Le Groupe Quantique $U_q(\mathfrak{sl}(2))$

N. Libedinsky

22 mai 2012

1 Introduction

Les groupes de Lie continus, comme le groupe unitaire et orthogonal, ont été très importants dans le déroulement des nouveaux modèles dans la physique de particules. Mais à la fin des années 1970 on s'est rendu compte qu'il y avait, au moins dans des cas simples, une structure algébrique plus complexe, basée sur les groupes de Lie, mais deformée dans quelque sens qui dépendait de la constante de Planck : les groupes “quantiques”. Mais seulement dans les années 80, Jimbo et Drinfeld ont posé des fondements mathématiques solides.

Le terme “Groupe Quantique” fut popularisé par Drinfeld dans le “International Congress of Mathematicians” à Berkeley (1986). Les groupes quantiques sont certaines algèbres de Hopf qui sont déformations non triviales des algèbres envelopantes d'Algèbres de Lie semisimples ou des algèbres des fonctions régulières dans les groupes algébriques correspondants.

Très vite on s'est rendu compte que les groupes quantiques avaient des connections très proches avec beaucoup des parties des mathématiques et de la physique, en principe loin les unes des autres.

Le but de cet exposé est d'analyser en détail les répresentations du groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}(2))$, qui est une déformation non triviale de $U(\mathfrak{sl}(2))$, l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{sl}(2)$. C'est l'exemple le plus simple de groupe quantique, et très important. Dans la $2^{ème}$ section on va donner le vocabulaire des algèbres de Hopf et dans la $3^{ème}$ on va voir certaines proprietés fondamentales des algèbres de Hopf qui vont être utiles pour la dernière section. Dans la $4^{ème}$ section on presentera les définitions de $U(\mathfrak{sl}(2))$ et $U_q(\mathfrak{sl}(2))$, la relation entre eux, et une base de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$. Dans la dernière section on va prouver les théorèmes qui caractérisent tous les U_q-modules de dimension finie quand q n'est pas une racine de l'unité.

2 Préliminaires

On va commencer par les algèbres libres, qui vont être utiles pour définir U_q dans la section 4.

Soit X un ensemble. On considère l'espace vectoriel $k\{X\}$ ayant comme base l'ensemble de tous les mots $x_{i_1} \dots x_{i_p}$ sur l'alphabet X, y compris le mot vide $\emptyset$. On définit une multiplication dans $k\{X\}$ par

$$(x_{i_1} \dots x_{i_p})(x_{i_{p+1}} \dots x_{i_n}) = x_{i_1} \dots x_{i_p} x_{i_{p+1}} \dots x_{i_n}$$

Ce qui munit $k\{X\}$ d'une structure d'algèbre, $\emptyset$ étant l'unité. Cette algèbre est appelée algèbre libre sur l'ensemble X. Si $X = \{x_1, \dots x_n\}$ on va noter aussi $k\{X\} = k\{x_1, \dots x_n\}$. Les algèbres libres ont la propriété universelle suivante

Proposition 1 *Soit X un ensemble. Étant donnée une algèbre A et une application d'ensembles f de X vers A, il existe une unique morphisme d'algèbre $\overline{f} : k\{X\} \to A$ tel que $\overline{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in X$.*

Preuve Il suffit de définir $\overline{f}$ pour chaque mot de X. Pour le mot vide on définit $\overline{f}(\emptyset) = 1$. Sinon, si $x_{i_1}, \dots, x_{i_p}$ sont des éléments de X, on définit

$$\overline{f}(x_{i_1} \dots x_{i_p}) = f(x_{i_1}) \dots f(x_{i_p}).$$

On conclut aisément. □

Avec les notations précédentes on a la proposition suivante :

Proposition 2 *Si I est un idéal bilatère de $k\{X\}$, et A' est une algèbre, on a la bijection suivante :*

$$Hom_{Alg}(k\{X\}/I, A') \cong \{f \in Hom_{Ens}(X, A'); \overline{f}(I) = 0\}.$$

Définition 1 *Soit A une algèbre, et $\mu_A : A \otimes A \to A$ sa multiplication. On définit l'algèbre opposée A^{op} comme l'algèbre avec le même espace vectoriel sous-jacent, mais où on définit la multiplication de la manière suivante*

$$\mu_{A^{op}} = \mu_A \circ \tau,$$

où τ est l'échange des deux facteurs du produit tensoriel

Définition 2 *Soit A une algèbre. Un A-module est un espace vectoriel V avec une application bilinéaire $(a, v) \mapsto av$ de $A \times V$ dans V tel que*

$$a(a'v) = (aa')v \qquad et \qquad 1v = v$$

Remarque : Cette notion équivaut à celle d'une représentation de A dans V, i.e.

$\rho : A \longrightarrow End(V)$

On sait qu'une k-algèbre A peut être définie par un triplet (A, μ, η), avec A un espace vectoriel, et μ, η des applications linéaires vérifiant les deux axiomes

(Ass) :Le carré

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu \otimes id"] \arrow[d, "id \otimes \mu"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A \end{tikzcd}$$

commute.

(Un) :Le diagramme

$$\begin{tikzcd} k \otimes A \arrow[r, "\eta \otimes id"] \arrow[dr, "\cong"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & A \otimes k \arrow[l, "id \otimes \eta"'] \arrow[dl, "\cong"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

commute

(Ass) traduit l'associativité du produit, et (Un) le fait que $\eta(1)$ est l'unité de A.

L'algèbre A est commutative si de plus elle satisfait l'axiome

(Comm) : Le triangle suivante commute

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\tau_{A,A'}"] \arrow[dr, "\mu"] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ & A \end{tikzcd}$$

où $\tau_{A,A'}$ est le flip qui échange les facteurs : $\tau_{A,A'}(a \otimes a') = a' \otimes a$.

Un morphisme d'algèbres $f : (A, \mu, \eta) \to (A', \mu', \eta')$ est alors une application linéaire de A dans A' tel que

$$\mu' \circ (f \otimes f') = f \circ \mu \qquad et \qquad f \circ \eta = \eta'.$$

Maintenant on obtient la définition de cogèbre en reversant systématiquement les flèches des diagrammes précédents

Définition 3 *Une cogèbre est un triplet $(C, \triangle, \epsilon)$, avec C un k-espace vectoriel et $\triangle : C \to C \otimes C$ et $\epsilon : C \to k$ des applications linéaires vérifiant les deux axiomes*

(Coass) : Le carré

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\triangle"] \arrow[d, "\triangle"'] & C \otimes C \arrow[d, "id \otimes \triangle"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\triangle \otimes id"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

commute.

(Coun) :Le diagramme

$$\begin{tikzcd} k\otimes C & C\otimes C \arrow[l, "\epsilon\otimes id"'] \arrow[r, "id\otimes\epsilon"] & C\otimes k \\ & C \arrow[ul, "\cong"] \arrow[u, "\triangle"] \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

commute.

L'application $\triangle$ est appelée coproduit, et ϵ est appelée counité. Si, de plus, le triangle (Cocomm)

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "\triangle"] \arrow[dr, "\triangle"] & \\ C\otimes C \arrow[r, "\tau_{C,C}"] & C\otimes C \end{tikzcd}$$

commute, on dit que la cogèbre C est cocommutative.

Un morphisme de cogèbres $f : (C,\triangle,\epsilon) \to (C',\triangle',\epsilon')$ est une application linéaire de C dans C' telle que

$$(f\otimes f')\circ\triangle = \triangle'\circ f \qquad \text{et} \qquad \epsilon = \epsilon'\circ f.$$

Exemple. (Produit tensoriel de cogèbres) Le produit tensoriel $C\otimes C'$ de deux cogèbres $(C,\triangle,\epsilon)$ et $(C',\triangle',\epsilon')$ a une structure de cogèbre avec counité $\epsilon\otimes\epsilon'$ (on utilise l'identification naturelle de $k\otimes k$ et k)et coproduit $(id\otimes\tau_{C,C'}\otimes id)\circ(\triangle\otimes\triangle')$.

Maintenant, si on a une algèbre (A,μ,η) qui a aussi une structure de cogèbre $(A,\triangle,\epsilon)$, on va dire que c'est une bigèbre si il y a une relation de "compatibilité" entre ces deux structures. On donne à $A\otimes A$ la structure d'algèbre usuelle et de cogèbre de l'exemple précédent.

Définition-Théorème 1 *Avec les notations précédentes, il y a équivalence entre*

1. *Les applications μ et η sont des morphismes de cogèbres*
2. *Les applications $\triangle$ et ϵ sont des morphismes d'algèbres*

Dans ce cas, on dit que $(A,\mu,\eta,\triangle,\epsilon)$ est une bigèbre.

Preuve : Chaque assertion est équivalente à exactement les 4 mêmes diagrammes commutatifs. $\square$

Notation sigma de Sweedler : On sait que

$$\triangle(x) = \sum_i x'_i \otimes x''_i$$

Pour éliminer les indices, on va appeler cette somme de la manière suivante

$$\triangle(x) = \sum_{(x)} x' \otimes x'' \tag{1}$$

Exemples

1. On continue avec l'exemple précédent. Dans ce cas là le coproduit s'exprime

$$\triangle(x \otimes y) = \sum_{(x\otimes y)} (x \otimes y)' \otimes (x \otimes y)'' = \sum_{(x)(y)} (x' \otimes y') \otimes (x'' \otimes y'') \tag{2}$$

2. Le fait que, dans une bigèbre, $\triangle$ soit un morphisme d'algèbre , se traduit en

$$\sum_{(xy)} (xy)' \otimes (xy)'' = \sum_{(x)(y)} (x'y') \otimes (x''y''). \tag{3}$$

Si C est une cogèbre et A une algèbre, on va munir $Hom(C, A)$, l'espace d'applications linéaires de C dans A, d'une structure d'algèbre. Pour cela on définit une application bilinéaire : Si $f, g \in Hom(C, A)$ on appelle convolution de f et g, et on note $f * g$ la composition des applications suivantes :

$$C \xrightarrow{\triangle} C \otimes C \xrightarrow{f\otimes g} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A$$

La proposition suivante est un résultat des définitions d'algèbre, cogèbre et convolution, si on utilise la notation de Sweedler.

Proposition 3 *Le triplet* $(Hom(C, A), *, \eta \circ \epsilon)$ *est une algèbre*

Définition 4 *Soit* $(H, \mu, \eta, \triangle, \epsilon)$ *une bigèbre. Un endomorphisme* S *de* H *est appelé antipode pour la bigèbre* H *si c'est un inverse de l'identité pour la convolution. Une algèbre de Hopf est une bigèbre admettant une antipode.*

Dans la notation de Sweedler on a que les relations définissant l'opération * et l'antipode sont respectivement

$$(f * g)(x) = \sum_{(x)} f(x')g(x''), \tag{4}$$

$$\sum_{(x)} x'S(x'') = \epsilon(x)1 = \sum_{(x)} S(x')x'' \tag{5}$$

3 Quelques propriétés des algèbres de Hopf

Proposition 4 *Soit H une bigèbre et $S : H \to H^{op}$ une morphisme d'algèbre. Supposons que H est engendré comme algèbre par un sous-ensemble X tel que*

$$\sum_{(x)} x' S(x'') = \epsilon(x)1 = \sum_{(x)} S(x')x'' \tag{6}$$

pour tout $x \in X$. Alors S est une antipode pour H.

Preuve : Il suffit de prouver que si (6) est satisfait par x et y, alors il est satisfait par le produit xy. Le fait que $\triangle$ soit un morphisme d'algèbre nous donne

$$\sum_{(xy)} (xy)' S((xy)'') = \sum_{(x)(y)} x'y'S(x''y'').$$

Comme $S(x''y'') = S(y'')S(x'')$ par hypothèse, et $\epsilon : H \to k$ on a

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{(x)(y)} x'y'S(x''y'') &= \textstyle\sum_{(x)} x' \Big(\sum_{(y)} y'S(y'')\Big) S(x'') \\
&= \Big(\textstyle\sum_{(x)} x'S(x'')\Big)\epsilon(y) \\
&= \epsilon(x)\epsilon(y) \\
&= \epsilon(xy),
\end{aligned}$$

la dernière égalité vient du fait que ϵ est un morphisme d'algèbre. Similairement on voit que $\sum_{(x)(y)} S((xy)')(xy)'' = \epsilon(xy)$ □

Proposition 5 *Soit $(A, \mu, \nu, \triangle, \epsilon, S)$ une algèbre de Hopf. Alors S est un morphisme d'algèbre de A dans A^{op}, i.e., on a*

$$S(xy) = S(y)S(x) \qquad \textit{et} \qquad S(1) = 1 \tag{7}$$

Preuve : On munit $A \otimes A$ de la estructure de cogèbre qu' on a définie dans l'exemple. On définit les applications ν, ρ dans $Hom(A \otimes A, A)$ par

$$\nu(x \otimes y) = S(y)S(x) \qquad et \qquad \rho(x \otimes y) = S(xy),$$

où $x, y \in A$. On veut montrer que $\rho = \nu$, mais l'algèbre $Hom(A \otimes A, A)$ admet comme neutre $\eta \circ (\epsilon \otimes \epsilon)$ donc il faut seulement montrer que $\rho * \mu = \mu * \nu = \eta \circ (\epsilon \otimes \epsilon)$, car A est associative. Mais (4), (2), (3) et (6) donnent

$$\begin{aligned}
(\rho * \mu)(x \otimes y) &= \textstyle\sum_{(x \otimes y)} \rho((x \otimes y)')\mu((x \otimes y)'') \\
&= \textstyle\sum_{(x)(y)} \rho(x' \otimes y')\mu(x'' \otimes y'') \\
&= \textstyle\sum_{(x)(y)} S(x'y')x''y'' \\
&= \textstyle\sum_{(xy)} S((xy)')(xy)'' \\
&= \eta\epsilon(xy) \\
&= \eta\epsilon(x)\epsilon(y).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a par (4), (2) et (6)

$$\begin{array}{rcl}(\mu * \nu)(x\otimes y) & = & \sum_{(x\otimes y)} \mu((x\otimes y)')\nu((x\otimes y)'') \\ & = & \sum_{(x)(y)} x'y'S(y'')S(x'') \\ & = & \sum_{(x)} x'\Big(\sum_{(y)} y'S(y'')\Big)S(x'') \\ & = & \sum_{(x)} x'\epsilon(y)S(x'') \\ & = & \eta\epsilon(x)\epsilon(y),\end{array}$$

qui est la même chose. Pour conclure, rappelons que $\triangle$ et ϵ sont des morphismes d'algèbre, alors $\triangle(1) = 1\otimes 1$ et $\epsilon(1) = 1$. On applique la definition d'antipode $(id{*}S)(x) = \eta\epsilon(x)$ a $x = 1$, ce qui donne $S(1) = 1$ $\square$

Proposition 6 *Soit $(A, \mu, \nu, \triangle, \epsilon, S)$ une algèbre de Hopf. Il existe une structure naturelle de A-module dans Hom(V, V') quand V et V' sont des A-modules.*

Preuve : On va montrer au début que $Hom(V, V')$ a une structure de $A \otimes A^{op}$-module donnée par

$$\Big((a\otimes a')f\Big)(v) = af(a'v)$$

En fait, on a

$$\begin{array}{rcl}\Big([(a\otimes a')(b\otimes b')]f\Big)(v) & = & \Big((ab\otimes b'a')f\Big)(v)\Big) \\ & = & abf(b'a'v) \\ & = & a\Big((b\otimes b')f\Big)(a'v) \\ & = & \Big((a\otimes a')[(b\otimes b')f]\Big)(v)\end{array}$$

Dans une algèbre de Hopf, $(Id\otimes S)\circ\triangle$ est un morphisme d'algèbre de A dans $A\otimes A^{op}$ par (7) et le fait que $\triangle$ soit un morphisme d'algèbre. Par restriction de scalaires on a une structure de A-algèbre sur $Hom(V, V')$. De manière explicite, si $a \in A$, $v \in V$, et $f \in Hom(V, V')$, l'action de A sur $Hom(V, V')$ est donnée par

$$(af)(v) = \sum_{(a)} a'f(S(a'')v)$$

$\square$

4 $U(\mathfrak{sl}(2))$ et $U_q(\mathfrak{sl}(2))$

Définition 5 *(a) Une algèbre de Lie est un espace vectoriel avec une application bilinéaire $[,] : L\times L \to L$ appelée crochet de Lie, qui satisfait les deux conditions suivantes pour tout $x, y, z \in L$*

1. *(antisymétrie)* $[x, y] = -[y, x]$,

2. (identité de Jacobi) $\qquad [x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$

(b)Une sous-algèbre de Lie est un sous-espace L' de L tel que pour tout $(x,y)\in L'\times L'$ on a $[x,y]\in L'$.

Exemple : Soit A une algèbre associative. Si on pose $[a,b]=ab-ba$ pour tout $a,b\in A$, il est facile de montrer que cette application est antisymétrique et satisfait l'identité de Jacobi. On va appeler cette algèbre de Lie $L(A)$. Quand $A=End(V)$, avec V un espace vectoriel, on désigne $L(End(V))$ par $\mathfrak{gl}(V)$. Quand V est de dimension n, on désigne $\mathfrak{gl}(V)$ par $\mathfrak{gl}(n)$, et la sous-algèbre de Lie des applications linéaires de trace nulle sera notée $\mathfrak{sl}(n)$.

Définition 6 *Soit L une algèbre de Lie. Soit $I(L)$ l'idéal bilatère de l'algèbre tensorielle $T(L)$ engendré par tous les éléments de la forme $xy-yx-[x,y]$ où x,y sont des élements de L. On définit **l'algèbre enveloppante de** L par $U(L)=T(L)/I(L)$.*

Dans le cadre classique, on s'intéresse en particulier à $U(\mathfrak{sl}(2))$. Dans le cas quantique on construit une déformation de cette algèbre. On va supposer dorénavant que le corps de base est le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, et q est un nombre complexe non nul.

Définition 7 *$U_q(\mathfrak{sl}(2))$ est l'algèbre engendrée par les 5 variables E,F,K,K^{-1},L avec les relations de commutation suivantes*

$$KK^{-1}=K^{-1}K=1,$$

$$KEK^{-1}=q^2E,\qquad KFK^{-1}=q^{-2}F,$$
$$[E,F]=L,\qquad (q-q^{-1})L=K-K^{-1},$$
$$[L,E]=q(EK+K^{-1}E),\qquad [L,F]=-q^{-1}(FK+K^{-1}F).$$

On va donner, sans démonstration la relation entre $U(\mathfrak{sl}(2))$ et $U_q(\mathfrak{sl}(2))$

Proposition 7 *Si q=1 on a $U(\mathfrak{sl}(2))\cong U_1(\mathfrak{sl}(2))/(K-1)$*

Dorénavant on va supposer que q est un nombre complexe différent de 0, 1 et -1. Dans ce cas ce n'est pas difficile de prouver que $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ est isomorphe à l'algèbre libre engendrée par les quatre variables E,F,K,K^{-1} , avec les relations

$$KK^{-1}=K^{-1}K=1, \tag{8}$$

$$KEK^{-1}=q^2E,\qquad KFK^{-1}=q^{-2}F, \tag{9}$$

$$[E,F]=\frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}. \tag{10}$$

On va utiliser cette définition dans la suite. On va introduire quelques notations.

Pour chaque entier n on pose

$$[n]=\frac{q^n-q^{-n}}{q-q^{-1}}$$

Noter que cela a un sens parce que q est différent de 0, 1 et -1. On définit la factorielle

$$[k]! = [1][2]\dots[k]$$

On va noter U_q l'algèbre $U_q(\mathfrak{sl}(2))$

Lemme 1 *Soit $m \geq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a les relations suivantes dans U_q :*

$$E^m K^n = q^{-2mn} K^n E^m, \qquad F^m K^n = q^{2mn} K^n F^m, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}[E, F^m] &= [m]F^{m-1}\tfrac{q^{-(m-1)}K - q^{m-1}K^{-1}}{q-q^{-1}} \\ &= [m]\tfrac{q^{m-1}K - q^{-(m-1)}K^{-1}}{q-q^{-1}}F^{m-1},\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}[E^m, F] &= [m]\tfrac{q^{-(m-1)}K - q^{m-1}K^{-1}}{q-q^{-1}}E^{m-1} \\ &= [m]E^{m-1}\tfrac{q^{m-1}K - q^{-(m-1)}K^{-1}}{q-q^{-1}}.\end{aligned} \tag{13}$$

Preuve : Les deux premières relations sont une consequence triviale de (8)-(10). La troisième se démontre par récurrence sur m. □

On va donner encore sans démonstration la proposition suivante

Proposition 8 *L'ensemble $\{E^i F^j K^l\}_{i,j\in\mathbb{N};l\in\mathbb{Z}}$ est une base de U_q.*

Proposition 9 *Les relations suivantes munissent U_q d'une structure d'algèbre de Hopf*

$$\triangle(E) = 1\otimes E + E\otimes K, \qquad \triangle(F) = K^{-1}\otimes F + F\otimes 1, \tag{14}$$

$$\triangle(K) = K\otimes K, \qquad \triangle(K^{-1}) = K^{-1}\otimes K^{-1}, \tag{15}$$

$$\epsilon(E) = \epsilon(F) = 0, \qquad \epsilon(K) = \epsilon(K^{-1}) = 1 \tag{16}$$

$$S(E) = -EK^{-1}, \qquad S(F) = -KF, \qquad S(K) = K^{-1}, \qquad S(K^{-1}) = K. \tag{17}$$

Idée de la preuve : Pour montrer que $\triangle$ définit un morphisme d'algèbre de U_q vers $U_q\otimes U_q$, en regardant la proposition 2, on voit qu'il suffit de montrer

$$\triangle(K)\triangle(K^{-1}) = \triangle(K^{-1})\triangle(K) = 1,$$

$$\triangle(K)\triangle(E)\triangle(K^{-1}) = q^2\triangle(E), \qquad \triangle(K)\triangle(F)\triangle(K^{-1}) = q^{-2}\triangle(F),$$

$$[\triangle(E), \triangle(F)] = \frac{\triangle(K) - \triangle(K^{-1})}{q - q^{-1}}$$

Pour cela on utilise les relations (8)-(10), et (14)-(17). De même on démontre que ϵ :$\mathrm{U}_q \to \mathbb{C}$ et S :$\mathrm{U}_q \to U_q^{op}$ sont des morphismes d'algèbre. Cette dernière affirmation et le fait que

$$\sum_{(x)} x'S(x'') = \epsilon(x)1 = \sum_{(x)} S(x')x''$$

pour chaque générateur E, F, K, K^{-1} permettent de conclure que S est une antipode par la prop. (4), si on a que U_q^{op} est une bigèbre. Mais est facile de verifier que $\triangle$ et ϵ satisfont la coassociativité et la counité. □

5 Représentations de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$.

On va supposer dans cette section que q n'est pas une racine de l'unité. On se propose, dans un premier moment, de trouver les représentations simples de U_q, et puis montrer que toutes les modules de dimension finie sont somme directe de ces modules.

Définition 8 *Soit V un U_q-module et λ un nombre complexe. On appellera λ un poids de V si $\lambda \neq 0$ et si il existe un vecteur $v \neq 0$ tel que $Kv = \lambda v$. Un vecteur $v \neq 0$ est un vecteur de plus haut poids, de poids λ, si $Ev = 0$ et $Kv = \lambda v$.*

Proposition 10 *Soit V un U_q-module de dimension finie. Alors V contient une vecteur de plus haut poids.*

Preuve. Il existe un complexe α, et un vecteur w différent de zéro tel que $Kw = \alpha w$, parce que K agit comme une application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, qui est algébriquement clos. Si $Ew = 0$, on a fini. Sinon, on considère la suite de vecteurs $E^n w$, avec n entier positif. On voit, à partir des relations de commutation (def. 7), que $E^n w$ est une suite de vecteurs propres de K à valeurs propres q^{2n} . Comme q n'est pas racine de l'unité, ces valeurs propres sont différentes deux a deux. Alors, il existe un entier n tel que $E^n w \neq 0$ et $E^{n+1} w = 0$. Donc le vecteur $v = E^n w$ est un vecteur de plus haut poids. $\square$

Lemme 2 *Soit v un vecteur de plus haut poids, de poids λ. On pose $v_0 = v$ et $v_p = \frac{1}{[p]!} F^p v$ pour $p > 0$. Alors*

$$Kv_p = \lambda q^{-2p} v_p, \qquad Ev_p = \frac{q^{-(p-1)}\lambda - q^{p-1}\lambda^{-1}}{q - q^{-1}} v_{p-1}, \qquad Fv_{p-1} = [p] v_p$$

Preuve : C'est une conséquence facile du lemme 1. $\square$

Maintenant on peut classifier tous les U_q-modules simples de dimension finie.

Théorème 1 *Pour chaque entier n positif, il y a exactement deux U_q-modules simples de dimension $n + 1$ à isomorphisme près, appelés $V_{1,n}$ et $V_{-1,n}$. Ils sont engendrés par des vecteurs de plus haut poids, de poids respectifs q^n et $-q^n$.*

Preuve : Soit V un U_q-module simple. Par la prop. 10, il existe un vecteur v appartenant à V de plus haut poids, de poids λ. Mais comme V est simple le sous module engendré par v est V. Le lemme 2 nous dit que la suite $\{v_p\}_{p \geq 0}$ est une suite de vecteurs propres de K à valeurs propres différentes. V étant de dimension finie, il existe un entier n tel que $v_n \neq 0$ et $v_{n+1} = 0$ ($v \neq 0$ par définition de vecteur de plus haut poids). Comme $[m]! \neq 0$ pour m entier positif, la définition de v_m montre que $v_m = 0$ pour $m > n$ et $v_m \neq 0$ pour $m \leq n$. On voit bien que la famille $\{v_0, \ldots, v_n\}$ est libre, parce que elle est composée de vecteurs propres non nuls de K à valeurs propres différentes. D'autre part, elle engendre V comme espace vectoriel, parce que la prop.8 dit que tout élement de V (engendré par v comme module) est somme finie d'élements de la forme $E^i F^j K^l v$, avec $(i,j,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times Z$, et le lemme 2 montre que cet élément est bien une combinaison linéaire des v_i. Alors on a que $\{v_0, \ldots, v_n\}$ est une base, donc la dimension de V est $n+1$.

Encore par le lemme précédent on a

$$0 = Ev_{n+1} = \frac{q^{-n}\lambda - q^n\lambda^{-1}}{q - q^{-1}} v_n$$

Alors $q^{-n}\lambda = q^n\lambda^{-1}$ ce qui revient à dire $\lambda = q^n$ ou $\lambda = q^{-n}$.

On va prouver que deux modules simples de dimension finie, W et W', engendrés par des vecteurs de plus haut poids, w et w', respectivement, avec le même poids, sont isomorphes. On considère l'application linéaire f qui envoie w_i sur w'_i. On va vérifier que f est U_q- linéaire. Il faut seulement le vérifier pour les éléments de la forme $E^iF^jK^lw$. Mais par le lemme 2, si $E^iF^jK^lw = \sum_{k=0}^n \alpha_k w_k$, on a aussi $E^iF^jK^lw' = \sum_{k=0}^n \alpha_k w'_k$, donc

$$f(E^iF^jK^lw) = \sum_{k=0}^n \alpha_k w'_k = E^iF^jK^lw' = E^iF^jK^lf(w)$$

Alors f est U_q linéaire et comme c'est clairement une bijection (bijection entre deux bases), c'est un isomorphisme.

Pour conclure il faut montrer que les modules de l'énoncé existent. Pour $\epsilon = \pm 1$ on va considérer le morphisme $\rho_{\epsilon,n}$ suivant, de U_q dans $M_{n+1}(\mathbb{C})$:

$$\rho_{\epsilon,n}(K) = \epsilon \begin{pmatrix} q^n & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & q^{n-2} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & q^{-n+2} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & q^{-n} \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$\rho_{\epsilon,n}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & [2] & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & [n] & 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\rho_{\epsilon,n}(E) = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & [n] & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & [n-1] & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

On peut vérifier que ce morphisme est un morphisme d'algèbre. On va montrer que c'est irréductible comme représentation, ce qui va permettre de conclure. Soit $V = \mathbb{C}^{n+1}$ et

$\{v_0, \ldots, v_n\}$ sa base canonique. On définit E, F et K comme dans (18)-(20) vues dans cette base. Supposons que W soit une sous-représentation, et $v = \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} v_{r+1} + \ldots \lambda_p v_p \in W$, avec $r \geq 0$ et $p \leq n$. Alors $E^p(v) = \alpha v_0 \in W$. Comme q n'est pas racine de l'unité, $[j] \neq 0$ pour j positif, et α étant un produit d'élements de cette forme, on a $\alpha \neq 0$, alors $v_0 \in W$. Supposons par hypothèse de récurrence que pour $i \leq s$ on a $v_i \in W$, avec $s \leq p-1$. Alors $E^{p-s-1}v = \beta_0 v_0 + \ldots + \beta_{s+1} v_{s+1} \in W$, et $\beta_{s+1} \neq 0$, par le même argument qu'avant. Mais par hypothèse de récurrence, $E^{p-s-1}v - \beta_0 v_0 + \ldots + \beta_s v_s = \beta_{s+1} v_{s+1} \in W$, alors $v_{s+1} \in W$. Alors on conclut que pour tout $i \leq p$, $v_i \in W$. Si on fait la même chose, mais en regardant l'action de F sur W, on obtient que pour tout $i \geq r$, $v_i \in W$. Comme $r \leq p$, on a que $v_i \in W$ pour tout $0 \leq i \leq n$, donc $W = V$. Alors la représentation est irréductible. On appellera $V_{\epsilon,n}$ le module déduit de ce morphisme. $\square$

Remarque : On peut trouver le morphisme $\rho_{\epsilon,n}$ en utilisant les relations du lemme 2, dans un espace vectoriel ayant pour base $\{v_0, \ldots, v_n\}$.

On va montrer maintenant un lemme technique utile pour le dernier théorème.

Lemme 3 *Il existe un élément C dans le centre de U_q agissant par zéro dans $V_{\epsilon,0}$ et par un complexe différent de zéro dans $V_{\epsilon',n}$ quand n est un entier strictement positif et $\epsilon, \epsilon' = \pm 1$*

Preuve : On définit $C = EF + \frac{q^{-1}K + qK^{-1}}{(q-q^{-1})^2} - \epsilon \frac{q+q^{-1}}{(q-q^{-1})^2} Id.$

Pour vérifier qu'il est dans le centre, il faut seulement vérifier qu'il commute avec les générateurs, et cela est facile si on utilise les relations de commutation.

Avec les expressions matricielles des générateurs on arrive facilement à vérifier que C agit sur $V_{\epsilon,0}$ par

$$\epsilon \frac{q+q^{-1}}{(q-q^{-1})^2} Id - \frac{q+q^{-1}}{(q-q^{-1})^2} Id = 0$$

Et sur $V_{\epsilon',n}$ par

$$\epsilon' \frac{q^{n+1} + q^{-(n+1)}}{(q-q^{-1})^2} Id - \frac{q+q^{-1}}{(q-q^{-1})^2} Id = \frac{(q^{n+2} - \epsilon\epsilon')(q^n - \epsilon\epsilon')}{\epsilon' q^{n+1}(q-q^{-1})^2} Id$$

Et la dernière expression n'est pas zéro, parce que si cela était le cas, q serait une racine $2n$ ou $2n+4$ de l'unité, ce qui n'est pas le cas. $\square$

Maintenant on peut poser le dernier théorème, qui, avec le théorème précédent caractérise tous les U_q-modules de dimension finie quand q n'est pas une racine de l'unité.

Théorème 2 *Tous les U_q-modules de dimension finie sont semisimples.*

Preuve : Soit V un U_q-module de dimension finie. On sait que dans une algèbre associative les modules complètement réductibles sont les modules semisimples. Alors il suffit de montrer que si V' est un sous-module de V, il existe un deuxième sous-module V'' de V tel que $V = V' \oplus V''$ comme U_q-module.

1. On va commencer par montrer l'existence d'un tel module quand V' est de codimension 1 dans V. On va le montrer par récurrence sur la dimension de V'.
   a) Si $\dim(V')$ est zéro, on prend $V'' = V$.
   b) Si $\dim(V')$=1, alors V' et V/V' sont des U_q-modules de dimension 1, donc irréductibles. Par le théorème précédent on a qu'ils sont engendrés par des vecteurs v_1 et $\overline{v_2}$ de plus haut poids, de poids ϵ_1 et ϵ_2 respectivement. Soit w un vecteur quelconque dans la classe de $\overline{v_2}$.
      – Si $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$, alors on peut calculer le polynôme caractéristique de K dans la base $\{v_1, w\}$, et on obtient $(\lambda - \epsilon_1)(\lambda - \epsilon_2)$. Alors il existe v_2, vecteur propre de K, de valeur propre ϵ_2. Comme Ev_i est un vecteur propre de K, de valeur propre $\epsilon_i q^2$, qui est différent de ϵ_1 et ϵ_2, on a $Ev_i = 0$ pour $i = 1, 2$. Un argument similaire montre que F agit trivialement sur V. Alors par la prop. 8, on voit que $V = \mathbb{C}v_1 \oplus \mathbb{C}v_2$.
      – Si $\epsilon_1 = \epsilon_2$, alors $Kv_1 = \epsilon v_1$ et si $w = v_2$, $Kv_2 = \epsilon v_2 + \alpha v_1$. Par le même argument que précédemment on a que $Ev_1 = 0$. On va prouver que $Ev_2 = 0$ aussi. Pour ceci, on écrit $Ev_2 = \lambda v_1 + \mu v_2$, donc on a

$$\epsilon\lambda v_1 + \mu(\epsilon v_2 + \alpha v_1) = KEv_2 = q^2 EKv_2 = q^2 E(\epsilon v_2 + \alpha v_1) = \epsilon q^2(\lambda v_1 + \mu v_2),$$

      ce qui revient à dire $\mu\epsilon(q^2 - 1) = 0$, et $\lambda\epsilon(q^2 - 1) = \mu\alpha$. Alors, $\lambda = \mu = 0$. On démontre d'une manière similaire que F agit comme l'opérateur 0 dans V. Mais $[E, F] = 0 \Rightarrow K = K^{-1}$, et $K^{-1}v_2 = \epsilon v_2 - \alpha v_1$ vient d'un calcul facile, donc $\alpha = -\alpha$. Mais $\alpha = 0$ nous dit que K est diagonalisable, et comme avant, on obtient $V = \mathbb{C}v_1 \oplus \mathbb{C}v_2$.
   c) Maintenant on suppose $\dim(V')$=$p > 1$, et que l'assertion reste vraie pour les dimensions plus petites que p.
      – On suppose que V' n'est pas simple. Alors il existe un sous-module V_1 de V' tel que $0 < dim(V_1) < dim(V') = p$. Si π est la projection canonique de V dans $\overline{V} = V/V_1$, on a que le module $\overline{V'} = \pi(V')$ est un sous-module de $\overline{V}$ de codimension 1, et de dimension strictement moins grande que p ($V_1 \cap V'$ n'est pas $\{0\}$). Alors on peut utiliser l'hypothèse de récurrence, ce qui permet de trouver un sous-module $\overline{V''}$ de $\overline{V}$ tel que $\overline{V} \cong \overline{V'} \oplus \overline{V''}$. Alors on a

$$V = \pi^{-1}(V') + \pi^{-1}(\overline{V''}) = V' + \pi^{-1}(\overline{V''}) \tag{21}$$

      La deuxième égalité vient du fait que $V_1 \subset V'$. On peut encore appliquer l'hypothèse de récurrence a $\pi^{-1}(\overline{V''})$, qui a une dimension plus petite que celle de p du fait que $\overline{V} \cong \overline{V'} \oplus \overline{V''}$, et dans laquelle V_1 est un sous-module de codimension 1 ($dim(\overline{V''}) = 1$). Alors on obtient un sous-module V'' de $\pi^{-1}(\overline{V''})$ tel que $\pi^{-1}(\overline{V''}) = V_1 \oplus V''$. Encore (21) et $V_1 \subset V' \Rightarrow V = V' + V''$, et on a $dim(V'') = 1$, ce qui nous donne $dim(V) = dim(V') + dim(V'')$, ce qui permet de conclure que la somme est directe.
      – On suppose que V' est simple. On considère l'élément C du lemme précédent. Comme V/V' est simple, il est isomorphe à $V_{\epsilon,0}$, avec $\epsilon = \pm 1$ par le théorème 1, et par le lemme précédent C agit par zéro dans V/V', alors on a $CV \subset V'$.

D'autre part C agit par une constante $\alpha \neq 0$ dans V' donc on obtient que C/α est un projecteur dans V'. C étant central, clairement ce projecteur est U_q-linéaire, donc V'' satisfait les hypothèses.

2. *Cas Général.* Maintenant on n'a pas de restriction sur la codimension de V'. On va reduire le problème à celui de codimension 1. Pour faire cela, on considère les espaces $W' \subset W$ definis de la manière suivante : W [resp. W'] est le sous-espace de $Hom(V, V')$, des applications qui, restraintes a V', sont une homothètie [resp. zero].On donne $Hom(V, V')$ la structure de U_q-module de la prop. 6. On va montrer que W et W' sont des sous-modules de $Hom(V, V')$. Soit $f \in W$, et α le nombre complexe tel que $f(v) = \alpha v$ pour tout $v \in V'$. En particulier $S(x'')v \in V'$ si $v \in V'$, donc on à, pour tour $x \in U_q$ et $v \in V'$

$$(xf)(v) = \sum_{(x)} x' f(S(x'')v) = \alpha\Big(\sum_{(x)} x' S(x'')\Big)v = \alpha\epsilon(x)v$$

On demontre de facon similaire que W' est un sous-module de $Hom(V, V')$ aussi. D'autre, on a clairement que la codimension de W' dans W est 1, donc on peut utilicer la premier partie de la preuve, et trouver un sous-module de dimension 1 tel que $W = W' \oplus W''$. Donc, si f est un element non nul de W'', par definition f agit dans V' comme une scalaire α different de zero. On deduit que f/α est un projecteur de V dans V', alors $V'' = Ker(f)$ est un espace supplementaire de V'. Pour conclure, il faut seulement montrer que V'' est un sous-module de V. Pour faire cela, on va prouver qu'il est stable par les generateurs de U_q. Soit $v \in V''$. Comme W'' est un sous-module de dimension 1, il est simple, donc avec poids ± 1. Comme la relation $xf = \pm\epsilon(x)f$ est verifié pour les generateurs (regarder (16), (18), (19) et (20)), c'est vraie pour tout $x \in U_q$. En particulier,

$$(K^{-1}f)(v) = \pm\epsilon(K^{-1})f(v) = 0.$$

Les relations (14) et (17) nous donnent

$$(K^{-1}f)(v) = K^{-1}f(Kv),$$

ce qui permet de conclure que $f(Kv) = 0$, ou autrement dit, $KV'' \subset V''$. On Verifie d'une manière similaire que V'' est stable par K^{-1}. D'autre côté, par (16) et la relation $xf = \pm\epsilon(x)f$, on a

$$0 = \pm\epsilon(E)f(Kv) = (Ef)(Kv),$$

et les relations (14) et (17) nous donnent

$$(Ef)(Kv) = f(S(E)Kv) + Ef(K^{-1}Kv) = -f(Ev) + Ef(v),$$

Ce qui nous donne $f(Ev) = 0 \Rightarrow EV'' \subset V''$. D'une manière similaire on obtient que $FV'' \subset V''$, alors V'' est effectivement un sous-module. $\square$

Références

C. Kassel. Quantum Groups, *GTM* (1995).