

Platonische Körper falten

Dr. Markus Junker

Mathematisches Institut, Albert–Ludwigs–Universität Freiburg, Eckerstraße 1, 79104 Freiburg

markus.junker@math.uni-freiburg.de

Oktober 2009

Ziel: Aus jeweils einem Blatt Papier werden ohne Hilfsmittel die platonischen Körper Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder und Würfel gefaltet.

Die Faltungen sind mathematisch korrekt (abgesehen von Faltungengenauigkeiten und Papierdicke) und verwirklichen weitgehend die folgenden ästhetische Kriterien: ganze, ungefaltete Außenflächen, keine klaffenden Kanten, Stabilität ohne Kleben.

Papier: Ich gehe jeweils von einem Blatt Papier im Din–Format (Seitenverhältnis $\sqrt{2} : 1 \approx 1,414$) aus. Din–A4 eignet sich am besten; Din–A3 und Din–A5 gehen aber auch. Schreibmaschinenpapier funktioniert gut; besser ist ein etwas festeres, aber nicht zu dickes und trotzdem glattes Papier, das klare Faltkanten ergibt.

Für Tetraeder und Ikosaeder wäre das Seitenverhältnis $\frac{5}{2\sqrt{3}} : 1 \approx 1,443$ ideal (das sind fünf Seitenlängen eines gleichseitigen Dreiecks mal vier Höhen). Bei einem A4–Blatt sollte man also idealerweise die schmalen Seiten um etwa 4 mm kürzen und das Format von 210×297 auf 206×297 verkleinern (insbesondere beim Ikosaeder auch für die Stabilität nützlich).

Für Oktaeder ideal wäre ein Seitenverhältnis $\frac{4}{5}\sqrt{3} : 1 \approx 1,386$ (das sind vier Höhen eines gleichseitigen Dreiecks mal zweieinhalb Seitenlängen). Da sich hier jedoch am Ende die fehlenden Teile im Innern befinden werden, ist die entsprechende Kürzung (der längeren Seite um 6 mm) nicht nötig.

Beim Würfel gehen alle Formate zwischen $4 : 3$ und $5 : 3$; ein etwas schmäleres Papier als Din–Format wäre angenehmer.

Bezeichnungen: Die Vorderseite des Blattes (dem Betrachter zugewandt) nenne ich auch die Innenseite, die Rückseite auch die Außenseite. „Falten nach innen“ bedeutet, das Blatt zu sich hin zusammenzufalten („ein Tal falten“). Entsprechend bedeutet „Falten nach außen“, das Blatt von sich weg zusammenzufalten („einen Berg falten“). Faltungen nach innen sind in den Faltmustern als durchgezogene Linien, Faltungen nach außen als gestrichelte Linien gezeichnet. „Oben“, „unten“, „rechts“ und „links“ beziehen sich auf das Blatt, wie es im Faltmuster liegt.

Wichtig für das Zusammenfalten und die Stabilität der Körper ist es, eine Faltkante nach Möglichkeit nur in die gewünschte Richtung vorzufalten, also möglichst wenige Kanten in beide Richtungen zu falten (ganz lässt sich dies nicht vermeiden).

Nach jedem Faltschritt sollte das Blatt wieder auseinandergefaltet werden, natürlich ohne Innen– und Außenseite zu tauschen.

Beim Oktaeder gebe ich Schritt für Schritt Anweisungen, wie man das Faltmuster erhält. Dazu habe ich manche Punkte mit Zahlen bezeichnet. Am Anfang hat man nur die Eckpunkte des Papiers; bei jedem Faltschritt entstehen aber neue Punkte (Schnittpunkt von zwei Faltlinien oder von einer Faltlinie mit einer Seite des Blattes). Bei den andern Körpern habe ich auf die ausführlichen Anweisungen verzichtet und gebe nur ein paar Hinweise, wie man das Faltmuster am besten erhält.

Am Ende ist dann auf dem Blatt ein Muster von Dreiecken (und beim Würfel Vierecken) entstanden. Diese bezeichne ich mit den im Faltmuster eingezeichneten Buchstaben. Es empfiehlt sich, beim ersten Falten alle Bezeichnungen auf Vorder- und Rückseite zu übertragen, damit man die Anweisungen gut nachvollziehen kann.

Noch ein Hinweis: die Faltmuster sind etwas verzerrt wiedergegeben, d.h. die gleichseitigen Dreiecke sind nicht wirklich gleichseitig gezeichnet. Das Faltmuster eignet sich also nicht dazu, kopiert zu werden.

Quellen: In einem Vortrag von Albrecht Beutelspacher habe ich gelernt, wie man 30° - bzw. 60° -Winkel und ein einfaches Tetraeder faltet. Dieses habe ich etwas verschönert und mir anschließend Oktaeder, Ikosaeder und Würfel selbst überlegt. Es ist nicht ausgeschlossen, dass andere ähnliche oder gar gleiche Verfahren gefunden haben. Die üblichen Verfahren bestehen allerdings darin, mehrere Papierstücke zusammenzustecken.

Es gibt einige Literatur über „mathematisches Origami“ und das Falten in der Mathematik, die ich leider nicht studiert habe. In einem Vortrag von Manfred Pietsch habe ich Hagas Methode zur Seitendrittung kennengelernt, die man beim Würfel einsetzen kann.

1 Oktaeder

Anleitung für das Faltmuster auf Seite 3, siehe auch die Fotos auf Seite 5:

- (1) „Das Blatt halbieren und vierteln“:

Zunächst die Mittellinie 3–10, dann die Viertellinien 2–11 und 4–9 falten.

- (2) „ 30° -Winkel zur linken Blattseite falten“

Oberes und unteres Viertel werden nun entlang der Linien 4–9 und 2–11 nach innen eingeklappt. Dann wird der Punkt 2 so auf die Mittellinie 3–10 gefaltet, dass der entstehende Falz durch den Punkt 4 läuft, dort also eine spitze Ecke entsteht. (Das macht man am besten so, dass man im Punkt 4 vorsichtig die spitze Ecke anfaltet und festhält, und dann Punkt 2 auf die Mittellinie schiebt, und dann erst den Falz fest durchzieht).

Dadurch erhält man die Linien 4–6 nach außen und 4–(13) nach innen, die allerdings im unteren Viertel nach 14 abbiegt.

Dann öffnet man das untere Viertel und faltet die Linie, die von Punkt 4 Richtung Punkt 13 ausgeht, bis zum Punkt 13 durch.

- (2*) Schritt (2) wird symmetrisch an der Mittellinie auf der andren Seite wiederholt. Dabei hat man einige Kontrolllinien mehr, z.B. kommt Punkt 4 genau auf den eingeklappten Punkt 13 zu liegen und Punkt 6 auf die Linie 4–9. So erhält man die Linien 2–7 und 2–14.

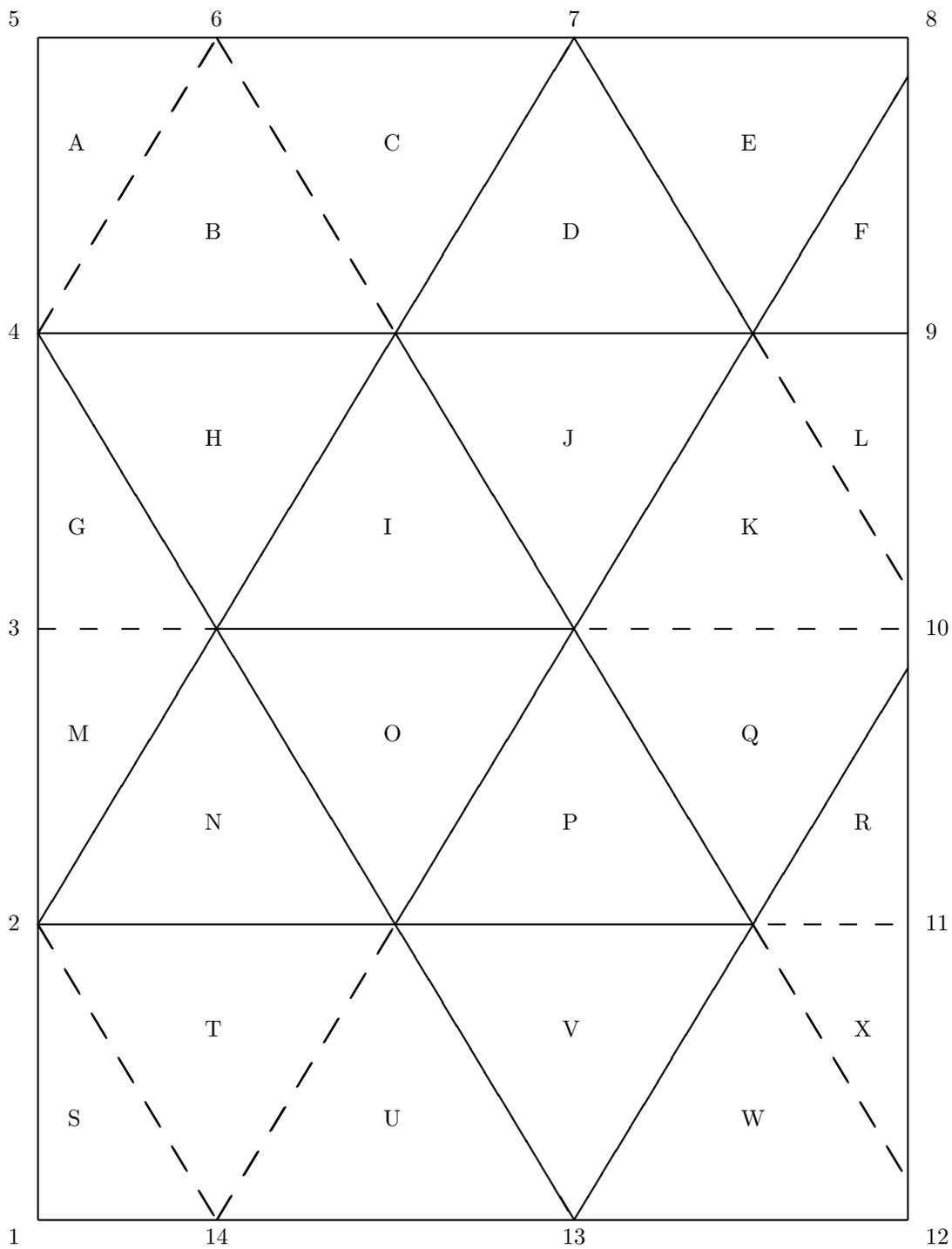


Abbildung 1: Faltmuster für das Oktaeder

(3) „Das Dreiecksmuster vervollständigen: erste Parallelen“

Punkt 13 auf Punkt 2 falten: dabei kommt der umgeklappte Teil der Linie 2–11 auf die Linie 13–4 zu liegen. Der entstehende Falz geht durch den Punkt 14 und durch den Schnittpunkt der Linien 2–11 und 13–4.

Achtung: bei einem Din-Blatt geht der neue Falz nicht durch den Punkt 8!

(3*) Das Gleiche auf der anderen Seite, also symmetrisch zur Mittellinie.

(4) „Das Dreiecksmuster vervollständigen: letzte Parallelen“

Nun die Ecke 12 so nach oben falten, dass der hochgefaltete Teil 12–13 der unteren Blattseite auf die Linie 13–4 kommt. Der entstehende Falz geht durch Punkt 13 und durch den Schnittpunkt der Linien 2–11 und 6–(12).

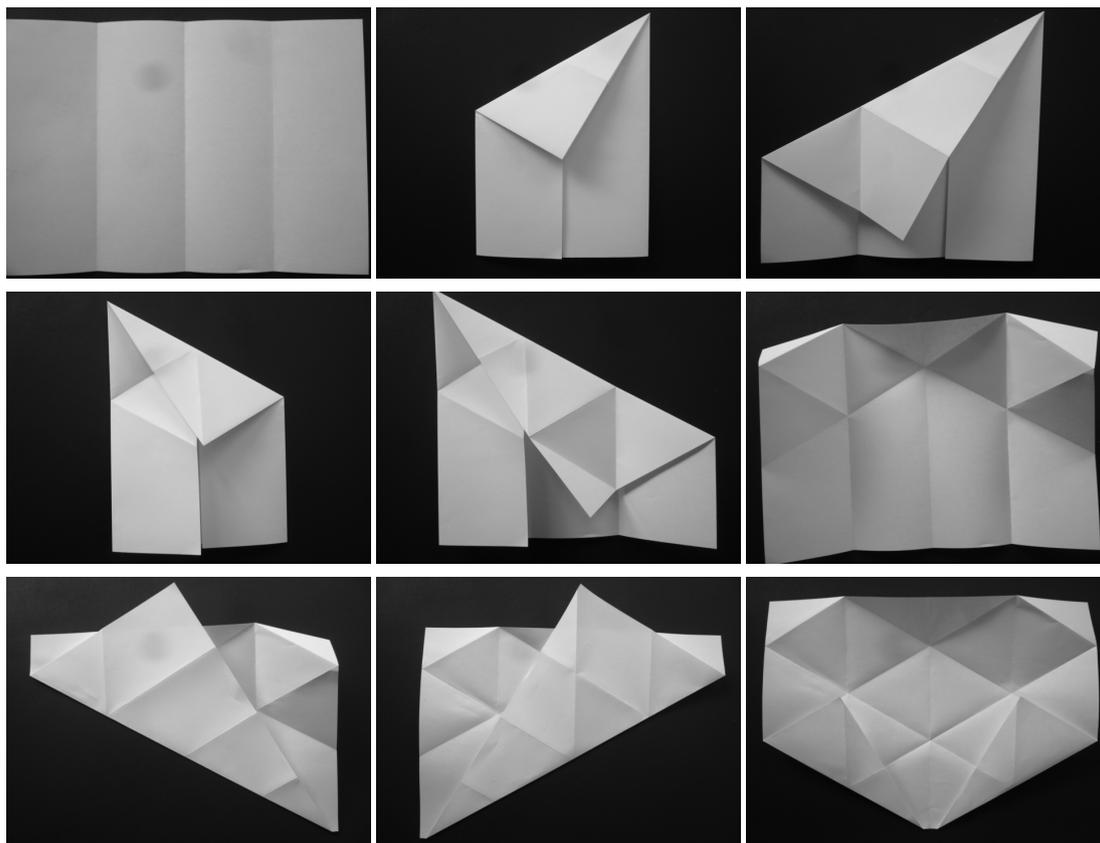
(4*) Und auch wieder das Gleiche symmetrisch zur Mittellinie auf der anderen Seite.

(5) Einige Linien müssen nun noch gemäß dem Faltmuster nach außen umgefaltet werden (im Faltmuster gestrichelt).

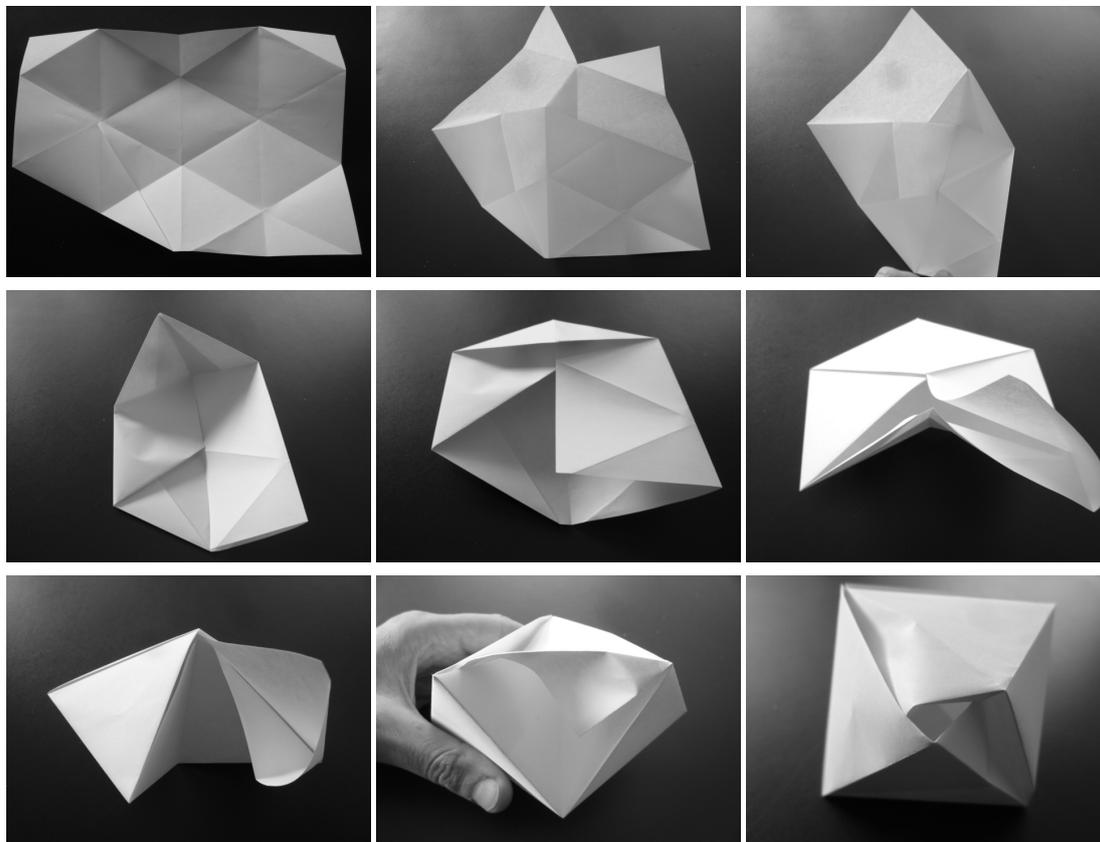
Anleitung zum Zusammenfalten (siehe auch die Fotos auf Seite 5):

- (1) Die rechte untere Ecke entlang der Linie 10–13 nach innen einschlagen.
- (2) Ecke 3 nach rechte innen auf die Mittellinie ziehen. G kommt dadurch auf M zu liegen. Der Zipfel G/M wird dann nach oben auf H gedrückt.
- (3) Das obere Viertel der Blattes wird nun entlang der Linie 4–9 nach innen bzw. unten eingeschlagen: der Zipfel G/M kommt unter B zu liegen.
- (4) Nun wird symmetrisch dazu (allerdings mit der in (1) eingeschlagenen Ecke) das untere Viertel der Blattes entlang der Linie 2–(11) nach innen bzw. oben eingeschlagen. Der Zipfel A wird dann durch T bedeckt, der Zipfel S liegt auf der anderen Seite. (Die drei Zipfel G/M , A und S sind also wechselseitig verzahnt, so dass diese Ecke gut zusammenhält.)
- (5) Nun wird alles flach gedrückt: es entsteht ein regelmäßiges Sechseck aus sechs gleichmäßigen Dreiecken mit dem halben gleichseitigen Dreieck F/L an der Ecke.
- (6) Das Gebilde wird nun wie eine Tasche geöffnet, in die man von rechts die Hand einschieben kann. Die Oberseite der Tasche wird im Uhrzeigersinn gebildet von den Flächen V, N, H, D, E, F ; auf der Unterseite hat man die Flächen L, K, J, I, O, P, Q .
- (7) Nun wird der Punkt 10 nach links innen zum Punkt 2 bewegt, dass K auf Q zu liegen kommt. Dabei entsteht eine „Kapuze“ aus den Flächen E, F, L .
- (8) *1. Methode (einfach, aber nicht so schön):*
Die Kapuze wird übergezogen, also i auf V , F auf P , L auf Q .
- (8') *2. Methode (etwas Fummelei, aber im Ergebnis schöner):*
Die Kapuze wird „untergezogen“, d.h. von der Idee her E unter V , F unter P , L unter Q . Die Außenseiten des Oktaeders sind dann D, H, I, J, N, O, P, V .

Falten: (Achtung, Fotos sind im Vergleich zur Anleitung nach rechts gedreht)



Zusammenstecken: (Achtung, Fotos sind im Vergleich zur Anleitung nach rechts gedreht)



2 Ikosaeder

Hinweise zum Faltmuster auf Seite 7:

Wieder faltet man zuerst die senkrechten Linien, dann das Dreiecksmuster (ähnlich wie beim Oktaeder). Schließlich die kurzen waagrechten Linien und die schrägen Linien nach außen. Diese sind Winkelhalbierende der Dreiecke (in der Zeichnung etwas verzerrt wiedergegeben). Um sie zu falten, muss man also gewisse Dreiecke mit anderen zur Deckung bringen. Die kurzen schrägen Falze sind spiegelsymmetrisch zum letzten Stück der langen schrägen Falze. Das ganze Faltmuster ist punktsymmetrisch bezüglich des Mittelpunkts.

Es ist besonders wichtig, die schrägen Falze und die kleinen waagrechten Linien mitsamt den sie umgebenden Dreiecken scharf in die richtige Richtung zu falten, damit diese beim Zusammenfalten von selbst die richtige Position einnehmen.

Anleitung zum Zusammenfalten:

Das Zusammenfalten ist etwas knifflig, erfordert Geduld und eventuell mehrere Anläufe!

- (1) Die Flächen F, F', F'' werden entlang der gestrichelten schrägen Winkelhalbierenden auf die Flächen K, K', K'' gelegt; dabei kommt auch H auf I und G auf J . Der nach innen ragende Teil wird nach links gelegt, d.h. F auf E usw.
 - (2) Nun werden B und C zusammengeführt. Dabei entsteht innen ein kleiner Zipfel, der senkrecht zur Mitte gehalten wird.
 - (1*), (2*) Die Schritte (1) und (2) werden auch auf der unteren Seite des Blattes ausgeführt.
 - (3) In (2) und (2*) sind oben und unten aus zwei Dreiecken gebildete Spitzen entstanden (A und J oben bzw. U und Z unten), die zusammengeführt und ineinandergesteckt werden: Auf einer Seite liegen drei Schichten übereinander; das Gegenstück auf der anderen Seite wird zwischen die mittlere und die unterste Schicht gesteckt. Es erfordert etwas Geduld und Geschick, dies auf beiden Seiten gleichzeitig zu tun.
 - (4) Nun hat man bereits ein erkennbares Ikosaeder; die Seiten müssen noch versorgt werden. Dazu legt man L auf M und schiebt den L/M -Zipfel unter E .
 - (5) N wird auf O und P auf Q gelegt; dadurch gleiten diese Zipfel ins Innere.
 - (4*), (5*) Auf der anderen Seite werden die zu (4) und (5) symmetrischen Schritte ausgeführt.
- Die Außenseiten des Ikosaeders sind dann die Außenseiten der mit einem Sternchen gekennzeichneten Flächen (A und U nur halb).

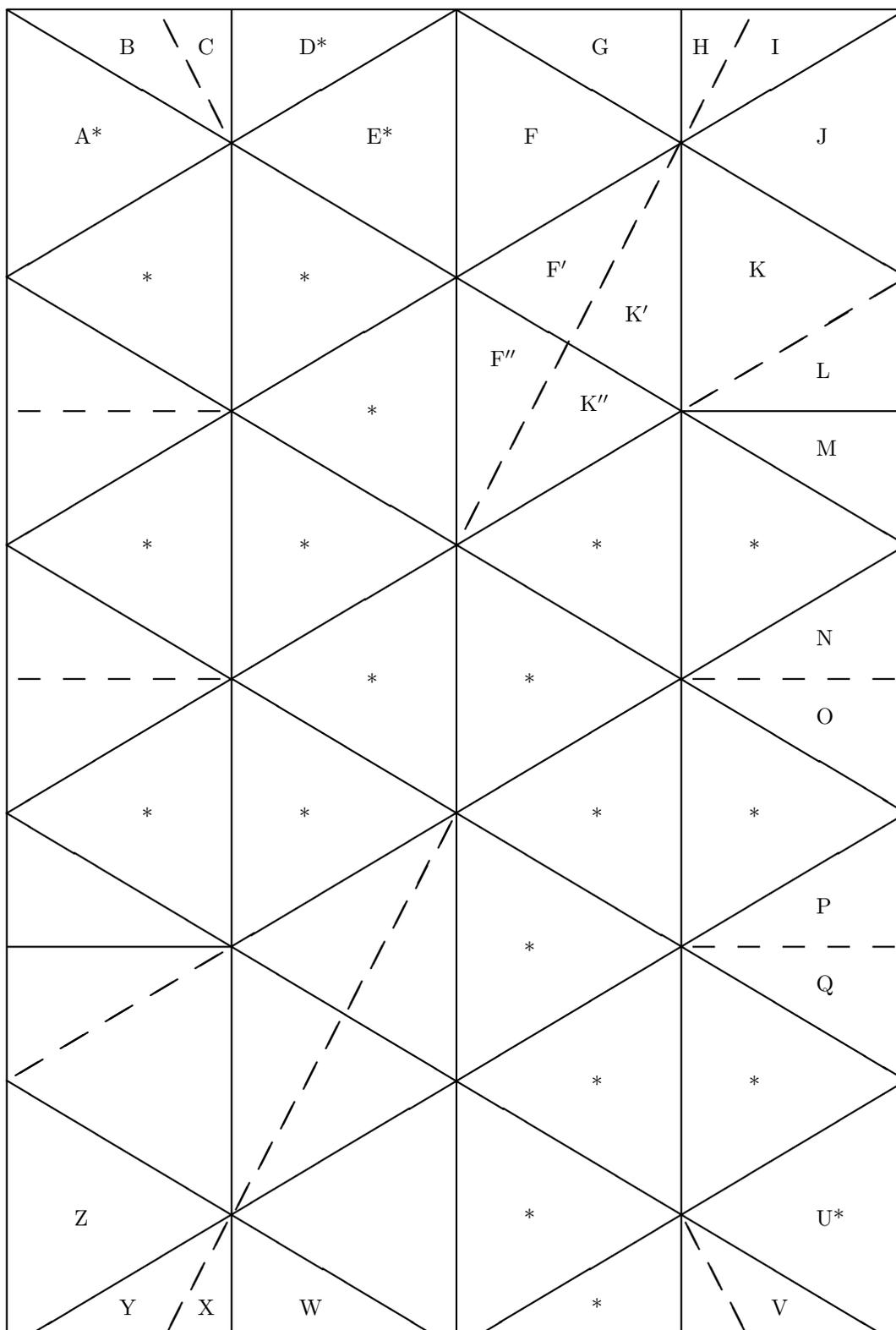
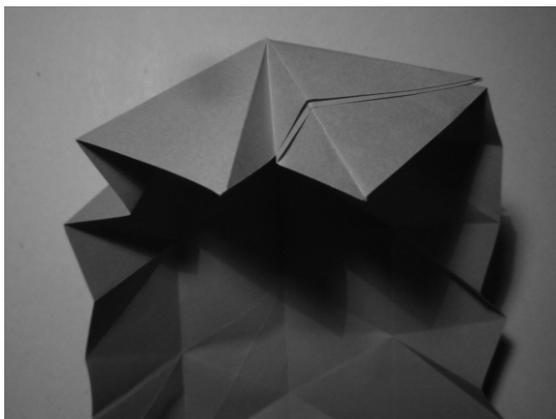
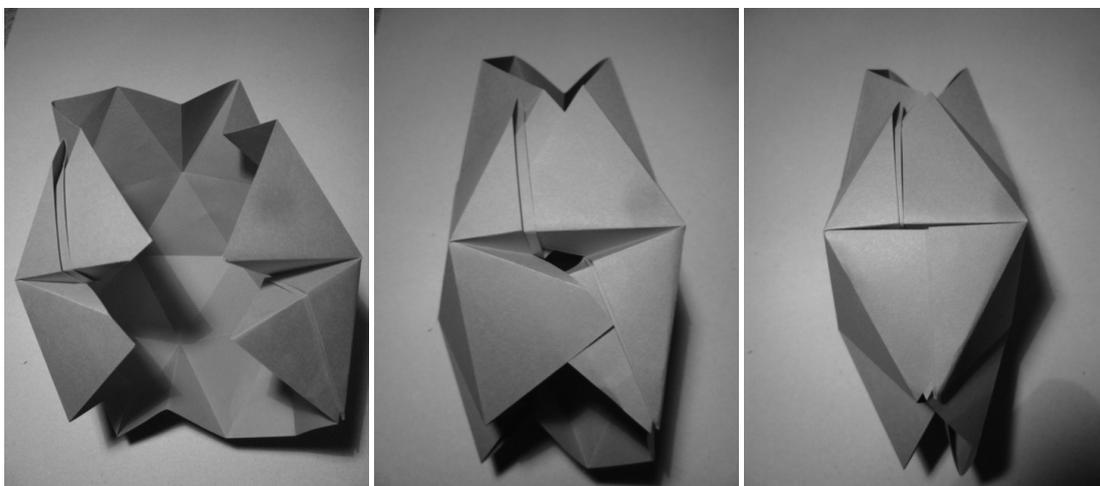


Abbildung 2: Faltmuster für das Ikosaeder

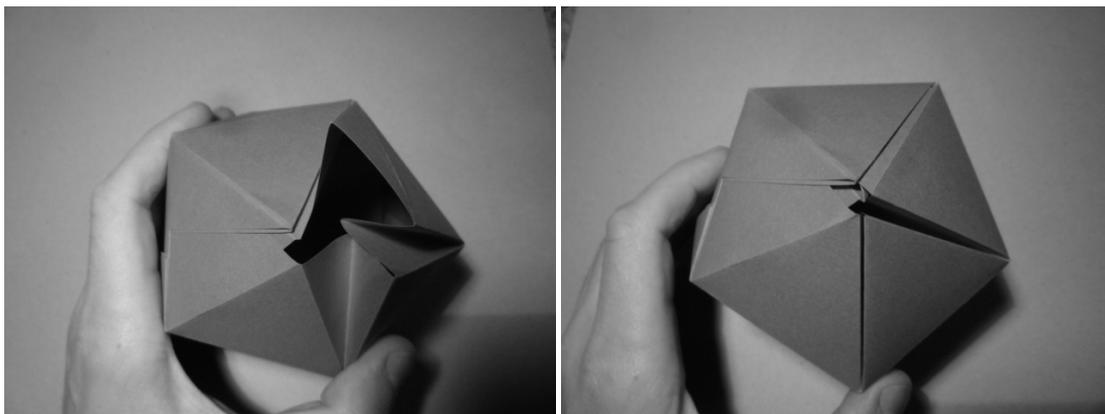
Spitze auf der einen Seite (vor dem Schließen):



Zusammenstecken der Spitzen:



Schließen der Seiten:



3 Tetraeder

Hinweise zum Faltmuster auf Seite 10:

Zunächst werden die Mitten der schmalen Blattseiten markiert (nicht durchfalten!). Alternativ kann man auch ein zweites, gleichgroßes Blatt in der Mitte zusammenfalten und als Schablone benutzen. Dann faltet man das linke und das rechte Viertel des Blattes zur Mitte. Die Linien im 30° -Winkel zur Horizontalen faltet man dann analog zum Oktaeder: Dazu muss man zunächst das rechte und linke Viertel einfalten, um die Mittellinie zu sehen, und faltet dann die linke obere Ecke des so entstandenen Streifens so auf die Mittellinie, dass der Falz durch die rechte obere Ecke geht. Mit geöffnetem Blatt setzt man dann das Dreiecksmuster nach unten fort. Für die unterste, nach links unten laufende Linie schlägt man vorher das linke Viertel ein, dann erhält man auch die kleine, nach außen gefaltete Linie links unten. Am Ende faltet man die drei kleinen horizontalen Linien und faltet, wo es nötig ist, Linien nach außen oder innen um.

Anleitung zum Zusammenfalten:

Variante 1 (mit ganzen Seiten)

- (1) Die rechte untere Ecke (N , T und U) wird eingeschlagen.
- (2) Dann wird die rechte Viertelseite (von O bis T) nach innen geschlagen.
- (3) Nun wird auch die linke Seite (von A bis H) nach innen eingeschlagen.
- (4) Nun werden die beiden schmalen Seiten zusammengeführt, dabei entsteht die Grobform des Tetraeders. Auf der rechten Seite wird S auf P gelegt und der obere Zipfel O zwischen T und U gesteckt und gut festgekniffen.
- (5) Auf der linken Seite wird G auf D gelegt und der untere Zipfel H zwischen B und C gesteckt. Anschließend wird noch die von A und I gebildete Lasche unter das Dreieck M gesteckt.

Variante 2 (nicht ganz so schön, aber etwas einfacher und manchmal etwas stabiler)

Die Schritte 1–4 sind im wesentlichen wie oben, allerdings kommt Schritt 3 vor Schritt 1 und 2. Schritt 5 dagegen sieht folgendermaßen aus:

- (5') Das große Dreieck M wird nun in die Lasche A/I hineingesteckt. Diese Seite des Tetraeders besteht dann also aus zwei Hälften.

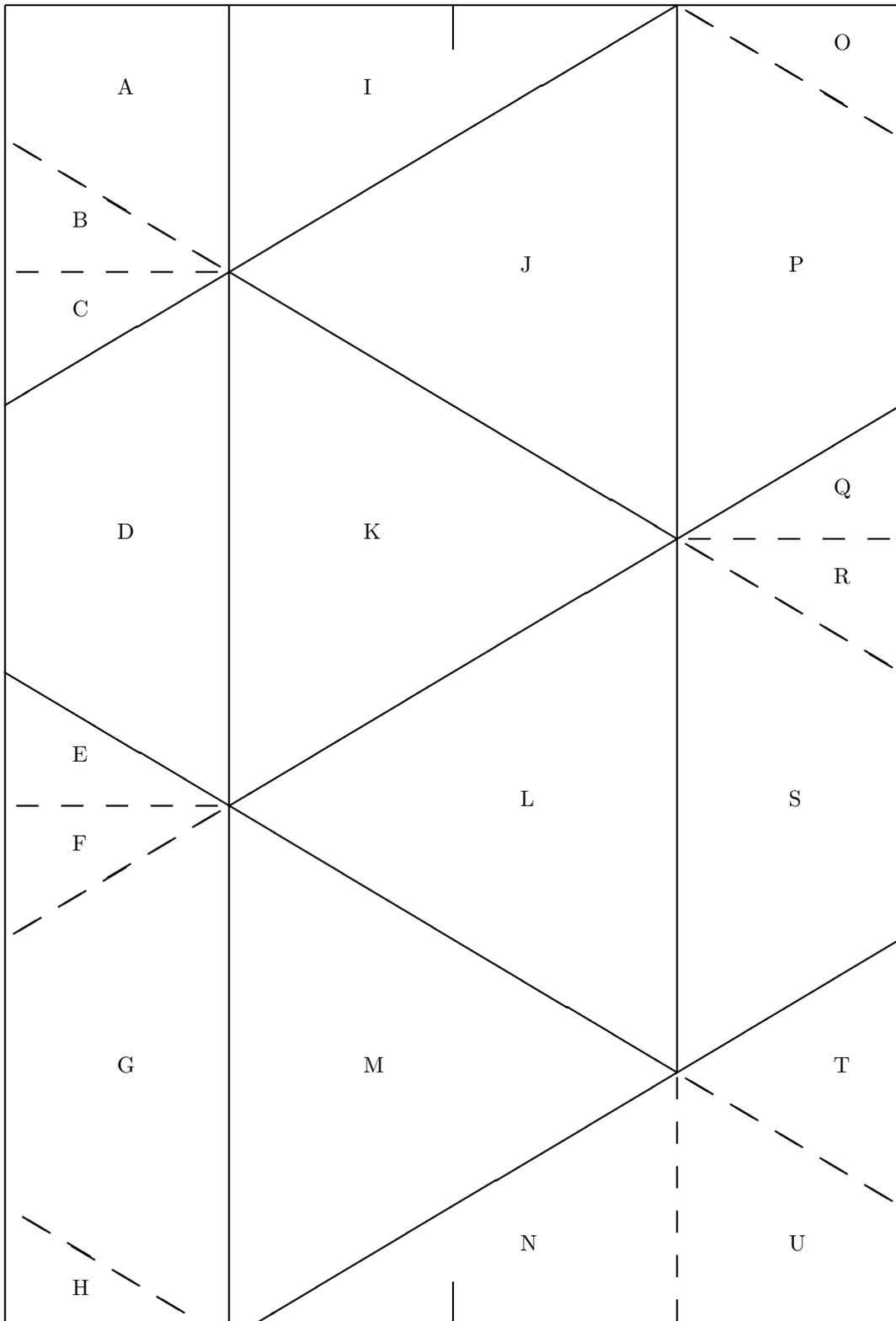
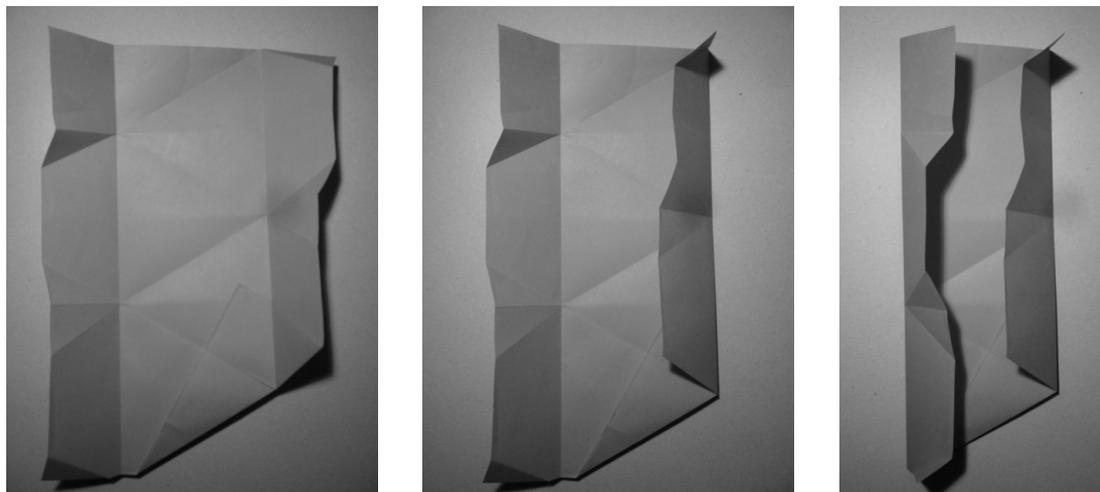


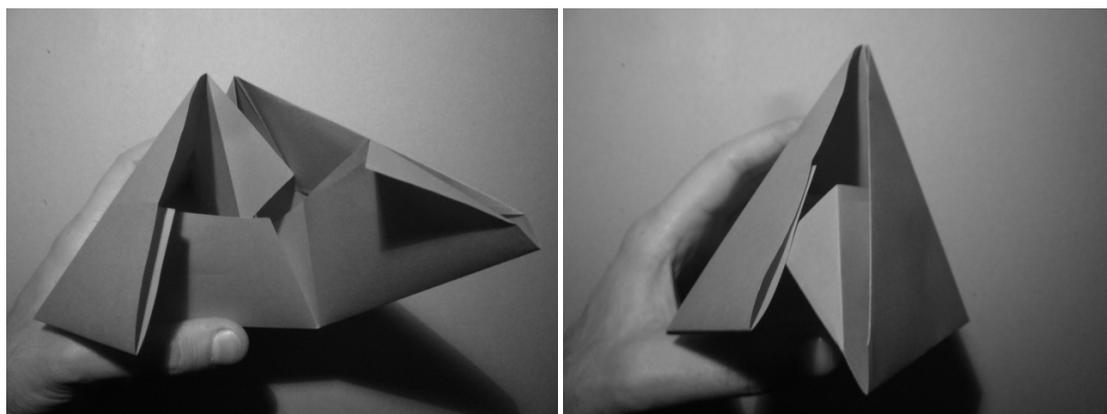
Abbildung 3: Faltmuster für das Tetraeder

Variante 1

Schritte (1) – (3), Einschlagen der rechten unteren Ecke, der rechten und der linken Seite:



Schritte (4) – (5), Zusammenführen des Tetraeders:



4 Würfel

Hinweise zum Faltmuster auf Seite 13:

Zunächst drittelt man das Blatt und faltet die senkrechten Linien. Dazu kann man entweder schummeln und ein Lineal zu Hilfe nehmen. Oder man benutzt Hagas Theorem zur Seitendrittteilung¹. In diesem Fall ist es günstig, die Seitendrittteilung auf einem Hilfsblatt gleicher Größe auszuführen, das man dann als Schablone einsetzen kann, auch für die waagrechten Linien.

Andernfalls bekommt man beim Falten der Diagonalen 1–4 und 2–5 zum einen die Punkte 4,5, zum andern kann man die Punkte 9 und 10 markieren. Dadurch erhält man die waagrechten Linien 3–6, 9–10. Wenn man diese beiden Linien aufeinanderfaltet, bekommt man 7–8 und kann die Punkte 11 und 12 markieren.

Anleitung zum Zusammenfalten:

Beim Würfel ist das Zusammenfalten etwas unangenehm; das Ergebnis finde ich weniger schön als bei Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder. Es gibt mit dem angegebenen oder ähnlichen Faltmustern verschiedene Möglichkeiten, die zu Dreieckszipfeln zusammengeschnittenen Quadrate ineinanderzustecken. Jeder möge hier gerne selbst experimentieren; wenn man den Würfel von innen nach außen stülpt und die Dreieckszipfel außen zusammensteckt, geht es leichter.

Da das Din-Format ein etwas größeres Verhältnis als 4 : 3 aufweist, bleibt ein schmaler Streifen, der ästhetisch unbefriedigend ist, weil er zu schmal ist, um in sich stabil zu bleiben. Auch hier gibt es verschiedene Varianten. Zum Beispiel könnte man ihn auch von vorneherein einklappen und so tun, als hätte man ein 4 × 3-Blatt. Dann ergibt sich allerdings eine klaffende Kante.

Hier nun eine Variante:

Ich gebe jeweils nur die linke Seite an; gleichzeitig muss spiegelsymmetrisch die rechte Seite gefaltet werden. (Die Erfahrung zeigt allerdings, dass es günstig ist, zunächst beide Seiten getrennt zusammenzufalten, dann jeweils die Falze feststreichen, und erst nach dieser Vorbereitung beide Seiten gleichzeitig zusammenzustecken).

- (1) Der untere Streifen wird eingeklappt: H_{innen} auf G_{innen} und J_{auen} auf H_{auen} . Dadurch entsteht im Punkt 13 eine Würfecke.
- (2) F_{auen} wird auf G_{auen} gelegt und F_{innen} auf E_{innen} gelegt. Dadurch entsteht im Punkt 14 eine Würfecke.
- (3) D_{auen} wird auf C_{auen} gelegt und D_{innen} auf H_{auen} und Teile von G_{innen} und E_{innen} . Dabei kommt J_{auen} auf C_{innen} zu liegen. Dadurch entsteht im Punkt 15 eine Würfecke.
- (4) Schließlich wird A_{innen} auf B_{innen} gelegt und der Zipfel A/B so eingesteckt, dass A_{auen} auf E_{innen} liegt und B_{auen} auf F_{innen} . Dabei entsteht in Punkt 4 die letzte Würfecke.

Die Außenflächen des Würfels sind dann E, K, L, M, N, P .

¹Man faltet zunächst das Blatt zu einem Quadrat, dessen Seiten die Länge haben, die man dritteln möchte. Dann faltet man die senkrechte Seitenhalbierende und anschließend die rechte untere Ecke des Quadrats auf den oberen Endpunkt der Seitenhalbierenden. Die hochgefaltete untere Quadratseite schneidet dann die linke Quadratseite im Verhältnis 2 : 1.

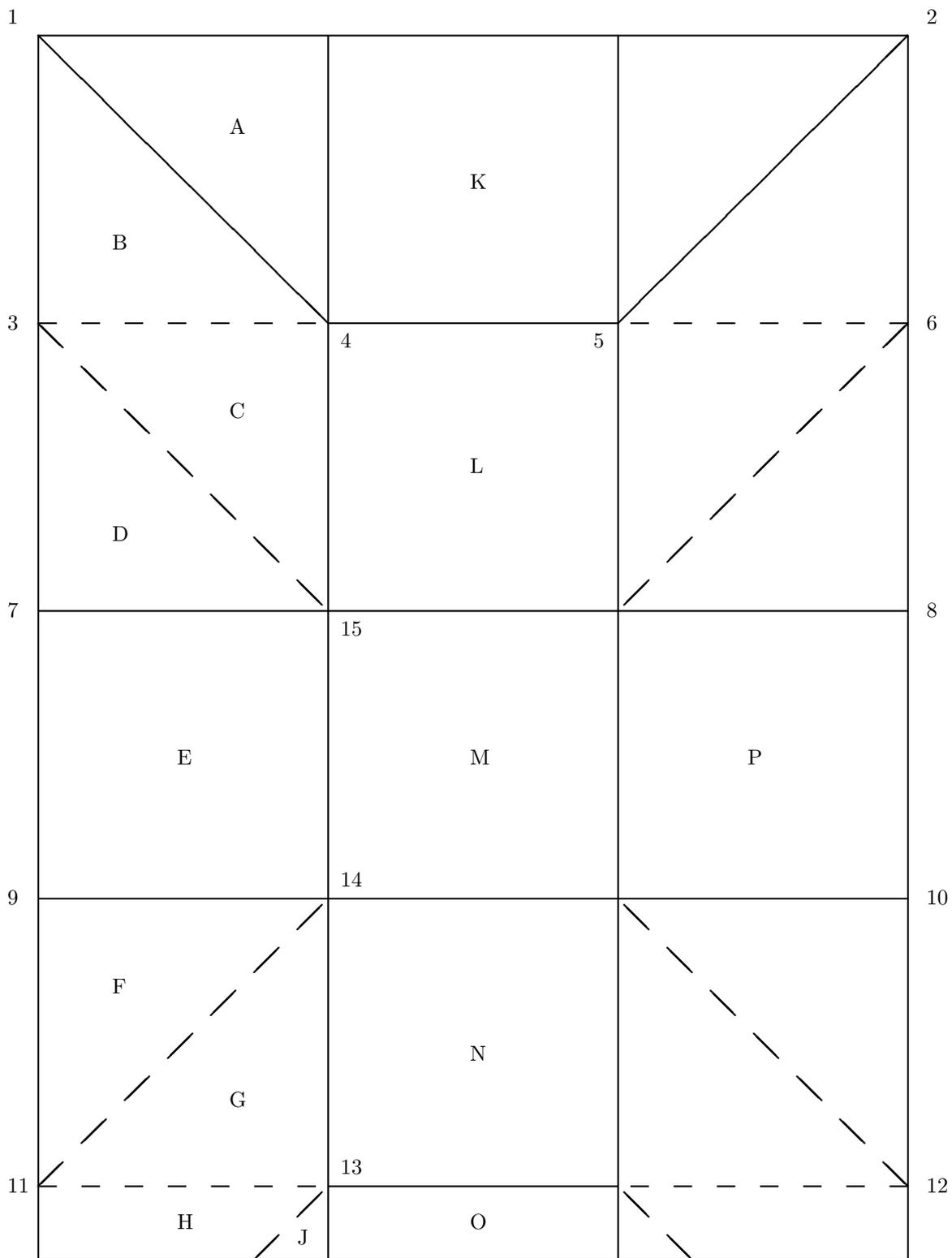


Abbildung 4: Faltmuster für den Würfel:

