f$, dann gilt*

$$\operatorname{tr}_{K_+}(f) = \operatorname{ind}(f \circ p) \in \mathbb{Z} \ .$$

Mit anderen Worten lässt sich die Lefschetzzahl von $f$ in einer kleinen Umgebung von $K_f$ bereits bestimmen. Wenn die Lefschetzzahl nicht verschwindet, muss $f$ daher mindestens einen Fixpunkt haben. Man beachte, dass beide Seiten strenggenommen Werte in $\pi_0(\mathbb{S})$ annehmen. Die linke Seite der Gleichung hat nach Folgerung (8.42) eine homologische Beschreibung. Für die rechte Seite geben wir für Mannigfaltigkeiten unten eine explizitere Formel an.

Beweis. Wir betrachten die Konstruktion im Beweis von Satz 8.8 und folgen Dold und Puppe [**DP**]. Nach Definition 8.36 ist die Lefschetzzahl der Grad der Abbildung

$$S^n \sim C(\mathbb{R}^n|B_R(0)) \xrightarrow{\tau\circ\eta_n} C(\mathbb{R}^n|K) \wedge K_+ \xrightarrow{\mathrm{id}\wedge f} C(\mathbb{R}^n|K) \wedge K_+ \xrightarrow{\varepsilon_n} C(\mathbb{R}^n|0) \sim S^n$$

$$\text{mit} \qquad (x,t) \longmapsto \big(x, \psi(x)t\big) \wedge p(x) \longmapsto \big(x, \psi(x)t\big) \wedge f(p(x)) \longmapsto \big(x - f(p(x)), \psi(x)t\big) \ .$$

Diese Abbildung ist homotop zur Abbildung $F$ zu $f \circ p$, also folgt die Behauptung mit Definition 8.43 (2). □

8.47. Bemerkung. Besonders interessant ist der Fall einer kompakten Mannigfaltigkeit $M$, die wir nach dem Whitneyschen Einbettungssatz 6.60 und dem Satz 6.68 von der Röhrenumgebung als Umgebungsretrakt in einen $\mathbb{R}^n$ einbetten können. Durch Stabilisierung können wir $n$ beliebig groß wählen. Wenn $n$ ausreichend groß ist, sind alle Einbettungen zueinander als Einbettungen homotop. Somit hat jede Abbildung $f\colon M \to M$ wegen Proposition 8.45 (2) und (5) einen wohldefinierten Fixpunktindex nach Definition 8.43 (2), unabhängig von allen obigen Wahlen.

Wenn auf der anderen Seite die Fixpunktmenge $M_f$ als Vereinigung disjunkter kompakter Mengen $M_i$ geschrieben werden kann, so dass es Kartenumgebungen $U_i$ von $M_i$ gibt, dann existieren kleinere Umgebungen $W_i \subset U_i$ der $M_i$ mit $\mathrm{im}(f|_{W_i}) \subset U_i$. Sei $\varphi_i\colon U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^{\dim M}$ Karten, dann gibt es Abbildungen $f_i\colon \mathrm{im}(\varphi_i|_{W_i}) \to V_i \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{tikzcd} W_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & U_i \arrow[d, "\varphi_i"] \\ \mathrm{im}(f|_{W_i}) \arrow[r, "f_i"] & V_i \ . \end{tikzcd}$$

Aufgrund der Additivität erhalten wir eine intrinsische Formel für den Index (Übung)

$$\mathrm{ind}(f) = \sum_i \mathrm{ind}(f_i) \ .$$

8.48. Beispiel. In Kombination mit Folgerung 8.42 erlaubt der Lefschetzsche Fixpunktsatz interessante Aussagen.

(1) Für jeden kompakten Umgebungsretrakt $K \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\mathrm{ind}(\mathrm{id}_K) = \chi(K)$. Das gleiche gilt wegen der Homotopieinvarianz des Fixpunktindexes auch für Abbildungen, die zur Identität homotop sind. Solche Abbildungen haben also immer Fixpunkte, wenn $\chi(K) \neq 0$.

(2) Es sei $f\colon S^n \to S^n$ stetig. Indem wir zur reduzierten Homologie übergehen, sehen wir, dass $f_*$ auf $H_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$ als Identität wirkt; dieses Argument funktioniert für alle zusammenhängenden Räume. Aufgrund der Natürlichkeit des Hurewicz-Homomorphismus aus Definition 5.46 kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_n(S^n) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\eta"'] & \pi_n(S^n) \arrow[d, "\eta"] \\ H_n(S^n) \arrow[r, "f_*"] & H_n(S^n) \ , \end{tikzcd}$$

also wirkt $f_*$ auf $H_n(S^n)$ durch Multiplikation mit dem Abbildungsgrad $\deg(f)$. Insgesamt erhalten wir

$$\mathrm{ind}(f) = \mathrm{Tr}_{H_0(S^n;\mathbb{Q})}(f_*) + (-1)^n \,\mathrm{Tr}_{H_n(S^n;\mathbb{Q})}(f_*) = 1 + (-1)^n \deg(f) \ .$$

Da der Abbildungsgrad nach dem Satz 3.42 von Brouwer-Hopf die Abbildung $f$ bis auf Homotopie festlegt, sehen wir, dass eine Abbildung $f\colon S^n \to S^n$ ohne Fixpunkte zur

Identität homotop ist, wenn $n$ ungerade ist, und zur Antipodenabbildung, wenn $n$ gerade ist. Ähnlich hatten wir bereits im Beweis des Satzes 3.48 vom Igel argumentiert.

In Analogie zum Fixpunkt-Index einer stetigen Abbildung betrachten wir für Mannigfaltigkeit auch den Nullstellen-Index eines Vektorfeldes $X$, das heißt, eines Schnittes $X\colon M \to TM$ des Tangentialbündels. Wir betten $M$ mit dem Whitney-Einbettungssatz in den $\mathbb{R}^n$ ein und betrachten eine Röhrenumgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ zusammen mit einer Retraktion $p\colon U \to M$. Für ausreichend kleine $t > 0$ gilt $x + tX(x) \in U$ für alle $x \in M$, und wir erhalten Abbildungen

$$f_t\colon M \to M \qquad \text{mit} \qquad f_t(x) = p\big(x + tX(x)\big)\ .$$

Diese Abbildungen sind allesamt homotop zur Identität, insbesondere gilt $\operatorname{ind}(f_t) = \operatorname{ind}(\mathrm{id}_M) = \chi(M)$ nach Folgerung 8.42.

Die Fixpunkte von $f_t$ sind für ausreichend kleine $t > 0$ genau die Nullstellen von $X$. Wir wollen annehmen, dass wir $M$ ähnlich wie in Bemerkung 8.47 durch Untermannigfaltigkeitskarten $U_1, \ldots, U_N$ so überdecken können, dass $X^{-1}(0) \cap U_i$ für alle $i$ kompakt ist, und $X^{-1}(0) \cap U_i \cap U_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Am einfachsten geht das dann, wenn $X$ isolierte Nullstellen hat. Die Karten identifizieren $U_i \cap M$ mit Teilmengen $V_i \subset \mathbb{R}^m$ und $TM|_{U_i}$ mit $V_i \times \mathbb{R}^m$. Aus $X|_{U_i}$ wird eine Abbildung $X_i\colon U_i \to \mathbb{R}^m$. Dann finden wir etwas kleinere Umgebungen $W_i \subset V_i$ von $X_i^{-1}(0)$, auf denen $f_t$ homotop ist zu einer Abbildung $g_i\colon W_i \to V_i \subset \mathbb{R}^m$ mit $y \mapsto y + tX_i(y)$, wobei sich die Fixpunktmengen der Abbildungen während der Homotopie nicht ändern. Nach Proposition 8.45 (1), (2) und (5) folgt

$$\operatorname{ind}(\mathrm{id}_M) = \operatorname{ind}(f_t) = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{ind}(g_i)\ .$$

Um den Fixpunktindex der Abbildung $g_i\colon W_i \to \mathbb{R}^m$ zu berechnen, wählen wir eine Abschneidefunktion $\psi_i\colon \mathbb{R}^m \to I$ wie in Definition 8.43 (1) und betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} F_i\colon S^m &\longrightarrow C\big(W_i | X_i^{-1}(0)\big) \longrightarrow C(\mathbb{R}^m|0) \xrightarrow{\sim} S^m \\ \text{mit} \qquad y &\longmapsto \big(y - g_i(y), \psi_i(y)\big) = \big(-tX_i(y), \psi_i(y)\big)\ . \end{aligned}$$

8.49. Definition. Es sei $M$ eine glatte, geschlossene Mannigfaltigkeit und $X\colon M \to TM$ ein Vektorfeld auf $M$. Wir nehmen an, dass sich $M$ durch Kartengebiete $U_i$ mit $i = 1, \ldots, N$ mit Karten $\varphi_i\colon U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^m$ überdecken lässt, so dass

$$X^{-1}(0) = \dot{\bigcup}\big(X^{-1}(0) \cap U_i\big)\ .$$

Wir nehmen außerdem an, dass für jedes $i$ das Bild $\phi_i(X^{-1}(0))$ der Nullstellenmenge von $X$ auf $U_i$ im Inneren des Einheitsballs $D^m \subset V_i \subset \mathbb{R}^m$ enthalten ist. Es bezeichne $X_i\colon V_i \to \underline{\mathbb{R}}^m$ das Bild des Vektorfeldes $X$ unter $d\varphi_i$, das heißt, es gelte $X_i \circ \varphi_i = d\varphi_i \circ X\colon V_i$. Dann definieren wir den *Nullstellen-Index* $\operatorname{ind}(X)$ von $X$ als

$$\operatorname{ind}(X) = \sum_{i=1}^{N} \deg\left(\frac{X_i}{\|X_i\|}\colon S^{m-1} = \partial D^m \to S^{m-1}\right)\ .$$

Die obige Voraussetzung an $X$ erhalten wir insbesondere dann, wenn $X$ isolierte Nullstellen hat. Das gilt beispielsweise dann, wenn $X$ transversal zum Nullschnitt $M \subset TM$ ist. Im letzteren Fall sind die lokalen Indizes $\operatorname{ind}(X_i) = \pm 1$, falls jede Kartenumgebung genau eine Nullstelle enthält.

8.50. Satz (Poincaré-Hopf). *Es sei $M$ eine geschlossene glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $M$, und es sei $X$ ein Vektorfeld wie in Definition 8.49. Dann gilt*

$$\operatorname{ind}(X) = \chi(M)\ .$$

Beweis. Wir haben in der Vorüberlegung gesehen, dass $\operatorname{ind}(X)$ gerade der Fixpunkt-Index der Abbildungen $f_t\colon M \to M$ für kleine $t > 0$ ist. Diese Abbildungen sind homotop zur Identität, nach Beispiel 8.48 (1) gilt daher wie behauptet

$$\operatorname{ind}(X) = \operatorname{ind}(f_t) = \operatorname{ind}(\mathrm{id}_M) = \chi(M)\ . \qquad \square$$

8.51. Bemerkung. Wir können das Vektorfeld $X$ durch $-X$ ersetzen und erhalten wegen des obigen Satzes den gleichen Nullstellenindex. Für die lokalen Nullstellenindizes hingegen gilt

$$\deg\left(\frac{-X_i}{\|X_i\|}\right) = \deg(-\mathrm{id}_{S^{m-1}}) \cdot \deg\left(\frac{X_i}{\|X_i\|}\right) = (-1)^m \deg\left(\frac{X_i}{\|X_i\|}\right)$$

nach Beispiel 3.47, und es folgt $\operatorname{ind}(-X) = (-1)^m \operatorname{ind}(X)$. Damit haben wir eine weitere Begründung dafür, dass ungerade-dimensionale Mannigfaltigkeiten Euler-Charakteristik 0 haben. Für orientierte Mannigfaltigkeiten hatten wir das bereits in Bemerkung 8.23 gesehen.

Wir können den Nullstellen-Index von $X$ auch mit der Eulerzahl $\langle [M], e(TM)\rangle$ identifizieren. Das folgende Resultat ist eine topologische Version des Satzes von Gauß-Bonnet-Chern. In der üblichen Formulierung dieses Satzes würde man $e(TM)$ durch geometrische Größen in Abhängigkeit von einer Riemannschen Metrik auf $M$ ausdrücken. Dann kann man auch auf die Voraussetzung, dass $M$ orientiert ist, verzichten. Eine topologische Möglichkeit, auf eine Orientierung von $TM$ zu verzichten, besteht darin, zu (Ko-) Homologie mit lokalen Koeffizienten überzugehen.

8.52. Satz. *Es sei $M$ eine glatte orientierte geschlossene $m$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Fundamentalklasse $[M] \in H_m(M)$ und Eulerklasse $e(TM) \in H^m(M)$. Dann gilt*

$$\chi(M) = \langle [M], e(TM)\rangle\ .$$

Beweis. Wir wählen ein Vektorfeld $X$ mit isolierten Nullstellen wie oben. Außerdem dürfen wir annehmen, dass $\|X\| \le 1$ auf ganz $M$ und $\|X\| = 1$ außerhalb der Mengen $D_i = \varphi_i^{-1}(D^m)$, wobei $M$ wieder durch Karten $\varphi_i\colon U_i \to V_i$ mit $D^m \subset V_i$ für $i = 1, \ldots, N$ überdeckt werde. Es bezeichne $[M_i] \in H_m(M|D_i)$ das Bild der Fundamentalklasse und $\omega_{TM} \in H^m(DTM, STM)$ die Thom-Klasse zur gewählen Orientierung, dann folgt

$$\langle [M], e(TM)\rangle = \langle [M], X^*\omega_{TM}\rangle = \sum_{i=1}^N \langle [M_i], X^*\omega_{TM}\rangle\ .$$

Wir identifizieren wieder $D_i$ mit $D^m \subset V_i$ mit Hilfe der Karte $\varphi_i$ und betrachten wie oben das Bild $X_i$ von $X$ unter $d\varphi_i$. Es seien $[D^m] \in H_m(D^m, \partial D^m)$ und $\omega_{D^m} \in H^m(D^m, \partial D^m)$ die Standarderzeuger, so dass $\langle [D^m], \omega_{D^m}\rangle = 1$. Wenn wir annehmen, dass $\varphi_i$ orientierungserhaltend ist, gilt $\varphi_{i*}[M_i] = [D^m]$, und die Abbildung

$$H^m(D^m, \partial D^m)] \xrightarrow{\cong} H^m(M\underline{\underline{\mathbb{R}}}^m) \xrightarrow{(d\varphi_i)^*} H^m(MTU_i)$$

bildet $\omega_{D^m}$ auf $\omega_{TM}|_{MTU_i}$ ab. Es folgt

$$\langle [M_i], X^*\omega_{TM}\rangle = \langle [D^m], X_i^*\omega_{D^m}\rangle = \deg(X_i\colon \partial D^m \to \partial D^m) = \operatorname{ind}(X_i)\ .$$

Summieren über $i$ liefert $\langle [M], e(TM)\rangle = \operatorname{ind}(X)$, und die Behauptung folgt aus dem Satz von Poincaré-Hopf. $\square$

## 8.f. Übungen zu Kapitel 8

*Übungen zu Abschnitt 8.a.*

8.53. Übung. Für $i = 0, 1$ seien $B_i$ starke Duale von $A_i$ in einer monoidalen Kategorie $(\mathcal{C}, \otimes, E)$, mit Auswertungs- und Koauswertungsabbildungen $\varepsilon_i$ beziehungsweise $\eta_i$. Es sei $f\colon A_0 \to A_1$ ein Morphismus und

$$Df\colon B_1 \xleftarrow{\rho_{B_1}} B_1 \otimes E \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\eta_0} B_1 \otimes A_0 \otimes B_0 \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes f\otimes\mathrm{id}} B_1 \otimes A_1 \otimes B_0 \xrightarrow{\varepsilon_1\otimes\mathrm{id}} E \otimes B_0 \xrightarrow{\lambda_{B_0}} B_0 \ .$$

Zeigen Sie:

(1) Die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} B_1 \otimes A_0 \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes f"] \arrow[d, "Df\otimes\mathrm{id}"'] & B_1 \otimes A_1 \arrow[d, "\varepsilon_1"] \\ B_0 \otimes A_0 \arrow[r, "\varepsilon_0"] & E \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "\eta_1"] \arrow[d, "\eta_0"'] & A_1 \otimes B_1 \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes Df"] \\ A_0 \otimes B_0 \arrow[r, "f\otimes\mathrm{id}"] & A_1 \otimes B_0 \ . \end{tikzcd}$$

(2) Wenn $\mathcal{C}$ symmetrisch ist, gilt $f = DDf$.

8.54. Übung. Es seien $Y_0, Y_1$ Spanier-Whitehead-Duale von $X_0, X_1$ vom Grad $n$. Es sei $g\colon Y_1 \to Y_0$ dual zu $f\colon X_0 \to X_1$ wie in der vorigen Aufgabe. Sei $\mathbb{E}$ ein beliebiges Spektrum. Zeigen Sie, dass man mit den Isomorphismen aus Bemerkung 8.6 ein kommutatives Diagramm erhält:

$$\begin{tikzcd} \tilde{E}^k(X_1) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\cong"', "{[\eta_1]/}"] & \tilde{E}^k(X_0) \arrow[d, "\cong"', "{[\eta_0]/}"] \\ \tilde{E}_{n-k}(Y_1) \arrow[r, "g_*"] & \tilde{E}_{n-k}(Y_0) \ . \end{tikzcd}$$

8.55. Übung. Es sei $\emptyset \neq K \subset S^n$ kompakter Umgebungsretrakt und $\mathbb{E}$ ein Spektrum. Wir betrachten die natürlichen Abbildungen $K \hookrightarrow K_+ \twoheadrightarrow S^0$.

(1) Zeigen Sie mit Übung 8.53, dass die Kollaps-Abbildung $S^n \to S^n|K$ zu $K_+ \to S^0$ dual ist.
(2) Konstruieren mit Hilfe der exakten Homologie-Sequenz des Paares $(S^n, S^n \setminus K)$ und Übung 8.54 einen Isomorphismus

$$\tilde{E}^k(K) \longrightarrow \tilde{E}_{n-k-1}(S^n \setminus K) \ .$$

*Übungen zu Abschnitt 8.b.*

8.56. Übung. Es sei $\mathbb{E}$ ein Ringspektrum und $\alpha \in E^n(\mathbb{R}^m|0)$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(1) Es sei $\epsilon \in E^0$ die Eins des Ringspektrums und $\delta S^{m-1}\epsilon$ ihr Bild unter dem Isomorphismus

$$E^0 = \tilde{E}^0(S^0) \xrightarrow{S} \cdots \xrightarrow{S} \tilde{E}^{m-1}(S^{m-1}) \xrightarrow{\delta} E^m(D^m, S^{m-1}) \cong E^m(\mathbb{R}^m|0) \ .$$

Dann gibt es eine Einheit $\beta \in E^\bullet$, so dass $\alpha = \beta \wedge \delta S^{m-1}\epsilon$.
(2) Das Kronecker-Produkt $\langle\,\cdot\,, \alpha\rangle\colon E_\bullet(\mathbb{R}^m|0) \to E_\bullet$ ist ein Isomorphismus.
(3) Für jedes Rechts-$\mathbb{E}$-Modulspektrum $\mathbb{F}$ ist $\langle\,\cdot\,, \alpha\rangle\colon F_\bullet(\mathbb{R}^m|0) \to F_\bullet$ ein Isomorphismus.

*Übungen zu Abschnitt 8.e.*

8.57. Übung. (1) Es sei $(\mathbb{E}, \mu, E)$ ein Ringspektrum. Wir definieren ein externes Produkt $\wedge\colon \tilde{E}_k(X) \times E_\ell(Y) \to E_{k+\ell}(X \wedge Y)$, durch

$$a \wedge b\colon \mathbb{S} \cong \mathbb{S} \wedge \mathbb{S} \xrightarrow{a\wedge b} \mathbb{E} \wedge X \wedge \mathbb{E} \wedge Y \xrightarrow{\cong} \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \wedge X \wedge Y \xrightarrow{\mu\wedge\mathrm{id}} \mathbb{E} \wedge X \wedge Y \ .$$

Zeigen Sie, dass das einen monoidalen Funktor $\mathcal{H}kw\mathcal{H}_+ \to \mathcal{G}r\mathcal{A}b$ induziert.
(2) Es sei $\tilde{h}^\bullet$ ein reduzierter multiplikativer Kohomologiefunktor wie in Definition 7.18. Zeigen Sie, dass $\tilde{h}^\bullet$ dann ebenfalls ein monoidaler Funktor ist.

8.58. Übung.

8.59. Übung. Beweisen Sie Proposition 8.38.

8.60. Übung. Es sei $k \geq 0$. Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ mit $f(z:w) = (z^k : w^k)$. Bestimmen Sie ihre Fixpunkte und ihren Abbildungsgrad in Abhängigkeit von $k$.

8.61. Übung. Es sei $n \geq 2$ und $k \geq 0$. Analog zur obigen Aufgabe definieren wir $f\colon \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ durch $f(z_0 : \cdots : z_n) = (z_0^k : \cdots : z_n^k)$. Bestimmen Sie wieder die Fixpunktmengen und den Abbildungsgrad. Dazu gehen Sie zur Kohomologie über und benutzen die multiplikative Struktur aus Beispiel 6.27.

# Literatur


[Ad] J. F. Adams, Stable homotopy and generalised homology, The University of Chicago Press, Chicago, 1974.

[At] M. F. Atiyah, $K$-Theory, W. A. Benjamin, New York, 1967.

[tD1] T. tom Dieck, Topologie, de Gruyter Lehrbuch, de Gruyter, Berlin, 1991, x+401S.

[tD2] ———, Algebraic Topology, EMS textbooks in Mathematics, EMS, Zürich, 2008, xii+567S.

[D] A. Dold, Lectures on Algebraic Topologogy, Springer, Berlin, 1972, xi+377S.

[DP] A. Dold, D. Puppe, Duality, Trace and Transfer, Proc. Stekhlov Inst. Math. 154, 1984, 85–103.

[ES] S. Eilenberg, N. Steenrod, Foundations of Algebraic Topology, Princeton University Press, 1952.

[F] P. Freyd, Abelian Categories, Harper & Row, New York, 1964, xi+164S.

[H1] A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, xii+544S., `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`

[H2] A. Hatcher, Vector bundles and $K$-theory, preprint, `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html`

[Ho] M. Hovey, Model Categories, Math. Surv. and Monogr. 63, Amer. Math. Soc., Providence, RI. 1999, xii+209S.

[J] K. Jänich, Topologie, Springer Hochschultext, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1980, ix+215S.

[M] P. May, A Concise Course in Algebraic Topology, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago IL, 1999, x+243S., `http://www.math.uchicago.edu/~may/CONCISE/ConciseRevised.pdf`

[Mi] J. Milnor, Topology from the differentiable viewpoint, The University Press of Virginia, Charlottesville, VA. 1965, ix+65S.

[Que] B. v. Querenburg: Mengentheoretische Topologie, Springer Hochschultext, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1973, ix+195S.

[Qui] D. G. Quillen, Homotopical Algebra, Lect. Notes Math. 43, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1967, 160S.

[R] Y. B. Rudyak: On Thom Spectra, Orientability, and Cobordism, Springer, Berlin-Heidelberg, 1998, xii+587S.

[S] E. H. Spanier, Algebraic Topology, Corrected reprint, Springer, Berlin, 1981, xvi+528S.

[SS] L. A. Steen, J. A. Seebach Jr, Counterexamples in Topology, Second edition, Springer, New York - Heidelberg, 1978, xi+244S.

[St] N. Strickland, The category of CGWH spaces, preprint, 2009, `neil-strickland.staff.shef.ac.uk/courses/homotopy/cgwh.pdf`

[Sw] R. W. Switzer, Algebraic Topology—Homotopy and Homology, Springer, Berlin, 1975.

# Stichwortverzeichnis


Abbildung
  abgeschlossene, 41
  adjungierte, 21
  Alexander-Whitney, 210
  Auswertungs-, 21
    schwache, 303
  charakteristische, *29*, 33, 34, 146
  CW-Spektren, *270*
  Diagonal-, 234
    relative, 236, 293
  eigentliche, 165
  Einheits-, *290*
  Exponential-, 43, 51, 52, 54
  Gysin-, 319
  Höldersche, 7, 37
  homotope, *43*
  induzierte
    Homologie, *180*
    Kohomologie, *227*
    Unterraum, 15
  injektive, 15, 24
  Ketten-, *180*
  klassifizierende, *248*
  Koketten-, *227*
  konstante, 6
  Lipschitz-, 1, 37
  natürliche, *81*
  Null-, 142
  Prinzipalbündel-, *241*
  Projektions-, 28, 69
  punktierte, *44*, 79
  Rand-, *siehe* Homomorphismus, Verbindungs-
  Sequenz-, *86*
  Stabilisierungs-, *190*
  stetige, *6*, 7, 19, 21, 23, 37–39
  surjektive, 24, 41
  Transpositions-, 233
  transversale, 259
  Vektorbundel-, *243*
  Verklebe-, *29*, 31, 145
  von Paaren, *44*
  zelluläre, 33, *147*, 181
Abbildungsgrad, *100*, 117, 176, 323
Abelisierung, 48, 59, 66, 76, 197
abgeschlossen, 4, *6*, 8, 9, 11, 19, 20, 23, 40
  folgen-, 11
Abschluss, *6*, 32
Adjunktion, *131*, 132–138, 140–143, 304
Äquivalenz
  Homotopie-
    schwache, *148*
  schwache, *155*
    von Spektren, *274*
  von Kategorien, 73, 74
Äquivalenzrelation, 24, 41, 74
  erzeugte, 25, 40, 61
Algebra, 235
  Kohomologie-, 235, *293*
Analysis, 3, 19
Approximation
  CW-, *150*
  durch CW-Paar, 295
  zelluläre, **147**
Assoziativität, 7
Auflösung
  projektive, *200*
Augmentierung, 186
Ausschneidung, **296**
  Homotopie, 94
Axiom
  Abzählbarkeits-, *11*, 17, 19, 25, 30, 38, 39, 137
  Dimensions-, 171, 222
  Eilenberg-Steenrod, 171
    Kohomologie, 221
  Funktor, *48*
  Kategorie, *7*
    abgeschlossene monoidale, *140*
    kartesisch abgeschlossene, *140*
    Modell-, *155*
    monoidale, *140*
    trinagulierte, *278*
  Oktaeder-, 279
  Summen-, 171, 222
  Trennungs-, *8*, 17, 25, 38, 41

Bahn, *69*, 74
Ball, 5, 11, 34
  Einheits-, 28

$\varepsilon$-, *3*
Basis, *11*, 17, 41, 72
abzählbare, 11, 17, 27, 101
Faserbündel, *91*
Umgebungs-, *11*
Basispunkt, *44*, 47, 50, 57, 68
nicht entarteter, *103*
Baum
maximaler, 62, 63
Bedingung
Mittag-Leffler-, 226
beschränkt, 19, 20
Bifunktor, 166
graduierter, 288
Bings Haus, 45
Bordismus
$\mathbb{B}$-, *259*
gerahmter, *114*, 115–121, 173
Null-, *259*
Borromäische Ringe, 76
Bouquet, *61*, 107
Bündel
assoziiertes, *242*
Ball-, 260
duales, *250*
Faser-, *91*
Hauptfaser-, *siehe* Bündel, Prinzipal-
Normalen-, 114
relatives, 261
stabiles, *257*
Prinzipal-, *241*
universelles, *248*
Sphären-, 260
Tangential-, 244
triviales, 91
Vektor-, *243*
stabil triviales, 251
tautologisches, 320
triviales, 244
Whitney-Produkt, *250*
Whitney-Summe, *250*
zurückgezogenes, 242

Charakteristik
Euler-, *187*
Körper, 187

Decktransformation, *70*, 71–74
Diagramm, *132*
kommutatives, 13, 49
Dimension, *27*, 28, 41, 101
Divisionsalgebra, 2
Dreieck
ausgezeichnetes, *278*
exaktes, *278*
Dreiecksungleichung, 3
dual, 16, 25
Dualisieren, 227
Dualität
Eckmann-Hilton-, 102, 155, 162
Lefschetz-, **312**
Poincaré, 265
Poincaré-, **312**
$S$-, *305*
schwache, 303
Spanier-Whitehead-, *305*, **306**
starke, *304*

Eigenschaft
Abzählbarkeits-, *11*, 17, 19, 25, 30, 38, 39
charakteristische
kompakt-offene Topologie, 21, 34
Produkt, 16
Quotient, 25, 34, 85, 139
Summe, 13
Unterraum, 15, 45, 139
Homotopieausdehnungs-, *102*
Homotopieliftung-, *88*, 102
Trennungs-, *8*, 17, 25, 38, 41
universelle, 16
interner hom-Funktor, 142
Kolimes, 27, 110, 134
Koprodukt, 14, 56, 61, 76
Limes, 134
Produkt, 16, 56, 76
Pullback, 134
Pushout, 26, 59, 76, 134
Tensorprodukt, 142, 198
universelle Überlagerung, 73
eigentlich, 119
Einbettung, *15*, 39
Einhängung
reduzierte, *108*
Einheit
Adjunktion, *131*, 141, 304
Einheitswürfel, 80
Erzeuger
Kategorie, 170
Exponentialgesetz, **21**, 132, 143
abstraktes, **142**
Ext
kursiv, 203

Faser, *88*, 105, 170
Homotopie-, *162*
typische, *91*
Faserung, 155
azyklische, 155
Hopf-, 92, 98, 99
quaternionische, 93, 99
Hurewicz-, *88*, 162
Pfad-, *162*
Serre-, *88*
triviale, 155
fein, *8*, 13, 24, 25
Filtrierung

Schicht-, 272
Fixpunkt, 1, 53, 325
Fläche, 66
nicht orientierbare, 66
orientierbare, 66
Flasche
Kleinsche, 66
Folge, 9, 18, 19, 37, 40, 42
Form
Schnitt-, *314*
Fundamentalgruppe, *46*, 57–67, 71–75, 80
des Komplements, 60, 61
Funktion
Morse-, 122
stetige, 8, 9
Funktor, *48*, 73, 75, 76, 170, 221
abgeleiteter, *siehe* Funktor, derivierter
adjungierter, *131*, 132–138, 140–143
Bi-, 166
derivierter
links-, *202*
rechts-, *203*, 225
Diagonal-, 132
exakter, 200
links-, *200*, 224
rechts-, *200*
Ext-, *203*
graduierter, 180
interner hom-, 141–144
kontravarianter, 74
kostetiger, *135*
kovarianter, *48*
monoidaler, *320*
stetiger, *135*
Tor-, *203*
treuer, 170
vergesslicher, 132, 142
Verschiebe-, *278*

Galois-Theorie, 73, 74
Geist, 225
Gerüst, 28, *29*, 62, 146
Geschlecht, 66
Grad
CW-Spektren, *270*
Spanier-Whitehead-Dualität, *305*
Grenzwert, 9, 11, 18, 20, 37
grob, *8*, 12, 15, 16, 21, 24
Gruppe, 7, 46, 55, 69, 75, 76
abelsche, 75, 76
Decktransformations-, 70–74
freie, 55, 76
Galois-, 73, 74
perfekte, 197
Struktur-, *243*
topologische, *241*
unendliche Dieder-, 55, 78
Unter-, 56, 57, 71, 73, 74

Häufungspunkt, *18*
Höhe
Zelle, 272
Hom, 7
hom
kursiv, 141
Homöomorphismus, *6*, 39, 44, 60, 69, 73
Homologie
ganzzahlige, 198
$K$-, 253
Kettenkomplex, *180*
mit Koeffizienten, *208*
Rechtsmodul, *280*, 292
reduzierte
allgemeine, *170*
gewöhnliche, *171*
relative, 172
singuläre $E$-, *295*
singuläre, 187
unreduzierte
allgemeine, 172
zelluläre
reduzierte, *181*
unreduzierte, 186
zu einem Spektrum, *192*
Homologieklasse, *180*
Homomorphismus
Gruppen-, 56, 69, 75
Hurewicz-, 197
$J$-, 124
Verbindungs-, 87, 89, 171, 185
homotop
ketten-, *184*
links-, *156*
rechts-, *157*
Homotopie, *43*, 44, 45, 51
CW-Spektra, *271*
Ketten-, *184*
kompakt getragen, *259*
Links-, *156*
punktierte, 79
Rechts-, *157*
relative, *44*, 45, 46, 48, 67, 74
Homotopieäquivalenz, *44*, 45, 50, 74, 149
Homotopiegruppe, *80*
höhere, 48
Spektrum, *271*
stabile, 111, 172
Homotopieinvarianz, 171, 221
Homotopiekategorie
stabile, *271*
naive, 111
Homotopieklasse, 44, 45
freie, *43*, 83
Huhn

topologisches, 153

Identität, 6, 36
in Kategorie, 7, 44
Index
Fixpunkt-, *324*
Nullstellen-, *327*
Inklusion, 13, 15
zelluläre, 270
Inneres, *6*
Integration
Faser, 319
Intervall, 23
Inverses, 44
Homotopie-, *44*, 50
Inzidenzzahlen, 181
Isomorphismus, 44, 47, 50
Hurewicz-, 197
Prinzipalbündel-, *241*
Stabilisierungs-, 188
Thom-, **309**
Vektorbündel-, *243*

Karte
Faserbündel, *91*
Kategorie, *7*, 16, 26, 44, 48, 55, 59, 61, 73, 75, 76
abelsche, 170
abgeschlossene, 141
additive, 275
bivollständige, *133*
derivierte, 184
Grothendieck-, 169, 170
Homotopie-, 44, 157, 171
stabile, *271*
kartesisch abgeschlossene, *140*, 143
kovollständige, *133*
Lusternik-Shnirelman-, *297*
Modell-, *155*, 156–159
monoidale, *140*
abgeschlossene, *140*
graduiert symmetrische, 288
streng, 140
präadditive, 275
punktierte, 142, 169
symmetrisch monoidale, 141
triangulierte, *278*
vollständige, *133*
Kegel
Abbildungs-
reduzierter, *159*
Spektra, 274
reduzierter, *105*
Kern, 86, 170
Kette, *180*
Klasse, 7
charakteristische, 250
Chern-, 268
Euler-, *318*
relative, *318*
Fundamental-, 265
primitive, 314
Stiefel-Whitney-, 268
Thom-, *308*
Knoten, 61
Kobordismus
gerahmter, 120
Koeffizienten, 171, 222
universelle
Homologie, **208**, 215
Kohomologie, **228**, 314
Koeinheit
Adjunktion, *131*, 142, 304
Körper, 7
Schief-, 41
Kofaser, 105, 170
Homotopie-, *106*
Kofaserung, *102*, 145, 155
azyklische, 155
Hurewicz-, *102*
triviale, 155
Kohomologie
darstellbare, *238*
Kokettenkomplex, *227*
multiplikative, *279*, 292
Rechtsmodul, 292
reduzierte, *222*
allgemeine, *221*
gewöhnliche, *222*
relative, 222
singuläre $E$-, *295*
unreduzierte, 222
zelluläre, 227
Kokern, 170
Kokette, *227*
Kolimes, 26, 110, *133*, 134–136
endlicher, *133*
kommutativ
graduiert, 234, 294
Kommutator, 48, 66
kompakt, *19*, 20, 25, 32, 39, 48, 51, 57, 77
abzählbar, *19*, 20
folgen-, *19*, 20
lokal, 20, 21, 33, 42, 45
quasi-, *19*, 25
kompakt erzeugt, 165–166
Komplex
CW-, *29*, 30–35, 41, 62–66, 78, 137
endlicher, 32
punktierter, *146*
Ketten-, *180*
augmentierter, 186
Unter, 184
zellulärer, *181*
Koketten-, *227*
zellulärer, 227

singulärer, 187
Unter-, 32, 36
Zell-, *29*
Konvergenz, 23, 37
gleichmäßige, 22, 40
lokal, 23
kompakte, 22, 40
Koprodukt, *13*, 26, 39, 55, 61, 76, 135, 141
Korand
Kettenkomplex, *227*
Kozykel, *227*
gerahmter, 120
Kragen, 114
Kreis, 58–61, 63, 77
polnischer, 153
kürzen, 54

Länge
Cup-, *294*
Lemma
Fünfer-, **88**
Homotopie-, **246**
Schlangen-, **185**
Urysohn, **9**
Vierer-, **88**
Lift, 51, 52, 54, 67–73, 88
Limes, *132*, 134–136
abgeleiteter, *224*
endlicher, *132*
Lokalisierung, 157

Mannigfaltigkeit, *27*, 34, 41, 66, 137
differenzierbare, 244
geschlossene, 256
glatte
$\mathbb{B}$-, *258*
Grassmann-, 249
komplexe, 244
mit Rand, *101*
Maximum, 19
Menge, 7, 26
Potenz-, 3, 5
punktierte, 81
Metrik
französische Eisenbahn-, 36
$p$-adische, 37
Riemannsche, 244
metrisierbar, *5*, 10, 18, 28, 30
Modellstruktur, *155*, 240
Cole-, 156
gemischte, *siehe* Modellstruktur, Cole-
Hurewicz-, *siehe* Modellstruktur, Strøm-
naive, *siehe* Modellstruktur, Strøm-
Quillen-, 156, 240
Serre-, *siehe* Modellstruktur, Quillen-
Standard-, *siehe* Modellstruktur, Quillen-
Strøm-, 156, 240
Modul
projektiver, 201
Morphismus, *7*, 44, 48, 76
dualer, 303
Epi-, *200*
invertierbarer, *siehe* Isomorphismus
Null-, 142
Multiplikation
Spektren, *290*

Norm, 42
äquivalente, *4*
normal, *9*, 18, 19, 22, 28, 31, 39, 41
Normalteiler, 56, 71–72
erzeugter, 56, 62, 65
Nullbordismus
gerahmter, 114

Objekt, *7*, 48
duales
schwach, 303
stark, *304*
Einheits-, *140*
F-flaches
$F$-flaches, *321*
fibrantes, *156*
initiales, 81, 134, 141, 156
kofibrantes, *156*
Null-, 81, 142
projektives, *200*
Quotienten-, 170
konormales, 170
reflexives, 303
terminales, 81, 134, 141, 156
Unter-, 170
normales, 170
offen, 4, *5*, 23
Operation, *siehe* Wirkung
Orientierung, *308*
relative, 265
Standard-, 311

Paar, *44*, 179
CW-, *145*
punktiertes, 84
Paarung
Kronecker-, 121, 228
parakompakt, 246
Partition
der Eins, *245*
Periodizitat
Bott-, 125
Polynom, 37, 75
Präsentation, 62, 66
Produkt, 20, 39, 40, 54–56, 76, 91, 135, 138, 141
äußeres, 232, 264, *280*
amalgamiertes, 59
Cap-, *234*, 293
relatives, 236

Cup-, 121, *234*, 293
relatives, 236
direktes, 39, 75
Erweiterungs-, *203*
freies, *55*, 56
inneres, *234*, 293
relatives, 236
Kreuz-
Kohomologie, 234
Kronecker-, 228, 293
reduziertes, *107*
naives, *282*
Schnitt-, *314*
Schräg-, 232, 264, *280*, 291
Slant-, 232, 264, *280*
Smash-, *107*
Kohomologie, 232, 264, *280*, 291
Tensor-, *140*
*R*-Moduln, *198*
topologisches, 15, 75
Torsions-, *203*
Verschlingungs-, *317*
Wedge-, *61*, 107
Whitney-, *250*
Projektion
stereographische, 27, 60
Pullback, 134
Punkt
innerer, 102
Rand-, 102
Pushout, 26, 59, 60, 76, 105, 134

Quaternionen, 121
Quotient, 137
Homotopie-, *106*
Kettenkomplex, 184
nach Äquivalenzrelation, 24, 25
nach Gruppenwirkung, 43, *69*, 70–74

Rand, *6*
geometrischer, 80, 95, *101*
Kettenkomplex, *180*
Randoperator
zellulärer, 180–186
Rang
lokaler, *250*
Vektorbündel, *243*
Raum
Eilenberg-Mac Lane-, *193*
einpunktiger, 44
Hausdorff-, *8*, 9, 19, 20, 27, 32, 33, 38, 39, 70, 78, 101
schwach, *137*, 165–166
klassifizierender, *248*
kompakt erzeugter, *136*
kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-, 21, *137*, 165–166
metrischer, *3*, 8, 11, 20, 22, 36, 38, 40, 137
Moore-, *206*
Pfad-, 48, 157
projektiver, 41
komplex, 92, 183, 320
quaternionisch, 93, 183, 320
reell, 77, 183
punktierter, *44*, 61, 79
gut, 61, *103*
Schleifen-, *84*
simplizialer, 247
Thom-, *260*
relativer, 307
topologischer, *5*, 7
Vektor-, 7, 39, 42
dualer, 39
normierter, 1, 3, 36, 42
orientierter, 308
reduzieren, *siehe* kürzen
regulär, *9*, 28
vollständig, *9*
Retrakt, *45*, 53, 103
Abbildung, 126
Deformations-, *45*, 58, 60, 61, 149
starker, *45*
Umgebungs-, 103, 145
Morphismus, 126
Umgebungs-, *306*
Retraktion, *siehe* Retrakt
Ring
Koeffizienten-, 292
Kohomologie-, 234
Ringe
Borromäische, 60

Satz
Approximation
CW-, **151**
zelluläre, **147**
Ausschneidungs-
Homotopie, **94**, 105
stabile Homotopiegruppen, 112
Barratt-Puppe-Sequenz, **160**
Blakers-Massey, **94**, 105
Borsuk-Ulam, **53**, 75
Bott-Periodizität, **253**
Brouwer, **101**
Brouwer-Hopf, **98**
Brownscher Darstellungs-, 192, 238
Dualität
Lefschetz-, **312**
Poincaré-, **312**
Spanier-Whitehead-, **306**
Eilenberg-Zilber, 210
Eulerscher Polyeder-, 187
Exponentialgesetz, **21**, 143
abstraktes, **142**
Fixpunkt-

Banach, 1
Brouwer, 1, **53**, **99**
Lefschetz, **325**
Freudenthal, **109**, 111, 175
Fundamental-
Modellkategorien, 158
Fundamental- der Algebra, 75
Gabriel-Popescu, 169
Gauß-Bonnet-Chern, 328
Gysin-Sequenz, **319**
Hadamard-Cartan, 193
Heine-Borel, 18, 20, 31
Hilbert Basis-, 38
Homomorphie-, 170
Homotopiesequenz
Paar, **87**
Serre-Faserung, **89**
stabile, **111**
Hurewicz, **197**
Igel, **100**
Invarianz der Dimension, **101**
Künneth-Formel
algebraische, **211**
kohomologische, **230**, 297
topologische, **210**
Kervaire-Milnor, 2
Klassifikations-
Prinzipalbündel, 248
Vektorbündel, 249
Lebesgue, 20, 57
Liftungs-, **67**, 71, 90
Homotopie-, **51**, 67
Mayer-Vietoris, **173**, 222, 296
Metrisations-
Urysohn, 12, 28
Milnor, 154
Poincaré-Hopf, **327**
Pontryagin
$\pi_1^s(S^0)$, 122
Pontryagin-Thom, **261**
gerahmter Bordismus, **116**, 118
Quillen, 158
Röhrenumgebung, 261
Seifert-van Kampen, **57**, 58–61
Serre, 124
Thom-Isomorphismus, **309**
Transversalitats-, 259
Tychonoff, 20
universelle Koeffizienten
Homologie, **208**, 215, 277
Kohomologie, **228**, 277, 314
vom Igel, 2
Whitehead, **149**, 198
fur Spektren, **274**
Whitney-Einbettungs-, 256
Zwischenwert-, 53
Schleife, *46*, 67
Schleifenraum, 48, *84*
freier, 48
Schneeflockenkurve, 7
Schnitt, 91
Seite
offene, 85
Sequenz, *86*
Barratt-Puppe-, 160
Bockstein-, 219, 278
exakte, *86*, 125, 170
Homotopie-, *164*
kurze, *86*
lange, 171, 221
Faser-, 164, 278
Gysin-, **319**
Homologie-, 171, 277
Bockstein-, 219
Mayer-Vietoris-, **173**
Homotopie-
Faserungen, **89**
Kofaserung, 107
Paar, **87**
stabile, **111**, 172, 277
koexakte
Homotopie-, *161*
Kofaser-, 160, 189, 238, 275–278
Kohomologie-, 221, 277
Mayer-Vietoris-, 222
Mayer-Vietoris-, **173**, 222, 296
Puppe-, 238, 276
Sechs-Term-, 253
Signatur, 315
Skelett, 28, *29*, 146
Spektrum, 111, *190*
CW-
abzählbares, *270*
endliches, *270*
Eilenberg-Mac Lane-, *193*
Einhängungs-, *190*
Modul-, *290*
Moore-, *206*
Ω-, *190*
Ring-, *290*
Sphären-, 192
Suspensions-, *190*
Thom-
normales, *307*
Sphäre, 2, 27, 60, 66, 175, 223
Spur, *321*
Super-, 323
stetig, 3, 4, *6*, 13
am Punkt, 3, 37
Struktur
lineare
stabile , *257*
normale, *258*
stabile, *257*

Subbasis, *11*, 16, 21
Summe
  direkte, 39, 54, 170, 275
  topologische, *13*
  Whitney-, 250
  zusammenhängende, 315
Suspension
  reduzierte, *108*

Teilfolge, 18
Teilmenge
  offene, 27
Tensorprodukt
  $R$-Moduln, *198*
Topologie, *5*
  Box-, 17, 20
  CW-, 29, 30, 32, 34, 42
  diskrete, *5*, 11, 23, 24, 28, 29, 38, 50–52, 54
  Final-, *24*
  Identifizierungs-, *siehe* Quotienten-
  induzierte, 15, *24*, 41
  Initial-, *24*
  Klumpen-, *5*, 11, 17, 24, 38, 69
  koendliche, 37, 38
  koinduzierte, *24*, 26, 41
  Kolimes-, 27, 29, 31, 33
  kompakt erzeugte, *137*
  kompakt-offene, *21*, 22, 34, 40, 45, 48, 84, 143
  metrische, *4*, 39, 40
  Ordnungs-, 38
  $p$-adische, 40
  Produkt-, *15*, 20, 21, 24, 33, 34, 39, 40, 42, 43, 138
  Quotienten-, *25*, 26–28, 31, 33, 40–42, 59, 61, 69, 70, 79, 137
  Relativ-, *siehe* Unterraum-
  schwache, *26*, 29, 31, 33
  Spur-, *siehe* Unterraum-
  Summen-, *13*, 24, 137
  Unterraum-, *15*, 17, 24, 25, 27, 29, 30, 32, 39, 40, 45, 48, 76, 139
  Verklebungs-, 26, 29, 30, 40
  Zariski-, 37, 38
  zur Basis, *12*, 17, 72
  zur Subbasis, *12*, 16, 21
Tor, *203*
Torsion, 204, 316
Torus, 66
  Clifford-, 61
Totalraum, *91*
Träger, 245
Transformation
  natürliche, *81*, 171
Transposition, 233
transversal, 259
Trivialisierung, 114
  lokale, *91*

Überdeckung
  offene, *18*, 20, 57
  Teil-, 19
überlagert
  gleichmäßig, *50*, 68, 70, 72
Überlagerung, *50*, 52, 54, 66–74, 77, 90, 91
  $n$-zusammenhängende, 150
  normale, *70*, 71–74, 78
  universelle, *50*, 66, 71–74, 78
Umgebung, 4, *5*, 27, 37, 69
  abgeschlossene, 22
  kompakte, 20
  zusammenhängende, 24
    weg-, 24
Umgebungsbasis, 17, 30
Umlaufzahl, 43
Unterkategorie
  volle, 136
Untermannigfaltigkeit, 27
  $\mathbb{B}$-, *258*
  eigentliche, 259
  gerahmte, *114*
Unterraum, 17, 19, 139
Unterspektrum, *270*
  kofinales, *270*
unzusammenhängend
  total, *24*, 40

Verbund, 127, 247
Vereinigung
  disjunkte, 13, 17, 39, 137
Vererbung, 17, 25, 41, 70
Verkettung, *7*, 44, *46*

Weg, 23, 34, 36, 45, 46, 68
Wirkung
  Gruppen-, *69*, 70–74
    eigentlich diskontinuierliche, *69*, 70–71
    freie, *69*, 70–71
    stetige, *241*
Wort, 54
  gekürztes, 54
  reduziertes, 54, 55

Zahl
  Betti-, *187*, 314
  dyadische, 9
  Euler-, *187*, 314
  Lefschetz, *323*
Zelle, 28, *29*, 32, 146
  abgeschlossene, *29*, 146
  CW-Spektrum, *270*
zusammenhängend, *23*, 25, 35, 40, 66–74, 78
  einfach, *50*, 60, 66, 75
    semilokal, *71*, 74
  lokal, *24*
  $n$-, *93*, 148
  weg-, *23*, 25, 34–36, 40, 47, 48, 50, 57–68, 75
    lokal, *24*, 67–74

Zusammenhangskomponente, *24*, 74
  Weg-, *24*, 35, 40, 45, 48, 67, 73, 80
zusammenziehbar, *34*, 44, 45, 50, 51, 59–62, 83, 172
  lokal, *34*, 78
Zykel, *180*
  $\mathbb{B}$-, *262*
  gerahmter, *118*
Zylinder, 106, 156
  Abbildungs-, *103*
    reduzierter, 159
    relativer, 149
    Spektra, 274
  reduzierter, 106, 162