Notizen zum Vorkurs Mathematik

Markus Junker (Mathematisches Institut, Universität Freiburg)

Wintersemester 2022/23 – Version von 2. Dezember 2022

Ziel des Mathemtik-Vorkurses für Studierende der Mathematik ist es nicht, den Schulstoff zu wiederholen oder alle Studienanfänger:innen auf ein einheitliches „rechenfertiges“ Niveau zu bringen [1], sondern erste Einblicke zu geben in die Art und Weise, wie Mathematik im Mathematikstudium an der Hochschule betrieben wird.

Mathematik ist eine Einheit: Auch wenn es verschiedene Teilgebiete der Mathematik gibt mit verschiedenen Zielrichtungen und Techniken, gibt es doch *eine* Mathematik. Daher ist es etwas unglücklich, von „Hochschulmathematik“ im Gegensatz zur „Schulmathematik“ zu sprechen: Es sind nicht verschiedene Arten von Mathematik, sondern verschiedene Arten, Mathematik zu betreiben und über sie zu sprechen. Im Mathematik-Studium werden – in der Regel im Gegensatz zur Schule –

1. die betrachteten mathematischen Objekte präzise definiert,
2. über diese mathematischen Objekte präzise Aussagen gemacht,
3. und diese Aussagen nach Möglichkeit mathematisch exakt bewiesen oder widerlegt.

Mathematik entsteht aber nicht aus dem Nichts, sondern braucht für diese drei Ziele Grundlagen. Ich werde in diesem Vorkurs versuchen an Beispielen deutlich zu machen, worin die Grundlagen liegen können, auf denen die Mathematik aufbaut, und wie mathematischen Objekte, mathematische Aussagen und Beweise aussehen können.

1. Grundlegende Objekte: die natürlichen Zahlen

Man geht zunächst davon aus, dass es gewisse grundlegende Objekte gibt, die durch intuitiv gültige Eigenschaften charakterisiert sind. Das sind vor allem die *natürlichen Zahlen*

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Manche Menschen, auch einige Mathematiker:innen, sehen 0 nicht als natürliche Zahl an und haben Argumente dafür. Es ist aber keine mathematische Frage und allgemeiner keine Frage, die man als richtig oder falsch entscheiden könnte, sondern eine Frage der Konvention bzw. eine kulturelle Frage. [2]

[1] Dafür sind der Mathematik-Vorkurs für Studierende der Naturwissenschaften bzw. der Mathematik-Vorkurs für Studierende der Physik geeignet.

[2] Im antiken Griechenland galt auch „Eins“ nicht als eine Zahl, weil das eigentliche Zählen erst bei Zwei beginnt.

⌈ *Zahlen nutzt man zum Zählen, Messen, Vergleichen, Rechnen ... Dafür braucht man teilweise verschiedene Zahlen. Für das Zählen nutzt man die natürlichen Zahlen, wobei man zwei Arten des Zählens unterscheiden muss:*
Die eine Art bestimmt die Anzahl, antwortet also auf Fragen „Wieviele ... ?“ Mögliche Antworten sind die natürlichen Zahlen einschließlich der Null, etwa als Antwort auf die Frage „Wieviele Monde hat die Venus?“ Natürliche Zahlen nennt man unter diese Gesichtspunkt auch Kardinalzahlen*.*
Die andere Art des Zählens ist das Abzählen, also Dinge in eine Reihenfolge zu bringen (was auch der Zusammenhang mit dem „Erzählen“ ist). Für diesen Zweck nutzt man sprachlich die Ordinalzahlen *„erstens, zweitens, drittens, ... “. Hier hat die Null eigentlich nichts verloren, auch wenn beim Rückwärtszählen so etwas wie die „nullte Stunde“ oder das „nullte Stockwerk“ herauskommen kann.*
Im mathematischen Gebrauch wird allerdings auch beim Aufzählen häufig bei Null begonnen; man schreibt z. B. gerne $a_0, \dots, a_n$ für eine Liste von Objekten. Das ist teils Gewohnheit, teils praktischer. Außerhalb mathematischer Formeln sollte man aber weiterhin bei eins anfangen zu zählen. ⌋

Die Gesamtheit aller natürlichen Zahlen, mathematisch auch *die Menge der natürlichen Zahlen* genannt, wird mit

$$\mathbb{N}$$

bezeichnet. Die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null, also die positiven natürlichen Zahlen, bezeichnet man dann mit $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ oder $\mathbb{N}^{>0}$, $\mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $\mathbb{N}^{+}$ bzw. $\mathbb{N}_{>0}$, $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$, $\mathbb{N}_{+}$ oder $\mathbb{N}^{*}$.

Achtung: Mathematiker:innen, die 0 nicht als natürliche Zahl ansehen, schreiben $\mathbb{N}$ für die positiven natürlichen Zahlen und $\mathbb{N}_0$ für die natürlichen Zahlen mit 0. Das war früher üblich und hält sich als eine von zwei gleichberechtigten mathematischen Traditionen. (Auch dies ist keine Frage von richtig oder falsch, sondern der Konvention und der Tradition.) Wenn man also Vorlesungen hört und in Skripte oder Bücher schaut, muss man im Zweifelsfall nachlesen oder nachfragen, welche Konvention benutzt wird, falls es nicht aus dem Gebrauch heraus klar wird.

⌈ *Alternativ wird die Menge der natürlichen Zahlen mit einem fettgedruckten* $\mathbf{N}$ *bezeichnet. Weil man mit Kreide an der Tafel nur mit Mühe fettgedruckte Buchstaben schreiben kann, hat man das stilisierte* $\mathbb{N}$ *mit dem Doppelstrich stattdessen verwendet, und dieses hat sich dann verselbständigt hat.* ⌋

Addition und Multiplikation

Auf den natürlichen Zahlen gibt es zwei grundlegende Operationen: Die mit $+$ bezeichnete *Addition* und die mit $\cdot$ bezeichnete *Multiplikation*.

Jede dieser Operationen macht aus zwei gegebenen natürlichen Zahlen eine (nicht notwendigerweise andere) natürliche Zahl. Beispielsweise macht die Addition aus 2 und 3 die Zahl 5. Das schreibt man dann bekanntermaßen $2 + 3 = 5$.

Die beiden Eingaben oder *Argumente* 2 und 3 kann man zu einem *geordneten Paar* zusammenfassen, das man $(2, 3)$ schreibt. Jedes geordnete Paar (a, b) – man sagt meistens kurz „Paar“[3] – hat also zwei Einträge: den ersten Eintrag a und den zweiten Eintrag b. Jede Möglichkeit, einen ersten Eintrag a und einen (möglicherweise gleichen) zweiten Eintrag b zu wählen, gibt ein eigenes Paar (a, b). Zwei Paare (a, b) und (c, d) sind dann und nur dann gleich, wenn a und b für die gleiche Zahl stehen und c und d für die gleiche Zahl stehen. Insbesondere ist also $(2, 3) \neq (3, 2)$ – deshalb *geordnetes Paar*, weil die Reihenfolge eine Rolle spielt. Die Menge der

[3] Es gibt auch die *ungeordneten Paare* $\{a, b\}$ für $a \neq b$, die aber sehr viel seltener vorkommen.

(geordneten) Paare natürlicher Zahlen bezeichnet man mit

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad \text{oder} \quad \mathbb{N}^2$$

Man sieht im vorhergehenden Abschnitt einen wesentlichen Punkt der mathematischen Formelsprache, nämlich den Gebrauch von Variablen: a, b, c, d stehen hier für nicht näher festgelegte natürliche Zahlen. Für welche Art von Objekten Variable stehen, muss entweder explizit angegeben werden oder sich aus dem Kontext ergeben. Welche Buchstaben oder Zeichen man benutzt, ist Geschmackssache und nicht allgemein festgelegt. Oft gibt es dafür aber in einer Vorlesung oder einem Buch Konventionen, z. B. dass eine bestimmt Art von Buchstaben immer für eine gewisse Art von Objekt steht, also zum Beispiel n, m immer für natürliche Zahlen.

Wichtig beim Gebrauch von Variablen ist, dass verschiedene Buchstaben für Objekte stehen, die nicht unbedingt verschieden sein müssen. In einem Paar (a, b) können also a und b für die gleiche Zahl stehen. Dafür schreibt man $a = b$, was also bedeutet, dass die Variablen a und b im aktuellen Kontext für das gleiche Objekt stehen (und nicht, dass die Variablen a und b gleich wären, also nicht, wie gerne verkürzt gesagt wird, dass das, was links des Gleichheitszeichens steht, dem gleich ist, was rechts des Gleichheitszeichens steht).

Dass die Addition (und analog die Multiplikation) je zwei natürlichen Zahlen eine natürliche Zahl zuordnet, drückt man mathematisch auch so aus: „Die Addition ist eine *zweistellige Funktion* von den natürlichen Zahlen in die natürlichen Zahlen“; kurz: „eine zweistellige Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$“. Man schreibt dafür:

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{oder} \quad + : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$$

Statt *Funktion* sagt man auch *Abbildung*.

Für Addition und Multiplikation nimmt man nun an, dass die bekannten Rechenregeln gelten, also dass für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:

$(a + b) + c = a + (b + c)$	*die Addition ist assoziativ*
$a + b = b + a$	*die Addition ist kommutativ*
$a + 0 = a$	0 *ist neutrales Element der Addition*
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	*die Multiplikation ist assoziativ*
$a \cdot b = b \cdot a$	*die Multiplikation ist kommutativ*
$a \cdot 0 = 0$	0 *ist absorbierendes Element der Multiplikation* [4]
$a \cdot 1 = a$	1 *ist neutrales Element der Multiplikation*
$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$	*die Multiplikation ist distributiv über der Addition*

Weitere wichtige Rechenregeln sind (wieder für alle natürlichen Zahlen a, b, c):

Wenn $a + c = b + c$, dann ist $a = b$.	*Kürzungsregel der Addition*
Wenn $a \cdot c = b \cdot c$ und $c \neq 0$, dann ist $a = b$.	*Kürzungsregel der Multiplikation*
Wenn $a \cdot b = 0$, dann ist $a = 0$ oder $b = 0$.	*Nullteilerfreiheit*

Anordnung

Neben den Operationen $+$ und $\cdot$ gibt es auf den natürlichen Zahlen eine weitere grundlegende Struktur, nämlich die Anordnung von kleinen zu immer größeren Zahlen. Von den vier üblichen

[4] Dieser Begriff ist nicht so wichtig.

Möglichkeiten diese Größenverhältnisse auszudrücken ($<$, $\leqslant$, $>$ und $\geqslant$) betrachten wir hier $\leqslant$. Dies ist zunächst eine *zweistellige* (oder *binäre*) *Relation*. Das bedeutet, dass $\leqslant$ eine Eigenschaft von Paaren natürlicher Zahlen beschreibt: Für jedes Paar (a, b) natürlicher Zahlen trifft die $\leqslant$-Relation entweder zu – dann schreibt man $a \leqslant b$ – oder sie trifft nicht zu – dann schreibt man $a \nleqslant b$.

Dann beschreibt $\leqslant$ eine Anordnung der natürlichen Zahlen. Das nennt man eine *Ordnungsrelation* (auf $\mathbb{N}$). Dies bedeutet, dass für alle natürlichen Zahlen a, b, c die folgenden Eigenschaften gelten:

$a \leqslant a$	*Reflexivität*
Wenn $a \leqslant b$ und $b \leqslant a$, dann $a = b$.	*Antisymmetrie*
Wenn $a \leqslant b$ und $b \leqslant c$, dann $a \leqslant c$.	*Transitivität*
$a \leqslant b$ oder $b \leqslant a$	*Totalität*

⌈ *$\geqslant$ ist ebenso wie $\leqslant$ eine Ordnungsrelation. Die Relationen $<$ und $>$ sind dagegen keine Ordnungsrelationen, schon weil die Reflexivität nicht gilt. Sie nennt man* strikte Ordnungsrelationen*, die durch die Transitivität charakterisiert sind sowie durch die Eigenschaft, dass für alle a und b entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$ gilt.* ⌋

Es gibt viele mögliche Ordnungrelationen auf den natürlichen Zahlen, aber die „normale Anordnung“ hat noch einige besondere Eigenschaften, die sie mit Addition und Multiplikation verbindet. Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt nämlich:

$0 \leqslant a$	0 *ist kleinstes Element*
Wenn $a \leqslant b$ und $a \neq b$, dann $a + 1 \leqslant b$.	*a hat $a + 1$ als Nachfolger*
Wenn $a \leqslant b$, dann $a + c \leqslant b + c$, und umgekehrt.	*Verträglichkeit mit Addition*
Wenn $a \leqslant b$, dann $a \cdot c \leqslant b \cdot c$, und für $c \neq 0$ auch umgekehrt.	*Verträglichkeit mit Multipl.*

Induktionsprinzip

Schließlich soll für die natürlichen Zahlen noch das ganz entscheidende *Induktionsprinzip* gelten:

> Wenn eine Eigenschaft E auf die Zahl 0 zutrifft, und wenn für E außerdem gilt, dass sie jedesmal, wenn sie auf eine natürliche Zahl n zutrifft, auch auf deren Nachfolger $n + 1$ zutrifft, dann trifft E auf alle natürlichen Zahlen zu.

Intuitiv bedeutet dieses Prinzip, dass man jede natürliche Zahl von 0 ausgehend sukzessiv durch Nachfolgerschritte erreicht.

Mit dem Induktionsprinzip lassen sich schön gewisse Rechenregeln zeigen wie zum Beispiel der sogenannte „kleine Gauß“:

$$\text{Für jede natürliche Zahl } n \text{ gilt } 0 + 1 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1).$$

Dazu muss man zunächst die Schreibweise $0 + 1 + \cdots + n$ oder alternativ $0 + \cdots + n$ verstehen. Für eine größere Zahl, etwa $n = 7$, ist ziemlich klar, was gemeint ist, nämlich

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

In den Extremfällen stehen die Pünktchen aber für nichts mehr und es müssen sogar Zeichen entfallen:

$$\begin{aligned}
&\text{Falls } n = 2, \text{ steht } 0 + 1 + \cdots + n \text{ für } 0 + 1 + 2.\\
&\text{Falls } n = 1, \text{ steht } 0 + 1 + \cdots + n \text{ für } 0 + 1.\\
&\text{Falls } n = 0, \text{ steht } 0 + 1 + \cdots + n \text{ für } 0.
\end{aligned}$$

Eine kompakte und weniger mißverständliche Darstellung bekommt man mit dem Summenzeichen $\sum$. Man schreibt dann anstelle von $0 + \cdots + n$ kurz

$$\sum_{i=0}^{n} i$$

Hierbei ist i eine sogenannte Laufvariable, die alle natürlichen Zahlen von der unter dem Summemzeichen angegebenen Zahl bis zu dem über dem Summenzeichen angegebenen Zahl durchläuft, und alle diese Zahlen werden aufsummiert.

Nun zum Beweis des „kleinen Gauß“ per Induktion. Die Eigenschaft E ist hier nun also die Gültigkeit der Formel.

> Für $n = 0$ steht links 0 und rechts $\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (0 + 1) = 0$; der *Induktionsanfang* stimmt also.
> Nun machen wir die *Induktionsannahme*, nehmen also an, dass die Formel für eine natürliche Zahl n gilt. Dann berechnen wir mit Hilfe der Induktionsannahme:
>
> $$\begin{aligned}
0 + 1 + \cdots + n + (n + 1) &= \frac{1}{2}n(n + 1) + (n + 1)\\
&= (\frac{1}{2}n + 1)(n + 1)\\
&= \frac{1}{2}(n + 2)(n + 1) = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)
\end{aligned}$$
>
> Dies ist die Formel für den Nachfolger $n+1$, d. h der *Induktionsschritt* ist gelungen.
> Mit dem Induktionsprinzip gilt die Formel somit für alle natürlichen Zahlen.

Ein weiteres Beispiel: Mit dem Induktionsprinzip kann man zeigen, dass es für jede natürliche Zahl n eine natürliche Zahl b gibt, so dass n von der Form $b + b$ oder von der Form $b + b + 1$ ist (die Eigenschaft E ist hier also „*von der Form $b + b$ oder von der Form $b + b + 1$ für eine natürliche Zahl b zu sein*“):

> Induktionsanfang: E trifft offenbar auf 0 zu, da $0 = 0 + 0$.
> Induktionsannahme: Es sei $n = b + b$ oder $n = b + b + 1$ für eine natürliche Zahl b.
> Induktionsschritt: Im ersten Fall gilt $n + 1 = b + b + 1$ und Eigenschaft E trifft auf $n + 1$ zu. Im zweiten Fall gilt $n + 1 = b + b + 1 + 1 = (b + 1) + (b + 1)$. Mit b ist auch $b + 1$ eine natürliche Zahl, für die wir c schreiben. Also ist $n + 1 = c + c$ für eine natürliche Zahl c und somit gilt Eigenschaft E auch für $n + 1$.
> Also gilt Eigenschaft E „nach Induktion“ für alle natürlichen Zahlen.

Man sieht an diesem Beweis einen weiteren Aspekt des Gebrauchs von Variablen: Welcher Name für die Variable benutzt wird, ist gleichgültig, es sei denn, dieser Name ist im Kontext für etwas anderes verwendet. Ob die Eigenschaft E nun als

„*von der Form $b + b$ oder von der Form $b + b + 1$ für eine natürliche Zahl b zu sein*“,

„*von der Form* $x+x$ *oder von der Form* $x+x+1$ *für eine natürliche Zahl* x *zu sein*“,
„*von der Form* $\Sigma+\Sigma$ *oder von der Form* $\Sigma+\Sigma+1$ *für eine natürliche Zahl* Σ *zu sein*“
oder
„*von der Form* $\square+\square$ *oder von der Form* $\square+\square+1$ *für eine natürliche Zahl* $\square$ *zu sein*“

formuliert wird, ist gleichgültig. In der Induktionsannahme oben wird dann aber b als Bezeichnung für eine besondere Zahl gewählt, nämlich als diejenige, die die Eigenschaft E für die in diesem Zusammenhang fest gewählte Zahl n erfüllt. Damit ist sie nicht mehr unbedingt „frei“ dafür, die Eigenschaft E für $n+1$ auszudrücken, und man muss den Variablennamen wechseln. Das ist am Anfang für viele Studierende verwirrend. Es kann einfacher sein, ganz am Anfang einen anderen Namen zu wählen und b durch zum Beispiel d zu ersetzen. Dann könnte man formulieren:

> Induktionsannahme: Es sei $n=d+d$ oder $n=d+d+1$ für eine natürliche Zahl d.
> Induktionsschritt: Im ersten Fall gilt $n+1=d+d+1$ und Eigenschaft E trifft auf $n+1$ zu mit $b=d$. Im zweiten Fall gilt $n+1=d+d+1+1=(d+1)+(d+1)$. Mit d ist auch $d+1$ eine natürliche Zahl. Also trifft Eigenschaft E auf $n+1$ zu mit $b=d+1$ zu.

Mit etwas Erfahrung wird man diese Umbenennungen nicht mehr vornehmen müssen, sondern einfach gedanklich $b+1$ durch b ersetzen.

Es gibt viele Variationen des Induktionsprinzips, die man alle auf das ursprüngliche zurückführen kann. Hier sind einige:

> (1) Wenn eine Eigenschaft E auf die Zahl a zutrifft, und wenn für E außerdem gilt, dass sie jedesmal, wenn sie auf eine natürliche Zahl $n \geqslant a$ zutrifft, auch auf deren Nachfolger $n+1$ zutrifft, dann trifft E auf alle natürlichen Zahlen größer gleich a zu.

> (2) Wenn eine Eigenschaft E auf die Zahlen $0, 1, \ldots, a$ zutrifft, und wenn für E außerdem gilt, dass sie jedesmal, wenn sie auf eine natürliche Zahl $n \geqslant a$ zutrifft, auch auf deren Nachfolger $n+1$ zutrifft, dann trifft E auf alle natürlichen Zahlen zu.

> (3) Wenn eine Eigenschaft E auf die Zahl 0 zutrifft, und wenn für E außerdem gilt, dass sie jedesmal, wenn sie auf alle natürlichen Zahlen kleiner gleich n zutrifft, auch auf $n+1$ zutrifft, dann trifft E auf alle natürlichen Zahlen zu.

Besonders kompakt ist folgende Variante:

> (4) Wenn für eine Eigenschaft E gilt, dass sie jedesmal, wenn sie auf alle natürlichen Zahlen kleiner n zutrifft, auch auf n zutrifft, dann trifft E auf alle natürlichen Zahlen zu.

Weil es keine natürlichen Zahlen kleiner 0 gibt und damit jede Eigenschaft auf alle natürlichen Zahlen kleiner 0 zutrifft, ist in dieser Variante der Induktionsanfang im Induktionsschritt enthalten!

Hier noch eine Anwendung des Induktionsprinzips in nochmals einer leichten Variation.
Behauptet wird: „Jede natürliche Zahl größer gleich 2 ist durch eine Primzahl teilbar.“

> Dies gilt offenbar für 0 und 1, weil beide nicht größer gleich 2 sind, und auch für 2, weil 2 durch sich selbst teilbar und eine Primzahl ist. Angenommen es ist $n \geqslant 2$ und die Behauptung gilt für alle $b \leqslant n$: Nun ist entweder n eine Primzahl (und natürlich durch sich selbst teilbar). Oder es gibt eine natürliche Zahl b mit $2 \leqslant b < n$, durch die n teilbar ist: Dann ist b nach Induktionsannahme durch eine Primzahl p teilbar, die dann auch n teilt.

Das wirkt auf den ersten Blick (und meistens noch ein paar weitere Blicke) ziemlich kompliziert. Normalerweise würde man so argumentieren: Wir nehmen eine beliebige natürliche Zahl a. Entweder a ist selbst eine Primzahl, dann sind wir fertig, oder a wird durch eine kleinere Zahl $b \geqslant 2$ geteilt. Nun ist entweder b selbst eine Primzahl, dann sind wir wieder fertig, oder b wird durch eine kleinere Zahl $c \geqslant 2$ geteilt. Nun ist entweder $c \ldots$
Das muss irgendwann aufhören, weil die Zahlen ja immer kleiner werden, und am Ende kommt man bei einer Primzahl heraus.

Diese Argumentation ist natürlich richtig, birgt aber zwei Probleme: Zum einen ist „irgendwann aufhören“ nicht präzise. Man kann das präzisieren, das ist aber aufwendiger als das Induktionsprinzip zu formulieren. Zum andern kommt stößt man beim Präzisieren darauf, dass man ein anderes Prinzip braucht: „Jede absteigende Folge natürlicher Zahlen ist endlich.“ Das kann man aus dem Induktionsprinzip herleiten, ist aber schwächer. Die zweite Anwendung des Induktionsprinzips könnte man damit zum Beispiel nicht beweisen.

⌈ *Die lange Liste von Eigenschaften, die man für die natürlichen Zahlen fordert, wirkt etwas unbefriedigend. Man kann sich nun daran machen, die Liste zu reduzieren, indem man manche der Eigenschaften aus den anderen herleitet. Außerdem kann man die Multiplikation und die Anordnung aus der Addition herleiten und die Addition auch noch reduzieren, so dass am Ende nicht viel mehr als das Induktionsprinzip übrig bleibt.*

Noch grundlegender kann man die Eigenschaften natürlicher Zahlen aus der Mengenlehre herleiten. Das lernt man in der Mathematischen Logik. ⌋

Mehr Zahlen

Neben den natürlichen Zahlen gibt es noch weitere grundlegende Zahlbereiche, die man aber aus den natürlichen Zahlen konstruieren kann:

natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$	$0, 1, 2, 3, \ldots$
ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$	$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$
rationale Zahlen	$\mathbb{Q}$	$\pm\frac{n}{m}$ für natürliche Zahlen n und $m \neq 0$
reelle Zahlen	$\mathbb{R}$	zum Beispiel π, $\sqrt{2}$ oder $-23{,}4567890123456\ldots$
komplexe Zahlen	$\mathbb{C}$	$r + s\,\mathrm{i}$ für reelle Zahlen r, s mit $\mathrm{i}^2 = -1$

Für die Konstruktion von $\mathbb{Z}$ aus $\mathbb{N}$ siehe Abschnitt 5. Die Konstruktion von $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$ kommt allgemeiner in der Vorlesung „Algebra und Zahlentheorie“ vor.

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ werden in der Vorlesung „Analysis I“ eingeführt, und zwar in der Regel axiomatisch, d. h. es werden (wie oben für $\mathbb{N}$) charakterisierende Eigenschaften angegeben. Für die konkrete Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ gibt es verschiedene Möglkichkeiten (z. B. als Grenzwerte konvergenter rationaler Folgen oder als sogenannte Dedekind'sche Schnitte). Das ist etwas aufwendig und wird normalerweise nicht ausgeführt.

Die Konstruktion von $\mathbb{C}$ aus $\mathbb{R}$ kommt wieder allgemeiner in der Vorlesung „Algebra und Zahlentheorie“ vor. Man braucht die komplexen Zahlen aber schon vorher. Man kann sie definieren als Paare (r, s) reeller Zahlen, die man als Ausdrücke $r + s\,\mathrm{i}$ für ein neues Symbol i (die sogenannte *imaginäre Einheit*) schreibt. Dann setzt man

$$\begin{aligned}(r_1 + s_1\,\mathrm{i}) + (r_2 + s_2\,\mathrm{i}) &= (r_1 + r_2) + (s_1 + s_2)\,\mathrm{i}\\ (r_1 + s_1\,\mathrm{i}) \cdot (r_2 + s_2\,\mathrm{i}) &= (r_1 r_2 - s_1 s_2) + (r_1 s_2 + r_2 s_1)\,\mathrm{i}\end{aligned}$$

Diese Rechenregeln bekommt man, indem man die Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze für Adddition und Multiplikation benutzt und $\mathrm{i}^2 = -1$ setzt. Für $r + 0\,\mathrm{i}$ schreibt man auch r; damit ist jede reelle Zahl auch eine komplexe Zahl. Für $0 + s\,\mathrm{i}$ schreibt man auch $s\,\mathrm{i}$ und für $1\,\mathrm{i}$ noch kürzer i. Dies ist dann eine komplexe Zahl, deren Quadrat -1 ist.

Man kann nun nachrechnen, dass für die komplexen Zahlen alle für die reellen Zahlen bekannten Rechenregeln gelten. (In der Vorlesung „Algebra und Zahlentheorie“ wird man das einfacher bekommen.) Allerdings gibt es keine Anordnung $\leqslant$ mehr, die mit Addition und Multiplikation verträglich wäre.

2. Mathematische Sprache

Mathematische Aussagen

Mathematische Sachverhalte und Hypothesen werden als mathematische Aussagen, also als Aussagesätze mit mathematischem Inhalt, formuliert. Aussagesätze sind – grammatikalisch gesehen zunächst im Gegensatz zu Frage- und Befehlssätzen – Sätze, von denen man sinnvollerweise sagen kann, dass sie wahr (oder richtig) sind oder dass sie falsch sind.

„5 ist eine Primzahl“ ist also eine mathematische Aussage (und zwar eine wahre); „6 ist eine Primzahl“ ist ebenso eine mathematische Aussage (aber eine falsche). „Ist 5 eine Primzahl?“ oder „Multiplizieren 5 mit 6!“ dagegen sind keine Aussagen. Auch Bruchstücke von Sätzen wie „Das Produkt von 5 und 6 ergibt“ sind natürlich keine Aussagen.

Nicht alles, was grammatikalisch die Form eines Aussagesatzes hat, ist aber ein sinnvoller Satz. In der natürlichen Sprache sind die Übergänge fließend. [5] In der Mathematik sollten alle vorkommennden Begriffe eine klare Definition haben. Das ist oft nicht auf Anhieb ersichtlich, weil viele mathematische Begriffe nur den Spezialisten bekannt sind. Dass ein Satz wie „Rechtsadjungierte Funktoren erhalten Limites und sind daher linksexakt“ eine mathematische Aussage macht und nicht erfundener Quatsch ist, kann man erst erkennen, wenn man die entsprechende mathematische Theorie gelernt hat.

Um eine mathematische Aussage zu machen, reicht es aber nicht, dass die vorkommenden Begriffe klare Definitionen haben, sie müssen auch auf eine sinnvolle Weise miteinander verbunden sein. Hier gibt es nun ebenfalls einen fließenden Übergang: Einen Satz wie „Die Menge $\mathbb{N}$ ist kleiner als π“ würde man gemeinhin vermutlich eher als Unsinn oder als sinnlos ansehen, einen Satz „Die Wurzel aus -3 ist kleiner als π“ dagegen vielleicht eher als falsch, weil er näher an einem sinnvollen Satz zu sein scheint als der erste.

In der Vorlesung „Linearen Algebra I“ wird es eine Definition für die folgende Aussage geben:

[5] Wie steht es mit „Die Struktur des Seins von Zuhandenem als Zeug ist durch die Verweisungen bestimmt“ oder „Der Flügelflagel gaustert durchs Wiruwaruwolz“?

Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ erzeugen den Vektorraum V.

Mit dieser Definition ist dann auch klar, was der Satz

Der Vektorraum V wird von den Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ erzeugt.

meint, da er eine rein sprachliche Umformung des ersten Satzes ist. Ob mit dem ersten Satz auch bereits die Bedeutung des Satzes

Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind Erzeuger des Vektorraums V.

festgelegt ist oder ob es für den Begriff „Erzeuger“ doch besser eine eigene Definition braucht, ist Geschmackssache und wird unterschiedlich gehandhabt. Manche lassen sprachliche Umformungen so weit zu, dass beispielsweise mit der Definition eines „Untervektorraums“ U eines Vektorraums V auch mitdefiniert ist, dass V dann ein „Obervektorraum“ von U ist.

Man muss allerdings ein bisschen vorsichtig sein: Im ersten Kapitel hatten wir „strikte Ordnungsrelationen“ und „Ordnungsrelationen“. Eine strikte Ordnungsrelation ist allerdings keine Ordnungsrelation! Nicht alles, was sich aus einer sprachlichen Logik ergibt, ist also mathematisch gültig.

Sätze mit Variablen

Eine Besonderheit der Mathematik ist, wie schon erwähnt, der Gebrauch von Variablen. Dadurch kommt es zu Sätzen wie „x ist eine Primzahl“. Solch ein Satz für sich genommen ist kein sinnvoller Satz, da man nicht sagen kann, dass der Satz richtig oder falsch ist, ohne zu wissen, wofür x steht.

Es gibt zwei verbreitete Möglichkeiten, wie näher bestimmt sein kann, was mit x gemeint ist. Zum einen kann weiter vorne festgelegt sein, wofür x stehen soll. Dies kann ein konkreter Zahlenwert sein, indem man zum Beispiel festlegt: „Sei $x = 4$“. Dann ist der Satz „x ist eine Primzahl“ falsch. Oder man legt etwas fest wie „Sei x die kleinste ungerade Zahl größer als $3^{10^{10}}$“. Dann kann man zwar mit den heutigen Rechnmethoden vermutlich nicht herausbekommen, ob dies eine Primzahl ist – der Satz „x ist eine Primzahl“ ist aber dennoch wahr oder falsch. (Legt man dagegen etwas fest wie „Sei x die Menge aller Quadratzahlen“ würde man den Satz „x ist eine Primzahl“ vermutlich wieder eher als einen sinnlosen Satz ansehen.)

Solch eine Festlegung kann auch darin bestehen, dass x nicht für ein einzelnes, sondern für eine gewisse Auswahl an Objekten steht. Beispielsweise wird durch „Sei x eine ungerade natürliche Zahl“ der Satz „x ist eine Primzahl“ falsch. Die Festlegung „sei x eine ungerade Zahl zwischen 2 und 24, die nicht durch 3 teilbar ist“ macht den Satz dagegen wahr, da alle in Frage kommen Zahlen $5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$ Primzahlen sind.

Zum anderen kann die Rolle x durch eine sogenannte *Quantifizierung* klar gemacht werden. Am häufigsten kommen zwei Quantifizierungen vor: die *Existenzquantifizierung* „es gibt ein x“ und die *Universal-* oder *Allquantifizierung* „für alle x“. Meistens geht es allerdings nicht um solche absoluten Quantifizierungen, sondern um relative wie „es gibt eine positive reelle Zahl x“ oder „für alle endlichen Mengen x“. Solche Quantifizierungen können im Satz integriert sein, also etwa „es gibt eine ungerade natürliche Zahl x, so dass x eine Primzahl ist“ (stimmt) oder „für alle ungeraden natürlichen Zahl x ist x eine Primzahl“ (falsch). Die Quantifizierung kann aber auch verstckt oder weiter vorne im Text stehen. Also etwa: „Es gibt eine ungerade natürliche Zahl x, für die Folgendes gilt: [...] x ist eine Primzahl.“ Oder „Sei x eine beliebige ungerade natürliche Zahl. [...] x ist eine Primzahl.“ Eine beliebte Floskel für eine universelle Quantifizierung ist: „Sei n eine natürliche Zahl, beliebig, aber fest.“

Manchmal ist die Quantifizierung nur implizit vorhanden oder durch die Wahl der Buchstaben angedeutet. Es könnte zum Beispiel sein, dass von natürlichen Zahlen die Rede ist, für die üblicherweise Variablen m und n verwendet werden. Wenn dann gesagt wird: „Es gilt $m + n = n + m$“, ist damit gemeint, dass dies für alle natürlichen Zahlen m und n gilt.

Die Existenzquantifizierung „es gibt ein“ ist mathematisch immer im Sinne von „mindestens ein“ gemeint. Der Satz „Es gibt eine ungerade Primzahl“ bedeutet also, daas es mindestens eine ungerade Primzahl gibt. Wenn man ausdrücken möchte, dass 2 die einzige gerade Primzahl ist, sagen die Mathematiker:innen „Es gibt *genau* eine gerade Primzahl“ oder explizit „Es gibt *eine und nur eine* gerade Primzahl“.

Sowohl in der natürlichen Sprache als auch in der mathematischen Sprache werden Quantifizierungen manchmal durch den unbestimmten Artikel „ein“ wiedergegeben, der aber sowohl für eine existentielle wie für eine universelle Quantifizierung stehen kann. In dem Sprichwort

> Eine Krähe hackt einer anderen kein Auge aus.

sind mit „eine“ und „einer“ zwei Allquantifizierungen gemeint: Für jede Krähe und jede andere Krähe gilt, dass die eine der anderen kein Auge aushackt. In dem Sprichwort

> Ein blindes Huhn findet auch einmal ein Korn.

ist zumindest das zweite „ein“ eine existenzielle Quantifizierung, eventuell auch das erste, je nachdem, ob man „Jedes blindes Huhn findet mal ein Korn“ oder „Es kommt schon mal vor, dass auch ein blindes Huhn ein Korn findet“ versteht.

Wegen der Gefahr von Missverständnissen sollte man diesen Gebrauch von „ein“ besser vermeiden, aber man liest durchaus Aussagen wie

> Eine nicht-negative reelle Zahl hat eine reelle Quadratwurzel.

Das erste „eine“ ist hier eine universelle, das zweite eine existenzielle Quantifizierung. Präziser würde man sagen:

> Jede nicht-negative reelle Zahl hat mindestens eine reelle Quadratwurzel.

Gerade für Quantifizierungen eignen sich Formelschreibweisen, um Klarheit zu schaffen. Dafür nutzt man zwei Zeichen,

den **A**llquantor $\forall$ und den **E**xistenzquantor $\exists$.

Für ihre Verwendung gibt es sehr viele Schreibvarianten, man findet zum Beispiel:

$\forall x : x$ Primzahl größer $2 \Rightarrow x$ ungerade.
Wenn x eine Primzahl größer 2 ist, dann ist x ungerade $\forall x \in \mathbb{N}$.
$(\forall x > 2)$ x Primzahl impliziert, dass x ungerade ist

Die Verwendung von zum Beispiel Klammern um den Quantor oder um den Bereich, auf den sich der Quantor bezieht, ist völlig uneinheitlich. Oft sieht man einen Doppelpunkt nach dem

Quantor. Auf den Quantor folgt normalerweise die Variable, auf die sich der Quantor bezieht; manchmal allerdings wird das Zeichen $\forall$ auch mitten im Text wie eine stenografische Abkürzung für die Wörter „für alle“ verwendet.

$\lceil$ *Gerade am Studienanfang kommt es vor, dass man sich „eingeweiht“ fühlt, wenn man Zeichen wie $\forall$ und $\exists$ und kennt, und eine Neigung entwickelt, sie überall einzusetzen. Ein Quantorenzeichen allein macht aber eine Aussage weder mathematischer noch präziserer. Wichtig ist stets die klare Struktur einer Aussage!* $\rfloor$

Hilfreich ist die Quantorenschreibweise vor allem dann, wenn mehrere Quantoren vorkommen. Dann ist wichtig, welcher Quantor sich auf welche Variable bezieht, und in welcher Reihenfolge sie auftreten. Am besten versteht man dies an einem Beispiel. Dafür betrachten wir eine strikte Ordnugn $<$ wie z. B. auf $\mathbb{N}$. Dann besagt

$\forall x\, \exists y\ x < y$	„für jedes Element gibt es ein größeres“	(gilt in $\mathbb{N}$)
$\forall y\, \exists x\ x < y$	„für jedes Element gibt es ein kleineres“	(gilt nicht in $\mathbb{N}$)
$\exists x\, \forall y\ (x \neq y \to x < y)$	„es gibt ein Element, das kleiner als alle anderen ist“	(gilt in $\mathbb{N}$)
$\exists y\, \forall x\ (x \neq y \to x < y)$	„es gibt ein Element, das größer als alle anderen ist“	(gilt nicht in $\mathbb{N}$)

Wenn man Quantoren links von den Formeln schreibt, auf die sich jeweils beziehen, kann man die Formel von links nach rechts lesen, um die richtige Reihenfolge zu bekommen. Fatal ist es, wenn in einer Formel Quantoren sowohl rechts als auch links stehen. Ein Konstrukt wie

☠ $\exists y > 0\ \ x < y\ \ \forall x \in \mathbb{Z}$ ☠

ist nicht eindeutig lesbar. Ein präziser Satz ohne Formelzeichen wäre hier allemal besser als eine solche uneindeutige Formel.

Bei zwei Allquantoren oder zwei Existenzquantoren hintereinander spielt die Reihenfolge keine Rolle. Ob man also $\forall n\, \forall m\ n+m = m+n$ oder $\forall m\, \forall n\ n+m = m+n$ schreibt, ist unerheblich.

Wichtig ist jedoch auch bei gleichartigen Quantoren, dass verschiedene Variablen nicht notwendigerweise verschiedene Werte haben müssen. Wenn man, wie im letzten der vier Beispiele oben „größer als alle anderen“ ausdrücken möchte, muss man explizit dazusagen, dass die Werte der Variablen verschieden sind.

Definitionen und Festlegungen

Sehr häufig in der Mathematik sind Sätze, wie sie oben schon erwähnt wurden, die einer Variablen einen Wert zuweisen. Also etwa „Sei x eine natürliche Zahl größer 4“. Dies sind keine Aussagesätze, sondern gehören in der klassischen grammatikalischen Einteilung in Aussage-, Frage- und Befehlssätze in die letzte Schublade.[6]

Ähnlich sind Definition zu verstehen. Wenn der Begriff „Primzahl“ definiert wird, etwa durch:

> Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl, die durch keine anderen natürlichen Zahlen als 1 und sich selbst teilbar ist.

[6] Die Verbform „sei“ ist hier aber höchstwahrscheinlich ein Konjunktiv und kein Imperativ. Dieser Gebrauch kommt vermutlich aus dem Lateinischen, wo klarerweise der Konjunktiv „sit“ steht, und auch im Französischen kann man den Konjunktiv „soit“ vom Imperativ „sois“ unterscheiden. Es wird also nicht dem x befohlen: „Du, x, sei eine natürliche Zahl“, sondern eine Art Wunsch ausgedrückt: „Es möge so sein, dass x eine natürliche Zahl ist.“ Euklid schreibt allerdings mit „$\varepsilon\sigma\tau\omega$“ einen Imperativ der 3. Person! Meine Vermutung ist nun, dass in der Lateinischen Überstzung der Konjunktiv gewählt wurde, weil es im Lateinischen keinen Imperativ der 3. Person gibt, und dass sich dieser Gebrauch dann aus dem Lateinischen auf das Deutsche ausgedehnt hat.

ist das keine Aussage, die falsch sein könnte, sondern etwas, was durch Setzung („per Definition“) gilt. In solchen Fällen ist der Konjunktiv („Eine Primzahl sei eine natürliche Zahl ...“) eher selten, kommt aber durch aus in Varianten wie der folgenden vor:

> Primzahl heiße eine natürliche Zahl, wenn sie durch keine anderen natürlichen Zahlen als 1 und sich selbst teilbar ist.

(Wenn man dagegen eine bereits erfolgte Definition in Erinnerung ruft – „*Was war noch einmal eine Primzahl? Ach ja, eine Primzahl ist* ...“, dann liegt wieder ein Aussagesatz vor.)

Junktoren

Mathematische Aussagen können zu komplexeren Aussagen zusammengefasst oder zueinander ins Verhältnis gesetzt werden. Von besonderer Bedeutung sind dabei die logischen bzw. wahrheitswertfunktionalen Verknüpfungen, bei denen man den Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage („wahr“/„stimmt“ oder „falsch“/„stimmt nicht“) allein aus den Wahrheitswerten der Teilaussagen und der Art der Verknüpfung ablesen kann.

Beispiele sind die Verknüpfungen „entweder ... oder ...“ und „weder ... noch ...“: Man muss nicht wissen, welche Teilaussagen mit „weder ... noch ...“ verbunden werden; die Gesamtaussage wird dann und nur dann wahr, wenn beide Teilaussagen falsch sind. Das kann man in einer Wahrheitstabelle zusammenfassen, wobei A und B als Variablen für die Teilaussagen stehen:

A	B	entweder A oder B	weder A noch B
wahr	wahr	falsch	falsch
wahr	falsch	wahr	falsch
falsch	wahr	wahr	falsch
falsch	falsch	falsch	wahr

Solche Zusammensetzungen heißen „logische Verknüpfungen“, „logische Operatoren“ oder auch „Junktoren“. Für die in der Mathematik wichtigsten Junktoren gibt es auch abkürzende Zeichen:

A	B	Konjunktion *„und“* $A \wedge B$	Disjunktion *„oder“* $A \vee B$	Implikation *„wenn ... dann“* $A \Rightarrow B$, $A \to B$	Äquivalenz *„genau dann, wenn“* $A \Leftrightarrow B$, $A \leftrightarrow B$
wahr	wahr	wahr	wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch	wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	falsch	wahr	wahr	falsch
falsch	falsch	falsch	falsch	wahr	wahr

Der logische Gebrauch von „und“ stimmt in der Mathematik und im Alltag überein. Mit „oder“ ist im mathematischen Gebrauch immer ein einschließende Oder gemeint. Ein ausschließendeds Oder muss man mit „entweder ... oder“ explizit machen. Ein übliches abkürzendes Zeichen dafür gibt es nicht.

Abweichend vom Alltag wird in der Mathematik die Implikation gebraucht. Mathematisch gesehen ist die Aussage „Wenn die Erde eine Scheibe ist, dann ist der Mond aus Käse“ ebenso korrekt wie „Wenn die Erde eine Scheibe ist, dann leben am Südpol Pinguine“. Sinn der Implikation ist es lediglich sicherzustellen, dass aus Richtigem nur Richtiges gefolgert werden darf.

Es darf also nicht sein, dass der „Wenn-Satz“ stimmt, der „Dann-Satz“ aber falsch ist. [7]

„(Für alle natürlichen Zahlen x gilt:) Wenn x eine Primzahl größer als 2 ist, dann ist x ungerade“ ist eine wahre Aussage: Alle Zahlen, die den „Wenn-Satz“ erfüllen, wie $3, 5, 7, 11, \ldots$ sind tatsächlich ungerade. Unter den Zahlen, die den „Wenn-Satz“ nicht erfüllen, sind solche, die den „Dann-Satz“ erfüllen (wie die Zahl 1, die ungerade ist, aber keine Primzahl ist, also auch keine Primzahl größer als 2) und solche, die den „Dann-Satz“ nicht erfüllen (nämlich 0 und 2, die beide keine Primzahlen größer als 2 sind: 2 ist zwar Primzahl, aber nicht größer als 2, und 0 ist weder Primzahl noch größer als 2).

Statt „Wenn A, dann B“ sagt man auch „A impliziert B“ oder „B folgt aus A“.

Übliches Zeichen für die Implikation ist $\Rightarrow$, das aber auch noch eine abweichende, wenn auch verwandte Verwendung in Beweisen hat. Insbesondere in der Mathematischen Logik ist innerhalb von Formeln eher $\rightarrow$ geläufig. Gleiches gilt für die Zeichen $\Leftrightarrow$ bzw. $\leftrightarrow$ für die Äquivalenz. Manchmal sieht man statt des Doppelpfeils auch die Abkürzung *gdw* für „genau dann, wenn“.

Äquivalent sind zum Beispiel für $n = 2^{2^{216.091}-2}$ die Aussagen „$2n - 1$ ist eine Primzahl“ und „$2n^2 - n$ ist eine perfekte Zahl“ (d. h. dass $2n^2 - n$ die Summe seiner echten Teiler ist). Man weiß (vermutlich) nicht, ob die Aussagen stimmen oder nicht, aber man weiß, dass wenn eine stimmt, auch die andere stimmt, und wenn eine falsch ist, auch die andere falsch ist. Man sagt dafür:

> $2n - 1$ ist genau dann eine Primzahl, wenn $2n^2 - n$ eine perfekte Zahl ist.
>
> $2n - 1$ ist dann und nur dann eine Primzahl, wenn $2n^2 - n$ eine perfekte Zahl ist.
>
> Wenn $2n - 1$ eine Primzahl ist, dann ist $2n^2 - n$ eine perfekte Zahl, und umgekehrt.
>
> Dass $2n - 1$ eine Primzahl ist, ist eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür, dass $2n^2 - n$ eine perfekte Zahl ist.

Die meistens dieser Ausdrücke beruhen darauf, dass A und B genau dann äquivalente Aussagen sind, wenn B aus A folgt und A aus B folgt. In Formeln ausgedrückt hätte man also, dass $A \Leftrightarrow B$ und $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ äquivalente Aussagen sind.

Da es in der Alltagssprache keinen einfachen Ausdruck für Äquivalenzaussagen gibt, kommt es hier zu keinem Sprachkonflikt.

Zwei wahre Aussagen sind äquivalent zueinander, ebenso zwei falsche. Die beiden Äquivalenzaussagen

> 2 ist genau dann eine Primzahl, wenn 3 eine Primzahl ist.
>
> 4 ist genau dann eine Primzahl, wenn 6 eine Primzahl ist.

sind also beide wahr (wenn auch in dem Sinne uninteressant, dass man viel genauere Aussagen machen kann, wie etwa „4 ist keine Primzahl und 6 ist keine Primzahl“).

Ein fundamentaler logischer Junktor fehlt bisher, die Verneinung oder Negation. Sie macht aus nur einer mathematischen Aussage eine komplexere Aussage und funktioniert wie folgt:

[7] Versuchen Sie bitte nicht, dieses Verständnis auf den Alltag zu übertragen. Dass die mathematische Implikation mit „wenn ... dann“ bezeichnet wird, ist eine Konvention, die keine Bedeutung für das „wenn ... dann“ der Alltagssprache hat!

A	Negation „*nicht*“ $\neg A$
wahr	falsch
falsch	wahr

Einfache Aussagen kann man gut durch „nicht“ negieren: Die Negation von „2 ist gerade“ ist „2 ist nicht gerade“. Bei komplizierteren Aussagen muss man aufpassen: Die Negation von „Jede natürliche Zahl ist gerade oder ungerade“ ist „Nicht jede natürliche Zahl ist gerade oder ungerade“; der Versuch „Jede natürliche Zahl ist nicht gerade oder ungerade“ ist zumindest missverständlich.

Zur Verneinung eines Satzes wie „Wenn x eine Primzahl größer als 2 ist, dann ist x ungerade“ kann man dagegen nicht mehr einfach nur ein „nicht“ einfügen. Es geht zwar immer zu sagen „Es ist nicht der Fall, dass wenn ... “, solch einen Satz versteht man aber nicht. Daher braucht es Techniken, um einen verneinten Satz aufzulösen bzw. eine Verneinung „nach innen“ zu ziehen.

Mit Hilfe der Wahrheitstabellen kann man sich von folgenden Äquivalenzen überzeugen:

$$\begin{array}{rll}
\neg\neg A & \text{ist äquivalent zu} & A \\
\neg(A \wedge B) & \text{ist äquivalent zu} & (\neg A) \vee (\neg B) \\
\neg(A \vee B) & \text{ist äquivalent zu} & (\neg A) \wedge (\neg B) \\
\neg(A \to B) & \text{ist äquivalent zu} & A \wedge (\neg B) \\
\neg(A \leftrightarrow B) & \text{ist äquivalent zu} & (A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B) \\
\neg(\exists x A) & \text{ist äquivalent zu} & \forall x\, (\neg A) \\
\neg(\forall x A) & \text{ist äquivalent zu} & \exists x\, (\neg A)
\end{array}$$

Um den Satz oben zu verneinen, muss man ihn als erstes „ordentlich“ hinschreiben, d. h. mit allen versteckten Junktoren und Quantoren:

> Für alle natürlichen Zahlen x gilt: Wenn x eine Primzahl und größer als 2 ist, dann ist x ungerade.

Für die Verneinung bekommen wir sukzessive die folgenden Umformungen (in nicht immer ganz schönem Deutsch):

> Es ist nicht der Fall, dass für alle natürlichen Zahlen x gilt: Wenn x eine Primzahl und größer als 2 ist, dann ist x ungerade.
>
> Es gibt eine natürliche Zahl x für die nicht der Fall ist: Wenn x eine Primzahl und größer als 2 ist, dann ist x ungerade.
>
> Es gibt eine natürliche Zahl x für die gilt: x ist eine Primzahl und größer als 2 und nicht ungerade.
>
> Es gibt eine natürliche Zahl x für die gilt: x ist eine Primzahl und größer als 2 und gerade.
>
> Es gibt eine natürliche Zahl, die eine Primzahl, größer als 2 und gerade ist.

(Die letzte Umformung ist allerdings nur noch eine sprachliche Verschönerung und keine logische Umformung mehr.)

Und das Ganze nochmals in Formeln:

$$\neg\,\forall x \in \mathbb{N}\big((x \text{ prim} \wedge x > 2) \to x \text{ ungerade}\big)$$
$$\exists x \in \mathbb{N}\,\neg\,\big((x \text{ prim} \wedge x > 2) \to x \text{ ungerade}\big)$$
$$\exists x \in \mathbb{N}\,\big((x \text{ prim} \wedge x > 2) \wedge \neg\, x \text{ ungerade}\big)$$

(Wenn „x ungerade“ als „x nicht gerade“ definiert ist, kann man als weitere logische Umformung noch die doppelte Verneinung eliminieren.)

Formelsprache

Ein Charakteristikum der Mathematik scheint die mathematische Formelsprache zu sein. Formelsprache ist hilfreich, um mathematische Aussagen prägnant und präzise zu formulieren, wie es jetzt sicher schon an einigen Beispielen deutlich wurde. Eine Aussage wird aber nicht dadurch mathematisch oder präzise, dass möglichst viele Formelzeichen verwendet werden. Insbesondere wird eine Abfolge von mathematischen Aussagen nicht dadruch zu einem korrekten Beweis, dass möglichst viele Folgerungspfeile $\Rightarrow$ oder Äquivalenzpfeile $\Leftrightarrow$ darin auftauchen. Im Gegenteil kommt es bei Studienanfänger:inne:n immer wieder vor, dass eine an sich richtige Argumentation durch Verwendung zu vieler Pfeile streng genommen falsch wird.

Formeln sollten mit Maß und Ziel eingesetzt werden. Ältere mathematische Texte, in denen fast keine Formeln vorkommen, sind oft mühsam zu lesen, wenn man es nicht gewöhnt ist. Umgekehrt sind auch mathematische Arbeiten, die nahezu nur aus Formeln bestehen, fast nicht lesbar. Ein guter Formalismus ist nicht nur dafür hilfreich, mathematische Aussagen kurz und präzise auszudrücken, sondern kann auch dazu verhelfen, mathematische Theorien zu verstehen und anschaulicher zu machen.

Wenn man eine Aussage wie

> Jede nicht-negative reelle Zahl hat eine reelle Quadratwurzel.

mit einer möglichen Formalisierung

$$\forall x \in \mathbb{R}\,(x \geqslant 0 \to \exists y \in \mathbb{R} :\, y^2 = x)$$

vergleicht, fällt auf, dass „$x \geqslant 0$“ vielleicht eingängiger ist als „nicht-negativ“, aber insgesamt die Formel keinen Verständnisvorteil gegenüber dem Satz bietet. Würde man dagegen eine Formel wie $0 + 1 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ in Worten ausdrücken wollen, wäre dies ziemlich umständlich:

> Die Summe aller natürlichen Zahlen von Null bis zu einer gegebenen Zahl ist die Hälfte des Produktes dieser Zahl mit ihrem Nachfolger.

Die mathematische Formelsprache ist sehr vielfältig. Sie benutzt u.a.

- Zahlen
- Buchstaben verschiedener Alphabete
- mathematische Sonderzeichen wie $+$, $\cap$, $\approx$, $\int$
- Abkürzungen wie sin, cos, lim

- Striche, z.B. als Unterstrichungen $\underline{A}$, Überstreichungen $\overline{A}$ oder Bruchstriche $\frac{a}{b}$.
- Positionierungen wie z.B. in der Potenzschreibung a^b
- Klammern verschiedener Arten und Größen: $(\, , \,)$, $[\, , \,]$, $\{ \, , \, \}$, $\langle \, , \, \rangle$
- Pfeile wie $\rightarrow$, $\hookrightarrow$, $\mapsto$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\uparrow$

Einige Elemente mathematischer Formeln habe ich schon *en passant* eingeführt; eine systemtische Einführung gebe ich aber nicht, da dies eine sehr trockene Angelegenheit wäre. Man lernt dies im Mathematikstudium nach und nach, wenn bestimmte Formelzeichen gebraucht werden.

Nicht alles ist standardisiert: Es gibt gewissermaßen auch bei Formeln „Handschriften“. Man muss im Laufe des Studiums daher auch lernen, welche Symbole und Schreibweisen standardisiert sind und welche nicht.

Verschiedene Arten von Klammern haben manchmal eine präzise mathematische Bedeutung, zum Beispiel bei dem geordneten Paar (a, b) im Gegensatz zu der aus den Elementen a und b bestehenden Menge $\{a, b\}$. In Rechenausdrücken wie $((a + b) \cdot c + d) \cdot e$ verwendet man dagegen verschiedene Arten von Klammern gerne zur besseren Lesbarkeit, ohne dass sie eine weitere Bedeutung hätten. Es kann stattdessen also unterschiedslos z. B. $([a + b] \cdot c + d) \cdot e$ oder $[(a + b) \cdot c + d] \cdot e$ geschrieben werden. Auch größere Klammern oder kleine Abstände dienen nur der Lesbarkeit, also etwa $\Big((a + b) \cdot c + d\Big) \cdot e$ oder $(\,(a + b) \cdot c \; + \; d\,) \cdot e$. Falls in dem betrachteten Zusammenhang die eckigen Klammern aber eine besondere Bedeutung haben [8] , sollte man sie nicht anstelle der runden Klammern einsetzen.

Einige Buchstaben haben eine feste Bedeutung, zum Beispiel die Kreiszahl π, die Euler'sche Zahl e, die imaginäre Einheit i. Wenn man sich in einem Kontext bewegt, indem diese Konstanten nicht vorkommen, kann man die entsprechenden Buchstaben auch wieder als Variablen verwenden, so wie zum Beispiel in dem Klammerbeispiel oben das e. Wichtig ist es, mögliche Missverständnisse auszuschließen.

In der Regel ohne besondere Definition wird in Formeln bei Bedarf die Leserichtung umgekehrt. Wenn zum Beispiel $a \in M$ definiert wird, ist damit auch $M \ni a$ bestimmt.

Fremde Buchstaben

Lernen sollten Sie unbedingt das griechische Alphabet, das viel verwendet wird:

Name	Klein-	Großbuchstabe	Name	Klein-	Großbuchstabe
Alpha	α	A *	Ny	ν	N *
Beta	β	B *	Xi	ξ	Ξ
Gamma	γ	Γ	Omikron	o *	O *
Delta	δ	Δ	Pi	π	Π
Epsilon	ε	E *	Rho	ϱ	P *
Zeta	ζ	Z *	Sigma	σ	Σ

[8] Zum Beispiel wenn reelle Zahlen betrachtet werden und die eckigen Klammern auch als sogenannte Gauß-Klammern, also als Symbol für die Abrundunsfunktion vorkommen.

Eta	η	H *	Tau	τ	T *
Theta	θ, ϑ	Θ	Ypsilon	υ *	Υ *
Iota	ι	I *	Phi	φ	Φ
Kappa	κ	K *	Chi	χ	X *
Lambda	λ	Λ	Psi	ψ	Ψ
My	μ	M *	Omega	ω	Ω

Die mit * gekennzeichneten Buchstaben werden normalerweise nicht verwendet, da sie sich von den entsprechenden Buchstaben des lateinischen Alphabetes nicht oder kaum unterscheiden! Die Handschrift sollte nahe an der Druckschrift sein; in der Handschrift einiger Mathematiker:innen finden sich allerdings Eigenwilligkeiten, an die man sich im Einzelfall gewöhnen muss.

Früher häufiger, heute eher selten, werden Frakturbuchstaben verwendet. Es gibt verschiedenste Varianten, hier die in dem verbreitesten mathematischen Textverarbeitungsprogramm $\LaTeX$ implementierte Version:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{e}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{j}$	$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{l}$	$\mathfrak{m}$	$\mathfrak{n}$	$\mathfrak{o}$	$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{q}$	$\mathfrak{r}$	$\mathfrak{s}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{v}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{y}$	$\mathfrak{z}$
$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{F}$	$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{J}$	$\mathfrak{K}$	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{N}$	$\mathfrak{O}$	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{Q}$	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{U}$	$\mathfrak{V}$	$\mathfrak{W}$	$\mathfrak{X}$	$\mathfrak{Y}$	$\mathfrak{Z}$

Handschriften weichen hier sehr davon ab!

Anekdotisch sei noch vermerkt, dass in der Mengenlehre auch einige hebräische Buchstaben eine Rolle spielen, vor allem Alpeh $\aleph$, Beth $\beth$ und Gimel $\gimel$.

3. Beweise

Mathematische Aussagen, deren Richtigkeit (oder Wahrheit) bewiesen ist, werden „Sätze“ oder „Propositionen“ genannt – zumindest, wenn ihre Aussage ein gewisses Interesse hat. Wichtige Sätze heißen auch „Theoreme“ oder „Hauptsätze“, und ganz wichtige Sätze haben Namen: „Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung“, „Zwischenwertsatz“, „Satz des Pythgoras“, „Hilbert 90“.

Ein Satz, der eher technische Hilfsmittel für den Beweis anderer Sätze zur Verfügung stellen, heißt „Lemma“ oder „Hilfssatz“. Es gibt auch viel verwendete Lemmata, die Namen haben, zum Beispiel das Zorn'sche Lemma.

Mathematische Aussagen, die Schritte innerhalb eines Beweises strukturieren, werden gerne „(Zwischen-)Behauptung“ genannt, ebenso wie die Aussage des Satzes „Behauptung“ heißt, solange sie nicht bewiesen ist.

„Folgerung“ oder „Korollar“ wird ein Satz genannt, der ohne allzu große Anstrengung mit Hilfe eines vorangehenden Satzes bewiesen werden kann.

Was ist nun genau ein Beweis einer mathematischen Aussage?

Es gibt einerseits eine technische Definition von „Beweis“ aus der Mathematischen Logik: Ein Beweis ist eine Abfolge von Aussagen, an deren Ende die zu beweisende Behauptung steht. Jeder Zwischenschritt ist entweder ein Axiom (also eine unbewiesene Aussage, die als Grundlage der Mathematik angenommen wird) oder eine Annahme der Behauptung oder folgt auf elementare Weise aus den vorherigen, bereits bewiesenen Aussagen. Die elementaren Folgerungschritte müssen aus einer im Voraus festgelegten Liste von erlaubten Umformungen stammen, deren logische Korrektheit jeweils nachgewiesen ist.

Dieser Begriff ist so angelegt, dass er maschinell umsetzbar ist (also programmiert werden kann, und tatsächlich gibt es Computerprogramme, die mathematische Beweise führen) und vor allem so präzise ist, dass man über die Existenz von Beweisen selbst wieder mathematische Aussagen treffen kann. In der Praxis kommt man mit solchen Beweisen aber nicht sehr weit, weil sie viel zu kleinteilig und mühsam sind und viel zu langweilig wären.

In der Praxis nutzt man daher einen viel unbestimmteren Beweisbegriff. Es geht nach wie vor um eine Abfolge von Aussagen, an deren Ende die zu beweisende Behauptung steht. Jeder Zwischenschritt ist ein Axiom oder eine Annahme oder folgt aus den vorherigen, bereits bewiesenen Aussagen. Die Folgerung muss nun aber nicht mehr aus einer Liste kleinschrittiger erlaubter Umformungen stammen, sondern plausibel oder nachvollziehbar sein. Was aber genau als plausibel oder nachvollziehbar angesehen wird, hängt davon ab, wer wem einen Beweis präsentiert. Von Studienanfänger:inne:n wird man viel mehr Präzision und Zwischenschritte erwarten als von erfahrenen Mathematiker:inne:n. Wichtig ist, dass man im Zweifelsfall einen vorgelegten Beweis verteidigen kann: Wenn jemand einen Beweisschritt anzweifelt, muss man in der Lage sein, ihn mit so vielen weiteren Zwischenschritten auszufüllen, bis sie überzeugen.

Ein Lieblingswort der Mathematiker:innen ist „trivial“. Es bedeutet, dass man einen Beweisschritt für so offensichtlich hält, dass nichts weiter dazu zu sagen ist. Auch hier hängt es natürlich sher vom Niveau ab, was man für trivial hält.

Es gibt einige typische Formen von Beweisen und einige wiederkehrende Argumentationen, von denen einige Namen tragen. Gesehen haben wir schon den „Beweis per Induktion“. Einige weitere Beweisformen sollen, wenn die Zeit noch reicht, am Ende des Vorkurses vorgestellt werden!

4. Grundlegende Objekte: Mengen

Der Begriff der Menge ist einer der grundlegendsten Begriffe der Mathematik. Eine Menge kann man sich vorstellen als eine Zusammenfassung von verschiedenen Objekten, den *Elementen der Menge*, zu einem neuen Objekt. Diese Zusammenfassung soll so vor sich gehen, dass dabei das *Extensionalitätsprinzip* gilt:

> Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.

Eine Menge ist also eindeutig dadurch bestimmt, dass man weiß, welche Elemente sie enthält. Man schreibt $a \in M$ dafür, dass a ein Element von M ist (und sagt auch „a liegt in M“), und $a \notin M$ dafür, dass a kein Element von M ist. Oft schreibt man abkürzend $a, b \in M$ und meint „$a \in M$ und $b \in M$“, und ähnlich für mehrere Elemente.

Die *leere Menge* hat kein Element; nach dem Extensionalitätsprinzip ist sie durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt. Sie wird meist mit $\emptyset$ bezeichnet, manchmal auch mit $\{ \}$.

⌈ *Man muss eine Menge von Objekten unterscheiden von einer Beschreibung dieser Menge. Wenn man eine Beschreibung hat (z. B. „die um die Sonne kreisenden Planeten“), so ist die* Extension *dieser Beschreibung gerade die Menge der die Beschreibung erfüllenden Objekte. Es kann durchaus sein, dass zwei Beschreibungen mit unterschiedlicher* Intension *die gleiche Extension haben, also (gewissermaßen zufällig) die gleiche Menge beschreiben, z. B. „die Monde der Venus“ und „die im Jahr 2022 in Deutschland herrschenden Könige“, die beide die leere Menge als Extension haben. Ein mathematisches Beispiel: „Die geraden Primzahlen“ und „die ganzen Zahlen, die halb so groß wie ihr Quadrat sind“ beschreiben beide die Menge* $\{2\}$. ⌋

Eine endliche Menge kann gegeben sein durch eine Beschreibung ihrer Elemente oder durch die Auflistung ihrer Elemente innerhalb von geschweiften Klammern, wie zum Beispiel

$$\{10, 2, 3, 7, 5\}$$

Wegen des Extensionalitätsprinzips spielt die Reihenfolge der Elemente keine Rolle und es können auch Elemente mehrfach genannt sein. Es gilt also z. B. $\{2, 1, 1, 3, 2\} = \{1, 2, 3\}$. Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge M schreibe ich $|M|$. Es gibt dafür auch die Schreibweise $\#M$.

Unendliche Mengen kann man eigentlich nur durch Beschreibungen der Elemente angeben. Manchmal schreibt man auch den Anfang einer Auflistung, die mit drei Pünktchen endet. Dann muss aber klar sein, wofür die Pünktchen stehen. Als Beispiel folgen drei Möglichkeiten, die Menge der Primzahlen aufzuschreiben:

$$\{x \mid x \text{ ist natürliche Zahl und Primzahl}\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ prim}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$$

Es gibt einige Varianten dieser Schreibweisen; oft sieht man einen Doppelpunkt anstelle des senkrechten Striches.

Auch Mengen können wieder Elemente von Mengen sein. Es gibt also zum Beispiel die zweielementige Menge $\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$, oder auch die Menge $\{\emptyset\}$, die ein Element hat, nämlich die leere Menge $\emptyset$, und daher verschieden von der leeren Menge selbst ist, die kein Element enthält. Man darf das auch alles mischen, also zum Beispiel die Menge

$$\big\{5, \{23, 35, 46, 59\}, \mathbb{N}, \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}\big\}$$

betrachten, die vier Elemente hat.

Der Mengenbegriff ist fundamental in der modernen Mathematik, weil es man alle bisher betrachteten mathematischen Objekte auf geeignete Weise mit Mengen ausdrücken kann. Zum Beispiel kann man die natürlichen Zahlen als Mengen auffassen, indem man 0 mit der leeren Menge $\emptyset$ identifiziert und dann induktiv die Zahl $n + 1$ mit der Menge $\{0, \dots, n\}$ identifiziert. Jede natürliche Zahl n entspricht so also einer besonderen Menge mit n Elementen.

Als Grundlage aller Mathematik braucht man dann nur noch Regeln, die einem sagen, welche Mengen existieren und wie man mit ihnen rechnen kann. Das geschieht in den sogenannten Axiomen der Mengenlehre. Dafür gibt es verschiedene Herangehensweisen; am verbreitesten ist das Axiomensystem ZFC[9]. Solche Axiomensysteme werden in den Vorlesungen „Mathematische Logik“ und „Mengenlehre“ eingeführt und untersucht; für den mathematischen Alltag ist ihre genau Formulierung nicht relevant. Für ihn braucht man nur die fundamentalen mengentheoretischen Operationen und deren Rechenregeln, die ich gleich beschreiben werde, und man

[9]Nach Ernst **Z**ermelo, Abraham **F**raenkel und dem Auswahlaxiom „**C**hoice“

muss wissen, wie man grundlegende mathematische Objekte wie Funktionen und Relationen als Mengen ausdrückt.

⌈ *Der Umgang mit unendlichen Mengen ist nicht immer ganz einfach.*

Zum einen ist nicht alles, was man scheinbar als Menge hinschreiben kann, auch eine Menge. Berühmtestes Beispiel ist die „Zermelo-Russell-Antinomie“: Man kann nicht die Menge

$$R = \{M \mid M \text{ Menge}, M \notin M\}$$

bilden, man kann also keine Menge finden, deren Elemente gerade die Mengen sind, die sich nicht selbst als Element enthalten, denn die Frage, ob $R \in R$, würde dann zu einem Widerspruch führen. Die üblichen Axiome der Mengenlehre erlauben es dann auch nicht, die „Menge aller Mengen“ zu bilden, weil man daraus R bekäme.

Zum andern braucht man – ähnlich wie das Induktionsprinzip – Regeln für den Umgang mit unendlichen Mengen, die man, weil es um Unendlichkeit geht, nicht mit einer direkten Anschauung plausibel machen kann. Eine solche Regel ist das Auswahlaxiom*, das von manchen (aber wenigen) Mathematiker:innen abgelehnt wird. Deshalb, und weil das Auswahlaxiom einige merwürdig wirkende Konsequenzen hat, wird es manchmal wie eine geheimnisumwitterte Angelegenheit erwähnt. Im mathematischen Alltag kommt es meistens in der Form des* Zorn'schen Lemmas *vor.* ⌋

Elementare mengentheoretische Konzepte und Konstruktionen

Eine Menge M heißt *Teilmenge* einer Menge N, wenn jedes Element von M auch Element von N ist, und sie heißt *echte Teilmenge*, wenn darüberhinaus $M \neq N$. Es gibt dafür zwei gleichermaßen verbreitete Symbolschreibweisen (von denen ich Version 1 benutzen werde):

	Teilmenge	echte Teilmenge
Version 1:	$M \subseteq N$	$M \subset N$
Version 2:	$M \subset N$	$M \subsetneq N$ oder $M \subsetneqq N$

Zu jeder Menge M gibt es die *Potenzmenge* $\mathfrak{P}(M)$ oder $\mathrm{Pot}(M)$, deren Elemente alle Teilmengen von M sind. Es gilt also

$$X \in \mathfrak{P}(M) \iff X \subseteq M$$

Beispiel: $\mathfrak{P}(\{1,2,3\}) = \big\{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \big\}$

Wenn M endlich ist und n Elemente hat, dann besteht $\mathfrak{P}(M)$ aus 2^n Elementen.

Zu je zwei Mengen M und N gibt es:

die *Schnittmenge*	$M \cap N$	mit $x \in M \cap N \iff (x \in M$ und $x \in N)$
		Beispiel: $\{2,3,5\} \cap \{1,2,3,4\} = \{2,3\}$
die *Vereinigungmenge*	$M \cup N$	mit $x \in M \cup N \iff (x \in M$ oder $x \in N)$
		Beispiel: $\{2,3,5\} \cup \{1,2,3,4\} = \{1,2,3,4,5\}$
die *Differenzmenge*	$M \setminus N$	mit $x \in M \setminus N \iff (x \in M$ und $x \notin N)$
		Beispiel: $\{2,3,5\} \setminus \{1,2,3,4\} = \{5\}$

Falls $M \cap N = \emptyset$, so heißen M und N *disjunkt* und die Vereinigung $M \cup N$ heißt *disjunkte Vereinigung.*

Die Differenzmenge $M \setminus N$ heißt auch *Komplement(menge) von N in M*. Dies wird insbesondere benutzt, wenn N Teilmenge von M ist. Dann schreibt man auch $N^{\complement}$ oder $\complement N$, vorausgesetzt die Menge M, in der das Komplement gebildet wird, ist explizit oder durch den Kontext festgelegt.

Schnitt- und Vereinigungsmenge kann man auch von unendlich vielen Mengen bilden.

$$\bigcap_{i \in I} M_i \quad \text{oder} \quad \bigcap \{M_i \mid i \in I\}$$

ist die Schnittmenge der Mengen M_i, wobei die Indexvariable i über die Indexmenge I läuft. Diese Schnittmenge besteht aus den allen M_i gemeinsamen Elementen, d. h.

$$m \in \bigcap_{i \in I} M_i \iff \text{für alle } i \in I \text{ gilt } m \in M_i$$

Die Vereinigungsmenge $\bigcup_{i \in I} M_i$ besteht aus allen Elementen, die in mindestens einem der M_i liegen, also

$$m \in \bigcup_{i \in I} M_i \iff \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } m \in M_i$$

Für jede endliche Anzahl an Objekten $a_1, \dots, a_n$ gibt es

die (ungeordnete) Menge $\{a_1, \dots, a_n\}$ und das (geordnete) n-*Tupel* $(a_1, \dots, a_n)$.

Dabei sind n-Tupel die Verallgemeinerung von geordneten Paaren; für sie gilt

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \iff a_1 = b_1,\ a_2 = b_2\ , \dots,\ a_n = b_n$$ [10]

Man nennt a_i die *i-te Komponente* des Tupels. Ein n-Tupel hat also immer n Komponenten, von denen aber einige gleich sein können. Es könnte zum Beispiel $a_1 = a_3 = a_4 = 2$ und $a_2 = a_5 = -7$ sein, dann ist $(a_1, \dots, a_5) = (2, -7, 2, 2, -7)$, aber $\{a_1, \dots, a_n\} = \{2, -7\}$. Die Menge $\{a_1, \dots, a_n\}$ hat maximal n Elemente, kann aber weniger haben.

Für $n = 2, 3, 4, \dots$ heißen die n-Tupel auch *Paare*, *Tripel*, *Quadrupel*, *Quintupel*, *Sextupel*, *Septupel*, … Das Kunstwort „Tupel“ leitet sich davon ab. Ein q-Tupel (a_1) kann man mit dem Element a_1 identifizieren. Per Konvention gibt es ein einziges 0-Tupel, nämlich $\emptyset$.

Für beliebige Mengen $M_1, \dots, M_n$ kann man nun das *Mengenprodukt* oder *kartesische Produkt*

$$M_1 \times \dots \times M_n = \big\{(m_1, \dots, m_n) \bigm| m_1 \in M_1, \dots, m_n \in M_n\big\}$$

bilden. Für $M \times \dots \times M$ schreibt man auch M^n, wobei n die Anzahl der Faktoren ist. M^1 ist dann einfach M und M^0 ist $\{\emptyset\}$, hat also ein Element.

Beispiele:

$$\{1,3\} \times \{1,2,4\} = \{(1,1),(1,2),(1,4),(3,1),(3,2),(3,4)\}$$
$$\{a,b\}^3 = \{(a,a,a),(a,a,b),(a,b,a),(a,b,b),(b,a,a),(b,a,b),(b,b,a),(b,b,b)\}$$

Für endliche Mengen gilt $|M_1 \times \dots \times M_n| = |M_1| \cdot \ldots \cdot |M_k|$ und $|M^n| = |M|^n$. [11]

Für die mengentheoretischen Operationen Schnitt, Vereinigung, Differenz, Produkt gelten Gesetze (Rechenregeln), von denen eine ganze Reihe in der folgenden Tabelle aufgeführt sind. M, N, O, M_i, N_i sind darin beliebige Mengen:

[10] Man kann für $(a_1, \dots, a_n)$ eine explizite mengentheoretische Konstruktion angeben, die die gewünschte Eigenschaft hat. Sie ist aber unintuitiv und von keinem näheren Interesse.

[11] Damit das auch für $\emptyset^0$ gilt, muss $0^0 = 1$ gesetzt werden.

Kommutativgesetze

$$M \cap N = N \cap M$$
$$M \cup N = N \cup M$$

Assoziativgesetze

$$(M \cap N) \cap O = M \cap (N \cap O)$$
$$(M \cup N) \cup O = M \cup (N \cup O)$$

Distributivgesetze

$$(M \cap N) \cup O = (M \cup O) \cap (N \cup O)$$
$$(M \cup N) \cap O = (M \cap O) \cup (N \cap O)$$

Absorptionsgesetze

$$(M \cap N) \cup M = M$$
$$(M \cup N) \cap M = M$$

Rechnen mit $\emptyset$

$$M \cup \emptyset \; = \; M \setminus \emptyset \; = \; M$$
$$M \cap \emptyset \; = \; M \times \emptyset \; = \; \emptyset \times M \; = \; \emptyset$$

$$M \cup \emptyset \; = \; M \setminus \emptyset \; = \; M$$
$$M \cap \emptyset \; = \; M \times \emptyset \; = \; \emptyset \times M \; = \; \emptyset$$

Regeln von de Morgan

$$M \setminus (N \cap O) = (M \setminus N) \cup (M \setminus O)$$
$$M \setminus (N \cup O) = (M \setminus N) \cap (M \setminus O)$$

alternativ: falls $N, O \subseteq M$ und das Komplement in M gebildet wird:

$$(N \cap O)^{\complement} = N^{\complement} \cup O^{\complement}$$
$$(N \cup O)^{\complement} = N^{\complement} \cap O^{\complement}$$

Regeln für Differenzen

$$M \setminus N = M \setminus (M \cap N)$$
$$M \setminus (M \setminus N) = M \cap N$$
$$(M \setminus N) \setminus O = M \setminus (N \cup O)$$

Regeln für Teilmengen

$$M \subseteq N \iff M \cap N = M \iff M \cup N = N$$
$$M \subseteq N \subseteq O \implies M \subseteq O$$

Distributivgesetze

$$(M \cap N) \times O = (M \times O) \cap (N \times O)$$
$$(M \cup N) \times O = (M \times O) \cup (N \times O)$$
$$(M \setminus N) \times O = (M \times O) \setminus (N \times O)$$
$$(M_1 \times N_1) \cap (M_2 \times N_2) = (M_1 \cap M_2) \times (N_1 \cap N_2)$$

Relationen

Eine *n-stellige Relation* R zwischen Mengen $M_1, \dots, M_n$ ist von der Grundidee her eine Eigenschaft von n-Tupeln aus $M_1 \times \dots \times M_n$, also etwas, von dem man sagen kann, dass es auf Elemente $m_1 \in M_1, \dots, m_n \in M_n$ zutrifft oder nicht. Man kann eine solche Relation R mengentheoretisch mit einer Teilmenge von $M_1 \times \dots \times M_n$ gleichsetzen, nämlich mit der Menge der n-Tupel, auf die die Relation zutrifft. Die übliche mathematische Definition ist daher, dass eine n-stellige Relation R zwischen Mengen $M_1, \dots, M_n$ durch eine Teilmenge $G \subseteq M_1 \times \dots \times M_n$ gegeben ist. Die Menge G heitß eigentlich der *Graph der Relation* R und wird meist mit G_R oder Γ_R bezeichnet. Sehr häufig wird aber die Relation mit ihrem Graphen identifiziert, also G_R als die Relation bezeichnet.

Meistens ist $M_1 = \dots = M_n = M$, dann spricht man von einer n-stelligen Relation auf M

Wenn $(m_1, \ldots, m_n)$ im Graphen Γ_R liegt, sagt man: „R trifft auf $(m_1, \ldots, m_n)$ zu“ oder „$m_1, \ldots, m_n$ stehen in der Relation R zueinander“ oder „$(m_1, \ldots, m_n)$ liegt in R“, oder Ähnliches. Man schreibt dafür

$$Rm_1 \ldots m_n \text{ oder } R(m_1, \ldots, m_n) \text{ oder } (m_1, \ldots, m_n) \in R.$$

Von besonderer Bedeutung sind die zweistelligen oder *binären Relationen*. Für eine binäre Relation $R \subseteq M \times N$ heißt M der *Definitions-* oder *Vorbereich* und N der *Werte-* oder *Nachbereich*. Das Vertauschen der beiden Rollen führt zu der *Umkehrrelation* R^{-1} zwischen N und M, deren Graph gerade der „gespiegelte“ Graph von R ist, d. h. $(n, m) \in R^{-1} \iff (m, n) \in R$. Beispielsweise ist die „*größer*“-Relation auf den natürlichen Zahlen die Umkehrrelation der „*kleiner*“-Relation.

Bei binären Relationen schreibt man gerne mRn dafür, dass R auf (m, n) zutrifft, insbesondere wenn für R ein Symbol wie z. B. $\leqslant$ oder $\sim$ verwendet wird. Neben den Ordnungsrelationen wie $\leqslant$ oder $>$ ist die Teilbarkeitsrelation $m \mid n$ auf $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$ ein weiteres Beispiel einer binären Relation.

Sei nun R eine binäre Relation auf M (Definitions- und Wertebereich stimmen also überein). Dafür gibt es eine Reihe wichtiger Eigenschaften, die zum Teil schon vorkamen.

- R heißt *reflexiv*, wenn für alle $m \in M$ gilt, dass R auf (m, m) zutrifft.
- R heißt *irreflexiv* oder *antireflexiv*, wenn es kein $m \in M$ gibt, so dass R auf (m, m) zutrifft. („Irreflexiv“ ist also etwas anderes als „nicht reflexiv“!)
- R heißt *symmetrisch*, wenn für alle $m, n \in M$ gilt, dass R genau dann auf (m, n) zutrifft, wenn es auf (n, m) zutrifft.
- R heißt *asymmetrisch*, wenn es keine Elemente $m, n \in M$ gibt, so dass R auf (m, n) und auf (n, m) zutrifft.
- R heißt *antisymmetrisch*, wenn es keine verschiedenen Elemente $m, n \in M$ gibt, so dass R auf (m, n) und auf (n, m) zutrifft.
- R heißt *transitiv*, wenn für alle $m_1, m_2, m_3 \in M$ gilt: Wenn R auf (m_1, m_2) und auf (m_2, m_3) zutrifft, dann auch auf (m_1, m_3).

Mit Hilfe dieser Eigenschaften kann man wichtige Arten binärer Relationen definieren:

- Eine *partielle Ordnung(srelation)* auf M ist eine reflexive, antisymmetrische, transitive binäre Relation auf M. Wenn sie zudem *total* ist, d. h. wenn für alle $m, n \in M$ die Relation R auf (m, n) zutrifft oder auf (n, m), ist es eine *totale* oder *lineare Ordnung* oder auch schlicht eine *Ordnung*.

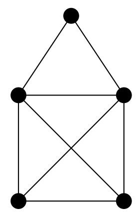
  Die Teilbarkeitsrelation ist zum Beispiel eine partielle Ordnung auf $\mathbb{N}$, ebenso die Teilmengenrelation $\subseteq$ auf einer Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$.
  Die Kleiner-Gleich-Relation $\leqslant$ und die Größer-Gleich-Relation $\geqslant$ sind totale Ordnungen auf $\mathbb{N}$.

- Eine *partielle strikte Ordnung* auf M ist eine irreflexive und transitive binäre Relation auf M. Sie entsteht aus einer partiellen Ordnung dadurch, dass man die „reflexiven“ Paare

(m, m) entfernt. Wenn die Relation zudem *total* ist, d. h. wenn für alle verschiedenen $m, n \in M$ die Relation R auf (m, n) zutrifft oder auf (n, m), ist es eine *totale strikte Ordnung* oder auch schlicht eine, *strikte Ordnung*.

Beispiel für eine partielle strikte Ordnung ist die Echte-Teilmengen-Relation $\subsetneq$ auf einer Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$.
Die Kleiner-Relation $<$ und die Größer-Relation $>$ sind totale strikte Ordnungen auf $\mathbb{N}$.

- Ein *Graph* [12] ist eine irreflexive, symmetrische binäre Relation auf M, wie im folgende Beispiel visualisiert



- Eine *Äquivalenzsrelation* auf M ist eine reflexive, symmetrische, transitive binäre Relation auf M. Mehr dazu in Abvschnitt 5!

Abbildungen

Eine *Abbildung* oder *Funktion* von einer Menge M in eine Menge N ist von der Grundidee her eine Zuordnung, die jedem Element von M genau ein Element aus N zuordnet. Solch eine Zuordnung definiert eine Relation, und zwar trifft die Relation genau dann auf $m \in M$ und $n \in N$ zu, wenn n das Element ist, das m zugeordnet wird.

Eine Abbildung von M nach N ist daher definiert als eine Relation zwischen M und N, so dass es zu jedem $m \in M$ genau ein $n \in N$, das zu m in Relation steht. Man schreibt

$$f : M \to N$$

dafür, das f eine Abbildung von M nach N ist, und $m \mapsto n$ dafür, dass (m, n) in der zugehörigen Relation stehen.

Dieses Element n heißt dann *das Bild von m unter f* und man schreibt genauer $n = f(m)$. Umgekehrt ist *m ein Urbild* von n. Ein Element von N kann also mehrere Urbilder haben, ein Element von M aber nur ein Bild (die Relation ist „rechtseindeutig“). Ein Element von N kann auch gar kein Urbild haben, jedes Element von M hat aber ein Bild (die Relation ist „linkstotal“).

Manche Abbildungen sind durch *Abbildungsvorschriften* gegeben, das sind (uniforme) Regeln, die angeben, wie man von jedem m zu seinem Bild $f(m)$ kommt. Solche eine Vorschrift könnte auf den natürlichen Zahlen z. B. „*multipliziere mit* 2“ sein; diese Abbildung wird dann $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 2n$ geschrieben. Es versteht sich aus dieser Schreibweise, dass n eine Variable für Elemente von $\mathbb{N}$ ist, und dass die Funktion f jedes $n \in \mathbb{N}$ auf $2n$ abbildet.

Achtung 1: Eine Abbildungsvorschrift allein definiert noch keine Abbildung, denn Definitions- und des Wertebereich gehören zur Abbildung hinzu. (Manchmal ist man allerdings nachlässig, wenn sich Definitions- und Wertebereich aus dem Kontext ergeben).

[12] In einer anderen Verwendung des Wortes als in „Graph einer Relation“!

Auch der Graph der Abbildung reicht nicht aus, um die Abbildung festzulegen. Wegen der Linkstotalität ist zwar der Definitionsbereich der Abbildung dadurch festgelegt, nicht aber der Wertebereich.

Achtung 2: Man kann keine Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ definieren, weil diese Abbildungsvorschrift für die reelle Zahl 0 keinen Wert liefert. Es geht lediglich $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$. Den Wertebereich dagegen muss man nicht auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ einschränken.

Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *surjektiv*, wenn sie rechtstotal ist, also wenn es zu jedem $n \in N$ ein Urbild gibt. Sie heißt *injektiv*, wenn sie auch linkseindeutig ist, wenn ein $n \in N$ also nicht mehr als ein Urbild haben kann. Abbildungen, die injektiv und surjektiv sind, heißen *bijektiv*.

Die Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 2n$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.
Die Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}, n \mapsto n^2$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.
Die Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto 2 + n$ ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

Wenn $f : M \to N$ eine Abbildung ist, dann heißt die Menge

$$\mathrm{im}(f) := \{n \in N \mid \text{es gibt ein } m \in M \text{ mit } f(m) = n\}$$

das *Bild* (engl: *image*) der Abbildung. Wenn man den Wertebereich auf das Bild einschränkt, also die Abbildung

$$M \to \mathrm{im}(f), m \mapsto f(m)$$

betrachtet, dann ist dies eine surjektive Abbildung.

Man kann eine Abbildung auch in ihrem Definitionsbereich einschränken, d. h. man betrachtet für $M' \subseteq M$ die Abbildung

$$M' \to N, m' \mapsto f(m')$$

Diese Abbildung heißt *die auf M' eingeschränkte Abbildung* und man schreibt dafür $f\restriction_{M'}$ oder $f|_{M'}$.

Wenn eine Abbildung $f : M \to N$ bijektiv ist, dann gibt es auch zu jedem $n \in N$ genau ein $m \in M$ mit $f(m) = n$. Dies bedeutet, dass die Umkehrrelation $f^{-1} : N \to M$ von f auch eine Abbildung ist, die *Umkehrabbildung* von f. Es gilt also:

$$f(m) = n \iff f^{-1}(n) = m$$

Wenn zwei Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to O$ gegeben sind, dann kann man diese „hintereinander ausführen“, indem man ein Element $m \in M$ erst mit f auf $f(m) \in N$ abbildet und dann mit g auf $g(f(m)) \in O$. Tatsächlich ist die Menge $\big\{\big(m, g(f(m))\big) \bigm| m \in M\big\}$ der Graph einer Abbildung $M \to O$, die *Verknüpfung* oder *Komposition* der beiden Abbildungen f und g genannt wird und mit $g \circ f$ bezeichnet wird.

Achtung auf die Reihenfolge: Bei $g \circ f$ wird als Abbildung zunächst f und dann g ausgeführt, d. h. die Reihenfolge dreht sich um. Es ist aber $(g \circ f)(m) = g(f(m))$, hier stimmt die Reihenfolge also.

Die Komposition von Abbildungen ist assoziativ, d. h. es gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

bei geeigneten Abbildungen, also für Abbildungen $f : M \to N, g : N \to O, h : O \to P$.

Für jede Menge M gibt es als besondere Abbildung die *Identität(sabbildung)*

$$\mathrm{id}_M : M \to M,\ m \mapsto m$$

Der Graph dieser Identitätsabbildung ist die Diagonale in $M \times M$, also $\{(m, m) \mid m \in M\}$.

Wenn $f : M \to N$ bijektiv ist, dann gilt $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N$.

5. Mathematische Abstraktion

Äquivalenzrelationen

Eine *Äquivalenzrelation* auf einer Menge M ist eine binäre Relation auf M, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Das bedeutet, dass für alle Elemente $m_1, m_2, m_3 \in M$ gilt:

- $m_1 \sim m_1$ (*reflexiv*)
- Wenn $m_1 \sim m_2$, dann auch $m_2 \sim m_1$. (*symmetrisch*)
- Wenn $m_1 \sim m_2$ und $m_2 \sim m_3$, dann auch $m_1 \sim m_3$. (*transitiv*)

Wenn $m_1 \sim m_2$, dann heißt m_1 *äquivalent zu* m_2 (*bzgl. der Äquivalenzrelation* $\sim$). Ein Beispiel einer Äquivalenzrelation ist die Gleichheit. Im Allgemeinen kann man sich Äquivalenzrelationen vorstellen als eine Art Ähnlichkeit, die darin besteht, dass Objekte als ähnlich aufgefasst werden, wenn sie in einer gewissen Hinsicht gleich sind. Ein Alltagsbeispiel: Auf der Menge aller Menschen gibt es die Äquivalenzrelation „gleich alt“, hier ist es also die Übereinstimmung hinsichtlich des Alters. Ein wichtiges Beispiel aus der Mathematik ist etwa die Äquivalenzrelation auf den ganzen Zahlen „gleicher Rest bei der Division durch 7“. Dann ist zum Beispiel 23 äquivalent zu 72, weil beide den Rest 2 lassen. Für Äquivalenzrelationen benutzt man daher gerne Symbole wie $\equiv$, $\approx$, $\sim$, die dem Gleichheitszeichen mehr oder weniger ähneln.

Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M, so heißt die Menge der Elemente von M, die zu einem gegebenen $m \in M$ in Relation stehen, die *Äquivalenzklasse* von m (bzgl. der Äquivalenzrelation $\sim$), und das Element m heißt *Repräsentant* oder *Vertreter* seiner Äquivalenzklasse. Für die Äquivalenzklassen gibt es viele verschiedene Notationen; ich schreibe hier $[m]_\sim$ für die Äquivalenzklasse von m. In Formeldarstellung ist also

$$[m]_\sim = \{m' \in M \mid m \sim m'\}$$

Das Besondere an eineer Äquivalenzrelation ist nun, dass zwei Äquivalenzklassen entweder gleich sind oder disjunkt (d. h. dass sie kein gemeinsames Element haben). Die Äquivalenzklassen bilden also eine sogenannte *Partition* von M, eine Aufteilung von M in verschiedene Teile.

(Hat man eine Partition $(M_i)_{i \in I}$ von M – das bedeutet also, dass die Vereinigung der M_i ganz M ist und dass je zwei verschiedene M_i disjunkt sind – dann bekommt man umgekehrt daraus eine Äquivalenzrelation

$$x \in M_i \iff y \in M_i$$

deren Äquivalenzklassen gerade die M_i sind.)

Die Bildung von Äquivalenzklassen kann man als einen mathematischen Abstraktionsprozess verstehen. In den Beispielen oben waren die Äquivalenzrelationen von der Art „gleiches Alter“,

„gleicher Rest“. Man kann aber auch den umgekehrten Weg beschreiben: Man kann zum Beispiel Dinge als gleichfarbig erkennen, ohne einen Namen für ihre Farbe zu haben oder überhaupt über das abstrakte Konzept „Farbe“ zu verfügen. Dann kann man im Nachhinein die Farbe von Dingen als die gemeinsam Eigenschaft aller gleichfarbiger Dinge definieren. Im Alltag wählt man typischerweise noch Repräsentanten aus: Statt „gelb“ könnte man „bananenfarben“ sagen, „orange“ ist kurz für „von der Farbe einer Orange“, etc.

In der Mathematik ist dies ein sehr fruchtbares Verfahren, um „fehlende“ Objekte einzuführen. Wenn man von den natürlichen Zahlen ausgeht, stellt man zum Beispiel fest, dass manche Gleichungen von der Form $m = n + x$ für natürliche Zahlen m, n eine Lösung für x haben, andere nicht. Die Gleichung $5 = 2+x$ (bzw. die Rechnung $5-2$) löst sich durch $x = 3$. Dagegen gibt es keine natürliche Zahl, die man für x einsetzen könnte, so dass $2 = 5 + x$ gilt. (Anders ausgedrückt: $2 - 5$ kann man in $\mathbb{N}$ nicht ausrechnen.) Wenn man dies beheben will, muss man die negativen Zahlen erfinden.

Die Grundidee ist, dass man gewissermaßen die Gleichungen selbst als die neuen Zahlen betrachtet. Die Gleichung $2 = 5+x$ wird durch das (geordnete!) Paar $(2, 5)$ bestimmt; man könnte also versuchen die Paare natürlicher Zahlen, also $\mathbb{N}^2$, als neue Zahlen aufzufassen.

Wenn nun allerdings $2 = 5 + x$ eine Lösung x in den neuen Zahlen hat und für diese neuen Zahlen vernünftige Rechenregeln gelten, wird für dieses x auch $1+2 = 1+5+x$, also $3 = 6+x$ gelten. Man muss also $(2, 5)$ und $(3, 6)$ identifizieren.

Dafür definiert man eine Relation $\sim$ auf $\mathbb{N}^2$ durch:

$$\begin{aligned}(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \iff & \text{ es gibt eine natürliche Zahl } k \text{ mit } m_1 + k = m_2 \text{ und } n_1 + k = n_2 \\ & \text{ oder mit } m_1 = m_2 + k \text{ und } n_1 = n_2 + k\end{aligned}$$

Man kann nachrechnen, dass dies eine Äquivalenzrelation ist (Reflexivität und Symmetrie sind leicht; die Transitivität ist etwas mühsamer).

Die Äquivalenzklasse $[(m, n)]_\sim$ möchte man nun als Lösung der Gleichung $m = n + x$ ansehen können Es soll also irgendwie $n + [(m, n)]_\sim = m$ gelten.

Um dem Sinn zu verleihen, bemerkt man zunächst, dass die natürlichen Zahlen selbst als solche Äquivalenzklassen aufgefasst werden können: Die Zahl 2 ist zum Beispiel Lösung der Gleichung $6 = 4 + x$, entspricht also nach den Überlegungen der Äquivalenzklasse $[(6, 4)]_\sim$.
(Man kann sich sicherheitshalber überlegen, dass jedes Element der Äquivalenzklasse von der Form $(2 + k, k)$ ist, also 2 tatsächlich Lösung jeder der Gleichungen $2 + k = k + x$ ist.)
Allgemeiner entspricht also jede natürliche Zahl m der Äquivalenzklasse $[(m, 0)]_\sim$. Insbesondere entsprechen verschiedene natürliche Zahlen auch verschiedenen Äquivalenzklassen. Man kann also die natürliche Zahlen in den Äquivalenzklassen wiederfinden und sie mit ihren Entsprechungen identifizieren.

Nun braucht man eine Addition der Äquivalenzklassen, die mit der Addition der natürlichen Zahlen verträglich ist. Das bedeutet, dass $[(m, 0)]_\sim + [(m', 0)]_\sim = [(m + m', 0)]_\sim$ sein muss. Dafür gibt es wieder nur eine sinnvolle Möglichkeit: Wenn für x die Gleichung $m_1 = n_1 + x$ gilt und für y die Gleichung $m_2 = n_2 + y$ und die neue Addition weiterhin assoziativ und kommutativ sein soll, dann muss für $x+y$ die Gleichung $(m_1+m_2) = (n_1+n_2)+(x+y)$ gelten. Also setzt man

$$[(m_1, n_1)]_\sim + [(m_2, n_2)]_\sim = [(m_1 + m_2, n_1 + n_2)]_\sim$$

Aber ist dies überhaupt eine sinnvolle Definition? Sie benutzt nämlich die konkreten Repräsentanten (m_1, n_1) und (m_2, n_2) der Äquivalenzklassen links, und möglicherweise gibt es mit anderen Repräsentanten ja ein anderes Ergebnis rechts? Man muss also zeigen, dass für $(m_1, n_1) \sim (m'_1, n'_1)$ und $(m_2, n_2) \sim (m'_2, n_2)'$ auf der rechten Seite das selbe Ergebnis herauskommt, also dass dann $(m_1 + m_2, n_1 + n_2) \sim (m'_1 + m'_2, n'_1 + n'_2)$ gilt. Dies nennt man die *Wohldefiniertheit* der definierten Addition oder die *Repräsentantenunabhängigkeit* der Definition. Das kann man hier nun tatsächlich beweisen.

Nun ist man am Ziel: Die Gleichung $2 = 5 + x$ wird zu $[(5, 0)]_\sim + x = [(2, 0)]_\sim$. Diese Gleichung hat nun eine Lösung in den Äquivalenzklassen, nämlich $[(2, 5)]_\sim$, denn $[(5, 0)]_\sim + [(2, 5)]_\sim = [(7, 5)]_\sim = [(2, 0)]_\sim$, denn $(7, 5) \sim (2, 0)$.

Die Äquivalenzklassen $[(m, n)]_\sim$ nennt man nun *ganze Zahlen*. Man kann sich noch überlegen, dass jede Äquivalenzklasse einen Repräsentanten der Form $(m, 0)$ oder der Form $(0, n)$ hat. Für Äquivalenzklassen $[(m, 0)]_\sim$ schreibt man wieder kurz m, für Äquivalenzklassen $[(0, n)]_\sim$ schreibt man kurz $-n$.

Man kann sich dann noch überlegen, dass man durch

$$[(m_1, n_1)]_\sim \cdot [(m_2, n_2)]_\sim = [(m_1 m_2 + n_1 n_2, m_1 n_2 + m_2 n_1,)]_\sim$$
$$[(m_1, n_1)]_\sim \leqslant [(m_2, n_2)]_\sim \iff m_2 + n_1 \leqslant m_1 + n_2$$

eine Multiplikation und eine Anordnung auf den ganzen Zahlen bekommt, die die Multiplikation und die Anordnung der natürlichen Zahlen fortsetzt, und dass für Addition, Multiplikation und Anordnung die bekannten Rechenregeln gelten.

⌈ *Diese Möglichkeit, die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ einzuführen, mag zunächst sehr umständlich anmuten, wenn man es mit der Variante vergleicht, für alle positiven natürlichen Zahlen n einfach ein neues Element $-n$ zu erfinden und dann die Addition, Multiplikation und Anordnung via Fallunterscheidung zu definieren.*

Die Technik der Äquivalenzklassen ist aber sehr vielfältig einsetzbares Werkzeug, das einem auch dort Lösungen gibt, wo man durch einfaches Herumknobeln ncht weiterkommt. Außerdem ist das Nachprüfen der Rechenregeln in der Regel sehr viel einfacher! ⌋

Werbung

Es gibt von mir ein Skript „Einführung in Sprache und Grundbegriffe der Mathematik“, das als eine Art Nachschlagewerk vor allem für deijenigen gedacht ist, die nur eine der beiden Grundvorlesungen „Analysis I“ und „Lneare Algebra I“ hören. Dieses Skript führt einige hier nur angedeutete Sachen aus:

`https://home.mathematik.uni-freiburg.de/junker/skripte/Grundlagen-WS1011.pdf`