Université Denis Diderot — Paris VII

Thèse de Doctorat — Mathématiques

Spécialité : Logique et fondements de l'informatique

Markus Junker

Géométries de Zariski et Groupes de Zariski

Directeur de thèse :		Jury :
Daniel Lascar		Elisabeth Bouscaren
		Marc Hindry
Rapporteurs :		Daniel Lascar
Dave Marker	soutenue le	Bruno Poizat
Bruno Poizat	4 juillet 1996	Martin Ziegler

Remerciements

Zunächst möchte ich ganz besonders allen Sekretärinnen danken, die durch ihre Freundlichkeit und Hilfsbereitschaft es mir ermöglicht haben, die bürokratischen Hindernisse auf dem Weg zur Promotion zu übersteigen: Ursula Dieter, Martine Labruyère, Claude Orieux und Michèle Wasse.

Die Finanzierung meines Studiums erfolgte hauptsächlich durch meine Eltern, ein Teil wurde von der Studienstiftung des deutschen Volkes getragen. Dem CIES Jussieu verdanke ich eine halbe ATER–Stelle nach Ablauf meiner Allocation de recherche.

Die Unterstützung und Hilfe meiner Familie, aller meiner Freunde und Kollegen war unerläßlich für den erfolgreichen Abschluß — ihnen sei allen herzlichst gedankt (insbesondere dem Büro 507 für Zerstreuung und Ernährung während der widrigen Zeit des Aufschreibens). Der freundliche Empfang und die angenehme Arbeitsatmosphäre in der Pariser Logik–Gruppe und im gesamten Fachbereich Mathematik, wie auch dieses Jahr im IUT Villetaneuse, haben daran keinen unerheblichen Anteil.

Luck Darnière hat die große Mühe auf sich genommen, die ganze Arbeit auf sprachliche Fehler und Unsauberkeiten hin durchzusehen. Allen anderen Kollegen, welche mir bei sprachlichen Fragen geholfen haben, möchte ich hiermit ebenfalls danken.

Auf mathematischer Seite ist meine Arbeit in großem Maße der Pionierleistung von Hrushovski und Zil'ber verpflichtet. An Diskussionen mit Elisabeth Bouscaren, Marc Hindry, Anand Pillay und Bruno Poizat hat sie sehr gewonnen. Auch unserem Doktoranden–Seminar ist manche Anregung entwachsen.

Besonders bin ich Dave Marker und Bruno Poizat, welche die mühsame Aufgabe der Begutachtung meiner Dissertation auf sich genommen haben, zu Dank verpflichtet. Elisabeth Bouscaren, Marc Hindry, Bruno Poizat und Martin Ziegler sei für ihre Teilnahme an der Jury gedankt.

Das größte Vergnügen aber bleibt zum Schluß: ohne meinen Doktorvater, Daniel Lascar, wäre diese Arbeit nie zustande gekommen. Seine Hilfe war dafür unerläßlich, von der Wahl des Themas über unzählige Anregungen bis hin zur genauen Korrektur. Seine ständige Ansprechbarkeit und Hilfsbereitschaft und seine freundschaftliche Unterstützung haben mich äußerst beeindruckt.

Table des matières

Introduction **7**

0.1 Résumé 7

0.2 Zusammenfassung 8

0.3 Abstract 9

0.4 Introduction 10

I AXIOMES **17**

1 Prégéométries de Zariski **19**

1.1 Topologies Noethériennes 19

1.2 Familles de topologies noethériennes 23

1.3 Propriétés de la dimension 30

1.4 Définissabilité et additivité de la dimension 34

2 Théorie élémentaire **43**

2.1 Langages des géométries de Zariski 43

2.2 Prégéométries de Zariski élémentaires 49

2.3 Comparaison de topologies 53

2.4 Les géométries de Zariski 58

II CONSTRUCTIONS **63**

3 Variétés et Morphismes **65**

3.1 La catégorie des prévariétés 66

3.2 Variétés 76

3.3 Morphismes entre variétés 91

3.4 Variétés complètes 94

3.5 Variétés lisses 97

3.6 Passage aux extensions élémentaires 101

4 Exemples **105**

4.1 Exemples « naturels » 105

4.2 Contre-exemples 111

4.3 Constructions 114

III GROUPES **121**

5 Les groupes de Zariski **123**

5.1 Définition et propriétés fondamentales 123

5.2 Sous-groupes, actions de groupes et quotients 128

5.3 Lissité des groupes de Zariski 133

5.4 Complétude dans les groupes de Zariski 139

5.5 L'inexistence de mauvais groupes de Zariski 147

Appendice **155**

6.1 Notations 157

6.2 Bibliographie 159

6.3 Index 162

Index des définitions **162**

Introduction

0.1 Résumé

Les géométries de Zariski ont été introduites par E. Hrushovski et B. Zil'ber comme modèles abstraits de courbes algébriques pour disposer d'une classe de structures qui satisfasse à la trichotomie de Zil'ber. Dans ma thèse, je définis une généralisation de ces géométries de Zariski aux dimensions finies quelconques et j'en entreprends une étude systématique.

Une géométrie de Zariski est donnée par une famille de topologies noethériennes telle que la dimension topologique vérifie certaines propriétés de la dimension en géométrie algébrique (chapitre 1). De plus, on exige que les propriétés importantes passent aux extensions élémentaires. Les géométries de Zariski sont alors des structures $\aleph_0$-stables où les propriétés topologiques et modèle–théoriques sont fortement liées (chapitre 2).

À part les structures triviales et linéaires, la classe d'exemples la plus importante est formée des variétés algébriques sur un corps algébriquement clos (chapitre 4).

Une description structurelle des géométries de Zariski demande une connaissance profonde des structures qui y sont interprétables. Le comportement des topologies sur les ensembles d'imaginaires s'avère être assez complexe. Cette analyse mène à une définition de variété au-dessus d'une géométrie de Zariski et à la notion appropriée de morphisme. Les types de variétés les plus importantes, les variétés lisses et les variétés complètes, sont étudiés à part (chapitre 3).

Comme application des techniques développées jusqu'ici, je démontre un théorème de structure pour les groupes de Zariski (qui sont définis au-dessus des géométries de Zariski comme les groupes algébrique le sont au-dessus d'un corps). Je montre qu'il n'existe pas de mauvais groupe de Zariski lisse. Moyennant un théorème de Zil'ber, ceci implique que tout groupe de Zariski simple et lisse interprète un corps algébriquement clos. Ce théorème prouve la moitié de la conjecture de Cherlin pour les groupes de Zariski lisses et fournit presque une caractérisation abstraite des groupes algébriques simples.

0.2 ZUSAMMENFASSUNG

Zariski–Geometrien wurden von E. Hrushovski und B. Zil'ber eingeführt als abstrakte Modelle algebraischer Kurven, um über eine Klasse von Strukturen zu verfügen, in denen die Zil'bersche Trichotomie gilt. In meiner Doktorarbeit definiere ich eine beliebig endlich–dimensionale Verallgemeinerung jener Zariski–Geometrien und beginne eine systematische Untersuchung dieser Strukturen.

Eine Zariski–Geometrie ist eine durch mehrere noethersche Topologien bestimmte Struktur, in denen der topologische Dimensionsbegriff Axiomen genügt, welche Eigenschaften der Dimension in algebraischen Mannigfaltigkeiten sind (Kapitel 1). Außerdem wird gefordert, daß die wichtigsten Eigenschaften unter elementaren Erweiterungen erhalten bleiben. Zariski–Geometrien sind dann $\aleph_0$-stabile Strukturen, in denen die topologischen Eigenschaften eng mit den modelltheoretischen verwoben sind (Kapitel 2).

Neben trivialen und linearen Strukturen bilden algebraische Mannigfaltigkeiten über algebraisch abgeschlossenen Körpern die wichtigste Beispielklasse (Kapitel 4).

Eine strukturelle Beschreibung der Zariski–Geometrien verlangt eine genaue Kenntnis der darin interpretierbaren Strukturen. Das Verhalten der Topologien auf definierbaren Mengen imaginärer Elemente erweist sich als sehr komplex. Aus diesen Untersuchungen ergibt sich eine Definition von Mannigfaltigkeiten über Zariski–Geometrien und der zugehörigen Morphismen. Als wichtige Typen werden glatte und vollständige Mannigfaltigkeiten definiert und gesondert betrachtet (Kapitel 3).

Als Anwendung der bislang entwickelten Techniken beweise ich einen Struktursatz für Zariski–Gruppen. Dabei sind Zariski–Gruppen in gleicher Weise über Zariski–Geometrien definiert wie algebraische Gruppen über Körpern. Ich zeige, daß keine sogenannten schlechten glatten Zariski–Gruppen existieren. Mit Hilfe eines Satzes von Zil'ber besagt dies, daß jede einfache glatte Zariski–Gruppe einen algebraisch abgeschlossenen Körper interpretiert. Damit ist Cherlins Vermutung für glatte Zariski–Gruppen zur Hälfte bewiesen, und fast eine abstrakte Charakterisierung einfacher algebraischer Gruppen über algebraisch abgeschlossenen Körpern gewonnen.

0.3 Abstract

Zariski geometries were introduced by E. Hrushovski and B. Zil'ber as abstract models of algebraic curves to get a class of structures where the Zil'ber trichotomy holds. In my thesis, I define a higher dimensional generalization of the notion of Zariski geometry and I start the systematic study of these structures.

A Zariski geometry is given by a family of Noetherian topologies such that the topological dimension shares several properties of the concept of dimension in algebraic geometry (chapter 1), and such that the essential properties are preserved under elementary extensions. It follows that Zariski geometries are special $\aleph_0$-stable structures where topological and model theoretical properties are closely linked (chapter 2).

Besides trivial and linear structures, algebraic varieties over algebraically closed fields form the most important class of examples (chapter 4).

A structural description of Zariski geometries requires a deep knowledge of the interpretable structures. Chapter 3 of this thesis shows that the topological behaviour of imaginary sets is quite complex. This analysis leads to the definition of a variety over a Zariski geometry and to the appropriate notion of morphisms. Special important types of varieties are smooth and complete varieties. They are defined and studied separately.

As an application of the techniques developed so far, I prove a structure theorem for Zariski groups (defined over Zariski geometries as algebraic groups over fields), namely that there are no bad smooth Zariski groups. Combinig this result with a theorem of Zil'ber, one concludes that every simple smooth Zariski group interprets an algebraically closed field. This proves one half of Cherlin's conjecture for smooth Zariski groups and almost provides an abstract characterization of simple algebraic groups over algebraically closed fields.

0.4 INTRODUCTION

UN PEU D'HISTOIRE ...

L'objectif de la théorie de la stabilité (ou de la théorie des modèles en général) est la classification et la description des modèles d'une théorie élémentaire (que l'on supposera complète du premier ordre). Généralement on considère le théorème de Morley sur les théories κ-catégoriques comme la naissance de la théorie de la stabilité ([Mo], 1965). Dans un premier temps, elle poursuivit la voie indiquée par ce théorème ; on introduisit différentes notions de « stabilité » d'une théorie, et selon la position d'une théorie par rapport à ces notions, on arriva à attribuer des invariants aux modèles d'une théorie et à les compter ainsi. Ce programme culmine dans le « théorème de structure–non-structure » de Shelah ([She], 1970–90).

Puis les logiciens appliquèrent les nouvelles notions et techniques à des « théories concrètes » et ils obtinrent des descriptions explicites des modèles dans certains cas. À citer le théorème de Macintyre sur les corps $\aleph_0$-stables ([M2], 1971) et la description des groupes (fortement) minimaux par Reineke ([R], 1975). Cherlin attaqua alors le cas plus général des groupes $\aleph_0$-stables de petit rang de Morley. Suite à ses travaux, il établit la conjecture suivante, dite « de Cherlin » ([Ch1], 1979) :

> *Tout groupe $\aleph_0$-stable simple est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos (interprétable dans le groupe).*

Elle est rendue plausible par le fait que beaucoup de propriétés des groupes algébriques se généralisent au cas des groupes $\aleph_0$-stables de rang fini ; p.ex. la définissabilité et l'additivité du rang (= la dimension), l'existence d'une composante connexe [M1], la définissabilité de certains sous-groupes (venant du théorème des indécomposables de Zil'ber [Z2]).

Moyennant un théorème de Zil'ber [Z3] qui permet d'interpréter un corps algébriquement clos dans tout groupe $\aleph_0$-stable de rang fini, connexe, résoluble et non nilpotent, la conjecture de Cherlin se décompose naturellement en deux parties : prouver l'inexistence des « mauvais groupes » où tout sous-groupe définissable connexe et résoluble est nilpotent ; puis montrer que le groupe est algébrique sur le corps qu'il interprète. Ces deux questions sont encore ouvertes.

En même temps, Zil'ber, qui venait de démontrer qu'une théorie totalement catégorique n'est pas finiment axiomatisable, commença à étudier les théories $\aleph_1$-catégoriques en général. Elles sont largement déterminées par leurs parties fortement minimales dont chacune donne lieu à une géométrie combinatoire en considérant l'opération de clôture algébrique.

Zil'ber montra que l'on peut distinguer trois types de théories $\aleph_1$-catégoriques suivant les géométries combinatoires que l'on y trouve : elles sont ou bien toutes triviales (et aucun groupe infini n'est interprétable dans la structure), ou bien elles sont toutes localement modulaires non triviales (et on peut interpréter des groupes infinis, mais pas de corps infini), ou bien toutes les géométries sont non localement modulaires. Zil'ber conjectura alors que dans le troisième cas, un corps infini (donc algébriquement clos) était interprétable dans la structure, et que la structure venait essentiellement de ce corps ([Z1], 1983). Cette conjecture rejoint celle de Cherlin vu qu'un groupe $\aleph_0$-saturé simple est une structure $\aleph_1$-catégorique non localement modulaire.[1]

L'essentiel de cette « conjecture de Zil'ber » est donné par la version suivante qui porte uniquement sur les structures fortement minimales :

> *Une structure fortement minimale non localement modulaire est bi-interprétable avec un corps algébriquement clos.*

De nouveau, la conjecture comporte deux parties : trouver un corps à l'intérieur de la structure fortement minimale ; puis re-interpréter la structure dans le corps.

Contrairement au cas des groupes, les deux parties ont été réfutées par Hrushovski vers la fin des années 80. Dans [Hr2] il construit une structure fortement minimale non localement modulaire qui n'interprète même pas de groupe infini ; puis dans [Hr1] il donne un exemple d'une structure fortement minimale qui interprète deux corps algébriquement clos de caractéristiques différentes — la structure n'est donc certainement pas interprétable dans un des deux corps.

Les géométries de Zariski

Puis Hrushovski et Zil'ber cherchèrent des conditions supplémentaires pour qu'une structure fortement minimale non localement modulaire soit bi-interprétable avec un corps infini (donc algébriquement clos). Si c'est le cas, alors la structure est à peu de choses près une variété sur ce corps, en particulier il existe une topologie sur la structure, à savoir la topologie de Zariski.

L'idée d'ajouter ces topologies, c.-à-d. de distinguer parmi les ensembles définissables certains que l'on appelle « fermés », s'est avérée fructueuse. Dans [HZ2] et [HZ1], Hrushovski et Zil'ber définissent des structures fortement minimales particulières qu'ils ont appelées des « géométries de Zariski », et ils arrivent à démontrer qu'une géométrie de Zariski non localement modulaire interprète un corps algébriquement clos. En outre, la géométrie de Zariski

1. Alors que la conjecture de Cherlin est toujours ouverte, Baudisch a récemment construit un groupe $\aleph_1$-catégorique nilpotent non localement modulaire qui n'interprète pas de corps infini ([Bau], 1995).

est bi-interprétable avec ce corps si et seulement si une certaine condition géométrique est satisfaite, à savoir que la géométrie est « très ample » (voir [HZ2]).

Intuitivement, les géométries de Zariski axiomatisent les topologies de Zariski des courbes algébriques ; elles caractérisent abstraitement une classe de courbes algébriques contenant toutes les courbes sans singularités. Techniquement, une géométrie de Zariski est la donnée d'une structure fortement minimale Z et d'une topologie noethérienne sur chaque Z^n telles que trois conditions soient vérifiées :

- les parties définissables sont exactement les combinaisons booléennes de fermés ;
- les topologies sont « compatibles » entre elles (cf. 1.12) ;
- les fermés satisfont à une certaine condition sur la dimension des intersections.

Les géométries de Zariski n'ont pas seulement fait avancer la classification des structures fortement minimales ; Hrushovski les a remarquablement utilisées dans sa preuve de la conjecture de Mordell–Lang [Hr3]. Ce sont deux raisons suffisantes pour s'intéresser de plus près à ces structures. Malgré la force de la théorie de Hrushovski–Zil'ber, plusieurs problèmes restent ouverts, et plusieurs questions nouvelles se posent, p.ex. :

- Peut-on étendre la définition des géométries de Zariski pour obtenir une caractérisation de toutes les courbes algébriques ?
- Peut-on généraliser la définition des géométries de Zariski à la dimension supérieure ?

De plus, on pourrait espérer qu'une étude détaillée des géométries de Zariski permette de simplifier la preuve du théorème de Hrushovski et Zil'ber ou d'en donner une démonstration plus transparente.

D'autre part, il serait intéressant de mieux comprendre l'importance des topologies que l'on ajoute aux structures. Beaucoup d'exemples de structures fortement minimales portent naturellement des topologies. Peut-on les caractériser ? Quelle est la propriété essentielle qui fait marcher la preuve de Hrushovski–Zil'ber ?

Une troisième direction de recherche est donnée par le parallèle entre les conjectures de Cherlin et de Zil'ber. Peut-on appliquer les techniques des géométries de Zariski avec le même succès au cas des groupes de rang fini ?

Description de la thèse

Dans mon travail, je suis parti des différentes définitions de « structures de Zariski » (à savoir les « Zariski geometries » et les « Zariski–type structures » respectivement de [HZ1] et de [Z4]). Le premier but était de trouver une bonne définition de géométries de Zariski de dimension supérieure, généralisant à la fois les « Zariski geometries » et les « Zariski–type structures » tout en gardant leurs propriétés essentielles.

Puis une grande partie de mon travail est consacrée à l'analyse des notions topologiques introduites dans le contexte de la théorie des modèles. Cela m'a naturellement conduit au problème difficile d'examiner la structure topologique sur les ensembles imaginaires pour dégager une bonne notion de « variété ».

Ensuite, comme illustration de l'utilité de ce travail, les notions et techniques développées sont appliquées aux groupes. Comme résultat principal je démontre qu'un groupe de Zariski simple et lisse interprète un corps algébriquement clos.

Plus en détail, le plan de la thèse est comme suit :

Le CHAPITRE 1 contient une première approche des géométries de Zariski. Une première section sert à introduire le vocabulaire topologique et les propriétés fondamentales des espaces topologiques noethériens. La deuxième section donne une définition de « prégéométries de Zariski » (définition 1.18). Cette définition rassemble le minimum d'axiomes de caractère topologico–combinatoire satisfaits par les topologies de Zariski des variétés algébriques permettant de parler de « structure de Zariski ».

Dans le premier chapitre on ne considère qu'une seule structure, il ne contient donc pas de théorie des modèles. En revanche, les propriétés qui vont jouer un rôle important dans la suite sont déjà analysées dans cette seule structure. En section 1.3, ce sont des propriétés de « richesse » des topologies, qui permettront de comparer la dimension topologique avec le rang de Morley d'une part, et qui, d'autre part, donneront aussi des informations sur la complexité de la géométrie, car aucune condition de non-trivialité ou de non-modularité n'est imposée dans la définition d'une prégéométrie. Finalement, la section 1.4 traite la définissabilité et l'additivité de la dimension, propriétés importantes pour la définition des géométries de Zariski.

Le CHAPITRE 2 étudie la théorie des modèles des prégéométries de Zariski. La première section introduit les langages appropriés pour les prégéométries de Zariski (définition 2.1) et examine les propriétés des prégéométries de Zariski qui passent aux extensions élémentaires. On peut caractériser les prégéométries de Zariski élémentaires (celles dont toutes les extensions élémentaires sont naturellement des prégéométries de Zariski) par une condition de chaîne (théorème 2.13).

Les prégéométries de Zariski élémentaires sont des structures $\aleph_0$-stables (théorème 2.16). Le reste du chapitre 2 relie des notions topologiques et des notions de stabilité. Certaines propriétés topologiques se traduisent dans le langage de la théorie des modèles et vice versa. Le lien le plus important est donné par le théorème 2.27, qui démontre que la trace des topologies d'un grand modèle sur un petit modèle donne exactement les topologies de celui-ci, ce qui généralise un résultat bien connu en géométrie algébrique.

La dernière section 2.4 reprend la définissabilité et l'additivité de la dimension, propriétés importantes en géométrie algébrique aussi bien que dans les structures fortement minimales (en particulier dans les « Zariski geometries »). C'est aussi un des axiomes dans la caractérisation des groupes de rang fini comme groupes de Borovik [P2]. Contrairement à ces cas, la définissabilité de la dimension n'est pas automatique dans les structures $\aleph_0$-stables quelconques ; il faut donc l'ajouter à la définition des géométries de Zariski (définition 2.39) qui ne sont autres que des prégéométries de Zariski élémentaires où la dimension est définissable et égale au rang de Morley. En revanche, l'additivité de la dimension se déduit des autres axiomes (théorème 2.41).

Le CHAPITRE 3 examine le comportement des topologies sur les éléments imaginaires, avec l'objectif de trouver une bonne notion de « variété », *i.e.* des ensembles imaginaires qui partagent les propriétés topologiques importantes avec la géométrie de Zariski de départ.

Un ensemble imaginaire muni d'une structure topologique qui vient naturellement de la géométrie de Zariski de base est appelée une « prévariété ». Malheureusement, il y a en général plusieurs possibilités de munir un ensemble imaginaire d'une structure de prévariété. Alors que ce phénomène n'a pas d'influence sur la définition des morphismes (définition 3.4), l'existence du produit n'est assurée que pour les « prévariétés admissibles » (théorème 3.10).

La section suivante (3.2) examine le passage des propriétés des géométries de Zariski aux prévariétés. La condition d'admissibilité est de nouveau utile pour résoudre le premier problème important : celui de l'élimination des quanteurs (théorème 3.29). L'additivité de la dimension nécessite l'introduction d'une condition supplémentaire, mais finalement on obtient une classe de prévariétés, appelées « variétés », qui se comportent bien (définition 3.36, théorèmes 3.38 et 3.39).

La section 3.3 met en évidence les propriétés des morphismes. Puis les sections 3.4 et 3.5 sont consacrées à deux types de variétés particulières : les variétés complètes et les variétés lisses. Les premières jouent un rôle important en géométrie algébrique (surtout dans la théorie des groupes algébriques), et aussi dans l'approche de Zil'ber des structures de Zariski [Z4], tandis que la lissité est essentielle dans les approches de [HZ1] et [Z4] aussi bien que dans l'étude des groupes de Zariski dans cette thèse. Finalement, la dernière section 3.6 expose le comportement des variétés et des morphismes quant au passage aux extensions élémentaires.

CHAPITRE 4 : Les premiers trois chapitres n'ont pas été accompagnés d'exemples, ils sont tous rassemblés dans ce chapitre 4. Évidemment, il n'y a que les exemples standard — une bonne partie des conjectures en question dit précisément qu'il n'y en a pas d'autres.

La deuxième section donne des exemples de structures qui sont presque des géométries de Zariski, c.-à-d. qui vérifient tous les axiomes sauf un ; ceci pour souligner la nécessité des axiomes. Puis, la dernière section de ce chapitre indique plusieurs constructions générales qui permettent de construire de nouvelles géométries de Zariski à partir d'une ou plusieurs géométries de Zariski données. Faute de place, elle ne contient que quelques constructions plutôt simples.

Enfin, le CHAPITRE 5 donne une application de tout ce qui a été développé jusqu'ici au cas des groupes. Comme les géométries de Zariski sont une version abstraite des variétés algébriques, les « groupes de Zariski » forment une version abstraite des groupes algébriques. Ceux-ci peuvent être définis de deux façons différentes. Soit on voit les groupes algébriques comme des variétés algébriques munies de deux morphismes, multiplication et passage à l'inverse d'une loi de groupe, et alors on définit en analogie les « groupes de Zariski » en remplaçant « variété algébrique » par « géométrie de Zariski ». Soit on les voit comme des groupes interprétables dans un corps algébriquement clos, et on peut considérer les groupes interprétables dans une géométrie de Zariski. Si l'on suppose que l'interprétation n'est pas quelconque, mais qu'elle donne une variété, alors on se trouve dans le cas des « variétés de groupes » qui sont également traitées.

La première section reprend quelques propriétés fondamentales des groupes algébriques. Quelques-unes de ces propriétés ont été généralisées auparavant au cas des groupes $\aleph_0$-stables de rang fini. Ce n'est donc ni le résultat, ni la preuve (souvent celle de la géométrie algébrique) qui présentent vraiment de l'intérêt, mais le fait de distinguer les propriétés entraînées par la seule structure topologique de celles qui nécessitent la structure algébrique.

La section 5.2 démontre que les sous-groupes définissables et les quotients par des sous-groupes définissables donnent des variétés. La lissité, condition essentielle, passe sans problème aux quotients ; pour les sous-groupes, il faut une condition supplémentaire : la « richesse » (section 5.3).

Une description structurelle des groupes de Zariski commence avec la section 5.4. Je démontre la généralisation de certains théorèmes de la géométrie algébrique : tout groupe de Zariski contient un unique sous-groupe définissable connexe maximal complet, qui est central (théorème 5.33) ; sous une condition de lissité, tout groupe de Zariski contient un unique sous-groupe minimal parmi les sous-groupes normaux définissables paraboliques (théorème 5.41). En revanche, le théorème de Borel affirmant que les sous-groupes définissables connexes résolubles maximaux sont exactement les sous-groupes paraboliques minimaux ne se démontre que dans le cas particulier d'un mauvais groupe (proposition 5.47). Toutefois, cela suffit pour prouver qu'il n'existe pas de mauvais groupe de Zariski lisse. Autrement dit, tout groupe de Zariski connexe, non nilpotent, lisse et riche interprète un corps algébriquement clos (théorème 5.48).

NOTATIONS

Une liste des notations se trouve à la fin de la thèse, pages 157 et 158. Les conventions les plus importantes sont les suivantes :

- Tout symbole de pré-ordre ressemblant au symbole d'inclusion est utilisé dans deux variantes :
  - l'une avec barre, comme « $\subseteq$ », incluant l'égalité ;
  - l'autre sans barre, comme « $\subset$ », désignant le pré-ordre strict associé.
- Les structures sont notées par des lettres gothiques $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$; leurs ensembles de bases par les lettres latines correspondantes M, N, V, W, X, Y, Z .
- « Définissable » veut toujours dire « définissable avec paramètres », sauf si le contraire (p.ex. « $\emptyset$-définissable ») est spécifié.
- Le signe « $\blacksquare$ » marque le début et la fin des preuves ; les démonstrations de faits ou de lemmes à l'intérieur d'une preuve sont entourées des signes « $\square$ ».

(Cette thèse a été écrite en LaTeX en utilisant french.sty (version 3.27) de Bernard Gaulle, commutative diagrams (version 3.83) de Paul Taylor et fancyheadings.sty (version 1.0) de Piet van Oostrum.)

Première partie

AXIOMES

Chapitre 1 Prégéométries de Zariski

1.1 Topologies Noethériennes

Cette première section est consacrée à l'introduction du vocabulaire topologique, qui est, ou bien standard, ou bien librement copié sur la géométrie. Les résultats fondamentaux concernant les espaces noethériens sont exposés ; ils seront constamment utilisés dans la suite sans mention particulière.

Je ne connais pas de référence qui traite les espaces noethériens en détails — on trouve beaucoup de propriétés dans les manuels de géométrie algébrique ou d'algèbre commutative, p.ex. [Ha] (chapitre 1, section 1) ou [Bbk] (chapitre 2, §4 n° 2). On y trouvera aussi la plupart des preuves, qui sont d'ailleurs souvent faciles (bien que quelques fois un peu astucieuses). Puisqu'elles apportent peu à la compréhension des géométries de Zariski, elles seront omises ici.

Définition 1.1 *Un espace topologique est* **noethérien** *ssi toute chaîne de fermés strictement descendante est finie.*

Quelques propriétés des espaces noethériens :

- Un espace topologique est noethérien ssi toute partie est quasi-compacte (pour la topologie induite).
- Un espace noethérien est Hausdorff (T_2) ssi il est fini et porte la topologie discrète.
- Une partie d'un espace noethérien (avec la topologie induite) est encore noethérien.
- Une image continue d'un espace noethérien est encore noethérien. (En particulier une topologie quotient reste noethérienne).

Une partie d'un espace topologique sera toujours considérée avec la topologie induite. Ainsi, si T est un espace topologique et X une partie de T, une expression comme « une partie U ouverte dans X » ou « U un ouvert de X » signifiera que U est ouvert pour la topologie induite.

Irréductibilité

Définition 1.2 *Une partie d'un espace topologique est* **irréductible** *si elle n'est pas réunion de deux sous-ensembles propres relativement fermés.*

Remarque : Pour des raisons pratiques, l'ensemble vide n'est pas considéré comme étant irréductible.

Fait 1.3 (Décomposition en composantes irréductibles) Toute partie X d'un espace noethérien est réunion de ses parties irréductibles maximales, appelées les **composantes irréductibles**. Elles sont en nombre fini et relativement fermées dans X.

Notation:

- Si X est irréductible, j'écris $Y \subset\subset X$ pour $Y \subseteq X$ et $\overline{Y} \subset \overline{X}$ (c.-à-d. Y n'est pas dense dans X ; dans un certain sens, Y est « petit » par rapport à X)
- $X = X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_k$ ou $X = \bigsqcup_{i=0}^{k} X_i$ signifie la décomposition de X en composantes irréductibles X_i.

Faits 1.4 (Propriétés des irréductibles)

- X est irréductible
  ssi toute partie ouverte non vide de X est dense dans X
  ssi l'intersection de deux ouverts non vides de X n'est pas vide.
- X est irréductible ssi $\overline{X}$ est irréductible.
  $X = X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_k$ ssi $\overline{X} = \overline{X_1} \sqcup \cdots \sqcup \overline{X_k}$.
- Si $X = X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_k$, alors l'ensemble des composantes irréductibles de $Y \cap X$ est inclus dans le réunion des ensembles des composantes irréductibles des $Y \cap X_i$.
- En particulier, un ensemble irréductible Y inclus dans X est inclus dans une composante irréductible de X.
- L'image continue d'un irréductible est irréductible.

Définition 1.5 *Une propriété des éléments d'un ensemble irréductible est dite* **génériquement vraie** *(ou une propriété générique) si elle est vraie pour au moins une partie ouverte non vide. Un élément est dit* **générique** *(par rapport à cette propriété) si la propriété est vérifiée dans un voisinage de cet élément.*

Ainsi une conjonction finie de propriétés génériques reste-t-elle générique et, dans un langage approprié, toute famille de propriétés génériques pourra être réalisée dans un espace suffisamment saturé.

Dimension

Fixons pour la suite un espace topologique noethérien T. Tous les ensembles considérés seront des parties de cet espace.

Définition 1.6 *Un* drapeau *(de longueur* α *) dans* X *est une chaîne* $X_0 \subset\subset \cdots \subset\subset X_\alpha$ *de parties irréductibles de* X *.*

Une chaîne $X_0 \subseteq \cdots \subseteq X_\alpha$ d'ensembles irréductibles est donc un drapeau ssi $\overline{X_0} \subset \cdots \subset \overline{X_\alpha}$. En particulier, tout drapeau dans X donne lieu à un drapeau de même longueur formé de fermés relatifs de X.

Définition 1.7 *La* dimension (topologique) *d'un ensemble* X *est définie par la récurrence suivante :*

- $\dim X \geqslant 0$ *ssi* $X \neq \emptyset$ *;*
- $\dim X \geqslant \alpha + 1$ *ssi il existe une partie* $Y \subset\subset X$ *telle que* $\dim Y \geqslant \alpha$ *;*
- *si* β *est un ordinal limite, alors* $\dim X \geqslant \beta$ *ssi* $\dim X \geqslant \alpha$ *pour tout* $\alpha < \beta$.

Alors on pose $\dim X = \sup\{\alpha \mid \dim X \geqslant \alpha\}$ *.*

En fait , si $\dim X \leqslant \omega$, alors $\dim X$ est le supremum des longueurs des drapeaux dans X.

Dans un espace noethérien, la dimension d'une partie quelconque est un ordinal bien défini. La dimension d'un ensemble X calculée en T est la même que celle calculée dans la topologie induite sur X. Par définition, on pose $\dim(\emptyset) = -\infty$.

On dit qu'un ensemble est de **dimension pure** k si tous ses composantes irréductibles sont de dimension k.

Si $X \subseteq Y$ sont des ensembles irréductibles (de dimensions finies), la **codimension** de X dans Y, notée $\operatorname{codim}_Y X$, est le supremum de longueur de drapeaux dans Y partant de $\overline{X} \cap Y$. Pour des ensembles X, Y quelconques, on pose $\operatorname{codim}_Y X := \min\{\operatorname{codim}_{Y_i} X_i \mid X = \bigsqcup X_i, Y = \bigsqcup Y_i, X_i \subseteq Y_i\}$.

Définition 1.8 *Une* hypersurface *de* T *est un fermé irréductible* H *tel que* $\dim H + 1 = \dim T$ *. L'ensemble des hypersurfaces de* T *est noté* $\mathcal{H}(T)$ *.*

Attention, un fermé irréductible de codimension 1 n'est pas forcément une hypersurface ! Ceci se produit uniquement si tout drapeau se complète en un drapeau de longueur $\dim T$. En particulier c'est le cas en géométrie algébrique où les topologies noethériennes sont caténaires, *i.e.* tous les drapeaux maximaux ont la même longueur.

Faits 1.9 (Propriétés de la dimension)

- $\dim X = 0$ ssi X est fini.

- $X_1 \subseteq X_2$ implique $\dim X_1 \leqslant \dim X_2$;
  si $F \subset X$, F fermé et X irréductible, alors $\dim F < \dim X$.
- $\dim(\bigcup_{i\in I} X_i) \geqslant \max_{i\in I}\{\dim X_i\}$ et on a égalité si chaque X_i est ouvert dans la réunion.
- $\dim X = \max\{\dim X_i \mid X = \bigsqcup X_i\}$;
  en particulier $\dim(F_1 \cup \cdots \cup F_k) = \max_{1\leqslant i\leqslant k}\{\dim F_i\}$ pour des fermés F_i.
- $\dim X + \operatorname{codim}_Y X \leqslant \dim Y$.

Ensembles constructibles

Définition 1.10 *Un ensemble* **constructible** *est un élément de l'algèbre de Boole engendrée par les fermés.*

Notation: Pour un ensemble X, soit $\partial^0 X := X$ et inductivement $\partial^{n+1}X := \overline{\partial^n X} \setminus \partial^n X$. De plus, soit $\partial X := \partial^1 X$.

Alors X est constructible ssi il existe n tel que $\partial^{n+1}X = \emptyset$. Le plus petit entier n est appelé **degré de constructibilité**. X est fermé ssi $n = 0$, et X est localement fermé (= intersection d'un fermé et d'un ouvert) ssi $n = 1$.

Faits 1.11 (Propriétés des constructibles)

- Tout ensemble constructible Q est réunion disjointe d'ensembles localement fermés, p.ex.
  $$Q = \bigcup_{i\geqslant 0} \overline{\partial^i Q} \setminus \overline{\partial^{i+1} Q}.$$
  En décomposant les $\overline{\partial^i Q}$ en composantes irréductibles, on obtient une écriture $Q = \bigcup_{\text{fini}}(F_i \setminus G_i)$ avec des fermés irréductibles F_i et des fermés $G_i \subset F_i$. Une telle écriture n'est pas unique, mais $\overline{Q} = \bigcup F_i$ et $\overline{\partial Q} = \bigcup G_i$.
- Tout constructible Q contient un localement fermé qui est dense dans $\overline{Q}$:
  $$\overline{Q} \setminus \overline{\partial Q} \;\subseteq\; Q \;\subseteq\; \overline{Q} \;=\; \overline{\overline{Q} \setminus \overline{\partial Q}}.$$
- Si $\overline{\partial^n Q} \neq \emptyset$, alors $\dim \partial^{n+1} Q \leqslant \dim \overline{\partial^{n+1} Q} < \dim \overline{\partial^n Q}$.
- Un ensemble quelconque ne peut pas être une réunion disjointe de deux parties denses relativement constructibles.

Une application entre espaces topologiques est dite **fermée** (**ouverte**, **constructible**) si l'image de tout fermé (ouvert, constructible) est encore fermée (ouverte, constructible).

Attention : une application **définissable** est une application dont le graphe est définissable.

1.2 Familles de topologies noethériennes

Si V est une variété algébrique, alors le produit V^n est naturellement muni d'une structure de variété. Mais en général la topologie de Zariski sur V^n est plus riche que la topologie produit de la topologie de Zariski sur V. C'est évident si V est une courbe C : les fermés de C sont les ensembles finis et C, mais déjà C^2 contient énormément de courbes qui ne sont pas de la forme $\{a\} \times C$ ou $C \times \{a\}$, p.ex. la diagonale $\Delta(C)$.

Toutefois, les topologies de Zariski sur V et sur V^n ne sont pas sans rapports, elles vérifient certaines propriétés de compatibilité. Si l'on veut modéliser abstraitement les variétés algébriques, on est obligé de se donner une topologie sur V^n pour tout n et d'exiger leur compatibilité.

Compatibilité

Définition 1.12

- *Une* **famille de topologies noethériennes** *de base* $\{T_i \mid i \in I\}$ *est la donnée d'une topologie noethérienne sur tout produit* $T_{i_1} \times \cdots \times T_{i_n}$ $(n \in \omega, i_j \in I)$.
- *Une* **application de compatibilité** *est une application* $f = (f_1,\ldots,f_m) : T_{i_1} \times \ldots \times T_{i_n} \to T_{j_1} \times \ldots \times T_{j_m}$ *telle que : soit* $f_k(t_1,\ldots,t_n) = a_k \in T_{j_k}$, *soit* $f_k(t_1,\ldots,t_n) = t_j$ *à condition que* $T_{i_j} = T_k$.
- *Les topologies d'une famille de topologies noethériennes sont compatibles, ou par abus, une famille de topologies noethériennes est* **compatible** *ssi toutes les applications de compatibilité sont continues.*

Cette définition est plus générale que ce qui est nécessaire pour la définition des prégéométries de Zariski où l'on aura une famille de topologies noethériennes dont la base est réduit à un ensemble. Mais les familles quelconques apparaissent naturellement, p.ex. dans le chapitre 3, où encore pour réduire le cas d'une géométrie de Zariski réductible aux géométries de Zariski irréductibles.

Les deux lemmes suivants donnent des versions plus intuitives de la compatibilité :

Lemme 1.13 *Une famille de topologies noethériennes de base* $\{T_i \mid i \in I\}$ *est compatible ssi pour tout* n *et tous* $i_0, \ldots, i_n \in I$, *les application suivantes sont continues :*
- les projections

$$\pi : T_{i_0} \times T_{i_1} \times \ldots \times T_{i_n} \to T_{i_1} \times \ldots \times T_{i_n}\,,\ (t_0, t_1,\ldots,t_n) \mapsto (t_1,\ldots,t_n)\ ;$$

- *les permutations*

$$\bar\sigma : T_{i_1} \times ... \times T_{i_n} \to T_{i_{\sigma 1}} \times ... \times T_{i_{\sigma n}}\ ,\ (t_1,..., t_n) \mapsto (t_{\sigma 1},..., t_{\sigma n})\ \textit{ pour tout }\ \sigma \in \mathfrak{S}_n\ ;$$

- *les « augmentations »*

$$\varepsilon_a : T_{i_1} \times ... \times T_{i_n} \to T_{i_0} \times T_{i_1} \times ... \times T_{i_n}\ ,\ (t_1,..., t_n) \mapsto (a, t_1,..., t_n)\ \textit{ pour tout }\ a \in T_{i_0}\ ;$$

- *les applications diagonales*

$$\delta_{i_1} : T_{i_1} \times ... \times T_{i_n} \to T_{i_1} \times T_{i_1} \times ... \times T_{i_n}\ ,\ (t_1,..., t_n) \mapsto (t_1, t_1,..., t_n)\ .$$

■ Toutes les applications dont on exige la continuité dans l'énoncé du lemme sont des applications de compatibilité. Dans l'autre sens, soit $f = (f_1,..., f_k) : T_{i_1} \times ... \times T_{i_n} \to T_{j_1} \times ... \times T_{j_m}$ une application de compatibilité. Puisque les permutations des coordonnées sont des homéomorphismes, on peut raisonner à l'ordre des coordonnées près. Il y a deux cas :

ou bien f est l'application constante $(t_1,..., t_n) \mapsto \bar a$, alors f se décompose en

$$T_{i_1} \times ... \times T_{i_n} \xrightarrow{\pi} T_{i_n} \xrightarrow{\varepsilon_{a_1} \circ \cdots \circ \varepsilon_{a_n}} T_{j_1} \times ... \times T_{j_m} \times T_{i_n} \xrightarrow{\pi} T_j;$$

ou bien f se compose des applications suivantes :

- une projection de $T_{i_1} \times ... \times T_{i_n}$ sur un produit de T_j où chaque $T_i \in \{T_{i_1}, \cdots, T_{i_n}\}$ apparaît une seule fois ;
- chaque fois que $i_j = i'_j$ pour $j \neq j'$, on compose avec une application diagonale $(t_{i_j}, \bar t) \mapsto (t_{i_j}, t_{i_j}, \bar t)$;
- finalement on compose avec des applications $\bar t \mapsto (a_j, \bar t)$ chaque fois que $f_j(\bar t) = a_j$.

Dans chacun des cas, f s'écrit comme composition d'applications continues. ■

Lemme 1.14 *Une famille de topologies noethériennes est compatible ssi*

– *toutes les projections π sont continues ;*

– *toutes les permutations $\bar\sigma$ sont des homéomorphismes ;*

– *si $\pi : T_{i_0} \times T_{i_1} \times ... \times T_{i_n} \to T_{i_0}$ est une projection et $a \in T_{i_0}$, alors $\pi^{-1}(a)$ est homéomorphe à $T_{i_1} \times \cdots \times T_{i_n}$ via la projection $\pi^\perp$ orthogonale à π ;*

– *les projections de $\Delta(T_{i_0}) \times T_{i_1} \times ... \times T_{i_n}$ sur $T_{i_0} \times T_{i_1} \times ... \times T_{i_n}$ sont des homéomorphismes.*

■ La direction « $\Leftarrow$ » est immédiate à partir du lemme 1.13. Dans l'autre sens, il suffit de démontrer les deux dernières assertions. Les applications $\pi^\perp$ et $(\pi^\perp)^{-1} = \varepsilon_a$ sont des applications de compatibilité, donc continues, et leurs restrictions à $\pi^{-1}(a)$ restent continues.

Pour les diagonales, c'est similaire. ■

PROPRIÉTÉS DES FAMILLES DE TOPOLOGIES NOETHÉRIENNES

Fixons pour la suite une famille de topologies noethériennes compatibles de base $\{T\}$. L'hypothèse que la base est réduite à un seul ensemble sert uniquement à simplifier les écritures ; les résultats s'appliquent aussi aux familles quelconques, avec les mêmes preuves : il suffit de remplacer les puissances T^n par des produits $T_{i_1} \times \ldots \times T_{i_n}$.

Supposons en outre que les points $(t_1, \ldots, t_n) \in T^n$ soient fermés. (Comme le montre la proposition 1.17 (a), il suffit de le demander pour les points dans T).

Notation: Soient $X \subseteq T^n$ et $\pi : T^n \to T^k$ une projection. Les ensembles $\pi^{-1}(\bar{a}) \cap X$ pour $\bar{a} \in \pi[X]$ sont appelés les (π-) **fibres** de X. Souvent la projection π n'est pas explicitée et la fibre au-dessus de $\bar{a}$ est notée $X(\bar{a})$.

Lemme 1.15 *Les fibres d'un fermé sont fermées.*

■ Immédiat d'après la définition. ■

Une remarque importante : le lemme 1.14 permet de parler d'une π-fibre $X(\bar{a})$ pour $\pi : T^n \to T^k$ sans avoir à spécifier si l'on la considère comme une partie de T^k ou de T^n : elle est fermée dans l'un ssi elle est fermée dans l'autre. Ceci est faux sans la compatibilité.

Proposition 1.16 (Propriétés des projections)
Soient $X \subseteq T^n$ et $\pi : T^n \to T^k$ une projection. Alors

(a) *Si X est irréductible, alors $\pi[X]$ est irréductible. Si $\pi[X]$ est irréductible, il existe une composante irréductible X' de X telle que $\pi[X']$ soit dense dans $\pi[X]$.*

(b) *Les projections sont des applications ouvertes.*

(c) $\pi[\overline{X}] \subseteq \overline{\pi[X]} = \overline{\pi[\overline{X}]}$.

(d) *Si X est irréductible, alors* $\dim \pi[X] \leqslant \dim X$.

■ (a) Si X est irréductible, $\pi[X]$ est l'image continue d'un irréductible, donc irréductible. Si $X = X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_k$ et $\pi[X]$ est irréductible, alors $\overline{\pi[X]} = \overline{\pi[X_1]} \cup \cdots \cup \overline{\pi[X_k]}$. Par irréductibilité de $\pi[X]$, il existe un i tel que $\overline{\pi[X]} = \overline{\pi[X_i]}$.

(b) Soient $U \subseteq T^n$ ouvert, $F := T^n \setminus U$ et $\pi^\perp : T^n \to T^{n-k}$ la projection orthogonale à π. Alors $T^k \setminus \pi[U]$ est l'intersection de tous les $\pi^\perp$-fibres de F, donc un fermé.

(c) L'inclusion $\pi[\overline{X}] \subseteq \overline{\pi[X]}$ est une conséquence de la continuité de π, puisque $\pi^{-1}[\overline{\pi[X]}]$ est un fermé qui contient X. Donc $\overline{\pi[\overline{X}]} \subseteq \overline{\pi[X]}$. L'inclusion $\overline{\pi[X]} \subseteq \overline{\pi[\overline{X}]}$ est évidente.

(d) Par récurrence sur $\delta = \dim \pi[X]$: les cas $\delta = 0$ et δ limite sont clairs.

Soit donc F une hypersurface de $\pi[X]$. Il est clair que $X \cap \pi^{-1}[F] \subset\subset X$ (sinon F serait dense dans $\pi[X]$ par (c)), donc par récurrence appliquée aux composantes irréductibles de $X \cap \pi^{-1}[F]$, $\quad \dim X \geqslant \dim(X \cap \pi^{-1}[F]) + 1 \geqslant \dim F + 1 = \dim \pi[X]$. ■

Les parties (a),(c) et (d) n'utilisent que la continuité de π ; elles sont donc valables pour toute fonction continue.

Proposition 1.17 (Propriétés des produits) *Soit* $X_i \subseteq T^{n_i}$ *pour* $i = 1, 2$.

(a) $X_1 \times X_2$ *est fermé ssi* X_1 *et* X_2 *sont fermés.*

(b) $\overline{X_1 \times X_2} = \overline{X_1} \times \overline{X_2}$.

(c) $X_1 \times X_2$ *est irréductible ssi* X_1 *et* X_2 *sont irréductibles.*
Plus généralement, si $X = \bigsqcup X_i$ *et* $Y = \bigsqcup Y_j$, *alors* $X \times Y = \bigsqcup (X_i \times Y_j)$.

(d) $\dim(X_1 \times X_2) \geqslant \dim X_1 + \dim X_2$.

■ (a) Soit $\pi_i : T^{n_1} \times T^{n_2} \to T^{n_1}$ la $i^{\text{ième}}$ projection. Alors $X_1 \times X_2 = \pi_1^{-1}[X_1] \cap \pi_2^{-1}[X_1]$ est fermé par continuité des projections.

Inversement, si $X_1 \times X_2$ est fermé, X_1 est homéomorphe à toute π_2-fibre de $X_1 \times X_2$, donc fermé ; c'est pareil pour X_2.

(b) Soit $Z = \overline{X_1 \times X_2}$. Puisque $\overline{X_1} \times \overline{X_2}$ est fermé, on a $Z \subseteq \overline{X_1} \times \overline{X_2}$. Toute π_2-fibre de Z est fermée, donc contient $\overline{X_1}$; de la même façon, toute π_1-fibre de Z contient $\overline{X_2}$. Donc $Z \supseteq \overline{X_1} \times \overline{X_2}$.

(c) Il suffit de démontrer la deuxième assertion. À cause de (b), on peut supposer X et Y fermés. Si l'un des deux est réductible, disons $X = F_1 \cup F_2$, alors $X \times Y = (F_1 \times Y) \cup (F_1 \times Y)$ est réductible.

Supposons que X et Y soient irréductibles et $X \times Y = F_1 \cup F_2$. Puisque toute π_2-fibre de $X \times Y$ est homéomorphe à X qui est irréductible, la fibre est soit inclus dans F_1, soit dans F_2. Donc $Y \subseteq G_1 \cup G_2$ où G_i est le fermé $T^{n_i} \setminus \pi_i[T^{n_1+n_2} \setminus F_i]$. Mais Y est irréductible, donc $Y = G_i$ pour un i, c.-à-d. $X \times Y = F_i$.

(d) Récurrence sur $\dim X_1$ et sur $\dim X_2$:

Si H est une hypersurface dans X_1, alors $H \times X_2 \subset\subset X_1 \times X_2$, et donc

$$\dim(X_1 \times X_2) \geqslant \dim(H \times X_2) + 1 \geqslant \dim H + \dim X_2 + 1 = \dim X_1 + \dim X_2.$$

Les autres cas (*i.e.* $\dim X_1 = 0$ ou $\dim X_i$ limite) sont similaires ou triviaux. ■

DÉFINITION DES PRÉGÉOMÉTRIES DE ZARISKI

La définition suivante donne un minimum d'axiomes de caractère combinatoire et topologique pour qu'une structure ressemble raisonnablement à une variété algébrique. Je les appelle plutôt « prégéométries de Zariski » que « géométries de Zariski » puisque d'un point de vue de la théorie des modèles, ces structures ne se comportent pas bien. (Bien sûr, il n'y a aucun rapport avec les prégéométries que sont les matroïdes !)

Il y aura encore trois axiomes : un premier exigeant que la structure de prégéométrie de Zariski passe aux extensions élémentaires, et deux autres qui demandent que la dimension soit définissable et égale au rang de Morley. Le terme de « géométrie de Zariski » restera ainsi réservé aux structures plus importantes.

D'ailleurs, les prégéométries de Zariski correspondent à peu près aux « Z–structures » mentionnées dans [HZ1] 3.10.

Définition 1.18 *Une **prégéométrie de Zariski** est la donnée d'un ensemble infini Z et d'une topologie noethérienne $\tau_n[Z]$ sur Z^n pour tout n tels que*

irréductibilité :	*Z est irréductible (dans la topologie $\tau_1[Z]$) ;*
compatibilité :	*la famille de topologies $(\tau_n[Z])_{n\in\omega}$ est compatible ;*
séparation [1] ***:***	*la diagonale $\Delta(Z)$ est fermée ;*
élimination des quanteurs [2] ***:***	*les projections sont des applications constructibles.*

*La prégéométrie de Zariski est de **dimension finie** si les Z^n sont de dimension (topologique) finie pour tout n .*

En principe, il est inutile de considérer la topologie $\tau_0[Z] = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ sur $Z^0 = \emptyset$; c'est une commodité qui permet de dire « pour tout $n \in \omega$ » dans les énoncés au lieu de « pour tout $n \geqslant 1$ ».

Tous ces axiomes sont naturels du point de vue de la logique, cf. section 2.1 où les langages des prégéométries de Zariski seront définis. Néanmoins, presque chaque axiome, vu séparément, est contestable et se prête à des généralisations. Mais l'ensemble me paraît un choix cohérent.

L'axiome d'irréductibilité semble être le moins indispensable. Toutefois, en décomposant l'ensemble de base en composantes irréductibles, on peut se ramener au cas irréductible.

L'axiome de séparation correspond à l'habitude de la théorie des modèles de ne considérer que des langages avec égalité. Malgré son apparence innocente, il joue un rôle relativement

1. Ceci est vocabulaire de la géométrie algébrique, en analogie avec le fait qu'un espace topologique est séparé (dans le sens de Hausdorff) ssi la diagonale est fermée dans la topologie produit.

2. Le terme d'« élimination des quanteurs » s'expliquera plus tard, cf. 2.2.

important, comme d'ailleurs en géométrie algébrique où l'on rencontre aussi des exemples de prégéométries de Zariski non-séparées.

L'axiome de compatibilité semble être le plus compliqué — il s'avérera qu'il est le plus naturel et le moins contestable, cf. la remarque 2.2.

Il me semble que l'abandon de l'axiome de l'élimination des quanteurs, qui finalement dira que toute partie définissable est constructible, est la généralisation la plus intéressante. Il y a des exemples de structures où l'on trouve une famille de parties définissables ayant les propriétés des fermés, sauf que l'algèbre de Boole engendrée n'est pas celle de toutes les parties définissables. On pourrait imaginer des « géométries de Zariski partielles » (ce qui permettrait de quitter le cadre des théories $\aleph_0$-stables — cf. la remarque en bas de la page 144 de [P2]).

Enfin, presque toutes les prégéométries de Zariski considérées seront de dimension finie. Il serait naturel de donner une définition générale. L'étude des géométries de Zariski de dimension infinie sera sûrement très intéressante, une fois les géométries de Zariski de dimension finie bien comprises.

Le lemme suivant montre que les résultats de la section précédente s'appliquent aux prégéométries de Zariski. En fait, on pourrait ajouter un axiome à la définition des prégéométries de Zariski qui demande que les points soient fermés. Il n'est pas moins naturel que les autres, c'est par pur souci d'économie qu'il a été omis.

Lemme 1.19 *Les points* $(t_1,\dots,t_n) \in T^n$ *sont fermés.*

■ Soit f l'application de compatibilité $T \to T^2, t \mapsto (t,a)$. Alors $\{a\} = f^{-1}[\Delta(T)]$ est fermé. Le fait que $\{a_1,\dots,a_n\} = \{a_1\} \times \cdots \times \{a_n\}$ soit fermé vient de la continuité des projections (proposition 1.17). ■

Remarques sur l'élimination des quanteurs

L'axiome d'« élimination des quanteurs » est souvent difficile à vérifier. Les critères suivants peuvent être utiles.

Soit toujours une famille de topologies noethériennes compatibles de base $\{T\}$ fixée.

Lemme 1.20

(a) *Les projections sont constructibles ssi pour tout* n, *tout constructible* $Q \subseteq T^{n+1}$ *et toute projection* $\pi : T^{n+1} \to T^n$, *on a* $\partial\pi[Q] \subset\subset \overline{\pi[Q]}$.

(b) *Les projections envoient des fermés sur des constructibles ssi la condition ci-dessus est vraie pour tous les fermés.*

■ (a) Par induction sur $\dim Q$: On a

$$\pi[Q] = \left(\overline{\pi[Q]} \setminus \overline{\partial\pi[Q]}\right) \cup \pi\left[Q \cap \pi^{-1}\left[\overline{\partial\pi[Q]}\right]\right]$$

Mais par hypothèse, $\dim \overline{\partial\pi[Q]} < \dim \overline{\pi[Q]}$, donc $\dim(Q \cap \pi^{-1}[\overline{\partial\pi[Q]}]) < \dim Q$ et $\pi[Q \cap \pi^{-1}\overline{\partial\pi[Q]}]$ est constructible par induction.

La preuve de (b) est la même en ne considérant que des fermés Q. ■

Souvent on a beaucoup d'informations sur les fermés, on aimerait donc réduire le problème d'élimination des quanteurs aux fermés, c.-à-d. montrer qu'on a l'élimination des quanteurs dès que tous les fermés sont envoyés sur des constructibles par les projections. En essayant une récurrence sur la dimension des constructibles on rencontre un seul cas qui fasse obstacle ce qui, dans différentes formulations, conduit au lemme suivant :

Lemme 1.21 *Supposons que les projections envoient les fermés sur des constructibles. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *Les projections sont des applications constructibles ;*

(b) $\pi[F] \setminus \pi[F \setminus G] \subset\subset \pi[F]$ *pour tous fermés* $G \subset F$ *avec* F *irréductible ;*

(c) $\{\bar{a} \in \pi[F] \mid F(\bar{a}) = G(\bar{a})\} \subset\subset \pi[F]$ *pour tous fermés* $G \subset F$ *avec* F *irréductible ;*

(d) *l'ensemble* $\{\bar{a} \in \pi[F] \mid F(\bar{a}) = G(\bar{a})\}$ *est constructible pour tous fermés* $G \subset F$ *avec* F *irréductible.*

■ Puisque tout constructible s'écrit comme réunion finie de localement fermés irréductibles, pour qu'une projection soit constructible, il suffit de montrer que $\pi[F \setminus G]$ est constructible pour des fermés $G \subset F$ avec F irréductible.

Comme $\pi[F] = \pi[F \setminus G] \;\dot\cup\; \{\bar{a} \in \pi[F] \mid F(\bar{a}) = G(\bar{a})\}$, les équivalences (a) $\Leftrightarrow$ (d) et (b) $\Leftrightarrow$ (c) sont triviales.

(b) $\Rightarrow$ (a) D'après le lemme 1.20 (b), on sait que $\partial\pi[F] \subset\subset \pi[F]$. Mais

$$\partial\pi[F \setminus G] \subseteq \partial\pi[F] \cup \left(\pi[F] \setminus \pi[F \setminus G]\right)$$

donc par hypothèse $\partial\pi[F \setminus G] \subset\subset \pi[F]$ ce qui donne l'élimination des quanteurs par le lemme 1.20 (a).

(d) $\Rightarrow$ (c) $\overline{\pi[F \setminus G]} = \overline{\pi[\overline{F \setminus G}]} = \overline{\pi[F]}$ d'après 1.16 (c). Puisque de deux parties disjointes constructibles, seulement une peut être dense (1.11), on a (c). ■

1.3 Propriétés de la dimension

Dimension et rang de Cantor

Définition 1.22 *Le* **rang de Cantor** RC *d'une partie constructible d'un espace topologique est défini par l'induction suivante :*

- $\mathrm{RC}(Q) \geqslant 0$ *ssi* $Q \neq \emptyset$;
- $\mathrm{RC}(Q) \geqslant \alpha+1$ *ssi pour tout* $n \in \omega$, *il y a des sous-ensembles constructibles disjoints* $Q_0, \ldots, Q_n$ *de* Q *tels que* $\mathrm{RC}(Q_i) \geqslant \alpha$ *pour tout* $0 \leqslant i \leqslant n$;
- *si* β *est un ordinal limite, alors* $\mathrm{RC}(Q) \geqslant \beta$ *ssi* $\mathrm{RC}(Q) \geqslant \alpha$ *pour tout* $\alpha < \beta$.

Alors $\mathrm{RC}(Q) = \max\{\alpha \,|\, \mathrm{RC}(Q) \geqslant \alpha\}$ est bien défini. Pour éviter tout embarras possible avec l'ensemble vide, on pose $\mathrm{RC}(\emptyset) := -\infty$.

Si $\mathrm{RC}(Q) = \alpha$, le **degré de Cantor** de Q est le plus grand entier n tel qu'il existe n parties constructibles disjointes de Q de rang de Cantor α . Cet entier existe grâce à la dernière clause dans la définition du rang.

Alors on a les propriétés suivantes :

- $Q_1 \subseteq Q_2$ implique $\mathrm{RC}(Q_1) \leqslant \mathrm{RC}(Q_2)$;
- $RC(Q_1 \cup Q_2) = \max\{\mathrm{RC}(Q_1), \mathrm{RC}(Q_2)\}$;
- $\mathrm{RC}(Q) = 0$ ssi Q est fini.

Vu les définitions similaires de la dimension topologique et du rang de Cantor, une comparaison des deux s'impose. Elle sera particulièrement intéressante au chapitre 2 où le calcul du rang de Cantor dans une extension élémentaire $\aleph_0$-saturée permettra de trouver le rang de Morley.

Proposition 1.23 *Soit* $\mathfrak{Z}$ *une prégéométrie de Zariski (éventuellement de dimension infinie). Alors pour toute partie définissable* X , *le rang de Cantor de* X *est borné par la dimension.*

■ Par récurrence sur le rang de Cantor : Si $\mathrm{RC}(Q) = 0$, alors Q est fini, donc $\dim Q = 0$. Si $\mathrm{RC}(Q) = \beta$ un ordinal limite, alors par récurrence $\dim Q \geqslant \alpha$ pour tout $\alpha < \beta$, donc $\dim Q \geqslant \beta$.

Soit $\mathrm{RC}(Q) = \alpha+1$. Une des composantes irréductibles de Q , disons Q' , est du même rang $\alpha+1$. Par définition du rang de Cantor, on peut trouver deux constructibles disjoints $Q_1, Q_2 \subset Q'$ de rang α . En prenant des composantes irréductibles appropriées, on peut supposer qu'ils sont irréductibles. Puisque Q_1 et Q_2 sont disjoints, ils ne peuvent pas être tous les deux denses dans Q'. Disons que $\overline{Q_1} \neq \overline{Q'}$. Alors $\dim Q \geqslant \dim Q' > \dim(\overline{Q_1} \cap Q') \geqslant \dim Q_1$ et par récurrence $\dim Q_1 \geqslant \mathrm{RC}(Q_1) = \alpha$. ■

En général, il n'y a pas de raison pour que le rang de Cantor soit égal à la dimension :

Exemple 1.24 (Cf. l'exemple 4.8) Soit Z un ensemble infini muni d'une relation d'équivalence E qui n'ait que des classes finies. En prenant E fermée, on obtient une structure de prégéométrie de Zariski sur Z. Alors le rang de Cantor de E est 1, mais la dimension 2, puisqu'on a le drapeau $\{(z,z)\} \subset\subset \Delta(Z) \subset\subset E$ (pour tout $z \in Z$)

Le lemme suivant donne des critères pour leur égalité. Rappelons que $\mathcal{H}(X)$ est l'ensemble des hypersurfaces dans X.

Lemme 1.25 *Soit $\mathfrak{Z}$ une prégéométrie de Zariski. Alors on a équivalence entre :*

(a) $\mathrm{RC}(Q) = \dim Q$ *pour tout constructible* $Q \subseteq Z^n$.

(b) $\dim Q = \dim \overline{Q}$ *pour tout constructible* $Q \subseteq Z^n$.

(c) $\mathcal{H}(F)$ *est infini pour tout fermé irréductible infini* $F \subseteq Z^n$.

(d) $\mathrm{RC}(F) \geqslant \dim F$ *pour tout fermé irréductible* $F \subseteq Z^n$.

(e) *Le degré de Cantor de tout fermé irréductible* $F \subseteq Z^n$ *est 1.*

(f) *Si* $G \subset F \subseteq Z^n$ *sont des fermés irréductibles, alors* $\mathrm{RC}(G) < \mathrm{RC}(F)$.

Une remarque avant de commencer la preuve : si la condition (c) est satisfaite pour un fermé irréductible F et si F' est une partie propre fermée de F, alors il est possible de trouver une infinité d'hypersurfaces $G \in \mathcal{H}(F)$ telles que $G \setminus F'$ soit dense dans G :

Par l'irréductibilité de G, ou bien $G \cap F'$ est dense dans G, ou bien $G \setminus F'$ l'est. Dans le premier cas, $G = G \cap F' \subseteq F'$, mais $\dim F' \leqslant \dim F - 1 = \dim G$, donc G est forcément une composante irréductible de F', ce qui n'est possible que pour un nombre fini de $G \in \mathcal{H}(F)$.

Par passage au complémentaire, la même propriété s'exprime comme suit :
si $Q \subseteq F$ est dense dans F, alors il existe une infinité de $G \in \mathcal{H}(F)$ telles que $\overline{G \cap Q} = G$.

■ Le cas de dimension 0 est toujours clair, puisque $\dim Q = 0$ ssi $\dim \overline{Q} = 0$ ssi $\mathrm{RC}(Q) = 0$ ssi Q est fini.

Les implications (a) $\Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (f) $\Rightarrow$ (d) sont évidentes.

(d) $\Rightarrow$ (a) Induction sur $\dim \overline{Q}$ pour Q constructible irréductible :

$$\max\{\mathrm{RC}(\partial Q, \mathrm{RC}(Q)\} = \mathrm{RC}(\overline{Q}) \geqslant \dim \overline{Q} \geqslant \dim Q \geqslant \mathrm{RC}(Q),$$

mais par récurrence, $\mathrm{RC}(\partial Q) = \dim \partial Q < \dim \overline{Q}$, donc on a égalité partout.

(a) $\Rightarrow$ (b) Vu que $\dim \overline{Q} \setminus Q < \dim \overline{Q}$, on obtient

$$\dim \overline{Q} = \mathrm{RC}(\overline{Q}) = \max\{\mathrm{RC}(Q), \mathrm{RC}(\overline{Q} \setminus Q)\} = \max\{\dim Q, \dim(\overline{Q} \setminus Q)\} = \dim Q.$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Supposons que $\mathcal{H}(F) = \{G_1, \ldots, G_k\}$ soit fini. Alors $\overline{F \setminus (G_1 \cup \cdots \cup G_k)} = F$, donc $\dim[F \setminus (G_1 \cup \cdots \cup G_k)] = \dim F$ et on trouve une partie irréductible relativement fermée $G \subset F \setminus (G_1 \cup \cdots \cup G_k)$ de dimension $\dim F - 1$. Donc $\overline{G} \in \mathcal{H}(F)$ par hypothèse. Mais évidemment $\overline{G} \neq G_i$: contradiction !

(c) $\Rightarrow$ (b) Récurrence sur $\dim \overline{Q}$. Il suffit de considérer des constructibles irréductibles Q. D'après la remarque ci-devant, il existe un $G \in \mathcal{H}(\overline{Q})$ tel que $G \cap Q$ soit dense dans G. Alors $\dim Q > \dim(G \cap Q)$, et par récurrence $\dim(G \cap Q) = \dim G = \dim \overline{Q} - 1$.

(b),(c) $\Rightarrow$ (a) De nouveau par récurrence sur $\dim \overline{Q}$, et de nouveau il suffit de considérer des constructibles irréductibles Q. Soit $\dim Q = n + 1$.

Toujours d'après la remarque précédant la preuve, on peut choisir une infinité d'hypersurfaces différentes $G_i \in \mathcal{H}(\overline{Q})$ telles que $\overline{G_i \cap Q} = G_i$. Il suffit de les rendre disjointes sans que la dimension décroisse :

soit $Q_0 := Q \cap G_0$ et inductivement $Q_{k+1} := Q \cap G_{k+1} \setminus (G_0 \cup \cdots \cup G_k)$. Alors les Q_i sont disjoints, par conséquent $\mathrm{RC}(Q) \geqslant \mathrm{RC}(Q_i) + 1$; et $\overline{Q_i} = G_i$, donc par récurrence $\mathrm{RC}(Q_i) = \dim Q_i = \dim \overline{Q_i} = n$. ∎

Propriétés d'homogénéité

Les topologies de Zariski des variétés algébriques proviennent des anneaux de polynômes sur un corps, donc elles reflètent les propriétés particulières dues à la structure algébrique. En particulier, ces anneaux sont caténaires, *i.e.* toutes les chaînes maximales d'idéaux ont la même longueur. D'où la définition suivante :

Définition 1.26 *Une prégéométrie de Zariski* $\mathfrak{Z}$ *est* **caténaire** *ssi pour tout* n, *tout drapeau maximal dans* Z^n *est de longueur* $\dim Z^n$.

Dans une prégéométrie de Zariski caténaire, un certain nombre de propriétés sont vérifiées :

- $\dim X + \operatorname{codim}_X Y = \dim Y$ pour tous constructibles $X \subseteq Y$ (ceci est même équivalent à être caténaire).
- $X = \bigcup \mathcal{H}(X)$ pour tout constructible irréductible infini X.
- $\mathcal{H}(X)$ est infini pour tout constructible irréductible infini X.

La dernière propriété est particulièrement importante à cause du lemme 1.25 (et donc de 2.18) ; elle mérite donc une définition :

Définition 1.27 *Soit $\mathfrak{Z}$ une prégéométrie de Zariski. Un fermé irréductible $F \subseteq Z^n$ est* conforme *ssi $\mathcal{H}(F)$ est infini ou F est fini.*

Un espace topologique noethérien est conforme ssi tout fermé irréductible l'est ; et une prégéométrie Z est conforme ssi toutes les topologies $\tau_n[Z]$ le sont, c.-à-d. de nouveau tout fermé irréductible l'est.

Toutes ces propriétés décrivent une certaine richesse des topologies « vers le haut ». Dans l'autre direction, essentiellement à cause du *Hauptidealsatz* de Krull, les topologies de Zariski des variétés algébriques satisfont des propriétés qui sont, dans un certain sens, duales de celles mentionnées en haut :

- $\bigcap \mathcal{H}(X) = \emptyset$ pour tout constructible irréductible infini X.
- $\bigcap \{H \in \mathcal{H}(X) \mid \bar{a} \in H\} = \{\bar{a}\}$ pour tout constructible irréductible X et tout $\bar{a} \in X$.

Ces propriétés auront une certaine importance plus tard (section 3.5, proposition 3.58). En fait, elles ressemblent à des conditions de non-modularité (comme la propriété d'être « ample » dans [HZ2]).

Définition 1.28 *Un constructible irréductible X est* riche *autour de $a \in X$ ssi l'ensemble $\bigcap \{H \in \mathcal{H}(X) \mid \bar{a} \in H\}$ est fini. Une prégéométrie de Zariski est riche si tout constructible irréductible est riche autour de chacun de ses points.*

Conditions de chaîne

Lemme 1.29 *Une prégéométrie de Zariski satisfait à la*

(a) *condition de chaîne descendante (DCC) pour les ensembles fermés :*
il n'y a pas de chaîne infini strictement descendante de fermés.

(b) *condition de chaîne d'intersections (ICC) pour les ensembles fermés :*
toute intersection de fermés est égale à une sous-intersection finie.

(c) *Si la prégéométrie est de dimension finie, alors les fermés irréductibles satisfont à la condition de chaîne ascendante.*

■ Traduction de la noethérianité, de la quasi-compacité et de « dimension finie ». ■

1.4 Définissabilité et additivité de la dimension

Dans cette section, toutes les topologies noethériennes sont supposées de dimension finie.

Définissabilité de la dimension

Soit $\mathfrak{Z}$ une prégéométrie de Zariski, $X \subseteq Z^n$ et $\pi : Z^n \to Z^k$ une projection. Pour tout $m \in \omega$, on définit les ensembles suivants :

- $\pi[X, m] := \{\bar{a} \in \pi[X] \mid \dim(\pi^{-1}(\bar{a}) \cap X) = m\}$
- $\pi[X, \diamond m] := \{\bar{a} \in \pi[X] \mid \dim(\pi^{-1}(\bar{a}) \cap X) \diamond m\}$ où $\diamond$ est un des symboles $>, \geqslant, \neq, \leqslant, <$

Définition 1.30 (Définissabilité de la dimension)
La dimension est **définissable** *pour une collection d'ensembles $\mathcal{E}$ par rapport à une famille de projections Π, si $\pi[X, m]$ est constructible pour tous $k, n, m \in \omega$, toute projection $\pi : Z^n \to Z^k$ dans Π et tout $X \in \mathcal{E} \cap \mathfrak{P}(Z^n)$.*

Par défaut, $\mathcal{E}$ sera la collection de toutes les parties constructibles et Π la famille de toutes les projections. La dimension est appelée k-**définissable** si Π est la famille de toutes les projections $Z^{n+k} \to Z^n$ ($n \in \omega$).

Pour les variétés algébriques, la définissabilité de la dimension est une propriété essentielle. Il serait difficile de vouloir copier des raisonnement de la géométrie algébrique sans définissabilité de la dimension. Aussi en théorie des modèles, la définissabilité du rang de Morley joue un rôle important dans l'étude des structures fortement minimales ou des groupes $\aleph_0$-stables de rang finis. Elle sera donc un axiome indispensable dans la définition des géométries de Zariski.

Plusieurs questions se posent assez naturellement :

(1) Peut-on trouver une « petite » collection $\mathcal{E}$ telle que la définissabilité pour $\mathcal{E}$ l'implique pour tous les constructibles ?

(2) En particulier, est-ce que la définissabilité pour les fermés suffit ?

(3) Peut-on se restreindre à certaines projections, p.ex. à la 1-définissabilité?

(4) Qu'est-ce qu'on peut dire sur la dimension des fibres non-génériques ?

Les réponses aux deux premières questions pourraient servir pour la vérification des axiomes dans un cas concret. Des informations sur les fibres non-génériques sont souvent importantes pour les calculs, p.ex. dans la preuve du théorème 1.45 on utilise le lemme 1.41 qui donne un bon contrôle des fibres de grande dimension. Plus important encore est la semi–continuité, propriété de la dimension des variétés algébriques : elle sera définie plus tard.

En ce qui concerne la question (3), on voit sans problème le fait suivant :

Remarque 1.31 La $k+1$-définissabilité de la dimension implique la k-définissabilité.

■ Soit $\pi : Z^{n+k} \to Z^n$ et $X \subseteq Z^{n+k}$. Alors les π-fibres de X sont isomorphes aux $(\pi' \circ \pi)$-fibres de $X \times \{a\}$, où $\pi' : Z^{n+k+1} \to Z^{n+k}$ et $a \in Z$ quelconque. Donc la dimension est définissable pour X par rapport à π ssi elle est définissable pour $X \times \{a\}$ par rapport à $\pi' \circ \pi$. ■

Inversement, si la dimension est définissable par rapports à π et π', est-ce qu'elle est définissable par rapport à $\pi' \circ \pi$? Pour que cela soit vrai, il faudrait que la dimension des $(\pi' \circ \pi)$-fibres d'un constructible X soit contrôlée par la dimension des π-fibres de X et des π'-fibres de $\pi[X]$. Un tel rapport est donné par l'additivité de la dimension. Le théorème 1.45 donnera une réponse à la question (3), ainsi que la proposition 1.42 à la question (2).

Lemme 1.32 *Si la dimension est définissable pour une collection $\mathcal{E}$, alors elle l'est aussi pour les réunions finies d'éléments de $\mathcal{E}$.*

■ Si $X = X_1 \cup \cdots \cup X_l$ avec $X_i \in \mathcal{E}$, alors $\pi[X, \geqslant m] = \pi[X_1, \geqslant m] \cup \cdots \cup \pi[X_l, \geqslant m]$ car $\dim X(\bar{a}) = \dim(X_1(\bar{a}) \cup \cdots \cup X_l(\bar{a})) = \max\{\dim X_1(\bar{a}), \ldots, \dim X_l(\bar{a})\}$. ■

En particulier, la dimension est définissable pour les fermés ssi elle est définissable pour les fermés irréductibles ; elle est définissable pour les constructibles ssi elle est définissable pour les localement fermés irréductibles.

Le lemme suivant donne à la fois une version plus intuitive de la définissabilité et un critère utile pour la vérifier :

Lemme 1.33

(a) *Soit $\mathfrak{Z}$ une prégéométrie de Zariski et $\pi : Z^n \to Z^k$ une projection. La dimension est définissable (pour les fermés) par rapport à π ssi les π-fibres des constructibles irréductibles (fermés) de Z^n sont génériquement de la même dimension.*

(b) *Les ensembles $\pi[X, m]$ sont constructibles ssi les ensembles $\pi[X, \geqslant m]$ le sont.*

■ (a) « $\Rightarrow$ » Soit $X \subseteq Z^n$ un constructible (fermé) irréductible.

Alors $\pi[X] = \bigcup_{d \leqslant \dim X} \pi[X,d]$ est irréductible, les $\pi[X,d]$ sont disjoints et constructibles d'après l'hypothèse, donc il y a un et un seul d tel que $\pi[X,d]$ soit dense dans $\pi[X]$. Par conséquent, $\pi[X,d]$ contient un ouvert non vide de $\pi[X]$, c.-à-d. les π-fibres de X sont génériquement de dimension d.

« $\Leftarrow$ » Induction sur $\dim X$ pour $X \subseteq Z^n$ constructible (fermé). Il suffit de considérer des X irréductibles (voir le lemme 1.32). Soit d la dimension générique des π-fibres de X. Alors par hypothèse, l'ensemble des fibres non-génériques est petit dans $\pi[X]$, à savoir $G := \overline{\pi[X] \setminus \pi[X,d]} \subset\subset \pi[X]$. Donc $\dim(\pi^{-1}[G] \cap X) < \dim X$ et on sait par induction que la dimension est définissable pour $\pi^{-1}[G] \cap X$. Alors

$$\pi[X,d] = (\pi[X] \setminus G) \cup \pi[\pi^{-1}[G] \cap X, d] \quad \text{et} \quad \pi[X,d'] = \pi[\pi^{-1}[G] \cap X, d']$$

(pour tout $d' \neq d$) sont des ensembles constructibles.

(b)
$$\begin{aligned} \pi[X,m] &= \pi[X,\geqslant m] \setminus \pi[X,\geqslant m+1] \\ \text{et} \qquad \pi[X,\geqslant m] &= \pi[X,m] \cup \pi[X,m+1] \cup \cdots \cup \pi[X,\dim X]. \end{aligned}$$ ■

Notation: Supposons que la dimension soit définissable pour X par rapport à π et que $\pi[X]$ soit irréductible. La dimension générique des π-fibres de X, c.-à-d. l'unique d tel que $\pi[X,d]$ soit dense dans $\pi[X]$, est appelée la **dimension π-générique** de X et notée $\pi\text{-gdim}\, X$.

De plus, je noterai $\pi[X, gen] := \pi[X, \pi\text{-gdim}\, X]$ et $\pi[X, \neg gen] := \pi[X, \neq \pi\text{-gdim}\, X]$.

Remarque 1.34 Si la dimension est définissable par rapport à π et si $\pi[F]$ est irréductible, alors il existe une composante irréductible F' de F telle que $\pi[F']$ soit dense dans $\pi[F]$ et telle que $\pi\text{-gdim}\, F' = \pi\text{-gdim}\, F$.

(Car la dimension π-générique de F est le maximum des dimension π-génériques des composantes irréductibles de F dont l'image sous π est dense dans $\pi[F]$.)

SEMI–CONTINUITÉ

Définition 1.35 (Semi–continuité de la dimension) *La dimension est* **semi–continue** *pour une collection d'ensembles $\mathcal{E}$ par rapport à une famille de projections Π, si $\pi[X,\geqslant m]$ est fermé dans $\pi[X]$ pour tous $k,n,m \in \omega$, toute projection $\pi : Z^n \to Z^k$ dans Π et tout $X \in \mathcal{E} \cap \mathfrak{P}(Z^n)$.*

De nouveau, $\mathcal{E}$ est la collection de toutes les parties constructibles et Π la famille de toutes les projections si rien n'est mentionné. La dimension est appelée **k-semi–continue** si Π est la famille de toutes les projections $Z^{n+k} \to Z^n$ ($n \in \omega$).

Remarque 1.36

- La $k+1$-semi–continuité implique la k-semi–continuité.
- La dimension est semi–continue pour les fermés ssi elle est semi–continue pour les fermés irréductibles.
- On ne peut pas espérer avoir la semi–continuité pour les constructibles quelconques. Il suffit d'enlever presque entièrement une fibre de dimension générique pour trouver un contre-exemple :

  soit $X = [Z^2 \setminus (\{a\} \times Z)] \cup \{(a,a)\}$ et π la projection sur la première coordonnée.

  Par contre, sous certaines conditions, la semi–continuité pour les fermés passe aux localement fermés, p.ex. dans le cas des variétés algébriques.

Le lemme suivant est l'analogue du lemme 1.33 pour la semi–continuité :

Lemme 1.37 *Soit $\mathfrak{Z}$ une prégéométrie de Zariski et $\pi : Z^n \to Z^k$ une projection. La dimension est semi–continue pour les fermés par rapport à π ssi pour tout fermé irréductible F de Z^n, la dimension minimale des π-fibres est générique.*

■ « $\Rightarrow$ » D'abord, la dimension est définissable par le lemme 1.33 (a). Soit d la dimension minimale des π-fibres de F. Alors $\pi[F,d] \neq \emptyset$ et $\pi[F,>d]$ est fermé dans $\pi[F]$, donc $\pi[F,d]$ contient un ouvert non vide de $\pi[F]$, c.-à-d. que d est la dimension générique des π-fibres de F.

« $\Leftarrow$ » Induction sur $\dim F$. Soit $d \in \omega$ et soit $G := \pi[F, \geqslant d]$. Supposons en plus que G ne soit ni vide, ni dense dans $\pi[F]$, les deux cas étant triviaux. Alors $\dim(\pi^{-1}[\overline{G}] \cap F) < \dim F$.

Pour toute composante irréductible G' de $\overline{G}$ et toute composante irréductible F' de $F \cap \pi^{-1}[G']$, on sait que $\pi[F', \geqslant d]$ est fermé dans $G' \cap \pi[F]$ par récurrence. Par conséquent, $\pi[F, \geqslant d] = G = \bigcup\limits_{F'} \pi[F', \geqslant d]$ est fermé dans $\bigcup G' \cap \pi[F] = \overline{G} \cap \pi[F]$, ce qui veut dire que G est fermé dans $\pi[F]$. ■

ADDITIVITÉ

Il est naturel de se demander s'il existe un rapport entre $\dim X$, $\dim \pi[X]$ et la dimension des π-fibres de X. Déjà dans le cas le plus simple où $X = \pi[X] \times \pi^{\perp}[X]$, c.-à-d. où toutes les π-fibres sont isomorphes, on ne peut pas déduire $\dim X = \dim \pi[X] + \dim \pi^{\perp}[X]$ (l'exemple est toujours 1.24)

Mais l'inégalité de 1.17 (d) se généralise :

Lemme 1.38 *La dimension est* **semi–additive** *pour les constructibles irréductibles; i.e. si* $X \subseteq Z^n$ *est constructible irréductible et* $\pi : Z^n \to Z^k$ *une projection, alors*

$$\dim X \geqslant \dim \pi[X] + \min_{a \in \pi[X]} \{\dim(\pi^{-1}(a) \cap X)\}.$$

Si la dimension est définissable, alors

$$\dim X \geqslant \dim \pi[X, gen] + \pi\text{-gdim}\, X,$$

en particulier, si $\pi[X]$ *est conforme, alors*

$$\dim X \geqslant \dim \pi[X] + \pi\text{-gdim}\, X.$$

■ Un drapeau $Y_0 \subset\subset \cdots \subset\subset Y_k$ dans $\pi[X]$ se remonte en un drapeau $\pi^{-1}[Y_0] \cap X \subset\subset \cdots \subset\subset \pi^{-1}[Y_k]$ dans X, donc $\dim X \geqslant k + \dim \pi^{-1}[Y_k]$, ce qui donne le premier résultat si le drapeau est de longueur maximal.
Dans le deuxième cas, on a $\dim \pi[X] = \dim \pi[X, gen]$ par conformité de $\pi[X]$, donc on peut remplacer X par $X \cap \pi^{-1}[\pi[X, gen]]$, et le résultat s'ensuit par la première partie. ■

Question: Est-ce que la semi–additivité $\dim X \geqslant \dim \pi[X] + m$ est vraie pour tout m tel que $\pi[X, m]$ soit dense dans $\pi[X]$?

La propriété que l'on aimerait avoir, et qui est vérifiée pour la dimension dans le cas des variétés algébriques, pour le rang de Morley dans les structures fortement minimales ou dans des groupes de rang de Morley fini, est la suivante :

Définition 1.39 (Additivité de la dimension)
La dimension est **additive** *pour une collection d'ensembles* $\mathcal{E}$ *par rapport à une famille de projections* Π, *si elle est définissable pour* $\mathcal{E}$ *par rapport à* Π *et si*

$$\dim X = \dim \pi[X] + \pi\text{-gdim}\, X$$

pour tous $k, n \in \omega$, *toute projection* $\pi : Z^n \to Z^k$ *dans* Π *et tout* $X \in \mathcal{E} \cap \mathfrak{P}(Z^n)$.

Ici, si rien n'est spécifié, $\mathcal{E}$ sera la collection de toutes les parties constructibles irréductibles, et Π la famille de toutes les projections. La dimension est appelée k-**additive** si Π est la famille de toutes les projections $Z^{n+k} \to Z^n$ ($n \in \omega$).

Je dirai aussi « π est additive » pour « la dimension est additive par rapport à π ».

Remarque 1.40

- La $k+1$-additivité de la dimension implique la k-additivité.

- L'additivité ne peut pas être vraie pour tous les constructibles ou tous les fermés, même si la dimension générique des fibres existe :

  Soit $\mathfrak{Z}$ une prégéométrie de Zariski de dimension 2 et $F \subset Z$ un fermé irréductible de dimension 1, soit $X = (\{a\} \times F) \cup (Z \times \{b\})$ et π la projection sur la deuxième coordonnée. Alors $\dim X = \max\{\dim Z, \dim F\} = 2$, $\dim \pi[X] = \dim F = 1$ et $\pi\text{-gdim}\, X = 0$.

  Dans une phrase comme « la dimension est additive pour les fermés », il sera toujours sous-entendu qu'il s'agit de fermés irréductibles.

- Néanmoins, dans les deux cas suivants, l'additivité pour un constructible X est vérifiée dès qu'elle est vraie pour toutes les composantes irréductibles de X :
  - toutes les π-fibres de X ont la même dimension;
  - les images de toutes les composantes irréductibles de X sous π sont denses dans $\overline{\pi[X]}$.

Alors on peut reprendre les questions qu'on a posées pour la définissabilité :

(5) Peut-on trouver une « petite » collection $\mathcal{E}$ telle que l'additivité pour $\mathcal{E}$ l'implique pour tous les constructibles ?

(6) En particulier, est-ce que la définissabilité pour les fermés suffit ?

(7) Peut-on se restreindre à certaines projections, p.ex. à la 1-additivité ?

L'additivité permet de donner des réponses plus satisfaisantes à ces questions, mêmes à celles posées à propos de la définissabilité : pour les questions (3) et (7), c'est le théorème 1.45 qui donne une réponse affirmative; (6) est vrai, sous des hypothèses de conformité, voir 1.42 et 1.44. Enfin une réponse partielle à (4) est donnée par le lemme suivant :

Lemme 1.41 *Soit π additive, X un constructible irréductible et* $X_k := X \cap \pi^{-1}[\pi[X, k]]$.

(a) $\dim X_k = \dim \pi[X, k] + k$.

(b) $\dim \pi[X] > k + \dim \pi[X, k + \pi\text{-gdim}\, X]$ *pour tout* $k \geqslant 1$.

(c) $\dim \pi[X] > k + \dim \pi[X, \geqslant k + \pi\text{-gdim}\, X]$ *pour tout* $k \geqslant 1$.

■ (a) Soit $X_k = Y_0 \sqcup \cdots \sqcup Y_l$. Alors $\dim X_k = \max\{\dim Y_i\}$ et, par l'additivité de π, $\dim Y_i = \dim \pi[Y_i] + \pi\text{-gdim}\, Y_i \leqslant \dim \pi[X_k] + \pi\text{-gdim}\, X = \dim \pi[X, k] + k$.

Dans l'autre sens, un drapeau $Z_0 \subset\subset \cdots \subset\subset Z_m$ dans $\pi[X, k]$ se relève en $X \cap \pi^{-1}[Z_0] \subset \cdots \subset X \cap \pi^{-1}[Z_m] \subseteq X_k$, dont on peut extraire un drapeau de même longueur. Donc $\dim X_k \geqslant m + \dim(X \cap \pi^{-1}[Z_0]) \geqslant m + k$, ce qui donne $\dim X_k \geqslant \dim \pi[X, k] + k$ pour un drapeau de longueur maximale.

(b) Si $k \geqslant 1$, alors $\pi[X, k + \pi\text{-gdim}\, X] \subset\subset \pi[X]$, d'où $X_k \subset\subset X$. Donc

$$\dim \pi[X] + \pi\text{-gdim}\, X = \dim X > \dim X_k = \dim \pi[X, k + \pi\text{-gdim}\, X] + k + \pi\text{-gdim}\, X.$$

(c) Pour tout $l \geqslant 0$, on a donc

$$\dim \pi[X] > k + l + \dim \pi[X, k+l+\pi\text{-gdim}\, X] \geqslant k + \dim \pi[X, k+l+\pi\text{-gdim}\, X] \quad \text{et}$$

$$\dim \pi[X] \geqslant k + \max\{\dim \pi[X, k+l+\pi\text{-gdim}\, X]\} = k + \dim \pi[X, \geqslant k + \pi\text{-gdim}\, X]. \blacksquare$$

Proposition 1.42 *Soit* $\mathfrak{Z}$ *une prégéométrie de Zariski et* $\pi : Z^n \to Z^k$ *une projection additive pour les fermés irréductibles. Si tous les fermés dans* Z^k *et dans* Z^{n-k} *sont conformes, alors* π *est définissable et additive pour les constructibles irréductibles.*

■ Par récurrence sur $\dim \overline{X}$ pour un constructible X qu'il suffit de supposer irréductible. Pour la définissabilité, il suffit de montrer que les π-fibres de X sont génériquement de la même dimension (lemme 1.33 (a)) :

Si $\pi[\partial X] \subset\subset \pi[\overline{X}]$, les π-fibres de X sont génériquement celles de $\overline{X}$, donc de même dimension.

Sinon $Y := \pi[\overline{\partial X}, gen] \cap \pi[\overline{X}, gen]$ est générique dans $\pi[\overline{X}]$. Par récurrence on sait que les π-fibres de ∂X sont génériquement de la même dimension

$$\dim \partial X - \dim \pi[\partial X] < \dim \overline{X} - \dim \pi[\partial X] = \dim \overline{X} - \dim \pi[\overline{X}] = \pi\text{-gdim}\, \overline{X}.$$

Puis, si $a \in Y$, on a $\overline{X}(a) \setminus \overline{\partial X}(a) \subseteq X(a) \subseteq \overline{X}(a)$ donc $\dim \overline{X}(a) = \dim \overline{X}(a)$ par conformité.

Alors la semi–additivité 1.38 implique

$$\dim \pi[X] + \pi\text{-gdim}\, X \leqslant \dim X \leqslant \dim \overline{X} = \dim \pi[\overline{X}] + \pi\text{-gdim}\, \overline{X}.$$

Puis $\dim \pi[X] = \dim \pi[\overline{X}]$ par conformité et $\pi\text{-gdim}\, X = \pi\text{-gdim}\, \overline{X}$ d'après le raisonnement ci-dessus. ■

Lemme 1.43 *Si* π *est une projection additive et* F *un fermé irréductible tel que* $\overline{\pi[F]}$ *soit conforme, alors* F *est conforme.*

■ Par conformité, $\pi[F]$ contient une infinité d'hypersurfaces H_i telles que $\pi[F, gen]$ soit dense dans H_i (1.25). Alors par additivité de π, on trouve que

$$\dim(\pi^{-1}[H_i] \cap F) = \dim H_i + \pi\text{-gdim}\, F = \dim \pi[F] - 1 + \pi\text{-gdim}\, F = \dim F - 1.$$

Par conséquent, une composante irréductible de $\pi^{-1}[H_i] \cap F$ de dimension maximale est une hypersurface de F, donc il y en a une infinité, ce qui donne la conformité de F. ■

Corollaire 1.44

(a) *Si la dimension est 1-additive et si tout fermé irréductible* $F \subseteq Z$ *est conforme, alors* $\mathfrak{Z}$ *est conforme.*

(b) *Si la dimension est additive pour les fermés et si tout fermé irréductible* $F \subseteq Z$ *est conforme, alors la dimension est additive pour les constructibles.*

Théorème 1.45 *Si la dimension est 1-additive, alors elle est additive. Si en plus elle est 1-semi–continue, alors elle est semi–continue.*

■ Soit $Z^{n+m+1} \xrightarrow{\pi_2} Z^{n+m} \xrightarrow{\pi_1} Z^n$ une suite de projections. Par récurrence, on peut supposer que la dimension est additive par rapport à π_1 ; elle est additive par rapport à π_2 par hypothèse. Soit $X \subseteq Z^{n+m+1}$ un constructible irréductible, et soient $d_2 := \pi_2\text{-gdim}\, X$ et $d_1 := \pi_1\text{-gdim}\, \pi_2[X]$ les dimensions génériques.

Il suffit de démontrer qu'il existe un ouvert U de $\pi_1\pi_2[X]$ tel que les $\pi_1\pi_2$-fibres de X au-dessus de U soient de dimension constante.

(1) Considérons seulement les points au-dessus desquels les π_1-fibres sont génériques :

soit $U_1 := \pi_1\Big[\pi_2[X], gen\Big]$.

(2) Il n'est pas possible de se restreindre aux π_2-fibres génériques, car il se peut que $\pi_1\Big[\pi_2[X, \neg gen]\Big]$ soit dense dans $\pi_1\pi_2[X]$. Mais on peut enlever les points au-dessus desquels les π_1-fibres ont une grande partie, c.-à-d. de dimension $\geqslant d_2$, formée de points ayant des π_2-fibres non-génériques :

soit $U_2 := U_1 \setminus \pi_1\Big[\pi_2[X, \neg gen], \geqslant gen\Big]$.

(3) C'est presque suffisant ; encore faut-il enlever les points au-dessus desquels les π_1-fibres ont une partie trop grande de points ayant des π_2-fibres de grandes dimensions :

soit $V_k := \pi_1\Big[\pi_2[X, d_2 + k], \geqslant d_1 - k\Big]$.

(Alors pour $k > 0$, on a $V_k \subset\subset \pi_1\pi_2[X]$ d'après 1.41, car

$$\dim \pi_2[X, d_2 + k] < \dim \pi_2[X] - k = \dim \pi_1\pi_2[X] + d_1 - k.$$

Donc ou bien $\pi_1\Big[\pi_2[X, d_2+k]\Big] \subset\subset \pi_1\pi_2[X]$, ou bien l'additivité, appliquée composante par composante, donne $\pi_1\text{-gdim}\,(\pi_2[X, d_2 + k]) < d_1 - k$.)

Soit finalement $U := U_2 \setminus \bigcup_{k\geqslant 1} V_k$. Puisque la réunion des V_k est une réunion finie, U est définissable, non vide et ouvert dans $\pi_1\pi_2[X]$.

Prenons $a \in U$ et supposons que $\pi_1^{-1}(a) \cap \pi_2[X] = Y_0 \sqcup \cdots \sqcup Y_l$. Donc $(\pi_1\pi_2)^{-1}(a) \cap X = \bigcup_{i=0}^{l} (\pi_2^{-1}[Y_i] \cap X)$. D'après l'étape (1), $\dim(\pi_1)^{-1}(a) \cap \pi_2[X]) = \max\{\dim Y_i\} = d_1$, c.-à-d. $\dim Y_i \leqslant d_1$ pour tout i . De plus, la condition (2) donne $\dim Y_i = d_1$ ssi $\pi_2[X, gen]$ est dense dans Y_i . Alors trois cas sont possibles :

- soit $\pi_2[X, gen]$ est dense dans Y_i et alors $\dim Y_i = d_1$, d'où

$$\dim(\pi_2^{-1}[Y_i] \cap X) = \dim Y_i + \pi_2\text{-gdim}\, X = d_1 + d_2 \ ;$$

- soit $\pi_2[X,d]$ est dense dans Y_i pour un certain $d < d_2$, alors
$$\dim(\pi_2^{-1}[Y_i] \cap X) = \dim Y_i + d < d_1 + d_2 \ ;$$
- soit $\pi_2[X, k + d_2]$ est dense dans Y_i pour un certain $k > 0$, alors $\dim Y_i < d_1 - k$ d'après (3) et donc $\dim(\pi_2^{-1}[Y_i] \cap X) = \dim Y_i + k + d_2 < d_1 + d_2$.

Puisque le premier cas apparaît au moins une fois, on trouve comme résultat des calculs : $\dim((\pi_1\pi_2)^{-1}(a) \cap X) = d_1 + d_2$. Autrement dit, la dimension $\pi_1\pi_2$-générique de X existe et vérifie l'équation :
$$\pi_1\pi_2\text{-gdim}\, X = \pi_2\text{-gdim}\, X + \pi_1\text{-gdim}\, \pi_2[X].$$

Ceci donne immédiatement l'additivité, car
$$\begin{aligned} \dim X &= \dim \pi_2[X] + \pi_2\text{-gdim}\, X \\ &= \dim \pi_1\pi_2[X] + \pi_1\text{-gdim}\, \pi_2[X] + \pi_2\text{-gdim}\, X \\ &= \dim \pi_1\pi_2[X] + \pi_1\pi_2\text{-gdim}\, X. \end{aligned}$$

Finalement, si la dimension est 1-semi–continue, on peut supposer par induction qu'elle est semi–continue par rapport à π_1. Soit $a \notin \pi_1\pi_2[X, gen]$ et Y_i comme ci-dessus. La minimalité de d_1 et d_2 donnée par le lemme 1.37 implique que
$$\begin{aligned} \dim((\pi_1\pi_2)^{-1}(a) \cap X) &= \max\{\dim(\pi_2^{-1}[Y_i])\} \\ &\leqslant \max\{\dim Y_i + d_2\} = \max\{\dim Y_i\} + d_2 \leqslant d_1 + d_2. \end{aligned}$$

Donc la dimension $\pi_1\pi_2$-générique de X et la dimension minimale des $\pi_1\pi_2$-fibres, ce qui donne la semi–continuité de la dimension par rapport à $\pi_1\pi_2$, toujours par le lemme 1.37.

■

Chapitre 2 Théorie élémentaire

2.1 Langages des géométries de Zariski

Étant donnée une prégéométrie de Zariski, on voudrait la considérer comme une structure d'un langage du premier ordre de façon que les structures élémentairement équivalentes deviennent elles aussi des prégéométries de Zariski. Cela n'est possible que si l'on arrive à identifier syntaxiquement les parties d'une géométrie qui sont topologiquement déterminées, c.-à-d. qu'il faut un critère syntaxique pour qu'une formule définisse un ouvert ou un fermé. Il s'avère plus simple de se concentrer sur les fermés.

D'un côté, les propriétés fondamentales d'une prégéométrie de Zariski délimitent le choix d'une classe de formules pouvant définir les fermés. Une telle classe doit être close par : conjonction finie, disjonction finie, substitution de variables par des paramètres ; elle doit contenir l'égalité et les singletons.

D'un autre côté, il convient de se laisser guider par les exemples naturelles pour garder des axiomatisations familières si possible.

Toutes ces considérations conduisent à choisir une axiomatisation telle que les fermés correspondent exactement aux réalisations des formules positives sans quanteurs avec paramètres.

Définition 2.1

- *Une formule* **fermée** *est une formule positive sans quanteurs (avec paramètres).*
- *Soit $\mathfrak{Z}$ une prégéométrie de Zariski. Un* **langage de géométrie de Zariski** *pour $\mathfrak{Z}$ est un ensemble de symboles de relations contenant l'égalité et tel que les fermés des Z^n soient exactement les réalisations des formules fermées avec paramètres dans Z .*

Maintenant on peut regarder les axiomes de la définition d'une prégéométrie sous un autre aspect :

Remarque 2.2

- L'axiome de séparation veut dire que le symbole « = » est dans le langage.

- L'axiome d'élimination des quanteurs devient une vraie élimination des quanteurs de la structure. Autrement dit, il exige que tous les ensembles définissables soient constructibles. Puisque réciproquement, les constructibles sont évidemment définissables, on pourrait l'exprimer par l'équation « constructible = définissable ».
(Ici, la définissabilité est toujours avec paramètres. Il faudrait choisir le langage avec plus de soins pour avoir l'élimination des quanteurs sans paramètres, c.-à-d. telle que toute $\emptyset$-formule équivaut à une combinaison booléenne de $\emptyset$-formules atomiques.)

- En plus, on comprend mieux l'enjeu de la compatibilité. En considérant p.ex. la version donnée par le lemme 1.14, la continuité des projections correspond à la possibilité d'ajouter des variables muettes ; les permutations sont des homéomorphismes puisqu'on peut échanger les variables sans changer le caractère syntaxique ; les dernières deux propriétés expriment les équivalences

$$\vdash \exists \bar{y} \left(\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \bar{y} = \bar{a} \right) \leftrightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \quad \text{et} \quad \vdash \exists \bar{y} \left(\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \bar{x} = \bar{y} \right) \leftrightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{x}).$$

  En somme, la compatibilité est la propriété qui permet de caractériser syntaxiquement les fermés.

- Puisque les structures considérées ne sont pas réduites à un seul élément, on peut exprimer l'ensemble vide de la topologie $\tau_n[Z]$ par une formules fermée $\bar{x} = \bar{a} \wedge \bar{x} = \bar{b}$ pour des n-uples $\bar{a} \neq \bar{b}$ si $n > 0$, et par une formule fermée $a = b$ avec $a \neq b$ si $n = 0$.
  Si l'on voulait éviter les paramètres, il faudrait supposer que le langage contienne le symbole de relation 0-aire $\perp$, qui serait une formule fermée par définition.

Quelques exemples de langages possibles :

Exemple 2.3 Le langage maximal $\mathfrak{L}_{max}$: Pour tout n et tout fermé F de Z^n , le langage contient un symbole de relation n-aire Φ_F interprété par F . Le lemme 1.15 et la proposition 1.17 (a) montrent qu'il s'agit bien d'un langage.

On peut facilement réduire ce langage sans changer les modèles : soit $\mathfrak{L}_{irr}$ l'ensemble des symboles Φ_F pour tout fermé irréductible F . En plus, il suffit de prendre un seul symbole pour tous les fermés qui sont conjugués sous les permutations de coordonnées.

Il est évident qu'un modèle de $\mathfrak{L}_{max}$ ou de $\mathfrak{L}_{irr}$ est toujours une extension de la prégéométrie de départ, puisque tous ses points sont nommés dans le langage.

Avant d'introduire d'autres langages, il est utile d'avoir quelques notions supplémentaires :

Définition 2.4

- *Un fermé est* trivial *ssi il est définissable avec paramètres dans le langage* $\{=\}$.

- *Un fermé est* **premier** *ssi il est irréductible et n'est ni trivial, ni un produit cartésien de deux fermés.*
- *Un fermé est* **absolument irréductible** *ssi il est premier et n'est pas une fibre d'un autre fermé premier.*

Exemple 2.5 Le langage $\mathfrak{L}_{prm}$ comporte des symboles Φ_F pour tout fermé premier F, comme ci-dessus à permutation près. Un modèle pour ce langage n'est plus forcément une extension de la prégéométrie de départ.

On pourrait essayer de continuer : est-ce que l'ensemble des symboles Φ_F pour les fermés absolument irréductibles forme un langage ? Le seul problème est le suivant : chaque fois qu'un fermé premier $F \subseteq Z^n$ est une fibre d'un autre fermé premier $F' \subseteq Z^m$, alors $m > n$. En continuant, rien n'empêche qu'on tombe sur une suite infinie de fermés premiers, chacun étant une fibre du suivant.

Les symboles Φ_F interprétés par des fermés absolument irréductibles forment un langage $\mathfrak{L}_{abs}$ ssi cette situation de suite infinie ne se produit pas. Alors $\mathfrak{L}_{abs}$ est un langage minimale (canonique).

Quelques exemples de langages de prégéométries de Zariski naturels :

Exemple 2.6

- L'ensemble infini sans structure : $\mathfrak{L}_{abs} = \{=\}$.
- Une relation d'équivalence : $\mathfrak{L}_{abs} = \{=, E\}$.
- Les espaces vectoriels : un langage possible est celui qui contient des symboles de relations pour tous les sous-espaces de codimension 1.
- Les groupes de rangs de Morley fini un-basés : un langage possible est celui qui contient un prédicat pour tout sous-groupe définissable.

Lemme 2.7 *Soit $\mathfrak{L}$ un langage de géométrie de Zariski pour une prégéométrie de Zariski $\mathfrak{Z}$, et soit α un automorphisme de la $\mathfrak{L}$-structure $\mathfrak{Z}$. Alors les applications $(\alpha,\ldots,\alpha)$: $Z^n \to Z^n$ sont des $\tau_n[Z]$-homéomorphismes.*

■ Évident. ■

EXTENSIONS DES TOPOLOGIES

Fixons un langage de géométrie de Zariski $\mathfrak{L}$ pour la géométrie de Zariski $\mathfrak{Z}$, et soit $\mathfrak{Y}$ une $\mathfrak{L}$-structure élémentairement équivalente à $\mathfrak{Z}$. Est-ce qu'on peut munir $\mathfrak{Y}$ d'une structure de géométrie de Zariski naturelle ?

Si ce que « naturel » devrait signifier n'est pas forcément clair, il est évident qu'une structure de géométrie de Zariski sur $\mathfrak{Y}$ qui est sans rapport avec celle sur $\mathfrak{Z}$ n'est pas très utile. Une façon de définir « naturel » est impliquée par la définition d'un langage :

Une structure de géométrie de Zariski sur $\mathfrak{Y}$ (en tant que structure élémentairement équivalente à la géométrie de Zariski donnée $\mathfrak{Z}$) est **naturelle** si $\mathcal{L}$ est aussi un langage de géométrie de Zariski pour $\mathfrak{Y}$. Autrement dit :

Définition 2.8

- *Soit $\mathfrak{Z}$ une prégéométrie de Zariski, $\mathcal{L}$ un langage de géométrie de Zariski pour $\mathfrak{Z}$ fixé et $\mathfrak{Y} \equiv \mathfrak{Z}$ dans ce langage. Alors $\tau_n[Y]$ est la collection des parties de Y^n définies par des formules positives, sans quanteurs, à paramètres dans Y .*
- *Si $(Y, (\tau_n[Y])_{n\in\omega})$ est une prégéométrie de Zariski, on dira que c'est la structure* **naturelle** *de prégéométrie de Zariski sur Y ou que $\mathfrak{Y}$ est* **naturellement** *une prégéométrie de Zariski.*

Cette définition soulève un certain nombre de questions :

(1) Quelles propriétés des prégéométries de Zariski sont vérifiées par $(Y, (\tau_n[Y])_{n\in\omega})$?

(2) Quelles sont les conditions pour que tout $\mathfrak{Y} \equiv \mathfrak{Z}$ soit naturellement une prégéométrie de Zariski ?

(3) Dans quelle mesure cette propriété dépend-elle du langage ?

On pourrait aussi se poser la question de trouver une définition plus intrinsèque de « naturel » qui dépende moins du choix de la définition d'un langage. Une possibilité serait de demander que si $\mathfrak{Y} \preccurlyeq \mathfrak{Z}$ sont des prégéométries de Zariski, alors les topologies $\tau_n[Y]$ et $\tau_n[Z]\restriction_{Y^n}$ sont les mêmes. En fait, cette propriété est vraie :

La définition 2.8 implique évidemment $\tau_n[Y] \subseteq \tau_n[Z]\restriction_{Y^n}$; l'inclusion inverse sera montrée par le théorème 2.27.

Notation: Si $\mathcal{L}$ est un langage de géométrie de Zariski pour $\mathfrak{Z}$, les **fermés de base** sont les fermés définis par une formule atomique.

Si X est un ensemble $\emptyset$-définissable, soit Φ_X une $\emptyset$-formule qui définit X . Inversement, si ψ est une formule à n variables libres, je note $\psi[Z] := \{(z_1,\ldots,z_n) \mid \mathfrak{Z} \vDash \psi(z_1,\ldots,z_n)\}$.

Soit donc $\mathfrak{Y}$ une structure élémentairement équivalente à $\mathfrak{Z}$ dans $\mathcal{L}$. Appelons « fermés » de Y^n les éléments des $\tau_n[Y]$ et « constructibles » de Y^n les combinaisons booléennes de fermés de Y^n . Une application $Y^n \to Y^k$ est dite « continue » si l'image réciproque d'un fermé est fermée.

La proposition suivante répond à la question (1):

Proposition 2.9

(a) *Y est « irréductible », c.-à-d. Y n'est pas réunion propre de deux fermés.*

(b) *La diagonale $\Delta(Y)$ est fermée.*

(c) *Les applications de compatibilité sont continues.*

(d) *Les projections sont des applications constructibles.*

■ (a) Supposons que Y s'écrive comme réunion propre $F(a_1,\dots,a_k) \cup G(b_1,\dots,b_n)$ avec $a_i, b_j \in Y$ et F, G des fermés de base. Ceci se traduit par une formule:

$$\mathfrak{Y} \vDash \exists y_1,\dots,y_k\, \exists z_1,\dots,z_n \;\Big(\forall x\, [\Phi_F(x,y_1,\dots,y_k) \vee \Phi_G(x,z_1,\dots,z_n)] \quad \wedge \\ \exists x\, [\neg\Phi_F(x,y_1,\dots,y_k)) \wedge \exists x\, (\neg\Phi_G(x,z_1,\dots,z_n)] \Big).$$

Mais cette formule reste vraie dans $\mathfrak{Z}$, ce qui contredit l'irréductibilité de Z.

(b) La diagonale est définie par la formule $x_1 = x_2$, qui est positive sans quanteurs, donc qui définit un fermé.

(c) Comme expliqué dans la remarque 2.2, la compatibilité est devenue une propriété purement syntaxique, donc vérifiée par définition même des fermés de $\mathfrak{Y}$.

(d) La preuve se fait en plusieurs étapes:

- Remarquons d'abord que la constructibilité d'un ensemble $\emptyset$-définissable est exprimable par une formule du premier ordre, donc vraie dans $\mathfrak{Y}$ dès qu'elle l'est dans $\mathfrak{Z}$.
- Alors l'élimination des quanteurs est vraie pour les fermés de $\mathfrak{Y}$:
  Soit $\pi : Y^{n+1} \to Y^n$ une projection et $F(\bar{a})$ un fermé de $\mathfrak{Y}$ où F est un fermé de base et $\bar{a} \in Y^{<\omega}$. Alors $\pi[F(\bar{a})] = \pi[F](\bar{a})$ et il suffit de montrer que $\pi[F]$ est constructible ce qui est clair par la première remarque.
- Si Q est un constructible $\emptyset$-définissable, alors $Q(\bar{a})$ est un constructible de Y pour tout $\bar{a} \in Y^{<\omega}$ (car si $Q = \bigcup F_i \setminus G_i$ avec des fermés $\emptyset$-définissables F_i et G_i, alors $Q(\bar{a}) = \bigcup F_i(\bar{a}) \setminus G_i(\bar{a})$).
- Pour finir, appliquons le critère du lemme 1.21 (d):
  Soient $F(a_1,\dots,a_k)$ et $G(b_1,\dots,b_l)$ deux fermés de Y^{n+1} où F et G sont des fermés $\emptyset$-définissables. Considérons les fermés $F', G' \subseteq Y^{n+1+k+l}$ tels que

$$\Phi_{F'}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \;\leftrightarrow\; \Phi_F(x_0,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k) \,\wedge\, z_1 = z_1 \,\wedge\cdots\wedge\, z_l = z_l$$

$$\text{et}\quad \Phi_{G'}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \;\leftrightarrow\; \Phi_G(x_0,\dots,x_n,z_1,\dots,z_l) \,\wedge\, y_1 = y_1 \,\wedge\cdots\wedge\, y_k = y_k$$

et supposons que la projection π corresponde à $\exists x_0$. L'ensemble

$$\left\{(x_1,\ldots,x_n,\bar{y},\bar{z})\,\middle|\,\mathfrak{Y}\vDash\forall x_0[\Phi_{F'}(x_0,x_1,\ldots,x_n,\bar{y},\bar{z})\leftrightarrow\Phi_{G'}(x_0,x_1,\ldots,x_n,\bar{y},\bar{z})]\right\}$$

est $\emptyset$-définissable, donc constructible puisqu'il l'est dans $\mathfrak{Z}$ d'après le lemme 1.21. Supposons qu'il soit défini par la formule $\psi(x_1,\ldots,x_n,\bar{y},\bar{z})$. Alors

$$\left\{(c_1,\ldots,c_n)\,|\,\mathfrak{Y}\ \vDash\ \pi^{-1}(\bar{c})\cap F(\bar{a})=\pi^{-1}(\bar{c})\cap G(\bar{b})\right\}$$

est défini par $\psi(x_1,\ldots,x_n,\bar{a},\bar{b})$, donc est un constructible de Y^n d'après la remarque précédente.

Le lemme 1.21 fait une récurrence sur la dimension, donc on ne peut l'appliquer que si les fermés satisfont à la condition de chaîne descendante. C'est le seul cas qui est vraiment intéressant et qui sera utilisé dans la suite. Mais en fait, on pourrait se passer du lemme 1.21 en séparant les paramètres d'une combinaison booléenne de $Q_0(\bar{a}_0),\ldots,Q_m(\bar{a}_m)$ de la même manière que ci-dessus afin de retrouver une fibre $Q(\bar{a}_0{}^\frown\bar{a}_1{}^\frown\cdots{}^\frown\bar{a}_m)$ d'un constructible $\emptyset$-définissable Q. C'est seulement plus encombrant à écrire. ■

Corollaire 2.10 $\mathfrak{Y}$ *est naturellement une prégéométrie de Zariski (éventuellement de dimension infinie) ssi toutes les* $\tau_n[Y]$ *sont des topologies noethériennes ssi toutes les* $\tau_n[Y]$ *satisfont à la condition de chaîne ascendante.*

■ D'après la proposition 2.10, la seule propriété qui manque pour que $\mathfrak{Y}$ soit naturellement une prégéométrie de Zariski est que les $\tau_n[Y]$ doivent être des topologies noethériennes.

Il est facile de voir qu'une collection $\tau\subseteq\mathfrak{P}(X)$ est une topologie noethérienne sur un ensemble X ssi dans τ il n'y a pas de chaîne infinie strictement croissante. ■

Attention toutefois : rien ne garantit que la dimension reste finie !!

Corollaire 2.11 *Une sous-structure élémentaire d'une prégéométrie de Zariski (de dimension finie) est une prégéométrie de Zariski (de dimension finie).*

■ Les fermés de la sous-structure sont des fermés de la prégéométrie de Zariski de départ, donc la condition de chaîne est héritée par la sous-structure. ■

2.2 Prégéométries de Zariski élémentaires

Définition 2.12 *Soit $\mathfrak{L}$ un langage de géométrie de Zariski pour une prégéométrie de Zariski $\mathfrak{Z}$. Alors $\mathfrak{Z}$ est dite* **$\mathfrak{L}$-élémentaire** *ssi $\mathfrak{Y}$ est naturellement une prégéométrie de Zariski pour tout $\mathfrak{Y} \equiv_{\mathfrak{L}} \mathfrak{Z}$.*

La question (2) de la section précédente se reformule alors :

(2′) Sous quelles conditions une prégéométrie de Zariski est-elle élémentaire?

Disons que $\mathfrak{Z}$ satisfait à la **condition de chaîne descendante bornée** ssi il n'y a pas de chaînes de fermés, strictement descendantes, arbitrairement longues et uniformément définis. Plus précisément, cette condition exige qu'il n'y ait pas de formules positives sans quanteurs φ_i et de paramètres $\bar{a}_{ij} \in Z^{<\omega}$ tels que pour tout $k \in \omega$:

$$\mathfrak{Z} \vDash \varphi_0(\bar{x}, \bar{a}_{0k}) \supset \varphi_1(\bar{x}, \bar{a}_{1k}) \supset \cdots \supset \varphi_k(\bar{x}, \bar{a}_{kk})$$

(où « $\supset$ » n'est pas le symbole d'implication de Peano mais une abréviation pour l'implication stricte renversée).

Théorème 2.13 *Les trois énoncés suivants sont équivalents :*

(a) *$\mathfrak{Z}$ est une prégéométrie de Zariski $\mathfrak{L}$-élémentaire.*

(b) *$\mathfrak{Z}$ satisfait à la condition de chaîne descendante bornée.*

(c) *Il existe une $\mathfrak{L}$-structure $\aleph_0$-saturée, élémentairement équivalente à $\mathfrak{Z}$, qui est naturellement une prégéométrie de Zariski.*

■ (a) $\Rightarrow$ (c) est trivial et $\neg$ (a) $\Rightarrow \neg$ (b) est direct par compacité.

$\neg$ (b) $\Rightarrow \neg$ (c) Supposons que $\mathfrak{Y} \equiv \mathfrak{Z}$ soit $\aleph_0$-saturé. Par compacité, il existe une extension $\mathfrak{Z}^*$ de $\mathfrak{Z}$, suffisamment saturée, avec des paramètres $\bar{a}_k$ telle que $\mathfrak{Z}^* \vDash \varphi_0(\bar{a}_0) \supset \cdots \supset \varphi_k(\bar{a}_k) \supset \cdots$. Alors on peut réaliser $\mathfrak{tp}(\bar{a}_0)$ dans $\mathfrak{Y}$ par $\bar{b}_0$, et choisir inductivement $\bar{b}_{k+1}$ dans $\mathfrak{Y}$ tel que $\mathfrak{tp}(\bar{b}_{k+1}/\bar{b}_0, \ldots, \bar{b}_k)$ soit le conjugué de $\mathfrak{tp}(\bar{a}_{k+1}/\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_k)$, ce qui donne $\mathfrak{Y} : \varphi_0(\bar{b}_0) \supset \cdots \supset \varphi_k(\bar{b}_k) \supset \cdots$. ■

Ce résultat permet aussi de répondre à la question (3) de la section précédente :

Corollaire 2.14 *La propriété d'une prégéométrie de Zariski d'être élémentaire ne dépend pas du langage de géométries de Zariski choisi.*

■ La condition de chaîne descendante bornée ne dépend pas du langage, on peut la reformuler comme suit : il n'y a pas de fermés F_i et de paramètres $\bar{a}_{ij} \in Z^{<\omega}$ tels que $F_0(\bar{a}_{0k}) \supset F_1(\bar{a}_{1k}) \supset \cdots \supset F_k(\bar{a}_{kk})$ pour tout $k \in \omega$. ■

Alors une prégéométrie de Zariski est dite **élémentaire** si elle est $\mathfrak{L}$-élémentaire pour un langage de géométrie de Zariski, donc pour tous. La théorie d'une prégéométrie de Zariski élémentaire est appelée une **théorie de prégéométries de Zariski**. (Une théorie de prégéométrie de Zariski est toujours supposée complète.)

L'énoncé « $\mathfrak{Z} \equiv \mathfrak{Y}$ sont des prégéométries de Zariski » voudra dire qu'il existe un langage de géométrie de Zariski fixé (mais pas explicité) tel que $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{Y}$ soient naturellement des prégéométries de Zariski et élémentairement équivalentes pour ce langage.

Question: Est-ce que les extensions d'une prégéométrie de Zariski élémentaire de dimension finie restent de dimension finie?

Proposition 2.15 *Soit T une théorie de prégéométries de Zariski, $\mathfrak{Z} \vDash T$ et $A \subseteq Z$. Alors $T(A)$ est une théorie de prégéométries de Zariski.*

■ Soit $\mathfrak{Z}^*$ un modèle $\aleph_0 + |A|^+$-saturé de T. Alors l'expansion de $\mathfrak{Z}^*$ à une $\mathfrak{L}(A)$-structure reste une prégéométrie de Zariski, puisqu'on ne fait que nommer quelques fermés en plus, et en tant que $\mathfrak{L}(A)$-structure $\mathfrak{Z}^*$ reste $\aleph_0$-saturée. Donc par le théorème 2.13, $T(A)$ est une théorie de prégéométries de Zariski. ■

Stabilité et rang

Théorème 2.16 *Une prégéométrie de Zariski élémentaire (dans un langage de géométrie de Zariski $\mathfrak{L}$) est totalement transcendante et κ-stable pour tout $\kappa \geqslant \aleph_0 + |\mathfrak{L}|$.*

■ Le rang de Morley est égal au rang de Cantor dans une extension $\aleph_0$-saturée où il est borné par la dimension d'après la proposition 1.23. Donc toute formule est rangée par le rang de Morley : la théorie est totalement transcendante. Le résultat de stabilité pour une théorie totalement transcendante vient de [P1] 17.12. ■

Corollaire 2.17

(a) *Si T est une théorie de prégéométries de Zariski, alors $\alpha_T \leqslant \dim_{\mathfrak{Z}} Z$ pour tout $\mathfrak{Z}$ qui est un modèle $\aleph_0$-saturé de T.*

(b) *Dans un langage dénombrable, une théorie de prégéométries de Zariski est $\aleph_0$-stable.*

La proposition suivante est un corollaire immédiat du lemme 1.25 :

Proposition 2.18 *Dans une prégéométrie de Zariski $\aleph_0$-saturée, le rang de Morley est égal à la dimension ssi la prégéométrie est conforme.*

Plus précisément, les équivalences du lemme 1.25 sont valables dans une prégéométrie de Zariski $\aleph_0$-saturée si l'on remplace « rang de Cantor » par « rang de Morley ». Le degré de Morley d'un constructible est égal au nombre de composantes irréductibles de dimension maximale.

En général, rien n'assure que la dimension d'un modèle $\aleph_0$-saturé soit égale au rang de Morley ; et même si cela est vrai, la dimension d'un modèle quelconque peut différer du rang de Morley — voir les exemples 4.8 et 4.10.

Le reste de ce chapitre sera consacré à la comparaison des topologies et des dimensions dans deux modèles différents d'une théorie de prégéométries de Zariski, et au comportement des propriétés importantes comme la conformité ou la définissabilité de la dimension par passage aux extensions élémentaires. La question directrice pour la suite de cette section, et qui sera reprise dans la section 2.4, est donc la suivante :

Question: Qu'est-ce qu'on peut dire en général sur le rapport des dimensions et des rangs dans différents modèles d'une théorie de prégéométries de Zariski ?

Pour préciser, je noterai $\dim_{\mathfrak{Z}}$ la dimension topologique d'un constructible calculée dans la prégéométrie de Zariski $\mathfrak{Z}$. Pour commencer, un lemme important qui dit que le fait d'être irréductible ne dépend que du type des paramètres :

Lemme 2.19 *Soient $\mathfrak{Y} \equiv \mathfrak{Z}$ et $\bar{a} \in Y^{<\omega}$, $\bar{b} \in Z^{<\omega}$ tels que $\mathfrak{tp}(\bar{a}/\emptyset) = \mathfrak{tp}(\bar{b}/\emptyset)$. Si $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ est une $\emptyset$-formule, alors $\varphi[Y, \bar{a}]$ est irréductible dans $\mathfrak{Y}$ ssi $\varphi[Z, \bar{b}]$ l'est dans $\mathfrak{Z}$.*

■ Par l'absurde, si $\varphi[Y, \bar{a}]$ est réductible, alors il existe des fermés $\emptyset$-définissable F, F' tels que $\overline{\varphi[Y, \bar{a}]}$ soit réunion propre de deux fibres $F(\bar{b})$ et $F'(\bar{c})$. Donc

$$\begin{aligned} \mathfrak{tp}(\bar{a}/\emptyset) \quad \vdash \quad & \exists \bar{y}\, \exists \bar{z} \, \Big(\forall \bar{x} \left[\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \to \Big(\Phi_F(\bar{x}, \bar{y}) \vee \Phi_{F'}(\bar{x}, \bar{z}) \Big) \right] \\ & \qquad \wedge \exists \bar{x} \left[\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \wedge \neg \Phi_F(\bar{x}, \bar{y}) \right] \; \wedge \; \exists \bar{x} \left[\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \wedge \neg \Phi_{F'}(\bar{x}, \bar{z}) \right] \Big). \end{aligned}$$

Par hypothèse, cette formule est dans $\mathfrak{tp}(\bar{b}/\emptyset)$, ce qui dit que $\varphi[Z, \bar{b}]$ est réductible. ■

En particulier, si $\mathfrak{Y} \preccurlyeq \mathfrak{Z}$ sont des prégéométries de Zariski, alors un constructible Q qui est Y-définissable est irréductible dans $\mathfrak{Y}$ ssi il l'est dans $\mathfrak{Z}$. On en déduit directement le

Corollaire 2.20 *Si $\mathfrak{Y} \preccurlyeq \mathfrak{Z}$ sont des prégéométries de Zariski et Q un constructible Y-définissable, alors $\dim_{\mathfrak{Y}} Q \leqslant \dim_{\mathfrak{Z}} Q$.*

■ D'après le lemme 2.19, un drapeau Y-définissable reste un drapeau dans $\mathfrak{Z}$. ■

Disons que les dimensions coïncident (pour les fermés) dans deux prégéométries de Zariski $\mathfrak{Y} \equiv \mathfrak{Z}$ ssi $\dim_{\mathfrak{Y}} \chi[Y] = \dim_{\mathfrak{Z}} \chi[Z]$ pour toute $(Y \cap Z)$-formule (fermée). Le lemme suivant est évident :

Lemme 2.21 *Soient* $\mathfrak{Y} \preccurlyeq \mathfrak{Z}$ *et* φ *une* Y*-formule.*
Alors $\dim_{\mathfrak{Y}} \varphi[Y] = 0$ *ssi* $\dim_{\mathfrak{Z}} \varphi[Z] = 0$ *ssi* φ *est une formule algébrique.*

Lemme 2.22 *Soient* $\mathfrak{Y} \equiv \mathfrak{Z}$ *deux prégéométries de Zariski* $\aleph_0$*-saturées et* Q *un ensemble* $\emptyset$*-définissable. Si* $\bar{a} \in Y^{<\omega}, \bar{b} \in Z^{<\omega}$ *ont le même type sur* $\emptyset$*, alors* $\dim_{\mathfrak{Y}} Q(\bar{a}) = \dim_{\mathfrak{Z}} Q(\bar{b})$.

■ Puisque, à isomorphisme près, $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{Z}$ ont une extension élémentaire $\aleph_0$-saturée commune, il suffit de considérer le cas $\mathfrak{Y} \preccurlyeq \mathfrak{Z}$. De plus on peut supposer $\bar{a} = \bar{b}$: les deux uples sont conjugués par un automorphisme (à l'intérieur d'un grand modèle saturé) qui préserve la dimension (puisque l'image d'un drapeau sous un automorphisme reste un drapeau).

L'inégalité $\dim_{\mathfrak{Y}} \leqslant \dim_{\mathfrak{Z}}$ est général ; l'inégalité inverse sera montrée par récurrence sur $\dim_{\mathfrak{Z}}$:

Pour $\dim_{\mathfrak{Z}} Q = 0$ c'est donné par le lemme 2.21 ; et pour les étapes limites, c'est clair par récurrence.

Supposons $\dim_{\mathfrak{Z}} Q = \alpha + 1$ et Q irréductible : il existe un fermé relatif $F(\bar{a}) \subset Q$ tel que F soit $\emptyset$-définissable, $\bar{a} \in Z^{<\omega}$ et $\dim_{\mathfrak{Z}} F(\bar{a}) = \alpha$. Alors on peut réaliser le type de $\bar{a}$ par $\bar{b}$ dans $\mathfrak{Y}$. Par récurrence, $\dim_{\mathfrak{Y}} F(\bar{b}) \geqslant \dim_{\mathfrak{Z}} F(\bar{a})$, d'où $\dim_{\mathfrak{Y}} Q \geqslant \alpha + 1$. ■

Corollaire 2.23

(a) *Les dimensions coïncident dans deux prégéométries de Zariski* $\aleph_0$*-saturées élémentairement équivalentes.*

(b) *Soit* T *une théorie de prégéométries de Zariski dans un langage* $\mathfrak{L}$.
Alors $\dim_{\mathfrak{Z}} \chi[Z] < (\aleph_0 + |\mathfrak{L}|)^+$ *pour tout modèle* $\mathfrak{Z}$ *de* T *et toute* Z*-formule* χ.

■ (a) est immédiat par le lemme précédent.

Pour (b), soit $\mathfrak{Z}^*$ une extension $\aleph_0$-saturée de $\mathfrak{Z}$. Alors $\dim_{\mathfrak{Z}} \chi[Z] \leqslant \dim_{\mathfrak{Z}^*} \chi[Z^*]$. Puis, par stabilité de la théorie, il existe un modèle $\mathfrak{Y}$ qui est $\aleph_0$-saturé et de cardinalité $\aleph_0 + |\mathfrak{L}|$. Il y a au plus $(\aleph_0 + |\mathfrak{L}|)^+$ ensembles Y-définissables, donc pour toute Y-formule ξ, on a $\dim_{\mathfrak{Y}} \xi[Y] < (\aleph_0 + |\mathfrak{L}|)^+$. Enfin, on peut réaliser le type des paramètres de χ dans $\mathfrak{Y}$, et on peut conclure avec le lemme 2.22. ■

CONDITIONS DE CHAÎNE

Lemme 2.24 *Une prégéométrie de Zariski élémentaire satisfait aux conditions de chaîne suivantes :*

(a) *Pour toute formule fermée φ, il existe un entier n_φ tel que toute chaîne strictement descendante de fermés définis par des formules $\varphi(\bar{a})$ soit de longueur au plus n_φ.*

(b) *Pour toute formule fermée φ, il existe un entier m_φ tel que toute chaîne strictement descendante de fermés définis par des intersections finies de formules $\varphi(\bar{a})$ soit de longueur au plus m_φ.*

■ Sinon, par compacité, on contredit facilement la condition de chaîne descendante bornée du théorème 2.13. ■

2.3 COMPARAISON DE TOPOLOGIES

A-TOPOLOGIES

Supposons que T soit une théorie complète de prégéométries de Zariski et soit $\mathfrak{Z}$ un modèle monstre de T.

Si A est un ensemble de paramètres, alors les fermés A-définissables dans Z^n forment une topologie sur Z^n, appelée la A-**topologie** et notée $\tau_n[A]$. Puisque la A-topologie est une sous-topologie de $\tau_n[Z]$, elle est noethérienne. Le préfixe « A- » se réfère alors à la A-topologie. En particulier, la A-adhérence $\overline{X}^A$ d'une partie $X \subseteq Z^n$ qui est le plus petit fermé A-définissable contenant X, est définissable. Un A-constructible est une combinaison booléenne de A-fermés. Mais en général, une partie A-définissable n'a aucune raison d'être A-constructible !

Évidemment, si $A \subseteq B$, alors $\overline{X}^B \subseteq \overline{X}^A$. Si rien n'est spécifié, l'adhérence sera prise dans le modèle monstre $\mathfrak{Z}$, *i.e.* $\overline{X} = \overline{X}^Z$.

Lemme 2.25 *Les composantes d'une partie A-définissable sont* $\mathrm{acl}^{eq}(A)$*-définissables.*

■ Soit $X = X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_k$ A-définissable et soit α un automorphisme du modèle monstre qui fixe A point par point. Comme α^{-1} est un homéomorphisme, les $\alpha^{-1}[X_i]$ sont irréductibles. Par conséquent, il existe une composante irréductible X_j telle que $\alpha^{-1}[X_i] \subseteq X_j$. Donc $X_i = \alpha\alpha^{-1}[X_i] \subseteq \alpha[X_j]$. Mais $\alpha[X_j]$ est aussi irréductible, d'où $X_i = \alpha[X_j]$. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour $\alpha[X_j]$, il est $\mathrm{acl}^{eq}(A)$-définissable. ■

Question: Quels sont les ensembles de paramètres A tels que la famille $(\tau_n[A])_{n\in\omega}$ (ou A tout court) admette « l'élimination des quanteurs », c.-à-d. tels que toute partie A-définissable soit A-constructible? (C'est vrai si A est un modèle d'après la proposition 2.9.)

Topologies de Zariski sur les types

Si $\mathfrak{p} \in S_n(A)$, notons $\mathfrak{p}^+$ la partie de $\mathfrak{p}$ formée de formules fermées: $\mathfrak{p}^+ := \{\varphi \in \mathfrak{p} \mid \varphi \text{ fermée}\}$. Si A « admet l'élimination des quanteurs », alors la partie fermée détermine un type complet, c.-à-d. si $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in S_n(A)$ tels que $\mathfrak{p}^+ = \mathfrak{q}^+$, alors $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.

Les topologies $\tau_n[A]$ induisent des « topologies de Zariski » sur les espaces de types $S_n(A)$: les fermés de base sont donnés par les ensembles $<\varphi> := \{\mathfrak{p} \in S_n(A) \mid \varphi \in \mathfrak{p}\}$ pour les A-formules fermées φ. L'adhérence de Zariski d'une partie $P \subseteq S_n(A)$ est donnée par

$$\bigcup\{<\varphi> \mid \exists \mathfrak{p} \in P, \varphi \in \mathfrak{p}, \varphi \text{ fermée}\}.$$

En particulier, la topologie de Zariski sur $S_n(A)$ est moins fine que la topologie usuelle (aussi appelée topologie constructible) et elle est noethérienne.

Supposons pour la suite que A soit l'ensemble de base d'un modèle.

Définition 2.26 *Soit $X \subseteq Z^n$ un constructible irréductible A-définissable. Alors le* **type générique** *de X, noté $\mathfrak{tp}_X$, est l'unique type dans $S_n(A)$ prolongeant l'ensemble*

$$\{x \in X\} \cup \{x \notin F \mid F \text{ fermé relatif } A\text{-définissable } \subset\subset X\}.$$

Alors la topologie de Zariski sur $S_n(A)$ a la propriété suivante: pour toute partie P de $S_n(A)$ qui est Zariski–fermée et irréductible, il y a un et un seul point qui est dense dans P, « son point générique ». $S_n(A)$ avec la topologie de Zariski est donc un « espace de Zariski » comme il est défini dans [Ha] p. 93 sq.

Inversement, tout type $\mathfrak{p}$ est le type générique d'un fermé irréductible A-définissable, à savoir la A-adhérence des réalisations de $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{Z}$ (ou dans n'importe quelle extension élémentaire de A suffisamment saturée).

En fait, on peut voir $S_n(A)$ de manière ensembliste comme étant la réunion de A^n (= les types réalisés) avec un point pour tout fermé irréductible A-définissable (= les types génériques). C'est exactement de la même façon que l'on construit le spectre de l'anneau des fonctions d'une variété algébrique.

La dimension d'un fermé irréductible est égale à la dimension topologique de l'adhérence de son point générique dans l'espace des types. Plus précisément, on a un ordre partiel $\mathfrak{p} \rightsquigarrow \mathfrak{q}$ sur $S_n(A)$, « $\mathfrak{p}$ se spécialise en $\mathfrak{q}$ », si $\mathfrak{q}$ est un élément de l'adhérence de Zariski de $\mathfrak{p}$.

Ceci donne un ordre partiel discret et noethérien sur $S_n(A)$. Les points minimaux sont les types réalisés, l'unique type maximal (car A^n est irréductible) est le type générique de A^n. Puis la dimension d'un fermé irréductible est donnée par la hauteur de son type générique dans cet ordre.

Dernière remarque: les propriétés génériques des éléments d'un fermé irréductible sont celles qui sont vérifiées par le point générique.

CONTINUITÉ DES INJECTIONS ÉLÉMENTAIRES

Notation: Si $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ sont des modèles d'une théorie stable, et si $X \subseteq N^k$ est N-définissable, alors on sait que $X \cap M^k$ est définissable dans $\mathfrak{M}$ par une formule qui sera notée $d_{\mathfrak{M}}X$. Si X est défini par la N-formule ξ, je noterai aussi $d_{\mathfrak{M}}X = d_{\mathfrak{M}}\xi$.

En particulier, on a $(d_{\mathfrak{M}}\xi)[M] = \xi[M]$.

Soient $\mathfrak{Y} \preccurlyeq \mathfrak{Z}$ deux modèles d'une théorie de prégéométries de Zariski. Cette section a pour but de montrer le théorème suivant :

Théorème 2.27 *Les topologies $\tau_n[Y]$ et $\tau_n[Z]\restriction_{Y^n}$ sont les mêmes (sur Y^n).*

■ Par définition des topologies $\tau_n[Y]$ et $\tau_n[Z]$, on a l'inclusion $\tau_n[Y] \subseteq \tau_n[Z]\restriction_{Y^n}$. Il reste à montrer que les inclusions $i_n : Y^n \to Z^n$ sont $\tau_n[Y]$–$\tau_n[Z]$–continues:

Soit F un fermé Z-définissable de Z^n. Il suffit donc de démontrer que $F \cap Y^n$ est fermé dans $\mathfrak{Y}$, c.-à-d. que $d_{\mathfrak{Y}}F$ est (équivalente à) une Y-formule fermée. Il existe une $\emptyset$-formule Φ et des paramètres $\bar{a} \in Z^{<\omega}$ tels que $F = \Phi[Z, \bar{a}]$. Alors d'après [P1], proposition 12.25, $d_{\mathfrak{Y}}F$ est une combinaison booléenne positive d'instances de Φ (à paramètres dans Y). Chaque instance étant une Y-formule fermée, $d_{\mathfrak{Y}}F$ est fermée. ■

Dans la suite, je vais donner une deuxième preuve de ce théorème.

Lemme 2.28 *Si χ est une Y-formule, alors $\chi[Y]$ est Z-dense dans $\chi[Z]$.*

■ Supposons d'abord que χ soit une formule fermée, donc que $\chi[Y]$ soit fermé dans $\mathfrak{Y}$. On peut supposer que $\chi[Y]$ est irréductible: pour le cas général, il suffit de décomposer en composantes irréductibles.

Récurrence sur $\dim_{\mathfrak{Y}} \chi[Y]$:

- Si $\dim_{\mathfrak{Y}} \chi[Y] = 0$, alors χ est de la forme $\bar{x} = \bar{a}$, donc $\chi[Y] = \chi[Z] = \{\bar{a}\}$.
- Soit donc $\dim_{\mathfrak{Y}} \chi[Y] > 0$ et supposons que $\overline{\chi[Y]}^Z \subset \chi[Z]$. Soit ξ une $\emptyset$-formule fermée et $\bar{a} \in Z^{<\omega}$ tels que $\overline{\chi[Y]}^Z = \xi[Z, \bar{a}]$. Soit n maximal tel qu'il existe une chaîne

$$\emptyset \neq \xi[Z, \bar{a}_1] \subset \cdots \subset \xi[Z, \bar{a}_n] = \xi[Z, \bar{a}] \subset \chi[Z]$$

avec des $\bar{a}_i \in Z^{<\omega}$. Ce maximum existe d'après la condition de chaîne 2.24 (a) puisque l'on se trouve dans une théorie de prégéométries élémentaires.

L'existence de cette chaîne s'exprime par une formule du premier ordre. On peut donc trouver des paramètres $\bar{b}_i \in Y^{<\omega}$ ($\bar{b} := \bar{b}_n$) tels que

$$\emptyset \neq \xi[Y, \bar{b}_1] \subset \cdots \subset \xi[Y, \bar{b}_n] = \xi[Y, \bar{b}] \subset \chi[Y].$$

En particulier, $\xi[Y, \bar{b}] \subset \chi[Y] = \chi[Y] \cap \xi(Y, \bar{a})$. Alors il n'y a que deux possibilités :

- ou bien $\xi[Z, \bar{b}] \not\subseteq \xi[Z, \bar{a}]$, et alors on a $\dim_{\mathfrak{Y}} \xi[Y, \bar{b}] < \dim_{\mathfrak{Y}} \chi[Y]$ parce que $\chi[Y]$ est irréductible. De plus,

$$\overline{\xi[Y, \bar{b}]}^Z \subseteq \overline{\chi[Y] \cap \xi(Y, \bar{a})}^Z \subseteq \overline{\chi[Y]}^Z \cap \overline{\xi(Y, \bar{a})}^Z = \xi[Z, \bar{b}] \cap \xi[Z, \bar{a}] \subset \xi[Z, \bar{b}],$$

  donc l'hypothèse de récurrence s'applique à $\xi[Y, \bar{b}]$: contradiction.
- ou bien $\xi[Z, \bar{b}] \subset \xi[Z, \bar{a}]$. Alors on a une chaîne

$$\emptyset \neq \xi[Z, \bar{b}_1] \subset \cdots \subset \xi[Z, \bar{b}_n] = \xi[Z, \bar{b}] \subset \xi[Z, \bar{a}] \subset \chi[Z]$$

  ce qui contredit la maximalité de n.

Pour le cas général d'une Y-formule χ quelconque, on peut se restreindre aux localement fermés irréductibles. Soient donc χ une Y-formule et φ et ψ des Y-formules fermées telles que $\chi[Y] = \varphi[Y] \setminus \psi[Y]$ et telles que $\varphi[Y]$ soit irréductible. Alors

$$\varphi[Z] = \overline{\varphi[Y]}^Z = \overline{\chi[Y]}^Z \cup \overline{\psi[Y]}^Z = \overline{\chi[Y]}^Z \cup \psi[Z].$$

Mais $\varphi[Y]$ est irréductible, donc $\varphi[Z]$ aussi (voir lemme 2.19) et $\psi[Z] \neq \varphi[Z]$, d'où $\overline{\chi[Y]}^Z = \varphi[Z] \supseteq \chi[Z]$. ■

Remarque 2.29

- On ne peut pas espérer avoir cette propriété pour des Z-formules quelconques :
  si $a \in Z \setminus Y$ et χ est la formule $x = a$, alors $\overline{\chi[Y]} = \emptyset$, mais $\chi[Z] = \{a\}$.
- La preuve du théorème utilise le fait que la théorie des prégéométries de Zariski considérées est élémentaire. Est-ce que le théorème reste vrai si $\mathfrak{Y} \preccurlyeq \mathfrak{Z}$ sont deux prégéométries de Zariski non élémentaires ?

D'après le lemme 2.28, $\overline{\chi[Y]}^Z = \overline{\chi[Z]}^Z$. De plus, $\overline{\chi[Y]}^Y = \overline{\chi[Z]}^Y$ est clair, puisque tout est Y-définissable. On peut donc parler de l'adhérence d'une formule :

$\overline{\chi}^Y$ sera la Y-formule définissant $\overline{\chi[Y]}^Y$ et $\overline{\chi}^Z$ la Z-formule définissant $\overline{\chi[Y]}^Z$.

Maintenant il est facile de prouver que les adhérences dans $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{Z}$ coïncident :

Proposition 2.30

(a) *Soit χ est une formule à paramètres dans Y, alors* $\overline{\chi[Y]}^Y = \overline{\chi[Y]}^Z = \overline{\chi[Z]}^Y = \overline{\chi[Z]}^Z$.

(b) *Soit* $X \subseteq Y^n$ *. Alors on a* $\overline{X}^Y = \overline{X}^Z$ *(dans* $\mathfrak{Z}$ *).*

■ (a) On sait que $\overline{\chi[Y]}^Y = \overline{\chi[Z]}^Y \subseteq \overline{\chi[Y]}^Z = \overline{\chi[Z]}^Z$. Quitte à prendre des composantes irréductibles, on peut supposer que $\chi[Y]$ soit irréductible (dans $\mathfrak{Y}$). Donc $\overline{\chi[Y]}^Y = \overline{\chi[Z]}^Y$ est aussi irréductible, dans $\mathfrak{Y}$ ainsi que dans $\mathfrak{Z}$ (lemme 2.19). Mais

$$\overline{\chi[Z]}^Y \setminus \overline{\chi[Z]}^Z \subseteq \overline{\chi[Z]}^Y \setminus \chi[Z] \subseteq \partial^Y \chi[Z] \subset \overline{\chi[Z]}^Y$$

donc par l'irréductibilité on trouve $\overline{\chi[Z]}^Y = \overline{\chi[Z]}^Z$.

(b) On peut remplacer X par $\chi := d_{\mathfrak{Y}}(\overline{X}^Z)$, les adhérences resteront les mêmes. Alors $\overline{X}^Z = \overline{\chi[Y]}^Z$ et $\overline{X}^Y = \overline{\chi[Y]}^Y$, et (a) s'applique à χ . ■

Donc pour des parties Y-définissables, il n'y a pas de différence entre l'adhérence dans le petit et dans le grand modèle. La proposition suivante indique ce qu'on peut dire sur les parties Z-définissables ; en particulier la partie (a) redémontre le théorème 2.27.

Proposition 2.31

(a) *Soit* φ *une* Z*-formule fermée. Alors* $d_{\mathfrak{Y}}\varphi$ *est fermée et* $(d_{\mathfrak{Y}}\varphi)[Z] \subseteq \varphi[Z]$ *.*

(b) *Soit* χ *une* Z*-formule quelconque. Alors on a* $d_{\mathfrak{Y}}\chi[Z] \subseteq \overline{\chi[Z]}^Z$ *et*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\chi[Y] & \subseteq & d_{\mathfrak{Y}}(\overline{\chi[Y]}^Z)[Z] & \overset{*}{=} & \overline{\chi[Y]}^Z & = & \overline{\chi[Y]}^Y & = & \overline{d_{\mathfrak{Y}}\chi}^Y[Z] & = & \overline{d_{\mathfrak{Y}}\chi}^Z[Z] \\
\cap\!| & & \cap\!| & & \cap\!| & & \cap\!| & & & & \\
\chi[Z] & \subseteq & d_{\mathfrak{Y}}(\overline{\chi[Z]}^Z)[Z] & \subseteq & \overline{\chi[Z]}^Z & \subseteq & \overline{\chi[Z]}^Y & & & &
\end{array}$$

(Ici, toutes les adhérences sont prises dans $\mathfrak{Z}$)

■ (a) Les inclusions et égalités suivantes sont soit évidentes, soit déjà démontrées :

$$(d_{\mathfrak{Y}}\varphi)[Z] \subseteq \overline{(d_{\mathfrak{Y}}\varphi)[Z]}^Z \overset{2.28}{=} \overline{(d_{\mathfrak{Y}}\varphi)[Y]}^Z = \overline{\varphi[Y]}^Z \subseteq \overline{\varphi[Z]}^Z = \varphi[Z].$$

Puis on sait (proposition 2.30) que $\mathfrak{Z} \models \forall \bar{x} \left(\overline{d_{\mathfrak{Y}}\varphi}^Y(\bar{x}) \leftrightarrow \overline{d_{\mathfrak{Y}}\varphi}^Z(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x}) \right)$, donc

$$\overline{d_{\mathfrak{Y}}\varphi}^Y[Y] \subseteq \varphi[Y] = (d_{\mathfrak{Y}}\varphi)[Y] \subseteq \overline{d_{\mathfrak{Y}}\varphi}^Y[Y]$$

d'où $d_{\mathfrak{Y}}\varphi = \overline{d_{\mathfrak{Y}}\varphi}^Y$ puisque les deux sont des Y-formules.

(b) On a $d_{\mathfrak{Y}}\chi[Z] \subseteq d_{\mathfrak{Y}}(\overline{\chi[Z]}^Z)[Z]$, donc il suffit de démontrer $d_{\mathfrak{Y}}(\overline{\chi[Z]}^Z)[Z] \subseteq \overline{\chi[Z]}^Z$.

Les 3 égalités à droite de la première rangée viennent directement de la proposition 2.30, puisque par définition $\chi[Y] = (d_{\mathfrak{Y}}\chi)[Y]$.

Les inclusions $d_{\mathfrak{Y}}(\overline{\chi[Y]}^Z)[Z] \subseteq \overline{\chi[Y]}^Z$ et $d_{\mathfrak{Y}}(\overline{\chi[Z]}^Z)[Z] \subseteq \overline{\chi[Z]}^Z$ sont données par (a).

Puis $\chi[Y] \subseteq \overline{\chi[Y]}^Z$ implique $\mathfrak{Y} \models d_{\mathfrak{Y}}\chi \to d_{\mathfrak{Y}}\overline{\chi[Y]}^Z$. La dernière formule étant fermée par (a), ceci donne $\mathfrak{Y} \models \overline{d_{\mathfrak{Y}}\chi}^Z \to d_{\mathfrak{Y}}\overline{\chi[Y]}^Z$ ce qui veut dire $\overline{d_{\mathfrak{Y}}\chi}^Z[Z] \subseteq d_{\mathfrak{Y}}\overline{\chi[Y]}^Z[Z]$. Donc on a l'égalité $*$. Toutes les autres inclusions sont générales. ■

Lemme 2.32 *Soit* χ *une* Z*-formule, alors* $\dim_{\mathfrak{Z}}(d_{\mathfrak{Y}}\chi[Z] \setminus \chi[Z]) < \dim_{\mathfrak{Z}} \overline{\chi[Z]}^Z$.

■ D'après 2.31 (b), on a

$$d_{\mathfrak{Y}}\chi[Z] \setminus \chi[Z] \subseteq \overline{\chi[Z]}^Z \setminus \chi[Z] \subseteq \partial\chi[Z]$$

$$\text{et donc} \quad \dim_{\mathfrak{Z}}(d_{\mathfrak{Y}}\chi[Z] \setminus \chi[Z]) \leqslant \dim_{\mathfrak{Z}} \partial\chi[Z] < \dim_{\mathfrak{Z}} \overline{\chi[Z]}^Z.$$ ■

2.4 Les géométries de Zariski

Définissabilité et conformité sous extensions élémentaires

Les résultats de la section précédente permettent de reprendre la question de la section 2.2 sur la comparaison des dimensions dans différents modèles d'une théorie de prégéométries de Zariski. Il n'y a pas de réponse générale satisfaisante puisque les phénomènes de conformité (= égalité de la dimension avec le rang de Cantor), d'égalité des dimensions dans différents modèles, d'égalité des rangs de Cantor dans différents modèles, de définissabilité de la dimension etc. interagissent d'une façon peu contrôlable. Plus précisément, c'est l'absence d'une de ses propriétés qui empêche de démontrer des résultats positifs.

Pour donner une idée : si $\mathfrak{Y} \preccurlyeq \mathfrak{Z}$ sont des prégéométries de Zariski et $\mathfrak{Z}$ est conforme, alors on aimerait bien montrer que $\mathfrak{Y}$ aussi est conforme. Si Q est un constructible Y-définissable, alors $\dim_{\mathfrak{Z}} Q = \dim_{\mathfrak{Z}} \overline{Q}$. En plus, on sait que l'adhérence $\overline{Q}$ est la même dans $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{Z}$. Pour pouvoir conclure, il faudrait savoir que $\dim_{\mathfrak{Z}} = \dim_{\mathfrak{Y}}$.

Soit pour la suite T une théorie de prégéométries de Zariski fixée. Toutes les prégéométries de Zariski considérées seront des modèles de T.

Les lemmes suivants donnent des résultats concernant les rapports entre l'égalité des dimensions et la conformité, puis entre l'égalité des dimensions et la définissabilité des dimensions.

Lemme 2.33

(a) *Si* $\mathfrak{Y} \preccurlyeq \mathfrak{Z}$*, les dimensions coïncident et* $\mathfrak{Z}$ *est conforme, alors* $\mathfrak{Y}$ *est conforme.*

(b) *Si* $\mathfrak{Y}$ *et* $\mathfrak{Z}$ *sont* $\aleph_0$*-saturées, alors* $\mathfrak{Y}$ *est conforme ssi* $\mathfrak{Z}$ *est conforme.*

(c) *Si* $\mathfrak{Y} \preccurlyeq \mathfrak{Z}$ *, les dimensions coïncident pour les fermés et* $\mathfrak{Y}$ *est conforme, alors les dimensions coïncident pour tous les constructibles.*

■ (a) Soit Q constructible Y-définissable, alors $\dim_{\mathfrak{Y}} Q = \dim_{\mathfrak{Z}} Q = \dim_{\mathfrak{Z}} \overline{Q} = \dim_{\mathfrak{Y}} \overline{Q}$ car l'adhérence dans $\mathfrak{Y}$ et dans $\mathfrak{Z}$ est la même : voir proposition 2.30.

(b) En prenant une extension $\aleph_0$-saturée commune, on peut supposer que $\mathfrak{Y} \preccurlyeq \mathfrak{Z}$, l'une des deux conforme.

- Si $\mathfrak{Z}$ est conforme, alors $\dim_{\mathfrak{Y}} = \dim_{\mathfrak{Z}}$ par le corollaire 2.23 et $\mathfrak{Y}$ est conforme par (a).
- Si $\mathfrak{Y}$ est conforme, Q un constructible $\emptyset$-définissable et $\bar{a} \in Z^{<\omega}$, on peut réaliser le type de $\bar{a}$ par $\bar{b}$ dans $\mathfrak{Y}$. Alors il existe $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{Z})$ tel que $\alpha(\bar{a}) = \bar{b}$. Puis $\dim_{\mathfrak{Z}} Q(\bar{a}) = \dim_{\mathfrak{Z}} Q(\bar{b}) = \dim_{\mathfrak{Y}} Q(\bar{b}) = \dim_{\mathfrak{Y}} \overline{Q(\bar{b})} = \dim_{\mathfrak{Z}} \overline{Q(\bar{b})} = \dim_{\mathfrak{Z}} \alpha(\overline{Q(\bar{b})}) = \dim_{\mathfrak{Z}} \overline{Q(\bar{a})}$ puisqu'un automorphisme est un homéomorphisme.

(c) Si Q est un constructible Y-définissable, alors $\dim_{\mathfrak{Y}} Q = \dim_{\mathfrak{Y}} \overline{Q} = \dim_{\mathfrak{Z}} \overline{Q} \geqslant \dim_{\mathfrak{Z}} Q \geqslant \dim_{\mathfrak{Y}} Q$, on a donc égalité partout. ■

Lemme 2.34

(a) *Si* $\mathfrak{Y} \preccurlyeq \mathfrak{Z}$ *,* $\dim_{\mathfrak{Z}}$ *est définissable et* $\dim_{\mathfrak{Y}} = \dim_{\mathfrak{Z}}$ *, alors* $\dim_{\mathfrak{Y}}$ *est définissable.*

(b) *Si* $\mathfrak{Y}$ *et* $\mathfrak{Z}$ *sont* $\aleph_0$*-saturées, alors* $\dim_{\mathfrak{Y}}$ *est définissable ssi* $\dim_{\mathfrak{Z}}$ *est définissable ; et en ce cas les deux sont définissables par les mêmes formules.*

■ D'abord il est nécessaire de préciser la notation $\pi[Q,k]$ introduite en section 1.4 en indiquant le modèle dans lequel on calcule la dimension des π-fibres. Soit donc $\pi_{\mathfrak{M}}[Q,k]$ l'ensemble des points de $\pi[Q]$ tels que $\dim_{\mathfrak{M}}(\pi^{-1}(a) \cap Q) = k$ (éventuellement vu à l'intérieur d'un modèle plus grand).

(a) Puisque les dimensions $\dim_{\mathfrak{Y}}$ et $\dim_{\mathfrak{Z}}$ coïncident, on a $\pi_{\mathfrak{Y}}[Q,k] = \pi_{\mathfrak{Z}}[Q,k] \cap Y^{<\omega} = d_{\mathfrak{Y}}(\pi_{\mathfrak{Z}}[Q,k])$ ce qui est Y-définissable par stabilité de la théorie.

(b) Vu que les dimensions dans $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{Z}$ coïncident par le corollaire 2.23 (a), c'est presque évident. Il suffit de considérer le cas $\mathfrak{Y} \preccurlyeq \mathfrak{Z}$ en passant à une extension $\aleph_0$-saturée commune.

- Si $\dim_{\mathfrak{Z}}$ est définissable, alors (a) donne la définissabilité de $\dim_{\mathfrak{Y}}$.
- Supposons donc que $\dim_{\mathfrak{Y}}$ soit définissable. Soit Q un constructible $\emptyset$-définissable, k un entier fixé et $A \subseteq Y$ un ensemble fini de paramètres qui permet de définir $\pi_{\mathfrak{Y}}[Q,k]$.

  Si $\bar{a} \in \pi_{\mathfrak{Y}}[Q,k]$ (mais pas forcément dans $Y^{<\omega}$), alors par saturation, il existe $\bar{b} \in Y^{<\omega}$ tel que $\mathfrak{tp}(\bar{a}/A) = \mathfrak{tp}(\bar{b}/A)$. Comme $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont conjugués par un $\mathfrak{Z}$-automorphisme fixant A, donc $\pi_{\mathfrak{Y}}[Q,k]$, on a $\bar{b} \in \pi_{\mathfrak{Y}}[Q,k]$. Donc le lemme 2.22 donne $\dim_{\mathfrak{Z}} Q(\bar{a}) = k$, c.-à-d. $\pi_{\mathfrak{Y}}[Q,k] \subseteq \pi_{\mathfrak{Z}}[Q,k]$.

Soit maintenant $\bar{b} \in \pi_{\mathfrak{Z}}[Q,k]$. On peut envoyer $\bar{b}$ dans Y par un automorphisme α fixant A. Toujours par le lemme 2.22, on trouve $\dim_{\mathfrak{Y}} Q(\alpha(\bar{a})) = k$, donc $\alpha(\bar{a}) \in \pi_{\mathfrak{Y}}[Q,k]$. Puisque α laisse $\pi_{\mathfrak{Y}}[Q,k]$ invariant, on peut conclure que $\bar{b} \in \pi_{\mathfrak{Y}}[Q,k]$.

En somme, on obtient $\pi_{\mathfrak{Z}}[Q,k] = \pi_{\mathfrak{Y}}[Q,k]$. En particulier, les dimensions sont définissables par les mêmes formules. ■

Définissabilité uniforme de la dimension

Définition 2.35 *La dimension est* **uniformément définissable** *dans un modèle de T ou* **définissable dans** T *ssi elle est définissable dans tous les modèles.*

Remarque 2.36 D'après le lemme 2.34 (b), si la dimension est uniformément définissable, alors dans tout modèle $\aleph_0$-saturé elle est définie par les mêmes formules qui seront simplement notées $\pi[Q,k]$. La preuve du lemme 2.34 (a) montre en plus que dans un modèle $\mathfrak{M}$ quelconque, la dimension est définie par les formules $\pi_{\mathfrak{M}}[Q,k] = d_{\mathfrak{M}}(\pi[Q,k])$.

Lemme 2.37

(a) *Si la dimension est uniformément définissable, alors les dimensions coïncident dans tous les modèles.*

(b) *Si la dimension est uniformément définissable, alors $\{\dim Q(\bar{a}) \mid \bar{a} \in Z\}$ est fini pour tout constructible Q et tout modèle $\mathfrak{Z}$ de T.*

■ (a) Les dimensions coïncident dans les modèles $\aleph_0$-saturés d'après le corollaire 2.23 (a). Puis, soit $\mathfrak{Y}$ un modèle quelconque et $\mathfrak{Z}$ une extension $\aleph_0$-saturée. Soit Q un constructible $\emptyset$-définissable et $\bar{a} \in Y^{<\omega}$. Alors

$$\begin{aligned} \dim_{\mathfrak{Y}} Q(\bar{a}) = k \quad &\text{ssi} \quad \bar{a} \in \pi_{\mathfrak{Y}}[Q,k] \cap Y^{<\omega} = d_{\mathfrak{Y}}(\pi[Q,k]) \cap Y^{<\omega} = \pi[Q,k] \cap Y^{<\omega} \\ &\text{ssi} \quad \dim_{\mathfrak{Z}} Q(\bar{a}) = k. \end{aligned}$$

(On peut toujours s'arranger pour qu'il y ait des paramètres : si Q est $\emptyset$-définissable, alors $Q = Q'(a)$ pour tout $a \in Y$ où $Q' := Q \times Y$).

(b) Supposons que $\pi[Q] = \bigcup_{\imath \in I} \pi_{\mathfrak{Z}}[Q,k_i]$ ne soit pas une réunion finie dans un modèle $\mathfrak{Z}$. Vu que les dimensions coïncident dans tous les modèles, on peut supposer que $\mathfrak{Z}$ est $\aleph_0$-saturée : le passage à une extension $\aleph_0$-saturée ne fait qu'ajouter éventuellement quelques dimensions de π-fibres en plus.

Donc, dans une extension suffisamment saturée de $\mathfrak{Z}$, on peut réaliser $\{\bar{x} \in \pi[Q], x \notin \pi[Q,k_i] \mid \forall i \in I\}$. Mais $\bar{x}$ ayant un conjugué dans $\mathfrak{Z}$, la dimension de la π-fibre de Q

au-dessus de $\bar{x}$ est un certain k_i pour $i \in I$: contradiction à la définissabilité uniforme des dimensions dans les modèles $\aleph_0$-saturés ! ■

Théorème 2.38 *S'il existe une prégéométrie de Zariski* $\mathfrak{Z}$ $\aleph_0$*-saturée, conforme, et dans laquelle la dimension est définissable, alors tout modèle de* $\mathrm{Th}(\mathfrak{Z})$ *est conforme, et dans tout modèle la dimension coïncide avec le rang de Cantor et le rang de Morley.*

■ Soit d'abord $\mathfrak{Y}$ un autre modèle $\aleph_0$-saturé. Alors les dimensions $\dim_{\mathfrak{Z}}$ et $\dim_{\mathfrak{Y}}$ coïncident d'après le corollaire 2.23 (a). Puis la dimension est définissable dans $\mathfrak{Y}$ par le lemme 2.34 (b) et $\mathfrak{Y}$ est conforme par le lemme 2.33 (b), en particulier la dimension dans $\mathfrak{Y}$ coïncide avec le rang de Cantor, qui est égal au rang de Morley puisque $\mathfrak{Y}$ est $\aleph_0$-saturé.

Soit maintenant $\mathfrak{Y}$ un modèle quelconque. On peut supposer qu'il est sous-structure élémentaire de $\mathfrak{Z}$. Les dimension dans $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{Z}$ coïncident d'après la remarque 2.36, donc le lemme 2.33 (a) s'applique, c.-à-d. $\mathfrak{Y}$ est conforme. En particulier sa dimension est égale à son rang de Cantor, et on a aussi égalité avec le rang de Morley, car $\dim_{\mathfrak{Y}} = \dim_{\mathfrak{Z}} = \mathrm{RM}$. Finalement, la dimension dans $\mathfrak{Y}$ est définissable à cause du lemme 2.34 (a). ■

Définition des géométries de Zariski

Définition 2.39 *Une* **géométrie de Zariski** *est une prégéométrie de Zariski* $\mathfrak{Z}$ *telle que*

- $\mathfrak{Z}$ *est élémentaire dans un langage dénombrable ;*
- *la dimension est uniformément définissable et finie ;*
- *tous les modèles de* $\mathrm{Th}(\mathfrak{Z})$ *sont conformes.*

Théorème 2.40

(a) *Si* $\mathfrak{Z}$ *est une géométrie de Zariski et* $\mathfrak{Y} \equiv \mathfrak{Z}$*, alors* $\mathfrak{Y}$ *est naturellement une géométrie de Zariski.*

(b) *Une géométrie de Zariski est une structure* $\aleph_0$*-stable de rang de Morley fini. Le rang de Morley est égal à la dimension topologique.*

■ Tout est fait pour ! ■

Théorème 2.41 *La dimension est additive dans une géométrie de Zariski.*

■ Le théorème découle du lemme suivant, en appliquant le théorème 1.45. ■

Lemme 2.42 *Soit $\mathfrak{Z}$ une prégéométrie de Zariski élémentaire et conforme et soit $\pi : Z^n \to Z^k$ une projection. Si la dimension est uniformément définissable par rapport à π, alors π est additive.*

■ D'abord l'inégalité $\dim Q \geqslant \dim \pi[Q] + \pi\text{-gdim}\, Q$ est donnée par la semi–additivité du lemme 1.38. Puis montrons l'autre inégalité par récurrence sur $\dim \pi[Q]$:

• Si $\dim \pi[Q] = 0$, c.-à-d. $\pi[Q] = \{a\}$, alors $Q = Q(a)$, donc $\dim Q = 0 + \dim Q(a) = \dim \pi[Q] + \pi\text{-gdim}\, Q$.

• Soit donc $\dim \pi[Q] > 0$. Supposons, par l'absurde, que $\dim Q > \dim \pi[Q] + \pi\text{-gdim}\, Q$ avec $\dim Q$ minimale. Soit $d := \pi\text{-gdim}\, Q$.

Par conformité, il existe une infinité d'hypersurfaces H_i $(i \in \omega)$ de Q. On peut en plus supposer que $\pi[Q, gen]$ est dense dans $\pi[H_i]$ pour tout i. Par récurrence et minimalité de $\dim Q$, la dimension est additive pour tous les H_i. Donc

$$\begin{aligned}\dim \pi[Q] + \pi\text{-gdim}\, Q \;&\leqslant\; \dim Q - 1 \;=\; \dim H_i \;= \\ &\dim \pi[H_i] + \pi\text{-gdim}\, H_i \;\leqslant\; \dim \pi[Q] + \pi\text{-gdim}\, Q\end{aligned}$$

montre que $\dim \pi[H_i] = \dim \pi[Q]$ et $\pi\text{-gdim}\, H_i = \pi\text{-gdim}\, Q = d$ pour tout H_i.

Alors pour tout $n \in \omega$, on peut trouver un ouvert U_n de $\overline{\pi[Q]}$ tel que :

- $U_n \subseteq \pi[H_1, gen] \cap \cdots \cap \pi[H_n, gen] \cap \pi[Q, gen]$ pour $i = 1, \ldots, n$ et
- $\dim(\, H_i(\bar{b}) \cap H_j(\bar{b})\,) < d$ pour tout $\bar{b} \in U_n$ et $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

La première condition est possible parce que $\pi[H_1, gen] \cap \cdots \cap \pi[H_n, gen] \cap \pi[Q, gen]$ est un ouvert de $\pi[Q]$. Pour la deuxième condition, soit on a $\pi[H_i \cap H_j] \subset\subset \pi[Q]$ et il suffit d'éviter cette intersection ; soit $\dim \pi[H_i \cap H_j] = \dim \pi[Q]$. Alors l'additivité appliquée aux composantes irréductibles de $H_i \cap H_j$ donne $\pi\text{-gdim}\,(H_i \cap H_j) < d$, et il suffit de prendre $U_n \subseteq \pi[H_i \cap H_j, gen]$.

Soit $\bar{a}$ une réalisation du type générique de $\pi[Q]$ dans une extension suffisamment saturée. Alors $\bar{a} \in \bigcap_{n\in\omega} U_n$. En particulier, $\bar{a} \in \pi[Q, gen] \cap \bigcap_{\imath \in I} \pi[H_i, gen]$ à cause de la première condition, ce qui entraîne $\dim Q(\bar{a}) = \dim H_i(\bar{a}) = d$ pour tout $i \in \omega$ par la définissabilité uniforme de la dimension. Mais la deuxième condition donne $\dim(H_i(\bar{a}) \cap H_j(\bar{a})) < d$ pour tous $i \neq j$, et évidemment $H_i(\bar{a}) \subseteq Q(\bar{a})$ pour tout $i \in \omega$. Donc $\dim Q(\bar{a}) > d$: contradiction. ■

Ce théorème est à rapprocher à la preuve du théorème 2.15 dans [P2], page 55, où Poizat montre que l'additivité du rang d'un groupe de Borovik se déduit des autres axiomes.

Deuxième partie

CONSTRUCTIONS

Chapitre 3 Variétés et Morphismes

Étant donnée une géométrie de Zariski, il est naturel de considérer des structures interprétables dans cette géométrie. Il y a plusieurs motivations pour cela : D'abord la construction de T^{eq} s'est avérée très importante en théorie de la stabilité pour la compréhension d'une théorie élémentaire. Puis, toutes les branches plus ou moins géométriques des mathématiques ont rencontré la nécessité de définir des variétés, qui ne sont autres que des structures imaginaires d'un comportement géométrique particulièrement bon. En particulier c'est le cas pour la géométrie algébrique, où p.ex. le passage de l'espace affine à l'espace projectif est fondamental. Les groupes quotient d'un groupe algébrique donnent un autre exemple. Finalement, une dernière motivation vient directement de la problématique des conjectures de Zil'ber et Cherlin : s'il s'agit de prouver l'interprétabilité d'un corps dans une géométrie de Zariski, il est indispensable de connaître les structures imaginaires.

De ces trois motivations découlent trois problèmes relatifs aux interprétations :

- Examiner la structure topologique sur les éléments imaginaires.
- Définir une notion raisonnable de variété.
- Examiner les géométries interprétables dans une géométrie de Zariski donnée.

Le problème de la définition des variétés est étroitement lié à celui de la définition des morphismes puisque d'une certaine façon, les deux déterminent « l'essentiel » de la structure géométrique. Sur un plan plus technique, on a des interférences comme la suivante : pour pouvoir définir proprement le produit de deux variétés, il faut connaître les morphismes ; mais on voudrait que les morphismes soient des applications de graphe fermé, pour cela il faut avoir une notion de produit.

Par conséquent, il est impossible de traiter les morphismes et les variétés séparément. Les définitions et les théorèmes montrant leurs propriétés seront forcément imbriqués.

La notion de morphisme définie dans ce chapitre se comporte très bien, elle a de belles propriétés fonctorielles. En revanche, la définition des variétés s'avérera difficile et peu canonique. Une vaste partie de ce chapitre sera consacrée à l'étude des structures topologiques interprétables dans une géométrie de Zariski. La définition de variété qui en résulte ne manque pas d'arbitraire, mais elle est bien adaptée à certains cas.

3.1 LA CATÉGORIE DES PRÉVARIÉTÉS

PRÉVARIÉTÉS

Soit $\mathfrak{Z}$ une géométrie de Zariski fixée.

Notation: Un **ensemble imaginaire** V est une partie définissable W d'une puissance Z^k quotientée par une relation d'équivalence définissable E sur W.

La surjection canonique $W \to W/E$ sera notée p_E (ou simplement p si la relation d'équivalence est claire d'après le contexte).

Une partie $X \subseteq W \times Y$ est appelée E-**saturée** (ou encore p_E-**saturée**) ssi

$$X = (p_E \times \mathrm{id}_Y)^{-1}\Big[(p_E \times \mathrm{id}_Y)[X]\Big]$$

c.-à-d. si X est saturée pour la relation d'équivalence $E \times \Delta(Y)$ (à une permutation des coordonnées près). La E-saturation de X sera notée XE.

Quand on regarde la définition de certaines propriétés importantes de la géométrie algébrique, p.ex. la complétude, ou si l'on essaie de donner une définition raisonnable de morphisme entre géométries de Zariski, on s'aperçoit que ce n'est pas seulement la topologie sur l'ensemble V qu'il faut considérer, ni sur ses puissances V^n, mais la famille des topologies sur les produits $V \times Z^n$.

La définition d'une « prévariété » est une première approche des variétés. Une prévariété est un ensemble imaginaire V muni d'une famille interprétable de topologies noethériennes sur les produits $V \times Z^n$. Précisément :

Définition 3.1

- *$\mathfrak{Z}^k$ est la prévariété d'ensemble de base Z^k et de topologie $\tau_{k+n}[Z]$ sur $Z^k \times Z^n$.*
- *Une **sous-$\mathfrak{Z}$-prévariété** d'une prévariété $\mathfrak{V}$ est une partie définissable W avec les topologies induites sur $W \times Z^n$ (notation : $\mathfrak{W} = \mathfrak{V}\restriction_W \subseteq \mathfrak{V}$).*
- *Une **$\mathfrak{Z}$-prévariété quotient** d'une prévariété $\mathfrak{V}$ est le quotient de V par une relation d'équivalence définissable E avec les topologies quotient sur $V/E \times Z^n$ (notation : $\mathfrak{V}/E$).*
- *Une **$\mathfrak{Z}$-prévariété** $\mathfrak{V}$ est un élément de la plus petite classe de structures close par sous-prévariétés et quotients et contenant les $\mathfrak{Z}^k$.*

S'il est clair au contexte de quelle géométrie de Zariski de base (ici $\mathfrak{Z}$) il s'agit, je parlerai plus simplement de « prévariété » au lieu de « $\mathfrak{Z}$-prévariété ». La même convention sera d'ailleurs valable pour toutes les définitions dans ce style.

Si $\mathfrak{V}$ est une $\mathfrak{Z}$-prévariété, alors toutes les topologies sur $V \times Z^n$ sont noethériennes ; elles sont de dimension finie si les dimensions des Z^{k+n} sont finies.

Remarque 3.2 La définition compliquée est nécessaire puisqu'on ne peut pas toujours identifier les prévariétés avec leurs ensembles (imaginaires) de base. Bien que, par un théorème de la théorie des modèles qui dit que $(Z^{eq})^{eq} = Z^{eq}$, tout ensemble de base soit de la forme W/E où W est une partie définissable d'un Z^k et E une relation d'équivalence définissable sur W, il est imaginable qu'on trouve des topologies différentes selon la construction :

Supposons que E soit une relation d'équivalence définissable sur W, que W' soit une partie définissable de W, et que $V = W'/(E\restriction_{W'})$. Alors on peut avoir deux structures de prévariétés sur V :

$$\begin{tikzcd}
 & & W \arrow[dll] & & \\
W/E & & & & W' \arrow[ull, "\subseteq"'] \arrow[dl] \\
 & V \arrow[ul, "\subseteq"] \arrow[rr, equal, "\overset{\mathrm{id}}{\longleftarrow}"] & & W' / (E\restriction_{W'}) &
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

En prenant les topologies induites et quotient rendant les flèches continues, on obtient deux topologies a priori distinctes sur V. La topologie induite par la topologie quotient (à gauche dans le diagramme) étant incluse dans la topologie quotient de la topologie induite (à droite dans le diagramme), l'identité de V est continue dans le sens de la flèche en bas.

Les deux topologies peuvent être différentes à cause du phénomène suivant : Un fermé F de $W'/(E\restriction_{W'})$ provient d'un fermé $\tilde{F}$ de W' qui est $E\restriction_{W'}$-saturé. Pour que F soit aussi fermé dans l'autre topologie, il faudrait qu'il existe un fermé E-saturé F' de W tel que $F = F' \cap W'$, ce qui n'est pas le cas a priori.

(C'est le cas p.ex. si W' est fermé dans W, ou si l'adhérence de $\tilde{F}$ dans W est encore E-saturée.)

Définition 3.3 *Une* construction *d'une prévariété* $\mathfrak{V}$ *est une suite finie* $\mathfrak{V}_0, \ldots, \mathfrak{V}_n$ *de prévariétés et* $c \in \{0,1\}$ *tels que*

- $\mathfrak{V}_n = \mathfrak{V}$ *et* $\mathfrak{V}_0 = \mathfrak{Z}^k$ *pour un certain* k *;*
- $\mathfrak{V}_{i+1}$ *est une sous-prévariété propre de* $\mathfrak{V}_i$ *pour* $i \equiv c \pmod 2$ *;*
- $\mathfrak{V}_{i+1}$ *est une prévariété quotient propre de* $\mathfrak{V}_i$ *pour* $i \equiv c+1 \pmod 2$.

Il est clair d'après la définition que toute prévariété possède une construction, mais une prévariété (à isomorphisme près) peut avoir plusieurs constructions. Toute propriété fonctorielle doit être indépendante d'une construction particulière. Supposons toutefois une construction $\mathfrak{V}_0,\dots,\mathfrak{V}_n$ choisie pour toute prévariété $\mathfrak{V}$ de façon que $\mathfrak{V}_0,\dots,\mathfrak{V}_{n-1}$ soit la construction choisie pour $\mathfrak{V}_{n-1}$.

Il est aussi clair qu'une prévariété quelconque n'a aucune raison d'avoir un bon comportement. C'est surtout une terminologie utile pour la suite, p.ex. pour pouvoir définir des morphismes en toute généralité avant d'entrer dans les détails de la définition des variétés (voir section 3.2).

Définition des Morphismes

La première idée qui vient à l'esprit quand on veut définir les morphismes, c'est de prendre les applications définissables et continues. Il est clair que c'est le minimum qu'il faut exiger : « définissable » pour que les applications soient accessibles à la théorie des modèles ; « continue » pour qu'elles respectent la structure topologique. Mais avec cette définition on n'est pas capable de montrer qu'un produit de deux morphismes est encore un morphisme (cf. 3.12). C'est précisément la propriété qu'il faut ajouter à la définition :

Définition 3.4 *Un $\mathfrak{Z}$-morphisme entre $\mathfrak{Z}$-prévariétés $\mathfrak{V}_1$ et $\mathfrak{V}_2$ est une application définissable $f : V_1 \to V_2$ telle que l'application $f \times \mathrm{id}_{Z^n} : V_1 \times Z^n \to V_2 \times Z^n$ soit continue pour tout $n \in \omega$.*

Rappelons qu'une application est dite « définissable » si son graphe est définissable. En prenant $n = 0$, un morphisme est en particulier une application continue. De nouveau, si la géométrie de Zariski de base est clair, le préfixe « $\mathfrak{Z}$- » sera omis.

Exemple 3.5

- Toute application de compatibilité $\mathfrak{Z}^k \to \mathfrak{Z}^m$ est un morphisme
- Si $\mathfrak{W}$ est une sous-$\mathfrak{Z}$-prévariété de la $\mathfrak{Z}$-prévariété $\mathfrak{V}$, alors l'inclusion $i : W \hookrightarrow V$ est un $\mathfrak{Z}$-morphisme.
- Si $\mathfrak{V}$ est une $\mathfrak{Z}$-prévariété et E une relation définissable sur V, alors la surjection canonique $p_E : V \twoheadrightarrow V/E$ est un $\mathfrak{Z}$-morphisme.

On pourrait même reformuler la compatibilité plus proprement :

Remarque 3.6 Une géométrie de Zariski est compatible ssi les applications suivantes sont des morphismes : les projections, les permutations de coordonnées, les applications diagonales, et les applications constantes.

Proposition 3.7 *Les $\mathfrak{Z}$-prévariétés avec les $\mathfrak{Z}$-morphismes forment une catégorie $\mathfrak{Z}$-$\mathfrak{Pvt}$ (ou $\mathfrak{Pvt}$ tout court).*

■ Pour toute prévariété $\mathfrak{V}$, l'identité $\mathrm{id}_{\mathfrak{V}}$ est un morphisme : $\mathrm{id}_{\mathfrak{V}} \times \mathrm{id}_{Z^n}$ est trivialement continue. La définissabilité se démontre par récurrence sur la longueur de la construction : $\Gamma_{\mathrm{id}_{Z^n}} = \Delta(Z^n)$ est définissable ; si $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{W}$, alors $\Gamma_{\mathrm{id}_{\mathfrak{V}}} = \Gamma_{\mathrm{id}_{\mathfrak{W}}} \cap (V \times V)$ est définissable ; finalement, si $\mathfrak{V} = \mathfrak{W}/E$, alors $(p_E \times p_E)^{-1}[\Gamma_{\mathrm{id}_{\mathfrak{V}}}] = E$ est définissable.

Puis, soient $f : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ et $g : \mathfrak{W} \to \mathfrak{X}$ deux morphismes, alors $(g \circ f) \times \mathrm{id}_{Z^n} = (g \times \mathrm{id}_{Z^n}) \circ (f \times \mathrm{id}_{Z^n})$ est continue comme composition d'applications continues, et évidemment $g \circ f$ est définissable. ■

Produits de prévariétés

Remarque 3.8 Malheureusement, le fait qu'on ne puisse pas identifier une prévariété avec son ensemble de base empêche une définition simple du produit. P.ex. si l'on suppose que $\mathfrak{V}' \times \mathfrak{W}'$ existe, si $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}'/E$ et $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{W}'$, alors on a la même situation que dans la remarque 3.2 :

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathfrak{V}' \times \mathfrak{W}' \arrow[drr] & & \\
V' \times W \arrow[urr, "\subseteq"] \arrow[dr] & & & & V \times W' \\
 & V \times W \arrow[rr, "\mathrm{id}"] & & V \times W \arrow[ur, "\subseteq"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.8}$$

$\left(\begin{array}{l}\text{Toutes les flèches}\\ \text{sont continues.}\end{array}\right)$

Il est facile de voir que les deux topologies sur $V \times W$ rendent les projections sur V et W continues. S'il existe un produit $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ et si son ensemble de base est $V \times W$, alors le produit ne peut être que la structure sur $V \times W$ à droite dans le diagramme.

Pour montrer que ceci donne un produit dans la catégorie $\mathfrak{Pvt}$, il faudrait montrer qu'étant donnés deux morphismes $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{V}$ et $g : \mathfrak{X} \to \mathfrak{W}$, l'application $(f, g) : \mathfrak{X} \to \mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ est encore un morphisme. On la décompose facilement en

$$X \xrightarrow{\delta_X} X \times X \xrightarrow{f \times \mathrm{id}_X} V \times X \xrightarrow{\mathrm{id}_V \times g} V \times W,$$

ce qui réduit le problème à montrer que $f \times \mathrm{id}_X$ est encore un morphisme pour tout morphisme $f : \mathfrak{V}_1 \to \mathfrak{V}_2$ et toute prévariété $\mathfrak{X}$. (L'application diagonale δ ne pose pas de problème). Ceci nécessite la définition des produits $\mathfrak{V}_i \times \mathfrak{X}$ pour toute prévariété $\mathfrak{X}$. On est donc obligé de montrer la propriété de continuité et de construire les produits simultanément par récurrence sur les constructions. Mais selon l'étape de récurrence (premier ou deuxième facteur du produit), on aurait besoin des deux structures de produit de 3.8 ce qui est exclu.

Cet obstacle apparaît même dans le cas des puissances $\mathfrak{V} \times \ldots \times \mathfrak{V}$ d'une prévariété, il me semble inévitable. Par contre, le produit de n'importe quelle prévariété $\mathfrak{V}$ avec $\mathfrak{Z}^k$ existe. L'ensemble de base est $V \times Z^k$ et les topologies sont celles de la prévariété $\mathfrak{V}$. La propriété de continuité vient alors de la définition des morphismes.

Question: La catégorie $\mathfrak{Pvt}$, admet-elle des produits finis?

Cependant, il est indispensable d'avoir une notion de produit de variétés. Plusieurs solutions sont envisageables : soit on ajoute des conditions techniques pour faire marcher la preuve (D et E), soit on se restreint à une sous-catégorie $\mathfrak{Pvt}_0$ telle que le foncteur d'oubli $U : \mathfrak{Pvt}_0 \to \mathfrak{Ens}$ devienne injectif (A à C).

(A) On pourrait se restreindre à des sous-prévariétés fermées. Alors le problème 3.2 n'apparaît pas : toute sous-prévariété d'un quotient est un quotient d'une sous-prévariété et on peut identifier une prévariété avec son ensemble de base.

(B) On pourrait définir les prévariétés comme des quotients de sous-prévariétés des Z^k, sans admettre de sous-prévariétés.

(C) Une variante plus astucieuse de la dernière solution serait de redéfinir la notion de sous-prévariété :

Si $V \subseteq W/E$, alors au lieu de munir $V \times Z^n$ de la topologie induite, on remonte à $\widetilde{V} := p_E^{-1}[V]$, on prend la topologie induite sur $\widetilde{V} \times Z^n$ et puis la topologie quotient de $p_E \restriction_{\widetilde{V}} \times \mathrm{id}_{Z^n} : \widetilde{V} \times Z^n \twoheadrightarrow V \times Z^n$.

Alors toute prévariété s'écrirait comme un quotient d'une partie d'un Z^k ; l'inclusion $\mathfrak{V} \hookrightarrow \mathfrak{W}/E$ resterait toujours un morphisme.

(D) On pourrait définir les morphismes comme étant des applications f telles que $f \times \mathrm{id}_{\mathfrak{W}}$ soit continue pour toute prévariété $\mathfrak{W}$. Alors on peut démontrer qu'il y a des produits dans $\mathfrak{Pvt}$.

(E) On pourrait se restreindre à certaines relations d'équivalence. Une possibilité est de ne considérer que des relations d'équivalence « admissibles » qui seront définies plus loin.

(D) est une mauvaise solution puisqu'il devient pratiquement impossible de vérifier si une application est un morphisme ; et il n'est pas clair qu'il reste assez de morphismes. (A) à (C) sont des variantes de la même idée, mais (A) me semble trop restrictif, et ne pas disposer de sous-prévariétés pose des problème en pratique. La solution (C), qui est plus générale que

(A) et (B), a le défaut plutôt esthétique que les sous-prévariétés ne sont pas définies d'une façon intrinsèque.

C'est la solution (E) que je vais adopter ici puisque la restriction aux relations d'équivalence admissibles s'imposera aussi pour d'autres raisons (cf. 3.28). Néanmoins, la condition d'admissibilité n'est pas entièrement satisfaisante, vu qu'elle est plus technique qu'intuitive et qu'il est possible qu'elle s'avère difficilement vérifiable dans des cas particuliers.

Prévariétés admissibles

Définition 3.9

- *Une relation d'équivalence définissable E sur une prévariété $\mathfrak{W}$ est* **admissible** *si l'adhérence de Q est E-saturée pour tout n et tout constructible E-saturé $Q \subseteq W \times Z^n$.*
- *Une prévariété admissible est une prévariété qui admet une construction dont tous les quotients sont des quotients par des relations d'équivalence admissibles.*

De façon équivalente (par passage au complémentaire), on pourrait demander dans la définition d'« admissible » que l'intérieur de tout constructible E-saturé soit encore E-saturé.

Les prévariétés admissibles, avec les morphismes de prévariétés, forment une catégorie notée $\mathcal{A}\mathsf{dm}$ (ou $\mathfrak{Z}$–$\mathcal{A}\mathsf{dm}$).

Théorème 3.10 *La catégorie $\mathcal{A}\mathsf{dm}$ admet des produits finis.*

■ Toutes les prévariétés considérées seront dans $\mathcal{A}\mathsf{dm}$. Soit $\mathrm{ht}(\mathfrak{V})$ la longueur de la construction fixée de $\mathfrak{V}$. D'abord, je définirai une prévariété $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ par récurrence sur $(\mathrm{ht}(\mathfrak{V}), \mathrm{ht}(\mathfrak{W}))$. Cette définition nécessite les propriétés (a) et (b) définies plus loin qui seront montrées par récurrence également. Les deux récurrences sont imbriquées, mais pour des raisons de clarté je les traite séparément.

Puis je montrerai qu'il s'agit d'un produit dans la catégorie $\mathcal{A}\mathsf{dm}$, ce qui entraînera en particulier que la définition de $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ est indépendante des constructions choisies.

Définition du produit :

- Si $\mathfrak{V}$ est une prévariété admissible quelconque et $\mathfrak{W} = \mathfrak{Z}^k$, alors soit $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ la prévariété dont l'ensemble de base est $V \times W = V \times Z^k$ et dont la topologie sur $(V \times W) \times Z^n = V \times Z^{k+n}$ est celle de la prévariété $\mathfrak{V}$.

  Si $\mathfrak{V} = \mathfrak{Z}^k$ et $\mathfrak{W}$ est quelconque, alors soit $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ la prévariété isomorphe à $\mathfrak{W} \times \mathfrak{V}$ via l'application $(v, w) \mapsto (w, v)$.

- Supposons que $\mathrm{ht}(\mathfrak{V}) \neq 0 \neq \mathrm{ht}(\mathfrak{W})$, et soient $\mathfrak{V}', \mathfrak{W}'$ les prévariétés précédant $\mathfrak{V}$ resp. $\mathfrak{W}$ dans les constructions choisies. Supposons le produit $\mathfrak{V}' \times \mathfrak{W}'$ défini par récurrence. Il y a trois cas :
  - Si $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{V}'$ et $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{W}'$, alors posons $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W} := (\mathfrak{V}' \times \mathfrak{W}')\restriction_{V \times W}$.
  - Si $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}/E_1$ et $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}'/E_2$, alors posons $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W} := (\mathfrak{V}' \times \mathfrak{W}')/(E_1 \times E_2)$.
  - Si l'on a une situation mixte, p.ex. $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}/E$ et $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{W}'$ comme en 3.8, alors on montrera que l'identité dans 3.8 est un isomorphisme, c.-à-d. que la topologie induite sur $V \times W$ par la topologie quotient sur $V' \times W$ est la même que la topologie quotient de la topologie induite sur $V \times W'$. Le produit $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ sera alors l'unique prévariété sur $V \times W$ que l'on obtient à partir de $\mathfrak{V}' \times \mathfrak{W}'$ en prenant des topologies induites et quotient.

Cette définition des produits est symétrique en $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{W}$, c.-à-d. $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ est isomorphe à $\mathfrak{W} \times \mathfrak{V}$ via l'application $(v, w) \mapsto (w, v)$.

Unicité du produit dans la situation 3.8 :

Montrons par récurrence sur $(\mathrm{ht}(\mathfrak{V}), \mathrm{ht}(\mathfrak{W}))$ les propriétés suivantes :

(a) Soient $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ dans $\mathcal{A}\mathbf{dm}$ et E une relation d'équivalence admissible sur V. Supposons que le produit $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ soit défini. Alors pour tout constructible E-saturé Q de $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$, l'adhérence de Q est encore E-saturée.

(b) Si l'on a la situation 3.8 dans $\mathcal{A}\mathbf{dm}$, alors l'identité est un homéomorphisme.

Soient $\mathfrak{V}'$ et $\mathfrak{W}'$ comme ci-dessus.

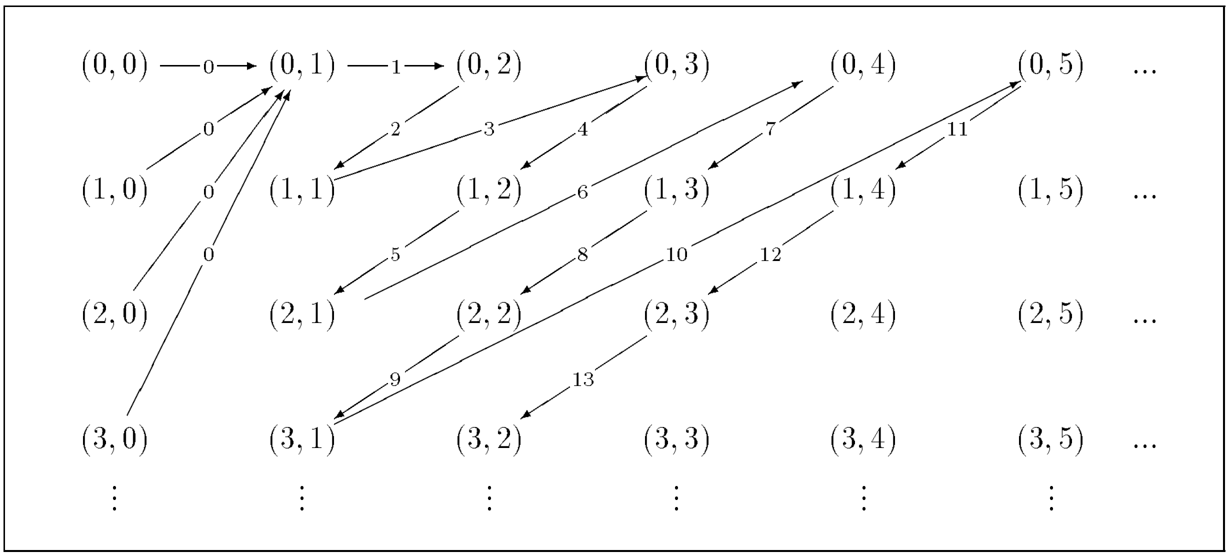
- Par définition d'« admissible », (a) est vrai au niveau $(n, 0)$ pour tout n.
- Supposons que $\mathfrak{V}' \times \mathfrak{W}'$ soit défini, que l'on ait la situation 3.8 et que (a) soit vraie pour $(\mathfrak{V}', \mathfrak{W}')$. Soit F un fermé de $V \times W$ « à gauche », c.-à-d. il existe un fermé $\widetilde{F}$ de $\mathfrak{V}' \times \mathfrak{W}'$ tel que $Q := \widetilde{F} \cap (V' \times W)$ soit E-saturé et $(p_{E\restriction_{V'}} \times \mathrm{id}_W)[Q] = F$.

  Alors par (a), $\overline{Q}$ (dans $\mathfrak{V}' \times \mathfrak{W}'$) est encore E-saturé, donc $(p_E \times \mathrm{id}_W)[\overline{Q}]$ est fermé, c.-à-d. $F = (p_E \times \mathrm{id}_W)[\overline{Q}] \cap (V \times W)$ est fermé — « à droite » ! Cela démontre (b) et permet de définir le produit $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$.
- Supposons que (a) soit vraie pour $(\mathfrak{V}, \mathfrak{W}')$ et pour $(\mathfrak{V}', \mathfrak{W})$, et que (b) soit vraie pour $(\mathfrak{V}', \mathfrak{W}')$. Montrons alors que (a) est vraie pour $(\mathfrak{V}, \mathfrak{W})$. Il y a deux cas :
  - supposons d'abord que $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{W}'$. Par récurrence, $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ est définie et porte la topologie induite de $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}'$. Si $Q \subseteq V \times W$ est un constructible E-saturé, il est aussi constructible E-saturé dans $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}'$, donc par l'hypothèse, son adhérence $\overline{Q}$ dans

$\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}'$ est encore E-saturé. L'adhérence de Q dans $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ étant $\overline{Q} \cap (V \times W)$, elle reste E-saturée.

– Dans le deuxième cas, soit $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}'/E'$. Cette fois-ci, $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ est définie comme étant le quotient de $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}'$. Soit $Q \subseteq V \times W$ un constructible E-saturé, $(\mathrm{id}_V \times p_{E'})^{-1}[Q]$ est donc un constructible $E' \times E$-saturé de $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}'$. Par hypothèse, la propriété (a) s'applique à E et à E'. Par conséquent l'adhérence de $(\mathrm{id}_V \times p_{E'})^{-1}[Q]$ est encore $E' \times E$-saturé, et $\overline{Q} = (\mathrm{id}_V \times p_{E'})\left[\overline{(\mathrm{id}_V \times p_{E'})^{-1}[Q]}\right]$ est E-saturé.

La récurrence marchera finalement le long du schéma suivant : les couples indiquent le niveau $(\mathrm{ht}(\mathfrak{V}), \mathrm{ht}(\mathfrak{W}))$ et les numéros des arcs l'ordre des étapes de la récurrence.



Le produit est une prévariété admissible :

Le seul point qu'il faut vérifier c'est que le produit de deux relations d'équivalence admissibles est encore admissible. C'est la propriété (a) qui permet de le prouver :

Soient $\mathfrak{V}_i$ dans $\mathcal{A}\mathbf{dm}$ et soit E_i une relation d'équivalence admissible sur V_i ($i = 1, 2$). Si Q est un constructible $(E_1 \times E_2)$-saturé de $\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 \times \mathfrak{Z}^n$, alors par la propriété (a), $\overline{Q}$ est à la fois E_1-saturé et E_2-saturé, donc $(E_1 \times E_2)$-saturé.

Le produit est un produit de la catégorie $\mathcal{A}\mathbf{dm}$:

Fait 3.11 *Les projections* $\pi_i : \mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 \to \mathfrak{V}_i$ *sont des morphismes.*

□ Elles sont évidemment définissables ; la continuité se montre par récurrence sur la longueur des constructions :

- Si $\mathfrak{V} = \mathfrak{Z}^k$ et $\mathfrak{W} = \mathfrak{Z}^m$, alors c'est dans compatibilité (p.ex. 1.14).
- Supposons que $\mathfrak{V}_i \subseteq \mathfrak{W}_i$ où soit $\mathfrak{V}_i = \mathfrak{W}_i$, soit $\mathfrak{W}_i$ précède $\mathfrak{V}_i$ dans la construction. Alors par définition du produit, $\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 = (\mathfrak{W}_1 \times \mathfrak{W}_2)\restriction_{V_1 \times V_2}$.

Si F est un fermé de $\mathfrak{V}_i \times \mathfrak{Z}^n$ (diagramme à gauche), alors

$$(\pi_i \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[F] = (V_1 \times V_2 \times Z^n) \cap (\pi_i' \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}\left[\overline{i[F]}\right]$$

est fermé dans $\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 \times \mathfrak{Z}^n$ par récurrence.

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \times Z^n \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_i \times \mathrm{id}_{Z^n}"] & W_1 \times W_2 \times Z^n \arrow[d, "\pi_i' \times \mathrm{id}_{Z^n}"] \\
V_i \times Z^n \arrow[r, hook, "i"] & W_i \times Z^n
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \times Z^n \arrow[d, "\pi_i \times \mathrm{id}_{Z^n}"] & W_1 \times W_2 \times Z^n \arrow[l, two heads, "p_{E_1} \times p_{E_2} \times \mathrm{id}_{Z^n}"'] \arrow[d, "\pi_i' \times \mathrm{id}_{Z^n}"] \\
V_i \times Z^n & W_i \times Z^n \arrow[l, two heads, "p_{E_i} \times \mathrm{id}_{Z^n}"']
\end{tikzcd}$$

- Supposons comme dernier cas que $\mathfrak{V}_i = \mathfrak{W}_i/E_i$ où soit $\mathfrak{V}_i = \mathfrak{W}_i$, soit $\mathfrak{W}_i$ précède $\mathfrak{V}_i$ dans la construction. Alors par définition du produit, $\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 = (\mathfrak{W}_1 \times \mathfrak{W}_2)/(E_1 \times E_2)$. Si F est un fermé de $\mathfrak{V}_i \times \mathfrak{Z}^n$ (diagramme à droite), alors $(\pi_i' \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1} \circ (p_{E_i} \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[F]$ est un fermé de $\mathfrak{W}_1 \times \mathfrak{W}_2 \times \mathfrak{Z}^n$ par récurrence, et par ailleurs $E_1 \times E_2$-saturé, donc

$$(\pi_i \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[F] = (p_{E_1} \times p_{E_2} \times \mathrm{id}_{Z^n}) \circ (\pi_i' \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1} \circ (p_{E_i} \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[F]$$

est fermé. $\square$

Supposons maintenant qu'il existe une autre prévariété $\mathfrak{W}$ avec deux morphismes $f_i : \mathfrak{W} \to \mathfrak{V}_i$. Alors il faut montrer que l'application $(f_1, f_2) : \mathfrak{W} \to \mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2$ est un morphisme. (L'unicité de cette application est déjà claire au niveau ensembliste!) Elle se décompose en

$$W \xrightarrow{\delta} W \times W \xrightarrow{f_1 \times \mathrm{id}_W} V_1 \times W \xrightarrow{\mathrm{id}_{V_1} \times f_2} V_1 \times V_2,$$

donc il suffit de démontrer que l'application diagonale δ et les applications $f \times \mathrm{id}_{..}$ sont des morphismes, ce qui sera fait en 3.12 et 3.13.

Fait 3.12 *Soient $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \mathfrak{W}$ dans* **Adm** *et $f : \mathfrak{V}_1 \to \mathfrak{V}_2$ un morphisme, alors l'application $f \times \mathrm{id}_W : \mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{W} \to \mathfrak{V}_2 \times \mathfrak{W}$ est un morphisme.*

$\square$ Il suffit de montrer que cette application est continue (la définissabilité étant claire), ce qui se fait par récurrence sur la longueur de la construction de $\mathfrak{W}$:

- Si $\mathfrak{W} = \mathfrak{Z}^n$, c'est la définition de morphisme (et c'est ici le seul endroit où elle est nécessaire).
- Si $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{W}'$ et F est un fermé de $\mathfrak{V}_2 \times \mathfrak{W}$, alors (diagramme à gauche)

$$(f \times \mathrm{id}_W)^{-1}[F] = (V_1 \times W) \cap (f \times \mathrm{id}_{W'})^{-1}[\overline{iF}]$$

est fermé par récurrence.

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \times W' \arrow[r, "f\times \mathrm{id}_{W'}"] & V_2 \times W' \\
V_1 \times W \arrow[u, hook] \arrow[r, "f\times \mathrm{id}_{W}"] & V_2 \times W \arrow[u, hook, "i"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V_1 \times W' \arrow[r, "f\times \mathrm{id}_{W'}"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{id}_{V_1}\times p"'] & V_2 \times W' \arrow[d, two heads, "\mathrm{id}_{V_2}\times p"] \\
V_1 \times W \arrow[r, "f\times \mathrm{id}_{W}"] & V_2 \times W
\end{tikzcd}
$$

- Si $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}'/E$ et F un fermé de $\mathfrak{V}_2 \times \mathfrak{W}$, alors $(f \times \mathrm{id}_{W'})^{-1} \circ (\mathrm{id}_{V_2} \times p)^{-1}[F]$ est un fermé par récurrence, et d'ailleurs E-saturé, donc

$$(f \times \mathrm{id}_W)^{-1}[F] = (\mathrm{id}_{V_2} \times p) \circ (f \times \mathrm{id}_{W'})^{-1} \circ (\mathrm{id}_{V_2} \times p)^{-1}[F]$$

est fermé (diagramme à droite). □

Fait 3.13 *Pour toute prévariété admissible $\mathfrak{V}$, l'application diagonale $\delta : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}^2$, $v \mapsto (v, v)$ est un morphisme.*

□ De nouveau, la définissabilité est claire, et la continuité sera prouvée par récurrence sur la longueur de la construction de $\mathfrak{V}$:

- Si $\mathfrak{V} = \mathfrak{Z}^k$, c'est dans la compatibilité (voir p.ex. 1.14).
- Si $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{W}$ et F est un fermé de $\mathfrak{V} \times \mathfrak{V} \times \mathfrak{Z}^n$, alors $\delta_V^{-1}[F] = V \cap \delta_W^{-1}[\overline{iF}]$ est fermé par récurrence (diagramme à gauche).

$$
\begin{tikzcd}
V \times V \times Z^n \arrow[r, hook, "i"] & W \times W \times Z^n \\
V \times Z^n \arrow[u, "\delta_V \times \mathrm{id}_{Z^n}"] \arrow[r, hook] & W \times Z^n \arrow[u, "\delta_W \times \mathrm{id}_{Z^n}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V \times V \times Z^n & W \times W \times Z^n \arrow[l, two heads, "p\times p\times \mathrm{id}_{Z^n}"'] \\
V \times Z^n \arrow[u, "\delta_V \times \mathrm{id}_{Z^n}"] & W \times Z^n \arrow[l, two heads, "p\times \mathrm{id}_{Z^n}"'] \arrow[u, "\delta_W \times \mathrm{id}_{Z^n}"']
\end{tikzcd}
$$

- Si $\mathfrak{V} = \mathfrak{W}/E$ et F est un fermé de $\mathfrak{V} \times \mathfrak{V} \times \mathfrak{Z}^n$, alors $(\delta_W \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1} \circ (p \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[F]$ est fermé par récurrence, et E-saturé, donc

$$(\delta_V \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[F] = (p \times \mathrm{id}_{Z^n}) \circ \delta_W \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1} \circ (p \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[F]$$

est fermé (diagramme à droite). □

Vu que le produit a les propriétés fonctorielles, il est clair maintenant que la définition est indépendante des constructions choisies d'avance pour les prévariétés, ce qui finit la preuve du théorème. ■

Remarque 3.14 Bien que par le théorème précédent, on évite la situation 3.8, on n'évite pas pour autant celle de 3.2, c.-à-d. le foncteur d'oubli $U : \mathcal{A}\mathfrak{dm} \to \mathcal{E}\mathfrak{ns}$ n'est pas forcément injectif :

Si (dans 3.2) $F \subseteq W'/E'$ est fermé, alors $p_{E'}^{-1}[F] = \overline{W' \cap p_E^{-1}[F]}$ où $p_E^{-1}[F]$ est un fermé de W. Il faudrait que $\overline{p_E^{-1}[F]}$ soit E-saturé pour que F devienne fermé dans V, ce qui serait le cas si $p_E^{-1}[F]$ était E-saturé. Mais cela n'est pas nécessairement le cas, puisque W' n'est pas forcément E-saturé.

LA SOLUTION (C)

Définition 3.15 *Soit* $\mathfrak{Pvt}_0$ *la sous-catégorie de* $\mathfrak{Pvt}$ *des prévariétés de la forme* $\mathfrak{W}/E$ *où* $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{Z}^k$ *pour un certain* k *et* E *est une relation d'équivalence définissable sur* W *.*

Proposition 3.16 *La catégorie* $\mathfrak{Pvt}_0$ *admet des produits finis.*

■ Dans le cas de $\mathfrak{Pvt}_0$, on peut identifier une prévariété avec son ensemble de base (le foncteur d'oubli $U : \mathfrak{Pvt}_0 \to \mathcal{E}\mathfrak{ns}$ est injectif) ; j'écris donc V au lieu de $\mathfrak{V}$.

Soient $V_i = W_i/E_i$ deux prévariétés, $W_i \subseteq Z^{k_i}$, tout définissable. Alors $E_1 \times E_2$ est une relation d'équivalence définissable sur $W_1 \times W_2$, donc il existe une prévariété d'ensemble de base $(W_1 \times W_2)/(E_1 \times E_2)$ dans $\mathfrak{Pvt}_0$ que je note $V_1 \times V_2$.

Pour montrer qu'il s'agit vraiment d'un produit, on démontre les faits 3.12 et 3.13 et puis le théorème 3.10 avec exactement les mêmes preuves. ■

3.2 VARIÉTÉS

Cette section est consacrée à l'analyse des propriétés d'une prévariété et à la définition des variétés. La notion de « variété » devrait répondre à plusieurs exigences :

- Une variété doit satisfaire un maximum des propriétés des géométries de Zariski.
- Les produit de variétés doivent exister.
- La notion doit comprendre les exemples « naturels » : p.ex. les variétés algébriques, les groupes quotient.
- Il faut une compatibilité avec les morphismes.

Pour le premier point, reprenons les propriétés essentielles des géométries de Zariski. On a une famille de topologies noethériennes de dimensions finies telle que : l'ensemble de base est irréductible ; la famille est compatible ; la diagonale est fermée ; la famille admet l'élimination des quanteurs ; la dimension est définissable et additive ; le rang de Morley est égal à la dimension.

Les dernières de ces propriétés concernent des projections. Étant donnée une prévariété $\mathfrak{V}$ quelconque, il y a les projections $V \times Z^{n+k} \to V \times Z^k$ et $V \times Z^{n+k} \to Z^k$ à examiner. Mais puisqu'on veut que les produits de variétés existent, il est raisonnable de se limiter à une sous-catégorie de prévariétés admettant des produits et d'examiner toute la famille des topologies de base $\{Z, V\}$, ou encore des projections $V \times W \to V$ pour des prévariétés $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{W}$, c.-à-d. la famille des topologies noethériennes de base $\{V \mid \mathfrak{V}$ *une* $\mathfrak{Z}$*-prévariété dans la sous-catégorie* $\}$.

Souvent il y aura donc deux sortes de résultats : ceux concernant les projections du type $V \times Z^{n+k} \to V \times Z^k$ et $V \times Z^{n+k} \to Z^k$; et ceux concernant les projections $V_1 \times V_2 \to V_i$ pour des prévariétés admissibles $\mathfrak{V}_i$.

Irréductibilité

J'ai déjà souligné que l'irréductibilité n'était pas un axiome de grande importance. En ce qui concerne les variétés algébriques, il y a une tendance à réserver le mot « variété » pour des structures irréductibles qui n'est pas partagée par tous les auteurs. Surtout dans le cas des groupes (qui vont occuper une grande partie de cette thèse) où « irréductible » correspond à « connexe », il est parfois utile de disposer de sous-groupes ou de quotients non connexe. Je n'exigerai donc pas qu'une variété soit irréductible.

La question de savoir quand une prévariété est irréductible est néanmoins intéressante :

Lemme 3.17

(a) *Une sous-prévariété* $\mathfrak{V}$ *d'une prévariété* $\mathfrak{W}$ *est irréductible ssi* V *est irréductible comme partie de* W.

(b) $V = W/E$ *est irréductible ssi* W *ne s'écrit pas comme réunion de deux parties propres, fermées dans* W *et* E*-saturées.*

(c) *En particulier, si* W *est irréductible, alors* V *l'est aussi.*

■ Facile : voir les généralités sur les espaces noethériens en section 1.1. ■

Séparation

Rappelons que « séparation » veut dire que la diagonale est close. Pour que cela ait un sens, il faut se placer dans une sous-catégorie de $\mathfrak{Pvt}$ ayant des produits. Pour simplifier, les résultats seront présentés pour $\mathcal{A}\mathrm{dm}$.

Définition 3.18 *Une prévariété admissible $\mathfrak{V}$ est* **séparée** *ssi la diagonale $\Delta(V)$ est fermée dans $\mathfrak{V} \times \mathfrak{V}$.*

Proposition 3.19

(a) *Une sous-prévariété d'une prévariété séparée est séparée.*

(b) *Le quotient V/E d'une prévariété V est séparé ssi la relation d'équivalence E est fermée dans $W \times W$.*

(c) *Le produit de deux prévariétés séparées est séparé.*

■ (a) Si $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{W}$, alors $\Delta(V) = \Delta(W) \cap (V \times V)$ est fermée.

(b) V/E est séparée ssi $\Delta(V/E)$ est fermée ssi $p_E^{-1}[\Delta(V/E)] = E$ est fermée dans $V \times V$.

(c) Par définition du produit $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$, les projections π_V et π_W sont continues, donc $\Delta(V \times W) = \pi_V^{-1}[\Delta(V)] \cap \pi_W^{-1}[\Delta(W)]$ est fermée. ■

Corollaire 3.20 *Les points sont fermés dans une prévariété séparée.*

■ Récurrence sur la construction : la propriété passe évidemment aux sous-prévariétés. Pour les quotients, les points de $\mathfrak{V} = \mathfrak{W}/E$ sont fermés ssi $p_E^{-1}(v)$ est fermé pour tout $v \in V$. Mais $p_E^{-1}(v)$ est une fibre de E , donc fermée si $\mathfrak{V}$ est séparée. ■

La propriété de séparation est importante à cause de la proposition 3.42. Il convient donc de demander que seulement les quotients par des relations d'équivalence fermées soient admis pour former les variétés.

COMPATIBILITÉ

Les propriétés de compatibilité passent sans problème aux prévariétés, ce qui vient du fait que les topologies sur les prévariétés sont définies d'une façon canonique (les applications naturelles, inclusions ou surjections canoniques, sont des morphismes), et tout commute. Dans le cas général, on garde le maximum de compatibilité possible :

Proposition 3.21 *Une prévariété est compatible dans ce sens que toute application de compatibilité de type $V \times Z^{n+k} \to V \times Z^k$ ou $V \times Z^{n+k} \to Z^k$ est continue.*

La démonstration marche cas par cas par récurrence sur la longueur de la construction de $\mathfrak{V}$. Puisqu'elle n'est pas essentiellement différente de la preuve de la proposition suivante, je me contente de montrer le résultat suivant qui est plus intéressant :

Proposition 3.22 *La famille de topologies noethériennes de base* $\{V \mid V$ une $\mathfrak{Z}$-prévariété admissible$\}$ *est compatible (dans le sens de la définition 1.12).*

■ Appliquons le critère donné par le lemme 1.13. Tout produit $\mathfrak{V}_1 \times \ldots \times \mathfrak{V}_n$ où les $\mathfrak{V}_i$ sont dans $\boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{dm}$ est encore une prévariété. Donc il suffit de démontrer que pour toutes prévariétés V_i les applications suivantes sons continues :

- la projection $\pi : V_1 \times V_2 \to V_1$;
- les permutations $\bar{\sigma} : V_1 \times \cdots \times V_n \to V_{\sigma 1} \times \cdots \times V_{\sigma n}$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$;
- les augmentations $\varepsilon_a : V_2 \to V_1 \times V_2$, $v \mapsto (a, v)$ pour tout $a \in V_1$;
- l'application diagonale $\delta : V_1 \times V_2 \to V_1 \times V_1 \times V_2$, $(v, w) \mapsto (v, v, w)$.

Pour la projection, l'application diagonale et les permutations, la continuité vient du théorème 3.10 — voir aussi la proposition 3.40. En ce qui concerne les augmentations, il suffit de montrer que les applications constantes $\tilde{a} : V \to W$, $v \mapsto a$, sont des morphismes, puisque l'on peut écrire $\varepsilon_a = (\tilde{a} \times \mathrm{id}_{V_2}) \circ \delta_{V_2}$. Comme d'habitude, la preuve se fait par récurrence sur la longueur des constructions et le début de la récurrence est donné par la compatibilité de la géométrie $\mathfrak{Z}$.

Supposons d'abord $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{V}'$ et $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{W}'$ (avec éventuellement une égalité). Alors $a \in W \subseteq W'$, donc il existe aussi l'application constante $\tilde{a} : \mathfrak{V}' \to \mathfrak{W}'$ que je noterai $\tilde{\tilde{a}}$ pour mieux distinguer. Soit F un fermé de $\mathfrak{W} \times \mathfrak{Z}^n$. Alors

$$(\tilde{a} \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[F] = V \cap (\tilde{\tilde{a}} \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[\overline{iF}]$$

est fermé par récurrence (diagramme à gauche).

$$\begin{tikzcd}
V' \times Z^n \arrow[r, "\tilde{\tilde{a}} \times \mathrm{id}_{Z^n}"] & W' \times Z^n \\
V \times Z^n \arrow[u, hook] \arrow[r, "\tilde{a} \times \mathrm{id}_{Z^n}"] & W \times Z^n \arrow[u, hook, "i"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V' \times Z^n \arrow[r, "\tilde{b} \times \mathrm{id}_{Z^n}"] \arrow[d, "p_E \times \mathrm{id}_{Z^n}"'] & W' \times Z^n \arrow[d, "p_{E'} \times \mathrm{id}_{Z^n}"] \\
V \times Z^n \arrow[r, "\tilde{a} \times \mathrm{id}_{Z^n}"] & W \times Z^n
\end{tikzcd}$$

Puis supposons que $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}'/E$ et $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}'/E'$, de nouveau avec la possibilité que l'un des quotients soit trivial. Soit $b \in p_{E'}^{-1}(a)$ et soit F un fermé de $W \times Z^n$. Alors

$\tilde{b}^{-1} \circ (p_{E'} \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[F]$ est fermé par récurrence, et évidemment E-saturé, puisqu'il est de la forme $V \times ??$. Donc

$$(\tilde{a} \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[F] = (p_E \times \mathrm{id}_{Z^n}) \circ (\tilde{b} \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1} \circ (p_{E'} \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[F]$$

est fermé (diagramme à droite). ■

Élimination des quanteurs et prévariétés pleines

L'analogue de la propriété d'élimination des quanteurs serait de demander que les projections entre les topologies qui interviennent dans une prévariété soient des applications constructibles. Même dans la cas restreint d'une prévariété quelconque, où il n'y a que les projections $V \times Z^n \to Z^n$ et $V \times Z^{n+1} \to V \times Z^n$ à considérer, on n'a que des résultats partiels :

Lemme 3.23 *Soit $\mathfrak{V}$ une prévariété. Alors les projections $\pi : V \times Z^n \to Z^n$ sont des applications constructibles.*

■ Récurrence sur la construction de $\mathfrak{V}$:

- Si $\mathfrak{V} = \mathfrak{Z}^k$, c'est donné par les axiomes des géométries de Zariski.
- Si $\mathfrak{V}' \subseteq \mathfrak{V}''$ et Q est un constructible de $\mathfrak{V}' \times \mathfrak{Z}^n$, alors $i[Q]$ est un constructible de $\mathfrak{V}'' \times \mathfrak{Z}^n$ et donc $\pi'[Q] = (\pi'' \circ i)[Q]$ est constructible par récurrence.

$$\begin{tikzcd}
V'' \times Z^n \arrow[dr, "\pi''"'] & V' \times Z^n \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi'"] & V \times Z^n \arrow[dl, "\pi"] \\
 & Z^n &
\end{tikzcd}$$

- Si $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}'/E$ et Q est un constructible de $\mathfrak{V} \times \mathfrak{Z}^n$, alors $(p \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[Q]$ est un constructible de $\mathfrak{V}' \times \mathfrak{Z}^n$ et donc $\pi[Q] = \pi' \circ (p \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[Q]$ est constructible par récurrence. ■

Si l'on essaie d'appliquer la même preuve aux projections du type $V \times Z^{n+1} \to V \times Z^n$, alors les sous-prévariétés ne posent aucun problème, mais au niveau des quotients on tombe sur le problème suivant : les surjections canoniques p_E ne sont pas forcément des applications constructibles ! Autrement dit, les topologies de la prévariété n'engendrent pas nécessairement toute la structure qui provient de la géométrie de Zariski $\mathfrak{Z}$. D'où la définition suivante :

Définition 3.24 *Une $\mathfrak{Z}$-prévariété $\mathfrak{V}$ est* pleine *ssi toute partie définissable d'un produit $V \times Z^n$ $(n \in \omega)$ est constructible.*

Proposition 3.25 *Soit $\mathfrak{W}$ une prévariété pleine.*

(a) *Une sous-prévariété $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{W}$ est pleine.*

(b) *Une prévariété quotient $\mathfrak{V} = \mathfrak{W}/E$ est pleine ssi toutes les applications $p \times \mathrm{id}_{Z^n} : W \times Z^n \to V \times Z^n$ sont constructibles.*

■ (a) Si $D \subseteq V \times Z^n$ est définissable, alors D est aussi une partie définissable de $W \times Z^n$, donc constructible dans $\mathfrak{W}$ par hypothèse. Donc D s'écrit comme $\beta(F_0, \ldots, F_k)$ où β est une fonction booléenne et les F_i sont des fermés de $W \times Z^n$. Alors les $F_i' := F_i \cap (V \times Z^n)$ sont des fermés de $V \times Z^n$, et évidemment $D = \beta(F_0', \ldots, F_k')$, donc D est constructible dans $\mathfrak{V}$.

(b) Une partie définissable de $V \times Z^n$ est exactement l'image d'une partie définissable de $W \times Z^n$ sous la surjection naturelle $p \times \mathrm{id}_{Z^n}$. Par hypothèse, toute partie définissable de $W \times Z^n$ est constructible, donc la condition que $p \times \mathrm{id}_{Z^n}$ soit une application constructible est exactement ce qu'il faut. ■

Dans une prévariété pleine, toutes les projections deviennent constructibles :

Proposition 3.26 *Si $\mathfrak{V}$ est une prévariété pleine, alors toute projection $\pi : V \times Z^n \to V \times Z^m$ est une application constructible.*

■ Par récurrence sur la construction :
Pour les sous-prévariétés, il n'y a aucun problème. Si Q est constructible dans $W \times Z^n$, alors il est aussi constructible dans $X \times Z^n$ et $\pi \restriction_{W \times Z^n} [Q] = (\pi \circ i)[Q]$ est constructible.

$$\begin{tikzcd}
X \times Z^n \arrow[d, "\pi"'] & W \times Z^n \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[r, two heads, "p \times \mathrm{id}_{Z^n}"] \arrow[d, "\pi \restriction_{W \times Z^n}"'] & V \times Z^n \arrow[d, "\pi'"] \\
X \times Z^m & W \times Z^m \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads, "p \times \mathrm{id}_{Z^m}"] & V \times Z^m
\end{tikzcd}$$

Pour les quotients, $\pi' = (p \times \mathrm{id}_{Z^m}) \circ \pi' \restriction_{W \times Z^n}) \circ (p \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}$ est une application constructible par hypothèse et récurrence. ■

Par contre, cette démonstration ne marche pas forcément pour les projections d'un produit $\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2$; il faudrait d'abord savoir que le produit de deux prévariétés pleines est encore plein. D'autre part, une prévariété quelconque n'a aucune raison a priori d'être une prévariété pleine. Deux problèmes se posent alors :

(1) Trouver des conditions pour qu'une prévariété soit pleine.

(2) Trouver une classe de prévariétés pleines qui soit stable par produit.

Analysons pour cela le problème qui fait qu'une prévariété $\mathfrak{V} = \mathfrak{W}/E$ n'est pas forcément pleine :

La topologie de $V \times Z^n$ se reflète sur $W \times Z^n$: une partie $X \subseteq V \times Z^n$ est ouverte ssi $p_n^{-1}[X]$ est ouvert dans $W \times Z^n$, donc un ouvert de $V \times Z^n$ correspond à un ouvert E-saturé de $W \times Z^n$. Les ouverts E-saturés forment une sous-topologie de la topologie donnée sur $W \times Z^n$ que j'appellerai la E-**topologie**. Le préfixe « E- » se référera à la E-topologie. En particulier, la E-adhérence d'une partie X de $W \times Z^n$, notée $\overline{X}^E$, est le plus petit E-fermé qui contient X.

Par définition, un E-fermé est un fermé E-saturé, et un E-ouvert est un ouvert E-saturé. Par contre, un E-constructible est une combinaison booléenne de E-fermés, il est constructible et E-saturé ; mais inversement, un constructible E-saturé n'est pas toujours E-constructible.

Lemme 3.27 *Les trois énoncés suivants sont équivalents :*

(a) $p_n : W \times Z^n \to V \times Z^n$ *est une application constructible.*

(b) *Toute partie constructible E-saturée de $W \times Z^n$ est E-constructible.*

(c) $\overline{\overline{Q}^E \setminus Q}^E \neq \overline{Q}^E$ *pour tout constructible E-saturé $Q \subseteq W \times Z^n$.*

■ (a) ⇒ (b) Soit $Q \subseteq W \times Z^n$ constructible. Alors il suffit de remonter l'écriture de $p_n[Q]$ comme combinaison booléenne de fermés vers $W \times Z^n$.

(b) ⇒ (a) Soit $Q \subseteq W \times Z^n$ constructible. La E-saturation de Q est encore constructible et elle a le même image sous p_n, donc on peut supposer que Q est E-saturé. L'image d'un E-fermé sous p_n est fermée par définition, donc l'image d'une combinaison booléenne de E-fermés est E-constructible.

(b) ⇔ (c) C'est la caractérisation générale des constructibles (voir après la définition 1.10) appliquée à la E-topologie. ■

Élimination des quanteurs dans les prévariétés admissibles

Puisque la E-saturation d'un constructible quelconque est définissable, donc constructible, il y a beaucoup de constructibles E-saturés. Mais il n'y a pas forcément beaucoup de E-

fermés. On pourrait donc s'assurer de leur existence par la propriété d'admissibilité (qui d'ailleurs a été principalement introduite pour cela).

Proposition 3.28 *Le quotient d'une prévariété pleine par une relation d'équivalence admissible est plein.*

■ Soient $\mathfrak{W}$ une prévariété pleine et $\mathfrak{V} = \mathfrak{W}/E$. Soit $Q \subseteq W \times Z^n$ constructible et E-saturé ; alors il faut montrer que Q est E-constructible. Par admissibilité, $\overline{Q} = \overline{Q}^E$ est E-saturé, donc $\overline{Q} \setminus Q$ et $\overline{\overline{Q} \setminus Q}$ aussi. Donc $\overline{\overline{Q}^E \setminus Q}^E = \overline{\overline{Q} \setminus Q} \subset \overline{Q} = \overline{Q}^E$ et le critère du lemme 3.27 (c) est vérifié. ■

Les prévariétés admissibles répondent parfaitement aux questions (1) et (2) posées plus haut :

Théorème 3.29

(a) *Une prévariété admissible est pleine.*

(b) *Si $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2$ sont des prévariétés admissibles, alors les projections $\pi_i : \mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 \to \mathfrak{V}_i$ sont des applications constructibles.*

■ (a) se déduit immédiatement des propositions 3.25 (a) et 3.28.

(b) Par récurrence sur les constructions :

- Si $\mathfrak{V}_i = \mathfrak{Z}^{k_i}$, alors c'est dans les axiomes des géométries de Zariski.
- Si $\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 \subseteq \mathfrak{W}_1 \times \mathfrak{W}_2$, c'est évident puisque tout constructible de $\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2$ est aussi constructible dans $\mathfrak{W}_1 \times \mathfrak{W}_2$.
- Si $\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 = (\mathfrak{W}_1/E_1) \times (\mathfrak{W}_2/E_2)$, alors les applications p_{E_i} et $p_{E_1} \times p_{E_2}$ sont construc-

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 \arrow[r, "p_{E_1} \times p_{E_2}"] \arrow[d, "\pi_i"'] & \mathfrak{W}_1 \times \mathfrak{W}_2 \arrow[d, "\pi_i'"] \\
\mathfrak{V}_i \arrow[r, "p_{E_i}"] & \mathfrak{W}_i
\end{tikzcd}$$

tibles par la proposition 3.28 et π_i' est constructible par récurrence. Donc l'application $\pi_i = p_{E_i}^{-1} \circ \pi_i' \circ (p_{E_1} \times p_{E_2})$ est une application constructible. ■

Calcul de la dimension

Remarquons d'abord que les définitions de la section 1.4 marchent aussi bien pour une famille de topologies noethériennes compatible quelconque, pas seulement pour une prégéométrie de Zariski. Donc il est raisonnable de se poser la question de savoir si la dimension est définissable ou additive dans une prévariété V. Il est difficile d'imaginer comment on pourrait montrer ces propriétés sans calculer explicitement la dimension des parties définissables. Cela s'avère être assez malaisé — c'est une des raisons pour lesquelles je voudrais me concentrer ici sur les prévariétés admissibles et que je n'essaierai pas de trouver des résultats pour les projections dans une prévariété quelconque.

Une autre raison pratique est la suivante : les preuves de la section 1.4 n'utilisent que la compatibilité, l'élimination des quanteurs et le fait que les points sont fermés. Les résultats restent donc valables dans une famille de topologies noethériennes compatible quelconque, à condition qu'elle « admette l'élimination des quanteurs » et que les points soient fermés.

Proposition 3.30 *Soient $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{W}$ deux prévariétés. Alors les propriétés de conformité, de définissabilité et d'additivité de la dimension passent de $\mathfrak{W}$ à $\mathfrak{V}$.*

■ Si Q est un constructible de $\mathfrak{V}^k \times \mathfrak{Z}^n$, alors Q est aussi constructible dans $\mathfrak{W}^k \times \mathfrak{Z}^n$ et $\dim_{\mathfrak{V}} Q = \dim_{\mathfrak{W}} Q$ (puisque les drapeaux dans Q sont les mêmes dans $\mathfrak{V}$ et dans $\mathfrak{W}$). Alors conformité, définissabilité et additivité de la dimension sont vérifiées dans $\mathfrak{V}$ puisqu'elles le sont dans $\mathfrak{W}$, et toute la situation peut être vue à l'intérieur de $\mathfrak{W}$. ■

Pour les quotients $\mathfrak{W}/E$, c'est évidemment plus difficile. Il faudrait qu'on arrive à calculer la dimension des parties définissables du quotient à l'intérieur de $\mathfrak{W}$. La comparaison du morphisme surjectif p_E avec les projections dans une géométrie de Zariski, qui sont aussi des morphismes surjectifs, donne l'idée de définir une « dimension p_E-générique » d'un constructible Q dans $\mathfrak{W}$ (ou de son image dans $\mathfrak{W}/E$), de démontrer la formule :

$$\dim Q \; = \; \dim p_E[Q] \; + \; p_E\text{-gdim}\, Q$$

et de transporter ainsi les propriétés de la dimension dans $\mathfrak{W}$ vers le quotient $\mathfrak{W}/E$.

Soit pour la suite $\mathfrak{W}$ une prévariété admissible séparée, E une relation d'équivalence admissible sur W et $\mathfrak{V} := \mathfrak{W}/E$. Puisque $E \times \Delta(Z^n)$ est alors une relation d'équivalence admissible sur $W \times Z^n$, il suffit de considérer le cas $n = 0$.

Lemme 3.31

(a) *Si R est un constructible de $\mathfrak{W}/E$, alors $\overline{p^{-1}R} = p^{-1}[\overline{R}]$.*

(b) *Si Q_1, Q_2 sont deux constructibles de $\mathfrak{W}$ tels que $\overline{Q_1} = \overline{Q_2}$, alors $\overline{Q_1 E} = \overline{Q_2 E}$ et $\overline{p[Q_1]} = \overline{p[Q_2]}$.*

■ (a) D'un côté, $R \subseteq \overline{R}$ entraîne $p^{-1}[R] \subseteq p^{-1}[\overline{R}]$ et donc $\overline{p^{-1}[R]} \subseteq p^{-1}[\overline{R}]$ puisque p est continue.

Dans l'autre sens, $\overline{p^{-1}[R]}$ est un fermé E-saturé (E est admissible!), donc $p[\overline{p^{-1}[R]}]$ est fermé, d'où $\overline{R} \subseteq p[\overline{p^{-1}[R]}]$ ou encore $p^{-1}[\overline{R}] \subseteq p^{-1}p[\overline{p^{-1}[R]}] = \overline{p^{-1}[R]}$.

(b) Puisque $\overline{Q}_i \subseteq \overline{Q_i E}$, on a $\overline{Q}_i E \subseteq (\overline{Q_i E})E = \overline{Q_i E}$, où l'égalité vient de l'admissibilité de E. Par hypothèse on a $Q_2 \subseteq \overline{Q_1}$, donc $Q_2 E \subseteq \overline{Q_1} E \subseteq \overline{Q_1 E}$ et puis $\overline{Q_2 E} \subseteq \overline{Q_1 E}$. L'égalité s'ensuit par symétrie. Enfin, $\overline{p[Q_i]} = p[\overline{Q_i E}]$ donne le deuxième énoncé. ■

Proposition 3.32 *Supposons que la dimension soit définissable dans $\mathfrak{W}$ et que E soit fermé dans $\mathfrak{W}^2$. Soit Q un constructible de $\mathfrak{W}$ tel que $p_E[Q]$ soit irréductible.*

(a) *Il existe un ouvert non vide U de $p_E[Q]$ et un entier E-gdim Q tels que $E\text{-gdim}\, Q = \dim p_E^{-1}(u)$ pour tout $u \in U$.*

(b) *Il existe un ouvert non vide U de $p_E[Q]$ et un entier p_E-gdim Q tels que $p_E\text{-gdim}\, Q = \dim(p_E^{-1}(u) \cap Q)$ pour tout $u \in U$.*

(c) *Si Q est irréductible, alors $\dim Q + E\text{-gdim}\, Q = \dim(QE) + p_E\text{-gdim}\, Q$.*

En particulier, la partie (a) dit que pour tout constructible irréductible R de $\mathfrak{W}/E$, la dimension des fibres $\dim p_E^{-1}(u)$ est génériquement constante. Je la noterai E-gdim R.

■ Notons $p = p_E$. Enlevons d'abord tout ce qui risque de produire du non générique:

Soit $Q = Q_0 \sqcup \cdots \sqcup Q_l$ tel que $p[Q_i]$ soit dense dans $p[Q]$ ssi $0 \leqslant i \leqslant k$ et soit $QE = Q'_0 \sqcup \cdots \sqcup Q'_{l'}$ tel que $p[Q'_i]$ soit dense dans $p[Q]$ ssi $0 \leqslant i \leqslant k'$. Posons

$$U' := \bigcap_{i=0}^{k} p[Q_i] \;\cap\; \bigcap_{i=0}^{k'} p[Q'_i] \qquad \text{et} \qquad Q' := Q \cap p^{-1}[U'].$$

Alors U' est dense dans $p[Q]$ et

$$\begin{array}{rcl} Q' &=& \left(Q_0 \cap p^{-1}[U']\right) \sqcup \cdots \sqcup \left(Q_k \cap p^{-1}[U']\right) \\ \text{et} \quad Q'E &=& \left(Q'_0 \cap p^{-1}[U']\right) \sqcup \cdots \sqcup \left(Q'_{k'} \cap p^{-1}[U']\right). \end{array}$$

Soient $\pi_1, \pi_2 : W^2 \to W$ les deux projections et soit $\widetilde{Q} := \pi_1^{-1}[Q'] \cap E$. L'idée est de définir $p\text{-gdim}\, Q := \pi_2\text{-gdim}\, \widetilde{Q}$ par définissabilité de la dimension dans $\mathfrak{W}$. Or $\pi_2[\widetilde{Q}] = Q'E$ n'est par forcément irréductible, mais si $v, w \in Q'E$ sont tels que $vE = wE$, alors $\pi_2^{-1}(v) \cap \widetilde{Q} \cap E \cong \pi_2^{-1}(w) \cap \widetilde{Q} \cap E$, et puisque les composantes irréductibles de $Q'E$ intersectent les mêmes E-classes (d'après la définition de Q'), elles ont les mêmes dimensions π_2-génériques et la définition ci-dessus marche.

Alors on peut poser $E\text{-gdim}\, Q := p\text{-gdim}\, QE$. Puis l'additivité, appliquée composante irréductible par composante irréductible, donne

$$\dim Q' + E\text{-gdim}\, Q = \dim \widetilde{Q} = \dim(Q'E) + p\text{-gdim}\, Q.$$

Pour prouver (c), il suffit donc de démontrer que $\dim Q = \dim Q'$ et $\dim QE = \dim Q'E$. Puisque $p[Q'] = U'$ est dense dans $p[Q]$, on a $p[Q] \setminus p[Q'] \subseteq \partial p[Q] \subset\subset p[Q]$, donc $Q \setminus Q' \subseteq Q \cap p^{-1}[\,\partial p[Q]\,] \overset{\text{fermé}}{\subset\subset} Q$ puisque Q est irréductible. Donc Q' est dense dans Q, $\dim Q = \dim Q'$ s'ensuit par conformité et $\dim(QE) = \dim(Q'E)$ par le lemme 3.31 (b).

Parmi les composantes irréductibles de $p^{-1}[R]$, il y en a au moins une, disons Q_0, telle que $p[Q_0]$ soit dense dans R. Alors on peut poser $E\text{-gdim}\, R := E\text{-gdim}\, Q_0$. D'après (a), cette définition marche et elle est indépendante du choix de Q_0. ■

En fait, la partie (c) du théorème est aussi valable pour des constructibles Q tels que l'image de toute composante irréductible est dense dans $p[Q]$ (il suffit de faire les calculs composante par composante).

Théorème 3.33 *Soit $\mathfrak{W}$ une prévariété admissible, conforme, et telle que la dimension soit définissable ; soit E une relation d'équivalence admissible sur W, fermée dans $\mathfrak{W}^2$.*

(a) *Pour tout constructible irréductible Q de $\mathfrak{W}$,*

$$\dim_{\mathfrak{W}/E} p[Q] \;\geqslant\; \dim_{\mathfrak{W}} Q \;-\; p\text{-gdim}\, Q$$

et il existe une partie constructible dense Q' de Q pour laquelle on a égalité.

(b) *Pour tout constructible irréductible R de $\mathfrak{W}/E$,*

$$\dim_{\mathfrak{W}} p^{-1}[R] \;-\; E\text{-gdim}\, R \;\leqslant\; \dim_{\mathfrak{V}} R \;\leqslant\; \dim_{\mathfrak{W}} p^{-1}[R] \;-\; \min_{v\in R}\{\dim_{\mathfrak{W}} p^{-1}(v)\}$$

et il existe une partie constructible dense R' de R telle que

$$\dim_{\mathfrak{W}/E} R' \;=\; \dim_{\mathfrak{W}} p^{-1}[R'] \;-\; E\text{-gdim}\, R'.$$

■ (a) Soit $Q_0 \subset\subset \ldots \subset\subset Q_{\dim Q} \subseteq Q$ un drapeau de longueur maximale choisi génériquement, *i.e.* tel que $E\text{-gdim}\, Q_i = E\text{-gdim}\, Q_{i+1}$ et $p\text{-gdim}\, Q_i \leqslant p\text{-gdim}\, Q_{i+1}$ pour tout i (ce qui est possible par conformité de $\mathfrak{W}$). Évidemment, $p[Q_i] \subseteq p[Q_{i+1}]$ donne $\dim p[Q_i] \leqslant \dim p[Q_{i+1}]$. Donc puisque les $p[Q_i]$ sont irréductibles, on a

$$\begin{array}{rcl} \dim p[Q_i] \;=\; \dim p[Q_{i+1}] & \text{ssi} & \overline{p[Q_i]} \;=\; \overline{p[Q_{i+1}]} \\ & \text{ssi} & p^{-1}[\,\overline{p[Q_i]}\,] \;=\; p^{-1}[\,\overline{p[Q_{i+1}]}\,] \\ \text{(lemme 3.31 (a))} & \text{ssi} & \overline{p^{-1}p[Q_i]} \;=\; \overline{p^{-1}p[Q_{i+1}]} \\ & \text{ssi} & \overline{Q_iE} \;=\; \overline{Q_{i+1}E} \end{array}$$

Alors en ce cas, $\dim Q_iE = \dim \overline{Q_iE} = \dim \overline{Q_{i+1}E} = \dim Q_{i+1}E$ et donc par 3.32 (c), on obtient $p\text{-gdim}\, Q_i < p\text{-gdim}\, Q_{i+1}$. L'inégalité de l'énoncé s'ensuit directement.

Pour Q', il suffit de se restreindre aux points de Q dont la dimension des E-classes est générique, *i.e.* à
$$Q' := \Big\{ q \in Q \,\Big|\, \dim(qE) = E\text{-gdim}\, Q \Big\}.$$
Puisque Q' est dense dans Q, les dimensions génériques sont les mêmes, c.-à-d. $p\text{-gdim}\, Q = p\text{-gdim}\, Q'$ et $E\text{-gdim}\, Q = E\text{-gdim}\, Q'$. Alors dans (b) on obtient $\min\{\dim_{\mathfrak{W}} p^{-1}(v)\} = E\text{-gdim}\, Q'$. Alors les deux inégalités
$$\begin{array}{rrcl} & \dim_{\mathfrak{V}} p[Q'] & \geqslant & \dim_{\mathfrak{W}} Q' - p\text{-gdim}\, Q' \\ \text{et} & \dim_{\mathfrak{V}} p[Q'] & \leqslant & \dim_{\mathfrak{W}}(Q'E) - E\text{-gdim}\, Q' \end{array}$$
avec l'égalité de la proposition 3.32 (c),
$$\dim Q' + E\text{-gdim}\, Q' = \dim(Q'E) + p_E\text{-gdim}\, Q',$$
donnent le résultat.

(b) Soit $R_0 \subset\subset \ldots \subset\subset R_k$ un drapeau de longueur $k = \dim R$ dans R. Alors $p^{-1}[R_0] \subseteq \ldots \subseteq p^{-1}[R_k]$. Pour démontrer la deuxième inégalité, il suffit de montrer que
$$\dim p^{-1}[R_{i+1}] \ > \ \dim p^{-1}[R_i],$$
et cela vient du fait que $F := \overline{p^{-1}[R_{i+1}] \setminus p^{-1}[R_i]} = \overline{p^{-1}[R_{i+1}]}$:

□ Puisque E est admissible, F est E-saturé, donc $p[F]$ est fermé. Alors on a $R_i \subset R_{i+1} \subset R_i \cup p[F]$, et l'irréductibilité de R_{i+1} donne immédiatement $R_{i+1} \subseteq p[F]$, d'où $p^{-1}[R_{i+1}] \subseteq p^{-1}[p[F]] = F$. □

Soit Q une composante irréductible de $p^{-1}[R]$ telle que $p[Q]$ soit dense dans R. Alors $R' := p[Q']$ marche pour le dernier énoncé (où Q' est comme ci-dessus), car
$$\begin{array}{rcl} \dim R' & = & \dim p[Q'] \ = \ \dim Q' - p\text{-gdim}\, Q' \ = \\ & = & \dim(Q'E) - E\text{-gdim}\, Q' \ = \ \dim p^{-1}[R'] - E\text{-gdim}\, R'. \end{array}$$
De plus, $\dim p^{-1}[R] = \dim p^{-1}[R']$ par le lemme 3.31 (a) et $E\text{-gdim}\, R' = E\text{-gdim}\, R$ par définition, donc $\dim R \geqslant \dim R' = \dim p^{-1}[R] - E\text{-gdim}\, R$ ce qui donne la première inégalité. ■

Malheureusement, je n'arrive pas à démontrer la formule $\dim Q = \dim p[Q] + p\text{-gdim}\, Q$, ni $\dim_{\mathfrak{V}} R = \dim_{\mathfrak{W}} p^{-1}[R] - E\text{-gdim}\, R$ en général.

Définition 3.34 *Un quotient $\mathfrak{W}/E$ est **additif**, ou encore la relation d'équivalence E est additive, ssi la formule $\dim R = \dim p^{-1}[R] + E\text{-gdim}\, R$ est vérifiée par tout constructible irréductible R de $\mathfrak{W}/E$.*

Les calculs du théorème 3.33 aboutissent alors à la proposition suivante :

Proposition 3.35 *Sous les mêmes hypothèses que pour le théorème 3.33 :*

(a) *Un quotient* $\mathfrak{W}/E$ *est additif ssi* $\mathfrak{W}/E$ *est conforme.*

(b) *Dans un quotient additif, l'égalité* $\dim Q = \dim p[Q] + p\text{-gdim}\, Q$ *est vérifiée pour tout constructible irréductible* Q *.*

(c) *Si pour tout fermé irréductible* F *de* $\mathfrak{W}/E$ *la dimension générique des* E*-classes au-dessus de* F *est la dimension minimale, alors le quotient est additif.*

(d) *Si toutes les* E*-classes ont la même dimension, alors le quotient est additif.*

■ (a) Soit R un constructible irréductible de $\mathfrak{W}/E$. Si $\mathfrak{W}/E$ est additif, alors

$$\dim R \;=\; \dim p^{-1}[R] + p\text{-gdim}\, R \;=\; \dim p^{-1}[\overline{R}] + p\text{-gdim}\, \overline{R} \;=\; \dim \overline{R}.$$

Inversement, si $\mathfrak{W}/E$ est conforme, alors

$$\dim \overline{R} \;=\; \dim R \;=\; \dim p^{-1}[R] + p\text{-gdim}\, R \;=\; \dim p^{-1}[\overline{R}] + p\text{-gdim}\, \overline{R}$$

(b) On a $\dim Q \overset{3.32\ c}{=} \dim(QE) + p\text{-gdim}\, Q - E\text{-gdim}\, Q \overset{\text{additivité}}{=} \dim p[Q] + p\text{-gdim}\, Q$.

(c) Conséquence immédiate du théorème 3.33 (b) ; puis (d) est un cas particulier de (c). ■

VARIÉTÉS

Maintenant on peut revenir au point de départ. Toutes les propriétés des géométries de Zariski ont été examinées. Si l'on impose comme principe de la définition des variétés qu'elles partagent un maximum de ces propriétés, la définition suivante s'impose :

Définition 3.36 *Une* $\mathfrak{Z}$*-variété* *est une* $\mathfrak{Z}$*-prévariété admissible, conforme et séparée.*

Alors les $\mathfrak{Z}$-variétés avec les $\mathfrak{Z}$-morphismes forment une catégorie $\mathfrak{Z}$- $\mathcal{V}\mathbf{t}$ ou $\mathcal{V}\mathbf{t}$ (comme d'habitude, le préfixe « $\mathfrak{Z}$- » sera omis si la géométrie de base est claire). Évidemment, $\mathcal{V}\mathbf{t}$ contient $\mathfrak{Z}$.

Toutefois, il n'est pas clair que cela soit « la » bonne définition. Les deux conditions sur les relations d'équivalence, admissibilité et additivité, sont relativement techniques ; en plus, la condition d'admissibilité n'est probablement pas optimale. Elle permet d'avoir des produits et l'élimination des quanteurs, mais elle n'est nécessaire dans aucun des deux cas.

Un autre point un peu troublant, c'est que contrairement à la géométrie algébrique où l'on veut garder la semi–continuité de la dimension, il ne semble pas nécessaire de limiter les sous-variétés aux constructibles localement fermés dans le cas général .

D'un autre côté, cette définition de variété marche très bien dans le cas des groupes (cf. la section 5.1), mais elle manque d'exemples en général. L'espace projectif est sûrement une variété de l'espace affine dans le deux sens; mais il n'est pas clair qu'une variété algébrique quelconque sur un corps algébriquement clos K soit une K-variété dans le sens de la définition 3.36.

En ce qui concerne une certaine compatibilité souhaitée avec les morphismes, l'existence des produits (voir 3.39) et le fait que les inclusions des sous-variétés et les surjections canoniques sur les variétés quotients soient des morphismes, en font partie. Sinon, cf. la situation de la proposition 3.44.

Exemple 3.37

- Si $\mathfrak{Z}$ porte une structure de groupe, alors les quotients par des sous-groupes définissables sont des variétés ; voir proposition 5.12.
- Si $\mathfrak{Z} = \mathfrak{K}$ est un corps algébriquement clos (avec la topologie de Zariski usuelle), alors l'espace projectif $\mathbb{P}(K)$ est une $\mathfrak{K}$-variété.
- Tout ensemble fini est une $\mathfrak{Z}$-variété (pour toute géométrie de Zariski $\mathfrak{Z}$).

Théorème 3.38 *Soient $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{W}$ deux variétés. Alors la dimension est définissable et additive par rapport à la projection $\pi : \mathfrak{V} \times \mathfrak{W} \to \mathfrak{V}$.*

(La preuve marche aussi bien pour des prévariétés admissibles et conformes ; l'hypothèse de séparation n'est pas nécessaire.)

■ Par récurrence sur les constructions de $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{W}$. Comme d'habitude, le passage aux quotients est le seul cas non trivial. Supposons donc que $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}'/E$ et $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}'/E'$. La preuve est similaire à celle du théorème 1.45 ; il faut démontrer l'additivité à l'aide de l'additivité dans $\mathfrak{V}' \times \mathfrak{W}'$ et des formules d'additivité pour les quotients.

$$\begin{tikzcd} V' \times W' \arrow[r, "p_E \times p_{E'}"] \arrow[d, "\pi'"'] & V \times W \arrow[d, "\pi"] \\ V' \arrow[r, "p_E"] & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \widetilde{F} = (p_E \times p_{E'})^{-1}[F] \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & F \arrow[d, mapsto] \\ \pi'[\widetilde{F}] = p_E^{-1}[\pi[F]] \arrow[r, mapsto] & \pi[F] \end{tikzcd}$$

Soit F un fermé irréductible de $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$. Alors $\widetilde{F} := (p_E \times p_{E'})^{-1}[F]$ est un fermé de $\mathfrak{V}' \times \mathfrak{W}'$. Il n'est pas forcément irréductible (ni $\pi'[\widetilde{F}] = p_E^{-1}[\pi[F]]$ l'est), mais les composantes irréductibles, au moins celles dont l'image sous $p_E \times p_{E'}$ est dense dans F , intersectent les mêmes $E \times E'$-classes. Donc la dimension π'-générique de $\widetilde{F}$ existe et elle vérifie la formule $\pi'\text{-gdim}\, \widetilde{F} = \dim \widetilde{F} - \dim \pi'[F]$. Cette formule et l'additivité de E donnent

$$\begin{array}{ccccc}
\dim F & = & \dim \widetilde{F} & + & (E \times E')\text{-gdim}\, F \\
= & & = & & = \\
\dim \pi[F] & = & \dim \pi'[\widetilde{F}] & + & E\text{-gdim}\, \pi[F] \\
+ & & + & & + \\
? & = & \pi'\text{-gdim}\, \widetilde{F} & + & ?
\end{array}$$

Donc il suffit, en principe, de compléter ce tableau par des dimensions génériques. Cependant il y a de légers problèmes dus à la réductibilité des fibres.

Soit $a \in \pi'[\widetilde{F}]$ tel que la fibre au-dessus de a soit générique, et soit $b := p_E(a)$. Ni $\pi'^{-1}(a) \cap \widetilde{F}$, ni $\pi^{-1}(b) \cap F = (p_E \times p_{E'})[\pi'^{-1}(a) \cap \widetilde{F}]$ ne sont nécessairement irréductible.

Soit X une composante irréductible de la fibre $\pi^{-1}(b) \cap F$ de dimension maximale. Alors $\dim X = \dim (p_E \times p_{E'})^{-1}[X] - E\text{-gdim}\, X$.

Il est d'ailleurs clair à partir de la définition des dimensions génériques que

$$(E \times E')\text{-gdim}\, F = E\text{-gdim}\, \pi[F] + E\text{-gdim}\, X.$$

Tout cela ensemble donne

$$\begin{aligned}
\dim(\pi^{-1}(b) \cap F) &= \dim X = \dim (p_E \times p_{E'})^{-1}[X] - E\text{-gdim}\, X \\
&\leqslant \dim(\pi'^{-1}(a) \cap \widetilde{F}) + E\text{-gdim}\, \pi[F] - (E \times E')\text{-gdim}\, F \\
&= \dim \widetilde{F} - \dim \pi'[F] + E\text{-gdim}\, \pi[F] - (E \times E')\text{-gdim}\, F \\
&= \dim F - \dim \pi[F].
\end{aligned}$$

Après, en prenant une composante irréductible Y de $\pi'^{-1}(a) \cap \widetilde{F}$ de dimension maximale, on peut effectuer les calculs analogues pour trouver l'inégalité dans l'autre sens.

Donc les π-fibres de F sont génériquement de même dimension. Il s'ensuit que la dimension est définissable d'après le lemme 1.33 (a). De plus, les calculs ci-dessus montrent que la dimension est additive. ■

Théorème 3.39

(a) *La catégorie* $\mathcal{V}\mathbf{t}$ *est close par sous-prévariété.*

(b) *Le quotient d'une variété par une relation d'équivalence fermée, admissible et additive est encore une variété.*

(c) $\mathcal{V}\mathbf{t}$ *est close par produit fini.*

■ (a),(b) Tout est fait pour : pour la séparation, c'est la proposition 3.19 ; la conformité des sous-variétés vient de la proposition 3.30, celle des quotients de la définition de l'additivité d'une relation d'équivalence (3.34) ; finalement, l'admissibilité est assurée par définition (3.9).

(c) Le produit de deux variétés, donc de deux prévariétés admissibles, est défini et est encore une prévariété admissible. De plus, d'après la proposition 3.19, le produit est encore séparé. Puis l'additivité montrée en (a) donne la conformité : soit U un ouvert du produit, alors $\dim \overline{U} \geqslant \dim U = \dim \pi[U] + \pi\text{-gdim}\, U = \dim \overline{\pi[U]} + \pi\text{-gdim}\, \overline{U} \geqslant \dim \pi[\overline{U}] + \pi\text{-gdim}\, \overline{U} = \dim \overline{U}$. ■

3.3 Morphismes entre variétés

Le fait que $\mathcal{V}\mathbf{t}$ admette des produits (théorème 3.38 (b), mais essentiellement théorème 3.10) et que les applications constantes soient des morphismes (dans la preuve de la proposition 3.22) implique directement une liste de propriétés des morphismes entre variétés qui sont résumées ici :

Proposition 3.40 *Les applications suivantes sont des morphismes :*

(a) *les applications constantes* $\mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$, $v \mapsto c$ *pour tout* $c \in W$ *;*

(b) *les applications* $\bar{\sigma} : \mathfrak{V}_1 \times \ldots \times \mathfrak{V}_n \to \mathfrak{V}_{\sigma 1} \times \ldots \times \mathfrak{V}_{\sigma n}$, $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto (v_{\sigma 1}, \ldots, v_{\sigma n})$, *pour tout* n *et tout* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ *;*

(c) *les projections* $\pi_i : \mathfrak{V}_1 \times \ldots \times \mathfrak{V}_n \to \mathfrak{V}_i$, $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_i$ *;*

(d) *les applications diagonales* $\delta_V^{(n)} : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}^n$, $v \mapsto (v, \ldots, v)$ *;*

(e) *en somme, toute application de compatibilité.*

(f) *Si* $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{W}$ *, alors l'inclusion* $\mathfrak{V} \hookrightarrow \mathfrak{W}$ *est un morphisme.*

(g) *Si* $\mathfrak{V} = \mathfrak{W}/E$ *, alors la surjection canonique* $p : \mathfrak{W} \twoheadrightarrow \mathfrak{V}$ *est un morphisme.*

Proposition 3.41

(a) *Si* $f : \mathfrak{V}_1 \to \mathfrak{V}_2$ *et* $g : \mathfrak{V}_2 \to \mathfrak{V}_3$ *sont des morphismes, alors* $g \circ f$ *est un morphisme.*

(b) *Si* $f_i : \mathfrak{V}_i \to \mathfrak{W}_i$ *sont des morphismes, alors* $f_1 \times \ldots \times f_n : \mathfrak{V}_1 \times \ldots \times \mathfrak{V}_n \to \mathfrak{W}_1 \times \ldots \times \mathfrak{W}_n$ *aussi.*

(c) *Si* $f_i : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}_i$ *sont des morphismes, alors* $(f_1, \ldots, f_n) : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}_1 \times \ldots \times \mathfrak{W}_n$ *aussi.*

(d) *$f : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}_1 \times \ldots \times \mathfrak{W}_n$ est un morphisme ssi toutes les applications $\pi_i \circ f : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}_i$ sont des morphismes où $\pi_i : \mathfrak{W}_1 \times \ldots \times \mathfrak{W}_n \to \mathfrak{W}_i$ est la projection.*

(e) *Si $f : \mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 \to W$ est un morphisme et $c \in V_1$, alors l'application $f_c : \mathfrak{V}_2 \to \mathfrak{W}$, $v \mapsto f(c, v)$ est un morphisme.*

■ La plupart des énoncés sont déjà démontrés. Le reste est évident, ou bien il s'agit de généralités sur les produits dans les catégories! ■

Constructibilité et additivité

Proposition 3.42

(a) *Si $\varphi : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ est un morphisme entre variétés (prévariétés admissibles suffit), alors le graphe Γ_φ est fermé dans $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$.*

(b) *Γ_φ est isomorphe à V. En particulier, Γ_φ est irréductible ssi V l'est.*

■ (a) D'après les propriétés démontrées ci-dessus, $(\varphi, \mathrm{id}_W) : V \times W \to W \times W$ est un morphisme. Alors $\Gamma_\varphi = (\varphi, \mathrm{id}_W)^{-1}[\Delta(W)]$ est fermé par continuité.

(b) $\pi : \Gamma_\varphi \to V$ est un morphisme car $\pi = \pi_V \circ i$ où $i : \Gamma_\varphi \to V \times W$ est le morphisme d'inclusion et $\pi_V : V \times W \to V$ la projection. Clairement, π est bijectif. Son inverse est donné par $(\mathrm{id}_V, \varphi) : V \to V \times W$ qui est aussi un morphisme d'après 3.41. ■

Dans certains cas, p.ex. si les variétés sont complètes (3.50) ou lisses (3.55), les morphismes sont exactement les applications dont le graphe est fermé (irréductible). En général, cette propriété ne suffit pas pour montrer la continuité. D'ailleurs, cette définition serait impossible pour les prévariétés car il faudrait qu'on dispose d'un produit.

Théorème 3.43 *Soit $\varphi : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ un morphisme entre variétés.*

(a) *φ est une application constructible.*

(b) *Pour tout constructible irréductible Q de $\mathfrak{V}$, il existe un ouvert U de $\varphi[Q]$ et un entier $\varphi\text{-gdim}\, Q$ tel que $\dim(Q \cap \varphi^{-1}(u)) = \varphi\text{-gdim}\, Q$ pour tout $u \in U$.*

(c) *De plus, $\dim \varphi[Q] = \dim Q - \varphi\text{-gdim}\, Q$.*

(Les notations $\pi\text{-gdim}\, X$ et $p_E\text{-gdim}\, X$ introduites en page 36 resp. 85 sont donc des cas particulier de $\varphi\text{-gdim}\, Q$.)

■ Soit Q un constructible de $\mathfrak{V}$. Il est isomorphe (par π_V) au constructible $\tilde{Q} := \Gamma_\varphi \cap \pi_V^{-1}[Q]$ (proposition 3.42 (b)), en particulier $\dim Q = \dim \tilde{Q}$. Alors $\varphi[Q] = \pi_W[\tilde{Q}]$ est constructible puisque π_W est une application constructible (théorème 3.29 (b)).

Si Q est irréductible, alors $\tilde{Q}$ aussi et on peut poser $\varphi\text{-gdim}\, Q := \pi_W\text{-gdim}\,(\tilde{Q})$. Puisque $\varphi^{-1}(u)$ est en bijection par π_V avec $\pi_W^{-1}(u) \cap (\Gamma_\varphi \cap \pi_V^{-1}[Q])$, ils ont la même dimension, donc (b) est prouvé. Puis l'additivité appliquée à $\tilde{Q}$ donne (c). ∎

Factorisation canonique d'un morphisme

Supposons que $\varphi : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ soit un morphisme entre variétés.

Alors on peut définir l'**image** de φ, $\mathfrak{Im}(\varphi)$, comme étant $\mathfrak{W}\restriction_{\overline{\varphi[V]}}$; c'est une variété d'après le théorème 3.39.

Puis on définit le « **noyau** » $\ker\varphi := (\varphi \times \varphi)^{-1}[\Delta(W)]$. Alors $\ker\varphi$ est une relation d'équivalence fermée sur V (car $\varphi \times \varphi$ est un morphisme, donc continue, et $\Delta(W)$ est fermée puisqu'une variété est séparée par définition), et on peut considérer la prévariété quotient $\mathfrak{V}/\ker\varphi$.

Proposition 3.44 *Un morphisme (de prévariétés) $\varphi : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ se factorise en*

$$\mathfrak{V} \xrightarrow{p_{\ker\varphi}} \mathfrak{V}/\ker\varphi \xrightarrow[\sim]{\tilde{\varphi}} \mathfrak{Im}(\varphi) \xhookrightarrow{\quad i \quad} \mathfrak{W}$$

où $\tilde{\varphi}$ est un morphisme bijectif.

∎ La factorisation est claire au niveau ensembliste, et $p_{\ker\varphi}$ ainsi que i sont des morphismes par définition de sous-variété et de quotient. Donc il reste à voir que $\tilde{\varphi}$ est un morphisme:

$\tilde{\varphi}$ est évidemment définissable car son graphe est $\Gamma_{\tilde{\varphi}} = (p_{\ker\varphi} \times \mathrm{id}_W)[\Gamma_\varphi]$. Soit F un fermé de $\mathfrak{Im}(\varphi) \times Z^n$. Alors $F = \overline{iF} \cap (\varphi[V] \times Z^n)$. Vu que φ est un morphisme, $(\varphi \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[\overline{iF}]$ est un fermé qui est d'ailleurs $\ker\varphi$-saturé par définition de $\ker\varphi$. Alors $(\tilde{\varphi} \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[F] = (p_{\ker\varphi} \times \mathrm{id}_{Z^n}) \circ (\varphi \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[\overline{iF}]$ est fermé. ∎

En général, il n'y a pas de raison pour que $\tilde{\varphi}$ soit un isomorphisme. En fait, $\tilde{\varphi}$ est un isomorphisme ssi c'est une application fermée.

L'admissibilité de $\ker\varphi$ est une condition suffisante pour cela: si $\ker\varphi$ était admissible, on pourrait démontrer le lemme 3.31 (a) (avec φ au lieu de p), *i.e.* $\overline{\varphi^{-1}[Q]} = \varphi^{-1}[\overline{Q}]$ pour tout constructible Q de $\mathfrak{Im}(\varphi)$. En prenant $Q = \varphi[F]$ où F est un fermé $\ker\varphi$-saturé de $\mathfrak{V}$, on obtiendrait $F = \overline{\varphi^{-1}[\varphi[F]]} = \varphi^{-1}[\overline{\varphi[F]}]$, c.-à-d. $\varphi[F] = \overline{\varphi[F]}$.

Question:

- Sous quelles conditions $\mathfrak{V}/\ker\varphi$ est-elle une variété?
- Sous quelles conditions a-t-on a $\mathfrak{V}/\ker\varphi \cong \mathfrak{Im}(\varphi)$?

En fait, les deux dernières propositions (3.45 et 3.44) s'appliquent aussi bien aux prévariétés qu'aux variétés, sauf que $\ker\varphi$ n'est pas forcément fermé (mais il reste toujours définissable).

PASSAGE AUX SOUS-VARIÉTÉS ET QUOTIENTS

Proposition 3.45

(a) *Si* $\varphi : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ *est un morphisme et* $\mathfrak{V}' \subseteq \mathfrak{V}$, *alors* $\varphi' := \varphi\restriction_{V'}$ *est un morphisme.*

(b) *Si* $V = V_0 \sqcup \cdots \sqcup V_k$, *alors* $\varphi : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ *est un morphisme ssi toutes les restrictions* $\varphi_i := \varphi\restriction_{V_i}$ *sont des morphismes.*

(c) *Si* $\varphi : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ *est un morphisme et* E *est une relation d'équivalence définissable sur* V *telle que* φ *soit constant sur toutes les* E*-classes, alors* φ *induit un morphisme* $\varphi/E : \mathfrak{V}/E \to \mathfrak{W}$.

■ (a) Puisque $\varphi \times \mathrm{id}_{Z^n}$ est aussi un morphisme, il suffit de montrer que φ est continue. Soit F est un fermé de $\mathfrak{Im}(\varphi)$ et soit $\overline{F}$ son adhérence dans $\mathfrak{W}$. Alors $\varphi^{-1}[\overline{F}]$ est fermé dans $\mathfrak{V}$, donc $\varphi'^{-1}[F] = V' \cap \varphi^{-1}[\overline{F}]$ est fermé dans $\mathfrak{V}'$.

(b) « $\Rightarrow$ » est donnée par (a).
« $\Leftarrow$ » Soit F un fermé de $\mathfrak{W}$, $F_i := F \cap \varphi[V_i]$. Alors par hypothèse, les $\varphi_i^{-1}[F_i]$ sont fermés dans $\mathfrak{V}_i = \mathfrak{V}\restriction_{V_i}$. Mais les composantes irréductibles d'un ensemble X sont fermées dans X, par conséquent $\varphi^{-1}[F] = \varphi_0^{-1}[F_0] \cup \cdots \cup \varphi_k^{-1}[F_k]$ est fermé dans $\mathfrak{V}$.

(c) Si φ est constant sur les E-classes, alors E est une relation d'équivalence qui raffine $\ker\varphi$, c.-à-d. $\mathfrak{V}/\ker\varphi$ est un quotient de $\mathfrak{V}/E$ et la surjection canonique $p : \mathfrak{V}/E \twoheadrightarrow \mathfrak{V}/\ker\varphi$ est un morphisme. Donc $\varphi/E = \tilde{\varphi} \circ p$ est un morphisme où $\tilde{\varphi}$ est l'application définie en 3.44. ■

3.4 VARIÉTÉS COMPLÈTES

Définition 3.46

- *Une géométrie de Zariski* $\mathfrak{Z}$ *est* **complète** *ssi toutes les projections* $Z^{n+1} \to Z^n$ *sont des applications fermées (pour tout* $n \in \omega$*).*
- *Une* $\mathfrak{Z}$*-prévariété* $\mathfrak{C}$ *est* **complète** *ssi les projections* $\mathfrak{C} \times \mathfrak{Z}^n \to \mathfrak{Z}^n$ *sont fermées pour tout* $n \in \omega$.

Une géométrie de Zariski $\mathfrak{Z}$ est complète ssi elle est elle-même une $\mathfrak{Z}$-variété complète.

Un ensemble fini définissable dans $\mathfrak{Z}$ est toujours complet. Pour une géométrie de Zariski $\mathfrak{Z}$ quelconque, la recherche d'une $\mathfrak{Z}$-variété infinie complète est un problème important et difficile. Il est tout à fait imaginable qu'il existe des géométries qui n'en ont aucune.

Lemme 3.47 *Si $\mathfrak{C}$ est une $\mathfrak{Z}$-variété complète et $\mathfrak{V}$ une $\mathfrak{Z}$-variété quelconque, alors la projection $\mathfrak{C} \times \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$ est une application fermée.*

■ Supposons que $\pi : \mathfrak{C} \times \mathfrak{W} \to \mathfrak{W}$ soit une application fermée.

Soit $\mathfrak{V}$ une sous-variété de $\mathfrak{W}$, et soit F un fermé de $\mathfrak{C} \times \mathfrak{V}$. Alors $F = (C \times V) \cap \overline{F}$ où l'adhérence est prise dans $\mathfrak{C} \times \mathfrak{W}$. Alors $\pi[F] = V \cap \pi'[\overline{F}]$ est fermé dans $\mathfrak{W}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \times \mathfrak{V} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"'] & \mathfrak{C} \times \mathfrak{W} \arrow[d, "\pi'"] \\
\mathfrak{V} \arrow[r, hook] & \mathfrak{W}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \times \mathfrak{V} \arrow[d, "\pi"'] & \mathfrak{C} \times \mathfrak{W} \arrow[l, two heads, "p_E"'] \arrow[d, "\pi'"] \\
\mathfrak{V} & \mathfrak{W} \arrow[l, two heads, "p_E"']
\end{tikzcd}$$

Soit maintenant $\mathfrak{V} = \mathfrak{W}/E$, et soit F un fermé dans $\mathfrak{C} \times \mathfrak{V}$. Alors $p_E^{-1}[F]$ est un fermé E-saturé de $\mathfrak{C} \times \mathfrak{W}$, donc $\pi'[p_E^{-1}[F]]$ est encore un fermé par hypothèse, est évidemment E-saturé, donc $\pi[F] = p_E \circ \pi' \circ p_E^{-1}[F]$ est fermé dans $\mathfrak{V}$. ■

Proposition 3.48 *Soit $\mathfrak{C}$ une variété complète.*

(a) *Toute sous-prévariété fermée de $\mathfrak{C}$ est complète.*

(b) *Tout quotient de $\mathfrak{C}$ est complet.*

(c) *Si $f : \mathfrak{C} \to \mathfrak{V}$ est un morphisme, alors $f[C]$ est fermé dans $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{V}\restriction_{f[C]}$ est une variété complète.*

(d) *Un produit cartésien fini de variétés complètes est complet.*

(e) *Si $C = C_0 \sqcup \cdots \sqcup C_k$, alors $\mathfrak{C}$ est complet ssi toutes les sous-variétés $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{C}\restriction_{C_i}$ sont complètes.*

■ (a) Soit $D \subseteq C$ une partie fermée. Un fermé de $D \times Z^n$ est aussi fermé dans $C \times Z^n$, donc son image sous la projection sur Z^n est fermé par complétude de $\mathfrak{C}$.

$$\begin{tikzcd}
D \times Z^n \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\pi"'] & C \times Z^n \arrow[d, "\pi'"] & C/E \times Z^n \arrow[l, two heads] \arrow[dl, "\pi''"] \\
& Z^n &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \times V \arrow[rr, "f \times \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & f[C] \times V \arrow[dl, "\pi'"] \\
& V &
\end{tikzcd}$$

(b) Si E est une relation d'équivalence sur C et $F \subseteq C \times Z^n$, alors $\widetilde{F} := (p_E \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[F]$ est fermé dans $\mathfrak{C} \times \mathfrak{Z}^n$, et donc $\pi''[F] = \pi'[\widetilde{F}]$ aussi.

(c) Le diagramme en haut à droite est commutatif, donc $\pi' = \pi \circ (f \times \mathrm{id})^{-1}$ est une application fermée. Il s'ensuit que $\mathfrak{Im}(f)$ est une variété complète. La diagonale $\Delta(f[C]) = (f[C] \times V) \cap \Delta[V]$ est fermée dans $\mathfrak{Im}(f) \times \mathfrak{V}$, donc $f[C] = \pi'[\Delta(f[C])]$ est fermé dans $\mathfrak{V}$ par complétude de $\mathfrak{Im}(f)$

(d) Si $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ sont complètes et $\mathfrak{V}$ est une variété quelconque, alors $\pi : C_1 \times C_2 \times V \to V$ se factorise en $C_1 \times (C_2 \times V) \longrightarrow C_2 \times V \longrightarrow V$, donc c'est une application fermée.

(d) Le sens « $\Rightarrow$ » est donné par (a). Inversement, soit F un fermé de $\mathfrak{C} \times \mathfrak{Z}^n$. Alors $F_i := F \cap (C_i \times Z^n)$ est fermé dans $\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{Z}^n$, donc sa projection $\pi[F_i]$ est fermée. Puis $\pi[F] = \pi[F_0] \cup \cdots \cup \pi[F_k]$ est fermé. ■

Variétés complètes et morphismes

Proposition 3.49 *Soit $f : V \to W$ une fonction entre variétés $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{W}$ dont le graphe est fermé dans $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$.*

(a) *Si $\mathfrak{V}$ est complète, alors f est une application fermée.*

(b) *Si $\mathfrak{W}$ est complète, alors f est continue. En plus, Γ_f est homéomorphe à V via la projection. En particulier, Γ_f est irréductible ssi V l'est, et alors $f[X]$ l'est aussi.*

■ (a) Soit F un fermé de $\mathfrak{V}$. Alors $f[F] = \pi_W[\pi_V^{-1}[F] \cap \Gamma_f]$ est fermé par complétude de $\mathfrak{V}$.

(b) Soit F un fermé de $\mathfrak{W}$. Alors $f^{-1}[F] = \pi_V[\pi_W^{-1}[F] \cap \Gamma_f]$ est fermé par complétude de $\mathfrak{W}$, ce qui donne la continuité de f.

La projection $\Gamma_f \to V$ est continue (proposition 3.41) et fermée par complétude de $\mathfrak{W}$, puisque Γ_f est fermé dans $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ (proposition 3.42). C'est donc un homéomorphisme, qui conserve l'irréductibilité dans les deux sens. ■

Corollaire 3.50 *Soit $\mathfrak{Z}$ une géométrie de Zariski complète et soient $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{W}$ des $\mathfrak{Z}$-variétés telles que $\mathfrak{W}$ soit complète. Alors $f : V \to W$ est un morphisme ssi Γ_f est fermé dans $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$.*

■ La direction « $\Leftarrow$ » est donnée par la proposition précédente, la direction « $\Rightarrow$ » par la proposition 3.42. ■

Lemme 3.51 (Lemme de rigidité)
Supposons que $\mathfrak{C},\mathfrak{V},\mathfrak{W}$ soient des $\mathfrak{Z}$-variétés irréductibles, $\mathfrak{C}$ complète, et supposons que la dimension soit semi–continue par rapport à $\pi_V : C \times V \to V$.

Soit $f : \mathfrak{C} \times \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ un morphisme tel que $f[C \times \{v_0\}] = \{w_0\}$ pour un certain $v_0 \in V$ et $w_0 \in W$. Alors il existe un morphisme $g : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ tel que $f = g \circ \pi_V$.

■ Soit $T = \{(v, f(c, v)) \,|\, c \in C, v \in V\} = \pi_{V\times W}[\Gamma_f] \subseteq V \times W$. Puisque Γ_f est irréductible, T est irréductible comme son image sous la projection continue $\pi_{V\times W}$; et fermé par complétude de $\mathfrak{C}$, puisque Γ_f est fermé (proposition 3.42).

On regarde alors la projection $\pi_V : C \times V \to V$. Par hypothèse, T a une π_V-fibre finie au-dessus de v_0 , donc les π_V-fibres de T sont génériquement finies. La fibre au-dessus d'un élément quelconque v est égale à $f[C\times\{v\}]$, donc irréductible car $C\times\{v\}$ est irréductible et f continue. Par conséquent, les fibres finies sont des singletons.

Soit $c \in C$ quelconque. On peut définir un morphisme $g : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ par $g(v) := f(c, v)$; c'est un morphisme car $g = f \circ \varepsilon_c$ où $\varepsilon_c : V \to C \times V$ est le morphisme $v \mapsto (c, v)$.

Par définition de g , $\Gamma_{g\circ\pi_V}$ et Γ_f ont génériquement les mêmes π-fibres où $\pi : C \times V \times W \to V$ est la projection. Puisque $\Gamma_{g\circ\pi_V}$ et Γ_f sont des fermés irréductibles (comme graphes de morphismes de domaine irréductible— proposition 3.42), cela entraîne que l'intersection $\Gamma_{g\circ\pi_V} \cap \Gamma_f$ est dense dans chacun de deux graphes, donc $\Gamma_{g\circ\pi_V} = \overline{\Gamma_{g\circ\pi_V} \cap \Gamma_f} = \Gamma_f$, c.-à-d. $f = g \circ \pi_V$. ■

3.5 VARIÉTÉS LISSES

Définition 3.52

- *Un espace topologique noethérien T satisfait à la* formule des dimensions *ssi*

$$\dim X + \dim T \geqslant \dim F_1 + \dim F_2$$

  pour tous fermés irréductibles F_1 et F_2 et pour toute composante irréductible X de $F_1 \cap F_2$.
- *Une géométrie de Zariski $\mathfrak{Z}$ est* lisse *ssi $\tau_n[Z]$ satisfait à la formule des dimensions pour tout $n \in \omega$.*
- *Une $\mathfrak{Z}$-prévariété $\mathfrak{V}$ est lisse ssi la formule des dimensions est vérifiée dans $\mathfrak{V} \times \mathfrak{Z}^n$ pour tout $n \in \omega$.*

Évidemment, si $\mathfrak{V}$ est lisse, alors $\mathfrak{V} \times \mathfrak{Z}^n$ l'est aussi.

Il semble d'ailleurs qu'il n'existe pas de nom dérivé de « lisse » qui exprime la propriété d'être lisse. Pour ne pas devoir utiliser cette formulation plutôt encombrante, je me permets d'introduire le néologisme « lissité » pour l'exprimer.

Lemme 3.53 *Une géométrie de Zariski* $\mathfrak{Z}$ *est lisse ssi* $\dim X \geqslant dim F - \dim Z$ *pour tout* n *, tout fermé irréductible* $F \subseteq Z^n$ *, toute diagonale* $\Delta = \Delta_{ij}^n$ *et toute composante irréductible* X *de* $F \cap \Delta$ *.*

■ C'est le lemme 2.5 de [HZ1] :

Soient F_1, F_2 deux fermés irréductibles de Z^n , alors $F_1 \cap F_2$ est homéomorphe à $(F_1 \times F_2) \cap \Delta^{2n}$ via l'application $\bar{z} \mapsto (\bar{z}, \bar{z})$. Cette intersection peut être réalisée comme une intersection successive avec n diagonales Δ_{ij}^{2n} . Donc pour une composante irréductible X de $(F_1 \times F_2) \cap \Delta^{2n}$, on trouve $\dim X \geqslant \dim(F_1 \times F_2) - n \dim Z = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim Z^n$.

■

Le fait d'être lisse est une propriété très forte ; elle permet des calculs subtils de dimensions, ce qui entraîne souvent de beaux théorèmes de structure. Un exemple est donné par la proposition 3.55.

Pratiquement la seule façon de s'assurer de la lissité est de la demander par un axiome. Même en partant d'une géométrie de Zariski $\mathfrak{Z}$ qui est lisse, il est difficile de vérifier si une $\mathfrak{Z}$-variété reste lisse ou non. Le cas de la géométrie algébrique montre bien qu'on ne peut espérer un bon critère dans ce cadre abstrait : une variété algébrique sans singularité est lisse dans le sens des géométries de Zariski ; par contre la plupart des variétés ayant des singularités ne le sont pas. Néanmoins, toutes peuvent être vues comme des sous-variétés d'une géométrie de Zariski lisse.

(Zil'ber a changé sa terminologie en parlant de « pre-smooth » au lieu de « smooth » à cause du fait qu'il y a des variétés algébriques avec singularités mais lisses dans le sens des géométries de Zariski).

Le passage au quotient peut bien marcher dans certain cas (si la relation d'équivalence est suffisamment homogène — cf. la proposition 5.29). Voici un résultat de caractère général :

Proposition 3.54 *Si le produit* $\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2$ *est lisse, alors les variétés* $\mathfrak{V}_i$ *sont lisses.*

■ Soient F_1, F_2 des fermés de $\mathfrak{V} \times \mathfrak{Z}^n$. À toute composante irréductible X de $F_1 \cap F_2$ correspond une composante irréductible de $(F_1 \times V_2) \cap (F_2 \times V_2)$ de la forme $X \times V_2$. Alors

$$\begin{aligned}\dim(X \times V_2) &\geqslant \dim(F_1 \times V_2) + \dim(F_2 \times V_2) - \dim(V_1 \times V_2 \times Z^n)\\ &= \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(V_1 \times Z^n) + \dim V_2\end{aligned}$$

par lissité de $\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 \times \mathfrak{Z}^n$, donc

$$\dim X = \dim(X \times V_2) - \dim V_2 \geqslant \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(V_1 \times Z^n). \qquad \blacksquare$$

VARIÉTÉS LISSES ET MORPHISMES

Proposition 3.55 *Supposons que* $\mathfrak{V}$ *,* $\mathfrak{W}$ *soient des* $\mathfrak{Z}$*-variétés telles que* $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ *soit lisse.*

(a) *Une application* $f : V \to W$ *est un morphisme ssi* Γ_f *est fermé irréductible.*

(b) *Un morphisme bijectif entre* $\mathfrak{V}$ *et* $\mathfrak{W}$ *est un isomorphisme.*

$\blacksquare$ C'est la généralisation (évidente) du lemme 5.5 de [HZ1]. Hrushovski et Zil'ber utilisent d'ailleurs cette propriété pour la définition des morphismes. En général, on n'arrive pas à montrer qu'une application de graphe fermé est continue.

(a) Si f est un morphisme, alors Γ_f est fermé irréductible par la proposition 3.42.

Supposons maintenant que Γ_f soit fermé irréductible. Alors $\Gamma_{f \times \mathrm{id}_{Z^n}} = \Gamma_f \times \Delta(Z^n)$ (à une permutation des coordonnées près) est encore fermé irréductible. Il suffit donc de démontrer que f est continue pour montrer que f est un morphisme, la preuve donnera automatiquement la continuité de $f \times \mathrm{id}_{Z^n}$, puisque la définition de « lisse » exige que $(\mathfrak{V} \times \mathfrak{Z}^n) \times (\mathfrak{W} \times \mathfrak{Z}^n)$ aussi soit lisse.

Soit H un fermé de $\mathfrak{W}$ et F une composante irréductible de $\overline{f^{-1}[H]}$. Alors $F \cap f^{-1}[H]$ est dense dans F , c.-à-d. il existe un fermé $F_1 \subset\subset F$ tel que $F \setminus F_1 \subseteq f^{-1}[H]$. Par lissité, toute composante irréductible de $(F \times W) \cap \Gamma_f$ est au moins de dimension

$$\begin{aligned} \dim(F \times W) + \dim \Gamma_f - \dim(V \times W) &= \\ \dim F + \dim W + \dim V - (\dim V + \dim W) &= \dim F. \end{aligned}$$

Mais

$$(F \times W) \cap \Gamma_f \subseteq [(V \times H) \cap \Gamma_f] \cup [(F_1 \times W) \cap \Gamma_f],$$

c.-à-d. chaque composante irréductible de $(F \times W) \cap \Gamma_f$ est soit contenue dans $(F_1 \times W) \cap \Gamma_f$, soit dans $(V \times H) \cap \Gamma_f$.

Mais le premier cas est exclu : par additivité de la dimension,

$$\dim[(F_1 \times W) \cap \Gamma_f] = \dim F_1 < \dim F,$$

ce qui contredit la lissité. Donc $(F \times W) \cap \Gamma_f \subseteq (V \times H) \cap \Gamma_f$, ce qui veut dire que $F \subseteq f^{-1}[H]$. Puisque ce raisonnement s'applique à toutes les composantes irréductibles de $\overline{f^{-1}[H]}$, on conclut que $\overline{f^{-1}[H]} \subseteq f^{-1}[H]$, *i.e.* $f^{-1}[H]$ est fermé et f est continue.

(b) C'est une conséquence directe de (a) : Si f est le morphisme bijectif, alors son graphe est fermé irréductible, donc celui de f^{-1} aussi, donc f^{-1} est un morphisme. ■

SEMI–CONTINUITÉ DANS LES VARIÉTÉS LISSES

Soient $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{W}$ deux variétés. En élargissant la définition 1.35, disons que la dimension est **purement semi–continue** par rapport à la projection $\pi : \mathfrak{V} \times \mathfrak{W} \to \mathfrak{V}$ si pour tout fermé irréductible F de $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$, toute composante irréductible d'une π-fibre de F est au moins de dimension $\dim F - \dim \pi[F]$.

La pure semi–continuité implique évidemment la semi–continuité.

La dimension dans les variétés algébriques est purement semi–continue. Sous quelques hypothèses la preuve s'adapte aux géométries de Zariski. Une de ces hypothèses est la « richesse » ; il faut donc généraliser la définition 1.28 :

Définition 3.56 *Une variété $\mathfrak{V}$ est* **riche** *ssi pour tout point $v \in V$, l'intersection des hypersurfaces de $\mathfrak{V}$ contenant v est finie.*

Faute d'un meilleur endroit, j'insère ici un petit résultat :

Lemme 3.57 *Le produit de deux variétés riches est encore riche.*

■ Soient $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ les deux variétés, $v \in V$ et $w \in W$. Si H est une hypersurface de $\mathfrak{V}$, alors $H \times W$ est une hypersurface de $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ par additivité de la dimension. Donc

$$\begin{aligned} &\bigcap\{H \mid (v,w) \in H \in \mathcal{H}(\mathfrak{V} \times \mathfrak{W})\} \\ &\subseteq \ \bigcap\{H' \times W \mid v \in H' \in \mathcal{H}(\mathfrak{V})\} \cap \bigcap\{V \times H'' \mid w \in H'' \in \mathcal{H}(\mathfrak{W})\} \\ &= \ (\text{fini } \times W) \cap (V \times \text{ fini}) \ = \ \text{fini} \end{aligned}$$ ■

Revenons alors à la preuve de la semi–continuité :

Proposition 3.58 *Soient $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{W}$ deux variétés telles que $\mathfrak{V}$ soit riche et $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ soit lisse. Alors la dimension est purement semi–continue par rapport à la projection $\pi : \mathfrak{V} \times \mathfrak{W} \to \mathfrak{V}$.*

■ Soit F un fermé irréductible de $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ et $a \in \pi[F]$. Par récurrence sur $i \leqslant \dim \pi[F]$, on peut construire des parties X_i de $\pi[F]$ telles que :

- X_i est irréductible, fermé dans $\pi[F]$ et contient a ;
- $\dim X_i = \dim \pi[F] - i$;
- $\dim G \geqslant \dim F - i$ pour toute composante irréductible G de $\pi^{-1}[X_i] \cap F$.

Soit $X_0 := \pi[F]$. Les propriétés sont évidemment satisfaites.

Supposons donc que X_i soit construit pour $i < \dim \pi[F]$. En particulier, X_i est infini. Par hypothèse, il existe une hypersurface H_i de $\mathfrak{V}$ qui contient a mais pas tout X_i . Soit X_{i+1} une composante irréductible de $X_i \cap H_i$ contenant a .

Alors X_{i+1} est une partie fermée propre de X_i , d'où $\dim X_{i+1} < \dim X_i$. Dans l'autre sens, $\dim X_{i+1} \geqslant \dim X_i + \dim H_i - \dim V = \dim X_i - 1$ puisque $\mathfrak{V}$ est lisse (proposition 3.54). Donc $\dim X_{i+1} = \dim X_i - 1 = \dim F - i - 1$.

Puis $\pi^{-1}[X_{i+1}] \cap F$ est une réunion de composantes irréductibles de $(H_i \times W) \cap \pi^{-1}[X_i]$. Donc de nouveau par lissité, toute composante irréductible G de $\pi^{-1}[X_{i+1}] \cap F$ est au moins de dimension

$$\begin{aligned} \dim(H_i \times W) + \dim(X_i \times W) - \dim(V \times W) &= \\ \dim V - 1 + \dim W + \dim \pi[F] - i - \dim V - \dim W &= \dim \pi[F] - i - 1 \end{aligned}$$

Alors $\dim X_{\dim \pi[F]} = 0$, donc $X_{\dim \pi[F]} = \{a\}$, ce qui démontre la proposition. ■

Remarque 3.59 Si la dimension est purement semi–continue pour les fermés, alors elle l'est pour les localement fermés. Ce n'est pas vrai pour les constructibles quelconques.

3.6 Passage aux extensions élémentaires

Variétés

Soient $\mathfrak{Z} \preccurlyeq \mathfrak{Z}^*$ des géométries de Zariski et $\mathfrak{V}$ une $\mathfrak{Z}$-prévariété. Alors on peut étendre naturellement $\mathfrak{V}$ en une $\mathfrak{Z}^*$-prévariété en utilisant la même construction que celle de $\mathfrak{V}$.

Inversement, en partant d'une $\mathfrak{Z}^*$-prévariété $\mathfrak{X}$, on peut restreindre à chaque étape la construction à $\mathfrak{Z}$. Plus précisément :

Définition 3.60

(a) *$\mathfrak{V}^*$ est la $\mathfrak{Z}^*$-prévariété définie par la récurrence suivante :*

- *Si $\mathfrak{V} = \mathfrak{Z}^k$ pour un certain k , alors $\mathfrak{V}^* := \mathfrak{Z}^{*k}$.*
- *Si $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{V}$, alors W est définie par une formule φ . On pose $\mathfrak{W}^* := \mathfrak{V}^* \restriction_{\varphi[V^*]}$.*
- *Si $\mathfrak{W} = \mathfrak{V}/E$ où E est une relation d'équivalence définie par une formule η , alors $E^* := \eta[V^*]$ est une relation d'équivalence sur V^* et on peut poser $\mathfrak{W}^* := \mathfrak{V}^*/E^*$.*

(b) *$d_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{X}$ est la $\mathfrak{Z}$-prévariété définie par la récurrence suivante :*

- *Si $\mathfrak{X} = \mathfrak{Z}^{*k}$ pour un certain k, alors $d_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{X} := \mathfrak{Z}^k$.*
- *Si $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{X}$, alors soit $d_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{W}$ la sous-prévariété de $d_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{X}$ définie par la formule $d_{\mathfrak{Z}}W$.*
- *Si $\mathfrak{W} = \mathfrak{X}/E$, alors $d_{\mathfrak{Z}}E$ définit une relation d'équivalence E' sur $d_{\mathfrak{Z}}X$ et on peut poser $d_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{W} := d_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{X}/E'$.*

Il est clair que $d_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{V}^*) = \mathfrak{V}$. En revanche, $(d_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{X})^*$ peut être considérablement plus petite que $\mathfrak{X}$, p.ex. si $d_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{X}$ est vide. Par contre, si $\mathfrak{X}$ est Z-définissable, *i.e.* si chaque étape de la construction est donnée par des Z-formules, alors $(d_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{X})^* = \mathfrak{X}$.

Question: Quelles sont les propriétés des prévariétés préservées par * et $d_{\mathfrak{Z}}$?

En général, si $\mathfrak{V}$ est une $\mathfrak{Z}$-variété, alors $\mathfrak{V}^*$ n'est pas forcément une $\mathfrak{Z}^*$-variété. De nouveau, comme en section 2.4, une propriété de saturation fait marcher le passage :

Lemme 3.61 *Si $\mathfrak{Z}$ est $\aleph_0$-saturée et $\mathfrak{V}$ est une $\mathfrak{Z}$-variété, alors $\mathfrak{V}^*$ est une $\mathfrak{Z}^*$-variété.*

■ Par récurrence sur la construction. Le passage aux sous-variétés ne pose aucun problème. Soit alors $\mathfrak{W}$ une $\mathfrak{Z}$-variété telle que $\mathfrak{W}^*$ soit une $\mathfrak{Z}^*$-variété, et soit E une relation d'équivalence admissible, fermée et additive sur W. Alors l'extension naturelle de E à $\mathfrak{W}^*$, notée E^*, est encore une relation d'équivalence fermée.

Tout constructible Q est conjugué (dans le modèle monstre) d'un constructible Q' qui est Z-définissable. Si Q est E^*-saturé, alors la restriction $d_{\mathfrak{Z}}Q'[Z]$ de Q' à $\mathfrak{Z}$ donne un constructible E-saturé dont l'adhérence F est encore E-saturée parce que E est admissible. D'après la proposition 2.30, F^* est l'adhérence de Q' ; évidemment F^* est E^*-saturée. Donc l'adhérence de Q qui est conjuguée à F est aussi E^*-saturée et E^* est admissible.

Pour l'additivité, c'est similaire : comme dans le lemme 2.22 on peut montrer que la dimension d'un constructible Z-définissable de $\mathfrak{W}/E$ est la même que celle de son extension naturelle à $(\mathfrak{W}/E)^*$. (Ou encore : puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de paramètres qui interviennent dans un drapeaux dans $(\mathfrak{W}/E)^*$, on peut transporter toute la situation par un automorphisme du modèle monstre dans $\mathfrak{W}/E$). ■

Lemme 3.62 *Soit $\mathfrak{X}$ une $\mathfrak{Z}^*$-variété.*

(a) *Si $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{X}$ et si $d_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{X}$ est une $\mathfrak{Z}$-variété, alors $d_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{W}$ est une $\mathfrak{Z}$-variété (éventuellement vide).*

(b) *Si $\mathfrak{X}$ est Z-définissable, alors $d_{\mathfrak{Z}}X$ est une $\mathfrak{Z}$-variété.*

■ (a) est clair, puisqu'une sous-prévariété d'une variété est une variété.

(b) Il suffit de traiter le cas des quotients. Soit alors E une relation d'équivalence fermée, admissible, additive et Z-définissable sur X, et il faut montrer que E est fermée, admissible et additive sur $d_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{X}$. Comme E est Z-définissable, elle est fermée dans $\mathfrak{Z}$ ssi elle est fermée dans $\mathfrak{Z}^*$.

Soit Q un constructible E-saturé de $d_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{X}\times\mathfrak{Z}^n$. Son extension naturelle à $\mathfrak{X}$, notée Q^*, est encore E-saturée, de nouveau puisque E est Z-définissable. Donc l'adhérence F de Q^* est encore E-saturée. Mais (proposition 2.30) l'adhérence de Q dans $d_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{X}\times\mathfrak{Z}^n$ est la restriction de F, donc aussi E-saturée.

D'après le lemme 2.37, les dimensions des parties Z-définissables calculées dans $\mathfrak{Z}$ ou dans $\mathfrak{Z}^*$ sont les mêmes. Cette propriété est évidemment respectée par les sous-variétés ; encore faut-il montrer qu'elle passe aux quotients :

Soit Q un constructible Z-définissable du quotient $d_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}/E)=(d_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{X})/E$.

$$\begin{array}{rcl}
\dim_{\mathfrak{X}/E} R & \geqslant & \dim_{d_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}/E)} R \\
\text{théorème 3.33 (b)} & \geqslant & \dim_{d_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{X}} p^{-1}[R] - E\text{-gdim}_{\,d_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{X}} R \\
\text{par récurrence} & = & \dim_{\mathfrak{X}} p^{-1}[R] - E\text{-gdim}_{\,\mathfrak{X}} R \\
\text{additivité de } \mathfrak{X}/E & = & \dim_{\mathfrak{X}/E} R.
\end{array}$$

On a donc l'égalité partout et la conformité de $\mathfrak{X}/E$ passe à $d_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}/E)$. ■

Ce comportement des variétés n'est pas idéal. On ne peut probablement pas espérer avoir « $(\mathfrak{Z}\text{–}\mathbf{\mathfrak{V}t})^* \subseteq \mathfrak{Z}^*\text{–}\mathbf{\mathfrak{V}t}$ », *i.e.* que l'extension de toute variété soit encore une variété. En revanche, la propriété de restriction, à savoir que $d_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{X}$ soit une $\mathfrak{Z}$-variété chaque fois que $\mathfrak{X}$ est une $\mathfrak{Z}^*$-variété, serait souhaitable.

C'est la propriété d'admissibilité qui pose des problèmes. Supposons que Q soit un constructible $d_{\mathfrak{Z}}E$-saturée, alors son extension Q^* n'est pas forcément E-saturée. On peut considérer son E-saturation Q^*E dont l'adhérence $\overline{Q^*E}$ est encore E-saturé. Sa restriction $d_{\mathfrak{Z}}(\overline{Q^*E})$ donne un fermé $d_{\mathfrak{Z}}E$-saturé qui contient Q, mais rien n'assure qu'il s'agisse de $\overline{Q}$.

Il conviendrait peut-être de changer légèrement la définition de « variété » en demandant qu'il existe une extension $\aleph_0$-saturée qui soit encore une variété (dans le sens de la définition 3.36).

MORPHISMES

Soient $\mathfrak{V},\mathfrak{W}$ des $\mathfrak{Z}$-(pré)variétés et $\varphi:\mathfrak{V}\to\mathfrak{W}$ un $\mathfrak{Z}$-morphisme. Alors la même formule que celle définissant φ définit une application $\varphi^*:\mathfrak{V}^*\to\mathfrak{W}^*$.

Lemme 3.63 $\varphi^*:\mathfrak{V}^*\to\mathfrak{W}^*$ *est un* $\mathfrak{Z}^*$*-morphisme.*

■ Soit $F(a_1,\dots,a_k)$ un fermé de $W^*\times Z^{*n}$ où F est $\emptyset$-définissable. Puisque φ est un morphisme, $\varphi\times \mathrm{id}_{Z^{n+k}}$ est continue et donc $(\varphi\times \mathrm{id}_{Z^{n+k}})^{-1}[F]$ est un fermé Z-définissable G. Alors $(\varphi^*\times \mathrm{id}_{Z^{*n}})^{-1}[F(a_1,\dots,a_k)]=G(a_1,\dots,a_k)$ est fermé. ■

Corollaire 3.64 $^*:\mathfrak{Z}\text{–}\mathbf{\mathcal{P}vt}\to\mathfrak{Z}^*\text{–}\mathbf{\mathcal{P}vt}$ *est un foncteur.*

En revanche, la restriction $d_{\mathfrak{Z}}$ n'est pas un foncteur. Si $\varphi:\mathfrak{V}\to\mathfrak{W}$ est un morphisme entre $\mathfrak{Z}^*$-variétés ; bien que $d_{\mathfrak{Z}}\Gamma_\varphi$ définisse un morphisme d_φ, son domaine n'est pas toujours $d_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{V}$. Il suffit de prendre une application constante sur un élément qui n'est pas dans $\mathfrak{Z}$.

COMPLÉTUDE ET LISSITÉ

Lemme 3.65

(a) *Si* $\mathfrak{C}$ *est une* $\mathfrak{Z}$*-variété complète, alors* $\mathfrak{C}^*$ *est une* $\mathfrak{Z}^*$*-variété complète.*

(b) *Si* $\mathfrak{C}$ *est une* $\mathfrak{Z}^*$*-variété complète, alors* $d_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{C}$ *est une* $\mathfrak{Z}$*-variété complète.*

■ (a) Soit $F^*(a_1,\dots,a_k)$ un fermé de $\mathfrak{C}^*\times\mathfrak{Z}^*$ où F est un fermé $\emptyset$-définissable, et soit π_n la projection $C\times Z^n\to Z^n$.

Puisque $\mathfrak{C}$ est complète, $\pi_{n+k}[F]$ est un fermé G. Donc $\pi^*_{n+k}[F^*]=G^*$. Il s'ensuit que $\pi^*_n[F^*(a_1,\dots,a_k)]=\pi^*_{n+k}[F^*](a_1,\dots,a_k)=G^*(a_1,\dots,a_k)$ est fermé, donc $\mathfrak{C}^*$ est complète.

(b) $d_{\mathfrak{Z}}C$ définit un fermé à l'intérieur de C (proposition 2.31 (a)), qui est complet d'après la proposition 3.48. ■

Lemme 3.66

(a) *Si* $\mathfrak{Z}$ *et* $\mathfrak{Z}^*$ *sont* $\aleph_0$*-saturées, alors une* $\mathfrak{Z}$*-variété* $\mathfrak{V}$ *et lisse ssi* $\mathfrak{V}^*$ *et lisse.*

(b) *Si* $\mathfrak{X}$ *est une* $\mathfrak{Z}^*$*-variété lisse* Z*-définissable, alors* $d_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{X}$ *est lisse.*

■ Comme dans la preuve du lemme 3.61 resp. du lemme 3.62 (b). ■

Chapitre 4 EXEMPLES

4.1 EXEMPLES « NATURELS »

Pour donner un exemple d'une géométrie de Zariski, il faut indiquer une structure $\mathfrak{Z}$ et les fermés parmi les parties définissables. De façon alternative, on peut expliciter un langage de géométrie de Zariski pour la structure. Après il reste à vérifier que la structure satisfait aux axiomes résumés ci-dessous. Certains axiomes sont souvent trivialement vérifiés ou impliqués par d'autres propriétés de la structure en question. Pour simplifier la présentation des exemples, j'explicite ces raisonnements une fois pour toutes :

« **noethérien** » = Les fermés satisfont à la condition de chaîne descendante.

Si la structure est $\aleph_0$-stable, alors il suffit de voir que soit le rang, soit le degré de Morley décroît quand on a deux fermés irréductibles l'un proprement inclus dans l'autre.

« **quanteurs** » = Les parties définissables sont toutes constructibles.

Il faut d'abord voir que les parties définissables sans quanteurs sont constructibles. C'est trivialement vérifié si le langage donné est un langage de géométrie de Zariski.

Puis il suffit que la structure admette l'élimination des quanteurs pour que toute partie définissable soit constructible.

« **irréductible** » = La structure de base est irréductible.

C'est surtout le cas si la structure est fortement minimale et les fermés de Z sont les parties finies et Z .

« **compatible** » = La famille de topologies est compatible.

La compatibilité est trivialement vérifiée si un langage de géométrie de Zariski est donné — cf. 2.2. Sinon elle est souvent facilement impliquée par le lemme 1.14.

« **séparation** » = La diagonale est fermée.

Il suffit que le symbole « = » soit dans un langage de géométrie de Zariski.

« **élémentaire** » = Toute extension élémentaire est naturellement une géométrie de Zariski (dans un langage de géométrie de Zariski dénombrable).

C'est évident si l'exemple concerne une classe élémentaire plutôt qu'une seule structure. Sinon il suffit de voir que la structure est $\aleph_0$-saturée (2.13).

« conforme » = Toute extension élémentaire est conforme.

Si l'on sait déjà que la structure est une prégéométrie de Zariski élémentaire, alors il suffit de vérifier la conformité pour une extension $\aleph_0$-saturée.

Si l'on connaît les fermés irréductibles, un des critères du lemme 1.25 est souvent facilement vérifié. Si l'on sait que la dimension est additive, alors il suffit de voir que tout fermé de Z est conforme.

« définissable » = La dimension est uniformément définissable.

De nouveau, si l'on sait déjà que la structure est une prégéométrie de Zariski élémentaire, alors il suffit que la dimension soit définissable dans une extension $\aleph_0$-saturée. Si en plus la géométrie est conforme, alors il suffit de savoir que le rang de Morley est définissable. C'est surtout le cas pour les structures fortement minimales.

« dimension finie » = Toute extension élémentaire est de dimension finie.

Une géométrie conforme vérifie cette propriété ssi c'est une structure de rang de Morley fini.

La géométrie de Zariski triviale

Exemple 4.1 Soit $\mathfrak{L} = \{=\}$. Tout ensemble infini Z devient une $\mathfrak{L}$-structure, appelée « structure triviale » en interprétant « = » par la diagonale $\Delta(Z)$. Alors $\mathfrak{L}$ est un langage de géométrie de Zariski pour Z, et la structure de géométrie de Zariski correspondante $\mathfrak{Z}^{\mathrm{tr}}$ est appelée la géométrie de Zariski triviale sur Z.

Les fermés irréductibles de Z^n sont, à permutation des coordonnées près, de la forme $\{(a_1,\ldots,a_{n_1})\} \times Z^{n_2} \times \Delta^{n_3}$ où $n = n_1 + n_2 + n_3$. Les axiomes sont facilement vérifiés. La dimension de la structure est 1. En plus, la géométrie de Zariski triviale est lisse et complète.

Toute prégéométrie de Zariski $\mathfrak{Z}$ de base Z s'appauvrit continûment en $\mathfrak{Z}^{\mathrm{tr}}$, c.-à-d. $\mathrm{id} : \mathfrak{Z}^n \to (\mathfrak{Z}^{\mathrm{tr}})^n$ est une application continue (pour tout n). Autrement dit, les fermés de $\mathfrak{Z}^{\mathrm{tr}}$, appelés les fermés triviaux, sont définissables et fermés dans toute prégéométrie de Zariski de base Z.

Relations d'équivalence

Exemple 4.2 Soit $\mathfrak{L} = \{E,=\}$ où E est un symbole de relation binaire. Toute $\mathfrak{L}$-structure où E est interprété par une relation d'équivalence est une prégéométrie de Zariski élémentaire complète. Les fermés premiers sont donc, à part les fermés triviaux, la relation E et les E-classes infinies.

irréductible Pour que la structure soit irréductible, il faut et il suffit que E ait une infinité de classes.

définissable Pour que le rang soit uniformément définissable, il faut et il suffit que les cardinalités des E-classes finies soient bornées.

conforme Enfin, pour que la géométrie soit conforme, il faut qu'il y ait au moins une classe infinie — sinon on a la situation de l'exemple 4.8

On peut facilement étendre cet exemple au cas où $\mathfrak{L} = \{E_1, \ldots, E_n, =\}$ comporte un nombre fini de symboles binaires, tous interprétés par des relations d'équivalence. Pour que les axiomes soient vérifiés, il faut généraliser les conditions ci-dessus. P.ex. il faut que chaque relation d'équivalence ait une infinité de classes et que les cardinalités finies des intersections finies de classes soient bornées. De plus, il faut des conditions pour assurer la conformité qui vont dépendre de la façon dont les relations d'équivalence s'intersectent.

Le cas le plus simple est donné par n relations d'équivalence emboîtées où chaque relation d'équivalence divise toute classe de la relation d'équivalence précédente en une infinité de classes, toutes infinies. Cela donne un exemple d'une géométrie de Zariski de dimension n.

Géométries d'actions de groupes

Exemple 4.3 Soit Z un ensemble infini et G un sous-groupe dénombrable du groupe symétrique $\mathfrak{S}_Z$. Supposons en plus que tout élément de $G \setminus \{e\}$ ne fixe qu'un nombre fini de points de Z. Alors les graphes de l'action des éléments de G sur Z, c.-à-d. les ensembles $\Gamma_g := \{(z, gz) \mid z \in Z\}$, engendrent une géométrie de Zariski de dimension 1, complète, sur Z. Plus précisément, si $\mathfrak{L} := \{\Gamma_g \mid g \in G\}$, alors $\mathfrak{L}$ est un langage de géométrie de Zariski pour la $\mathfrak{L}$-structure Z.

noethérien Le fait que l'on ait une famille de topologies noethériennes compatibles vient de la proposition 4.18.

séparation $\Delta(Z) = \Gamma_e$ est fermée par définition.

quanteurs Il est facile de voir qu'une structure d'action de groupe admet l'élimination des quanteurs dans le langage $\mathfrak{L} \cup \{\mathrm{Fix}\,(g) \mid g \in G\} \cup Z$. Vu que les ensembles de points fixes sont définissables sans quanteurs par hypothèse (ils sont ou bien fini, ou bien égal à Z), la structure admet l'élimination des quanteurs pour les langage $\mathfrak{L}$ avec paramètres.

conforme Cette prégéométrie est clairement conforme : puisqu'un groupe agit sur la géométrie, la situation est totalement homogène.

élémentaire Tout modèle de la théorie est donnée par un ensemble infini sur lequel G agit. La finitude des ensembles de points fixes est exprimée dans le théorie. Un modèle $\aleph_0$-saturé de la théorie est donc toujours une prégéométrie de Zariski.

irréductible
définissable
dim. finie
} La structure est fortement minimale et conforme !

Les géométries de toutes les exemples précédentes sont triviales.

Géométries de Zariski linéaires

Exemple 4.4 Soit A un anneau dénombrable et M un A-module connexe $\aleph_0$-stable de rang de Morley fini. Alors M est une géométrie de Zariski dans le langage des sous-groupes pp-définissables.

Puisque les translations sont des homéomorphismes, il suffit le plus souvent de regarder les sous-groupes pp-définissables pour vérifier les axiomes.

noethérien Les sous-groupes pp-définissables satisfont à la condition de chaîne descendante ([Pr] théorème 3.1c).

irréductible Un sous-groupe pp-définissable est irréductible ssi il est pp-connexe, c.-à-d. il n'a pas de sous-groupe pp-définissable propre d'indice fini :

La direction « $\Rightarrow$ » est trivial. Inversement, si un sous-groupe connexe H est recouvert par un nombre fini de classes de sous-groupes pp-définissables, alors une de ces classes est forcément égale à H.

séparation La diagonale est un sous-groupe pp-définissable.

quanteurs Clair à cause de la « pp-élimination des quanteurs » dans les modules, voir p.ex. [Pr] cor. 2.16 ou [GR].

définissable Les fibres d'un sous-groupe pp-définissable sont toutes des classes d'un même sous-groupe pp-définissable, donc isomorphes. En particulier, la dimension des fibres est constante, donc définissable.

conforme Une hypersurface d'un sous-groupe définissable irréductible (= connexe) est une classe modulo un sous-groupe pp-définissable propre, qui est donc forcément d'indice infini. Donc toutes les classes modulo ce sous-groupe sont des hypersurfaces

dim. finie Par l'hypothèse que le rang de Morley est fini.

Variétés algébriques

Exemple 4.5 Toute variété algébrique sur un corps K algébriquement clos est une géométrie de Zariski dans le langage de la topologie de Zariski. En général, la géométrie n'est ni complète, ni lisse. Ici, « variété algébrique » veut dire variété quasi-projective, c.-à-d. une partie localement fermée d'un espace projectif $\mathbb{P}^n(K)$.

L'espace projectif $\mathbb{P}^n(K)$ est une K-variété dans le sens de la définition 3.36 dont les parties localement fermées sont des sous-variétés. Il suffit donc de montrer que les corps algébriquement clos sont des géométries de Zariski.

noethérien La condition de chaîne descendante pour les fermés vient du fait que l'anneau des polynômes $K[X_1,..., X_n]$ est un anneau noethérien.

irréductible K est fortement minimal.

séparation $\Delta(K)$ est définie par le polynôme $X_1 = X_2$.

quanteurs Les corps algébriquement clos éliminent les quanteurs par un théorème de Tarski (voir p.ex. [P1]). Dans le langage de la géométrie algébrique, le théorème a été re-démontré par Chevalley : l'image d'un constructible par un morphisme est constructible. ([CC], exposé 7, voir aussi [Ha] exercice 3.19).

élémentaire Clair. En fait, on peut réduire le langage à deux symboles de relations, un pour le graphe de l'addition, l'autre pour le graphe de la multiplication.

définissable Voir [Sha], tome 1, théorème 7, page 76, qui montre d'ailleurs que la dimension est purement semi–continue.

conforme L'anneau $K[X_1,..., X_n]$ est caténaire, donc la géométrie de Zariski aussi, et cela implique la conformité.

dim. finie K est fortement minimal, donc de dimension 1.

Une variété algébrique régulière (= sans singularité) est lisse dans le sens de la définition 3.52, mais la réciproque n'est pas vrai (l'exemple standard : une cubique sans point double).

Les variétés algébriques complètes dans le sens de la géométrie algébrique sont exactement les variétés K-complètes d'après 3.46. En revanche, le fait qu'une variété V soit V-complète ne suffit pas en général pour qu'elle soit complète.

On pourrait étendre l'exemple aux variétés algébriques abstraites que l'on obtient en recollant des variétés affines ([Ha] p.58) — c'est la définition la plus vaste de variété algébrique avant l'introduction des schémas — à condition toutefois de demander qu'elles soient séparées (cf. exemple 4.11).

« Zariski Geometries »

La définition 2.39 est une généralisation des « Zariski geometries » de Hrushovski et Zil'ber (voir [HZ2] et [HZ1] définition p. 1).

Leur axiome (Z0) donne la compatibilité et la séparation. L'axiome (Z1) est une version faible de l'élimination des quanteurs qui en est déduite en proposition 2.1 de [HZ1]. Cette démonstration utilise la formule des dimensions d'une façon essentielle. L'axiome (Z2) demande que la structure soit fortement minimale ; cela implique l'irréductibilité et le passage des topologies aux extensions élémentaires (proposition 4.1 de [HZ1]). De nouveau, la preuve utilise la lissité exigée par l'axiome (Z3).

La conformité n'est pas très claire. Les auteurs disent qu'elle est facile à établir ([HZ1] p. 15, « it can easily be shown that the Morley rank of a definable set E of X^k is the dimension of the closure of E in X^k . »), mais l'exemple 4.8 montre que ce n'est pas tout à fait évident. Une preuve de la conformité des extensions élémentaire est implicite dans la démonstration de la proposition 4.1 de [HZ1]

Une fois la conformité démontrée, la définissabilité de la dimension vient de la définissabilité du rang de Morley dans les structures fortement minimales. Il est clair aussi que la dimension est finie. Par contre, aucune condition sur le cardinal du langage n'est faite. À part cela, les « Zariski Geometries » sont des géométries de Zariski lisses de dimension 1 dans le sens de la définition 2.39.

En particulier, les exemples donnés par Hrushovski et Zil'ber sont aussi des exemples de géométries de Zariski, surtout l'exemple du théorème C de [HZ1] d'une géométrie de Zariski très ample qui n'est pas interprétable dans un corps algébriquement clos.

D'autre part, Hrushovski et Zil'ber introduisent une notion de Z-structure ([HZ1] 3.10) qui correspond à peu près à ma notion de prégéométrie de Zariski. Ni l'irréductibilité, ni la compatibilité ne sont explicitement demandées, mais la définition est marginale. (Tandis que l'irréductibilité n'est pas indispensable, la compatibilité semble bien être nécessaire.)

Question: Est-ce que les raisonnement de [HZ1] se généralisent au cas de la dimension supérieure, à savoir :

- Une prégéométrie de Zariski lisse est-elle conforme ?
- Une prégéométrie de Zariski lisse est-elle élémentaire ?

« Zariski–type Structures »

Zil'ber de son côté a défini des « Zariski–type structures » dans [Z4]. Presque tous les axiomes des prégéométries de Zariski y sont, sauf l'irréductibilité et la moitié de la compatibilité.

L'élimination des quanteurs est remplacée par la condition (plus forte) que la structure soit complète (l'image d'un fermé sous une projection est fermée), l'élimination des quanteurs s'en déduit facilement à l'aide des autres axiomes.

Contrairement à [HZ2],[HZ1], il admet des structures de toute dimension finie. La dimension de [Z4] n'est pas la dimension topologique. Elle est donnée axiomatiquement pour les fermés par des propriétés semblables à la dimension topologique. En particulier, la dimension axiomatique de Zil'ber est toujours supérieure ou égale à la dimension topologique.

La conformité aussi est remplacée par un axiome qui définit la dimension des constructibles par la formule $\dim Q := \dim \overline{Q}$. De plus, ses axiomes (DF) et (AF) demandent que la dimension soit semi–continue et additive.

Une propriété de saturation, à savoir la $\aleph_1$-compacité, garantit le passage de la structure topologique aux extensions élémentaires.

Les « structures de type Zariski » de Zil'ber ne sont donc pas toujours des géométries de Zariski dans le sens de la définition 2.39. En revanche, un exemple naturel d'une telle structure (avec une dimension naturelle) est une géométrie de Zariski avec grande probabilité. Si c'est le cas, alors il s'agit d'une géométrie de Zariski complète avec une dimension semi–continue.

Exemple 4.6 ([Z4] théorème 1) Une variété complexe compacte est une géométrie de Zariski dans un langage de parties analytiques. (Dans ce cas, la dimension axiomatique de Zil'ber est la dimension topologique, et il n'est pas difficile de voir que la dimension topologique vérifie la condition de conformité).

4.2 CONTRE-EXEMPLES

UNE PRÉGÉOMÉTRIE DE ZARISKI NON ÉLÉMENTAIRE

Exemple 4.7 Soit Z un ensemble infini et E une relation d'équivalence qui a exactement une classe à n éléments pour tout $n \in \omega$ et pas d'autres. Alors Z élimine les quanteurs dans le langage de la relation d'équivalence $\{E\}$ avec paramètres.

Si l'on décide maintenant que $F := E \setminus \Delta(Z)$ soit fermé, alors on obtient une famille de topologies noethériennes compatibles d'après la proposition 4.18. L'élimination des quanteurs reste vraie car $E = F \cup \Delta(Z)$ est définissable sans quanteurs. De plus, la structure est minimale, donc irréductible. Par conséquent, tous les axiomes d'une prégéométrie de Zariski sont donc vérifiés.

Cette prégéométrie n'est pas élémentaire: soit $C_n = \{c_{n1},\ldots,c_{nn}\}$ la E-classe ayant n éléments. Alors $F(c_{n1}) \cap \cdots \cap F(c_{nk}) = \{c_{n,k+1},\ldots,c_{nn}\}$, donc on obtient des chaînes d'intersections arbitrairement longues :

$$F(c_{n1}) \supset F(c_{n1}) \cap F(c_{n2}) \supset \cdots \supset F(c_{n1}) \cap \cdots \cap F(c_{n,n-1})$$

ce qui contredit la condition de chaîne 2.24 (b).

Une prégéométrie de Zariski non conforme

Exemple 4.8 Soit E une relation d'équivalence sur un ensemble infini Z qui n'a que des classes à n éléments (pour un certain $n \in \omega, n > 1$). Alors Z est une prégéométrie de Zariski élémentaire de langage $\{=, E\}$, complète, de dimension uniformément définissable. Mais elle n'est pas conforme, et aucune de ses extension élémentaire ne l'est.

Les fermés irréductibles de Z^2 sont: les singletons $\{(a,b)\}$, les droites $\{a\} \times Z$ et $Z \times \{a\}$, la diagonale $\Delta(Z)$, la relation d'équivalence E et Z^2. Alors les seuls drapeaux maximaux formés de fermés irréductibles sont :

$$\begin{array}{ccccccc}
\{(a,b)\} & \subset\subset & \{a\} \times Z & \subset\subset & Z^2 & & \\
\{(a,b)\} & \subset\subset & Z \times \{b\} & \subset\subset & Z^2 & & \\
\{(a,a)\} & \subset\subset & \Delta(Z) & \subset\subset & E & \subset\subset & Z^2
\end{array}$$

Donc E n'est pas conforme, car $\dim E = 2$ et $\dim(E \setminus \Delta(Z)) = 1$. En plus, on voit que $\dim Z^2 = 3 \neq 2 = 2 \cdot \dim Z$, la dimension n'est donc pas additive (contrairement au rang de Morley).

Cette prégéométrie de Zariski vérifie presque tous les axiomes des « Zariski geometries » de [HZ2], mais elle n'est pas lisse :

$$\begin{array}{rccccccc}
 & \dim\Big((E \times Z) \cap (\{a\} \times Z^2)\Big) & = & \dim\Big(\{a\} \times aE \times Z\Big) & = & \dim Z & = & 1 \\
\text{par contre} & \dim\Big(E \times Z\Big) + \dim\Big(\{a\} \times Z^2\Big) - \dim Z^3 & = & 4+3-5 & & & = & 2
\end{array}$$

(Mais on pourrait ajouter un autre fermé irréductible F qui soit compris entre $\Delta^3(Z)$ et $\pi_1^{-1}[E] \cap \pi_2^{-1}[E]$ de façon que $\dim Z^3 = 6$ et repousser ainsi le contre-exemple de la lissité vers des puissances plus élevées de Z.)

Des prégéométries différentes engendrant la même structure

Exemple 4.9 Si l'on reprend la prégéométrie $\mathfrak{Z}_1$ de l'exemple précédent 4.8, on peut faire la même construction que dans l'exemple 4.7, c.-à-d. on peut décider que $F := E \setminus \Delta(Z)$ soit fermé. Alors on obtient une deuxième prégéométrie de Zariski $\mathfrak{Z}_2$ sur le même ensemble de base, qui engendre la même structure définissable, mais dont les topologies (à partir de Z^2) sont strictement plus grands.

Dimension non définissable

Exemple 4.10 Soit E une relation d'équivalence sur un ensemble infini Z qui a une seule classe à n éléments pour chaque entier n. Alors Z est une prégéométrie de Zariski complète élémentaire de langage $\{=, E\}$.

La dimension est définissable dans le modèle premier (où E n'a que des classes finies), et dans tous les modèles où E n'a qu'un nombre fini de classes infinies. Dès qu'il y a un nombre infini de classes infinies, l'ensemble $\pi[E, 0]$, c.-à-d. l'ensemble de points ayant des E-classes finies, n'est plus définissable.

La non-définissabilité de la dimension se voit aussi sur les dimensions des modèles (voir 2.37) : la dimension du modèle premier est 1, celle d'un modèle $\aleph_0$-saturé est 2 ; le rang de Morley (qui dépend de la théorie et non pas des modèles) est 2. D'ailleurs, le fermé E n'est pas conforme dans le modèle premier ; par contre, il l'est dans tout autre modèle.

Géométries de Zariski non-séparées

Une géométrie de Zariski est séparée par définition, mais il y a des exemples naturels qui satisfont à tous les axiomes des géométries de Zariski sauf la séparation :

Exemple 4.11

- L'exemple 4.8 d'une relation d'équivalence n'ayant que des classes à un entier fixée d'éléments. Si l'on enlève la diagonale, la structure devient conforme. D'une certaine façon, la relation E est une diagonale épaissie.
- Les « variétés algébriques abstraites », c.-à-d. les variétés qui sont localement isomorphes à des fermés affines d'un K^n. Les axiomes des géométries de Zariski sont tous vérifiés sauf la séparation qui ne l'est pas toujours. L'exemple de la droite affine avec un point dédoublé est standard.

Phénomènes de cardinalité

Dans les variétés algébriques, les fermés sont définis par des polynômes, donc il y en a au plus κ dans un modèle de cardinalité κ. C'est d'autant plus vrai dans les espaces vectoriels ou dans les géométries triviales.

Par contre, il existe une (pré)géométrie de Zariski modulaire, dénombrable, avec $2^{\aleph_0}$ courbes planes. En prenant une géométrie d'action de groupe (4.3), il suffit d'indiquer un sous-groupe G de $\mathfrak{S}_{\aleph_0}$, de cardinalité $2^{\aleph_0}$, qui satisfasse à la condition sur les points fixes. (C'est une géométrie de Zariski sauf que le langage n'est pas forcément dénombrable). Un exemple a été donné par A. Khélif :

Exemple 4.12 Soit $(G_i)_{i\in\omega}$ une suite de groupes finis de cardinalités strictement croissantes ensemble avec une famille d'epimorphismes $\varphi_i : G_{i+1} \to G_i$.

Soit $Z := \biguplus G_i$ la réunion disjointe des G_i et soit

$$G := \varprojlim G_i = \{\bar{g} \in \prod_{i\in\omega} G_i \,|\, g_i = \varphi_i(g_{i+1})\}.$$

(Par exemple, $G_i = \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$, φ_i la multiplication avec p et $G = \mathbb{Z}_p$.)

Alors G est de cardinalité $2^{\aleph_0}$, tandis que Z est dénombrable. Si $\bar{g} \in G$ et $z \in Z$, alors il existe un unique i tel que $z \in G_i$. Par conséquent, on peut définir une action de G sur Z en posant $\bar{g}.z = g_i \cdot z$. L'ensemble des points fixes de $\bar{g}$ est égal à

$$\{z \in G_i \,|\, \bar{g} \cdot z = z, i \in \omega\} = \{z \in G_i \,|\, g_i = e, i \in \omega\} = \bigcup\{G_i \,|\, g_i = e\},$$

donc fini si $\bar{g} \neq \bar{e}$, car si $g_i \neq e$, alors $g_j \neq e$ pour tout $j \geqslant i$.

4.3 CONSTRUCTIONS

PRODUIT DE GÉOMÉTRIES DE ZARISKI

Soient $\mathfrak{Z}_0,\dots,\mathfrak{Z}_k$ des géométries de Zariski. Alors on peut définir leur produit $\mathfrak{Z}_0 \times \dots \times \mathfrak{Z}_k$:

- L'ensemble de base de $\mathfrak{Z}_0 \times \dots \times \mathfrak{Z}_k$ est $Z_0 \times \dots \times Z_k$.
- La topologie $\tau_n[\mathfrak{Z}_0 \times \dots \times \mathfrak{Z}_k]$ est la topologie produit des $\tau_n[\mathfrak{Z}_i]$.

Proposition 4.13 *Le produit de géométries de Zariski est encore une géométrie de Zariski.*

(Comme langage on pourrait prendre le « produit des langages », c.-à-d. un symbole de prédicat n-aire pour tout k-uple de prédicats n-aires $(F_1,\dots,F_k)$ où F_i est dans le langage de $\mathfrak{Z}_i$, prédicat qui sera interprété par $F_1[Z_1] \times \cdots \times F_k[Z_k]$.)

■ Soient $\pi_i : Z_0 \times \dots \times Z_k \to Z_i$ les projections.

- La topologie définie ci-dessus est évidemment noethérienne. En fait, tout fermé irréductible est de la forme $F_0 \times \dots \times F_k$ avec des fermés irréductibles F_i. Un drapeau du produit est donc forcément formé de produits successifs de termes de drapeaux des $\mathfrak{Z}_i$, et on trouve

$$\dim(F_0 \times \dots \times F_k) = \dim F_0 + \cdots + \dim F_k.$$

À partir de cette formule, il est clair que le produit est de dimension fini, conforme, et que la dimension est uniformément définissable et additive.

- Le produit est irréductible à cause de la proposition 1.17 (c) (dont la preuve n'utilise que la continuité des projections !)
- La diagonale $\Delta(Z_0 \times \ldots \times Z_k)$ est fermée car c'est $\pi_0^{-1}[\Delta(Z_0)] \cap \cdots \cap \pi_k^{-1}[\Delta(Z_k)]$.
- De la même façon on montre que les applications de compatibilité sont continues (la version du lemme 1.13 est la plus rapide).
- L'élimination des quanteurs est facile à voir pour les fermés : d'abord il suffit de considérer des fermés de la forme $F_0 \times \ldots \times F_k$ où F_i est un fermé de $\mathfrak{Z}_i^n$, car tout fermé du produit en est une réunion finie. Soit $\pi : (\mathfrak{Z}_1 \times \ldots \times \mathfrak{Z}_k)^n \to (\mathfrak{Z}_1 \times \ldots \times \mathfrak{Z}_k)^{n-1}$ une projection. En fait, π s'écrit $\pi = \pi_1 \times \ldots \times \pi_k$ (où π_i est la même projection que π mais dans $\mathfrak{Z}_i$). Alors $\pi[F_0 \times \ldots \times F_k] = \pi_0[F_0] \times \cdots \times \pi_k[F_k]$ est un produit de constructibles.

  Or, un produit de constructibles Q_i est constructible dans la topologie produit, car si $Q_i = \bigcup_{j \in J_i} (F_{ij} \setminus G_{ij})$ avec des fermés F_{ij} et G_{ij} , alors on peut écrire

$$\begin{aligned}
Q_0 \times \ldots \times Q_k &= (Q_0 \times Z_1 \times \ldots \times Z_k) \cap \cdots \cap (Z_0 \times \ldots \times Z_{k-1} \times Q_k) \\
&= \bigcup_{j \in J_0} \Big((F_{0j} \times Z_1 \times \ldots \times Z_k) \setminus (G_{0j} \times Z_1 \times \ldots \times Z_k) \Big) \cap \cdots \\
&\qquad \cdots \cap \bigcup_{j \in J_k} \Big((Z_0 \times \ldots \times Z_{k-1} \times F_{kj}) \setminus (Z_0 \times \ldots \times Z_{k-1} \times G_{kj}) \Big).
\end{aligned}$$

  Puis on peut appliquer le critère du lemme 1.21. Soit $F \setminus G$ une partie localement fermée du produit avec F irréductible. Il y a deux cas : ou bien $\pi[G] \subset\subset \pi[F]$; ou bien, par additivité, les π-fibres de G sont génériquement de dimension plus petite que celles de F . Dans les deux cas, on trouve $\{a \mid F(a) = G(a)\} \subset\subset \pi[F]$. Ceci implique l'élimination des quanteurs d'après le lemme 1.21.
- Un produit d'extensions élémentaires $\aleph_0$-saturées des $\mathfrak{Z}_i$ donne une extension élémentaire $\aleph_0$-saturée du produit. Le produit est donc une prégéométrie de Zariski élémentaire. ■

Géométries interprétables

Une interprétation d'une structure $\mathfrak{M}$ dans une géométrie de Zariski $\mathfrak{Z}$ est la donnée d'une partie définissable Q d'un Z^k et d'une surjection $s : Q \twoheadrightarrow M$ telle que pour tout $n \in \omega$ et toute partie définissable D de M^n , l'image inverse $(s, \ldots, s)^{-1}[D]$ soit définissable dans $\mathfrak{Z}$.

Si l'on veut que $\mathfrak{M}$ soit une géométrie de Zariski, il est raisonnable d'exiger que les topologies sur $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{Z}$ soient liées. La possibilité la plus naturelle est de demander que l'interprétation soit une **interprétation continue**, à savoir $(s,\ldots,s)^{-1}[F]$ est fermé dans $\mathfrak{Z}$ pour tout fermé F de $\mathfrak{M}$.

Si $\mathfrak{M}$ est continûment interprétable dans $\mathfrak{Z}$ par l'application $s : Q \twoheadrightarrow M$, alors $\mathfrak{M}$ est un appauvrissement de la structure de prévariété $\mathfrak{Q}/E$ où $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Z}^k\restriction_Q$ et $E = (s,s)^{-1}[\Delta(M)]$. Alors $\mathfrak{M}$ hérite d'un certain nombre de propriétés de $\mathfrak{Q}/E$:

- Les topologies sur $\mathfrak{M}$ sont noethériennes.
- $\mathfrak{M}$ est irréductible si Q est irréductible dans $\mathfrak{Z}$.
- $\mathfrak{M}$ ne peut être séparée que si E est fermée dans $Q \times Q$.
- Les topologies sur $\mathfrak{M}$ satisfont à la condition de chaîne descendante bornée. Donc :

Lemme 4.14 *Toute prégéométrie de Zariski continûment interprétable dans une prégéométrie de Zariski élémentaire est élémentaire.*

Un cas particulièrement intéressant est celui des **interprétations pleines**, *i.e.* où M est muni de toute la structure qui provient de $\mathfrak{Z}$. Tout ce qui a été développé en section 3.2 relatif aux variétés s'applique à ce cas, mais la situation est plus simple car le problème des produits ne se pose pas. Par définition d'une interprétation continue et pleine, M^2 porte la topologie quotient de la topologie induite sur Q^2. D'après les résultats de la section 3.2, on a donc

Proposition 4.15 *Soient Q un constructible de $\mathfrak{Z}$ et E une relation d'équivalence définissable, fermée, admissible et additive sur Q, telle que Q soit E-irréductible, alors $\mathfrak{M}$ est une géométrie de Zariski.*

Autrement dit, une $\mathfrak{Z}$-variété irréductible $\mathfrak{V}$ est une géométrie de Zariski.

GÉOMÉTRIES ENGENDRÉES

En 2.5 on a essayé de réduire le langage des géométries de Zariski en décomposant les fermés en éléments « simples ». On peut se poser la question inverse :

Question:

(1) Étant donnée une partie $\mathcal{E}$ de $Z^{<\omega}$, existe-t-il une géométrie de Zariski pour laquelle les éléments de $\mathcal{E}$ sont fermés ?

(2) Existe-t-il une géométrie de Zariski « engendrée » par $\mathcal{E}$?

(3) Quelles sont les conditions pour que $\mathcal{E}$ soit l'ensemble des fermés premiers (ou absolument irréductibles) d'une géométrie de Zariski ?

Il convient de traiter ces problèmes en deux étapes : il faut d'abord chercher des conditions de nature plutôt combinatoire pour que les éléments de $\mathcal{E}$ soient des fermés d'une prégéométrie de Zariski ; après on peut essayer de trouver des critères plutôt modèle–théoriques pour qu'il s'agisse d'une géométrie de Zariski.

Bien que l'intersection de deux topologies noethériennes en soit encore une, l'intersection de deux prégéométries de Zariski n'a aucune raison d'être encore une prégéométrie de Zariski : c'est l'élimination des quanteurs qui pose des problèmes. En général, une « prégéométrie de Zariski engendrée par $\mathcal{E}$ » n'a donc pas de raison d'exister.

Le problème de l'élimination des quanteurs mis à part, on peut définir la structure topologique engendrée par $\mathcal{E}$ en y mettant tous les fermés que l'on peut obtenir à partir de $\mathcal{E}$ et des fermés triviaux :

Notation:

- Soit $\mathcal{E}$ une partie de $Z^{<\omega}$ où Z est un ensemble infini. Alors $<\mathcal{E}>$ est la plus petite partie de $Z^{<\omega}$ contenant $\mathcal{E}$ et les fermés triviaux, et close par produit cartésien, permutations de coordonnées, intersection et réunion finies.
- De façon générale, si $\mathcal{E} \subseteq Z^{<\omega}$, alors soit $\mathcal{E}_n := \mathcal{E} \cap Z^n$, et soit $\mathcal{E}^{\mathfrak{S}}$ la clôture sous l'action des permutations, *i.e.* $\mathcal{E}^{\mathfrak{S}} := \{\sigma[E] \mid n \in \omega, E \in \mathcal{E}_n, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$.

L'idée de la suite de cette section est qu'il suffit de tester les propriétés essentielles sur l'ensemble $\mathcal{E}$ de départ. Cela marche bien pour les axiomes de caractère plutôt combinatoire, c.-à-d. pour tous les axiomes des prégéométries de Zariski sauf l'élimination des quanteurs. Le résultat de la proposition 4.18 est néanmoins utile, surtout pour décider si une structure que l'on connaît bien par ailleurs est une (pré)géométrie de Zariski pour un certain choix de fermés parmi les parties définissables. Il a été utilisé à cet effet dans les exemples 4.3 et 4.7.

Définition 4.16 *Un ensemble $\mathcal{E}$ est* **noethérien** *ssi $\mathcal{E}$ satisfait à la condition de chaîne d'intersections,* i.e. *toute intersection d'éléments de $\mathcal{E}$ est égale à une sous-intersection finie.*

Pour éviter des problèmes, supposons que $Z^n \cap Z^m = \emptyset$ si $n \neq m$. Alors $\mathcal{E} \subseteq Z^{<\omega}$ est noethérien ssi $\mathcal{E}_n$ est noethérien pour tout $n \in \omega$.

Lemme 4.17 *Une réunion finie d'ensembles noethériens est noethérien ; un « produit » fini d'ensembles noethériens est noethérien.*

(Où « produit » signifie l'ensemble $\{E_1 \times E_2 \mid E_i \in \mathcal{E}_i\}$ qui sera noté $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$.)

■ Il suffit de considérer deux ensembles. Soient $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ noethériens. Supposons que l'on ait une suite décroissante $E_1 \supset E_1 \cap E_2 \supset \cdots \supset E_1 \cap \ldots \cap E_k \supset \cdots$ avec $E_i \in \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$. À chaque étape, on peut écrire $E_1 \cap \ldots \cap E_k = F_k^{(1)} \cap F_k^{(2)}$ où $F_k^{(i)}$ regroupe tous les termes venant de $\mathcal{E}_i$. Alors une des chaînes $F_1^{(i)} \supseteq \cdots \supseteq F_k^{(i)} \supseteq \cdots$ admet une infinité d'inclusions strictes : contradiction !

Supposons maintenant que l'on ait une suite décroissante dans $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$. Puisque $(E_1 \times F_1) \cap (E_2 \times F_2) = (E_1 \cap E_2) \times (F_1 \cap F_2)$, elle donne lieu à deux suites décroissantes projetées ; l'une formée d'intersections d'éléments de $\mathcal{E}_1$, l'autre d'intersections d'éléments de $\mathcal{E}_2$. Les deux suites étant finies par hypothèse, la suite de départ est forcément finie. ■

Proposition 4.18 *Soit* Z *un ensemble infini et soit* $\mathcal{E} \subseteq Z^{<\omega}$ *un ensemble noethérien.*

(a) $<\mathcal{E}>$ *est une famille de topologies noethériennes séparée.*

(b) *Cette famille est compatible, si en plus*
- *pour tout* $E \in \mathcal{E}_n$ *, toute fibre* $E(a)$ *, vue dans* Z^n *, est dans* $<\mathcal{E}>$ *; et*
- *pour tout* $E \in \mathcal{E}_n$ *, toute diagonale* $\Delta_{ij}^n(Z)$ *, l'ensemble* $E \cap \Delta_{ij}^n(Z)$ *, projeté sur* Z^{n_1} *, est dans* $<\mathcal{E}>$ *.*

(c) *Les topologies sont de dimensions finies ssi* $\mathcal{E}$ *n'admet pas de chaînes infinies strictement ascendantes.*

Les hypothèses supplémentaires de (b) sont surtout vérifiées si toutes les fibres et intersections en question sont finies.

■ (a) Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des fermés triviaux irréductibles et posons

$$\begin{array}{rrcl}
\text{les « générateurs »} & \mathcal{G} & := & \mathcal{E}^{\mathfrak{S}} \cup \mathcal{T} \\
\text{les produits} & \mathcal{P} & := & \{G_1 \times \ldots \times G_n \mid n \in \omega, G_i \in \mathcal{G}\}^{\mathfrak{S}} \\
\text{les réunions} & \mathcal{R} & := & \{P_1 \cup \cdots \cup P_n \mid n \in \omega, P_i \in \mathcal{P}\} \\
\text{les intersections} & \mathcal{I} & := & \{P_1 \cap \cdots \cap P_n \mid n \in \omega, I_i \in \mathcal{R}\}
\end{array}$$

Alors $<\mathcal{E}> = \mathcal{I}$:

L'inclusion $\mathcal{I} \subseteq <\mathcal{E}>$ est évidente. Inversement, $\mathcal{I}$ contient les éléments de $\mathcal{E}$ et les fermés triviaux. Il est clairement clos par réunions et intersections finies. Le produit cartésien étant distributif par rapports aux intersections et réunions, $\mathcal{I}$ est clos par produit cartésien parce que $\mathcal{P}$ l'est. Les permutations commutent avec les intersections et les réunions ; de nouveau cela entraîne que $\mathcal{I}$ est clos par l'action des permutations parce que $\mathcal{P}$ l'est.

Démontrons que $<\mathcal{E}>$ est noethérien :

D'après le lemme 4.17, $\mathcal{G}$ est noethérien, car $\mathcal{G}_n$ est la réunion finie des ensembles noethériens $\mathcal{T}_n$ et $\sigma[\mathcal{E}_n]$ pour les $n!$ permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Donc $\mathcal{P}$ aussi est noethérien : pour chaque suite d'entier $(n_1,\ldots,n_k)$, $\mathcal{G}_{n_1,\ldots,n_k} := \mathcal{G}_{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{G}_{n_k}$ est noethérien. Puis $\mathcal{P}_n$

est la réunion (finie !) des $\sigma[\mathcal{G}_{n_1,\dots,n_k}]$ pour toute suite $(n_1,\dots,n_k)$ dont la somme est n et toute permutation σ.

(b) En ce qui concerne la compatibilité, appliquons le lemme 1.14 : les permutations sont des homéomorphismes par définition de $<\mathcal{E}>$; les projections sont clairement continues vu que $<\mathcal{E}>$ est clos par produit et contient Z. Il suffit donc de démontrer que les applications naturelles $Z^n \to \{a\} \times Z^n$ et $Z^n \to \Delta_{ij}^{n+1}(Z)$ sont continues.

Pour le premier cas, il suffit de montrer que pour tout $F \in \mathcal{I}_{n+1}$ la fibre $F(a)$ est dans $\mathcal{I}_n$. Soit $F = \bigcup_{\text{fini}} \bigcap_{\text{fini}} P_i$, alors $F(a) = \bigcup_{\text{fini}} \bigcap_{\text{fini}} P_i(a)$. Il suffit donc de traiter le cas $F \in \mathcal{P}$. On peut supposer que $F = G_1 \times \dots \times G_n$ et que $F(a) = G_1(a) \times G_2 \times \dots \times G_n$. Alors, ou bien $G_1 \in \mathcal{T}$, et donc $G_1(a)$ est aussi un fermé trivial irréductible ; ou bien $G_1 \in \mathcal{E}$ et le résultat est donné par hypothèse.

Le raisonnement pour les applications diagonales est analogue.

(c) Supposons que l'on ait une suite infinie, strictement ascendante, de fermés irréductibles, donc d'éléments de $\mathcal{P}$. Comme dans la preuve de la noethérianité, on peut en extraire une suite dont tous les éléments ont le même « type », c.-à-d. tous sont de la forme $\sigma[E_1 \times \dots \times E_n \times T]$ avec $E_i \in \mathcal{E}_{k_i}$ et T trivial, où la permutation σ et les entiers k_i sont fixés. Donc on peut trouver une suite infinie strictement ascendante, soit dans $\mathcal{E}$, soit dans $\mathcal{T}$. Mais le premier n'en admet pas par hypothèse, le deuxième puisque $\mathfrak{Z}^{\mathrm{tr}}$ est de dimension finie : contradiction ! ■

Troisième partie

GROUPES

Chapitre 5 Les groupes de Zariski

On dispose maintenant avec les géométries de Zariski d'une version abstraite des variétés algébriques (de dimension quelconque), et aussi d'une notion de morphisme. Ceci permet immédiatement de donner une définition de « groupes algébriques » au-dessus d'une géométrie de Zariski, c.-à-d. une version abstraite des groupes algébriques, appelés « groupes de Zariski ».

Comme exemple d'application de la théorie des géométries de Zariski élaborée dans les chapitres 2 et 3, je commence à examiner les groupes de Zariski et à développer leur théorie en analogie avec la théorie des groupes algébriques (affines). Elle culmine à présent dans le théorème 5.48 qui donne presque une caractérisation abstraite des groupes algébriques.

5.1 Définition et propriétés fondamentales

Soit $\mathfrak{Z}$ une géométrie de Zariski.

Définition 5.1

- *Un* **groupe de Zariski** *est une géométrie de Zariski* $\mathfrak{G}$ *avec deux* $\mathfrak{G}$*-morphismes* μ *et* ι *respectivement la multiplication et le passage à l'inverse d'une loi de groupe sur* G *.*
- *Une* $\mathfrak{Z}$**-variété de groupe** *est une* $\mathfrak{Z}$*-variété* $\mathfrak{G}$ *avec deux* $\mathfrak{Z}$*-morphismes* μ *et* ι *respectivement la multiplication et le passage à l'inverse d'une loi de groupe sur* G *.*
- *Un* $\mathfrak{Z}$**-morphisme de groupes** *entre deux* $\mathfrak{Z}$*-variétés de groupes est une application qui est à la fois un* $\mathfrak{Z}$*-morphisme et un homomorphisme de groupes.*

Les groupes de Zariski sont donc une version abstraite des groupes algébriques et des cas particuliers de groupes $\aleph_0$-stables de rang de Morley fini.

Comme langage d'un groupe de Zariski il convient de prendre un langage de géométrie de Zariski pour la géométrie de Zariski sous-jacente, plus un symbole de fonction binaire pour la multiplication. Alors une structure élémentairement équivalente à un groupe de

Zariski sera naturellement un groupe de Zariski. On pourrait se passer de ce symbole pour la multiplication puisque le graphe de la multiplication est fermé, donc définissable dans le langage de géométrie de Zariski. Par contre, si sa définition utilise des paramètres, une structure élémentairement équivalente qui ne contient pas tous ces paramètres, n'est plus naturellement un groupe de Zariski.

Remarque 5.2

- Par définition, une géométrie de Zariski est irréductible, ce qui entraîne (voir 5.9) qu'un groupe de Zariski est toujours connexe. On pourrait facilement étendre la définition des groupes de Zariski au cas réductible ; d'ailleurs la plupart des résultats sont énoncés pour des variété de groupe, qui, elles, peuvent être réductibles, donc non connexes.

  Tout cela n'est pas très gênant, puisque les théorèmes les plus importants portent sur les groupes connexes. Je m'efforcerai d'ailleurs de répéter le mot « connexe » dans les énoncés pour le souligner.
- Le graphe de l'inverse est fermé même si l'on ne demande pas qu'elle soit un morphisme, car $\Gamma_\iota = \mu^{-1}(e)$. Donc pour un groupe de Zariski complet ou lisse, il suffit de demander que la multiplication soit un morphisme (propositions 3.49 et 3.55).

Exemple 5.3

- Un groupe 1-basé est un groupe de Zariski (lisse et complet) dans un langage de classes de sous-groupes définissables.
- Un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos K est un groupe de Zariski dans le langage de la topologie de Zariski. Il est aussi une K-variété de groupe.
- D'après le théorème de Weil–Hrushovski (voir [P2]), tout groupe (connexe) interprétable dans un corps algébriquement clos K est naturellement muni d'une structure de groupe de Zariski (ou de K-variété de groupe).

Propriétés fondamentales

Soit pour toute la suite $\mathfrak{G}$ une $\mathfrak{Z}$-variété de groupe fixée, sauf si le contraire est mentionné. Puisqu'il devient difficile de bien distinguer entre l'ensemble G , la structure de variété $\mathfrak{G}$ et le groupe sous-jacent (pour lequel il ne reste plus de bonne notation), je noterai simplement G au lieu de $\mathfrak{G}$, et de même pour les sous-groupes et quotients.

Lemme 5.4

(a) *Les multiplications à gauche et à droite par un élément fixé g , notées λ_g et ϱ_g , sont des $\mathfrak{Z}$-automorphismes.*

(b) *La conjugaison* $\gamma : (h,g) \mapsto h^g$ *est un* $\mathfrak{Z}$*-morphisme.*

(c) *La conjugaison* $\gamma(\cdot, g)$ *par un élément fixé* g *est un* $\mathfrak{Z}$*-automorphisme de groupes.*

■ Le lemme se déduit directement des propositions 3.40 et 3.41 :
D'abord $\gamma = \mu \circ (\mu \circ \tau, \iota \circ \pi_2)$ où $\tau(g,h) = (h,g)$, c'est donc un morphisme.

Puis λ_g, ϱ_g et $\gamma(\cdot, g)$ sont des morphismes par 3.41 (e). Finalement, les égalités $\lambda_g^{-1} = \lambda_{g^{-1}}$, $\varrho_g^{-1} = \varrho_{g^{-1}}$ et $\gamma(\cdot, g)^{-1} = \gamma(\cdot, g^{-1})$ montrent qu'il s'agit d'isomorphismes. ■

Les propriétés qui vont être démontrées par la suite sont bien connues pour les groupes algébriques, voir p.ex. [Hu] chapitre 7. Certaines ont été généralisées au cas des groupes $\aleph_0$-stables de rang de Morley fini quelconques (voir [P2],[BN]). P.ex. le lemme 5.5 (c) est une généralisation de [Hu] lemme 7.4, mais aussi un cas particulier de [P2] lemme 2.4, puisque les parties génériques dans le sens de Poizat deviennent simplement des parties constructibles denses dans un groupe de Zariski.

Si je les ai incluses dans ma thèse, c'est d'un côté par souci de complétude, d'un autre côté parce que les preuves de la géométrie algébrique, qui s'adaptent au cas des groupes de Zariski, diffèrent le plus souvent de celles de la théorie de modèles.

(Bien évidemment, il n'est pas étonnant que certaines preuves de la géométrie algébrique se généralisent presque mot pour mot — elles ne dépendent que des propriétés de bases qui font partie des axiomes des géométries de Zariski. En fait, ce qui est intéressant, c'est de trancher parmi les résultats et les démonstrations de la géométrie algébrique, pour trouver ceux qui marchent dans un cadre axiomatique, et ceux qui utilisent fortement la structure algébrique.)

Lemme 5.5

(a) *Le produit (du groupe) d'un nombre fini d'ensemble irréductible est irréductible.*

(b) *Soient* A, B *deux parties de* G*, alors* $\overline{A} \cdot \overline{B} \subseteq \overline{A \cdot B}$*.*

(c) *Si* U, V *sont deux parties denses constructibles d'un sous-groupe* H*, alors* $U \cdot V = H$*.*

■ (a) Si $A_1, \ldots, A_n$ sont irréductibles, alors $A_1 \times \cdots \times A_n$ aussi, et donc $A_1 \cdot \cdots \cdot A_n = \mu[A_1 \times \cdots \times A_n]$ aussi.

(b) On a $A \times B \subseteq \mu^{-1}[A \cdot B] \subseteq \mu^{-1}[\overline{A \cdot B}]$. Le dernier étant fermé, $\overline{A} \times \overline{B} = \overline{A \times B} \subseteq \mu^{-1}[\overline{A \cdot B}]$ s'en déduit, ce qui donne $\overline{A} \cdot \overline{B} = \mu[\overline{A} \times \overline{B}] \subseteq \overline{A \cdot B}$.

(c) Puisque toute partie constructible dense contient une partie ouverte dense, on peut supposer que U et V sont ouvertes. Alors U^{-1} est encore ouvert et dense (car $\overline{U}^{-1} = \overline{U^{-1}}$), et donc hU^{-1} aussi pour tout $h \in H$. Or deux parties constructibles denses s'intersectent, donc $hU^{-1} \cap V \neq \emptyset$, *i.e.* il existe $u \in U$ et $v \in V$ tels que $h = uv$, donc $H = UV$. ■

Si X est une partie de $G \times Z^n$ et $Y \subseteq G$, je noterai souvent, pour simplifier les notations,

$$\begin{array}{rrcl} & Y \cdot X = YX & := & \{(yx, \bar{z}) \,|\, y \in Y, (x, \bar{z}) \in X\} = (\mu \times \mathrm{id}_{Z^n})[Y \times X] \\ \text{et} & X \cdot Y = XY & := & \{(xy, \bar{z}) \,|\, y \in Y, (x, \bar{z}) \in X\}. \end{array}$$

Il est facile de voir que le lemme 5.5 (b) reste valable dans ce contexte.

Proposition 5.6

(a) *L'adhérence d'un sous-groupe (normal) dans G est encore un sous-groupe (normal).*

(b) *Un sous-monoïde constructible de G en est un sous-groupe fermé.*

■ (a) Soit H le sous-groupe (non nécessairement définissable) en question. Alors $H \times H \subseteq \mu^{-1}[\overline{H}]$, le dernier étant fermé par continuité de μ, on obtient $\overline{H} \times \overline{H} = \overline{H \times H} \subseteq \mu^{-1}[\overline{H}]$, donc $\mu[\overline{H} \times \overline{H}] = \overline{H} \cdot \overline{H} \subseteq \overline{H}$.

Le même raisonnement avec ι au lieu de μ montre $\iota[\overline{H}] \subseteq \overline{H}$, donc $\overline{H}$ est un sous-groupe. Finalement, soit $g \in \mathbb{N}_G(H)$. La conjugaison avec g étant un homéomorphisme, $\overline{H}^g = \overline{H^g} = \overline{H}$, donc $\mathbb{N}_G(H) \subseteq \mathbb{N}_G(\overline{H})$.

(b) Par stabilité, un sous-monoïde définissable est un sous-groupe ([P2], lemme 1.1). Toute classe de ce sous-groupe H dans $\overline{H}$ (qui est encore un sous-groupe d'après (a)) est homéomorphe à H, donc dense dans $\overline{H}$ elle aussi. Mais deux constructibles disjoints ne peuvent pas être denses dans leur réunion, d'où $H = \overline{H}$. ■

Remarque 5.7 Pour toute partie A, notons $<A>$ le sous-groupe engendré par A. Alors $\overline{A} \subseteq \overline{<A>}$, qui est un groupe d'après la proposition 5.6 (a), donc $<\overline{A}> \subseteq \overline{<A>}$. Par conséquent, $\overline{<A>}$ est le plus petit sous-groupe fermé contenant A (qui existe d'ailleurs par noethérianité de la topologie aussi bien que par la condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables dans les groupes $\aleph_0$-stables).

Rappelons que l'intersection de tout les sous-groupes définissables d'indice fini d'un groupe $\aleph_0$-stable H est un sous-groupe définissable, normal et d'indice fini, appelé la composante connexe et noté H°.

Lemme 5.8 *Les composantes irréductibles d'une classe d'un sous-groupe définissable H sont les classes modulo H°. En particulier, elles sont disjointes et deux à deux isomorphes par des translations.*

■ Par translation, il suffit de considérer le cas de H. Puisque H° est un sous-groupe définissable, donc fermé, les composantes irréductibles de H sont contenues dans les classes modulo H°. Il suffit donc de démontrer que H° est irréductible.

Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de composantes irréductibles de H°, il y en a forcément une, disons X, qui est générique dans H° au sens de Poizat (cf. [P2], p. 40 sq). Toute intersection $X \cap hX$ avec $h \in H^\circ$ est encore générique, c.-à-d. $\dim(X \cap hX) = \dim X$, donc $X = hX$ puisque les deux sont irréductibles. Comme H° est recouvert par un nombre fini de translatés de X (par définition de la généricité), ceci implique que $H^\circ = X$. ■

Corollaire 5.9 *Un sous-groupe définissable H est irréductible ssi $H = H^\circ$ ssi H est (topologiquement) connexe.*

Centralisateurs et normalisateurs

Soient X, Y des parties quelconques de G. On définit

- le **centralisateur** de X dans Y, $\mathbb{C}_Y(X) := \{y \in Y \mid xy = yx \text{ pour tout } x \in X\}$;
- le **normalisateur** de X dans Y, $\mathbb{N}_Y(X) := \{y \in Y \mid X^y = X \text{ pour tout } x \in X\}$;
- le **centre** de X, $\mathbb{Z}(X) := \{y \in X \mid xy = yx \text{ pour tout } x \in X\}$.

Proposition 5.10

(a) *Un centralisateur $\mathbb{C}_Y(X)$ est fermé dans Y. De plus, on a les inclusions suivantes :*
$\mathbb{C}_Y(X) = \mathbb{C}_Y(\overline{X}) = Y \cap \overline{\mathbb{C}_Y(X)} \subseteq \overline{\mathbb{C}_Y(X)} \subseteq \mathbb{C}_{\overline{Y}}(X) = \mathbb{C}_{\overline{Y}}(\overline{X})$.

(b) *Le centre de X est fermé dans X ; plus précisément :*
$\mathbb{Z}(X) = X \cap \overline{\mathbb{Z}(X)} \subseteq \overline{\mathbb{Z}(X)} \subseteq \mathbb{Z}(\overline{X}) = \overline{\mathbb{Z}(\overline{X})}$.

(c) *Les inclusions suivantes de normalisateurs sont vérifiées :*

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{N}_Y(X) & \subseteq & Y \cap \overline{\mathbb{N}_Y(X)} & \subseteq & \overline{\mathbb{N}_Y(X)} & & \mathbb{N}_{\overline{Y}}(X) \\
\cap\!\!\!| & & \cap\!\!\!| & & \cap\!\!\!| & & \cap\!\!\!| \\
\mathbb{N}_Y(\overline{X}) & = & Y \cap \overline{\mathbb{N}_Y(\overline{X})} & \subseteq & \overline{\mathbb{N}_Y(\overline{X})} & \subseteq & \mathbb{N}_{\overline{Y}}(\overline{X})
\end{array}$$

Le normalisateur d'un ensemble fermé dans Y est fermé dans Y.

■ (a) Les inclusions $\mathbb{C}_Y(\overline{X}) \subseteq \mathbb{C}_Y(X) \subseteq \mathbb{C}_{\overline{Y}}(X)$ sont triviales.

Soit $\varphi_x : G \to G$ le morphisme $g \mapsto [g, x]$. Alors $\mathbb{C}_G(x) = \varphi_x^{-1}(e)$ est fermé et $\mathbb{C}_G(X) = \bigcap_{x \in X} \mathbb{C}_G(x)$ est définissable et fermé par noethérianité. Donc $\mathbb{C}_Y(X) = Y \cap \mathbb{C}_G(x)$ est fermé dans Y et $\mathbb{C}_{\overline{Y}}(X) = \overline{Y} \cap \mathbb{C}_G(X)$ est fermé, ce qui donne $\overline{\mathbb{C}_Y(X)} \subseteq \mathbb{C}_{\overline{Y}}(X)$.

Puis $y \in \mathbb{C}_Y(X) \iff X \subseteq \mathbb{C}_G(y)$. Le dernier centralisateur étant fermé, on obtient $\overline{X} \subseteq \mathbb{C}_G(y)$, c.-à-d. $y \in \mathbb{C}_Y(\overline{X})$.

(b) Conséquence immédiate de (a), car $\mathbb{Z}(X) = \mathbb{C}_X(X)$.

(c) Si $X = X^g$, alors $\overline{X} = \overline{X^g} = \overline{X}^g$ car la conjugaison avec g est un homéomorphisme. Donc $\mathbb{N}_Y(X) \subseteq \mathbb{N}_Y(\overline{X})$, ce qui donne les quatre inclusions « verticales ».

L'inclusion $\mathbb{N}_Y(X) \subseteq \mathbb{N}_{\overline{Y}}(X)$ est triviale.

Puis soit ψ_x le morphisme $g \mapsto x^g$. Alors $\mathbb{N}_G(X) = \bigcap_{x \in X} \psi_x^{-1}[X]$ est fermé si X l'est. Donc $\mathbb{N}_Y(\overline{X}) = Y \cap \mathbb{N}_G(\overline{X})$ est fermé dans Y. ■

THÉORÈME DES INDÉCOMPOSABLES

Le théorème des indécomposables de Zil'ber, l'un des outils les plus importants de la théorie des groupes $\aleph_0$-stables de rang fini, est une généralisation d'un théorème sur les groupes algébrique (cf. [Hu] 7.5) qui retrouve sa forme (et preuve) originale dans le contexte des groupes de Zariski :

Proposition 5.11 *Soient $\{X_i \mid i \in I\}$ une famille de parties irréductibles de G, chacune contenant e. Alors le sous-groupe engendré par leur réunion est fermé et s'écrit comme produit fini d'un certain nombre des X_i.*

■ Pour toute suite finie $s = (i_0, \dots, i_k) \in I^{<\omega}$, soit $X_s = X_{i_0} \cdot \ldots \cdot X_{i_k}$. Alors $X_s \cup X_t \subseteq X_{s\frown t}$ et $\overline{X_s} \cdot \overline{X_t} \subseteq \overline{X_s \cdot X_t} = \overline{X_{s\frown t}}$.

Les ensembles X_s, et donc aussi $\overline{X_s}$, sont irréductibles. Les ensembles fermés irréductibles satisfaisant à la condition de chaîne ascendante (parce que l'on se trouve dans une situation de rang fini), il existe un s_0 tel que $\overline{X_{s_0}}$ soit maximal parmi les $\overline{X_s}$. Alors pour tout s, $X_s \subseteq \overline{X_{s\frown s_0}} = \overline{X_{s_0}}$ par maximalité de X_{s_0}.

D'après ce qui a été montré au début, $\overline{X_{s_0}}$ est clos pour la multiplication (prendre $s = s_0$ et $t = s_0$), c'est donc un sous-groupe d'après la proposition 5.6 (b), fermé, et qui contient tous les X_i. Par conséquent, $\overline{X_{s_0}}$ est le sous-groupe fermé engendré pas les X_i.

Puis le lemme 5.5 (c) donne $X_{s_0} \cdot X_{s_0} = \overline{X_{s_0}}$, donc $\overline{X_{s_0}} = X_{s_0 \frown s_0}$ est un produit fini de certains X_i, éventuellement avec des répétitions. ■

5.2 SOUS-GROUPES, ACTIONS DE GROUPES ET QUOTIENTS

SOUS-GROUPES ET QUOTIENTS

Proposition 5.12 *Soit G une $\mathfrak{Z}$-variété de groupe et H un sous-groupe définissable.*

(a) *H est une $\mathfrak{Z}$-variété de groupe.*

(b) *G/H est une $\mathfrak{Z}$-variété, et une $\mathfrak{Z}$-variété de groupe si H est normal.*

■ (a) H est une $\mathfrak{Z}$-variété d'après le théorème 3.39. La multiplication et l'inverse de H sont les restrictions de celles de G ; donc ce sont des morphismes par la proposition 3.45 (a).

(b) La congruence par H, à gauche ou à droite, induit deux relations d'équivalence sur G ; l'une est l'image de l'autre sous $\iota \times \iota$. En particulier, une fois qu'on sait que les deux quotients sont des variétés, la proposition 3.44 implique que ι induit un isomorphisme entre l'espace de classes à gauche et celui des classes à droite.

Considérons les classes à droite (pour les classes à gauche, c'est exactement la même preuve). Pour pouvoir appliquer le théorème 3.39, il faut prouver que la relation d'équivalence correspondante $E_H = \{(g_1, g_2) \mid Hg_1 = Hg_2\}$ est fermée, admissible et additive.

- E_H est l'image inverse de H du morphisme $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2^{-1}$, donc fermée.
- Soit Q un constructible E_H-saturé de $G \times Z^n$. Alors

$$\overline{Q} = \overline{QE_H} = \overline{H \cdot Q} \supseteq \overline{H} \cdot \overline{Q} = H \cdot \overline{Q} = \overline{Q} E_H,$$

  donc E_H est admissible. (L'inclusion $\supseteq$ vient de la généralisation simple de 5.5 (b).)
- L'additivité est donnée par la proposition 3.35 (d) : les H-classes sont toutes isomorphes (5.8), donc ont la même dimension.

D'après 3.39, G/H est donc une variété. Si H est en plus normal dans G, alors la multiplication et l'inverse de G/H sont des $\mathfrak{Z}$-morphismes par la proposition 3.45 (c) (p.ex. $p_H \circ \mu$ se factorise par $G/H \times G/H \cong (G \times G)/(H \times H)$). ■

Corollaire 5.13 *Si G est un groupe de Zariski et H un sous-groupe définissable (normal), alors H et G/H sont des groupes de Zariski.*

■ H et G/H sont des géométries de Zariski d'après la proposition 4.15. Puis les multiplications et les passages à l'inverse respectives sont des $\mathfrak{Z}$-morphismes d'après la proposition précédente, ce qui implique qu'elles sont aussi des H-morphismes (resp. G/H-morphismes), car p.ex. $\mu \times \mathrm{id}_{H^n}$ est continue d'après la proposition 3.41. ■

Vu que les deux espaces de classes modulo H sont isomorphes, il n'est pratiquement jamais nécessaire de spécifier de quel côté on les considère, les énoncés étant valables pour les deux. Les démonstrations continueront à utiliser les classes à droite. Pour simplifier les notations, soit $p_H : G \to G/H$ la surjection canonique, et soit « H-saturé » une abréviation pour « E_H-saturé ».

Lemme 5.14 *Si $Q \subseteq G/H \times Z^n$ est un constructible irréductible, alors les composantes irréductibles de $(p_H \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[Q]$ sont toutes H°-saturées et isomorphes par des translations.*

■ Soit $\tilde{Q} := (p_H \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[Q] = Q_0 \sqcup \cdots \sqcup Q_k$ et soit $Q_i H^\circ := (\mu \times \mathrm{id}_{Z^n})[H^\circ \times Q_i]$ la H°-saturation de Q_i. Puisque $H^\circ \times Q_i$ est irréductible et $\mu \times \mathrm{id}_{Z^n}$ continue, $Q_i H^\circ$ est irréductible, donc contenu dans une composante irréductible Q_j de $\tilde{Q}$. Alors $Q_i \subseteq Q_i H^\circ \subseteq Q_j$ entraîne $i = j$, donc on a égalité et les composantes irréductibles sont H°-saturées.

Puis soit $\{h_0, \ldots, h_l\} \subseteq H$ un système complet de représentants de H/H°. Soit

$$R_i := h_0 Q_i \cup \cdots \cup h_l Q_i = h_0 H^\circ Q_i \cup \cdots \cup h_l H^\circ Q_i = (h_0 H^\circ \cup \cdots \cup h_l H^\circ) Q_i = H Q_i.$$

Puisque Q_i est relativement fermé dans $\tilde{Q}$, tout translaté l'est aussi, ainsi qu'une réunion finie de translatés. Donc R_i est une partie H-saturée, relativement fermée de $\tilde{Q}$, c.-à-d. $p_H[R_i]$ est un fermé de Q.

Puisque Q est irréductible, il existe i_0, telle que $(p_H \times \mathrm{id}_{Z^n})[R_{i_0}] = Q$, disons $i_0 = 0$. Donc $\tilde{Q} = R_0 = h_0 Q_0 \cup \cdots \cup h_l Q_0$. Vu que les $h_j Q_0$ sont irréductibles, il s'agit forcément des composantes irréductibles de $\tilde{Q}$. ■

Lemme 5.15 *(à comparer avec [R] pour le cas des groupes algébriques.)*

(a) *Soient* $H \leqslant K \leqslant G$. *Alors* $G/K \cong (G/H)\big/(K/H)$.

(b) *Soient* $H, K \leqslant G$. *Alors l'application naturelle* $K/(H \cap K) \to (HK)/H$ *est un morphisme bijectif.*

■ (a) Si H n'est pas un sous-groupe normal, l'énoncé n'a a priori pas de sens dans le langage des groupes. Ici, un sous-groupe N est identifié avec la relation d'équivalence E_N qu'il induit. De plus, le fait que E_H soit plus fine que E_K implique que $(p_H \times p_H)[E_K]$ est une relation d'équivalence sur G/H que je note K/H en analogie avec les sous-groupes normaux. Alors l'énoncé est une abréviation pour

$$G/E_K \cong (G/E_H)\big/(p_H \times p_H)[E_K].$$

Par le théorème correspondant de la théorie des groupes, on sait que l'application $p_{K/H} \circ p_H$ se factorise par G/K et que l'application p_K se factorise par $(G/H)/(K/H)$, donnant lieu à des bijections réciproques. La proposition 3.45 démontre alors qu'il s'agit de morphismes.

$$\begin{tikzcd}
 & & G \arrow[dl, "p_H"'] \arrow[dr, "p_K"] & \\
 & G/H \arrow[dl, "p_{K/H}"'] & & \\
(G/H)/(K/H) \arrow[rrr, dashed, leftrightarrow, "\sim"] & & & G/K
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] \arrow[dr, "p \circ i"] & HK \arrow[d, "p"] \\
K/(H \cap K) \arrow[r, dashed] & (HK)/H
\end{tikzcd}$$

(b) Soit $i : K \hookrightarrow HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ le morphisme d'inclusion. Alors $E_H \cap HK$ est une relation d'équivalence sur HK qui sera notée E. Par $(HK)/H$ j'entends donc le quotient $(HK)/E$. Soit $p : HK \to (HK)/E$ la surjection canonique, qui est un morphisme.

(En fait, HK et $(HK)/E$ sont des variétés, le premier étant une sous-variété de G, le dernier de G/H, mais le raisonnement marche aussi bien pour des prévariétés.)

Alors de nouveau par le théorème d'isomorphisme de la théorie des groupes, $p \circ i$ se factorise par $K/(H \cap K)$, donc la proposition 3.45 assure que la bijection résultante $K/(H \cap K) \to HK)/E_H$ est un morphisme.

Par contre, son inverse n'est pas forcément un morphisme (il n'y a pas d'application naturelle $HK \to K/(H \cap K)$, le problème étant le même que pour la situation générale de 3.44. ■

ACTIONS DE GROUPES

Supposons que $\mathfrak{V}$ soit une $\mathfrak{Z}$-variété et G une $\mathfrak{Z}$-variété de groupe. Une **$\mathfrak{Z}$-action** de G sur V est une action de G sur V donnée par un $\mathfrak{Z}$-morphisme $\varphi : G \times V \to V$. L'action sera notée $g \cdot v := \varphi(g, v)$.

Pour les résultats suivant, cf. [Hu] section 8.

Lemme 5.16 *Soit $\varphi : G \times V \to V$ une $\mathfrak{Z}$-action. Soit F un fermé de V et $X \subseteq V$ arbitraire.*

(a) $\mathrm{Trans}_G(X, F) := \{g \in G \mid g \cdot X \subseteq F\}$ *est fermé.*

(b) *Pour tout $v \in V$, $G_v := \{g \in G \mid g \cdot v = v\}$ est un sous-groupe fermé de G. En particulier, le stabilisateur (point par point) de X,* i.e. *l'ensemble $G_X := \{g \in G \mid g \cdot x = x \text{ pour tout } x \in X\}$ est un sous-groupe fermé.*

(c) $V^g := \{v \in V \mid g \cdot v = v\}$ *est fermé pour tout $g \in G$. En particulier, l'ensemble des points fixes de l'action, à savoir $V^G := \{v \in V \mid gv = v \text{ pour tout } g \in G\}$, est fermé.*

(d) *Si G est connexe, alors G stabilise toute composante irréductible de V.*

■ (a) L'application $\varphi_x : G \to V$, $g \mapsto \varphi(g, x)$ est continue, donc $\varphi_x^{-1}[F]$ est fermé. Il s'ensuit que $\mathrm{Trans}_G(X, F) = \bigcap_{x \in X} \varphi_x^{-1}[F]$ aussi.

(b) $G_v = \mathrm{Trans}_G(\{v\}, \{v\})$ et $G_X = \bigcap_{x \in X} G_x$, ou encore les deux sont des sous-groupes définissables.

(c) Soit ψ_g l'application continue $v \mapsto (v, g \cdot v)$. Alors $V^g = \psi_g^{-1}[\Delta(V)]$ et $V^G = \bigcap_{g \in G} V^g$, donc les deux sont fermés.

(d) Soit V_i une composante irréductible de V. Alors $\mathrm{Stab}_G V_i := \mathrm{Trans}_G(V_i, V_i)$ est un sous-groupe fermé de G. Tout $g \in G$ induit un homéomorphisme $\varphi_v := v \mapsto \varphi(g, v)$ sur V qui permute donc les composantes irréductibles de V. Si $\varphi_v[V_i] = V_j$, alors $\mathrm{Stab}_G V_j$ devient une classe de $\mathrm{Stab}_G V_i$ translatée par φ_v. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, $\mathrm{Stab}_G V_i$ est un sous-groupe d'indice fini de G, donc par connexité de G, $\mathrm{Stab}_G V_i = V$. ■

Proposition 5.17 *Les orbites d'une $\mathfrak{Z}$-action $\varphi : G \times V \to V$ sont localement fermées. L'adhérence $\overline{Y}$ et le « bord » ∂Y d'une orbite Y sont des réunions d'orbites.*

■ Soit $Y = G \cdot y$ une orbite. Donc pour tout $g \in G$, $gY \subseteq Y$. Le fait que tout g induise un homéomorphisme de V implique que $g \cdot \overline{Y} = \overline{g \cdot Y} = \overline{Y}$, c.-à-d. $\overline{Y}$ est une réunion d'orbites. En particulier, $\partial Y = \overline{Y} \setminus Y$ est aussi une réunion d'orbites. Le même argument que précédemment montre que $\overline{\partial Y}$ est encore une réunion d'orbites. Mais Y est formé d'une seule orbite, et clairement (pour des raisons de dimension) $Y \not\subseteq \overline{\partial Y}$. Par conséquent, $Y \cap \overline{\partial Y} = \emptyset$, c.-à-d. $Y = \overline{Y} \setminus \overline{\partial Y}$ est localement fermé. ■

Corollaire 5.18 *Les orbites de dimension minimale d'une $\mathfrak{Z}$-action sont fermées.*

Lemme 5.19 *Dans le cas d'une $\mathfrak{Z}$-action d'une variété de groupe complète, toutes les orbites sont fermées (même complètes).*

■ L'orbite de y est égale à $\varphi[G \times \{y\}]$, qui est l'image d'un ensemble complet par un morphisme, donc complet. ■

Une $\mathfrak{Z}$-action $\varphi : G \times V \to V$ induit une relation d'équivalence définissable E_φ sur V :

$$(v_1, v_2) \in E_\varphi :\iff \exists g \in G \; (g \cdot v_1 = v_2).$$

Donc $\mathfrak{V}/E_\varphi$ est une $\mathfrak{Z}$-prévariété, qui n'est pas une variété en général car E_φ n'a pas de raison d'être fermée. Par contre :

Lemme 5.20 *E_φ est une relation d'équivalence admissible.*

■ L'action φ induit une $\mathfrak{Z}$-action φ_n de G sur $V \times Z^n$ en posant $\varphi_n(g, (v, \bar{z})) := (\varphi(g, v), \bar{z})$. Alors la relation d'équivalence associée E_{φ_n} est égale à $E_\varphi \times \Delta(Z^n)$ (à une permutation près). Il suffit donc de considérer le cas $n = 0$.

Un ensemble E_φ-saturé n'est autre chose qu'une réunion d'orbites. Donc si Q est un constructible E_φ-saturé de V, alors $\overline{Q}$ est une réunion d'orbites d'après la proposition 5.17, donc E_φ-saturé. ■

5.3 Lissité des groupes de Zariski

Un groupe algébrique ne peut pas avoir de point singulier : les points singuliers forment un fermé propre d'une variété, et dans un groupe, le groupe d'automorphismes de la variété sous-jacente agit transitivement, donc tous les points sont de même nature. Par conséquent, tout groupe algébrique est lisse.

Question: Est-ce qu'un groupe de Zariski est toujours lisse ? Plus généralement, est-ce qu'une variété de groupe d'une géométrie de Zariski lisse est toujours une variété lisse ?

Au moins pour la structure « linéaire » d'un groupe de Zariski, c'est vrai :

Proposition 5.21 *Soit G un groupe de Zariski. Alors la formule des dimensions est satisfaites pour les classes de sous-groupes définissables (d'un côté fixé).*

■ Il est plus commode de vérifier la formule des dimensions dans la version du lemme 3.53, ce qui est possible puisque les diagonales sont des sous-groupes.

Il est par ailleurs suffisant de considérer des sous-groupes : supposons que H soit une classe d'un sous-groupe $H_0 \subseteq G^n$, et soit $\Delta = \Delta_{ij}^n$. Si $H \cap \Delta = \emptyset$, rien n'est à prouver. Sinon il existe un élément $\bar{h} \in H \cap \Delta$ et $H \cap \Delta \cong \bar{h}^{-1}(H \cap \Delta) = (\bar{h}^{-1}H) \cap (\bar{h}^{-1}\Delta) = H_0 \cap \Delta$, c.-à-d. on est ramené au cas des sous-groupes.

Soit donc H un sous-groupe fermé connexe de G^n. Alors $H \cap \Delta$ est un sous-groupe de H dont les composantes irréductibles sont deux à deux isomorphes par le lemme 5.8, c.-à-d. il suffit de démontrer la formule

$$\dim(H \cap \Delta) \geqslant \dim H + \dim \Delta - \dim G^n.$$

Supposons d'abord que $n = 2$. Soit $\varphi : H \to G$ le morphisme $(h_1, h_2) \mapsto h_1^{-1}h_2$. Si $g \in \varphi[H]$, alors il existe $h_g \in G$ tel que $(h_g, h_g g) \in \varphi^{-1}(g) \subseteq H$. Si maintenant (h, hg) est un autre élément de $\varphi^{-1}(g)$, alors $(h, hg) \cdot (h_g, h_g g)^{-1} = (hh_g^{-1}, hh_g^{-1}) \in H \cap \Delta = \varphi^{-1}(e)$, c.-à-d. la multiplication par $(h_g, h_g g)^{-1}$ donne une injection définissable de $\varphi^{-1}(g)$ dans $\varphi^{-1}(e)$ (en fait, c'est une bijection). Par conséquent, $\dim \varphi^{-1}(e) \geqslant \varphi\text{-gdim}\, H$ et on obtient la formule souhaitée par additivité, car

$$\begin{aligned} \dim(H \cap \Delta) &\geqslant \varphi\text{-gdim}\, H = \dim H - \dim \varphi[H] \\ &\geqslant \dim H - \dim G = \dim H + \dim \Delta - \dim G^2. \end{aligned}$$

Puis soit $n > 2$. Soit $\pi : G^n \to G^2$ la projection $\bar{g} \mapsto (g_i, g_j)$. Comme $\Delta = \{\bar{g} \in G^n \mid g_i = g_j\}$, les π-fibres de H et de $H \cap \Delta$ sont les mêmes au-dessus de $\Delta(G)$. Mais puisque toutes les fibres d'un sous-groupe sont isomorphes, H et $H \cap \Delta$ ont la même dimension π-générique. Donc l'additivité donne

$$\begin{aligned} \dim(H \cap \Delta) &= \dim \pi[H \cap \Delta] + \pi\text{-gdim}\,(H \cap \Delta) \\ &= \dim \pi[H \cap \Delta] + \pi\text{-gdim}\, H \\ &= \dim \pi[H \cap \Delta] + \dim H - \dim \pi[H] \end{aligned}$$

De plus, puisque $\Delta = \pi^{-1}[\pi[\Delta]]$, on a $\pi[H \cap \Delta] = \pi[H] \cap \pi[\Delta] = \pi[H] \cap \Delta^2(G)$, donc $\dim \pi[H \cap \Delta] \geqslant \dim \pi[H] - \dim G$ par le cas $n = 2$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \dim(H \cap \Delta) &= \dim \pi[H \cap \Delta] + \dim H - \dim \pi[H] \\ &\geqslant \dim \pi[H] - \dim G + \dim H - \dim \pi[H] \\ &= \dim H + \dim G^{n-1} - \dim G^n \ = \ \dim H + \dim \Delta - \dim G^n \end{aligned}$$

Pour $n = 1$, il n'y a pas de problème : la formules des dimensions se transmet trivialement de G^{n+1} à G^n (proposition 3.54). ■

La géométrie des sous-groupes

Proposition 5.22 *Soit G un groupe connexe $\aleph_0$-stable de rang de Morley fini. Alors les classes de sous-groupes définissables (d'un côté fixé) sont les fermés d'une géométrie de Zariski complète sur G , dite la géométrie des sous-groupes.*

En général, cette géométrie est loin d'engendrer toute la structure définissable du groupe. En fait, le graphe de la multiplication est constructible dans la géométrie des sous-groupes ssi le groupe est 1–basé ; et le graphe du passage à l'inverse est constructible ssi le groupe est abélien-par-fini (voir [GR]).

La multiplication et le passage à l'inverse ne sont continues que si le groupe est commutatif.

■ Puisque les translations sont des homéomorphismes pour la géométrie des sous-groupes, il suffit de considérer les sous-groupes au lieu des classes.

- La connexité implique clairement l'irréductibilité (à rapprocher aussi de 5.9).
- $\Delta(G)$ est un sous-groupe de G^2 , d'où la séparation.
- La compatibilité, l'élimination des quanteurs, la définissabilité de la dimension et la complétude découlent des considérations suivantes :

Si $H \leqslant G^{n_1+n_2}$ est un sous-groupe définissable et $\pi_i : G^{n_1+n_2} \to G^{n_i}$ sont les projections, alors $\Pi_1 := \pi_1[H]$ est un sous-groupe de G^{n_i}. Puis $H_i := \pi_i[\pi_{1-i}^{-1}(\bar{e}) \cap H]$ est un sous-groupe de Π_i. Pour tout $\bar{a} \in \Pi_1$, $\pi_2[\pi_1^{-1}(\bar{a}) \cap H]$ est une classe de H_2. Deux telles classes au-dessus de $\bar{a}, \bar{b}$ sont égales ssi $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont dans la même classe modulo H_1. Donc H est une réunion de blocs $\bar{g}_1 H_1 \times \bar{g}_2 H_2$. Précisément,

$$H = \bigcup_{\bar{g} \in \Pi_1/H_1} \pi_2[\pi_1^{-1}(\bar{g}) \cap H] \times \bar{g} H_1 = \bigcup_{\bar{h} \in \Pi_2/H_2} \bar{h} H_2 \times \pi_1[\pi_2^{-1}(\bar{h}) \cap H].$$

(C'est aussi fait dans [GR], théorème 1).

- La dimension est finie parce que le rang de Morley l'est.
- La géométrie des sous-groupes est continûment interprétable dans celle du groupe, elle est donc élémentaire (cf. lemme 4.14).
- Un sous-groupe irréductible dans la géométrie des sous-groupes est connexe, une hypersurface est donc une classe d'un sous-groupe d'indice infini, et alors toute classe de ce sous-groupe est une hypersurface, d'où la conformité. ■

Corollaire 5.23 *Un groupe $\aleph_0$-stable de rang fini et 1-basé est un groupe de Zariski complet et lisse pour la géométrie des sous-groupes.*

SOUS-GROUPES D'UN GROUPE LISSE

Supposons que G soit une $\mathfrak{Z}$-variété de groupe lisse et que N soit un sous-groupe définissable. On pourrait penser que la lissité de G se transmet sans difficultés à N : si F_1, F_2 sont deux fermés irréductibles de $N \times Z^n$, il suffirait de les « prolonger » sur les classes de N, c.-à-d. de trouver des fermés $\widetilde{F}_i$ tels que $F_i = \widetilde{F}_i \cap N$ et $\dim \widetilde{F}_i = \dim F_i + \dim G/N$. Pour cela, il faudrait disposer d'une section de G/N, c.-à-d. d'un ensemble définissable S qui a un élément dans chaque N-classe de G.

En fait, une version plus faible suffit, et elle existe sous certaines conditions :

Lemme 5.24 *Soit G une $\mathfrak{Z}$-variété de groupe connexe, lisse et riche, et N un sous-groupe définissable. Alors il existe un fermé irréductible S tel que $S \cap gN$ soit fini pour $g \in G$ générique.*

■ En remplaçant N par N° on peut supposer que N est connexe.

La preuve est similaire à celle de la proposition 3.58. Par récurrence sur $k \leqslant \dim N$, on construit des hypersurfaces H_k de G et des composantes irréductibles X_k de $N \cap H_1 \cap \cdots \cap H_k$ telles que $\dim X_k = \dim N - k$.

Puisque G est riche, il existe une hypersurface H_1 de G telle que $N \cap H_1 \neq N$. Soit X_1 une composante irréductible de $N \cap H_1$. Clairement $\dim X_1 \leqslant \dim(N \cap H_1) < \dim N$. Mais la lissité implique que $\dim X_1 \geqslant \dim N + \dim H_1 - \dim G = \dim N - 1$, donc $\dim X_1 = \dim N - 1$ et l'hypothèse de récurrence est satisfaite.

Supposons H_k et X_k construites pour $1 < k < \dim N$. Par hypothèse de récurrence, X_k est infini, donc il existe une hypersurface H_{k+1} de G (grâce à la richesse de G) telle que $\emptyset \neq X_k \cap H_{k+1} \neq X_k$. Alors $\dim(X_k \cap H_{k+1}) < \dim X_k$, donc il existe une composante irréductible X_{k+1} de $X_k \cap H_{k+1}$ (qui est donc une composante de $N \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{k+1}$) de dimension plus petite que $\dim X_k$, c.-à-d. $\dim X_{k+1} \leqslant \dim X_k - 1 = \dim N - (k+1)$. Dans l'autre sens, par lissité,

$$\dim X_{k+1} \geqslant \dim X_k + \dim H_{k+1} - \dim G = \dim N - k + \dim G - 1 + \dim G = \dim N - (k+1),$$

donc la condition de la récurrence est vérifiée.

Soit maintenant S une composante irréductible de $H_1 \cap \cdots \cap H_{\dim N}$ telle que $X_{\dim N}$ soit une composante irréductible de $N \cap S$. Alors par lissité, on trouve

$$\begin{aligned} \dim S &\geqslant \dim H_1 + \cdots \dim H_{\dim N} - (\dim N - 1) \cdot \dim G \\ &= \dim N \cdot (\dim G - 1) - \dim N \cdot \dim G + \dim G \ = \ \dim G - \dim N, \end{aligned}$$

et encore par lissité, on obtient que $0 = \dim X_{\dim N} \geqslant \dim S + \dim N - \dim G$. Les deux inégalités donnent $\dim S = \dim G - \dim N = \dim(G/N)$.

On va montrer que $gN \cap S$ est fini pour $g \in G$ générique. Posons

$$\widetilde{S} := \Big\{ (s,n) \Big| s \in S, n^{-1}s \in N \Big\}.$$

C'est un fermé de G^2 de dimension $\dim S + \dim N = \dim G$ dont la dimension π-générique est égale à p_N-gdim S (où $p_N : G \to G/N$ est la surjection canonique).

Par construction, $N \cap S$ a une composante finie, donc les π-fibres de $\widetilde{S}$ au-dessus des éléments de N ont une composante finie. Comme la dimension est purement semi–continue par la proposition 3.58, les π-fibres de $\widetilde{S}$ sont génériquement finies, c.-à-d. p_N-gdim $S = 0$, ou encore S coupe les N-classes qu'il rencontre génériquement en un nombre fini de points. Donc

$$\dim G/N = \dim S = p_N\text{-gdim}\, S + \dim p_N[S] = 0 + \dim p_N[S],$$

par conséquent S coupe presque toutes les N-classes. ■

En fait, le dernier raisonnement montre d'ailleurs le résultat suivant :

Lemme 5.25 *Si la dimension est (purement) semi–continue par rapport à la projection* $\pi : G^2 \to G$ *, alors elle l'est par rapport à la surjection canonique* $p_N : G \to G/N$ *.*

Proposition 5.26 *Soit G une $\mathfrak{Z}$-variété de groupe connexe, lisse et riche, et N un sous-groupe définissable. Alors N est une $\mathfrak{Z}$-variété de groupe lisse.*

■ Soient F_1, F_2 deux fermés irréductibles de $N \times Z^n$ et soit $\Delta = \Delta(G \times Z^n)$. Comme dans le lemme 3.53, puisque $F_1 \cap F_2$ est en bijection avec $(F_1 \times F_2) \cap \Delta$, il suffit de démontrer que $\dim X \geqslant \dim F - \dim(N \times Z^n)$ pour tout fermé irréductible $F \subseteq (N \times Z^n)^2$ et toute composante irréductible X de $F \cap \Delta$.

Soit S comme dans le lemme 5.24. En multipliant S par un élément approprié, on peut supposer que $e \in S$; soit donc $S \cap N = \{e = s_0, s_1, \ldots, s_k\}$. Posons

$$\widetilde{\Delta} := S \cdot \Delta = \{(s \cdot g, g) \mid s \in S, g \in G\}.$$

Alors $\widetilde{\Delta}$ est un fermé irréductible de dimension $\dim S + \dim(G \times Z^n) = 2\dim G - \dim N + \dim Z^n$.

Notons $s_i\Delta = (s_i, e) \cdot \Delta$. Les ensembles $s_i\Delta$ ($i = 0, \ldots, k$) sont disjoints, donc

$$F \cap \widetilde{\Delta} = F \cap (s_0\Delta \cup \cdots \cup s_k\Delta) = \underbrace{(F \cap s_0\Delta)}_{=F\cap\Delta} \cup \cdots \cup (F \cap s_k\Delta),$$

et en particulier toute composante irréductible de $F \cap \Delta$ est aussi une composante irréductible de $F \cap \widetilde{\Delta}$. Puis la lissité de G implique pour toute composante irréductible Y de $F \cap \widetilde{\Delta}$ que

$$\begin{aligned}
\dim Y &\geqslant \dim F + \dim \widetilde{\Delta} - \dim(G \times Z^n)^2 \\
&= \dim F + 2\dim G - \dim N + n\dim Z - 2\dim G - 2n\dim Z \\
&= \dim F - \dim N - n\dim Z \;=\; \dim F - \dim(N \times Z^n)
\end{aligned}$$

■

CONDITIONS DE RICHESSE

Proposition 5.27 *Si G est une $\mathfrak{Z}$-variété de groupe, presque simple*[1]*, alors G est une variété riche.*

■ Soit G^{h} l'intersection de toutes les hypersurfaces contenant e. Alors G^{h} est un sous-groupe définissable normal de G :

G^{h} est clairement un fermé définissable par noethérianité de la topologie. Si H est une hypersurface de G contenant e, $a \in G^{\mathsf{h}}$ et $g \in G$, alors H^{-1}, $a^{-1}H$, Ha^{-1} et H^g sont

1. c.-à-d. G n'a pas de sous-groupe définissable, normal, et infini.

toutes des hypersurfaces de G contenant e. Donc

$$\begin{array}{rclclcl} (G^{\mathsf{h}})^{-1} & = & \bigcap\{H \mid e \in H \in \mathcal{H}(G)\}^{-1} & = & \bigcap\{H^{-1} \mid e \in H \in \mathcal{H}(G)\} & = & G^{\mathsf{h}} \\ aG^{\mathsf{h}} & = & a \cdot \bigcap\{H \mid e \in H \in \mathcal{H}(G)\} & = & \bigcap\{aH \mid e \in H \in \mathcal{H}(G)\} & \subseteq & G^{\mathsf{h}} \\ G^{\mathsf{h}} \cdot a & = & \bigcap\{H \mid e \in H \in \mathcal{H}(G)\} \cdot a & = & \bigcap\{Ha \mid e \in H \in \mathcal{H}(G)\} & \subseteq & G^{\mathsf{h}} \\ (G^{\mathsf{h}})^g & = & \bigcap\{H \mid e \in H \in \mathcal{H}(G)\}^g & = & \bigcap\{H^g \mid e \in H \in \mathcal{H}(G)\} & \subseteq & G^{\mathsf{h}} \end{array}$$

et par conséquent, G^{h} est un sous-groupe normal de G. Puisqu'il est évidemment différent de G, il est forcément fini. ■

Lemme 5.28 *Soit G une $\mathfrak{Z}$-variété de groupe lisse et riche. Si N est un sous-groupe définissable, alors N est riche.*

■ Si H est une hypersurface de G qui ne contient pas N, alors d'une part $\dim(H \cap N) < \dim N$; d'autre part toute composante irréductible de $H \cap N$ est de dimension au moins $\dim H + \dim N - \dim G = \dim N - 1$. Donc toute composante irréductible de $H \cap N$ est une hypersurface de N, et il s'ensuit que $N^{\mathsf{h}} \subseteq G^{\mathsf{h}} \cap N$, donc N est riche. ■

Quotients d'un groupe lisse

Le passage au quotient est plus simple :

Proposition 5.29 *Si G est une $\mathfrak{Z}$-variété de groupe lisse et N un sous-groupe définissable, alors G/N est une variété lisse.*

■ Soient F_1, F_2 deux fermés irréductibles de $G/N \times Z^n$. D'après le lemme 5.14, toutes les composantes irréductibles de $(p_N \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[F_i]$ sont isomorphes, en particulier toutes sont de dimension $\dim F_i + \dim N$.

Soit Y une composante irréductible de $F_1 \cap F_2$, et soit $\widetilde{Y}$ une composante irréductible de $(p_N \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[Y]$. Alors il existe des composantes irréductibles $\widetilde{F}_1$ et $\widetilde{F}_2$ de $(p_N \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[F_1]$ et de $(p_N \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[F_2]$ resp., telles que $\widetilde{Y}$ soit une composante irréductible de $\widetilde{F}_1 \cap \widetilde{F}_2$.

Alors

$$\begin{array}{rcl} \dim Y & = & \dim \widetilde{Y} - \dim N \\ & \geqslant & \dim \widetilde{F}_1 + \dim \widetilde{F}_2 - \dim(G \times Z^n) - \dim N \\ & = & \dim F_1 + \dim N + \dim F_2 + \dim N - \dim G - \dim Z^n - \dim N \\ & = & \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(G/N \times Z^n) \end{array}$$

ce qui est la formule des dimensions dans G/N. ■

Corollaire 5.30 *Soit G une $\mathfrak{Z}$-variété de groupe lisse et riche. Alors toute $\mathfrak{Z}$-variété obtenue à partir de G en prenant des sous-groupes et des quotients par des sous-groupes est lisse.*

5.4 Complétude dans les groupes de Zariski

Sous-groupes complets

Lemme 5.31

(a) *Soit C une sous-variété irréductible et complète telle que $e \in C$. Alors le sous-groupe (normal) engendré par C est complet.*

(b) *Si H est un sous-groupe tel que H° soit complet, alors H est complet.*

■ (a) Par la proposition 5.11, il existe $g_1, \dots, g_k \in G$ tels que le sous-groupe normal N engendré par C soit égal à $C^{g_1} \cdot \ldots \cdot C^{g_k}$. Chacun des C^{g_i} est isomorphe à C, donc complet. Puis $C^{g_1} \times \cdots \times C^{g_k}$ est complet par la proposition 3.48 (d) ; et la partie (c) de cette proposition entraîne que $N = \mu[^{g_1} \times \cdots \times C^{g_k}]$ est complet.

Le sous-groupe engendré par C est fermé dans N, donc aussi complet (3.48 (a)).

(b) Soit F un fermé de $H \times Z^n$ et π la projection de $H \times Z^n$ sur Z^n. Toute composante irréductible gH° de H est isomorphe à H°, donc aussi complète. Par conséquent, $\pi[F]$ est fermé, puisque c'est la réunion (finie !) des $\pi[F \cap gH]$ qui sont fermés. ■

Proposition 5.32 *Soient $G_1 \leqslant G_2 \leqslant G_3$ des $\mathfrak{Z}$-variétés de groupes. Alors G_3/G_1 est complet ssi G_3/G_2 et G_2/G_1 sont complets.*

■ Supposons d'abord que G_2/G_1 et G_3/G_2 soient complets. Soient π et π' les projections sur Z^n et p_1, p_2 les surjections canoniques comme indiquées dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
& G_3 \times G_2/G_1 \times Z^n \arrow[dl, "\widetilde{\pi}"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & & \\
G_3 \times Z^n \arrow[rr, "p_1"] & & G_3/G_1 \times Z^n \arrow[rr, "p_2"] \arrow[dr, "\pi"'] & & G_3/G_2 \times Z^n \arrow[dl, "\pi'"] \\
& & & Z^n &
\end{tikzcd}$$

Soit $F \subseteq G_3/G_1 \times Z^n$ un fermé. Posons $\widetilde{F} := (p_1^{-1} \circ p_2^{-1} \circ p_2)[F]$; c'est donc la G_2-saturation de l'image inverse de F dans $G_3 \times Z^n$. Il suffit de montrer que $\widetilde{F}$ est fermé, puisqu'alors $p_2[F] = (p_2 \circ p_1)[\widetilde{F}]$ est ferméé et donc $\pi[F] = \pi'[p_2[F]]$ est fermé par complétude de G_3/G_2.

Soit $\alpha : G_3 \times G_2/G_1 \times Z^n \to G_3/G_1 \times Z^n$ le morphisme $(g, hG_1, \bar{z}) \mapsto (ghG_1, \bar{z})$ et soit $\tilde{\pi} : G_3 \times G_2/G_1 \times Z^n \to G_3 \times Z^n$ la projection. Elle est une application fermée par complétude de G_2/G_1 grâce au lemme 3.47. Alors

$$\widetilde{F} = \left\{(g, \bar{z}) \,\middle|\, \exists\, hG_1 \in G_2/G_1 \text{ tel que } (ghG_1, \bar{z}) \in F\right\} = (\tilde{\pi} \circ \alpha^{-1})[F]$$

est fermé par complétude de G_2/G_1 et continuité de α.

Supposons maintenant que G_3/G_1 soit complet. Alors G_2/G_1 en est une sous-variété fermée, et G_3/G_2 est isomorphe au quotient $(G_3/G_1)\big/(G_2/G_1)$ par le lemme 5.15 (a), donc les deux sont complets d'après 3.48 (a) et (b). ■

Théorème 5.33 *Une $\mathfrak{Z}$-variété de groupe de groupe G contient un unique sous-groupe maximal G^{c} parmi ses sous-groupes complet connexe. Ce sous-groupe est normal, contenu dans le centre de G et $(G/G^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} = G/G^{\mathsf{c}}$.*

■ Soit G^{c} le sous-groupe normal engendré par tous les sous-groupes complets et connexes de G. De nouveau par la proposition 5.11, il est engendré par un nombre fini d'entre eux, donc complet par le même raisonnement que dans 5.31 (a). Il est évidemment unique et maximal.

Soit $G^{\mathsf{cc}} \trianglelefteq G$ tel que $G^{\mathsf{cc}}/G^{\mathsf{c}} = (G/G^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}}$. G^{cc} est connexe par définition, et complet par la proposition 5.32, donc $G^{\mathsf{cc}} \leqslant G^{\mathsf{c}}$, c.-à-d. $G^{\mathsf{cc}} = G^{\mathsf{c}}$.

Il reste à montrer que G^{c} est central. Une première méthode consiste à appliquer le lemme de rigidité 3.51 comme en géométrie algébrique :

On considère le morphisme $f : G^{\mathsf{c}} \times G \to G$, $(c, g) \mapsto [c, g]$. Alors $f[G^{\mathsf{c}} \times \{e\}] = \{e\}$, donc par le lemme de rigidité, pour tout $g \in G$, le résultat de $[c, g]$ ne dépend pas de $c \in G^{\mathsf{c}}$, donc $[c, g] = [e, g] = e$ pour tout $c \in G^{\mathsf{c}}$ et tout $g \in G$.

Mais le lemme de rigidité suppose que la dimension soit semi–continue (en fait par rapport à la projection $G^{\mathsf{c}} \times G \to G$), ou modulo la proposition 3.58 que le groupe soit lisse.

La preuve suivante, qui marche dans tous les cas, est une élaboration d'une idée de D. Lascar :

Soit $\mathfrak{Z}^*$ une extension saturée de $\mathfrak{Z}$. Alors G^* est une $\mathfrak{Z}^*$-variété de groupe qui étend G. Par le lemme 3.65, on sait que $G^{\mathsf{c}*}$ est complet, donc $G^{\mathsf{c}*} \subseteq G^{*\mathsf{c}}$, mais aussi que $G^{*\mathsf{c}} \cap G$ est complet, donc $G^{*\mathsf{c}} \cap G \subseteq G^{\mathsf{c}*}$. D'autre part, tout automorphisme de $\mathfrak{Z}^*$ est un homéomorphisme, donc il laisse $G^{*\mathsf{c}}$ globalement fixe. Par conséquent, $G^{*\mathsf{c}}$ est $\emptyset$-définissable et il s'ensuit que $G^{*\mathsf{c}} = G^{\mathsf{c}*}$.

Soit $C = [G^{\mathsf{c}}, G]$ le sous-groupe engendré par les commutateurs des éléments de G^{c} avec les éléments de G. Il est $\emptyset$-définissable pour la même raison que $G^{*\mathsf{c}}$, et de plus on a $C^* = [G^{*\mathsf{c}}, G^*]$.

Fait : Il existe un entier n et un ouvert non vide U de G^n tels que $C = [G^{\mathsf{c}}, g_1]\cdot\ldots\cdot[G^{\mathsf{c}}, g_n]$ pour tout $g_1,\ldots, g_n \in U$.

$\square$ On peut trouver n et des h_i $(i = 1, \ldots, n)$ génériques et indépendantes au-dessus de G tels que $C^* = [G^{*\mathsf{c}}, h_1] \cdot \ldots \cdot [G^{*\mathsf{c}}, h_n]$:

Soit h_0 une réalisation quelconque dans G^* du type générique de G. Supposons par récurrence $h_1, \ldots, h_k$ construits. Tout produit $[G^{*\mathsf{c}}, x_1] \cdot \ldots \cdot [G^{*\mathsf{c}}, x_m]$ est un fermé irréductible, car c'est l'image du fermé complet irréductible $G^{*\mathsf{c}} \times \cdots \times G^{*\mathsf{c}}$ par le morphisme $(c_1,\ldots, c_m) \mapsto [c_1, x_1] \cdot \ldots \cdot [c_m, x_m]$ (voir 3.48 (c)). Alors pour tout $h \in G^*$, il y a deux possibilités :

$$\begin{array}{lrcl} \textit{ou bien} & [G^{*\mathsf{c}}, h_1] \cdot \ldots \cdot [G^{*\mathsf{c}}, h_k] & = & [G^{*\mathsf{c}}, h_1] \cdot \ldots \cdot [G^{*\mathsf{c}}, h_k] \cdot [G^{*\mathsf{c}}, h], \\ \textit{ou bien} & \dim\Big([G^{*\mathsf{c}}, h_1] \cdot \ldots \cdot [G^{*\mathsf{c}}, h_k]\Big) & < & \dim\Big([G^{*\mathsf{c}}, h_1] \cdot \ldots \cdot [G^{*\mathsf{c}}, h_k] \cdot [G^{*\mathsf{c}}, h]\Big). \end{array}$$

Dans le premier cas, h vérifie la formule

$$\chi_k(z) \ = \ \Big(\exists y_1 \in G^{\mathsf{c}} \ldots \exists y_{2k+1} \in G^{\mathsf{c}} [y_1, h_1] \cdot \ldots \cdot [y_k, h_k] = [y_{k+1}, h_1] \cdot \ldots \cdot [y_{2k}, h_k] \cdot [y_{2k+1}, z]\Big).$$

Alors χ est une formule fermée par complétude de G^{c}. Mais si $C^* \neq [G^{*\mathsf{c}}, h_1]\cdot\ldots\cdot[G^{*\mathsf{c}}, h_k]$, alors il existe $g \in G^*$ tel que $[G^{*\mathsf{c}}, h_1] \cdot \ldots \cdot [G^{*\mathsf{c}}, h_k] \cdot [G^{*\mathsf{c}}, g] \neq [G^{*\mathsf{c}}, h_1] \cdot \ldots \cdot [G^{*\mathsf{c}}, h_k]$, c.-à-d. tel que $\neg\chi_k(g)$. Donc dans ce cas, $\chi_k[G^*] \subset\subset G^*$ et on peut choisir $h_{k+1} \notin \chi_k[G^*]$ vérifiant le type générique de G et indépendant de $\{h_1,\ldots, h_k\}$.

Ce processus s'arrète, vu la finitude du rang, après n étapes pour un certain n. Considérons maintenant la formule $\chi(y_1,\ldots, y_n) = \Big(C = [G^{\mathsf{c}}, y_1] \cdot \ldots \cdot [G^{\mathsf{c}}, y_n]\Big)$. C'est une $\emptyset$-formule qui est satisfaite par un point générique de G^n, à savoir $(h_1,\ldots, h_n)$. Donc $\chi[G]$ est dense dans G^n (et il suffit de prendre $U =$ intérieur de $\chi[G]$). $\square$

Supposons maintenant que G^{c} ne soit pas central dans G. Alors il existe un élément non-trivial $a \in C$. Soient $(g_1,\ldots, g_n) \in G^{n*}$ générique au-dessus de G. Considérons la formule fermée

$$\varphi(x_1,\ldots, x_n; y_1,\ldots, y_n) \ = \ \Big(y_1 \in G^{\mathsf{c}} \wedge \cdots \wedge y_n \in G^{\mathsf{c}} \wedge \ [y_1, g_1x_1] \cdot \ldots \cdot [y_n, g_nx_n] = a\Big)$$

Alors la formule $\psi(x_1,\ldots, x_n) \ = \ \exists y_1 \ldots \exists y_n \, \varphi(x_1,\ldots, x_n; y_1,\ldots, y_n)$ est aussi fermée par complétude de $G^{\mathsf{c}} = \chi[G]$.

Pour tout n-uple $(h_1,\ldots, h_n) \in G^n$, les éléments $g_1h_1, \ldots, g_nh_n$ sont encore génériques sur G Donc $[G^{\mathsf{c}}, g_1h_1] \cdot \ldots \cdot [G^{\mathsf{c}}, g_nh_n] = C$ par le fait démontré ci-dessus, et alors $G^n \subseteq \psi[G^*]$. Par conséquent, $G^{*n} \subseteq d_3\psi[G^*]$ (pour la notation, voir page 55).

Mais puisque ψ est une formule fermée, la proposition 2.31 (a) donne $d_{\mathfrak{Z}}\psi[G^*] \subseteq \psi[G^*]$, donc $G^{*n} \subseteq \psi[G^*]$, c.-à-d. $G^{*n} = \psi[G^*]$. Mais clairement $(g_1^{-1},\dots,g_n^{-1}) \notin \psi[G^*]$, car pour tout $(y_1,\dots,y_n)$, $[y_1, g_1 g_1^{-1}] \cdot \dots \cdot [y_n, g_n g_n^{-1}] = e \neq a$: contradiction ! ■

Sous-groupes paraboliques

Définition 5.34 *Soit G une $\mathfrak{Z}$-variété de groupe. Un sous-groupe définissable P est* **parabolique***dans G si G/P est une $\mathfrak{Z}$-variété complète.*

Proposition 5.35 *Soient $P_1 \leqslant P_2 \leqslant G$ des $\mathfrak{Z}$-variétés de groupes.*

(a) *P_1 est parabolique dans G ssi P_1 est parabolique dans P_2 et P_2 est parabolique dans G.*

(b) *En particulier, P_1 est parabolique dans G ssi P_1° l'est.*

■ (a) est une réformulation de la proposition 5.32.

(b) P° est parabolique dans P parce que P/P° est fini, donc complet (voir 3.48 — un singleton est évidemment complet). Après (a) s'applique. ■

Corollaire 5.36 *Tout sous-groupe parabolique dans G contient un sous-groupe qui est minimal parmi les sous-groupe paraboliques dans G. Tout sous-groupe parabolique minimal est connexe et n'a pas de sous-groupes paraboliques propres.*

Définition 5.37 *Un (sous-groupe de)* Borel *d'une variété de groupe G est un sous-groupe définissable qui est maximal parmi les sous-groupes définissables résolubles connexes.*

En géométrie algébrique, les sous-groupes paraboliques minimaux sont exactement les borels. Ils sont par ailleurs tous conjugués. Ces deux théorèmes dus à A. Borel sont extrêmement importants dans la théorie des groupes algébriques.

Je ne vois pas de possibilité de démontrer directement que les borels d'un groupe de Zariski sont paraboliques. Le fait que les borels soient conjugués se déduit assez facilement de leur propriété d'être paraboliques minimaux. Sous certaines hypothèses, la même preuve marche pour les sous-groupes paraboliques minimaux d'un groupe de Zariski :

Proposition 5.38 *Supposons que G soit une $\mathfrak{Z}$-variété de groupe telle que G^2 soit lisse. Si P_1, P_2 sont des sous-groupes paraboliques tels que P_2 normalise P_1, alors $P_1 \cap P_2$ est parabolique dans G.*

■ Puisque P_2 normalise P_1, P_1P_2 est un sous-groupe de G, en particulier fermé. Donc $(P_1P_2)/P_1$ est complète comme sous-variété fermée de G/P_1.

Le lemme 5.15 (b) donne un morphisme bijectif $\beta : P_2/(P_1 \cap P_2) \to (P_1P_2)/P_1$ qui est la restriction de la surjection canonique $p : G/(P_1 \cap P_2) \to G/P_1$. Il suffit de montrer que β est un isomorphisme; alors $P_2/(P_1 \cap P_2)$ sera complet comme image par un morphisme d'une variété complète, c.-à-d. $P_1 \cap P_2$ sera parabolique dans P_2. Puis $P_1 \cap P_2$ sera parabolique dans G d'après 5.35.

La preuve que β est un isomorphisme généralise celle de la proposition 3.55:
soit F un fermé de $P_2/(P_1 \cap P_2) \times Z^n$ et posons $\bar{p} := p \times \mathrm{id}_{Z^n}$. Soit X une composante irréductible de $(\beta \times \mathrm{id}_{Z^n})[F] = \bar{p}[F]$ et soient π_1, π_2 les projections de $\Gamma_{\bar{p}}$ sur $G/(P_1 \cap P_2) \times Z^n$ resp. $G/P_1 \times Z^n$.

Pour tout $g \in G/P_1$, l'image inverse $\bar{p}^{-1}(g)$ est la $P_1/(P_1 \cap P_2)$-saturation de tout élément de $\bar{p}^{-1}(g)$. Donc $(\bar{p}^{-1} \circ \bar{p})[F] = P_1/(P_1 \cap P_2) \cdot F$ est la $P_1/(P_1 \cap P_2)$-saturation de F. Ceci donne immédiatement

$$\Gamma_{\bar{p}} \cap \pi_2^{-1}[\,\overline{X}\,] \subseteq \Big(\Gamma_{\bar{p}} \cap \pi_1^{-1}\Big[P_1/(P_1 \cap P_2) \cdot F\Big]\Big) \cup \Big(\Gamma_{\bar{p}} \cap \pi_2^{-1}[\,\overline{\partial X}\,]\Big).$$

L'hypothèse que G^2 est lisse entraîne la lissité de $G/(P_1 \cap P_2) \times G/P_1$ (proposition 5.29), et donc pour toute composante irréductible Y de $\pi_2^{-1}[\,\overline{X}\,] \cap \Gamma_{\bar{p}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\dim Y &\geqslant \dim\Big(\overline{X} \times G/(P_1 \cap P_2) \times Z^n\Big) + \dim \Gamma_{\bar{p}} - \dim\Big(G/(P_1 \cap P_2) \times G/P_1 \times Z^{2n}\Big) \\
&= \dim \overline{X} + \dim G/(P_1 \cap P_2) + \dim Z^n + \dim(\mathrm{dom}(\bar{p})) \\
&\qquad\qquad - \dim G/(P_1 \cap P_2) - \dim G/P_1 - \dim Z^{2n} \\
&= \dim \overline{X} + \dim G/(P_1 \cap P_2) - \dim G/P_1 \\
&= \dim \overline{X} + \dim P_1 - \dim(P_1 \cap P_2).
\end{aligned}$$

D'autre part, l'additivité de la dimension donne

$$\dim(\Gamma_{\bar{p}} \cap \pi_2^{-1}[\,\overline{\partial X}\,]\big) = \dim \overline{\partial X} + \dim P_1/(P_1 \cap P_2) < \dim \overline{X} + \dim P_1 - \dim(P_1 \cap P_2).$$

Donc $\Gamma_{\bar{p}} \cap \pi_2^{-1}[\,\overline{\partial X}\,]$ n'est pas une composante irréductible de $\Gamma_{\bar{p}} \cap \pi_2^{-1}[\,\overline{X}\,]$, c.-à-d.

$$\Gamma_{\bar{p}} \cap \pi_2^{-1}[\,\overline{X}\,] \subseteq \Big(\Gamma_{\bar{p}} \cap \pi_1^{-1}\Big[P_1/(P_1 \cap P_2) \cdot F\Big]\Big).$$

Il s'ensuit que β est une application fermée, donc un isomorphisme. ■

Proposition 5.39 *Soit G une $\mathfrak{Z}$-variété de groupe telle que G^2 soit lisse.*

(a) *Tous les sous-groupes paraboliques minimaux de G sont conjugués.*

(b) *Si* P *est un sous-groupe parabolique minimal, alors* P *est l'unique sous-groupe parabolique minimal dans* $\mathbb{N}_G(P)$ *et* $\mathbb{N}_G(\mathbb{N}_G(P)) = \mathbb{N}_G(P)$ *.*

■ (a) Soient P et Q deux sous-groupes paraboliques minimaux. G agit par multiplication à gauche sur la variété complète G/Q dont la restriction à P donne une action de P sur G/Q .

Soit $h \in G$ tel que l'orbite $Y := P \cdot hQ$ soit de dimension minimale parmi les orbites de P . Alors Y est fermée d'après 5.18, donc complète. Soit $Y' := G \cdot hQ$ l'orbite de g sous G et soit G_{hQ} le stabilisateur de hQ , *i.e.* le groupe $\{g \in G \,|\, g \cdot hQ = hQ\}$.

L'action induit un morphisme bijectif $\beta : G/G_{hQ} \to Y'$ dont la restriction à $(G_{hQ}P)/G_{hQ} \cong P/P_{hQ}$ va bijectivement sur Y . Le graphe de cette bijection est une partie de $G \times G/Q \cong G^2/(\{e\} \times Q)$ qui est lisse d'après 5.29. Alors un morphisme bijectif est un isomorphisme (3.55). La restriction à P est donc aussi un isomorphisme sur son image, c.-à-d. $P/P_{hQ} \cong Y$. Puisque Y est complète, P_{hQ} est parabolique dans P .

Par minimalité de P , il s'ensuit que $P = P_{hQ}$. Cela veut dire que $p \cdot hQ \subseteq hQ$ pour tout $p \in P$, donc $P^h \subseteq Q$. Mais P^h est clairement un sous-groupe parabolique de G , donc $P = Q$ par minimalité de Q .

(b) Supposons que $P \neq P^g \subseteq \mathbb{N}_G(P)$. Puisque P^g normalise P , la proposition 5.38 entraîne que $P \cap P^g$ est un sous-groupe parabolique de G contredisant la minimalité de P .

Supposons maintenant que g normalise $\mathbb{N}_G(P)$. Alors P^g est un sous-groupe de $\mathbb{N}_G(P)$, donc $P = P^g$ d'après ce qui précède, c.-à-d. $g \in \mathbb{N}_G(P)$. ■

Encore quelques propriétés des sous-groupes paraboliques :

Lemme 5.40 *Soit* P *un sous-groupe parabolique de* G *.*

(a) *Si* $\varphi : G \to H$ *est un* $\mathfrak{Z}$*-morphisme de groupes, alors* $\varphi[P]$ *est parabolique dans* $\varphi[G]$ *.*

(b) $P^G = \bigcup_{g \in G} P^g$ *est fermé dans* G *.*

■ (a) φ induit un morphisme $\varphi/P : G/P \to \varphi[G]/\varphi[P]$ (voir proposition 3.45 (c) appliquée à $p_{\varphi[P]} \circ \varphi$). Puisque G/P est complet, son image par φ/P qui est $\varphi[G]/\varphi[P]$ est aussi complète.

(b) On considère les morphismes

$$\begin{array}{ccccccc} G \times G & \xrightarrow{\quad \varphi \quad} & G \times G & \xrightarrow{\quad \bar{p} := p \times \mathrm{id}_G \quad} & G/P \times G & \xrightarrow{\quad \pi \quad} & G \\ (g,p) & \longmapsto & (g, p^{g^{-1}}) & \longmapsto & (gP, p^{g^{-1}}) & \longmapsto & p^{g^{-1}} \end{array}$$

Alors $P^G = (\pi \circ \bar{p} \circ \varphi)[G \times P]$. Grâce à la complétude de G/P, il suffit de montrer que $\bar{p}[\varphi[G \times P]]$ est fermé, c.-à-d. que $\Phi := \varphi[G \times P]$ est fermé P-saturé.

L'application φ est un isomorphisme, car son inverse $(g,p) \mapsto (g, p^g)$ est clairement un morphisme. Donc Φ est fermé. Si $(g, p^{g^{-1}}) \in \Phi$ et $h \in P$, alors $(gh, p^{g^{-1}}) = (gh, (p^h)^{(gh)^{-1}})$ est dans Φ car $p^h = h^{-1}ph \in P$. Donc φ est P-saturé. ■

Sous-groupes affines

Théorème 5.41 *Une $\mathfrak{Z}$-variété de groupe de groupe G telle que G^2 soit lisse contient un unique sous-groupe minimal G^{a} parmi ses sous-groupes normaux paraboliques. Ce sous-groupe est connexe et $G^{\mathsf{aa}} = G^{\mathsf{a}}$.*

■ Soit G^{a} l'intersection de tous les sous-groupes normaux paraboliques dans G. La proposition 5.38 dit alors que G^{a} est parabolique ; par ailleurs c'est un sous-groupe normal. L'unicité et la minimalité sont claires par la construction.

Si $N \trianglelefteq G$, alors $N^\circ \trianglelefteq G$, donc G^{a} est connexe d'après 5.35 (b). Puis G^{a} ne peut pas avoir de sous-groupe normal parabolique propre à cause de 5.35 (a) et la minimalité. ■

En théorie des groupes algébriques, on fait normalement la distinction entre les groupes algébriques affines et les groupes algébriques complets, aussi appelés « variétés abéliennes », avant d'entrer dans la théorie, en particulier avant de définir et d'examiner les borels et les sous-groupes paraboliques. Il se trouve que les groupes affines sont exactement les groupes linéaires, c.-à-d. les sous-groupes fermés d'un $\mathrm{GL}(n, K)$, et qu'ils n'ont pas de sous-groupe infini complet, ni de groupe quotient complet.

En fait, le théorème 5.33 est bien connu pour les groupes algébriques, mais l'absence de sous-groupe complet infini ne suffit pas à caractériser les groupes affines : on sait que $G/\mathbb{Z}(G)$ est toujours linéaires, mais G/G^{c} ne l'est pas forcément (voir [R]).

D'un autre côté, tout groupe algébrique contient un plus grand sous-groupe affine connexe, qui est aussi le plus petit dont le quotient soit une variété abélienne. Un groupe algébrique est donc affine ssi il n'a pas de variété abélienne comme quotient. Ceci mène à la définition suivante :

Définition 5.42 *Une $\mathfrak{Z}$-variété de groupe G est* affine *ssi G n'a pas de sous-groupe normal définissable propre parabolique. Autrement dit, G est affine ssi $G = G^{\mathsf{a}}$.*

À présent, cette définition n'est peut-être pas très heureuse, vu que je n'ai pas réussi à démontrer deux propriétés importantes (fortement liées) des groupes affines :

Question:

(1) Un groupe de Zariski affine, a-t-il une composante complète G^{c} triviale?

(2) Un sous-groupe d'un groupe de Zariski affine, est-il aussi affine?

Dans les deux cas on a le même problème, de transporter une « section complète », *i.e.* un quotient complet d'un sous-groupe de G, vers le haut, c.-à-d. de trouver un quotient non-trivial de G qui soit son image epimorphe.

Lemme 5.43 *Soit G une variété de groupe lisse et soit N un sous-groupe de G. Alors $N^{\mathsf{c}} = N \cap G^{\mathsf{c}}$. Si N est normal dans G, alors $(G/N)^{\mathsf{a}} = G^{\mathsf{a}}N/N$.*

■ N^{c} est un sous-groupe complet de G, donc $N^{\mathsf{c}} \leqslant G^{\mathsf{c}}$. D'autre part, $N \cap G^{\mathsf{c}}$ est complet, donc $N \cap G^{\mathsf{c}} \leqslant N^{\mathsf{c}}$.

$(G/N)^{\mathsf{a}}$ existe puisque $(G/N) \times (G/N) = G^2/N^2$ est lisse d'après la proposition 5.26. Le produit $G^{\mathsf{a}}N$ est un sous-groupe normal parabolique de G vu qu'il contient G^{a}. Donc $(G/N)\big/(G^{\mathsf{a}}N/N) \cong G/G^{\mathsf{a}}N$ est complet, c.-à-d. $G^{\mathsf{a}}N/N$ est un sous-groupe normal parabolique de G/N. Ceci entraîne $(G/N)^{\mathsf{a}} \leqslant G^{\mathsf{a}}N/N$.

Pour obtenir l'autre inclusion, soit $N_1 \trianglelefteq G$ tel que $(G/N)^{\mathsf{a}} = N_1/N$. Alors on obtient que $G/N_1 \cong (G/N)\big/(N_1/N) = (G/N)\big/(G/N)^{\mathsf{a}}$ est complet, d'où $G^{\mathsf{a}} \leqslant N_1$ et donc $G^{\mathsf{a}}N/N \leqslant N_1/N$. ■

D'après les théorèmes 5.33 et 5.41, une variété de groupe G (telle que G^2 soit lisse) a deux sous-groupes normaux G^{a} et G^{c}. Le tableau suivant résume leurs propriétés:

$G^{\mathsf{aa}} = G^{\mathsf{a}}$ $G^{\mathsf{cc}} = G^{\mathsf{c}}$	$(G/G^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} = G^{\mathsf{c}}/G^{\mathsf{c}}$ $(G/G^{\mathsf{a}})^{\mathsf{a}} = G^{\mathsf{a}}/G^{\mathsf{a}}$
$G^{\mathsf{ca}} = \{e\}$ $G^{\mathsf{ac}} = G^{\mathsf{c}} \cap G^{\mathsf{a}}$	$(G/G^{\mathsf{a}})^{\mathsf{c}} = G/G^{\mathsf{a}}$ $(G/G^{\mathsf{c}})^{\mathsf{a}} = G^{\mathsf{a}}G^{\mathsf{c}}/G^{\mathsf{c}}$

De plus, $G^{\mathsf{c}} \leqslant \mathbb{Z}(G)$ par le théorème 5.33, et évidemment $G^{\mathsf{c}} = G \iff G^{\mathsf{a}} = \{e\}$.

L'équivalence duale $G^{\mathsf{a}} = G \iff G^{\mathsf{c}} = \{e\}$ est fausse, déjà pour les groupes algébriques. Une version « duale » de la première propriété pourrait être le théorème de Rosenlicht, à savoir $(G/\mathbb{Z}(G))^{\mathsf{a}} = G/\mathbb{Z}(G)$: il est vrai pour les groupes algébriques [R], mais ouvert pour les groupes de Zariski.

5.5 L'inexistence de mauvais groupes de Zariski

Construction de prévariétés complètes

Une grande partie de la théorie des groupes algébriques est basée sur le fait que les sous-groupes de Borel sont paraboliques. Une démonstration élégante montre d'abord qu'un groupe affine résoluble agissant sur une variété complète admet un point fixe (théorème du point fixe de Borel), ce qui est appliqué à l'action d'un borel sur la variété des drapeaux qui est complète (cf. [Hu] section 21).

Ici, dans le cadre des géométries de Zariski, on ne dispose pas de variétés complètes naturelles comme l'espace projectif ou la variété des drapeaux (et la preuve du théorème du point fixe ne passe pas facilement non plus parce que certaines propriétés classiques des groupes affines ne peuvent pas être démontrées pour les groupes de Zariski affines). En revanche, sous certaines conditions, une sorte d'« espace projectif » peut être construit.

Soient pour la suite $\mathfrak{Z}$ une géométrie de Zariski et G une $\mathfrak{Z}$-variété de groupe. Si H est un sous-groupe définissable de G, alors posons

$$\begin{array}{lrcl} & H^G & := & \bigcup_{g\in G} H^g \;=\; \left\{h^g \,\middle|\, h\in H, g\in G\right\} \\ \text{et} & H^\bullet & := & \bigcup_{h\in G}\Big(H\cap \bigcup_{g\notin \mathbb{N}_G(H)} H^g\Big)^h \;=\; \bigcup_{h\in G}\Big(H^h\cap \bigcup_{g\notin \mathbb{N}_G(H)h} H^g\Big) \end{array}$$

Alors H^G, $H^\bullet$ ainsi que $H^G\setminus H^\bullet$ sont des parties constructibles normaux dans G (*i.e.* $\mathbb{N}_G(H^G)=\mathbb{N}_G(H^\bullet)=\mathbb{N}_G(H^G\setminus H^\bullet)=G$).

Théorème 5.44 *Supposons que la dimension soit semi–continue par rapport aux projections $\pi : G\times Z^n \to Z^n$. Soit H un sous-groupe définissable connexe de G tel que H^G soit fermé et tel que $\dim H^\bullet < \dim H$. Alors il existe une $\mathfrak{Z}$-prévariété complète $\mathbb{P}(H)$ et un morphisme bijectif $\alpha : G/\mathbb{N}_G(H)\to \mathbb{P}(H)$.*

■ Soit $X := \{(h_1^g, h_2^g)\,|\, h_i\in H, g\in G\}$. Alors par définition de $H^\bullet$, $X\cap (H^G\setminus H^\bullet)^2$ est une relation d'équivalence définissable E sur $H^G\setminus H^\bullet$. Les E-classes sont les conjuguées H^g dont on a enlevée tout ce qui appartient à au moins deux classes de conjugaison différentes (et les hypothèses impliquent que le résultat n'est pas vide). Ceci donne la possibilité de poser $\mathbb{P}(H) := (H^G\setminus H^\bullet)/E$. C'est donc une $\mathfrak{Z}$-prévariété dont les éléments sont les conjugués H^g de H.

Complétude : Soit F' un fermé de $\mathbb{P}(H)\times Z^n$. Posons $F := (p_E \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[F']$ et soit $\overline{F}$ l'adhérence de F dans $G\times Z^n$.

Si $(h^g,\bar z)\in F$ avec $h\in H$, alors tout $(H^g\setminus H^\bullet)\times\{\bar z\}\subseteq F$ et donc

$$\overline{(H^g \setminus H^\bullet)\times\{\bar z\}} \;=\; \left(\overline{H^g \setminus H^\bullet}\right)\times\{\bar z\} \;=\; H^g\times\{\bar z\} \;\subseteq\; \overline{F}$$

où l'égalité $\overline{H^g \setminus H^\bullet} = H^g$ vient du fait que $\dim H^\bullet < \dim H = \dim H^g$.

$$\begin{tikzcd}
 & G\times Z^n \arrow[dl, "\pi^\perp"'] \arrow[dr, "\pi"] & & (H^G\setminus H^\bullet)\times Z^n \arrow[ll, hook', "i\times \mathrm{id}_{Z^n}"'] \arrow[rr, two heads, "p_E\times \mathrm{id}_{Z^n}"] \arrow[d, "\pi'"] & & \mathbb{P}(H)\times Z^n \arrow[dl, "\pi''"] \\
G & & Z^n \arrow[r, equal] & Z^n \arrow[r, equal] & Z^n &
\end{tikzcd}$$

D'autre part, les π'-fibres de F sont au moins de dimension $\dim H$, donc les π-fibres de $\overline{F}$ sont génériquement de dimension au moins $\dim H$. La semi–continuité de la dimension par rapport à π implique donc que toute π-fibre de $\overline{F}$ est de dimension au moins $\dim H$. Par conséquent, si $\bar z\in Z^n$ est tel que $(e,\bar z)\in\overline{F}$, alors il existe $g\in G$ et $h^g\in H^g\setminus H^\bullet$ tels que $(h^g,\bar z)\in\overline{F}$. Autrement dit,

$$\left\{\bar z \,\middle|\, (e,\bar z)\in\overline{F}\right\} = \pi\left[{\pi^\perp}^{-1}(e)\cap\overline{F}\right] = \pi[\,\overline{F}\,] = \pi'[F] = \pi''[F'].$$

En particulier, $\pi''[F']$ est fermé, donc $\mathbb{P}(H)$ complète.

Le morphisme $\boldsymbol{\alpha}$: G agit sur lui-même par conjugaison : $\gamma : G\times G\to G$, $(g,h)\mapsto h^g$. Puisque $H^G\setminus H^\bullet$ est normal dans G, c'est une partie stable pour l'action γ. Puis γ induit un morphisme $\tilde\gamma : G\times\mathbb{P}(H)\to\mathbb{P}(H)$ par la proposition 3.45 (c) appliquée à $\varphi = p_E\circ\gamma\restriction_{G\times(H^G\setminus H^\bullet)}$.

$$\begin{tikzcd}
G\times G \arrow[rr, "\gamma"] & & G \\
G\times(H^G\setminus H^\bullet) \arrow[u, hook] \arrow[rr, "\gamma\restriction\ldots"] \arrow[d, "\mathrm{id}_G\times p_E"'] \arrow[drr, "\varphi"] & & H^G\setminus H^\bullet \arrow[u, hook] \arrow[d, "p_E"] \\
G\times\mathbb{P}(H) \arrow[rr, dashed, "\tilde\gamma"] & & \mathbb{P}(H)
\end{tikzcd}$$

G agit transitivement sur $\mathbb{P}(H)$, le groupe d'isotropie étant $\mathbb{N}_G(H)$. En fixant une classe, de préférence celle de $H \backslash H^\bullet$, on obtient ainsi un morphisme bijectif $\alpha : G/\mathbb{N}_G(H) \to \mathbb{P}(H)$.

En fait, le graphe de α est l'image par la surjection canonique $p_{\mathbb{N}_G(H)} \times p_E$ de l'ensemble $\Gamma \cap (G \times (H^G \setminus H^\bullet))$ où

$$\Gamma := \left\{(g, h^g) \,\middle|\, h \in H, g \in G\right\} = \bigcup_{g \in G} \left(\mathbb{N}_G(H) g \times H^g\right). \qquad \blacksquare$$

Construction de sous-groupes paraboliques

Sous certaines conditions, le morphisme α sera un isomorphisme, et donc $\mathbb{N}_G(H)$ un sous-groupe parabolique de G. Notons qu'un sous-groupe parabolique d'un groupe algébrique G est toujours égal à son normalisateur dans G (cf. [Hu] 23.1). Il est d'ailleurs facile de construire des sous-groupes d'un groupe $\aleph_0$-stable de rang fini qui soient d'indice fini dans leur normalisateur, c'est p.ex. le cas pour les borels. Alors la condition que H^G est fermé devient une condition nécessaire d'après 5.40 (dans le cas des groupes algébriques on a même $H^G = G$ pour tout sous-groupe parabolique H de G). Par contre, l'hypothèse que $\dim H^\bullet < \dim H$ n'est déjà pas vérifiée par tous les borels des groupes algébriques.

Pour montrer que α est un isomorphisme, on pourrait essayer d'appliquer la proposition 3.55. Pour cela, il faudrait montrer que $G/\mathbb{N}_G(H) \times \mathbb{P}(H)$ est une variété lisse. Puisque toutes les fibres de la surjection canonique $G \times (H^G \setminus H^\bullet) \twoheadrightarrow G/\mathbb{N}_G(H \times \mathbb{P}(H)$ ont la même dimension $\dim \mathbb{N}_G(H) + \dim H$, il suffit de supposer la lissité de $G \times H^G$ (ou de G^2 si l'on suppose en plus que $H^G = G$).

Mais il n'y a pas d'évidence pour que $\mathbb{P}(H)$ soit une $\mathfrak{Z}$-variété. On pourrait facilement se passer de la séparation (l'additivité de la dimension du théorème 3.38 et la proposition 3.55 ne l'utilisent pas) et l'additivité de E est claire puisque toutes les E-classes ont la même dimension $\dim H$. Par contre, l'admissibilité n'est pas évidente.

Il est néanmoins possible de recopier la preuve de la proposition 3.55 à l'intérieur de $G \times H^G$:

Proposition 5.45 *Soit H comme dans le théorème 5.44. Supposons en plus que $G \times H^G$ soit une $\mathfrak{Z}$-variété lisse. Alors $\alpha : G/\mathbb{N}_G(H) \to \mathbb{P}(H)$ est un isomorphisme, donc $\mathbb{N}_G(H)$ un sous-groupe parabolique de G.*

$\blacksquare$ L'adhérence de l'image inverse du graphe Γ_α dans $G \times H^G$, est précisément l'ensemble $\Gamma = \{(g, h^g) \mid h \in H, g \in G\}$ indiqué à la fin de la preuve de 5.44. Γ est l'image de $G \times H$ sous le morphisme $\psi : (g, h) \mapsto (g, h^g)$, donc irréductible. En fait, ψ est un isomorphisme (car $\psi^{-1} : (g, h) \mapsto (g, h^{g^{-1}})$ est aussi un morphisme), donc Γ est fermé dans G^2 et $\dim \Gamma = \dim(G \times H) = \dim G + \dim H$.

Posons $\Gamma_n = \Gamma \times Z^n$; c'est donc un fermé irréductible de $G^2 \times Z^n$ de dimension $\dim G + \dim H + \dim Z^n$. Puis soient $\pi_1, \pi_2 : G^2 \times Z^n \to G \times Z^n$ les deux projections. Pour simplifier les notations, soient $N := \mathbb{N}_G(H)$ et $p_N : G \twoheadrightarrow G/N$ la surjection canonique.

Les π_1-fibres de Γ_n sont donc de la forme $H^g \times \{\bar{z}\}$; et les π_2-fibres de Γ_n sont génériquement de la forme $Ng \times \{\bar{z}\}$, ceci à cause des hypothèses sur H . En particulier, π_1-gdim $\Gamma_n = \dim H$ et π_2-gdim $\Gamma_n = \dim N$. Pour $n = 0$, l'additivité appliquée à Γ par rapport aux deux projections donne

$$\dim G + \dim H = \dim \Gamma = \dim H^G + \dim \mathbb{N}_G(H) = \dim H^G + \dim N.$$

Soit $X \subseteq G/N \times Z^n$ et $\widetilde{X} := (p_N \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[X]$. On lui associe l'ensemble

$$\chi(X) := \pi_2\Big[\Gamma_n \cap \pi_1^{-1}[\widetilde{X}]\Big] = \Big\{(h^g, z_1,..., z_n) \Big| h \in H, (Ng, z_1,..., z_n) \in X\Big\} \subseteq G \times Z^n.$$

On a alors $\alpha[X] = (p_e \times \mathrm{id}_{Z^n})[\,\chi(X) \cap [(H^G \setminus H^\bullet) \times Z^n]\,]$. Dans un certain sens, χ est une application dont le graphe est Γ . Pour prouver la proposition, il suffit de démontrer que α est une application fermée, donc que $\chi(F) \cap [(H^G \setminus H^\bullet) \times Z^n]$ est fermé dans $(H^G \setminus H^\bullet) \times Z^n$ pour tout fermé $F \subseteq G/N \times Z^n$.

$\chi(X)$ est irréductible pour $X \subseteq G/N \times Z^n$ irréductible :

Pour simplifier les notations, soit $n = 0$ (cette hypothèse n'affecte pas la preuve). Soit $\widetilde{X} = X_0 \sqcup \cdots \sqcup X_l$. Par le lemme 5.14, les composantes X_i sont N°-saturées et isomorphes par translation.

Donc si $\{n_0, \ldots, n_k\} \subseteq N$ est un système complet de représentants de N/N° , alors $\widetilde{X} = n_0 X_i \cup \cdots \cup n_k X_i$ (pour tout i). Soit γ la conjugaison $(h, g) \mapsto h^g$. Alors

$$\chi(X) = \gamma[H \times \widetilde{X}] = \bigcup_{j=0}^{k} \gamma[H \times n_j X_0].$$

Les ensembles $\gamma[H \times n_j X_0]$ sont irréductibles parce que H et X_0 le sont. Mais

$$\gamma[H \times n_j X_0] = \bigcup_{x \in X_0} H^{n_j x} = \bigcup_{x \in X_0} H^x = \gamma[H \times X_0]$$

car $n_j \in \mathbb{N}_G(H)$. Donc $\chi(X) = \gamma[H \times X_0]$ est irréductible.

$\chi(X)$ est fermé pour $X \subseteq G/N \times Z^n$ fermé irréductible :

La preuve est l'adaptation de 3.55 (et donc du lemme 5.5 de [HZ1]).

Soient $Y := \overline{\chi(X)}$ et $Y' := \overline{Y \setminus \chi(X)}$. Alors Y est irréductible et $\dim Y' < \dim Y$. Les hypothèses de la proposition donnent en plus

$$\begin{array}{lrcl} & \pi_2^{-1}[\chi(X)] \cap \Gamma_n & \subseteq & \Big(\pi_1^{-1}[\widetilde{X}] \cap \Gamma_n\Big) \cup \Big(H^\bullet \times Z^n\Big) \\ \text{d'où} \quad (*) & \pi_2^{-1}[Y] \cap \Gamma_n & \subseteq & \Big(\pi_1^{-1}[\widetilde{X}] \cap \Gamma_n\Big) \cup \Big(\pi_2^{-1}[Y'] \cap \Gamma_n\Big) \cup \Big(H^\bullet \times Z^n\Big) \end{array}$$

En particulier, toute composante irréductible du fermé à gauche est inclus dans une composante irréductible d'un des fermés à droite.

Puisque $G \times H^G \times Z^n$ est lisse, toute composante irréductible de $\pi_2^{-1}[Y] \cap \Gamma_n$ est de dimension au moins

$$\begin{aligned} & \dim \pi_2^{-1}[Y] + \dim \Gamma_n - \dim(G \times H^G \times Z^n) \\ = \ & (\dim Y + \dim G) + (\dim G + \dim H + \dim Z^n) - (\dim G + \dim H^G + \dim Z^n) \\ = \ & \dim Y + \dim N. \end{aligned}$$

Soient $F_1, \ldots, F_m$ les composantes irréductibles de Y'. Alors $\dim F_i \leqslant \dim Y' < \dim Y$ et $\pi_2^{-1}[Y'] \cap \Gamma = (\pi_2^{-1}[F_1] \cap \Gamma_n) \cup \cdots \cup (\pi_2^{-1}[F_m] \cap \Gamma_n)$. Par $(*)$, toute composante irréductible d'un $\pi_2^{-1}[F_i] \cap \Gamma$ est, ou bien une composante irréductible de $\pi_2^{-1}[Y] \cap \Gamma_n$, ou bien contenue dans $(\pi_1^{-1}[\widetilde{X}] \cap \Gamma_n) \cup (H^\bullet \times Z^n)$. Il s'agit d'exclure le premier cas.

Dans ce cas, $F_i \setminus H^\bullet \times Z^n$ est dense dans F_i (sinon F_i serait inclus dans $H^\bullet \times Z^n$), donc la dimension π_2-générique de Γ_n au-dessus de F_i est $\dim N$ (puisque les π_2-fibres de Γ sont de dimension $\dim N$ en dehors de $H^\bullet$). Par additivité,

$$\dim\left(\pi_2^{-1}[F_i] \cap \Gamma_n\right) = \dim F_i + \dim N < \dim Y + \dim N,$$

ce qui contredit les calculs ci-dessus.

Ce cas étant exclu, on peut conclure que $\overline{\chi(X)} = Y \subseteq \chi(X) \cup (H^\bullet \times Z^n)$. Par conséquent, $\chi'(X) := \chi(X) \setminus (H^\bullet \times Z^n)$ est fermé dans $(H^G \setminus H^\bullet) \times Z^n$, donc $\alpha[X] = (p_E \times \mathrm{id}_{Z^n})[\chi'(X)]$ est fermé. ■

Mauvais groupes de Zariski

Définition 5.46 *Un groupe $\aleph_0$-stable de rang fini connexe est* **mauvais** *ssi il n'est pas résoluble et tout sous-groupe définissable propre connexe est nilpotent.*

Les constructions des paragraphes précédents s'appliquent bien au cas des mauvais groupes de Zariski à cause des faits suivants ([P2], théorème 3.31). Soit G un mauvais groupe simple. Alors

- tous les borels de G sont autonormalisants ;
- deux borels distincts s'intersectent en e ;
- les conjugués d'un borel recouvrent G.

Proposition 5.47 *Si G est un groupe de Zariski connexe, lisse, simple et mauvais, alors les borels de G sont paraboliques dans G.*

■ Soit H un sous-groupe de Borel de G. Alors les conditions du théorème 5.44 et de la proposition 5.45 sont vérifiées :

Comme G est simple, il est riche (proposition 5.27), la dimension est donc semi–continue (proposition 3.58). Puis G^2 est lisse, car la géométrie de base est G (et la définition de la lissité exige que $G \times G^n$ soit lisse pour tout n). Finalement, à cause des propriétés citées ci-dessus, $H^\bullet = \{e\}$ et $H^G = G$.

Il s'ensuit que $\mathbb{N}_G(H)$ est un sous-groupe parabolique de G. Mais les borels sont auto-normalisants : $H = \mathbb{N}_G(H)$. ■

Tout cela permet de démontrer une partie de la conjecture de Cherlin pour les groupes de Zariski (lisses) :

Théorème 5.48 *Il n'existe pas de mauvais groupe de Zariski lisse, donc :*

(a) *Tout groupe de Zariski connexe, non nilpotent, lisse et riche, interprète un corps algébriquement clos.*

(b) *Tout groupe de Zariski connexe, simple et lisse interprète un corps algébriquement clos.*

■ (b) est un corollaire immédiat de (a) vu qu'un groupe simple est riche (proposition 5.27).

Soit donc G un groupe de Zariski connexe, non nilpotent, lisse et riche. S'il existe un borel de G qui n'est pas nilpotent, alors G interprète un corps algébriquement clos par le théorème de Zil'ber ([Z3], ou [P2] 3.20). Supposons donc, dans le but de trouver une contradiction, que tous les borels soient nilpotent. Si maintenant G' est un sous-groupe définissable connexe non-résoluble de rang minimal, alors G' est un mauvais groupe. C'est un groupe de Zariski d'après 5.13 qui est lisse par richesse de G, car tout G'^n est une G-variété lisse (proposition 5.26). Supposons donc que G soit mauvais.

Alors il existe un sous-groupe normal définissable N tel que G/N soit simple ([P2] 3.31). Ce quotient reste évidemment un groupe connexe non nilpotent ; il est une G-variété lisse par la proposition 5.29. Pour la même raison, toute puissance $(G/N)^n \cong G^n/N^n$ est une G-variété lisse. Donc (proposition 4.15), G/N est lui-même un groupe de Zariski lisse.

On peut donc supposer que G est simple. Alors G ne contient aucune partie infinie complète : sinon il existerait un sous-groupe normal complet G^{c} (lemme 5.31), donc $G = G^{\mathsf{c}}$ serait commutatif (par simplicité de G et théorème 5.33).

Soient B un borel de G, $c \in \mathbb{Z}(B)$ et soit $\varphi : G \to G$ le morphisme $g \mapsto g^c g^{-1}$. Alors φ est constant sur les classes de B, en particulier $\varphi[B] = \{e\}$, donc φ se factorise par G/B (proposition 3.45 (c)) et induit un morphisme $\bar{\varphi} : G/B \to G$. D'après 5.47, G/B est complet, donc $\bar{\varphi}[G/B]$ est une partie complète de G qui est forcément finie. Par ailleurs, G/B est irréductible, donc $\bar{\varphi}[G/B]$ aussi. Comme $e \in \bar{\varphi}[G/B]$, on obtient $\bar{\varphi}[G/B] = \{e\}$.

Par conséquent, φ est l'application constante $g \mapsto e$, c.-à-d. $c \in \mathbb{Z}(G)$.

On a donc montré que $\mathbb{Z}(B) \subseteq \mathbb{Z}(G)$. Puisque B est nilpotent, son centre n'est pas trivial (il est même infini — [P2] 1.11). Mais G étant un groupe simple infini, son centre est trivial : contradiction. ■

La preuve marche aussi bien pour un quotient G/N qui est presque simple, *i.e.* un groupe qui n'a pas de sous-groupe normal définissable infini.

Une autre généralisation, plus intéressante, est la variante suivante :

Théorème 5.49 *Soit $\mathfrak{Z}$ une géométrie de Zariski. Si G est une $\mathfrak{Z}$-variété de groupe non nilpotent, connexe, riche, telle que G^2 soit lisse et telle que la dimension soit semi–continue par rapport aux projections $G \times Z^n \to Z^n$, alors G (et donc $\mathfrak{Z}$) interprète un corps algébriquement clos.*

Ou encore, la semi–continuité de la dimension peut être remplacée par les conditions plus fortes que $\mathfrak{Z}$ soit lisse et riche.

■ La démonstration est essentiellement la même. Il existe un sous-groupe définissable G' et un sous-groupe définissable normal N de G' tels que G'/N soit simple. Alors G'/N est encore une $\mathfrak{Z}$-variété de groupe, connexe, non nilpotent, et telle que $(G'/N)^2$ soit lisse.

Il suffit de vérifier que la semi–continuité est respectée. Elle l'est évidemment pour G' qui est fermé dans G ; mais pour le quotient c'est évident aussi à cause de l'additivité de la dimension par rapport à la surjection canonique $p_n : G' \twoheadrightarrow G'/N$: si F est un fermé de $(G'/N) \times Z^n$ et $\widetilde{F} = (p_N \times \mathrm{id}_{Z^n})^{-1}[F]$, alors $\pi'[F, \geqslant k] = \pi[\widetilde{F}, \geqslant K + \dim N]$ est fermé

$$\begin{tikzcd}
G' \times Z^n \arrow[rr, "p_N \times \mathrm{id}_{Z^n}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (G'/N) \times Z^n \arrow[dl, "\pi'"] \\
& Z^n &
\end{tikzcd}$$

dans $\pi'[F] = \pi[\widetilde{F}]$.

Le suite de la preuve du théorème 5.48 reste inchangée. ■

PERSPECTIVES

Ce résultat est un premier pas vers une preuve de la conjecture de Cherlin pour les groupes de Zariski :

Conjecture : Tout groupe de Zariski simple G est définissablement isomorphe à un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos interprétable dans G.

Pour démontrer cette conjecture, il reste donc deux problèmes à résoudre :

- Éliminer la lissité. Deux possibilités sont envisageables :

  - Montrer qu'un groupe de Zariski est toujours lisse. Ceci est vrai pour les groupes algébriques, donc aussi pour les groupes de Zariski (simples) si la conjecture de Cherlin est vraie !

  - Donner une preuve du théorème 5.48 qui n'utilise pas la lissité. Elle intervient de façon essentielle à deux endroits : d'une part pour montrer la semi–continuité (qui permet de montrer que $\mathbb{P}(H)$ est complète), et d'autre part pour montrer que α est un isomorphisme.

- Montrer que le groupe est algébrique sur le corps qu'il interprète.

  Par des résultats de Hrushovski, un groupe $\aleph_0$-stable de rang de Morley fini et simple est interprétable dans tout corps infini qu'il interprète, à condition que celui-ci soit muni de toute la structure qui provient du groupe. Il suffirait donc de montrer que le corps interprété est un pur corps.

On peut aller plus loin et espérer s'approcher d'une preuve de la conjecture de Cherlin générale. Comme Poizat l'a remarqué ([P2] p. 144), un groupe interprétable dans un corps algébriquement clos peut être canoniquement muni d'une structure de groupe de Zariski.

Question: Est-ce qu'un groupe $\aleph_0$-stable de rang de Morley fini (simple, mauvais) peut être muni d'une structure de groupe de Zariski (canonique) ?

Appendice

Notations

Notations « standard »

$\mathfrak{M}$, M	une structure et son ensemble de base
$=$, $\boldsymbol{=}$	égalité, égalité entre formules
$:=$, $:\Leftrightarrow$	par définition égal (équivalent) à
$\subseteq$, $\subset$	inclusion et inclusion stricte
$\preccurlyeq$, $\prec$	sous-structure élémentaire (propre)
$\trianglelefteq$, $\triangleleft$	sous-groupe normal (propre)
$\dot{\cup}$, $\bigcup\!\!\!\cdot\;$	réunion disjointe
$\lvert E\rvert$	la cardinalité de E
$\bar{a}$	un uple de longueur fini
$X^{<\omega}$	l'ensemble des suites finies dans X
$\Delta(X)$, $\Delta^n(X)$	la diagonale dans $X \times X$ resp. dans X^n
$\Delta^n_{i_1,\ldots,i_k}(X)$	l'ensemble $\{(x_1,\ldots,x_n) \in X^n \mid x_{i_1} = \cdots = x_{i_k}\}$
$\overline{X}$	l'adhérence de X
$\pi_A : A \times B \to A$	la projection sur A
$\pi^\perp$	la projection orthogonale à π (p.ex. $\pi_A^\perp = \pi_B$ ci-dessus)
τ	la permutation $(x,y) \mapsto (y,x)$
$\mathfrak{S}_A$	le groupe des permutations de A
e	l'élément neutre d'un groupe
$\mathbb{C}_Y(X)$	le centralisateur de X dans Y
$\mathbb{N}_Y(X)$	le normalisateur de X dans Y
$\mathbb{Z}(X)$	le centre de X
H°	la composante connexe d'un groupe $\aleph_0$-stable
$<A>$	le sous-groupe engendré par A
$\mathfrak{tp}(\bar{a}/A)$	le type de $\bar{a}$ au-dessus de A
A-définissable	définissable à paramètres dans A
A-formule	une formule avec paramètres dans A
$\mathfrak{Ens}$	la catégorie des ensembles

NOTATIONS INTRODUITES DANS LA THÈSE

$\subset\subset$	p.20	inclusion d'une partie qui n'est pas dense
$\sqcup$, $\bigsqcup$	p.20	décomposition en composantes irréductibles
$\mathcal{H}(X)$	p.21	l'ensemble des hypersurfaces de X
∂X	p.22	le « bord » $\overline{X} \setminus X$
$X(\bar{a})$	p.25	la fibre de X au-dessus de $\bar{a}$
$\mathrm{RC}(X)$	p.30	le rang de Cantor de X
$\pi[X, m]$, $\pi[X, \geqslant m]$	p.34	l'ensemble de fibres de dimension (au moins) m
π-gdim X	p.36	la dimension générique des π-fibres de X
$\pi[X, gen]$, $\pi[X, \neg gen]$	p.36	les points de $\pi[X]$ avec fibre (non) générique
$\tau_n[Y]$	p.46	la topologie sur Y^n
Φ_X	p.46	la formule sans paramètre définissant l'ensemble X
$\varphi[Z]$	p.46	les réalisations de la formule φ dans Z
$\overline{X}^A$	p.53	le plus petit fermé A-définissable contenant X
$\mathfrak{tp}_X$	p.54	le type générique de X
$d_{\mathfrak{M}} X$, $d_{\mathfrak{M}} \xi$	p.55	la M-formule définissant $X \cap M^{<\omega}$ (resp. $\xi[M]$)
p_E	p.66	la surjection canonique sur le quotient par E
XE	p.66	E-saturation d'un ensemble X
$\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}\restriction_W$	p.66	sous-prévariété
$\mathfrak{V}/E$	p.66	prévariété quotient
$\mathfrak{Z}$-$\mathfrak{Pvt}$, $\mathfrak{Pvt}$	p.69	la catégorie des prévariétés
$\mathfrak{Adm}$	p.71	la catégorie des prévariétés admissibles
$\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$	p.71	le produit de prévariétés admissibles
$\overline{X}^E$	p.82	le plus petit fermé E-saturé qui contient X
E-gdim Q	p.85	la dimension générique des E-classes rencontrées par Q
φ-gdim Q	p.92	la dimension générique des fibres d'un morphisme φ
$\mathfrak{Im}(\varphi)$, $\ker \varphi$	p.93	la variété d'image resp. le « noyau » d'un morphisme φ
$\mathfrak{V}^*$, $d_{\mathfrak{Z}} \mathfrak{X}$	p.101	l'extension et la restriction d'une variété
$\mathfrak{Z}^{\mathsf{tr}}$	p.106	la géométrie de Zariski triviale sur Z
$<\mathcal{E}>$	p.117	les fermés engendrés à partir de $\mathcal{E}$
p_H	p.129	la surjection canonique $G \to G/H$
G^{h}	p.137	l'intersection de toutes les hypersurfaces contenant e
G^{c}	p.140	la composante complète d'un groupe G
G^{a}	p.145	la composante affine d'un groupe G
$H^\bullet$	p.147	la réunion des intersections $H^h \cap H^g$ $(h \neq g)$
$\mathbb{P}(H)$	p.147	la prévariété dont les éléments sont les H^g

Bibliographie

[A] E. Artin, *Geometric Algebra*, Interscience Publishers, New York 1957.

[Ba] J. Baldwin, *Fundamentals of Stability Theorie*, Springer, Berlin 1988.

[Bau] A. Baudisch, A new uncountably categorical group, Preprint, 1995.

[BN] A. Borovik, A. Nesin, *Groups of Finite Morley Rank*, Clarendon Press, Oxford 1994.

[Bbk] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématiques*, Livre 7 « Algèbre Commutatif », Hermann, Paris 1961.

[CC] H. Cartan, C. Chevalley, *Géométrie algébrique*, Séminaire Cartan–Chevalley, Paris 1955/56.

[Ch1] G. Cherlin, Groups of Small Morley Rank, Annals of Mathematical Logic, **17** (1979) pp. 1–28.

[Ch2] G. Cherlin, Totally Categorical Structures, Proceedings ICM, Warszawa 1983, pp. 301–306.

[CK] C. Chang, J. Keisler, *Model Theory*, North Holland, Amsterdam 1973, 3^e 1990.

[GR] H.B. Gute, K.K. Reuter, The last word on elimination of quantifiers in modules, JSL **55** No. 2 (1990) pp. 670–673.

[Ha] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, New York 1977.

[Ho] W. Hodges, *Model Theory*, Cambridge University Press, Cambridge 1993.

[Hr1] E. Hrushovski, Strongly Minimal Expansions of Algebraically Closed Fields, Isr. Jour. Math. **79** (1992) pp. 129–151.

[Hr2] E. Hrushovski, A New Strongly Minimal Set, Annals of Pure and Applied Logic **62** (1993) pp. 147–166.

[Hr3] E. Hrushovski, The Mordell-Lang Conjecture for Function Fields, Preprint, 1993.

[HZ1] E. Hrushovski, B. Zil'ber, Zariski Geometries, Journal AMS **9** No. 1 (1996) pp. 1–56.

[HZ2] E. Hrushovski, B. Zil'ber, Zariski Geometries, Bull.AMS **28** No. 2 (1993) pp. 315–323.

[Hu] J. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Springer, New York, 1981.

[Ls1] D. Lascar, Les groupes ω-stables de rang fini, TAMS **292** No. 2 (1985), pp. 451–462.

[Ls2] D. Lascar, *Stabilité en Théorie des Modèles*, Cabay, Louvain-la-Neuve 1986.

[M1] A. Macintyre, On ω_1-categorical theories of abelian groups, Fund. Math. **70** (1971), pp. 253–270.

[M2] A. Macintyre, On ω_1-categorical theories of fields, Fund. Math. **71** (1971), pp. 1–25.

[Mo] M. Morley, Categoricity in power, TAMS **114** (1965), pp. 514–538.

[PS] A. Pillay, G. Srour, Closed sets and chain conditions in stable theories, JSL **49** No. 4 (1984) pp. 1350-1362.

[P1] B. Poizat, *Cours de Théorie de modèles*, Nur al-Mantiq wal Ma'rifah, Lyon 1985.

[P2] B. Poizat, *Groupes stables*, Nur al-Mantiq wal Ma'rifah, Lyon 1987.

[P3] B. Poizat, À propos de groupes stables, Logic Colloquium '85, North–Holland, Amsterdam 1987.

[P4] B. Poizat, Missionary Mathematics, JSL **53** No. 1 (1988), pp. 132–145.

[P5] B. Poizat, MM. Borel, Tits, Zil'ber et le Général Nonsense, JSL **53** No. 1 (1988), pp. 124–131.

[Pr] M. Prest, *Model Theory and Modules*, Cambridge University Press, Cambridge 1988.

[R] J. Reineke, Minimale Gruppen, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, **21** (1975), pp. 357-359.

[R] M. Rosenlicht, Some basic theorems on algebraic groups, Amer.Jour.Math. **78** (1956) pp. 401–443.

[Sha] I. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*, 2nd ed., Springer, Berlin 1974, 2nd edition 1994.

[She] S. Shelah, *Classification Theory*, North Holland, Amsterdam 1978, 2nd edition 1990.

[Spr] T. Springer, *Linear Algebraic Groups*, Birkhäuser, Basel 1981.

[Z1] B. Zil'ber, The Structure of Models of Uncountably Categorical Theories, Proceedings ICM, Warszawa 1983, pp. 359-368.

[Z2] B. Zil'ber, Groupes et anneaux dont la théorie est catégorique, Fund.Math. **95**, pp. 173–188, Colloquium Math. **48** (1984) pp. 173–180.

[Z3] B. Zil'ber, Some Model Theory of Simple Algebraic Groups over Algebraically Closed Fields, Colloquium Math. **48** (1984) pp. 173–180.

[Z4] B. Zil'ber, Talks on Zariski–type Structures, Preprint, 1992.

[Z5] B. Zil'ber, Quasi–Riemann Surfaces, Preprint 1994.

Index des définitions

action d'un groupe, 131
additive
relation d'équivalence —, 87
prévariété quotient —, 87
dimension —, 38
projection —, 38
admissible, 71
affine (groupe), 145
application
— constructible, 22
— de compatibilité, 23
— définissable, 22
— diagonale, 24
— fermée, 22
— ouverte, 22

Borel (groupe de —), 142

Cantor
degré de —, 30
rang de —, 30
caténaire, 32
centralisateur, 127
centre, 127
codimension, 21
compatible, 23
complète
géométrie de Zariski —, 94
prévariété —, 94
composante irréductible, 20
condition de chaîne descendante bornée, 49
conforme, 33
constructible
application —, 22
ensemble —, 22
construction d'une prévariété, 67
continue (interprétation —), 116

définissabilité
— de la dimension, 34
— uniforme de la dimension, 60
degré
— de Cantor, 30
— de constructibilité, 22
dimension, 21
— additive, 38
— définissable, 34
— générique des fibres, 36
— pure, 21
— purement semi–continue, 100
— semi–additive, 37
— semi–continue, 36
— uniformément définissable, 60
formule des —s, 97
drapeau, 21

élémentaire
géométrie de Zariski $\mathcal{L}$ - —, 49
géométrie de Zariski —, 50
élimination des quanteurs, 27

ensemble
- — constructible, 22
- — imaginaire, 66
- — noethérien, 117

extension
- — d'un morphisme, 104
- — d'une prévariété, 101

fermé
- — absolument irréductible, 45
- — de base, 46
- — premier, 45
- — trivial, 44, 106
- application —e, 22
- formule —e, 43

fibre, 25
formule des dimensions, 97
formule fermée, 43

générique, 20
- dimension — des fibres, 36
- type —, 54

géométrie de Zariski, 61
- — $\mathcal{L}$-élémentaire, 49
- — élémentaire, 50
- — complète, 94
- — lisse, 97
- — naturelle, 46
- — triviale, 106
- langage de —, 43
- produit de —, 114

groupe
- — de Zariski, 123
- — presque simple, 137
- variété de —, 123
- action de —, 131
- mauvais —, 151
- morphisme de —, 123
- sous- — affine, 145
- sous- — de Borel, 142
- sous- — parabolique, 142

hypersurface, 21

image d'un morphisme, 93
imaginaire (ensemble —), 66
interprétation
- — continue, 116
- — pleine, 116

irréductible, 20
- composante —, 20
- fermé absolument —, 45

langage de géométrie de Zariski, 43
lisse
- géométrie de Zariski —, 97
- prévariété —, 97

mauvais groupe, 151
morphisme, 68
- — de groupe, 123
- extension d'un —, 104
- image d'un —, 93
- noyau d'un —, 93
- restriction d'un —, 104

naturelle (géométrie de Zariski —), 46
noethérien
- ensemble —, 117
- topologie —ne, 19

normalisateur, 127
noyau d'un morphisme, 93

parabolique (sous-groupe —), 142
pleine
- prévariété —, 81

interprétation —, 116
prégéométrie de Zariski, 27
— caténaire, 32
— conforme, 33
— de dimension finie, 27
— riche, 33
théorie de —, 50
premier (fermé —), 45
presque simple (groupe), 137
prévariété, 66
— complète, 94
— lisse, 97
— pleine, 81
— quotient, 66
— séparée, 78
extension d'une —, 101
morphisme de —s, 68
produit de —s, 71
restriction d'une —, 102
sous- —, 66
produit
— de géométries de Zariski, 114
— de prévariétés, 71
— de variétés, 90
pure
dimension —, 21
semi–continuité —, 100

rang de Cantor, 30
relation d'équivalence
— additive, 87
— admissible, 71
restriction
— d'un morphisme, 104
— d'une prévariété, 102
rich, 33

variété —e, 100

E -saturé, 66
semi–additif, 37
semi–continu, 36
purement —, 100
séparée
prégéométrie de Zariski —, 27
prévariété —, 78
sous-prévariété, 66

théorie de prégéométries de Zariski, 50
topologie
A - —, 53
E - —, 82
— noethérienne, 19
dimension topologique, 21
famille de —s, 23
famille de —s compatibles, 23
trivial
géométrie de Zariski —e, 106
fermé —, 44, 106
type générique, 54

variété, 88
— de groupe, 123
— image, 93
— riche, 100
produits de —s, 90

Zariski
— groupe de —, 123
géométrie de —, 61
prégéométrie de —, 27