**UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT- PARIS 7**

École doctorale de Mathématiques de Paris centre

UFR Mathématiques

**THÈSE DE DOCTORAT**

Discipline : Mathématiques

Présentée par

**NICOLAS LIBEDINSKY**

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris 7

# AUTOUR DE LA CATÉGORIE DES BIMODULES DE SOERGEL

~

# ON THE CATEGORY OF SOERGEL'S BIMODULES

**Thèse dirigée par M. Raphaël ROUQUIER**

Soutenue le 17 Novembre 2008 devant le jury composé de

| | |
|---|---|
| **M. Cédric BONNAFÉ** | rapporteur |
| **M. Michel BROUÉ** | examinateur |
| **M. Peter FIEBIG** | examinateur |
| **M. Bernard LECLERC** | examinateur |
| **M. Jean MICHEL** | examinateur |
| **M. Raphaël ROUQUIER** | directeur de thèse |
| **M. Wolfgang SOERGEL** | rapporteur |

# Table des matières

# Remerciements

On ne devrait pas exprimer sa gratitude avec des mots mais plutôt avec des gestes. En tout cas la tradition s'impose... donc pour commencer, je remercie du fond de mon âme Raphaël Rouquier, mon directeur de thèse. Il a été immensément généreux et désintéressé, tant dans le plan humain que mathématique. Il m'a introduit à un sujet passionnant, en consacrant tout le temps nécessaire et en me laissant une grande liberté. Il m'a toujours encouragé et remonté le moral dans les moments difficiles. Raphaël m'a montré dans la pratique l'importance des philosophies derrière les théories. Avec lui j'ai compris à quel point les mathématiques peuvent être riches, profondes, intuitives et mystérieuses. Cela a beaucoup compté pour moi de côtoyer un si profond mathématicien vouant un tel amour à cette discipline. Pour conclure, je suis vraiment fier d'avoir été son élève.

Je remercie Wolfgang Soergel d'avoir été mon rapporteur, d'avoir suivi mon travail pendant la thèse et surtout d'avoir inventé une si belle théorie qui m'a inspirée dans ma thèse pendant les jours et tourmenté pendant les nuits.

Cédric Bonnafé a accepté d'être rapporteur de ma thèse et de participer à mon jury. Je le remercie pour les remarques et suggestions qu'il a faites sur mon travail.

Je remercie également Michel Broué, Bernard Leclerc, Jean Michel et Peter Fiebig qui m'ont tous fait l'honneur et le plaisir de constituer le jury de ma thèse.

Je remercie Jorge Soto Andrade pour avoir été un merveilleux premier guide dans la recherche mathématique (et dans d'autres recherches aussi). Je lui suis extrêmement reconnaissant.

Je remercie Geordie Williamson pour ses commentaires et ses idées sur plusieurs parties de ma thèse et aussi pour son optimisme inébranlable qui m'aide aussi à être mathématiquement optimiste.

Je remercie Nabil et Farid pour m'avoir aidé un nombre incalculable de fois dans des questions de latex, de rédaction et beaucoup d'autres questions, comme, par exemple, la rédaction de ces remerciements...

Je remercie Valentin Feray pour ses remarques sur quelques chapitres de ma thèse qui ont amélioré la qualité de la rédaction de mon travail.

Je remercie Gerard Freixas pour m'avoir expliqué -quand j'étais en Master 2- plusieurs points techniques de la géométrie dans la théorie de Soergel.

Merci à Madame Wasse parce que le monde serait tellement plus beau si les secretaires était toutes comme elle.

Un grand merci au sage Monsieur Etchèbes sans lequel je ne serais pas ici.

Infinitas gracias a mi hermosa madre por estar desde el principio de mi tesis (gracias a ella vine a Francia el 2003) hasta el final de la tesis (ella es la representante de la familia en mi defensa). Gracias por los constantes estímulos durante mi vida para seguir haciendo lo que me gusta hacer. Muchas Gracias mami.

Gracias papi por ser el primero en haberme introducido a las matemáticas, por haberme querido y apoyado siempre y por ser tan completo.

Gracias Mati por ser mi guia matematico durante muchísimos años. Gracias Chevi por haberme enseñado a amar la enseñanza de la matemática y por haberme enseñado mucha historia y arqueologia antigua durante mi segundo año de tesis. Gracias Camilo por haber sido un gran compañero de andanzas durante mis inicios en el estudio matematico y por haberme distraido de tanto estudio. Gracias Pela por estar siempre ahi, en las buenas y en las malas. Gracias Dani por ayudarme a confiar en mi mismo.

Finalement, et de loin le plus important, un merci cosmologique à Javiera, la femme qui a bouleversé ma vie pour toujours et qui m'a donné l'aide la plus belle et la plus profonde qu'on puisse donner à un être humain.

# Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude de la catégorie de Soergel, une catégorification de l'algèbre de Hecke d'un système de Coxeter. Cette catégorie interagit avec la géométrie, la combinatoire, la théorie des représentations et la topologie algébrique en basse dimension. Nous commençons cette introduction en expliquant le contexte historique où se situe cette catégorie.

## Contexte historique

### Algèbre de Hecke d'un système de Coxeter

Cette histoire commence avec une construction très générale en théorie des groupes, due à G. Shimura, d'après une idée de A. Weil : il s'agit de l'anneau de Hecke. Soit $G$ un groupe et $H$ un sous-groupe de $G$ tel que

$$[H : x^{-1}Hx] < \infty$$

pour tout $x \in G$. Le $\mathbb{Z}-$module libre engendré par les $H \times H$ classes doubles de $G$ (du type $HxH$, $x \in G$), peut être muni d'une structure d'algèbre associative (pour plus de détails voir [Sh, §7]). Cette algèbre est l'anneau de Hecke de la paire $(G, H)$, noté $\widetilde{\mathcal{H}}(G, H)$. Le nom provient du fait que si $G = SL_2(\mathbb{Q})$ et $H = SL_2(\mathbb{Z})$ on trouve l'anneau derrière les opérateurs de Hecke dans la théorie des formes modulaires.

En 1964, Iwahori a considéré le couple $(G, B)$, où $G$ est un groupe de Chevalley sur un corps fini à $q$ éléments et $B$ est un sous-groupe de Borel. Il a calculé l'anneau de Hecke associé (voir [Iw]) et il a trouvé le résultat suivant :

**Théorème 0.1** (Iwahori). *Soit $W$ le groupe de Weyl associé à $G$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des racines simples. Soit $l : W \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ la fonction longueur. Nous*

*avons que*
$$\tilde{\mathcal{H}}(G,B) \cong \bigoplus_{x\in W} \mathbb{Z}[q,q^{-1}]\mathbf{T}_x.$$
*La multiplication est donnée par les formules* $\mathbf{T}_x\mathbf{T}_y = \mathbf{T}_{xy}$ *pour tout* $x, y \in W$ *tels que* $l(x) + l(y) = l(xy)$ *et* $\mathbf{T}_s\mathbf{T}_s = q + (q-1)\mathbf{T}_s$ *pour tout* $s \in \mathcal{S}$.

Il est naturel de généraliser cette construction à un système de Coxeter quelconque.

Un système de Coxeter $(W,\mathcal{S})$ est un groupe $W$ et une partie génératrice $\mathcal{S} \subseteq W$, tels que $W$ admet une présentation de générateurs $s \in \mathcal{S}$ et relations $(sr)^{m(s,r)} = 1$ pour $s, r \in \mathcal{S}$, avec $m(s,s) = 1$, $m(s,r) \geqslant 2$ et éventuellement $m(r,s) = \infty$ si $s \neq r$. Si, dans la définition du théorème 0.1, on remplace le groupe de Weyl et l'ensemble de racines simples par un système de Coxeter arbitraire $(W,\mathcal{S})$, l'algèbre ainsi définie s'appelle algèbre d'Iwahori-Hecke de $(W,\mathcal{S})$.

On a trouvé des relations entre les représentations des algèbres de Hecke et les représentations des groupes de Chevalley finis, groupes quantiques, groupes $p-$adiques, etc, mais ce qui nous intéresse le plus dans cette thèse par rapport à l'algèbre de Hecke, c'est la théorie de Kazhdan-Lusztig que nous introduirons dans la section suivante.

**Théorie de Kazhdan-Lusztig**

Dans l'article [KL1] Kazhdan et Lusztig introduisent une extension de scalaires à la définition précédente ; nous appellerons dans la suite l'algèbre de Hecke d'un système de Coxeter
$$\mathcal{H}(W,\mathcal{S}) = \tilde{\mathcal{H}}(W,\mathcal{S}) \otimes_{\mathbb{Z}[q]} \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$$
Dans la suite on appellera simplement $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(W,\mathcal{S})$. Dans le même article Kazhdan et Lusztig ont défini une nouvelle base $\{C'_x\}_{x\in W}$ de $\mathcal{H}$ connue sous le nom de "Base de Kazhdan-Lusztig", et des polynômes $P_{x,y}(q)$ indexés par des paires d'éléments $x, y$ de $W$ appelés "polynômes de Kazhdan-Lusztig".

Si $d$ est l'involution de $\mathcal{H}$ qui envoie $q^{\frac{1}{2}}$ vers $q^{-\frac{1}{2}}$ et $T_w$ vers $(T_{w^{-1}})^{-1}$, alors les polynômes et la base de Kazhdan-Lusztig sont caractérisés par les deux propriétés suivantes :
- $P_{x,y}(q) = 0$ sauf si $x \leqslant y$ (dans l'ordre de Bruhat de $W$), $P_{x,x}(q) = 1$ et si $x < y$, le degré de $P_{x,y}(q)$ est inférieur ou égal à $(l(y) - l(x) - 1)/2$.
- Les éléments
$$C'_y = q^{-l(y)/2} \sum_{x\leqslant y} P_{x,y}T_x$$

sont invariants par l'involution $d$.
Ces polynômes ont donné naissance à ce qu'on appelle la théorie de Kazhdan-Lusztig, qui s'est avérée avoir des liens profonds avec la géométrie, les représentations et la combinatoire. Ils apparaissent dans de très nombreuses conjectures et théorèmes ; dans les sections suivantes nous énoncerons trois d'entre elles.

**Conjecture de positivité de Kazhdan-Lusztig**

Il y a deux conjectures qui motivent fortement l'étude de la théorie de Soergel. La première est la conjecture de positivité des polynômes de Kazhdan-Lusztig (voir [KL2]) :

**Conjecture 0.2** (Kazhdan, Lusztig)**.** Les polynômes $P_{x,y}(q)$ ont des coefficients positifs pour toute paire d'éléments $(x, y)$ de $W$.

Cette conjecture combinatoire est très célèbre par ses nombreuses relations avec différents domaines mathématiques (combinatoire, représentations, géométrie) et reste ouverte depuis 1980. Elle a été démontrée par Kazhdan et Lusztig pour un groupe de Weyl fini ou affine dans [KL2], et dans d'autres cas par Haddad [Had] et par Dyer [Dy].

**Conjecture de Kazhdan-Lusztig**

On l'appelle encore "conjecture de Kazhdan-Lusztig", mais depuis 1980 c'est un théorème. Il a été démontré par Beilinson et Bernstein dans [BB] et par Brylinski et Kashiwara dans [BK]. Ce théorème prédit essentiellement que les multiplicités des modules simples dans les modules de Verma sont donnés par certains polynômes de Kazhdan-Lusztig évalués en 1.

Plus précisement, soit $\mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{h}$ une algèbre de Lie semisimple, une sous-algèbre de Borel, et une sous-algèbre de Cartan. Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , soit $M(\lambda) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$, où $\mathbb{C}_\lambda$ est $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel avec l'action de $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ donnée par $(h + n).v = \lambda(h)v$, et $L(\lambda)$ l'unique quotient simple de $M(\lambda)$.

Soit $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{h}^*$ l'ensemble des racines et $B \subset \mathfrak{R}$ la base de $\mathfrak{R}$ définie par $\mathfrak{b}$.

Pour $\alpha \in \mathfrak{R}$, soit $s_\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}^*)$ la réflexion correspondante. Soit $S = \{s_\alpha : \alpha \in B\}$ et $W$ le sous groupe de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{h}^*)$ engendré par $S$. Soit $\cdot$ l'action "dot", c'est-à-dire, l'action habituelle décalé par la demi-somme des racines positives. Pour $\lambda$ intégral, si $w \in W$ alors $M(w\cdot\lambda)$ a une suite de composition finie dont les facteurs sont parmi les $L(w' \cdot \lambda)$ où $w' \in W$.

**Conjecture 0.3** (Kazhdan, Lusztig)**.** Si $\lambda$ est intégral et $w_0$ est l'élément maximal pour l'ordre de Bruhat de $W$, alors $L(w' \cdot \lambda)$ apparaît précisement $P_{w_0w,w_0w'}(1)$ fois dans $M(w \cdot \lambda)$.

Cette conjecture a été une avancée majeure dans la théorie des représentations. Il est probablement juste de dire que pendant la décennie de 1970, le problème le plus important dans la théorie des représentations des algèbres de Lie semisimples était celui de déterminer les séries de composition des modules de Verma. Avant cette conjecture, on avait été capable de résoudre ce problème seulement en petit rang et dans quelques cas particuliers.

**Conjecture de Lusztig**

L'un des problèmes les plus importants en théorie des représentations est le calcul des caractères rationnels irréductibles d'un groupe algébrique sur un corps $k$ algébriquement clos. Ces caractères sont paramétrés par l'ensemble de poids dominants par rapport à un tore maximal et un Borel. Si $k$ est un corps de caractéristique zéro, ces caractères sont donnés par la formule des caractères de Weyl et en caractéristique positive, la conjecture de Lusztig donne une réponse dans presque tous les cas.

Plus précisement, la conjecture de Lusztig est la suivante :

**Conjecture 0.4** (Lusztig)**.** Soit $k$ un corps algébriquement clos de caractéristique $p$. Soit $G \supset B \supset T$ un groupe algébrique presque simple et simplement connexe sur $k$, un sous-groupe de Borel et un tore maximal. Soient $W$ et $\widehat{W}$ les groupes de Weyl et de Weyl affine associés. On suppose que $p > h$, où $h$ est le nombre de Coxeter de $W$. On note $w \cdot \lambda$ l'action de $W$ ou de $\widehat{W}$ sur $\mathrm{Hom}(T, k^\times)$ décalé par la demi-somme des racines positives et $w_0$ le plus long élément de $W$. Soit $\widehat{W}^{\circ,+} \subset \widehat{W}$ l'ensemble des éléments dominants et restreints et soit $\chi$ le caractère de Weyl. Enfin, pour $\lambda \in \mathrm{Hom}(T, k^\times)$ soit $\mathcal{L}(\lambda)$ le module simple associé. Alors on a la formule

$$\mathrm{ch}\mathcal{L}(w \cdot 0) = \sum_{x \in \widehat{W}^{\circ,+}} (-1)^{l(w)-l(x)} P_{w_0x,w_0w}(1)\chi(x \cdot 0)$$

où les $P_{x,y}$ sont les polynômes de Kazhdan-Lusztig.

Dans les articles [KT],[KL3], [AJS] le fait suivant est démontré : si $G_\mathbb{Z}$ est un schéma en groupes réductif sur $\mathbb{Z}$, alors il existe un entier $N$ tel que la conjecture est satisfaite pour $G_k = G_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} k$ si la caractéristique de $k$ est plus grande que $N$, mais le nombre $N$ est connu seulement en petit rang.

**Théorie de Soergel**

En 1992 [So2] Soergel a catégorifié l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$, c'est à dire qu'il a défini une catégorie tensorielle $\mathbf{B}$ et un isomorphisme d'anneaux $\mathcal{E}$ de $\mathcal{H}$ vers le groupe de Grothendieck scindé de $\mathbf{B}$. Il a alors posé une belle et naturelle conjecture (0.8 ci-dessous) qui relie, via $\mathcal{E}$, les éléments de la base de Kazhdan-Lusztig avec les éléments indécomposables de $\mathbf{B}$. Cette conjecture implique la conjecture de positivité de Kazhdan-Lusztig (voir [So4]), une partie de la conjecture de Lusztig (voir [So3]) et pour les groupes de Weyl elle implique la conjecture de Kazhdan-Lusztig.

Le diagramme suivant est un résumé des implications

$$\begin{tikzcd} & \text{Conj. de Soergel} \arrow[dl, Rightarrow, "\text{groupe de Weyl}"'] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow, "\text{groupe de Weyl}", "\mathrm{char}(k)>h"'] & \\ \text{Conj. de KL} & \text{Conj. positivite de KL} & \text{Partie conj. de Lusztig} \end{tikzcd}$$

Historiquement, Soergel a introduit cette catégorie dans le cas des groupes de Weyl pour relier la catégorie $\mathcal{O}$ de BGG d'une algèbre de Lie semisimple complexe et les faisceaux pervers sur les variétés de drapeaux. Le lien avec la géométrie lui a permis (voir [So1]) de démontrer sa conjecture dans le cas des groupes de Weyl, et il en a déduit une nouvelle preuve de la conjecture de Kazhdan-Lusztig.

Par ailleurs, dans un article récent [Kh], Khovanov montre qu'à partir de certains complexes dont les termes appartiennent à $\mathbf{B}$, on retrouve l'homologie réduite définie dans [KR], qui est un invariant de noeuds et dont la caractéristique d'Euler est le polynôme HOMFLYPT.

Dans cette thèse nous étudions la catégorie $\mathbf{B}$. Nous calculons explicitement ses morphismes, nous montrons que la conjecture de Soergel peut être modifiée en une conjecture plus simple dans un certain sens, nous présentons la catégorie de Soergel par générateurs et relations pour certains systèmes de Coxeter, nous trouvons une nouvelle base de l'algèbre de Hecke pour une famille importante de systèmes de Coxeter, et nous en déduisons des applications a la catégorie $\mathcal{O}$ de BGG et à la catégorification de Rouquier des groupes de tresses.

# Contenu détaillé

### Théorèmes de Soergel

Nous commençons par certains rappels. Tout d'abord nous fixons un système de Coxeter $(W, \mathcal{S})$. Une représentation de dimension finie de $W$ (sur un corps $k$ de caractéristique car$(k)$ différente de 2) est appelée réflexion-fidèle (RF) si elle est fidèle et si les éléments de $W$ qui ont un espace de points fixes de codimension un forment exactement l'ensemble des réflexions, c'est à dire qu'ils sont conjugués à un élément de $\mathcal{S}$.

Soit $V$ une représentation RF de $W$ et $R = S(V^*)$ l'algèbre symétrique de $V^*$ sur laquelle $W$ agit par fonctorialité. L'algèbre $R$ est graduée de la manière suivante : $R = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} R_i$ avec $R_2 = V^*$ et $R_i = 0$ pour $i$ impair. Soit $\mathcal{R} = \mathcal{R}_V$ la catégorie des $R$-bimodules $\mathbb{Z}$-gradués qui sont de type fini à gauche et à droite. Le groupe de Grothendieck scindé $\langle\mathcal{R}\rangle$ est un anneau pour $\otimes_R$.

Pour chaque objet gradué $M = \bigoplus_i M_i$, et chaque entier $n$, on va appeler $M(n)$ l'objet décalé, c'est-à-dire, $(M(n))_i = M_{i+n}$. On note $R^s$ le sous-anneau de $R$ des invariants pour l'action de $s \in W$ et on note $\theta_s = R \otimes_{R^s} R$

Dans la première section du premier chapitre nous rappelons le théorème suivant :

**Théorème 0.5** (Soergel)**.** *Il existe un et seulement un morphisme d'anneaux $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \langle\mathcal{R}\rangle$ tel que $\mathcal{E}(v) = \langle R(1)\rangle$ et $\mathcal{E}(T_s + 1) = \langle\theta_s\rangle$, pour tout $s \in \mathcal{S}$.*

La catégorie $\mathbf{B}_k(V)$ des bimodules de Soergel est la sous-catégorie de $\mathcal{R}$ dont les objets sont les $B \in \mathcal{R}$ avec $\langle B\rangle$ dans l'image de $\mathcal{E}$. Cette catégorie est l'objet d'étude de cette thèse.

Dans la section 1.2 nous présentons la preuve d'un résultat de Soergel qui sera très important dans le chapitre 3 : la description d'un inverse à gauche de $\mathcal{E}$. Étant donné un espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué $V = \bigoplus V_i$ nous définissons sa dimension graduée :

$$\underline{\overline{\dim}} V = \sum (\dim V_i) v^i \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$$

et pour un $R$-module à droite $\mathbb{Z}$-gradué $M$, nous définissons son rang gradué par

$$\underline{\overline{\mathrm{rk}}} M = \underline{\overline{\dim}}(M/MR_+) \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}].$$

**Théorème 0.6** (Soergel)**.** *Le morphisme $\eta : \langle\mathcal{R}\rangle \to \mathcal{H}$ donné par la formule*

$$\langle B\rangle \mapsto \sum_{x\in W} \underline{\overline{\mathrm{rk}}}\,\mathrm{Hom}(B, R_x)\, T_x.$$

*est un inverse à gauche du morphisme $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \langle\mathcal{R}\rangle$.*

Ici $R_x$ est l'espace vectoriel $R$ muni de l'action naturelle à gauche et de l'action à droite tordue par $x \in W$.

### Une catégorification de la relation de tresses

Dans le deuxième chapitre nous étudions une "catégorification" de la relation de tresses dans la catégorie de Soergel. Plus précisement, pour $s, r \in \mathcal{S}$, l'espace $\mathrm{Hom}(\theta_s\theta_r\theta_s\cdots, \theta_r\theta_s\theta_r\cdots)$, avec $m(s,r)$ termes de chaque coté, admet un seul morphisme non nul (modulo scalaire) en degré zéro. Nous choisissons un élément (nous l'appelons $f_{sr}$) parmi ceux de cet ensemble, qui satisfait une condition d'invariance. Ce morphisme $f_{sr}$ va être fondamental dans les chapitres 3, 5 et 6.

Dans la section 2.1 nous démontrons que $f_{sr}$ est bien défini. Le fait que $R$ est une algèbre symétrique sur $R^{\langle s,r\rangle}$ est utilisé dans la section 2.2 pour trouver une formule pour $f_{sr}$. Dans la section 2.3 nous trouvons une propriété des $f_{sr}$ qui va être clé dans le chapitre 6 ; elle va nous permettre de faire commuter différentes compositions de $f_{sr}$ tensorisées par l'identité. Ceci est le point de départ pour trouver une nouvelle base de l'algèbre de Hecke.

Considérons $V$ la représentation géométrique d'un système de Coxeter $(W, \mathcal{S})$. Pour $s \in \mathcal{S}$ nous définissons les complexes de $(R,R)-$bimodules

$$F_s = 0 \rightarrow \theta_s \xrightarrow{m_s} R \rightarrow 0,$$

où $\theta_s$ est en degré zéro, et

$$F_{s^{-1}} = 0 \rightarrow R \xrightarrow{\eta_s} \theta_s(1) \rightarrow 0,$$

où $\theta_s(1)$ est en degré zéro ; $m_s$ est la multiplication et $\eta_s$ est le seul morphisme non nul de degré 2 (à scalaire non nul près) de $R$ vers $\theta_s$. Il n'est pas difficile de montrer que $F_s$ et $F_{s^{-1}}$ sont l'inverse l'un de l'autre dans $K^b(R\otimes R)$. Donc la proposition suivante (voir [Ro]) permet de voir que la fonction $s \mapsto F_s$ se prolonge en un morphisme de groupes de $B_W$ (le groupe de tresses associé à $W$) vers le groupe des classes d'isomorphie d'objets inversibles de $K^b(R\otimes R)$ :

**Proposition 0.7** (Rouquier)**.** *Soit $s \neq r \in \mathcal{S}$ avec $m(s,r) < \infty$. Dans $K^b(R \otimes R)$ on a des relations de tresses*

$$F_sF_rF_s\cdots = F_rF_sF_r\cdots$$

*avec $m(s,r)$ termes de chaque coté.*

Rouquier a montré l'existence d'une équivalence d'homotopie entre les deux produits de complexes. Nous construisons explicitement une telle équivalence dans la section 2.5.

Avec les morphismes que nous obtenons, dans la section 2.6 nous trouvons une nouvelle formule pour $f_{sr}$ en passant par la géométrie. Finalement dans la section 2.7 nous donnons des formules explicites pour $f_{sr}$ quand $m(s,r) = 2$ ou 3. Le cas $m(s,r) = 3$ est déjà très compliqué ; on obtient une somme de 15 termes.

**Morphismes dans $\mathbf{B}_k(V)$**

Le résultat central du chapitre 3 est une description "explicite" ou combinatoire des morphismes dans $\mathbf{B}_k(V)$. On peut montrer que les objets de la catégorie $\mathbf{B}_k(V)$ sont les sommes directes de facteurs directs de bimodules de la forme $\theta_{s_1}\cdots\theta_{s_n}$, où $(s_1,\ldots,s_n)$ est une suite d'éléments de $\mathcal{S}$. Alors il suffit de décrire l'espace $\mathrm{Hom}(\theta_{s_1}\cdots\theta_{s_n}, \theta_{t_1}\cdots\theta_{t_p})$ pour deux suites arbitraires $(s_1,\ldots,s_n)$ et $(t_1,\ldots,t_p)$ d'éléments de $\mathcal{S}$.

Il n'est pas difficile de montrer que pour toute paire d'éléments $M, N \in \mathbf{B}_k(V)$ et tout $s \in \mathcal{S}$ nous avons une adjonction $\mathrm{Hom}(\theta_s M, N) \cong \mathrm{Hom}(M, \theta_s N)(2)$. Donc notre problème se réduit à décrire l'espace $A = \mathrm{Hom}(\theta_{s_1}\cdots\theta_{s_n}, R)$ pour une suite arbitraire $(s_1,\ldots,s_n)$ d'éléments de $\mathcal{S}$. Nous savons par un théorème de Soergel que $A$ est libre comme $R$-module à droite. Donc il suffit de trouver une base. Nous expliquerons dans la suite comment trouver les éléments de cette base, qu'on appellera la base des feuilles légères (BFL).

Nous définissons $j_s : \theta_s\theta_s \to \theta_s$ comme le seul morphisme non nul (modulo scalaire) de $\mathrm{Hom}(\theta_s\theta_s, \theta_s)$ de degré $-2$.

Les notations que nous utilisons pour décrire la BFL dans cette introduction sont différentes des notations utilisés dans le chapitre 3 par souci de simplification. Nous allons définir par récurrence sur $p$ la famille de morphismes $(f_p^i)_{i\in\{0,1\}^p}$,

$$f_p^i : \theta_{s_1}\cdots\theta_{s_n} \to \theta_{t_1}\cdots\theta_{t_k}\theta_{s_p}\cdots\theta_{s_n},$$

où $t_1,\ldots,t_k$ est une suite d'éléments de $\mathcal{S}$ qui dépend de $i$, telle que $t_1\cdots t_k$ est une expression réduite dans $W$. Nous commençons par définir $f_1^0 = f_1^1 = \mathrm{id} \in \mathrm{End}(\theta_{s_1}\cdots\theta_{s_n})$. Supposons donné $f_p^i : \theta_{s_1}\cdots\theta_{s_n} \to \theta_{t_1}\cdots\theta_{t_k}\theta_{s_p}\cdots\theta_{s_n}$. Il y a deux cas possibles :
– $l(t_1\cdots t_k s_p) > l(t_1\cdots t_k)$
– $l(t_1\cdots t_k s_p) < l(t_1\cdots t_k)$.
Dans le premier cas, on pose $f_{p+1}^{i,0} = f_p^i$ et $f_{p+1}^{i,1} = (\mathrm{id}^k \otimes m_{s_p} \otimes \mathrm{id}^a) \circ f_p$, où $a = n-p-1$.

Dans le deuxième cas, en composant des $f_{sr}$ (définis plus haut) tensorisés à gauche et à droite par l'identité, nous trouvons un morphisme

$$F : (\theta_{t_1}\cdots\theta_{t_k})(\theta_{s_p}\cdots\theta_{s_n}) \to (\theta_{t_1'}\cdots\theta_{t_{k-1}'}\theta_{s_p})(\theta_{s_p}\cdots\theta_{s_n})$$

où $t_1 \cdots t_k = t'_1 \cdots t'_{k-1} s_p \in W$. Pour être précis il faudrait dire il n'y a pas qu'un $F$ satisfaisant cette propriété, mais nous ignorons ce problème dans cette introduction et nous allons supposer qu'il est bien défini. Alors dans ce cas $f^{i,0}_{p+1} = (\mathrm{id}^{k-1} \otimes j_{s_p} \otimes \mathrm{id}^a) \circ F \circ f^i_p$ et $f^{i,1}_{p+1} = (\mathrm{id}^{k-1} \otimes m_{s_p} \otimes \mathrm{id}^a) \circ (\mathrm{id}^{k-1} \otimes j_{s_p} \otimes \mathrm{id}^a) \circ F \circ f^i_p$.

Finalement, si nous appelons $D \subset \{0,1\}^n$ le sous-ensemble de $\{0,1\}^n$ d'éléments $d$ tels que $f^d_n \in A$, alors l'ensemble $\{f^d_n\}_{d \in D}$ est une base de $A$ comme $R$-module à droite.

Pour montrer que cet ensemble engendre $A$, nous utilisons un corollaire du théorème de Soergel de la section 1.2 qui donne les degrés gradués que doit avoir une base homogène de $A$. Pour montrer l'indépendance linéaire des éléments de cette base, nous montrons qu'il y a certains éléments dans $\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}$ où la BFL agit de manière unitriangulaire.

**Morphismes dans $\mathcal{O}_0$-proj**

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semisimple complexe et $W$ son groupe de Weyl. On note $\mathcal{O}_0-$proj la sous-catégorie d'objets projectifs dans le bloc principal $\mathcal{O}_0$ de la catégorie $\mathcal{O}$. Soit $C = R/(R^W_+)$ l'algèbre des coinvariants. On identifie $\mathbb{C}$ à $R/R_+$, et on définit $\mathbf{B}^{\mathbb{C}}$ comme la sous-catégorie pleine de $C-$mod, d'objets les $B \otimes_R \mathbb{C}$, avec $B \in \mathbf{B}$.

Dans l'article [So1], Soergel construit une équivalence de catégories :

$$\mathbb{V} : \mathcal{O}_0 - \mathrm{proj} \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}^{\mathbb{C}}.$$

D'autre part, dans l'article [So2], on trouve le fait que si $B, B' \in \mathbf{B}$, alors le morphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{(R,R)}(B, B') \otimes_R \mathbb{C} \to \mathrm{Hom}_C(B \otimes_R \mathbb{C}, B' \otimes_R \mathbb{C})$$

est un isomorphisme.

Avec ces deux résultats et la description de $\mathrm{Hom}_{(R,R)}(B, B')$ qu'on a expliqué dans la section précédente, on obtient explicitement les morphismes dans la catégorie $\mathcal{O}_0$-proj.

**Équivalences entre conjectures de Soergel**

Nous pouvons énoncer précisement la conjecture de Soergel :

**Conjecture 0.8.** [Soergel] Soit $V$ une représentation réflexion-fidèle de $W$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in W$, il existe un $(R(V), R(V))$-bimodule indécomposable

$\mathbb{Z}$-gradué $B_x \in \mathbf{B}_k(V)$ tel que $\mathcal{E}(C'_x) = \langle B_x \rangle$, où $C'_x$ est l'élément de la base de Kazhdan-Lusztig associé à $x$ défini plus haut.

Avec le théorème 0.6 il est facile de montrer que cette conjecture implique la conjecture de positivité des polynômes de Kazhdan-Lusztig.

La conjecture de Soergel peut se généraliser pour $k$ un corps infini de caractéristique non nulle. Dans ce cas, on sait qu'elle n'est plus vraie en toute généralité. Cependant, dans [So3] Soergel montre que si la caractéristique de $k$ est plus grande que le nombre de Coxeter de $W$ et si $W$ est un groupe de Weyl fini, alors la conjecture de Soergel est équivalente à une partie de la conjecture de Lusztig.

Le résultat central du chapitre 3 est le fait que la conjecture de Soergel (sur $\mathbb{R}$) est équivalente à la même conjecture mais où on remplace l'hypothèse "$V$ est une représentation réflexion-fidèle" par l'hypothèse "$V$ est la représentation géométrique de $W$".

Soergel a montré que pour tout $W$ il existe une représentation RF sur $\mathbb{R}$ et que cette représentation admet comme sous-représentation la représentation géométrique. Ceci est le fait clé pour prouver notre théorème. Mais en fait notre résultat est plus général que ce qu'on vient de dire ; en général nous prouvons que si $V'$ est une sous-représentation de $V$, une représentation RF sur un corps infini quelconque $k$, et dans $V'$ les réflexions simples agissent comme des réflexions, alors les conjectures de Soergel sur $\mathbf{B}_k(V)$ et sur $\mathbf{B}_k(V')$ sont équivalentes.

Pour montrer ceci le point clé est le théorème suivant :

**Théorème 0.9.** *Notons $R(V) = R$ et $R(V') = R'$. Pour tout $M, N \in \mathbf{B}_k(V)$, le morphisme canonique :*

$$R' \otimes_R \mathrm{Hom}_{R,R}(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{R',R'}(R' \otimes_R M, R' \otimes_R N)$$

*est un isomorphisme de $R'$-modules gradués.*

Pour montrer ce théorème nous utilisons le théorème central du chapitre 3, et nous travaillons sur les corps de fractions de $R$ et $R'$ parce que sur ces corps, les bimodules de Soergel sont très faciles à comprendre.

### Générateurs et relations

Raphaël Rouquier a posé le problème de trouver une présentation de la catégorie de Soergel par générateurs et relations comme catégorie tensorielle (voir chapitre 5). Ce problème a été une des motivations fondamentales de cette thèse.

En résolvant ce problème nous espérons redémontrer la conjecture de Kazhdan-Lusztig plus facilement (mais avec une approche similaire à celle de Soergel), et redémontrer la partie de la conjecture de Lusztig démontrée dans [AJS] d'une manière plus naturelle et avec une approche différente.

Nous espérons aussi qu'elle pourrait peut-être aider à démontrer la conjecture de Soergel, étant donné que c'est une information vraiment nouvelle sur la catégorie de Soergel. Enfin ceci pourrait être un outil important pour un certain nombre de problèmes en théorie des représentations.

Dans cette thèse nous avons résolu ce problème dans les cas des groupes de Coxeter à angles droits (c'est-à-dire, où $m(s, r) = 2$ ou $\infty$ pour tout $s, r \in \mathcal{S}$).

Les objets de la catégorie de Soergel sont engendrés par $R$ et l'ensemble $\{\theta_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Il faudrait préciser que ceci donne les sommes directes d'objets du type $\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}$ et donc pour obtenir la catégorie de Soergel il manque les facteurs directs, mais ceci peut se résoudre avec une construction formelle d'ajout d'image d'idempotents, donc nous ne nous occuperons pas de ceci dans cette introduction.

Nous pouvons déduire les morphismes générateurs à partir des résultats du chapitre 3. Un ensemble de morphismes générateurs est :

$$P = \{f_{sr}, j_s, m_s, \alpha_s\}_{s,r\in\mathcal{S}}.$$

Nous avons déjà défini les morphismes $f_{sr}, j_s, m_s$, et nous pouvons définir $\alpha_s$ comme le seul morphisme non nul (à scalaire non nul près) de degré 2 dans l'espace $\mathrm{Hom}(R, \theta_s\theta_s)$.

Maintenant nous nous intéressons au cas des groupes de Coxeter à angles droits. Il faut trouver les relations entre les morphismes pour que n'importe quelle composition de morphismes de $P$ (éventuellement tensorisés à gauche et à droite par l'identité) puisse être réduite, avec les dites relations, à une combinaison linéaire sur $R$ d'éléments de la base des feuilles légères trouvée dans le chapitre 3.

Les huit relations en rang 1 (c'est-à-dire, où il intervient seulement une $s \in \mathcal{S}$) sont quelque peu techniques. Les relations en rang 2 par contre sont faciles à comprendre. Les quatre premières disent essentiellement que le morphisme $f_{sr}$ "commute" avec tous les morphismes et la relation 5 est la relation hexagonale typique des catégories symétriques monoïdales.

Quand nous avons trouvé les relations entre les morphismes, démontrer qu'elles sont suffisantes pour engendrer toutes les relations est un problème de nature combinatoire. Dans le chapitre 5 nous utilisons plus de 20 pages pour démontrer ce fait.

Nous commençons avec une composition quelconque d'éléments de $P$, et en itérant quelques procédés nous arrivons à trouver une combinaison linéaire sur $R$ d'éléments de la BFL. À la fin de chaque procédé nous trouvons une propriété de plus satisfaite par la BFL, et nous utilisons à la fin le fait que la BFL peut-être décrite comme le seul ensemble qui satisfait quatre propriétés.

### Une nouvelle base de l'algèbre de Hecke

Lorsque cela ne prête pas à confusion, nous noterons le morphisme $f_{sr}$ simplement par $f$, et si le morphisme $\mathrm{id}^i \otimes f_{sr} \otimes \mathrm{id}^p$ est bien défini, nous le noterons ${}^i f$ ; l'ensemble de départ de ce morphisme est $\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_{i+p+m(s,r)}}$.

La question suivante est naturelle quand on découvre l'existence des morphismes $f_{sr}$ : soit $s_1 \cdots s_n$ une expression réduite d'un élément $x \in W$. Est-ce que si on applique ${}^i f$, avec $i$ variable, "toutes les fois qu'on peut", on obtient un idempotent ? et si on regarde l'image de ce morphisme, est-ce que cela donne un élément qui ne dépend pas de l'expression réduite choisie pour $x$ ? En d'autres termes, est-ce qu'on obtient un bimodule de Soergel bien défini qui dépend seulement de $x$ ?

Dans le chapitre 6 nous donnons une réponse affirmative à ces questions quand le groupe de Coxeter de départ est un groupe de Coxeter de type extra-large, i.e. $m(s,r) > 3$ pour tout $s, r \in \mathcal{S}$. En appliquant le morphisme $\eta$ (défini dans le théorème 0.6) à ce bimodule associé à $x$, nous trouvons une nouvelle base de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$.

# Perspectives

### Générateurs et relations

Étant donné que nous avons résolu dans le chapitre 5 le problème de présenter la catégorie de Soergel par générateurs et relations pour les groupes de Coxeter à angles droits, la continuation naturelle c'est d'essayer de le résoudre pour tous les groupes de Coxeter. Ce problème nous semble combinatoirement assez difficile, mais nous espérons que les idées du chapitre 5 pourront se généraliser.

### Degré zéro de l'homologie de Khovanov-Rozansky

Dans [KR] Khovanov et Rozansky ont introduit une théorie homologique triplement graduée. Cette théorie associe à chaque noeud ou tresse des groupes d'homologie triplement gradués, et ils montrent que ce sont des invariants de noeuds. Dans un article postérieur, Khovanov [Kh] a montré que cette théorie homologique peut être réinterprétée comme "l'homologie de Hochschild des complexes de Rouquier" , ces derniers étant les $F_\sigma$ introduits plus haut.

Le calcul de cet invariant est très difficile. Dans les articles [Ra] et [WW] la "direction Hochschild" de cette théorie est étudiée, c'est-à-dire, le calcul de l'homologie de Hochschild de certains bimodules de Soergel. Dans un travail en cours avec Geordie Williamson et Ben Webster, nous nous intéressons au degré zéro de cet invariant, c'est à dire la cohomologie de $\mathrm{Hom}_{R\otimes R}(F_\sigma, R)$. Ceci est en lui même un invariant de "noeuds transverses" un ensemble de noeuds qui ne sont pas nuls sur une certaine structure de contact (cette classe peut-être aussi définie comme la classe d'équivalence des noeuds modulo deux mouvements de Markov).

Ce problème se réduit finalement à la question suivante : soient $t, s_1, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$. Si $f$ appartient à la base de feuilles légères (BFL, introduite plus haut) de $\mathrm{Hom}(\theta_{s_1}\cdots\theta_{s_n}, R)$, comment écrire dans la BFL de $\mathrm{Hom}(\theta_{s_1}\cdots\theta_{s_i}\theta_t\theta_{s_{i+1}}\cdots\theta_{s_n}, R)$ l'élément $f\circ(\mathrm{id}^i\otimes m^t\otimes \mathrm{id}^{n-i})$ ?

### Trouver les morphismes dans $\mathcal{O}_\lambda$-proj

Nous voudrions généraliser les résultats de la section 3.4 pour tous les blocs $\mathcal{O}_\lambda$, c'est à dire, trouver explicitement les morphismes dans les catégories $\mathcal{O}_\lambda$-proj.

Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $W_\lambda$ le sous-groupe de $W$ que laisse stable $\lambda$ par l'action point du groupe $W$ et $C^\lambda = C^{W_\lambda}$, avec $C$ l'algèbre de coinvariants. Par des résultats implicites dans le travail de Soergel nous avons que $\mathcal{O}_\lambda$-proj est équivalente à la plus petite sous-catégorie additive pleine close par facteurs directs contenant

$$C^\lambda \otimes_{(C^\lambda)^s} C^\lambda \otimes_{(C^\lambda)^r} C^\lambda \otimes \cdots \otimes_{(C^\lambda)^t} \otimes_C \mathbb{C} \tag{0.0.1}$$

pour toute suite $s, r, \ldots, t$ d'éléments de $\mathcal{S}$. Donc il suffirait de trouver les morphismes entre les éléments du type 0.0.1, et on peut voir ceci à son tour comme une généralisation du théorème 3.3.

### Généralisation à la "Catégorie singulière de Soergel"

On espère généraliser le théorème 3.3 et les théorèmes du chapitre 4 au cas de la catégorie singulière de Soergel. Cette catégorie est le thème de la thèse de Geordie Williamson [Wi].

On considère une représentation réflexion-fidèle $V$ de $W$ sur $k$ un corps de caractéristique zéro. On dit qu'un ensemble $I \subseteq \mathcal{S}$ est de type fini si le sous-groupe parabolique associé $W_I = \langle s | s \in I \rangle$ est fini. Étant donné un ensemble $I \subseteq \mathcal{S}$ de type fini, on note $R^I$ le sous-espace de $R$ stable par $W_I$. Si $I, J \subseteq \mathcal{S}$ sont de type fini, on note $R^I - \mathrm{Mod} - R^J$ la catégorie des $(R^I, R^J)-$bimodules gradués. On remarque que si $I, J, K \subseteq \mathcal{S}$ sont de type fini et satisfont $I \supset K \subset J$, alors $R^I$ et $R^J$ sont des sous-anneaux gradués de $R^K$. Alors on peut regarder $R^K$ comme un $(R^I, R^J)-$bimodule.

Finalement on définit la catégorie singulière de Soergel ${}^I\mathbf{B}^J$ associée à $I, J \subseteq \mathcal{S}$. C'est la sous-catégorie pleine de $R^I - \mathrm{Mod} - R^J$ contenant tous les décalages, les sommes directes et les facteurs directs d'objets du type

$$R^{I_1} \otimes_{R^{J_1}} R^{I_2} \otimes_{R^{J_2}} \otimes R \cdots \otimes_{R^{J_{n-1}}} R^{I_n},$$

où $I = I_1 \subset J_1 \supset I_2 \subset J_2 \supset \ldots \subset J_{n-1} \supset I_n = J$ sont tous des sous-ensembles de type fini de $\mathcal{S}$.

Si $\Phi \subset \mathfrak{h}$ est un système de racines cristallographique dans un espace vectoriel réel Euclidien et $V$ est une représentation réflexion-fidèle de $W$ sur $\mathbb{C}$, on s'attend à ce qu'une certaine sous-catégorie tensorielle de ${}^I\mathbf{B}^I$ soit équivalente à la catégorie des représentations algébriques de dimension finie du groupe adjoint semisimple $G_a^\vee$ avec système de racines $\Phi^\vee$ dual de $\Phi$.

### Constantes de structure et idempotents

Il serait intéressant de trouver pour $s_1, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$ et $x = s_1 \cdots s_n$ une expression réduite, les constantes de structure de la multiplication des éléments de la BFL dans $A = \mathrm{End}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n})$. Avec ceci, on pourrait obtenir certains idempotents importants de cet espace, par exemple, celui qui définit le bimodule indécomposable associé à $x$, et ainsi s'approcher d'une démonstration de la conjecture de Soergel.

Le cas des groupes de Coxeter finis non cristallographiques est particulièrement intéressant : on devrait pouvoir appliquer la méthode précédente à l'aide d'un ordinateur. Des études similaires dans la combinatoire de Kazhdan-Lusztig ont été faites par du Cloux dans [Cl], et avant par Alvis [Al] pour démontrer la conjecture de positivité de Kazhdan-Lusztig sur $H_3$ et $H_4$. Le cas diédral de la conjecture de Soergel est déjà démontré dans [So2], donc les cas qui restent sont les types $H_3$ et $H_4$.

# Liste de notations et concepts importants

**Attention !** Les morphismes dont nous avons mis ** sont définis comme cela seulement dans le chapitre 5

| | | |
|---|---|---|
| good order | propriété sur une expression d'un morphisme | |
| left type element | élément qui peut être envoyé vers la gauche | 103 |
| $\mathbf{T}$ | catégorie définie par générateurs et relations | 104 |
| $\mathcal{A}$ | sous-anneau de $\mathrm{End}_{T_r}(R)$ | 104 |
| $\mathfrak{Fu}$ | foncteur de $\mathbf{T}$ vers $\widehat{B}$ | 106 |
| basic bimodule | produit de $\theta_s$ | 107 |
| expression | composition de morphismes | 107 |
| $R$-expression | | |
| term of an expression | chaque morphisme qui apparaît dans la composition | 108 |
| $\overline{\nu}$ | morphisme représenté par $\nu$ | 107 |
| $G$ | $R$-expressions sans $\alpha$ | 108 |
| to apply a relation | changer la partie gauche par la partie droite | 108 |
| $\nu_r$ | truncation de $\nu$ | 109 |
| $\widehat{\nu}_r$ | suite associé à l'image de $\nu_r$ | 109 |
| $\nu[b]$ | suite de nombres associés à $\nu$ | 109 |
| $m$-bad, $j$-bad | des nombres entiers associés à $\nu$ | 109 |
| $G_r^p$ | ensemble d'expressions | 111 |
| $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5$ | applications qui envoient une expression vers une autre | 110, 111, 113, 123, 123 |
| $L$ | ensemble d'expressions | 114 |
| cores$(\bar{s})$ | éléments "invariants" de $\bar{s}$ | 127 |
| $D(C, C')$ | distance entre cores | 127 |
| first$(C)$, last$(C)$ | premier et dernier élément de $C$ | 128 |
| right core<br>left core<br>empty core<br>filled core | les différents types de cores | 128 |
| $\bar{s}$-compatible | suite associé à un morphisme de type $f$ | 129 |
| $N_{\bar{\alpha}}(C)$ | quantité de fois $C$ est "touché" par le morphisme associé à $\alpha$ | 129 |
| $(j_i)_{1 \langle i \leqslant \gamma}$ | les "filled cores" sont les $C_{j_i}$ | 129 |
| $\mathcal{P}_i$ | ce qui est entre deux "filled cores" | 129 |
| $(i_p)_{1<p<\gamma}$ | les "empty cores" sont les $C_{i_p}$ | 130 |
| $\lessdot$ | ordre partiel entre uplets | 130 |
| $V_p^{\mathrm{left}}, V_p^{\mathrm{right}}$ | suites associés a des "cores" spécifiques | 131, 131 |

| | | |
|---|---|---|
| $\bar{\alpha}^{\text{left}}(p), \bar{\alpha}^{\text{right}}(p)$ | suites de nombres associés à $\alpha$ et à $p$ | 131, 131 |
| $p$-inflection | changement dans la suite $\bar{\alpha}^{\text{left}}(p)$ | 131 |
| $p$-morphism | composition de produits tensoriels de $f$'s et des identités | 132 |
| morphism order | ordre entre les expressions des morphismes | 132 |
| $f_{\bar{s}}$ | endomorphisme de $\theta_{\bar{s}}$ | 133 |
| $A_{\bar{s}}$ | image de $f_{\bar{s}}$ | 134 |
| $F_{\bar{s},\bar{t}}$ | morphisme associé à une relation de tresses | 134 |
| $a_{\bar{s},\bar{t}}$ | morphisme de $A_{\bar{s}}$ vers $A_{\bar{t}}$ | 134 |

**ATTENTION :** Les notations du chapitre 5 diffèrent des notations des autres chapitres de la manière suivante : ce que nous appelons $R, \theta_s, f_{sr}, m_s, x_s, P_s, I_s, \partial_s$ dans le reste des chapitres, est nommé respectivement $\widehat{R}$, $\widehat{\theta_s}$, $\widehat{f_{sr}}$, $\widehat{m_s}$, $\widehat{x_s}$, $\widehat{P_s}$, $\widehat{I_s}$, $\widehat{\partial_s}$ dans le chapitre 5 et les morphismes $f_{sr}$, $m_s, \ldots$ n'appartiennent pas à la catégorie **B** dans le chapitre 5, mais à une autre catégorie (à la fin du chapitre nous montrons que ces deux catégories sont équivalentes et c'est pour cela que les notations sont à posteriori cohérentes).

# Chapitre 1

# Théorèmes de Soergel

Dans ce chapitre nous rappelons certains résultats dus à Soergel. Nous énonçons dans la première section le théorème de Soergel qui donne une catégorification de l'algèbre de Hecke et nous énonçons la conjecture de Soergel. Nous donnons aussi la définition de la catégorie de Soergel, l'objet d'étude de cette thèse. Dans la deuxième section nous reprenons (en donnant plus de détails) la preuve donnée par Soergel dans l'article [So4] du théorème qui donne un inverse à gauche de la dite catégorification.

## 1.1 Conjecture de Soergel

### 1.1.1 Théorème de Soergel

Le théorème de Soergel affirme que la catégorie de Soergel est une catégorification de l'algèbre de Hecke d'un groupe de Coxeter. Donnons quelques définitions avant de donner l'énoncé précis de ce théorème.

**Définition 1.1.** Un système de Coxeter est un couple $(W, \mathcal{S})$ où $W$ est un groupe et $\mathcal{S} \subseteq W$ une partie génératrice, tels que $W$ admet une présentation de générateurs $s \in \mathcal{S}$ et relations $(sr)^{m(s,r)} = 1$ pour $s, r \in \mathcal{S}$, avec $m(s,s) = 1$, $m(s,r) \geqslant 2$ et éventuellement $m(r,s) = \infty$ si $s \neq r$.

**Définition 1.2.** Soit $(W, \mathcal{S})$ un système de Coxeter. On définit l'algèbre de Hecke $\mathcal{H} = \mathcal{H}(W, \mathcal{S})$ comme la $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-algèbre de générateurs $\{T_s\}_{s \in \mathcal{S}}$, ceux-ci satisfaisant les relations $T_s^2 = v^{-2} + (v^{-2} - 1)T_s$ pour tout $s \in \mathcal{S}$ et

$T_sT_rT_s\ldots = T_rT_sT_r\ldots$ avec $m(s,r)$ termes de chaque côté si $s,r\in\mathcal{S}$ et $sr$ est d'ordre $m(s,r)$.

Si $x = s_1s_2\cdots s_n$ est une expression réduite de $x$, on définit $T_x = T_{s_1}T_{s_2}\cdots T_{s_n}$ ($T_x$ ne dépend pas du choix de la décomposition réduite). On pose $q = v^{-2}$.

Soit $\mathcal{T}\subseteq W$ le sous-ensemble des « réflexions », c'est à dire, tous les éléments qui sont conjugués aux éléments de $\mathcal{S}$.

**Définition 1.3.** Une représentation de dimension finie de $W$ (sur un corps $k$ de caractéristique car$(k)$ différente de 2) est appelée *réflexion fidèle* (RF) si elle est fidèle et si les éléments de $W$ qui ont un espace de points fixes de codimension un forment exactement l'ensemble des réflexions.

*Remarque* 1.4. Dans [So4] Soergel montre que si $k=\mathbb{R}$, pour tout $W$ il existe au moins une RF.

Soit $V$ une RF sur un corps $k$. Soit $R = S(V^*) = R(V)$ l'algèbre symétrique de $V^*$, c'est à dire l'algèbre des fonctions régulières sur $V$, sur laquelle $W$ agit par fonctorialité.

**Définition 1.5.** Pour toute petite catégorie additive $\mathcal{A}$, on définit le groupe de Grothendieck scindé $\langle\mathcal{A}\rangle$. C'est le groupe libre sur les objets de $\mathcal{A}$ modulo les relations $M = M' + M''$ chaque fois que $M\cong M'\oplus M''$. Chaque objet $A\in\mathcal{A}$ définit un élément $\langle A\rangle\in\langle\mathcal{A}\rangle$.

*Remarque* 1.6. Étant donné un corps $k$ et une $k$-algèbre $A$, graduée en degrés positifs, commutative, de type fini et avec $A_0 = k$, le théorème de Krull-Schmidt est vrai dans la catégorie $A-\mathrm{mod}^f_{\mathbb{Z}}$ avec la même preuve que dans [Pi, 5.4], et les classes d'isomorphisme d'objets indécomposables forment une base de $\langle A-\mathrm{mod}^f_{\mathbb{Z}}\rangle$. On a en particulier que $\langle N\rangle = \langle M\rangle$ si et seulement si $N\cong M$.

L'algèbre $R$ est graduée de la manière suivante : $R=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} R_i$ avec $R_2 = V^*$ et $R_i = 0$ pour $i$ impair. Soit $\mathcal{R}=\mathcal{R}_V$ la catégorie des $R$-bimodules $\mathbb{Z}$-gradués qui sont de type fini à gauche et à droite. Le groupe $\langle\mathcal{R}\rangle$ est un anneau pour $\otimes_R$.

**Définition 1.7.** Pour chaque objet gradué $M=\bigoplus_i M_i$, et chaque entier $n$, on définit l'objet décalé $M(n)$ par $(M(n))_i = M_{i+n}$.

On note $R^s$ le sous-anneau de $R$ des invariants pour l'action de $s\in W$. Ces définitions permettent de formuler le théorème fondamental de Soergel ([So2, Thm. 1.10]) :

**Théorème 1.8** (Soergel)**.** *Il existe un et seulement un morphisme d'anneaux $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \langle \mathcal{R} \rangle$ tel que $\mathcal{E}(v) = \langle R(1) \rangle$ et $\mathcal{E}(T_s + 1) = \langle R \otimes_{R^s} R \rangle$, pour tout $s \in \mathcal{S}$.*

**Définition 1.9.** La catégorie $\mathbf{B}_k(V)$ des bimodules de Soergel est la sous-catégorie de $\mathcal{R}$ dont les objets sont les $B \in \mathcal{R}$ avec $\langle B \rangle$ dans l'image de $\mathcal{E}$. Quand le corps $k$ et la représentation $V$ sont clairs, nous noterons simplement $\mathbf{B}$ la catégorie de bimodules de Soergel.

C'est cette catégorie $\mathbf{B}$ qu'on étudie dans cette thèse. Notons à nouveau que $\mathbf{B}$ dépend du corps $k$ et de $V$. Nous sommes intéressés à un critère pour savoir quand est-ce qu'un bimodule $B$ appartient à $\mathbf{B}$. Pour une suite arbitraire de réflexions simples $\underline{s} = (r, \ldots, t)$ nous considérons l'élément de l'algèbre de Hecke $b(\underline{s}) = (T_r + 1) \ldots (T_t + 1)$ et le bimodule

$$B(\underline{s}) = R \otimes_{R^r} \cdots R \otimes_{R^t} R.$$

**Lemme 1.10.** *Un bimodule gradué $B \in \mathcal{R}$ appartient à la catégorie de Soergel si et seulement si il existe des objets $C, D \in \mathcal{R}$, chacun des sommes directes finies d'objets de la forme $B(\underline{s})(n)$ et tels qu'on a*

$$B \oplus C \cong D$$

*Démonstration.* Comme $\langle B(\underline{s})(n) \rangle = \mathcal{E}(v^n b(\underline{s}))$, les $B(\underline{s})(n)$ appartiennent à la catégorie de Soergel. Ceci montre que la condition est suffisante. Par la remarque 1.6 nous voyons que $\langle B \rangle = \langle D \rangle - \langle C \rangle$ si et seulement si $B \oplus C \cong D$. Comme les $v^n b(\underline{s})$ engendrent $\mathcal{H}$ comme groupe abélien (par récurrence sur $l(x)$ on peut montrer que les $T_x$ sont dans le sous-espace engendré par les $v^n b(\underline{s})$), la condition est nécessaire. □

*Remarque* 1.11. Clairement $\mathbf{B}$ est stable par sommes directes et décalages des graduations. Dans [So4, Satz 6.16], Soergel montre que $\mathbf{B}$ est stable par facteurs directs, donc les objets de $\mathbf{B}$ sont exactement les sommes directes des facteurs directs d'objets de la forme $B(\underline{s})(n)$.

### 1.1.2 Conjecture de Soergel

Si $d$ est l'involution de $\mathcal{H}$ qui envoie $v$ vers $v^{-1}$ et $T_w$ vers $(T_{w^{-1}})^{-1}$, alors les polynômes et la base de Kazhdan-Lusztig sont caractérisés par les deux propriétés suivantes :

- $P_{x,y}(q) = 0$ sauf si $x \leqslant y$ (dans l'ordre de Bruhat de $W$), $P_{x,x}(q) = 1$ et si $x < y$, le degré de $P_{x,y}(q)$ est inférieur ou égal à $(l(y) - l(x) - 1)/2$.
- Les éléments
$$C'_y = q^{-l(y)/2} \sum_{x \leqslant y} P_{x,y} T_x$$
sont invariants par l'involution $d$.

**Conjecture 1.12** (Soergel)**.** Pour tout $x \in W$, il existe un $R$-bimodule indécomposable $\mathbb{Z}$-gradué $B_x \in \mathcal{R}$ tel que $\mathcal{E}(C'_x) = \langle B_x \rangle$, où $C'_x$ est l'élément de la base de Kazhdan-Lusztig associé à $x$.

*Remarque* 1.13. Dans [So4], Soergel montre que cette conjecture implique la conjecture de positivité des polynômes de Kazhdan-Lusztig en construisant un inverse à gauche de $\mathcal{E}$. Cette construction est rappelée dans la prochaine section 1.2.

*Remarque* 1.14. Dans le cas où $k = \mathbb{C}$ et $W$ est un groupe de Weyl fini, la conjecture de Soergel est démontrée dans l'article [So2]. Dans [Fi] Fiebig démontre cette conjecture pour $W$ un groupe de Coxeter universel. Dans [So3] Soergel montre que si $W$ est un groupe de Weyl fini et si la caractéristique de $k$ est plus grande que le nombre de Coxeter de $W$, alors la conjecture de Soergel est équivalente à une partie d'une conjecture de Lusztig portant sur les caractères des représentations irréductibles de groupes algébriques sur $k$ (par exemple $\mathrm{GL}_n(\bar{\mathbb{F}}_p)$).

## 1.2 Un inverse de $\mathcal{E}$

**Notation 1.15.** Dans cette section 1.2 nous fixons une représentation réflexion-fidèle de $(W, \mathcal{S})$ sur un corps infini. Nous voulons trouver un inverse à gauche explicite de l'homomorphisme d'anneaux $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \langle \mathcal{R} \rangle$. Nous commençons avec quelques notations. Pour $B, B' \in \mathcal{R}$ nous posons

$$\mathrm{Hom}(B, B') = \mathrm{Hom}_{R \otimes R}(B, B') \in \mathcal{R}.$$

Bien entendu, l'action à gauche (resp. à droite) de $R$ dans notre espace des Hom vient de l'action à gauche (resp. à droite) sur $B$ ou, de manière équivalente, sur $B'$. En formules $(rf)(b) = f(rb) = r(f(b))$, $(fr)(b) = f(br) = (f(b))r$, $\forall r \in R$, $b \in B$, $f \in \mathrm{Hom}(B, B')$. Si les bimodules $B, B'$ sont gradués, alors Hom va avoir en plus une structure de $R$-bimodule gradué, avec

$$\mathrm{Hom}(B(\lambda), B'(\lambda')) = \mathrm{Hom}(B, B')(\lambda' - \lambda) \tag{1.2.1}$$

**Notation 1.16.** Pour tout $x \in W$ nous considérons le graphe inversé :

$$\mathrm{Gr}(x) = \{(xv, v) \mid v \in V\} \subset V \times V$$

et pour tout sous-ensemble fini $A \subseteq W$ dans $V \times V$ nous considérons

$$\mathrm{Gr}(A) = \bigcup_{x \in A} \mathrm{Gr}(x).$$

**Notation 1.17.** Si on identifie $R \otimes R$ avec les fonctions régulières sur $V \times V$, alors les fonctions régulières sur $\mathrm{Gr}(A)$ s'identifient à un quotient de $R \otimes_k R$. Ce quotient est naturellement un $(R, R)$-bimodule $\mathbb{Z}$-gradué. Nous le notons

$$R(A) = R(\mathrm{Gr}(A))$$

et il est facile de voir que $R(A) \in \mathcal{R}$. Pour $x \in W$ nous notons $R(\{x\}) = R_x$.

**Notation 1.18.** Étant donné un espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué de dimension finie $V = \bigoplus V_i$ nous définissons sa dimension graduée :

$$\underline{\dim} V = \sum (\dim V_i) v^{-i} \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$$

et pour un $R$-module à droite $\mathbb{Z}$-gradué $M$, nous définissons son rang gradué par

$$\underline{\mathrm{rk}} M = \underline{\dim}(M/MR_+) \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}].$$

Nous voyons facilement que $\underline{\dim}(V(1)) = v(\underline{\dim} V)$ et $\underline{\mathrm{rk}}(M(1)) = v(\underline{\mathrm{rk}} M)$. Certainement notre rang gradué n'est raisonnable que pour les modules libres, et nous allons seulement l'utiliser pour ceux-là. Par $\overline{\underline{\mathrm{rk}}} M$ nous notons l'image de $\underline{\mathrm{rk}} M$ par la substitution $v \mapsto v^{-1}$. Maintenant nous pouvons poser le théorème central de cette section

**Théorème 1.19.** *Le morphisme $\eta : \langle \mathcal{R} \rangle \to \mathcal{H}$ donné par la formule*

$$\langle B \rangle \mapsto \sum_{x \in W} \underline{\overline{\mathrm{rk}}}\, \mathrm{Hom}(B, R_x)\, T_x.$$

*est un inverse à gauche du morphisme $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \langle \mathcal{R} \rangle$.*

*Démonstration.* Ce théorème est une conséquence directe de la proposition 1.24 et du corollaire 1.31, que nous prouverons dans la suite. □

### 1.2.1 Support

Soit $X$ une variété affine sur $k$ et $A$ son algèbre de fonctions régulières sur $k$. Nous utiliserons l'équivalence entre $A$-modules et faisceaux quasi-coherents (voir [Har, Chapter II, corollary 5.5]). Si $M$ est un $A$-module et $\mathcal{M}$ est le faisceau quasi-coherent sur $X$ correspondant, alors le *support* de $\mathcal{M}$, que nous noterons $\mathrm{supp} M$, est l'ensemble des points $x \in X$ pour lesquels $\mathcal{M}_x \neq 0$. Le support d'une section $m \in M$, noté $\mathrm{supp}(m)$, est le support du sous-module engendré par $m$.

Nous notons $\mathrm{Ann}(M)$ le sous-ensemble de $A$ annulateur de $M$, et si $I$ est un idéal de $A$, alors nous notons $\mathcal{V}(I)$ la variété fermé définie par $I$.

*Remarque* 1.20. Si $M$ est de type fini, alors $\mathrm{supp}(M) = \mathcal{V}(\mathrm{Ann}(M))$ (voir [Har, Chapter II, Exercice 5.6(b)]). Nous avons aussi que $\mathrm{supp}(m) = \mathcal{V}(\mathrm{Ann}(m))$, pour tout $m \in M$. (voir [Har, Chapter II, Exercice 5.6(a)]).

Comme $\mathrm{Ann}(M) = \bigcap_{m \in M} \mathrm{Ann}(m)$, nous avons que

$$\mathcal{V}(\mathrm{Ann}(M)) = \bigcup_{m \in M} \mathcal{V}(\mathrm{Ann}(m)),$$

c'est à dire,

$$\mathrm{supp}(M) = \bigcup_{m \in M} \mathrm{supp}(m).$$

**Définition 1.21.** Pour tout $R$-bimodule $B$ et tout sous-ensemble $A \subset W$ nous définissons le sous-bimodule

$$\Gamma_A B = \{ b \in B \mid \mathrm{supp}\, b \subset \mathrm{Gr}(A) \}$$

de tous les éléments qui ont leur support contenu dans $\mathrm{Gr}(A)$. Nous posons $\Gamma_{\geqslant i} B = \Gamma_{\{x \in W \mid l(x) \geqslant i\}} B$ et définissons la catégorie

$$\mathcal{F}_\Delta \subset \mathcal{R}$$

comme la sous-catégorie pleine d'objets les bimodules gradués $B \in \mathcal{R}$, tels que $B$ a son support contenu dans un ensemble de la forme $\mathrm{Gr}(A)$ pour un ensemble fini $A \subset W$, et tel que, pour tout $i$, le quotient $\Gamma_{\geqslant i}B/\Gamma_{\geqslant i+1}B$ est isomorphe à une somme directe finie de bimodules gradués de la forme $R_x(\nu)$ avec $l(x) = i$ et $\nu \in \mathbb{Z}$.

Notons que $R_x$ n'appartient pas à la catégorie de Soergel si $x \neq e$, mais $R_x \in \mathcal{F}_\Delta$.

**Lemme 1.22.** *Le foncteur $\Gamma_i^{\geqslant} := (B \mapsto \Gamma_{\geqslant i}B/\Gamma_{\geqslant i+1}B)$ est additif, les facteurs directs d'objets de $\mathcal{F}_\Delta$ sont encore dans $\mathcal{F}_\Delta$ et ceci est vrai aussi pour les sommes directes.*

*Démonstration.* Soient $B, C \in \mathcal{R}$, $b \in B$ et $c \in C$. La formule suivante $\mathrm{Ann}(b+c) = \mathrm{Ann}(b) \cap \mathrm{Ann}(c)$ est facile de vérifier. Ceci implique que $\mathcal{V}(\mathrm{Ann}(b+c)) = \mathcal{V}(\mathrm{Ann}(b)) \cup \mathcal{V}(\mathrm{Ann}(c))$, donc on conclut

$$\Gamma_A(B \oplus C) = \Gamma_A(B) \oplus \Gamma_A(C),$$

et cette formule permet de conclure que $\Gamma_i^{\geqslant}$ est additif. Ceci implique que les sommes directes d'objets de $\mathcal{F}_\Delta$ sont encore en $\mathcal{F}_\Delta$. Pour finir nous devons montrer la même assertion pour les facteurs directs.

- Si $C$ est un facteur direct de $B$, alors $\mathrm{Ann}(C) \supseteq \mathrm{Ann}(B)$, donc $\mathrm{supp}(C) = \mathcal{V}(\mathrm{Ann}(C)) \subseteq \mathcal{V}(\mathrm{Ann}(B)) \subseteq \mathrm{Gr}(A)$.
- Soit $B \in \mathcal{F}_\Delta$, et $C, D \in \mathcal{R}$ avec $B \cong C \oplus D$. Comme $\Gamma_i^{\geqslant}$ est additif, nous avons
$$\Gamma_i^{\geqslant}(B) \cong \Gamma_i^{\geqslant}(C) \oplus \Gamma_i^{\geqslant}(D) \cong \bigoplus_{\substack{x \in W \\ l(x)=i}} n_{x,\nu} R_x(\nu)$$
avec les $n_{x,\nu}$ des entiers positifs. Comme $R_x$ est cyclique, c'est un élément indécomposable de $\mathcal{R}$, le théorème de Krull-Schmidt (remarque 1.6) appliqué à la catégorie $\mathcal{R}$ permet de conclure qu'il existe des entiers $n'_{x,\nu}$ tels que
$$\Gamma_i^{\geqslant}(C) \cong \bigoplus_{\substack{x \in W \\ l(x)=i}} n'_{x,\nu} R_x(\nu).$$
Par conséquent, $C \in \mathcal{F}_\Delta$.

□

**Notation 1.23.** Pour simplifier les notations dans la suite nous introduirons les bimodules gradués

$$\Delta_x = R_x(-l(x))$$

et nous posons $\tilde{T}_x = v^{l(x)} T_x$. Si $B \in \mathcal{F}_\Delta$, nous noterons $(B : \Delta_x(\nu))$ la multiplicité d'un facteur direct $\Delta_x(\nu)$ en une (et donc en toute par la remarque 1.6) décomposition de $\Gamma_{\geqslant i} B / \Gamma_{\geqslant i+1} B$ pour $i = l(x)$. Nous introduisons aussi la notation $\theta_s^\bullet M = R(1) \otimes_{R^s} M$.

**Proposition 1.24.** *Soit $s \in \mathcal{R}$ une réflexion simple.*

1. *Si $B$ appartient à $\mathcal{F}_\Delta$, alors $R \otimes_{R^s} B$ appartient aussi à $\mathcal{F}_\Delta$.*
2. *Si nous définissons l'application $h_\Delta : \mathcal{F}_\Delta \to \mathcal{H}$ par la formule $B \mapsto \sum_{x,\nu} (B : \Delta_x(\nu)) v^\nu \tilde{T}_x$, alors nous obtenons deux diagrammes commutatifs pour chaque $s \in \mathcal{R}$*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_\Delta \arrow[r] \arrow[d, "\theta_s^\bullet"'] & \mathcal{H} \arrow[d, "(\tilde{T}_s + v)\cdot"] \\ \mathcal{F}_\Delta \arrow[r] & \mathcal{H} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{F}_\Delta \arrow[r] \arrow[d, "(1)"'] & \mathcal{H} \arrow[d, "v\cdot"] \\ \mathcal{F}_\Delta \arrow[r] & \mathcal{H} \end{tikzcd}$$

   *où les flèches horizontales sont des $h_\Delta$.*
3. *Le morphisme $\mathcal{E}$ se factorise via l'application $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \langle \mathcal{F}_\Delta \rangle$ et l'application $h_\Delta : \langle \mathcal{F}_\Delta \rangle \to \mathcal{H}$ est un inverse à gauche de $\mathcal{E}$.*

*Démonstration.* Pour prouver cette proposition nous devons commencer par le lemme suivant :

**Lemme 1.25.** *Soit $W$ un espace vectoriel de dimension finie et $U, V \subset W$ deux sous-espaces vectoriels. Alors $\mathrm{Ext}^1_{R(W)}(R(U), R(V))$ est non nul si et seulement si nous avons $V \cap U = V$ ou bien si $V \cap U$ est de codimension un dans $V$. Dans ce dernier cas, $\mathrm{Ext}^1_{R(W)}(R(U), R(V))$ est un $R(U \cap V)$-module libre de rang 1, engendré par la classe d'une suite exacte courte quelconque de la forme*

$$R(V)(-2) \overset{\alpha}{\hookrightarrow} R(U \cup V) \twoheadrightarrow R(U)$$

*pour $\alpha \in W^*$ avec $\alpha|_U = 0$, $\alpha|_V \neq 0$.*

*Démonstration.* Si $F$ et $G$ sont des modules libres de type fini sur des $k$-algèbres $A$ et $B$ respectivement et si $M$ et $N$ sont des modules quelconques sur $A$ et $B$ respectivement, alors (voir [Bo2, I §4 et II §11]) on a

$$\mathrm{Hom}_A(F, M) \otimes \mathrm{Hom}_B(G, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A \otimes B}(F \otimes G, M \otimes N).$$

Si $A$ et $B$ sont noetheriens et $M'$ (resp. $N'$) est de type fini sur $A$ (resp. $B$), nous trouvons des résolutions $F^\bullet \twoheadrightarrow M'$ resp. $G^\bullet \twoheadrightarrow N'$ avec $F^i$ resp. $G^j$

libres de type fini sur $A$ resp. $B$. Alors $F^\bullet \otimes G^\bullet$ est une résolution libre de $M' \otimes N'$ et on déduit

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ext}^n_{A\otimes B}(M' \otimes N', M \otimes N) & \simeq & H^n \,\mathrm{Hom}_{A\otimes B}(F^\bullet \otimes G^\bullet, M \otimes N) \\ & \simeq & H^n(\mathrm{Hom}_A(F^\bullet, M) \otimes \mathrm{Hom}_B(G^\bullet, N)) \\ & \simeq & \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Ext}^i_A(M', M) \otimes \mathrm{Ext}^j_B(N', N) \end{array}$$

Donc on a finalement

$$\mathrm{Ext}^\bullet_{A\otimes B}(M' \otimes N', M \otimes N) \simeq \mathrm{Ext}^\bullet_A(M', M) \otimes \mathrm{Ext}^\bullet_B(N', N). \tag{1.2.2}$$

Nous pouvons trouver une décomposition $W = S \oplus U' \oplus V' \oplus W'$ avec $U = S \oplus U'$ et $V = S \oplus V'$. Si nous considérons les expressions
– $R(W) = R(S) \otimes R(U') \otimes R(V') \otimes R(W')$
– $R(U) = R(S) \otimes R(U') \otimes k \otimes k$
– $R(V) = R(S) \otimes k \otimes R(V') \otimes k$,
nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^\bullet_{R(W)}(R(U), R(V)) \cong \mathrm{Ext}^\bullet_{R(S)}(R(S), R(S)) \otimes \mathrm{Ext}^\bullet_{R(U')}(R(U'), k) \otimes \\ \otimes \mathrm{Ext}^\bullet_{R(V')}(k, R(V')) \otimes \mathrm{Ext}^\bullet_{R(W')}(k, k). \end{aligned}$$

et si nous notons la dimension de $W$ par $\dim W = s + u + v + w$, et nous appliquons à nouveau l'équation 1.2.2, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^\bullet_{R(W)}(R(U), R(V)) \cong \mathrm{Ext}^\bullet_{k[X]}(k[X], k[X])^{\otimes s} \otimes \mathrm{Ext}^\bullet_{k[X]}(k[X], k)^{\otimes u} \otimes \\ \otimes \mathrm{Ext}^\bullet_{k[X]}(k, k[X])^{\otimes v} \otimes \mathrm{Ext}^\bullet_{k[X]}(k, k)^{\otimes w}, \end{aligned}$$

où nous notons $M^{\otimes i} = M \otimes_k M \otimes_k \cdots \otimes_k M$, le bimodule $M$ tensorisé $i$ fois. Nous allons noter $\mathrm{Ext}^1$ le groupe $\mathrm{Ext}^1_{R(W)}(R(U), R(V))$.

Comme

$$\mathrm{Ext}^0_{k[X]}(k, k[X]) \cong \{0\}$$

et

$$\mathrm{Ext}^1_{k[X]}(k, k[X]) \cong k,$$

pour que $\mathrm{Ext}^1$ soit non nul il est nécessaire que $v \leqslant 1$. Il est facile de voir que

$$\mathrm{Ext}^0_{k[X]}(k[X], k[X]) \cong k[X],$$
$$\mathrm{Ext}^0_{k[X]}(k[X], k) \cong k$$

et

$$\mathrm{Ext}^0_{k[X]}(k, k) \cong k.$$

Nous concluons que si $v = 1$, alors $\mathrm{Ext}^1 = k[X]^{\otimes s} = R(S)$. $\square$

Maintenant nous prouvons la proposition 1.24. Soit $s \in \mathcal{S}$ notre réflexion simple fixée. Nous pouvons raffiner la filtration $\Gamma_{\geqslant i}$ de $B$ pour certains $\Gamma_{\geqslant j} B$ avec $j \in \mathbb{Z} + 0,5$ de tel sorte que pour tout $i \in \mathbb{Z}$ les quotients $\Gamma_{\geqslant i} B / \Gamma_{\geqslant i+0,5} B$ (resp. $\Gamma_{\geqslant i-0,5} B / \Gamma_{\geqslant i} B$) sont des sommes directes de $R(x)(\nu)$ avec $x > sx$ (resp. $x < sx$).

Avec ce choix, les paramètres $x, y$ de deux sous-quotients possibles de $\Gamma_{\geqslant i-0,5} B / \Gamma_{\geqslant i+0,5} B$ diffèrent par une réflexion seulement si $y = sx$ : en fait, pour une réflexion arbitraire $t$ nous avons toujours $tx > x$ ou $tx < x$, et $sy > y < x > sx$ implique $y \leqslant sx$ par un résultat de Deodhar connu sous le nom de la propriété Z des groupes de Coxeter. Mais toutes les extensions en $\mathrm{Ext}^1_{R \otimes R}(R_x, R_{sx})$ sont zéro après restriction à $R^s \otimes R$. En fait, si $R_{x,sx}$ est l'algèbre de fonctions régulières sur $\mathrm{Gr}(x) \cup \mathrm{Gr}(sx)$, la restriction $R_{x,sx} \twoheadrightarrow R_x$ est scindée sur $R^s \otimes R$, alors nous avons un isomorphisme $R_{x,sx}^{(s,1)} \xrightarrow{\sim} R_x$, où l'exposant ${}^{(s,1)}$ signifie le sous anneau d'éléments stables par l'action de $s \times \mathrm{id}$.

Par le lemme 1.25, la restriction à $R^s \otimes R$ de $\Gamma_{\geqslant i-0,5} B / \Gamma_{\geqslant i+0,5} B$ est isomorphe à une somme directe de bimodules du type $R_x(\nu)$ avec $x > sx$ et $l(x) = i$, et ceci apparaît avec multiplicité $(B : R_x(\nu)) + (B : R_{sx}(\nu))$. Si nous tensorisons avec $R \otimes_{R^s}$ et nous considérons les suites exactes courtes $R_x(-2) \hookrightarrow R \otimes_{R^s} R_x \twoheadrightarrow R_{sx}$, nous obtenons la première partie de la proposition et (toujours en supposant que $x > sx$), les formules

$$\begin{array}{lcll} (R \otimes_{R^s} B : R_x(\nu)) & = & (B : R_x(\nu + 2)) & + (B : R_{sx}(\nu + 2)) \\ (R \otimes_{R^s} B : R_{sx}(\nu)) & = & (B : R_x(\nu)) & + (B : R_{sx}(\nu)) \end{array}$$

Nous pouvons réécrire ceci de la manière suivante :

$$\begin{array}{lcll} (\theta_s^\bullet B : \Delta_x(\nu)) & = & (B : \Delta_x(\nu + 1)) & + (B : \Delta_{sx}(\nu)) \\ (R(1) \otimes_{R^s} B : \Delta_{sx}(\nu)) & = & (B : \Delta_x(\nu)) & + (B : \Delta_{sx}(\nu - 1)) \end{array}$$

Si maintenant nous écrivons un élément $H \in \mathcal{H}$ sous la forme $H = \sum_{x,\nu} (H : v^\nu \tilde{T}_x)\, v^\nu \tilde{T}_x$, alors nous obtenons, dans l'algèbre de Hecke la formule analogue :

$$\begin{array}{lcll} ((\tilde{T}_s + v)H : v^\nu \tilde{T}_x) & = & (H : v^{\nu+1} \tilde{T}_x) & + (H : v^\nu \tilde{T}_{sx}) \\ ((\tilde{T}_s + v)H : v^\nu \tilde{T}_{sx}) & = & (H : v^\nu \tilde{T}_x) & + (H : v^{\nu-1} \tilde{T}_{sx}) \end{array}$$

Ceci montre la deuxième assertion. Pour prouver la dernière assertion, nous remarquons d'abord qu'on peut considérer $\langle \mathcal{R} \rangle$ via l'homomorphisme d'anneaux $\mathcal{E}$ comme un $\mathcal{H}$-module à gauche. La première partie de la proposition veut dire alors que $\langle \mathcal{F}_\Delta \rangle \subset \langle \mathcal{R} \rangle$ est un $\mathcal{H}$-sous-module, et la deuxième partie que l'application $h_\Delta : \langle \mathcal{F}_\Delta \rangle \to \mathcal{H}$ est un homomorphisme de $\mathcal{H}$-modules. Comme $\mathcal{E}(1) = \langle R_e \rangle$ appartient à $\mathcal{F}_\Delta$, l'application $\mathcal{E}$ se factorise par $\langle \mathcal{F}_\Delta \rangle$, et comme $h_\Delta \circ \mathcal{E} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est un homomorphisme bijectif de $\mathcal{H}$-modules, cette composée doit être l'identité. $\square$

Pour montrer le théorème 1.19 nous avons besoin d'une approche "duale". Plus précisement, nous considérons la filtration de nos bimodules par les $\Gamma_{\leqslant i} B = \Gamma_{\{x \in W | l(x) \leqslant i\}} B$ et nous définissons la catégorie

$$\mathcal{F}_\nabla \subset \mathcal{R}$$

comme la sous-catégorie pleine d'objets les bimodules gradués $B \in \mathcal{R}$ tels que le support est dans $\mathrm{Gr}(A)$ pour un certain sous-ensemble fini $A \subset W$, et tels que pour tout $i$ les quotients sont isomorphes à des sommes directes finies de bimodules gradués du type $R_x(\nu)$ avec $l(x) = i$ et $\nu \in \mathbb{Z}$. Dans ce contexte il est naturel d'introduire

$$\nabla_x = R_x(l(x)).$$

Pour la multiplicité de $\nabla_x(\nu)$ dans une décomposition en facteurs directs de $\Gamma_{\leqslant l(x)} B / \Gamma_{\leqslant l(x)-1} B$ nous notons $(B : \nabla_x(\nu))$.

Remarquons que les multiplicités $(B : \nabla_x(\nu))$ et $(B : \Delta_x(\nu))$ sont calculées par rapport à des filtrations différentes. Même pour $B \in \mathcal{F}_\Delta \cap \mathcal{F}_\nabla$, les multiplicités $(B : \Delta_x(l(x) + \nu))$ et $(B : \nabla_x(-l(x) + \nu))$ sont différentes en général. Nous avons une proposition analogue à la proposition 1.24.

**Proposition 1.26.** *Soit $s \in \mathcal{R}$ une réflexion simple.*

1. *Si $B$ appartient à $\mathcal{F}_\nabla$, alors $R \otimes_{R^s} B$ appartient aussi à $\mathcal{F}_\nabla$.*
2. *Si nous définissons l'application $h_\nabla : \mathcal{F}_\nabla \to \mathcal{H}$ par la formule $B \mapsto \sum_{x,\mu} (B : \nabla_x(\mu))\ v^{-\mu} \tilde{T}_x$, alors nous obtenons, pour chaque $s \in \mathcal{R}$, les deux diagrammes commutatifs suivants*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_\nabla & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ {\scriptstyle \theta_s^\bullet}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\tilde{T}_s + v)\cdot} \\ \mathcal{F}_\nabla & \longrightarrow & \mathcal{H} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}_\nabla & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ {\scriptstyle (1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v^{-1}\cdot} \\ \mathcal{F}_\nabla & \longrightarrow & \mathcal{H} \end{array}$$

   *où les flèches horizontales sont des $h_\Delta$.*
3. *La composée $d \circ h_\nabla$ est un inverse à gauche de $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \langle \mathcal{F}_\nabla \rangle$.*

*Démonstration.* Nous considérons le foncteur

$$D = \mathrm{Hom}_{-R}(\ , R) : \mathcal{R} \to R\mathrm{-mod}_{\mathbb{Z}}\mathrm{-}R,$$

Nous munissons l'espace d'homomorphismes de $R$-modules à droite avec la $\mathbb{Z}$-graduation naturelle et avec l'action de $R$ à gauche (resp. à droite) sur $DB$ définie via l'action à gauche (resp. à droite) sur le bimodule $B$. En formules : $(rf)(b) = f(rb)$ et $(fr)(b) = f(br)$ pour tout $b \in B$, $r \in R$, $f \in DB$.

Il est facile de vérifier que le morphisme de $R_x$ vers $DR_x$ qui envoie $r$ vers le morphisme $(1 \mapsto r)$ est un isomorphisme de $(R, R)-$bimodules. En outre, par la formule 1.2.1 on conclut que $D(M(\nu)) = (DM)(-\nu)$. Notre foncteur induit une équivalence de catégories $D : \mathcal{F}_\nabla \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_\Delta^{\text{opp}}$ et nous avons $h_\nabla = h_\Delta \circ D$. Donc il suffit d'établir pour tout $M \in \mathcal{F}_\nabla$ un isomorphisme $\theta_s^\bullet DM \cong D\theta_s^\bullet M$. Pour cela nous montrons d'abord :

**Proposition 1.27.** *1. Les foncteurs $M \mapsto R(2) \otimes_{R^s} M$ et $M \mapsto \mathrm{Hom}_{R^s}(R, M)$, de $R^s-\mathrm{mod}_\mathbb{Z}$ vers $R-\mathrm{mod}_\mathbb{Z}$, sont naturellement équivalents.*

*2. Le foncteur $R(1) \otimes_{R^s} : R-\mathrm{mod}_\mathbb{Z} \to R-\mathrm{mod}_\mathbb{Z}$ est autoadjoint.*

*Démonstration.* Comme $R$ est libre de type fini comme $R^s$-module, le foncteur Hom peut-être écrit de la manière suivante

$$\mathrm{Hom}_{R^s}(R, -) = \mathrm{Hom}_{R^s}(R, R^s) \otimes_{R^s} -.$$

Pour être plus précis il nous faut introduire une notation.

**Notation 1.28.** Pour chaque réflexion $t \in \mathcal{T}$ nous fixons une équation de l'hyperplan des points fixes par $t$ et nous la notons $x_t \in V^*$ ($x_t$ est bien défini à scalaire près).

L'ensemble $\{1, x_s\}$ est une base de $R$ sur $R^s$. Nous notons $\{1^*, x_s^*\}$ la base duale de $\mathrm{Hom}_{R^s}(R, R^s)$ sur $R^s$. La multiplication par $x_s$ dans cette base est donnée par $x_s x_s^* = 1^*$ et $x_s 1^* = x_s^2 x_s^*$. Le choix de $x_s$ définit un isomorphisme de $R$-modules

$$R(2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{R^s}(R, R^s) \qquad 1 \mapsto x_s^*, \ x_s \mapsto 1^*$$

et ceci établit la première assertion. La deuxième assertion découle de la première et de l'isomorphisme cher à Henri Cartan (voir [Il, prop.1.3.4]) :

$$\mathrm{Hom}_{-R}(R \otimes_{R^s} M, N) \cong \mathrm{Hom}_{-R}(M, \mathrm{Hom}_{R^s}(R, N)).$$

□

Nous avons alors les isomorphismes suivants :

$$\begin{array}{rcll} \theta_s^\bullet(DM) & \cong & R(1) \otimes_{R^s} DM & \text{def.} \\ & \cong & \mathrm{Hom}_{R^s}(R(1), \mathrm{Hom}_{-R}(M,R)) & \text{prop. } 1.27, 1 \\ & \cong & \mathrm{Hom}_{-R}(\theta_s^\bullet M, R) & \\ & \cong & D(\theta_s^\bullet M) & \text{def.} \end{array}$$

Le troisième isomorphisme se déduit de l'isomorphisme cher à Cartan.

La troisième partie de la proposition 1.26 en découle, parce que nous avons $d(\tilde{T}_s + v) = \tilde{T}_s + v$, donc la composée $d \circ h_\nabla \circ \mathcal{E} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est un homomorphisme bijectif de $\mathcal{H}$-modules à gauche. □

*Remarque* 1.29. Par le lemme 1.10, $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \langle \mathcal{R} \rangle$ se factorise par le groupe de Grothendieck scindé $\langle \mathbf{B} \rangle$ de la catégorie additive $\mathbf{B}$. Les propositions 1.24 et 1.26 impliquent $\mathbf{B} \subset \mathcal{F}_\Delta \cap \mathcal{F}_\nabla$.

**Théorème 1.30.** *Pour $M \in \mathcal{F}_\Delta$, $N \in \mathbf{B}$ et aussi pour $M \in \mathbf{B}$, $N \in \mathcal{F}_\nabla$, l'espace* $\mathrm{Hom}(M,N)$ *est gradué et libre comme $R$-module à droite. Son rang est*

$$\underline{\mathrm{rk}}\,\mathrm{Hom}(M,N) = \sum_{x,\nu,\mu} (M : \Delta_x(\nu))(N : \nabla_x(\mu)) v^{\mu-\nu}.$$

*Démonstration.* Nous traitons seulement le cas $M \in \mathcal{F}_\Delta$, $N \in \mathbf{B}$, l'autre cas est similaire. Soit $i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ l'anti-involution $i(v) = v$, $i(\tilde{T}_x) = \tilde{T}_{x^{-1}}$. On considère la forme $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$−bilinéaire symétrique $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$, qui à chaque paire $(F, G)$ associe le coefficient de $\tilde{T}_e = T_e$ dans la représentation de $i(F)G$ comme combination linéaire des $T_w$, ou de manière équivalente, des $\tilde{T}$. On peut la décrire explicitement : $\langle \tilde{T}_x, \tilde{T}_y \rangle = \delta_{xy}$ (voir [Lu2, §1.4]). La formule qu'on cherche alors est la suivante

$$\overline{\underline{\mathrm{rk}}}\,\mathrm{Hom}(M,N) = \langle h_\Delta M, h_\nabla N \rangle.$$

Comme $\overline{\underline{\mathrm{rk}}}(M \oplus N) = \overline{\underline{\mathrm{rk}}}(M) + \overline{\underline{\mathrm{rk}}}(N)$ et par le lemme 1.22 nous avons que $h_\nabla(M \oplus N) = h_\nabla(M) + h_\nabla(N)$, le lemme 1.10 nous permet de conclure que nous pouvons nous restreindre au cas $N = B(\underline{s})$. Par les propositions 1.24(2), 1.26(2) et 1.27, on peut voir que la formule est correcte pour $(R \otimes_{R^s} M, N)$ si et seulement si elle l'est pour $(M, R \otimes_{R^s} N)$. Il n'est pas difficile de voir que la formule est correcte pour $(M(1), N)$ si et seulement si elle l'est pour $(M, N(-1))$. En utilisant ceci on peut se ramener au cas $N = R_e$. Nous allons traiter ce cas. Il est facile de voir que

$$\mathrm{Hom}(R_x, R) \cong \begin{cases} \{0\} & \text{si } x \neq e \\ R & \text{si } x = e. \end{cases}$$

Ceci implique que

$$\mathrm{Hom}(\Gamma_{\geqslant i}M/\Gamma_{\geqslant i+1}M, R) \cong \begin{cases} \{0\} & \text{si } i \geqslant 1 \\ \oplus_\nu R(-\nu)^{(M:R(\nu))} & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

On considère la suite exacte

$$\Gamma_{\geqslant i+1}M \to \Gamma_{\geqslant i}M \to \Gamma_{\geqslant i}M/\Gamma_{\geqslant i+1}M \to 0$$

et on déduit la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}(\Gamma_{\geqslant i}M/\Gamma_{\geqslant i+1}M, R) \to \mathrm{Hom}(\Gamma_{\geqslant i}M, R) \to \mathrm{Hom}(\Gamma_{\geqslant i+1}M, R) \tag{1.2.3}$$

Donc si $i \geqslant 1$ on déduit que $\mathrm{Hom}(\Gamma_{\geqslant i}M, R)$ s'injecte dans $\mathrm{Hom}(\Gamma_{\geqslant i+1}M, R)$, mais par définition de $\mathcal{F}_\Delta$, le support de $M$ est $\mathrm{Gr}(A)$, avec $A$ fini, donc il existe un entier naturel $n$ avec $\Gamma_{\geqslant n}M = \{0\}$. On peut alors conclure que $\mathrm{Hom}(\Gamma_{\geqslant 1}M, R) = \{0\}$. Cette égalité et la suite exacte 1.2.3 appliqué à $i = 0$ impliquent que

$$\mathrm{Hom}(M, R) \cong \oplus_\nu R(-\nu)^{(M:R(\nu))}$$

c'est à dire,

$$\underline{\mathrm{rk}}\,\mathrm{Hom}(M, R) = \sum_\nu (M : R_e(\nu))v^\nu$$

ce qui permet de finir la preuve du théorème 1.30. □

**Corollaire 1.31.** *Soit $B \in \mathbf{B}$ dans la catégorie de Soergel. Nous avons les formules*

$$\begin{aligned} h_\Delta(B) &= \textstyle\sum_{x\in W} \overline{\underline{\mathrm{rk}}}\,\mathrm{Hom}(B, R_x)\, T_x, \\ h_\nabla(B) &= \textstyle\sum_{x\in W} \overline{\underline{\mathrm{rk}}}\,\mathrm{Hom}(R_x, B)\, T_x. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Comme $R_x$ est l'algèbre de fonctions régulières sur $\mathrm{Gr}(x)$, nous avons que $\mathrm{supp}(R_x) = \Delta_x$. Donc nous avons que si $b \in R_x$ alors $\mathrm{supp}(b) = \Delta_x$. Ceci implique que $\Gamma_i R_x = R_x$ et $\Gamma_{\neq i}R_x = \{0\}$. Nous avons alors la formule

$$\Gamma_{\geqslant i}R_x = \begin{cases} R_x & \text{si } i \leqslant l(x) \\ \{0\} & \text{si } i > l(x) \end{cases} \tag{1.2.4}$$

qui implique

$$\Gamma^{\geqslant i}R_x = \begin{cases} R_x & \text{si } i = l(x) \\ \{0\} & \text{si } i \neq l(x) \end{cases} \tag{1.2.5}$$

c'est-à-dire,

$$(\nabla_y(\mu) : \nabla_x(\nu)) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = y \text{ et } \mu = \nu \\ 0 \quad \text{ sinon.} \end{cases} \tag{1.2.6}$$

Par l'équation 1.2.6 et le théorème précédent 1.30 nous avons

$$\begin{array}{rcl} \underline{\mathrm{rk}}\,\mathrm{Hom}(B, R_x) & = & \underline{\mathrm{rk}}\,\mathrm{Hom}(B, \nabla_x(-l(x))) \\ & = & \sum_\nu (B : \Delta_x(\nu)) v^{-l(x)-\nu} \\ \underline{\mathrm{rk}}\,\mathrm{Hom}(R_x, B) & = & \underline{\mathrm{rk}}\,\mathrm{Hom}(\Delta_x(l(x)), B) \\ & = & \sum_\mu (B : \nabla_x(\mu)) v^{-l(x)+\mu} \end{array}$$

et le corollaire 1.31 découle des définitions. $\square$

# Chapitre 2

# Autour d'une catégorification de la relation de tresses

Dans ce chapitre nous étudions une "catégorification" de la relation de tresses dans la catégorie de Soergel. Plus précisement, pour $s, r \in \mathcal{S}$, l'espace $\mathrm{Hom}(\theta_s\theta_r\theta_s\cdots, \theta_r\theta_s\theta_r\cdots)$, avec $m(s,r)$ termes de chaque coté, admet un seul morphisme non nul (modulo scalaire) en degré zéro. Nous choisissons un élément (nous l'appelons $f_{sr}$) parmi ceux de cet ensemble, qui satisfait une condition d'invariance. Ce morphisme $f_{sr}$ va être fondamental dans les chapitres 3, 5 et 6.

Dans la section 2.1 nous démontrons que $f_{sr}$ est bien défini. Le fait que $R$ est une algèbre symétrique sur $R^{\langle s,r\rangle}$ est utilisé dans la section 2.2 pour trouver une formule pour $f_{sr}$. Dans la section 2.3 nous trouvons une propriété des $f_{sr}$ qui va être clé dans le chapitre 6 ; elle va nous permettre de faire commuter différentes compositions de $f_{sr}$ tensorisées par l'identité. Ceci est le point de départ pour trouver une nouvelle base de l'algèbre de Hecke.

Pour catégorifier le groupe de tresses $B_W$, Rouquier a montré l'existence d'une équivalence d'homotopie entre deux *complexes de Rouquier*. Nous construisons explicitement une telle équivalence dans la section 2.5.

Avec les morphismes que nous obtenons, dans la section 2.6 nous trouvons une nouvelle formule pour $f_{sr}$ en passant par la géométrie. Finalement dans la section 2.7 nous donnons des formules explicites pour $f_{sr}$ quand $m(s,r) = 2$ ou 3.

## 2.1 Définition de $f_{sr}$

Dans cette section, nous définissons des morphismes correspondant aux relations de tresses et nous montrons qu'ils sont bien définis.

Dans ce chapitre nous considérerons $s, r \in \mathcal{S}$, $s \neq r$, avec $m(s,r) = m \neq \infty$. Nous utiliserons la notation $\theta_s = R \otimes_{R^s} R$ (noter que $\theta_s^\bullet R = \theta_s(1)$). Nous posons

**Notation 2.1.** $t = \begin{cases} s \text{ si } m \text{ est impair} \\ r \text{ si } m \text{ est pair} \end{cases}$ et $u = \begin{cases} r \text{ si } m \text{ est impair} \\ s \text{ si } m \text{ est pair} \end{cases}$

Nous posons

$$X_{sr} := \theta_s \theta_r \theta_s \cdots \theta_t \quad et \quad X_{rs} := \theta_r \theta_s \theta_r \cdots \theta_u,$$

chaque produit ayant $m(s,r)$ termes.

**Définition-Théorème 2.2.** *Soient $s \neq r \in \mathcal{S}$ avec $m(s,r) \neq \infty$. Il existe un unique morphisme de $(R,R)$-bimodules $f_{sr} : X_{sr} \to X_{rs}$ de degré zéro tel que :*

$$f_{sr}(1 \otimes x_s \otimes x_r \otimes x_s \otimes \cdots \otimes x_t) \in 1 \otimes x_r \otimes x_s \otimes x_r \otimes \cdots \otimes x_u + R_+ X_{rs}$$

Tout le reste de cette section sera dévolu à démontrer ce théorème. Nous commençons par rappeler un résultat de Soergel. C'est une partie du théorème 5.15 de l'article [So4] :

**Proposition 2.3** (Soergel). *Si $M, N \in \mathbf{B}$, alors* $\mathrm{Hom}(M,N)$ *est libre comme $R$-module à droite gradué.*

Le résultat suivant est plus précis que la proposition 1.27.

**Lemme 2.4.** *Pour $M, N \in \mathbf{B}$, le morphisme*

$$\begin{array}{rcl} F_s(M,N) : \mathrm{Hom}(\theta_s M, N) & \to & \mathrm{Hom}(M, \theta_s N)(2) \\ f & \mapsto & (m \mapsto x_s \otimes f(1 \otimes m) + 1 \otimes f(1 \otimes x_s m)) \end{array}$$

*est un isomorphisme de $R$-modules à droite gradués.*

*Démonstration.* Nous pouvons voir facilement que $R = R^s \oplus x_s R^s$. Alors, si $g \in \mathrm{Hom}(M, \theta_s N)(2)$, on peut écrire de manière unique $g(m) = 1 \otimes g_1(m) +$

$x_s \otimes g_2(m)$, avec $g_1(m), g_2(m) \in N$. Ceci définit les morphismes $g_1$ et $g_2$ associés à $g$. Soit $G_s(M,N) : \mathrm{Hom}(M, \theta_s N)(2) \to \mathrm{Hom}(\theta_s M, N)$ le morphisme qui envoie $g$ vers le morphisme $\lambda \otimes m \mapsto \lambda g_2(m)$, avec $\lambda \in R$ et $m \in M$. Il suffit de montrer que $F_s(M,N)$ et $G_s(M,N)$ sont bien définis et inverses l'un de l'autre.

On a $g(x_s m) = x_s g(m)$, c'est à dire,

$$1 \otimes g_1(x_s m) + x_s \otimes g_2(x_s m) = x_s \otimes g_1(m) + 1 \otimes (x_s)^2 g_2(m).$$

Par unicité de la décomposition, cette formule permet de conclure que $g_2(x_s m) = g_1(m)$. Avec cette formule on montre directement que $F_s(M,N)$ et $G_s(M,N)$ sont inverses l'un de l'autre.

En outre, on a $g(a^s m) = a^s g(m)$ pour $a^s \in R^s$. Ceci revient à

$$\begin{aligned} 1 \otimes g_1(a^s m) + x_s \otimes g_2(a^s m) &= a^s \otimes g_1(m) + a^s x_s \otimes g_2(m) \\ &= 1 \otimes a^s g_1(m) + x_s \otimes a^s g_2(m). \end{aligned}$$

Ceci implique que $g_2(a^s m) = a^s g_2(m)$ et avec ceci on peut voir que $G_s(M,N)(g)$ est bien défini. Il est direct de voir que c'est un morphisme de bimodules. Voir que $F_s(M,N)(f)(m \cdot r) = (F_s(M,N)(f)(m)) \cdot r$ pour $r \in R$ est aussi direct. On veut alors $F_s(M,N)(f)(r \cdot m) = r \cdot (F_s(M,N)(f)(m))$. Pour $r \in R^s$ c'est facile, donc, avec notre décomposition $R = R^s \oplus x_s R^s$ il reste à le montrer pour $r = x_s$. Mais ceci découle directement du fait que $(x_s)^2 \in R^s$. $\square$

Nous introduisons une application importante :

**Définition 2.5.** Soit $\tau : \mathcal{H} \to \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ l'application définie par

$$\tau\left(\sum_{x \in W} p_x T_x\right) = p_1 \qquad (p_x \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]).$$

Maintenant on peut énoncer un corollaire du théorème 1.19.

**Corollaire 2.6.** *Soit $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathcal{S}^n$. On définit les entiers $n_i$ par $\tau((1 + T_{s_1}) \cdots (1 + T_{s_n})) = \sum_i n_i q^i$. Alors, il existe un isomorphisme de $R-$modules à droite gradués*

$$\mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}, R) \cong \bigoplus_i n_i R(2i).$$

*Démonstration.* Par la proposition 2.3, il existe des entiers $n'_i$ tels que $\mathrm{Hom}(\theta_{s_1}\cdots\theta_{s_n}, R) \cong \bigoplus_i n'_i R(2i)$ comme $R$-modules à droite, et par le théorème 1.19, on a les équations

$$\begin{array}{rcl}
\tau((1+T_{s_1})\cdots(1+T_{s_n})) & = & \tau\circ\eta\circ\mathcal{E}((1+T_{s_1})\cdots(1+T_{s_n})) \\
& = & \tau\circ\eta(\langle\theta_{s_1}\cdots\theta_{s_n}\rangle) \\
& = & \underline{\overline{\mathrm{rk}}}\mathrm{Hom}(\theta_{s_1}\cdots\theta_{s_n}, R) \\
& = & \underline{\overline{\mathrm{rk}}}(\bigoplus_i n'_i R(2i)) \\
& = & \sum n'_i v^{-2i}\underline{\overline{\mathrm{rk}}}R \\
& = & \sum n'_i q^i.
\end{array}$$

Ceci permet de conclure que $n'_i = n_i$. □

**Définition 2.7.** Pour un entier $k > 0$, définissons $Z_{2k} = T_rT_sT_r\cdots$ ($k$ termes) , $Z_{2k-1} = T_sT_rT_s\cdots$ ($k$ termes) et soit $Z_0 = 1$. $p$.

Dans le lemme suivant $\deg(p)$ est le degré du polynôme et on note $[-]$ la fonction partie entière.

**Lemme 2.8.** *Dans l'algèbre de Hecke on a pour tout entier $n$ l'égalité suivante :*

$$\sum_{j=0}^{4n-1} p_{j,n}Z_j = (1+T_s)(1+T_r)(1+T_s)\cdots \qquad (2n \text{ termes})$$

*avec* $\deg(p_{j,n}) < n - [j/4]$ *et* $p_{4n-1,n} = 1$.

*Démonstration.* Prouvons-le par récurrence sur $n$. Pour $n = 1$ est clair. Supposons le lemme vrai pour $n = k$. Les trois équations suivantes découlent des définitions :

$$\begin{array}{rcl}
T_sZ_{2k-1} & = & (q-1)Z_{2k-1} + qZ_{2k-2} \\
T_rZ_{2k} & = & (q-1)Z_{2k} + qZ_{2k-3} \\
T_sT_rZ_{2k} & = & (q-1)Z_{2k+1} + q(q-1)Z_{2k-3} + q^2Z_{2k-4}.
\end{array}$$

Ces équations peuvent se réécrire de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcll}
T_sZ_j & = & (q-1)Z_j + qZ_{j-1} & \text{si } j \text{ est impair} \\
T_rZ_j & = & (q-1)Z_j + qZ_{j-3} & \text{si } j \text{ est pair} \\
T_sT_rZ_j & = & (q-1)Z_{j+1} + q(q-1)Z_{j-3} + q^2Z_{j-4} & \text{si } j \text{ est pair.}
\end{array}$$

Si on utilise ces équations dans le développement du terme à droite de l'égalité suivante

$$(1 + T_s + T_r + T_sT_r) \sum_{j=0}^{4k-1} p_{j,k} Z_j = (1 + T_s)(1 + T_r)(1 + T_s) \cdots \quad (2k + 2 \text{ termes}) \tag{2.1.1}$$

on arrive pour tout $j$ à exprimer explicitement $p_{j,k+1}$ en fonction de l'ensemble $\{p_{j,k}\}_j$ et de $q$. Les inégalités de l'énoncé découlent des mêmes inégalités pour les $p_{j,n}$, de manière routinière, et la deuxième assertion découle du fait que $p_{4(k+1)-1,k+1} = p_{4k-1,k}$. □

La proposition suivante est le point de départ pour montrer que $f_{sr}$ est bien défini.

**Proposition 2.9.** *Soient $s, r \in \mathcal{S}$, $s \neq r$ avec $m = m(s,r) < \infty$. La composante de degré zéro de*

$$\mathrm{Hom}(X_{sr}, X_{rs})$$

*est un espace vectoriel de dimension 1.*

*Démonstration.* Avant de commencer la démonstration, donnons d'abord une définition :

**Définition 2.10.** On pose $G_m := \{q^m + \sum_{i<m} a_i q^i$ pour certains $a_i \in \mathbb{Z}\}$

Par le lemme 2.4 et le corollaire 2.6, montrer la proposition 2.9 est équivalent à montrer que

$$\tau((1 + T_s)(1 + T_r)(1 + T_s) \cdots (1 + T_r)) \in G_m. \tag{2.1.2}$$

où il y a $2m$ termes dans le produit.

On a (cf [GP, proposition 8.1.1])

$$\tau(T_x T_{y^{-1}}) = \begin{cases} q^{l(x)} & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Ceci implique que

$$\tau(Z_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ 0 < j < 4m - 1 \\ q^m & \text{si } \ j = 4m - 1 \end{cases} \tag{2.1.4}$$

Donc si on applique $\tau$ aux deux côtés de l'égalité du lemme 2.8, étant donné par ce lemme que $\deg(p_{0,n}) < n$ on obtient bien l'inclusion (2.1.2). $\square$

### 2.1.1 Base normale

On sait que pour $s \in \mathcal{S}$ on a $R \cong R^s \oplus x_s R^s$ comme $R^s$-module à gauche. Ceci nous dit que $\theta_s$ admet $\{1 \otimes 1, 1 \otimes x_s\}$ comme base en tant que R-module à gauche. Plus encore, si, pour $s \in \mathcal{S}$, on définit $x_s^0 = 1$ et $x_s^1 = x_s$, alors par récurrence on voit que si $(t_1, \ldots, t_r)$ est un $r$-uplet d'éléments de $\mathcal{S}$, alors $\theta_{t_1} \cdots \theta_{t_r}$ admet

$$\{1 \otimes x_{t_1}^{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{t_r}^{i_r}\}_{(i_1, \ldots, i_r) \in \{0,1\}^r}$$

comme base en tant que R-module à gauche.

**Définition 2.11.** On appelle cette base la « base normale » de $\theta_{t_1} \cdots \theta_{t_r}$. On définit $1 \otimes x_{t_1} \otimes x_{t_2} \otimes \cdots \otimes x_{t_r}$ (resp. 1) comme « l'élément normal » de $\theta_{t_1} \cdots \theta_{t_r}$ (resp. $R$). Si $x \in \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_r}$, on va appeler « partie normale de $x$ » le coefficient de l'élément normal dans la décomposition de $x$ dans la base normale.

### 2.1.2 Preuve de la définition-théorème 2.2

Avec les notations données dans la section 2.1.1 nous reformulons la définition-théorème 2.2 :

Soit $x$ l'élément normal de $X_{sr}$. Il existe un unique morphisme $f_{sr} \in \mathrm{Hom}(X_{sr}, X_{rs})$ telle que la partie normale de $f_{sr}(x)$ soit égale à 1.

Dans [So4], Soergel montre que si les $B_x$ existent (voir conjecture 1.14), ils sont uniques à isomorphisme près, et il montre cette conjecture pour un groupe diédral fini. Soit $W'$ le sous-groupe de $W$ engendré par $r$ et $s$. Soit $w_0$ le plus long élément de $W'$ dans l'ordre de Bruhat. Dans [So2] Soergel montre que $B_{w_0} = R \otimes_{R^{W'}} R$. Par [Hi, ch. IV, cor. 1.11 a.] on a :

$$R \cong \bigoplus_{w \in W'} R^{W'}(-2l(w)) \text{ comme } R^{W'} - \text{mod gradué à gauche} \tag{2.1.5}$$

et ceci implique

$$B_{w_0} \cong \bigoplus_{w \in W'} R(-2l(w)) \text{ comme } R - \text{mod gradué à gauche.}$$

Si $M$ est un R-module, on note $\overline{M} = M/R_+M$. La dernière ligne montre que

$$\overline{B_{w_0}} \cong \bigoplus_{w \in W'} k(-2l(w)) \text{ comme } k-\text{ev gradué.}$$

En particulier, $\overline{B_{w_0}}$ est de dimension 1 comme espace vectoriel en degré $2m$ :

$$(\overline{B_{w_0}})_{2m} \cong k. \tag{2.1.6}$$

On voit en outre que

$$\{\overline{1 \otimes x_s^{i_1} \otimes x_r^{i_2} \otimes x_s^{i_3} \otimes \cdots}\}_{(i_1,\ldots,i_m)\in\{0,1\}^m}$$

est une base de $\overline{X_{sr}}$ comme $k$-espace vectoriel gradué (voir définition 2.11). En particulier on a

$$(\overline{X_{sr}})_{2m} \cong k \tag{2.1.7}$$

parce que l'élément normal de $X_{sr}$ est le seul de la base normale dont le degré est $2m$. Dans [So4, prop. 6.16], Soergel montre l'existence d'isomorphismes de $(R,R)$-bimodules gradués :

$$\mu : X_{sr} \xrightarrow{\sim} B_{w_0} \oplus M \tag{2.1.8}$$

et

$$\nu : X_{rs} \xrightarrow{\sim} B_{w_0} \oplus M' \tag{2.1.9}$$

pour certains bimodules $M$, $M'$. En passant au quotient on obtient un isomorphisme de $k$-espaces vectoriels gradués

$$\overline{\mu} : \overline{X_{sr}} \xrightarrow{\sim} \overline{B_{w_0}} \oplus \overline{M}. \tag{2.1.10}$$

Rappelons que $x$ est l'élément normal de $X_{sr}$. Soit sa décomposition $\mu(x) = x_1 + x_2$ comme dans l'isomorphisme (2.1.8). Par les isomorphismes (2.1.6), (2.1.7) et (2.1.10), on voit que $\overline{\mu}(\overline{x}) = \overline{\mu(x)} \in \overline{B_{w_0}}$. Ceci dit que $x_2 \in R_+M \subset R_+(B_{w_0} \oplus M)$. Comme $x \notin R_+X_{sr}$, alors $\mu(x) \notin R_+(B_{w_0} \oplus M)$, parce que $\mu$ est un isomorphisme de $R$-modules. Donc on a

$$x_1 = \mu(x) - x_2 \notin R_+(B_{w_0} \oplus M). \tag{2.1.11}$$

En utilisant les identifications (2.1.8) et (2.1.9), on définit $\mathcal{K} \in \mathrm{Hom}(X_{sr}, X_{rs})$, identité sur $B_{w_0}$ et zéro sur $M$. Par la proposition 2.9, $\mathcal{K}$ est l'unique morphisme de degré zéro, à scalaire près, de $\mathrm{Hom}(X_{sr}, X_{rs})$.

On va montrer maintenant que la partie normale de $\mathcal{K}(x)$ est non nulle. Supposons qu'elle soit nulle. Comme $\mathcal{K}$ est un morphisme gradué de degré zéro, $\mathcal{K}(x)$ est de degré $2m$ et comme tous les éléments de la base normale sauf l'élément normal sont de degré inférieur à $2m$, on a $\mathcal{K}(x) \in R_+X_{rs}$. Mais d'autre part, $\mathcal{K}(x) = \nu^{-1}(x_1)$. Comme $\nu^{-1}$ est un isomorphisme de $R-$modules, (2.1.11) nous dit que $\nu^{-1}(x_1) \notin R_+X_{rs}$, ce qui nous donne une contradiction.

Finalement, comme la partie normale de $\mathcal{K}(x)$ est non nulle, on choisit $f_{sr}$ comme le multiple de $\mathcal{K}$ tel que la partie normale de $f_{sr}(x)$ soit 1. Ceci démontre la définition-théorème 2.2. $\square$

## 2.2 Une formule pour $f_{sr}$

Dans cette section nous trouvons une formule pour les $f_{sr}$ en utilisant le fait que $R$ est une algèbre symétrique sur $R^{\langle s,r\rangle}$. Dans cette section nous fixons un système de Coxeter diédral $(W, \mathcal{S})$, $\mathcal{S} = \{s, r\}$ et $m = m(s, r)$, et nous suppossons que l'ordre de $W$ est inversible dans le corps $k$.

Pour tout $s \in \mathcal{S}$ on définit $\partial_s : R \to R$ comme il suit : $\partial_s(a) = (a - s \cdot a)/2x_s$.

On rappelle le théorème suivant (voir [De, Thm. 2]) :

**Théorème 2.12.** *1. Si $w \in W$ et $w = s_1 \cdots s_n$ est une expression réduite de $w$ alors l'élément $\partial_w = \partial_{s_1} \cdots \partial_{s_n}$ ne dépend pas de la décomposition réduite.*

*2. Si $d = \prod_{t \in \mathcal{T}} x_t$, alors l'ensemble $\{\partial_w(d)\}_{w \in W}$ est une base de $R$ comme $R^W$-module.*

Nous pouvons donc définir le $R^W$-morphisme gradué

$$\begin{array}{rccc} \hat{t}: & R & \to & R^W(-2m) \\ & \sum_{w \in W} \lambda_w \partial_w(d) & \mapsto & \lambda_1 \end{array}$$

Le lemme suivant est un résultat classique :

**Lemme 2.13.** *$R$ est une algèbre symétrique sur $R^W$ et $\hat{t}$ est la forme symétrisante.*

**Idée de la preuve :** Par définition $\hat{t}$ est une forme linéaire et comme $R$ est commutative c'est évident que $\hat{t}$ est une trace. Il manque seulement de démontrer que l'application $\psi : R(2m) \to \mathrm{Hom}_{R^W}(R, R^W)$ qui envoie $a$ vers $(b \to \hat{t}(ab))$ est un isomorphisme de $R$-modules gradués. Le fait que $\psi$ est un morphisme de $R$-modules est dû au fait que $R$ est commutative.

Pour voir que $\psi$ est injective, on utilise que $\hat{t}(\partial_x(d)\partial_y(d)) \in \delta_{xw_0,y} + R_+$, ce qui n'est pas difficile de vérifier. Finalement, en utilisant l'isomorphisme (2.1.5) nous concluons facilement qu'il existe un isomorphisme de $R^W$-modules gradués : $\mathrm{Hom}_{R^W}(R, R^W) \cong R(2m)$, et donc $\psi$ est un isomorphisme. □

Considérons la base duale $\{\partial_w(d)^*\}_{w\in W}$ pour la forme $\hat{t}$, c'est-à-dire,

$$\hat{t}(\partial_w(d)\partial_{w'}(d)^*) = \delta_{w,w'}.$$

Les objets de cette base duale sont homogènes. Par [Br, lemma 3.2], nous avons que $\sum_{w\in W} \partial_w(d) \otimes \partial_w(d)^*$ est l'élément de Casimir et il est clair que $\deg(\partial_w(d) + \partial_{w'}(d)^*)$=$2m$, alors par [Br, proposition 3.3], l'application suivante

$$\begin{array}{rcl} \xi : R & \to & R \otimes_{R^W} R(-2m) \\ 1 & \mapsto & \sum_{w\in W} \partial_w(d) \otimes \partial_w(d)^* \end{array}$$

est un morphisme non nul de $(R, R)$-bimodules gradués.

Considérons la décomposition $R = R^s \oplus x_s R^s$. Soient $p_1, p_2 \in R^s$ et $p, q, r \in R$. On définit les morphismes de $R^s$-modules gradués :

$$\begin{array}{ll} P_s : R \to R, & p_1 + x_s p_2 \mapsto p_1 \\ I_s : R \to R, & p_1 + x_s p_2 \mapsto x_s p_2 \\ \partial_s : R(2) \to R, & p_1 + x_s p_2 \mapsto p_2 \end{array}$$

et les morphismes de $(R, R)-$bimodules gradués :

$$\begin{array}{ll} m_s : \theta_s \to R, & R \otimes_{R^s} R \ni p \otimes q \mapsto pq \\ j_s : \theta_s\theta_s(2) \to \theta_s, & R \otimes_{R^s} R \otimes_{R^s} R \ni p \otimes q \otimes r \mapsto p\partial_s(q) \otimes r \in R \otimes_{R^s} R. \end{array}$$

Maintenant nous pouvons définir deux morphismes de $(R, R)$-bimodules (voir notation 2.1) :

$$\begin{array}{rcll} \iota : R \otimes_{R^W} R(-2m) & \to & R \otimes_{R^t} R \otimes \cdots \otimes_{R^s} R \otimes_{R^W} R(-2m) & \simeq X_{tu} \otimes_{R^W} R(-2m) \\ a \otimes b & \mapsto & a \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes b & \end{array}$$

et, avec la notation 2.1, $\vartheta : X_{sr} \otimes_R X_{tu} \to R(-2m)$ définie par

$$\vartheta = (m_s \circ j_s) \circ (\mathrm{id}^1 \otimes (m_r \circ j_r) \otimes \mathrm{id}^1) \circ (\mathrm{id}^2 \otimes (m_s \circ j_s) \otimes \mathrm{id}^2) \circ \cdots \circ (\mathrm{id}^{m-1} \otimes (m_t \circ j_t) \otimes \mathrm{id}^{m-1})$$

Si nous appliquons $m$ fois l'adjonction du lemme 2.4 à $\xi$ nous obtenons un morphisme gradué non nul $\varpi \in \mathrm{Hom}(X_{sr}, R \otimes_{R^W} R)$ défini par

$$\varpi = (\vartheta \otimes \mathrm{id}_{R \otimes_{R^W} R}) \circ (\mathrm{id}_{X_{sr}} \otimes (\iota \circ \xi)),$$

où nous identifions l'espace de départ $X_{sr}$ avec $X_{sr} \otimes_R R$.

Finalement nous pouvons définir le morphisme gradué suivant

$$\begin{array}{rcl} \varkappa : R \otimes_{R^W} R & \to & X_{rs} \\ a \otimes b & \mapsto & a \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes b \end{array}$$

**Proposition 2.14.** *Le morphisme* $\varkappa \circ \varpi \in \mathrm{Hom}(X_{sr}, X_{rs})$ *est un multiple scalaire non nul de* $f_{sr}$.

*Démonstration.* Il est clair que $\varkappa \circ \varpi$ est un morphisme de degré zéro, donc par définition de $f_{sr}$ il nous faut seulement montrer que $\varkappa \circ \varpi \neq 0$. Mais pour ceci il faut simplement noter que $\varkappa \circ \varpi(1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) = 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$. □

## 2.3 Une propriété des $f_{sr}$

Dans cette section nous prouvons une propriété des $f_{sr}$ qui sera utilisée dans le chapitre 6.

Nous commençons par un corollaire évident de la proposition 2.14 :

**Corollaire 2.15.** $f_{sr}(1 \otimes_{R^s} \theta_r \theta_s \cdots \theta_t) \subseteq R^s \otimes_{R^r} 1 \otimes_{R^s} 1 \otimes \cdots 1 \otimes_{R^u} R$

**Définition 2.16.** Nous définissons le morphisme ${}^i f = \mathrm{id}^i \otimes f_{sr} \otimes \mathrm{id}^{n-i-m(s,r)} \in \mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}, \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_n})$, si ceci est bien défini. Un morphisme $g$ entre $\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}$ et $\theta_{t_1} \cdots \theta_{t_n}$ est de type $f$ s'il existe une suite $(i_1, \ldots, i_k)$ tel que

$$g = {}^{i_k} f \circ \cdots \circ {}^{i_2} f \circ {}^{i_1} f.$$

**Définition 2.17.** Soit $\bar{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathcal{S}^n$. Nous définissons $\theta_{\bar{s}} = \theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}$.

**Définition 2.18.** Soit $(i_k, \ldots, i_2, i_1) \in \mathbb{N}^k$. Nous définissons

$$Y(i_k, \ldots, i_1) = \{p \mid 1 \leqslant p \leqslant k \text{ et } i_p = 0\}$$

**Proposition 2.19.** *Soient* $\bar{t} = t_1 \cdots t_{p-1}$ *et* $\bar{a} = a_1 \cdots a_{p-1}$ *des expressions réduites de* $x \in W$ *et* $g \in \mathrm{Hom}(\theta_s\theta_{\bar{t}}, \theta_s\theta_{\bar{a}})$ *un morphisme de type* $f$*. Nous avons l'inclusion* $g(1 \otimes_{R^s} \theta_{\bar{t}}) \subseteq 1 \otimes_{R^s} \theta_{\bar{a}}$.

**Preuve.** Soit $g =^{i_k} f \circ \cdots \circ^{i_2} f \circ^{i_1} f$. L'analyse des ensembles de départ et d'arrivée de $g$ nous permettent de conclure que $Y(i_k, \ldots, i_1)$ a un nombre pair d'éléments.

Soit $Y(i_k, \ldots, i_1) = \{y_1, y_2, \ldots, y_{2\alpha}\}$ avec $y_1 < y_2 < \ldots < y_{2\alpha}$. Nous prouverons la proposition par récurrence double sur $p$ et sur $\alpha$. Nous noterons $V(p_0, \alpha_0)$ si la proposition est vraie pour $p = p_0$ et $\alpha = \alpha_0$. Alors nous devons montrer

1. $V(\mathbb{N}, 0)$
2. $(V(i, \mathbb{N})$ pour tout $i < p) \Rightarrow (V(p, \alpha - 1) \Rightarrow V(p, \alpha))$

L'assertion 1 est évidente. Nous prouverons l'assertion 2. Nous supposons $V(i, \mathbb{N})$ pour tout $i < p$ et $V(p, \alpha - 1)$, et nous prouverons $V(p, \alpha)$. Nous définissons $w = \begin{cases} t_1 \text{ si } m(s, t_1) \text{ est impair} \\ s \text{ si } m(s, t_1) \text{ est pair.} \end{cases}$

Nous définissons les trois morphismes $H, F, G$ par les formules

$$H =^{i_{y_2}} f \circ \cdots \circ^{i_2} f \circ^{i_1} f =^0 f \circ F \circ^0 f \circ G.$$

Soient

- $G \in \mathrm{Hom}(\theta_s\theta_{\bar{t}}, \theta_s\theta_{\bar{t'}})$
- $F \in \mathrm{Hom}(\theta_{t_1}\theta_s\theta_{t_1} \cdots \theta_w\theta_{\bar{t''}}, \theta_{t_1}\theta_s\theta_{t_1} \cdots \theta_w\theta_{\bar{a'}})$
- $H \in \mathrm{Hom}(\theta_s\theta_{\bar{t}}, \theta_s\theta_{\bar{a''}})$

Il est clair que $G(1 \otimes_{R^s} \theta_{\bar{t}}) \subseteq 1 \otimes_{R^s} \theta_{\bar{t'}}$. Par le corollaire 2.15,

$$^0 f \circ G(1 \otimes_{R^s} \theta_{\bar{t}}) \subseteq R^s \otimes_{R^{t_1}} 1 \otimes_{R^s} 1 \otimes_{R^{t_1}} \cdots 1 \otimes 1 \otimes_{R^w} \theta_{\bar{t''}}.$$

Par hypothèse de récurrence $V(i, \mathbb{N})$ pour tout $i < p$, donc

$$F \circ^0 f \circ G(1 \otimes_{R^s} \theta_{\bar{t}}) \subseteq R^s \otimes_{R^{t_1}} 1 \otimes_{R^s} 1 \otimes_{R^{t_1}} \cdots 1 \otimes 1 \otimes_{R^w} \theta_{\bar{a'}},$$

et finalement $H(1 \otimes_{R^s} \theta_{\bar{t}}) \subseteq 1 \otimes_{R^s} \theta_{\bar{a''}}$. Par hypothèse de récurrence $V(p, \alpha - 1)$, alors, si $H' =^{i_k} f \circ \cdots \circ^{i_{y_2+2}} f \circ^{i_{y_2+1}} f$, nous avons $H'(1 \otimes_{R^s} \theta_{\bar{a''}}) \subseteq 1 \otimes_{R^s} \theta_{\bar{a}}$, donc

$$g(1 \otimes_{R^s} \theta_{\bar{t}}) = H' \circ H(1 \otimes_{R^s} \theta_{\bar{t}}) \subseteq 1 \otimes_{R^s} \theta_{\bar{a}}.$$

$\square$

## 2.4 Un isomorphisme clé

Dans l'article [So4] Soergel construit un isomorphisme entre certains bimodules. Dans cette section nous rappelons cet isomorphisme, et nous déterminons son inverse.

Soit $W$ un groupe diédral fini de générateurs $s, r$, avec $m = m(s, r)$ et $V = \bigoplus_{s \in \mathcal{S}} ke_s$ la représentation géométrique de $W$ sur le corps $k$.

Nous rappelons que $x_s \in V^*$ est une forme linéaire sur $V$ de noyau $\ker(s - \mathrm{id})$. Nous rappelons aussi que $R = k[V]$ est l'algèbre des fonctions polynomiales sur $V$ graduée avec $\deg(V^*) = 2$ et $\mathrm{Gr}(w) = \{(w(v), v)\}_{v \in V} \subset V \times V$ est la diagonale tordue. Tous les $R-$modules considérés dans cette section et la section suivante seront gradués.

Pour $w \in W$ soit $\mathrm{Gr}(\leqslant w) = \bigcup_{w' \leqslant w} \mathrm{Gr}(w')$ et $D_w = k[\mathrm{Gr}(\leqslant w)]$. Il faut remarquer que $D_s = R \otimes_{R^s} R$ pour $s \in \mathcal{S}$.

**Définition 2.20.** Nous posons $s_+ = s$ et $s_- = r$. $i \leqslant m$ et $\epsilon \in \{+, -\}$. Soit $\sigma_i^\epsilon = s_\epsilon s_{-\epsilon} s_\epsilon \cdots$ ($i$ termes) et $D_i^\epsilon = D_{\sigma_i^\epsilon}$.

Dans la preuve de la proposition 4.6 de l'article [So4], Soergel montre que si $s \in \mathcal{S}$, $x \in W$ et $A = \{y \in W | y \leqslant x\}$, alors il y a un isomorphisme de $(R, R)-$bimodules $\mathbb{Z}-$gradués

$$R(A) \cong R(A \cap sA)^{(s,1)}(-2) \oplus R(A \cup sA)^{(s,1)}$$

Ici l'indice ${}^{(s,1)}$ signifie les éléments stables par $(s \times \mathrm{id})$. Dans le langage qu'on vient d'introduire ceci se traduit en

$$D_i^- \cong (D_{i-1}^+)^{(s,1)}(-2) \oplus (D_{i+1}^+)^{(s,1)} \tag{2.4.12}$$

Notre objectif dans cette section est de décrire explicitement l'isomorphisme 2.4.12 et son inverse.

**Définition 2.21.** Soit $X \subset W$ un sous-ensemble $s$-stable. Nous définissons $\partial_s : R(X) \to R(X)$ de la manière suivante :

$$\partial_s(f) = \frac{f - sf}{2x_s \otimes 1}, \tag{2.4.13}$$

où on considère $x_s \otimes 1 \in R \otimes R$. Nous définissons aussi $m_s : R(X) \to R(X)$ de la manière suivante :

$$m_s(f) = \frac{f + sf}{2} \tag{2.4.14}$$

Nous définissons $\beta_i \in V^* \times V^*$ la seule forme nulle sur $\mathrm{Gr}(\sigma_{i-1}^-) + \mathrm{Gr}(\sigma_i^-)$ qui satisfait $\partial_s(\beta_i) = 1$, c'est-à-dire,

$$\beta_i - s\beta_i = 2x_s \otimes 1. \tag{2.4.15}$$

Comme $\mathrm{Gr}(\leqslant \sigma_{i-1}^+)$ est un ensemble $s$-stable, alors si $g \in D_i^-$ on peut définir $\partial_s(g|_{\mathrm{Gr}(\leqslant\sigma_{i-1}^+)})$ et il est facile de vérifier le fait que l'image de $\partial_s$ appliqué à une fonction quelconque donne un élément stable par $(s, 1)$. D'autre part, le fait que $\beta_i$ soit nul sur $\mathrm{Gr}(\sigma_{i-1}^-)$ et sur $\mathrm{Gr}(\sigma_i^-)$ permet de conclure que $y_i := \beta_i\partial_s(g|_{\mathrm{Gr}(\leqslant\sigma_{i-1}^+)})$ est un élément bien défini de $D_i^-$. Il suffit de prendre n'importe quel représentant de $g|_{\mathrm{Gr}(\leqslant\sigma_{i-1}^+)}$ dans $D_i^-$ et en le multipliant par $\beta_i$ nous trouverons un morphisme de $D_i^-$ qui ne dépend pas du représentant choisi. Cet argument reste valable pour définir $\beta_i h \in D_i^-$ pour tout $h \in D_{i-1}^+$.

**Lemme 2.22.** *L'application $\mathfrak{G}_i : D_i^- \to (D_{i-1}^+)^{(s,1)}(-2) \oplus (D_{i+1}^+)^{(s,1)}$ définie par*

$$g \mapsto \left( \partial_s(g|_{\mathrm{Gr}(\leqslant\sigma_{i-1}^+)}), \begin{cases} ((xv, v) \mapsto (g - y_i)(xv, v)) & \textit{si } (xv, v) \in \mathrm{Gr}(\leqslant \sigma_i^-) \\ ((xv, v) \mapsto g(sxv, v)) & \textit{si } (xv, v) \in (\mathrm{Gr}(\leqslant \sigma_{i+1}^+) - \mathrm{Gr}(\leqslant \sigma_i^-)) \end{cases} \right)$$

*est un isomorphisme admettant comme inverse la fonction $\mathfrak{H}_i$ définie par la formule*

$$(h, f) \mapsto f|_{\mathrm{Gr}(\leqslant\sigma_i^-)} + \beta_i h.$$

*Démonstration.* Dans la preuve de la proposition 4.6 de l'article [So4] nous trouvons les trois faits suivants :
- $D_i^- = M \oplus N$, où $M$ et $N$ sont respectivement les $(R^s \otimes R)$-sous-bimodules engendrés par $\bar{\beta}_i$ et $\bar{1}$ (les images dans $D_i^-$ de $\beta_i$ et 1).
- Le morphisme multiplication par $\beta_i$ est un isomorphisme $(D_{i-1}^+)^{(s,1)}(-2) \xrightarrow{\sim} M$
- La restriction $(D_{i+1}^+)^{(s,1)} \to D_i^-$ est une injection d'image $N$.

Ces trois faits réunis permettent de voir que $\mathfrak{H}_i$ est un isomorphisme. Il est facile vérifier $\mathfrak{G}_i\mathfrak{H}_i = \mathrm{id}$. Ceci implique d'une part, que l'application $\mathfrak{G}_i$ est bien définie, et d'autre part que $\mathfrak{G}_i$ est l'inverse de $\mathfrak{H}_i$. □

## 2.5 Action du groupe de tresses

Dans [Ro] Rouquier démontre qu'il existe une catégorification du groupe de tresses en prouvant que certains complexes sont homotopiquement équivalents.

Nous trouvons dans cette section une équivalence d'homotopie explicite entre ces complexes.

Soit $(W, \mathcal{S})$ un système de Coxeter (avec $\mathcal{S}$ fini) et $V = \oplus_{s \in \mathcal{S}} k e_s$ la représentation géométrique de $W$ sur le corps $k$. Nous supposons que cette représentation est fidèle (c'est toujours le cas en caractéristique zéro).

**Définition 2.23.** Le groupe de tresses $B_W$ associé a $W$ est le groupe engendré par $\{\mathbf{s}\}_{s \in \mathcal{S}}$ avec relations

$$\mathbf{srs} \cdots = \mathbf{rsr} \cdots \qquad m(s,r) \text{ termes}$$

pour chaque $s, r \in \mathcal{S}$ tel que $m(s,r) < \infty$

Pour $s \in \mathcal{S}$ on définit le complexe de $(R,R)$-bimodules

$$F_s = 0 \longrightarrow R \otimes_{R^s} R \xrightarrow{m_s} R \longrightarrow 0$$

où $R$ est en degré zéro.

**Proposition 2.24** (Rouquier). *Soit $s \neq r \in \mathcal{S}$ avec $m_{sr} < \infty$. On a des relations de tresses*

$$F_r F_s F_r \cdots \cong F_s F_r F_s \cdots \qquad m(s,r) \text{ termes}$$

*dans $K^b(R \otimes R)$.*

**Preuve.** On a une décomposition $V = V_1 \oplus V_2$ sur l'action de $\langle s, r\rangle$, avec $V_1 = V^{\langle s,r\rangle}$ et $V_2 = ke_s \oplus ke_r$. On a que $V_2$ est la représentation de $(\langle s,r\rangle, \{s,r\})$. On a $R(V) = R(V_1) \otimes_{\mathbb{C}} R(V_2)^s$. Donc on a la proposition pour $V$ si on l'a pour $V_2$ en utilisant le foncteur $k[V_1] \otimes_k -$, parce que le foncteur $- \otimes_{R(V)^s} R(V)$ est isomorphe au foncteur $- \otimes_{R(V_2)^s} R(V_2)$ (et la même chose en remplaçant $s$ par $r$) . Donc on peut supposer que $W$ est un groupe diédral fini, avec $\mathcal{S} = \{s, r\}$.

On définit $F_i^\epsilon$ comme le complexe de $(R,R)$-bimodules suivant

$$F_i^\epsilon = 0 \to D_i^\epsilon \xrightarrow{\binom{+}{+}} D_{i-1}^\epsilon \oplus D_{i-1}^{-\epsilon} \xrightarrow{\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}} D_{i-2}^\epsilon \oplus D_{i-2}^{-\epsilon} \to \cdots \to D^+ \oplus D^- \xrightarrow{(+\ \ -)} D_1 \to 0$$

où le signe signifie si c'est la projection canonique ou moins la projection canonique (on prend $D_i^\epsilon$ en degré zéro).

Le complexe $F_1^\epsilon$ est isomorphe à $F_{s_\epsilon}$ (voir définition 2.20). Rouquier montre [Ro, prop. 9.2] qu'il existe une équivalence d'homotopie entre $F_{s_\epsilon} F_i^{-\epsilon}$ et $F_{i+1}^\epsilon$ pour $\epsilon = \pm$, et avec ceci il démontre la proposition 2.24 parce que $F_m^+ \cong F_m^-$.

Nous trouverons explicitement une équivalence d'homotopie entre $F_{s_\epsilon}F_i^{-\epsilon}$ et $F_{i+1}^{\epsilon}$ pour $\epsilon = \pm$. Nous montrerons que $F_{s_+}F_i^-$ est homotopiquement équivalent à $F_{i+1}^+$ ; l'autre cas est analogue.

Les termes de $F_{s_+}F_{n-1}^-$ sont les suivantes :
– $E_n = R \otimes_{R^s} D_{n-1}^-$
– $E_{n-1} = R \otimes_{R^s} (D_{n-2}^+ \oplus D_{n-2}^-) \oplus D_{n-1}^-$
– $E_i = R \otimes_{R^s} (D_{i-1}^+ \oplus D_{i-1}^-) \oplus (D_i^+ \oplus D_i^-)$ pour $2 \leqslant i \leqslant n-2$
– $E_1 = R \otimes_{R^s} D_0 \oplus (D^+ \oplus D^-)$
– $E_0 = D_0$
Nous commençons par définir le morphisme $F$ :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D_n^+ \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & D_{n-1}^+ \oplus D_{n-1}^- \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & D^+ \oplus D^- \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & D_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E_n \arrow[r] & E_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_1 \arrow[r] & E_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

de la manière suivante (voir la définition 2.21) :
– $f_n(x) = 1 \otimes m_s(x) + x_s \otimes \partial_s(x)$
– $f_{n-1}(x, y) = (1 \otimes (m_s(x), m_s(x)) + x_s \otimes (\partial_s(x), \partial_s(x)), y)$
– $f_i(x, y) = (0, (x, y))$ pour $1 \leqslant in - 2$
– $f_0 = \mathrm{id}$.
Nous utilisons le même symbole pour noter une fonction $f$ définie sur un ensemble $X$ et pour noter sa restriction à un sous-ensemble de $X$. Nous montrerons que $f_n, f_{n-1}$ sont des morphismes de $(R, R)-$bimodules (c'est clair que les autres $f_i$ sont des morphismes de $(R, R)-$bimodules). Pour ceci il faut rappeler le résultat [So4, lemma 4.5, 2] :

La multiplication induit un isomorphisme

$$R \otimes_{R^s} (D_p^+)^{(s,1)} \xrightarrow{\sim} D_p^+ \qquad \text{pour tout } p \leqslant m \tag{2.5.16}$$

Avec ce résultat appliqué au morphisme $\mathfrak{H}_i$ du lemme 2.22 et le fait que $D_{i+1}^+ \ni f = m_s(f) + x_s\partial_s(f)$, avec $m_s(f), \partial_s(f) \in (D_{i+1}^+)^{(s,1)}$, on voit que $f_n$ est un morphisme de $(R, R)-$bimodules. Le fait que $f_{n-1}$ est un morphisme de $(R, R)-$bimodules se déduit de [So4, lemma 4.5], parce que si on compose le morphisme

$$\begin{array}{ccc} D_{n-1}^+ & \to & D_{n-2}^+ \oplus D_{n-2}^+(-2) \\ f & \mapsto & (f, 0) \end{array}$$

avec l'isomorphisme $D_{n-2}^+ \oplus D_{n-2}^+(-2) \xrightarrow{\sim} R \otimes_{R^s} D_{n-2}^+$ on obtient le morphisme

$$D_{n-1}^+ \to R \otimes_{R^s} D_{n-2}^+$$

$$f \quad \mapsto 1 \otimes m_s(f) + x_s \otimes \partial_s(f)$$

Il est facile de vérifier que $F$ est un morphisme de complexes. Avant de définir $G$, l'équivalence d'homotopie inverse à $F$, on a besoin de définir un morphisme similaire à $\mathfrak{G}_i$. À partir de $\mathfrak{G}_i$ et de l'isomorphisme (2.5.16) nous trouvons le morphisme $X^i : R \otimes_{R^s} D_{i-1}^- \to D_i^+$ défini par :

$$X^i(a \otimes g) = \begin{cases} ((xv, v) \mapsto a(xv)(g - y_i)(xv, v)) & \text{si } (xv, v) \in \mathrm{Gr}(\leqslant \sigma_{i-1}^-) \\ ((xv, v) \mapsto a(xv)g(sxv, v)) & \text{si } (xv, v) \in (\mathrm{Gr}(\leqslant \sigma_i^+) - \mathrm{Gr}(\leqslant \sigma_{i-1}^-)) \end{cases}$$

Nous définissons le morphisme de $(R^s \otimes R)$-bimodules $x^i : D_{i-1}^+ \to D_i^+$. Nous utilisons la décomposition en espaces propres $D_j^+ \simeq (D_j^+)^{(s,1)} \oplus (D_j^+)^{-(s,1)}$ donné par $(f \mapsto (m_s(f), \partial_s(f)))$ ; ceci est un isomorphisme de $(R^s \otimes R)$-bimodules. Avec cette identification nous définissons

$$\begin{array}{ccc} x^i : (D_{i-1}^+)^{(s,1)} \oplus (D_{i-1}^+)^{-(s,1)} & \to & (D_i^+)^{(s,1)} \oplus (D_i^+)^{-(s,1)} \\ (1,0) & \mapsto & (0,0) \\ (0,1) & \mapsto & (\beta_{i-1} - \beta_i, 0). \end{array}$$

Par construction, la restriction de $x^i(f)$ à $\mathrm{Gr}(\sigma_{i-1}^+)$, est égal à $(\beta_{i-1} - \beta_i)\partial_s(f)$.

Maintant on définit $G$ :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D_n^+ \arrow[r] & D_{n-1}^+ \oplus D_{n-1}^- \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & D^+ \oplus D^- \arrow[r] & D_0 \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & E_n \arrow[r] \arrow[u, "g_n"] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[u, "g_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & E_1 \arrow[r] \arrow[u, "g_1"] & E_0 \arrow[r] \arrow[u, "g_0"] & 0 \end{tikzcd}$$

de la manière suivante :

- $g_n(a \otimes g) = X^n(a, g)$
- $g_{n-1}(a \otimes (f, g), z') = (ax^{n-1}(f) + X^{n-1}(a \otimes g), -\beta_{n-1} a\partial_s(f) + z')$
- $g_i(a \otimes (f, g), (z, z')) = (ax^i(f) + X^i(a \otimes g) + z, -\beta_i a\partial_s(f) + z')$ si $2 \leqslant i \leqslant n-2$
- $g_1(a \otimes g), (z, z') = (a \otimes g + z, z')$
- $g_0 = \mathrm{id}$

Il faut noter que dans la définition de $g_1$, on identifie $D_0$ et $R$, donc $a \otimes g \in R \otimes_{R^s} R$. Le fait que $G$ est un morphisme de complexes est facile de vérifier. Il est aussi facile de vérifier le fait que $G \circ F = \mathrm{id}$. Par [Ro, prop. 9.2] nous savons que $F_{s_+} F_i^-$ est homotopiquement équivalent à $F_{i+1}^+$, donc on peut conclure que $G$ et $F$ sont des équivalences d'homotopie. $\square$

On définit le complexe de $(R, R)$-bimodules

$$F_{s^{-1}} = 0 \longrightarrow R \xrightarrow{\eta_s} R \otimes_{R^s} R(1) \to 0$$

où $R$ est en degré $-1$ et $\eta_s(a) = ax_s \otimes 1 + a \otimes x_s$.

**Proposition 2.25.** *Les complexes $F_s$ et $F_{s^{-1}}$ sont l'inverse l'un de l'autre dans $K^b(R \otimes R)$.*

**Preuve.** Soit $R^{(3)} = R \otimes_{R^s} R(1) \otimes_{R^s} R$. On doit montrer que les deux complexes

$$0 \to R \otimes_{R^s} R \xrightarrow{\alpha} R^{(3)} \oplus R \xrightarrow{\beta} R \otimes_{R^s} R(1) \to 0$$

et

$$0 \to R \to 0$$

sont homotopiquement équivalents, avec $\alpha(a \otimes b) = (a \otimes 1 \otimes x_s b + a x_s \otimes 1 \otimes b, ab)$ et $\beta(a \otimes b \otimes c, d) = a \otimes bc - d(x_s \otimes 1 + 1 \otimes x_s)$. Pour cela on considère le diagramme commutatif suivante

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \otimes_{R^s} R \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "0"] & R^{(3)} \oplus R \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, shift left, "f"] & R \otimes_{R^s} R(1) \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & R \arrow[r] \arrow[u, shift left, "g"] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et l'équivalence d'homotopie suivante

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \otimes_{R^s} R \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "-\mathrm{id}"] & R^{(3)} \oplus R \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g \circ f - \mathrm{id}"] \arrow[dl, "L^0"] & R \otimes_{R^s} R(1) \arrow[r] \arrow[d, "-\mathrm{id}"] \arrow[dl, "L^1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \otimes_{R^s} R \arrow[r, "\alpha"'] & R^{(3)} \oplus R \arrow[r, "\beta"'] & R \otimes_{R^s} R(1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où par définition, si $b = b_1 + b_2 \alpha_s$ avec $b_1, b_2 \in R^s$,

$$\begin{array}{lcl}
f(a \otimes b \otimes c, d) & = & -ab_2 c + d \\
g(a) & = & (a x_s \otimes 1 \otimes 1 + a \otimes 1 \otimes \alpha_s, a) \\
L^0(a \otimes b \otimes c, d) & = & -ab_2 \otimes c \\
L^1(a \otimes b) & = & -a \otimes 1 \otimes b.
\end{array}$$

On a aussi $f \circ g = \mathrm{id}$, ce qui permet de conclure. $\square$

Finalement on obtient une action "à isomorphisme près" de $B_W$ dans $K^b(R)$ :

**Théorème 2.26.** *La fonction $s \mapsto F_s$ se prolonge en un morphisme de groupes de $B_W$ vers le groupe des classes d'isomorphisme d'objets inversibles de $K^b(R \otimes R)$.*

## 2.6 Une formule géométrique pour $f_{sr}$

Dans cette section nous trouvons une nouvelle formule pour les $f_{sr}$ en utilisant la géométrie.

Dans la section précédente nous avons trouvé deux morphismes de degré zéro $X^i : R \otimes_{R^s} D^-_{i-1} \to D^+_i$ et $f_i : D^+_i \to R \otimes_{R^s} D^-_{i-1}$. Nous pouvons changer les rôles de $s$ et $r$ et définir analoguement deux morphismes $Y^i : R \otimes_{R^r} D^+_{i-1} \to D^-_i$ et $h_i : D^-_i \to R \otimes_{R^r} D^+_{i-1}$. Nous notons

$$Z_m = \begin{cases} Y^m & \text{si } m \text{ est pair} \\ X^m & \text{si } m \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{et } v_1 = \begin{cases} f_1 & \text{si } m \text{ est pair} \\ h_1 & \text{si } m \text{ est impair.} \end{cases}$$

Nous avons que le morphisme suivant est un morphisme de degré zéro entre $R \otimes_{R^s} R \otimes_{R^r} R \otimes_{R^s} R \cdots (m \text{ fois})$ et $R \otimes_{R^r} R \otimes_{R^s} R \otimes_{R^r} R \cdots (m \text{ fois})$ :

$$\begin{aligned} F = \big((\mathrm{id}^{m-1} \otimes v_1) \circ \cdots \circ (\mathrm{id}^2 \otimes h_{m-2}) \circ (\mathrm{id} \otimes f_{m-1}) \circ h_m\big) \circ \\ \circ \big((Z^m) \cdots \circ (\mathrm{id}^{m-3} \otimes X^3) \circ (\mathrm{id}^{m-2} \otimes Y^2) \circ (\mathrm{id}^{m-1} \otimes X^1)\big) \end{aligned} \tag{2.6.17}$$

Il est facile de voir que

$$F(1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) = 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1,$$

donc $F$ est non nul. Par la proposition 2.9 nous concluons que $F$ est un multiple scalaire non nul de $f_{sr}$.

Il faut avouer que dans la pratique cette formule n'est pas des plus commodes pour trouver des propriétés de $f_{sr}$ (par exemple, propriétés comme la proposition 2.19), étant donné qu'elle est une somme de $n$ termes avec $n$ qui croît exponentiellement avec $m(s, r)$. Dans la prochaine section nous donnons des formules explicites pour les cas $m(s, r) = 2$ et 3.

## 2.7 Des formules explicites de $f_{sr}$ pour $m(s, r) = 2$ et $3$

Dans cette section nous donnons des formules explicites pour $f_{sr}$, quand $m(s, r) = 2$ et 3.

### 2.7.1 $m(s,r) = 2$

Nous considérons un système de Coxeter quelconque $(W, \mathcal{S})$. Nous définissons l'application $F : \theta_s\theta_r \to \theta_r\theta_s$ comme suit : $F(p_1 \otimes p_2 \otimes p_3) = p_1 P_s(p_2) \otimes 1 \otimes p_3 + p_1 \partial_s(p_2) \otimes 1 \otimes x_s p_3$

**Proposition 2.27.** *Si $s, r \in \mathcal{S}$ et $m(s,r) = 2$, alors $f_{sr} = F$.*

*Démonstration.* Nous allons considérer $V = \oplus_{s \in \mathcal{S}} \mathbb{C}e_s$ la représentation géométrique complexifiée. Dans la décomposition $R = R^r \oplus x_r R^r$ nous pouvons écrire $x_s = y_r + \lambda x_r$ avec $\lambda \in k$. On voit facilement que $e_r$ est dans le hyperplan de réflexion de $s$, donc $0 = x_s(e_r) = \lambda x_r(e_r)$, mais comme $x_r(e_r) \neq 0$ on conclut que $\lambda = 0$. Ceci implique que

$$x_s \in R^r. \tag{2.7.18}$$

Nous savons que $f_{sr}$ est un morphisme bien défini de degré zéro. Donc

$$f_{sr}(1 \otimes 1 \otimes 1) = \alpha(1 \otimes 1 \otimes 1) \tag{2.7.19}$$

pour $\alpha$ un scalaire. Par l'équation (2.7.18), nous avons que

$$f_{sr}(1 \otimes x_s \otimes 1) = \alpha(1 \otimes 1 \otimes x_s). \tag{2.7.20}$$

Par les équations (2.7.19) et (2.7.20) nous concluons que $f_{sr} = \alpha F$, mais le fait que $F(1 \otimes x_s \otimes x_r) = 1$ permet de conclure que $\alpha = 1$, c'est-à-dire, $f_{sr} = F$. $\square$

### 2.7.2 $m(s,r) = 3$

Pour trouver $f_{sr}$ il suffit de traiter le cas où $W$ est un groupe de type $A_2$, et $V = \mathbb{C}e_s \oplus \mathbb{C}e_r$ la représentation géométrique complexifié. Soient $u_s = \frac{e_s}{2} + e_r \in V^s$ et $u_r = \frac{e_r}{2} + e_s \in V^r$. Nous définissons $\{x_s, y_s\}$ (resp. $\{x_r, y_r\}$) comme la base duale de $\{e_s, u_s\}$ (resp. $\{e_r, u_r\}$).

Dans ce cas, il est facile de calculer les équations suivantes

$$x_s = \frac{3}{4}y_r - \frac{1}{2}x_r \tag{2.7.21}$$

$$y_s = x_r + \frac{y_r}{2} \tag{2.7.22}$$

et on obtient les équations symétriques :

$$x_r = \frac{3}{4}y_s - \frac{1}{2}x_s \tag{2.7.23}$$

$$y_r = x_s + \frac{y_s}{2} \tag{2.7.24}$$

**Proposition 2.28.** *Si $s, r \in \mathcal{S}$ et $m(s,r) = 3$, alors*

$$\begin{aligned} f_{sr}(p_1 \otimes p_2 \otimes p_3 \otimes p_4) = {} & p_1 P_s(p_2) \otimes 1 \otimes 1 \otimes P_s(p_3) p_4 + \frac{y_s}{2} p_1 \partial_s(p_2) \otimes 1 \otimes 1 \otimes P_s(p_3) p_4 \\ & + p_1 \partial_s(p_2) \otimes 1 \otimes 1 \otimes y_s P_s(p_3) p_4 + p_1 P_s(p_2) \otimes 1 \otimes 1 \otimes \frac{y_s}{2} \partial_s(p_3) p_4 \\ & + p_1 y_s P_s(p_2) \otimes 1 \otimes 1 \otimes \partial_s(p_3) p_4 + p_1 \partial_s(p_2) \otimes 1 \otimes 1 \otimes x_s^2 \partial_s(p_3) p_4 \\ & - \frac{y_s^2}{2} p_1 \partial_s(p_2) \otimes 1 \otimes 1 \otimes \partial_s(p_3) p_4 + p_1 \partial_s(p_2) \otimes 1 \otimes 1 \otimes \frac{y_s^2}{4} \partial_s(p_3) p_4 \\ & + \frac{y_s}{4} p_1 \partial_s(p_2) \otimes 1 \otimes 1 \otimes y_s \partial_s(p_3) p_4 \end{aligned}$$

*Démonstration.* Cette proposition est équivalente aux quatre équations suivantes :

$$f_{sr}(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1) = 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \tag{2.7.25}$$

$$f_{sr}(1 \otimes x_s \otimes 1 \otimes 1) = \frac{y_s}{2} \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes y_s \tag{2.7.26}$$

$$f_{sr}(1 \otimes 1 \otimes x_s \otimes 1) = y_s \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \frac{y_s}{2} \tag{2.7.27}$$

$$\begin{aligned} f_{sr}(1 \otimes x_s \otimes x_s \otimes 1) = {} & 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes x_s^2 - y_s^2 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + \\ & + 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \frac{y_s^2}{4} + \frac{y_s}{4} \otimes 1 \otimes 1 \otimes y_s \end{aligned} \tag{2.7.28}$$

Comme la conjecture de Soergel est vraie pour les groupes diédraux, nous avons

$$\theta_s \theta_r \theta_s \simeq B_{srs} \oplus \theta_s(2) \tag{2.7.29}$$

Par la formule 2.6 nous voyons que la partie de degré zéro de l'espace $\mathrm{Hom}(\theta_s(2), \theta_s\theta_r\theta_s)$ est de dimension 1, donc $\gamma = (\mathrm{id} \otimes \epsilon_r \otimes \mathrm{id}) \circ p_s$ est l'unique morphisme de degré zéro de cet espace (à scalaire non nul près). Il est scindé par le morphisme $j_s \circ (\mathrm{id} \otimes m_r \otimes \mathrm{id})$. Nous pouvons conclure que $f_{sr}(\mathrm{Im}(\gamma)) = 0$, et en particulier $f_{sr}(\gamma(1 \otimes 1)) = 0$, ce qui donne :

$$f_{sr}(1 \otimes x_r \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes x_r \otimes 1) = 0 \tag{2.7.30}$$

La équation (2.7.25) découle (à scalaire non nul près) du fait que $f_{sr}$ est de degré zéro. L'équation (2.7.26) découle des équations (2.7.25), (2.7.30) et du fait que

$$\theta_s\theta_r\theta_s \ni 1\otimes x_s\otimes 1\otimes 1+(1\otimes x_r\otimes 1\otimes 1+1\otimes 1\otimes x_r\otimes 1)=\frac{y_s}{2}\otimes 1\otimes 1\otimes 1+ \\ +1\otimes 1\otimes 1\otimes y_s.$$

Cette égalité est facile de vérifier en écrivant les deux côtés de l'équation dans la base normale de $\theta_s\theta_r\theta_s$, en utilisant les équations (2.7.21), (2.7.22),(2.7.23) et (2.7.24).

L'équation (2.7.27) découle des équations (2.7.25), (2.7.30) et du fait que

$$\theta_s\theta_r\theta_s \ni 1\otimes x_s\otimes 1\otimes 1+(1\otimes x_r\otimes 1\otimes 1+1\otimes 1\otimes x_r\otimes 1)=y_s\otimes 1\otimes 1\otimes 1+ \\ +1\otimes 1\otimes 1\otimes \frac{y_s}{2}.$$

L'équation (2.7.28) découle du fait que

$$\theta_s\theta_r\theta_s \ni 1\otimes x_s\otimes x_s\otimes 1=1\otimes 1\otimes 1\otimes x_s^2-y_s^2\otimes 1\otimes 1\otimes 1+1\otimes 1\otimes 1\otimes \frac{y_s^2}{4}+ \\ +\frac{y_s}{4}\otimes 1\otimes 1\otimes y_s$$

À nouveau on vérifie cette équation en écrivant les deux côtés de l'équation dans la base normale de $\theta_s\theta_r\theta_s$, en utilisant les équations (2.7.21), (2.7.22),(2.7.23) et (2.7.24). Finalement, on élimine l'incertitude du scalaire en calculant l'image par $f_{sr}$ de l'élément normal, en calculant le résultat dans la base normale. $\square$

# Chapitre 3

# Sur la catégorie des bimodules de Soergel

Dans ce chapitre nous nous intéressons au problème de trouver une base pour l'ensemble de morphismes entre les bimodules de Soergel. Ce chapitre est basé dans l'article [Li1]. L'introduction de cet article (de la section 1 jusqu'à la section 4.3) a été supprimée et nous avons ajouté des détails à la section 3.4.

Dans la section 1, nous définissons la « base des feuilles légères » (BFL), qui est un sous-ensemble de ces espaces d'homomorphismes. On peut regarder la construction de la section 3.1 comme une catégorification de la formule donnée dans le corollaire 2.6. Cette formule dit que les dimensions graduées des espaces d'homomorphismes sont données par le coefficient en 1 d'un produit du type $(1 + T_{s_1}) \cdots (1 + T_{s_n})$.

Dans les sous-sections 3.1.1-3.1.3 nous construisons par récurrence la BFL, en imitant au niveau des morphismes de la catégorie $\mathbf{B}$ la récurrence qui apparaît pour le calcul du produit $(1 + T_{s_1}) \cdots (1 + T_{s_n})$ à partir du produit $(1 + T_{s_1}) \cdots (1 + T_{s_{n-1}})$.

Dans la section 3.2, nous prouvons le théorème fondamental de ce chapitre : la BFL est en fait, comme le laisse prévoir son nom, une base de l'espace d'homomorphismes, comme module à droite sur $R$. Dans la section 3.3 nous en déduisons des bases pour les morphismes dans $\mathbf{B}$.

Soit $\mathcal{O}_0$ le bloc principal de la catégorie $\mathcal{O}$ de **BGG**. Comme corollaire du résultat de la section 3.3, nous trouvons explicitement, dans la section 3.4.1, les morphismes dans la sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}_0$ d'objets projectifs

$(\mathcal{O}_0-\text{proj})$.

## 3.1 Construction de la base des feuilles légères

Nous commençons par exposer le problème central que nous résoudrons dans ce chapitre.

**Problème 3.1.** *Décrire explicitement* $\mathrm{Hom}(\theta_{s_1}\cdots\theta_{s_n},\theta_{t_1}\cdots\theta_{t_k})$ *pour* $s_1,\ldots,s_n,t_1,\ldots,t_k \in \mathcal{S}$.

Soit $\mathbf{C}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{B}$, dont les objets sont des sommes directes finies d'objets de la forme $\theta_{s_1}...\theta_{s_n}(d)$, pour un $d \in \mathbb{Z}$. Alors si on résoud le problème 3.1, on trouve les espaces de morphismes dans la catégorie $\mathbf{C}$. La remarque 1.11 montre que $\mathbf{B}$ est l'enveloppe Karoubienne de $\mathbf{C}$.

### 3.1.1 Quelques morphismes

Pour chaque $s \in \mathcal{S}$ on va définir deux nouveaux morphismes et on va rappeler quatre. Considérons la décomposition $R = R^s \oplus x_s R^s$. Soient $p_1, p_2 \in R^s$ et $p, q, r \in R$. On rappelle les définitions des morphismes de $R^s$-modules gradués :

$$\begin{array}{ll} P_s : R \to R, & p_1 + x_s p_2 \mapsto p_1 \\ I_s : R \to R, & p_1 + x_s p_2 \mapsto x_s p_2 \\ \partial_s : R(2) \to R, & p_1 + x_s p_2 \mapsto p_2 \end{array}$$

Nous définissons les morphismes de $(R,R)-$bimodules gradués :

$$\begin{array}{ll} m_s : \theta_s \to R, & R \otimes_{R^s} R \ni p \otimes q \mapsto pq \\ i_0^s : \theta_s\theta_s(2) \to R, & R \otimes_{R^s} R \otimes_{R^s} R \ni p \otimes q \otimes r \mapsto p\partial_s(q)r \\ i_1^s = j_s : \theta_s\theta_s(2) \to \theta_s, & R \otimes_{R^s} R \otimes_{R^s} R \ni p \otimes q \otimes r \mapsto p\partial_s(q) \otimes r \in R \otimes_{R^s} R. \end{array}$$

Il est facile de voir que ces morphismes sont bien définis, parce que $\partial_s(a^s p) = a^s \partial_s(p)$ pour $a^s \in R^s$.

### 3.1.2 Quelques choix

On commence avec une définition

**Définition 3.2.** Pour $x \in W$, on définit $\mathcal{R}(x)$ comme l'ensemble de toutes les expressions réduites de $x$ (si $l(x) = n$ cet ensemble est un sous-ensemble de l'ensemble des $n$-uplets d'éléments de $\mathcal{S}$). Si 1 est l'élément unité de $W$, on pose $\theta_1 = R$ et si $\overline{t} = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathcal{R}(x)$, on rappelle que $\theta_{\overline{t}} = \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}$.

On va fixer jusqu'à la fin de la section 3.3 une suite $(s_1, s_2, \ldots)$ d'éléments de $\mathcal{S}$. On définit $\overline{s_0} = 1$ et $\overline{s_n} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, pour $n \geqslant 1$. On sait que si $x \in W$, $s \in \mathcal{S}$ et $l(xs) < l(x)$, alors il existe une expression réduite de $x$ ayant $s$ comme dernier élément. Dans [Bo1, ch.4, §1, prop. 4], on montre qu'on peut passer d'une expression réduite d'un élément à n'importe quelle autre par une suite de mouvements de tresse. Donc pour chaque couple $(n, \overline{t})$, avec $n \in \mathbb{N}$, $\overline{t} = (t_1, \ldots, t_k)$ une expression réduite de $x := t_1 \cdots t_k \in W$ et avec $l(xs_n) < l(x)$, l'ensemble de suites d'éléments de $\mathcal{R}(x)$

$$((t_1^1, \ldots, t_k^1), (t_1^2, \ldots, t_k^2), \ldots, (t_1^l, \ldots, t_k^l))$$

où $t_i^1 = t_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, $t_k^l = s_n$, et où on passe de $(t_1^i, \ldots, t_k^i)$ vers $(t_1^{i+1}, \ldots, t_k^{i+1})$ par un mouvement de tresses, est non vide.

Alors on choisit arbitrairement et jusqu'à la fin de la section 3.3, pour chaque couple $(n, \overline{t})$ un élément de cet ensemble, qu'on appellera $P(n, \overline{t})$.

Soit $P(n, \overline{t}) = ((t_1^1, \ldots, t_k^1), (t_1^2, \ldots, t_k^2), \ldots, (t_1^l, \ldots, t_k^l))$. Pour chaque $1 \leqslant i \leqslant l-1$ on a un morphisme $\pi_i$ associé au mouvement de tresses dans $\mathrm{Hom}(\theta_{t_1^i} \cdots \theta_{t_k^i}, \theta_{t_1^{i+1}} \cdots \theta_{t_k^{i+1}})$, du type $\mathrm{id}^p \otimes f_{sr} \otimes \mathrm{id}^{k-p-m(s,r)}$ pour un certain $0 \leqslant p \leqslant k - m(s,r)$. On définit $F_n(\overline{t}) = \pi_{l-1} \circ \cdots \circ \pi_2 \circ \pi_1 \in \mathrm{Hom}(\theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}, \theta_{t_1^l} \cdots \theta_{t_{k-1}^l} \theta_{s_n})$.

### 3.1.3 Définition de la base des feuilles légères

On va définir par récurrence sur $n \geqslant 0$ un sous ensemble $A_n$ de

$$\mathfrak{F}_\mathfrak{n} := \coprod_{x \in W} \coprod_{\overline{t} \in \mathcal{R}(x)} \mathrm{Hom}(\theta_{\overline{s_n}}, \theta_{\overline{t}})$$

où $\coprod$ est l'union disjointe.

On pose tout d'abord $A_0 = \{\mathrm{id} : R \to R\}$. On va construire maintenant $A_n$ à partir de $A_{n-1}$. On pose

$$A_{n-1}^0 = A_{n-1} \cap \left( \coprod_{x \in W} \coprod_{\substack{\overline{t} \in \mathcal{R}(x) \\ l(xs_n) > l(x)}} \mathrm{Hom}(\theta_{\overline{s_n}}, \theta_{\overline{t}}) \right)$$

et $A_{n-1}^1 = A_{n-1} - A_{n-1}^0$.

On va définir quatre morphismes, $f_{i,n}^j : A_{n-1}^j \to \mathfrak{F}_\mathfrak{n}$ avec $i, j \in \{0, 1\}$.

Pour les deux premiers morphismes, soient $a \in \mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_{n-1}}, \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}) \in A_{n-1}^0$ et $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_k)$. On pose

$$f_{0,n}^0(a) : \theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n} \xrightarrow{a \otimes \mathrm{id}} \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k} \theta_{s_n} \xrightarrow{\mathrm{id}^k \otimes m_{s_n}} \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}$$

$$f_{1,n}^0(a) : \theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n} \xrightarrow{a \otimes \mathrm{id}} \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k} \theta_{s_n}.$$

Pour les deux derniers, soit $a \in \mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_{n-1}}, \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}) \in A_{n-1}^1$ et soit $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_k)$. On a $F_n(\bar{t}) \in \mathrm{Hom}(\theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}, \theta_{t'_1} \cdots \theta_{t'_{k-1}} \theta_{s_n})$. On pose

$$\begin{aligned} f_{0,n}^1(a) : \theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n} \xrightarrow{a \otimes \mathrm{id}} \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k} \theta_{s_n} \xrightarrow{F_n(\bar{t}) \otimes \mathrm{id}} & \theta_{t'_1} \cdots \theta_{t'_{k-1}} \theta_{s_n} \theta_{s_n} \\ & \xrightarrow{\mathrm{id}^{k-1} \otimes i_0^s} \theta_{t'_1} \cdots \theta_{t'_{k-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{1,n}^1(a) : \theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n} \xrightarrow{a \otimes \mathrm{id}} \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k} \theta_{s_n} \xrightarrow{F_n(\bar{t}) \otimes \mathrm{id}} & \theta_{t'_1} \cdots \theta_{t'_{k-1}} \theta_{s_n} \theta_{s_n} \\ & \xrightarrow{\mathrm{id}^{k-1} \otimes i_1^s} \theta_{t'_1} \cdots \theta_{t'_{k-1}} \theta_{s_n}. \end{aligned}$$

Maintenant on peut définir $A_n$

$$A_n = \bigcup_{0 \leqslant i,j \leqslant 1} f_{i,n}^j(A_{n-1}^j).$$

On définit $A'_n$ comme le sous ensemble de $A_n$ des éléments appartenant à $\mathrm{Hom}(\theta_{\overline{s_n}}, R)$.

## 3.2 Le théorème et sa preuve

**Théorème 3.3.** *$A'_n$ est une $R$-base de* $\mathrm{Hom}(\theta_{\overline{s_n}}, R)$.

*Remarque* 3.4. On va appeler $A'_n$ une « *base de feuilles légères* » : En tensorisant par l'identité on peut voir $A_k \subset \mathfrak{F}_n$ pour $k \leqslant n$. Alors on peut voir $A_n$ comme un arbre binaire parfait, dont on peut associer à chaque feuille (une feuille est un morphisme de $\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}$ vers $\theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}$) un nombre ou « poids » (dans ce cas le poids serait $k$). Avec ce point de vue, $A'_n$ est l'ensemble de feuilles qui ont poids zéro.

*Remarque* 3.5. Il faut noter que chaque morphisme de $A'_n$ dépend du choix des $P(n, \bar{t})$. On va donner un exemple dans lequel différents choix du $P(n, \bar{t})$ donnent des morphismes associés différents.

Soient $s, r \in \mathcal{S}$ avec $m(s, r) = 3$. Soient

$$f = (m_s \circ i_1^s) \circ (\mathrm{id} \otimes m_r \circ i_1^r \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id}^2 \otimes m_s \circ i_1^r \otimes \mathrm{id}^2)$$

et

$$g = f \circ (f_{r,s} \otimes \mathrm{id}^3) \circ (f_{sr} \otimes \mathrm{id}^3)$$

deux morphismes appartenant à $\mathrm{Hom}(\theta_s\theta_r\theta_s\theta_s\theta_r\theta_s, R)$. On va montrer que $f \neq g$. Pour ceci on définit

$$\bar{x} = 1 \otimes x_r \otimes 1 \otimes x_r \otimes 1 \otimes x_r \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes x_r \otimes x_r \otimes 1 \otimes x_r \otimes 1 \in \theta_s\theta_r\theta_s\theta_s\theta_r\theta_s.$$

On voit facilement que $f(\bar{x}) = 1$. Il nous reste a montrer que $g(\bar{x}) = 0$. Pour ceci il suffit de montrer que

$$f_{sr}(1 \otimes x_r \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes x_r \otimes 1) = 0. \tag{3.2.1}$$

Comme $C'_sC'_rC'_s = C'_{srs} + C'_s$, le théorème [So4, thm. 4.2] et le lemme [So2, lemma 2] impliquent que $\theta_s\theta_r\theta_s(3) \simeq R \otimes_{R^{\langle s,r \rangle}} R(3) \oplus \theta_s(1)$, c'est-à-dire,

$$\theta_s\theta_r\theta_s \simeq R \otimes_{R^{\langle s,r \rangle}} R \oplus \theta_s(-2). \tag{3.2.2}$$

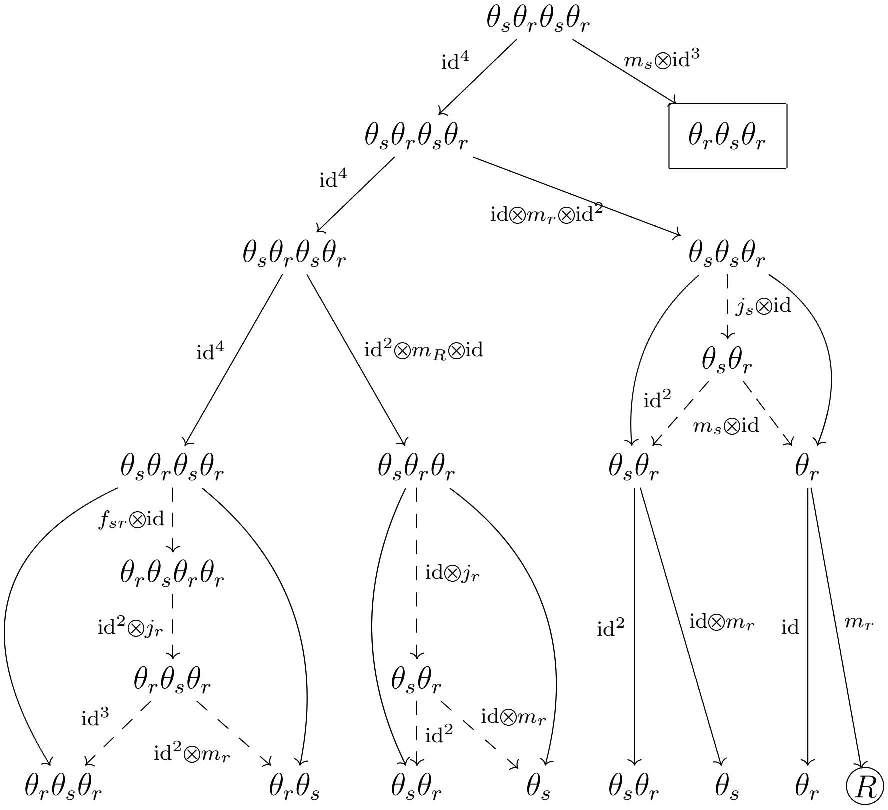
Il est facile de voir que, à scalaire près, le seul morphisme de degré zéro de $R \otimes_{R^{\langle s,r \rangle}} R$ vers $\theta_s\theta_r\theta_s$ est le morphisme $i_{s,r}$ défini par $(1 \otimes 1 \mapsto 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)$. Par le corollaire 2.6 on voit qu'à scalaire près il y a un seul morphisme de degré zéro de $\theta_s(-2)$ vers $\theta_s\theta_r\theta_s$. Ce morphisme est le morphisme $(1 \otimes 1 \mapsto 1 \otimes x_r \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes x_r \otimes 1)$. Donc on a (toujours à scalaire près) explicité l'isomorphisme (3.2.2).

Comme on a vu dans le lemme 2.1.2, $R \otimes_{R^{\langle s,r \rangle}} R \simeq B_{srs}$, donc on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \theta_s\theta_r\theta_s \arrow[r] \arrow[dr, "f_{sr}"'] & R \otimes_{R^{\langle s,r \rangle}} R \arrow[d, "i_{r,s}"] \\ & \theta_r\theta_s\theta_r \end{tikzcd}$$

la flèche horizontale étant la surjection canonique dans l'isomorphisme (3.2.2). Ceci permet de prouver l'équation (3.2.1), et donc de conclure que $f \neq g$.

**Exemple :** Dans l'exemple suivant nous avons $(s_1, s_2, s_3, s_4) = (s, r, s, r)$ et $m(s, r) = 3$. Par des raisons d'espace nous montrons seulement une moitié de l'arbre, la « moitié gauche », c'est à dire, nous ne montrons pas les morphismes qui passent par l'élément encadré $\theta_r\theta_s\theta_r$. Nous avons encerclé en bas à droite la seule feuille légère de cette moitié d'arbre.




*Démonstration du Théorème 3.3.* Définissons les polynômes $p_n^x$ par

$$(1 + T_{s_1}) \cdots (1 + T_{s_n}) = \sum_{x \in W} p_n^x T_x$$

On a les équations suivantes

$$(1 + T_{s_1}) \cdots (1 + T_{s_{n-1}})(1 + T_{s_n}) = \left(\sum p_{n-1}^x T_x\right) + \\ + \left(\sum_{l(xs_n) > l(x)} p_{n-1}^x T_{xs_n}\right) + \left(\sum_{l(xs_n) < l(x)} p_{n-1}^x T_x T_{s_n}\right)$$

et

$$\sum_{l(xs_n)<l(x)} p^x_{n-1} T_x T_{s_n} = \left( \sum_{l(xs_n)<l(x)} q p^x_{n-1} T_{xs_n} \right) +$$
$$+ \left( \sum_{l(xs_n)<l(x)} p^x_{n-1} \underbrace{T_{xs_n} T_{s_n}}_{T_x} (q-1) \right),$$

qui impliquent

$$(1+T_{s_1})\cdots(1+T_{s_{n-1}})(1+T_{s_n}) = \left( \sum_{l(xs_n)>l(x)} p^x_{n-1} T_x + p^x_{n-1} T_{xs_n} \right) +$$
$$+ \left( \sum_{l(xs_n)<l(x)} q(p^x_{n-1} T_x + p^x_{n-1} T_{xs_n}) \right).$$

Cette dernière formule, le corollaire 2.6 et la construction récursive de $A'_n$ vont nous montrer que les degrés gradués des éléments de $A'_n$ sont ceux que doit avoir une base. Avec les définitions suivantes on va dire ceci d'une manière plus précise.

**Définition 3.6.** Soit $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble d'éléments homogènes d'espaces vectoriels gradués. On définit $\mathbb{Y}(X) = \sum_i q^{\deg(x_i)/2}$.

**Définition 3.7.** Pour $x \in W$ on définit

$$A_n(x) = A_n \cap \coprod_{\overline{t} \in \mathcal{R}(x)} \mathrm{Hom}(\theta_{\overline{s_n}}, \theta_{\overline{t}}).$$

**Lemme 3.8.** *On a l'égalité* $\mathbb{Y}(A_n(x)) = p^x_n$. *En particulier,* $\mathbb{Y}(A'_n) = p^1_n$.

*Démonstration.* On va le montrer par récurrence sur $n$. Pour $n = 1$ c'est clair. Supposons-le vrai pour $n-1$. Par construction, à chaque $a \in (A_{n-1}(x))^0$ on associe les deux éléments $a' \in A_n(x)$ et $a'' \in A_n(xs_n)$, et à chaque $b \in (A_{n-1}(x))^1$ on associe les deux éléments $b' \in A_n(x)$ et $b'' \in A_n(xs_n)$, avec deg($a$)=deg($a'$)=deg($a''$), et deg($b$)+2=deg($b'$)=deg($b''$), ce qui permet de conclure la récurrence. □

Supposons que l'on ait montré que les éléments de $A'_n$ sont linéairement indépendants pour l'action de R. Soit $T$ le sous $R$-module de $\mathrm{Hom}(\theta_{\overline{s_n}}, R)$ engendré par les éléments de $A'_n$. Dans chaque degré, $T$ et $\mathrm{Hom}(\theta_{\overline{s_n}}, R)$ sont de dimension finie comme $k$-espaces vectoriels, et ils ont la même dimension parce que $\mathbb{Y}(A'_n) = p_n^1$ et $T$ est libre pour l'action de $R$ (voir corollaire 2.6), donc ils sont égaux. Cela étant vrai à chaque degré, on déduit que $T = \mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}, R)$, et cela finit la preuve du théorème 3.3.

Donc il nous reste à montrer que les éléments de $A'_n$ sont linéairement indépendants pour l'action de $R$.

Les éléments de $A'_n$ sont de la forme $f^{j_n}_{i_n,n} \circ \cdots \circ f^{j_2}_{i_2,2} \circ f^{j_1}_{i_1,1}(\mathrm{id})$ avec $i_k, j_k \in \{0,1\}$. Soit $I_n = \{(i_1, \dots i_n)$ tel que $\exists\ (j_1, \dots j_n)$ avec $f^{j_n}_{i_n,n} \circ \cdots \circ f^{j_1}_{i_1,1}(\mathrm{id}) \in A'_n\} \subseteq \{0,1\}^n$. On remarque que dans cette dernière définition le $n$-uplet $(j_1, \dots j_n)$ est unique, s'il existe.

On rappelle que $x_s^0 = 1$ et $x_s^1 = x_s$ pour $s \in \mathcal{S}$. Si $\overline{i} = (i_1, \dots, i_n) \in \{0,1\}^n$, on pose $x_{\overline{i}} = 1 \otimes x_{s_1}^{i_1} \otimes x_{s_2}^{i_2} \otimes \cdots \otimes x_{s_n}^{i_n} \in \theta_{s_1}\theta_{s_2} \cdots \theta_{s_n}$, et si $\overline{i} \in I_n$, on pose $f_{\overline{i}} = f^{j_n}_{i_n,n} \circ \cdots \circ f^{j_1}_{i_1,1}(\mathrm{id})$.

Sur $\{0,1\}^n$, on appelle $\prec$ l'ordre total suivant : Si $\sum_j i_j > \sum_j i'_j$ alors $(i_1, \dots i_n) \succ (i'_1, \dots i'_n)$. Sinon, soit $r$ le plus petit entier tel que $i_r \neq i'_r$. Si $i_r = 0$, alors $(i_1, \dots i_n) \succ (i'_1, \dots i'_n)$, et si $i_r = 1$, alors $(i_1, \dots i_n) \prec (i'_1, \dots i'_n)$.

Pour finir la démonstration du théorème, on veut montrer que si $\sum_{\overline{i} \in I_n} a_{\overline{i}} f_{\overline{i}} = 0$, avec $a_{\overline{i}} \in R$, alors $a_{\overline{i}} = 0$ pour tout $\overline{i} \in I_n$. Pour cela il est suffisant de montrer les deux faits suivants :

(a) $f_{\overline{i}}(x_{\overline{i}}) = 1$

(b) $f_{\overline{i}}(x_{\overline{i'}}) = 0$ pour $\overline{i} \succ \overline{i'}$

**Définition 3.9.** On dit qu'un élément $x \in \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}$ est « supérieur », si $x \in R_+\theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}$, et il est « normalsup »s'il appartient à $1 \otimes x_{t_1} \otimes x_{t_2} \otimes \cdots \otimes x_{s_r} + R_+\theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}$. Pour $f \in \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}$, on note $f\ddagger$ l'ensemble $f + R_+\theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}$.

Si $\overline{i} = (i_1, \dots, i_n) \in I_n$, on définit $f^m_{\overline{i}} = f^{j_m}_{i_m,m} \circ \cdots \circ f^{j_2}_{i_2,2} \circ f^{j_1}_{i_1,1}(\mathrm{id})$, et $x^m_{\overline{i}} = 1 \otimes x_{s_1}^{i_1} \otimes x_{s_2}^{i_2} \otimes \cdots \otimes x_{s_m}^{i_m} \in \theta_{s_1}\theta_{s_2} \cdots \theta_{s_m}$, pour $1 \leqslant m \leqslant n$.

**Lemme 3.10.** *Soient $\overline{i}, \overline{i'} \in I_n$. Si $f^{u-1}_{\overline{i}}(x^{u-1}_{\overline{i'}})$ est supérieur, alors $f^u_{\overline{i}}(x^u_{\overline{i'}})$ est supérieur aussi.*

*Démonstration.* On a $f^u_{\bar{i}}(x^u_{\bar{i'}}) = f^{j_u}_{i_u,u}(f^{u-1}_{\bar{i}})(x^{u-1}_{\bar{i'}} \otimes x^{i'_u}_{s_u})$. Par hypothèse $(f^{u-1}_{\bar{i}} \otimes \mathrm{id})(x^{u-1}_{\bar{i'}} \otimes x^{i'_u}_{s_u})$ est supérieur, et le fait que $f^u_{\bar{i}}(x^u_{\bar{i'}})$ est l'image de cet élément par un morphisme de bimodules, permet de conclure le lemme. □

**Lemme 3.11.** *Le morphisme $F_r(\bar{t})$ envoie toujours un élément normalsup (resp. supérieur) vers un élément normalsup (resp. supérieur).*

*Démonstration.* Comme $F_r(\bar{t})$ est un morphisme de bimodules, il envoie un élément supérieur vers un élément supérieur.

Maintenant on veut montrer que $F_r(\bar{t})$ envoie un élément normalsup vers un élément normalsup. Il suffit à son tour de montrer ceci pour les morphismes du type $\mathrm{id}^a \otimes f_{sr} \otimes \mathrm{id}^b$, ce qui revient à le montrer pour les $f_{sr}$, mais ceci est vrai par définition de $f_{sr}$. □

**Lemme 3.12.** *Si $f^m_{\bar{i}} \in \mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_m}, \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_r})$, alors $f^m_{\bar{i}}(x^m_{\bar{i}})$ est un élément normalsup de $\theta_{t_1} \cdots \theta_{t_r}$.*

*Démonstration.* : On va le montrer par récurrence sur $m$. Pour $m = 1$, on sait que $j_1 = 0$.

Si $i_1 = 0$, alors $f^0_{0,1}(\mathrm{id})(1 \otimes 1) = 1 \in R$.

Si $i_1 = 1$, alors $f^0_{1,1}(\mathrm{id})(1 \otimes x_{s_1}) = 1 \otimes x_{s_1} \in \theta_{s_1}$.

Supposons le lemme vrai pour tout $m < r$. Pour simplifier les notations on va appeler $g_j := f^j_{\bar{i}}$. Soit $g_{r-1} \in \mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_{r-1}}, \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k})$. On note aussi $\bar{t} = (t_1, \dots t_k)$. Comme $g_r = f^{j_r}_{i_r,r}(g_{r-1})$, il y a quatre cas :

1. $j_r = 0$, $i_r = 0$, (donc $x^{i_r}_{s_r} = 1$), alors

$$\begin{array}{rcl} g_r(x^r_{\bar{i}}) & = & (\mathrm{id}^k \otimes m_{s_r}) \circ (g_{r-1} \otimes \mathrm{id})(x^r_{\bar{i}}) \\ & \in & (\mathrm{id}^r \otimes m_{s_r})(1 \otimes x_{t_1} \otimes \cdots \otimes x_{t_k} \otimes 1\ddagger) \\ & \in & 1 \otimes x_{t_1} \otimes \cdots \otimes x_{t_k}\ddagger \subseteq \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}. \end{array}$$

2. $j_r = 0$, $i_r = 1$, (donc $x^{i_r}_{s_r} = x_{s_r}$) alors

$$\begin{array}{rcl} g_r(x^r_{\bar{i}}) & = & (g_{r-1} \otimes \mathrm{id})(x^r_{\bar{i}}) \\ & \in & 1 \otimes x_{t_1} \otimes \cdots \otimes x_{t_k} \otimes x_{t_s}\ddagger \subseteq \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}\theta_{t_s}. \end{array}$$

3. $j_r = 1$, $i_r = 0$, (donc $x_{s_r}^{i_r} = 1$) alors

$$\begin{array}{rcl} g_r(x_{\bar{i}}^r) & = & (\mathrm{id}^{k-1} \otimes i_0^{s_r}) \circ (F_r(\bar{t}) \otimes \mathrm{id})) \circ (g_{r-1} \otimes \mathrm{id})(x_{\bar{i}}^r) \\ & \in & (\mathrm{id}^{k-1} \otimes i_0^{s_r}) \circ (F_r(\bar{t}) \otimes \mathrm{id}))(1 \otimes x_{t_1} \otimes \cdots \otimes x_{t_k} \otimes 1\ddagger) \\ & \in & (\mathrm{id}^{k-1} \otimes i_0^{s_r})(1 \otimes x_{t'_1} \otimes \cdots \otimes x_{t'_{k-1}} \otimes x_{s_r} \otimes 1\ddagger) \\ & \in & 1 \otimes x_{t'_1} \otimes \cdots \otimes x_{t'_{k-1}} \ddagger \subseteq \theta_{t'_1} \cdots \theta_{t'_{k-1}}. \end{array}$$

4. $j_r = 1$, $i_r = 1$, (donc $x_{s_r}^{i_r} = x_{s_r}$) alors

$$\begin{array}{rcl} g_r(x_{\bar{i}}^r) & = & (\mathrm{id}^{k-1} \otimes i_1^{s_r}) \circ (F_r(\bar{t}) \otimes \mathrm{id})) \circ (g_{r-1} \otimes \mathrm{id})(x_{\bar{i}}^r) \\ & \in & (\mathrm{id}^{k-1} \otimes i_1^{s_r}) \circ (F_r(\bar{t}) \otimes \mathrm{id}))(1 \otimes x_{t_1} \otimes \cdots \otimes x_{t_k} \otimes x_{t_r}\ddagger) \\ & \in & (\mathrm{id}^{k-1} \otimes i_1^{s_r})(1 \otimes x_{t'_1} \otimes \cdots \otimes x_{t'_{k-1}} \otimes x_{s_r} \otimes x_{s_r}\ddagger) \\ & \in & 1 \otimes x_{t'_1} \otimes \cdots \otimes x_{t'_{k-1}} \otimes x_{s_r}\ddagger \subseteq \theta_{t'_1} \cdots \theta_{t'_{k-1}} \theta_{s_r}. \end{array}$$

Le passage de la deuxième à la troisième ligne dans (3) et (4) vient du fait que $F_r(\bar{t})$ envoie un élément normalsup vers un élément normalsup (lemme 3.11). $\square$

Maintenant on peut finir la preuve du théorème. La première chose qu'on peut constater est que pour $s \in \mathcal{S}$, le morphisme $\partial_s$ est gradué de degré $-2$. Donc $f_{\bar{i}} = f_{i_n,n}^{j_n} \circ \cdots \circ f_{i_2,2}^{j_2} \circ f_{i_1,1}^{j_1}(\mathrm{id})$ est un morphisme gradué de degré $\sum_{p=1}^n -2j_p$.

Soit

$$X_{a,b} = \{p | j_p = a \, , \, i_p = b\}.$$

Si $a \in \mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_m}, \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k})$, on pose $\varpi(a) = k$. Les quatre équations suivantes sont faciles de vérifier :

$$\begin{array}{rcl} \varpi(a) & = & \varpi(f_{0,r}^0(a)) \\ \varpi(a) & = & \varpi(f_{1,r}^1(a)) \\ \varpi(a)+1 & = & \varpi(f_{1,r}^0(a)) \\ \varpi(a)-1 & = & \varpi(f_{0,r}^1(a)). \end{array}$$

Si $\bar{i} \in I_n$, alors, comme $\varpi(f_{\bar{i}}) = 0$, on peut déduire que $\mathrm{card}(X_{1,0}) = \mathrm{card}(X_{0,1})$. Donc on a

$$\begin{array}{rcl} \sum_{p=1}^n j_p & = & \mathrm{card}(X_{1,0}) + \mathrm{card}(X_{1,1}) \\ & = & \mathrm{card}(X_{0,1}) + \mathrm{card}(X_{1,1}) \\ & = & \sum_{p=1}^n i_p. \end{array}$$

Donc $f_{\bar{i}}$ est un morphisme gradué de degré $\sum_{p=1}^{n} -2i_p$. On a aussi que si $\overline{i'} = (i'_1, \ldots, i'_m)$ le degré de $x_{\overline{i'}}$ est $\sum 2i'_p$. Donc, si $\sum i_p > \sum i'_p$, alors $f_{\bar{i}}(x_{\overline{i'}}) = 0$.

Maintenant supposons $\sum i_p = \sum i'_p$. Par le raisonnement précedent,

$$\deg(f_{\bar{i}}(x_{\overline{i'}})) = 0, \tag{3.2.3}$$

c'est à dire, $f_{\bar{i}}(x_{\overline{i'}})$ est un scalaire. Ceci et le lemme 3.12 permettent de conclure la partie a), c'est à dire, que $f_{\bar{i}}(x_{\bar{i}}) = 1$.

Pour montrer la partie b), c'est à dire que $f_{\bar{i}}(x_{\overline{i'}}) = 0$ pour $\bar{i} > \overline{i'}$, on va supposer $\sum i_p = \sum i'_p$ , $\overline{i'} < \bar{i}$, et aussi $f_{\bar{i}}(x_{\overline{i'}}) \neq 0$. On va arriver à une contradiction.

Soit $r$ le plus petit entier tel que $i_r \neq i'_r$, donc $i_r = 0$ et $i'_r = 1$. Par le lemme précédent, $f_{\bar{i}}^{r-1}(x_{\overline{i'}}^{r-1})$ est un élément normalsup. Donc si $n$ est l'élément normal de l'ensemble d'arrivée du morphisme $f_{\bar{i}}^{r}$, on a que $f_{\bar{i}}^{r}(x_{\overline{i'}}^{r})$ appartient à l'ensemble $(n \cdot x_{s_r})\ddagger$ (voir la définition 3.9). Le lemme suivant (lemme 3.13) nous dit que cet élément est supérieur, donc le lemme 3.10 et l'équation (3.2.3) permettent d'aboutir à une contradiction. $\square$

**Lemme 3.13.** *Soit $(t_1, \ldots, t_r)$ un r-uplet d'éléments de $\mathcal{S}$. Un élément $x \in \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}$ est supérieur, si et seulement si il est zéro, ou bien s'il existe une écriture*

$$x = \sum_{i=1}^{m} p_0^i \otimes p_1^i \otimes \cdots \otimes p_k^i$$

*qui satisfait la propriété suivante, qu'on appellera propriété (*M) : les $p_j^i \in R$ sont des éléments homogènes, et pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$, il existe $r_i \in \mathbb{N}_0$, avec $\sum_{j=0}^{r_i} \deg(p_j^i) \geqslant r_i + 1$. Ici $M = \max\{r_i | 1 \leqslant i \leqslant m\}$.*

*Démonstration.* La direction « seulement si » est claire parce que si $x$ est supérieur, on a $x = r^+ \cdot z$, avec $r^+ \in R_+$ et $z \in \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}$. Alors si $z = \sum_{i=1}^{m} p_0^i \otimes p_1^i \otimes \cdots \otimes p_k^i$ avec les $p_j^i \in R$ des éléments homogènes, on a $x = \sum_{i=1}^{m} r^+ p_0^i \otimes p_1^i \otimes \cdots \otimes p_k^i$, qui satisfait la propriété (*0).

Pour l'autre sens, soit $x = \sum_{i=1}^{m} p_0^i \otimes p_1^i \otimes \cdots \otimes p_k^i$ satisfaisant la propriété (*M). Comme $p_{r_i}^i = P_{t_{r_i}}(p_{r_i}^i) + x_{t_{r_i}} \partial_{t_{r_i}}(p_{r_i}^i)$, alors

$$\begin{aligned} x = \sum_{i=1}^{m} p_0^i \otimes \cdots \otimes p_{r_i-1}^i P_{t_{r_i}}(p_{r_i}^i) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes p_n^i + \\ + p_0^i \otimes \cdots \otimes p_{r_i-1}^i \partial_{t_{r_i}}(p_{r_i}^i) \otimes x_{t_{r_i}} \otimes \cdots \otimes p_n^i. \end{aligned}$$

Si $p_0^i \otimes \cdots \otimes p_{r_i-1}^i P_{t_{r_i}}(p_{r_i}^i) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes p_n^i \neq 0$, alors $\sum_{j=0}^{r_i-2} \deg(p_j^i) + \deg(p_{r_i-1}^i P_{t_{r_i}}(p_{r_i}^i)) \geqslant r_i$, et si $p_0^i \otimes \cdots \otimes p_{r_i-1}^i \partial_{t_{r_i}}(p_{r_i}^i) \otimes x_{t_{r_i}} \otimes \cdots \otimes p_n^i) \neq 0$, alors $\sum_{j=0}^{r_i-2} \deg(p_j^i) + \deg(p_{r_i-1}^i \partial_{t_{r_i}}(p_{r_i}^i)) \geqslant r_i$.

Ceci montre que s'il existe une écriture de $x$ qui satisfait la propriété (*M) alors il existe une autre écriture qui satisfait la propriété (*M$-1$). Par récurrence on arrive au fait qu'il existe une écriture de $x$ qui satisfait la propriété (*0), ce qui est équivalent à dire que $x$ est supérieur. □

## 3.3 Une base de morphismes dans le cas général

Maintenant qu'on a prouvé le théorème 3.3, on finit en donnant une solution du problème 3.1, c'est à dire, on donne une base explicite de $\mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}, \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k})$, pour $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{S}$..

**Définition 3.14.** Si $\bar{i} = (i_1, \ldots, i_r) \in I_r$ on définit $\bar{i}^c = (-i_1+1, \ldots, -i_r+1) \in I_r$. On définit aussi $\bar{i}(\mathrm{op}) = (i_r, \ldots, i_1)$. Finalement on pose $x_{\bar{i}}^g = x_{t_1}^{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{t_r}^{i_r} \otimes 1 \in \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_r}$ et $x_{\bar{i}}^d = 1 \otimes x_{t_1}^{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{t_r}^{i_r} \in \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_r}$.

Soit $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathrm{Hom}(\theta_{t_k} \cdots \theta_{t_1} \theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}(-k), R)$ une base de feuilles légères (noter qu'on dit « une » base parce que pour choisir cette base il faut faire un choix du même type que dans 3.1.2). Alors avec l'isomorphisme explicite donné dans le lemme 2.4, on trouve que

$$\left\{ m \mapsto \sum_{\bar{i} \in I_k} x_{\bar{i}}^g f_\alpha((1 \otimes x_{\bar{i}^c(\mathrm{op})}^d) \cdot m) \right\}_{\alpha \in A}$$

est une base de $\mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}, \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k})$ comme $R$-module à droite.

## 3.4 Application à la catégorie $\mathcal{O}$ de BGG

### 3.4.1 Morphismes dans la catégorie $\mathcal{O}$

Soit $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{b} \supset \mathfrak{h}$ une algèbre de Lie semisimple complexe, une sous-algèbre de Borel et une sous-algèbre de Cartan. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{b} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ la décomposition de Cartan correspondante. Nous noterons les algèbres enveloppantes correspondantes par $\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \mathcal{U}(\mathfrak{b})$, etc.

Nous considérons la catégorie $\mathcal{O}$ qui est la sous-catégorie pleine de la catégorie des $\mathcal{U}(\mathfrak{g})-$modules, et dont les objets sont les suivants :

$$Ob(\mathcal{O}) := \left\{ \begin{array}{c|l} & M \text{ est de type fini comme } \mathcal{U}(\mathfrak{g}) - \text{mod} \\ M \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) - \text{mod} & M \text{ est localement fini pour } \mathfrak{n} \\ & \mathfrak{h} \text{ agit de maniere diagonale en } M \end{array} \right\}$$

où la deuxième condition signifie que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{U}(\mathfrak{n}) \cdot m < \infty$ pour tout $m \in M$ et la dernière dit que $M = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} M_\mu$, où $M_\mu = \{m \in M | h \cdot m = \mu(h)m$ pour tout $h \in \mathfrak{h}\}$ est l'espace de poids $\mu$ de $M$. On peut trouver quelques résultats basiques sur cette catégorie en [BGG].

Pour un poids donné $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, soit $\mathbb{C}_\lambda$ le $\mathcal{U}(\mathfrak{b})-$module égal à $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel et avec l'action de $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$ définie par la formule suivante :

$$(h + n) \cdot c = \lambda(h)c$$

avec $h \in \mathfrak{h}$ et $n \in \mathfrak{n}$. Soit $M(\lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$ le module de Verma de plus haut poids $\lambda$ et tête simple $L(\lambda)$. Soit $P(\lambda) \in \mathcal{O}$ l'enveloppe projectif de $L(\lambda)$.

Soit $W$ le groupe de Weyl. Il a une action naturelle de $W$ sur $\mathfrak{h}^*$ : pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ nous notons $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$, dont $\rho$ est la demi-somme des racines positives. Nous définissons $\mathcal{O}_\lambda$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}$ d'objets les modules annulés par une puissance suffisamment grande de l'idéal maximal $\mathrm{Ann}_{\mathfrak{Z}} M(\lambda)$ dans le centre $\mathfrak{Z}$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. En [BGG] on montre la décomposition :

$$\mathcal{O} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*/(W \cdot)} \mathcal{O}_\lambda$$

On note $\mathcal{O}_0-$proj la sous-catégorie d'objets projectifs dans le bloc principal $\mathcal{O}_0$ de la catégorie $\mathcal{O}$. Soit $C = R/(R_+^W)$ l'algèbre de coinvariants. On identifie $\mathbb{C}$ à $R/R_+$, et on définit $\mathbf{B}^{\mathbb{C}}$ la sous-catégorie pleine de $C-$mod, d'objets les éléments $B \otimes_R \mathbb{C}$, avec $B \in \mathbf{B}$.

Dans [So1, Endomorphismensatz 3], Soergel montre que si $w_0$ est le plus long élément de $W$, alors il y a un isomorphisme

$$C \cong \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(P(w_0 \cdot 0)),$$

donc on peut construire un foncteur

$$\mathbb{V} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(P(w_0 \cdot 0), -) : \mathcal{O}_0 - \mathrm{proj} \to C - \mathrm{mod}.$$

**Lemme 3.15.** *La restriction du foncteur $\mathbb{V}$ est une équivalence de catégories :*

$$\mathbb{V} : \mathcal{O}_0 - \mathrm{proj} \simeq \mathbf{B}^{\mathbb{C}}. \tag{3.4.4}$$

*Démonstration.* Nous commençons par un théorème de Soergel

**Théorème 3.16** ([So1], Theorem 10)**.** *Soit $s$ une réflexion simple. Notons $C^s$ les invariants de $C$ par l'action de $s$. Il existe un endofoncteur $\theta_s$ de $\mathcal{O}_0$ et une équivalence naturelle de foncteurs $\mathcal{O}_0 \to C - \mathrm{mod}$*

$$\mathbb{V}\theta_s \cong C \otimes_{C^s} \mathbb{V}.$$

Pour $x \in W$ avec $x = s_r \cdots s_2 s_1$ une expression réduite, le module $P(x \cdot 0)$ est isomorphe à un facteur direct de $\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_r} M(0)$ (voir [Ja2]), donc par le lemme précédente on peut conclure que $\mathbb{V}P(x \cdot 0)$ est isomorphe à un facteur direct de $C \otimes_{C^{s_1}} C \otimes_{C^{s_2}} C \otimes_{C^{s_3}} \cdots \otimes_{C^{s_r}} \mathbb{C} \in \mathbf{B}^{\mathbb{C}}$. Comme tous les objets de $\mathcal{O}_0 - \mathrm{proj}$ sont des sommes directes des modules projectifs indécomposables, c'est-à-dire, des $P(x \cdot 0)$, on conclut que l'image par $\mathbb{V}$ des objets de $\mathcal{O}_0 - \mathrm{proj}$ est bien dans $\mathbf{B}^{\mathbb{C}}$, donc le foncteur du lemme est bien défini.

La proposition [So1, struktursatz] nous dit que le foncteur $\mathbb{V} : \mathcal{O}_0 - \mathrm{proj} \simeq \mathbf{B}^{\mathbb{C}}$ est pleinement fidèle. Nous devons montrer seulement qu'il est essentiellement surjectif, mais comme

$$\mathbb{V}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_r} M(0)) = C \otimes_{C^{s_1}} C \otimes_{C^{s_2}} C \otimes_{C^{s_3}} \cdots \otimes_{C^{s_r}} \mathbb{C},$$

il faut seulement vérifier que l'image de $\mathbb{V}$ est stable par facteurs directs, et ceci découle du fait que $\mathbb{V}$ est pleinement fidèle et induit donc une bijection au niveau des idempotents. □

D'autre part, à partir de [So2, prop. 8], on obtient le corollaire suivant :

**Corollaire 3.17.** *Si $B, B' \in \mathbf{B}$, alors le morphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{(R,R)}(B, B') \otimes_R \mathbb{C} \to \mathrm{Hom}_C(B \otimes_R \mathbb{C}, B' \otimes_R \mathbb{C})$$

*est un isomorphisme.*

Avec ces deux résultats et la description de $\mathrm{Hom}_{(R,R)}(B, B')$ faite dans la section 6, on obtient explicitement les morphismes dans la catégorie $\mathcal{O}_0$-proj.

On remarque que $K^b(\mathcal{O}_0 - \mathrm{proj}) \cong D^b(\mathcal{O}_0 - \mathrm{mod})$, car gldim $\mathcal{O}_0 < \infty$.

# Chapitre 4

# Équivalences entre conjectures de Soergel

Nous mettons dans ce chapitre le contenu exact de l'article [Li2].

## Introduction

Dans l'article [So2] de 1992, Soergel a catégorifié $\mathcal{H}$, l'algèbre d'Iwahori-Hecke d'un système de Coxeter $(W, \mathcal{S})$. Ceci signifie que si $k$ est un corps infini et $V$ une représentation $k$-linéaire de $W$ satisfaisant certaines propriétés, alors Soergel a construit une catégorie tensorielle $\mathbf{B}_k(V)$ -appelée catégorie de Soergel sur $V$- et un isomorphisme d'anneaux $\mathcal{E}$ de $\mathcal{H}$ vers le groupe de Grothendieck scindé de $\mathbf{B}_k(V)$.

Il a alors posé une conjecture (conjecture 4.17) qui donne une correspondance bijective, via $\mathcal{E}$, entre les éléments de la base de Kazhdan-Lusztig et les éléments indécomposables de $\mathbf{B}_k(V)$.

Cette conjecture implique deux résultats majeurs : d'une part, quand $k = \mathbb{R}$, la conjecture de positivité des polynômes de Kazhdan-Lusztig (voir [So4]) et d'autre part, quand $k$ est de caractéristique positive, une partie de la conjecture de Lusztig portant sur les caractères des représentations irréductibles de groupes algébriques en caractéristique positive (voir [So3]).

Dans la section 4.1 de ce chapitre nous donnons les notations et définitions que nous utiliserons dans la suite. Dans la section 4.2 nous donnons l'énoncé des trois théorèmes principaux. Nous choisissons $V$ et $V'$ une représentation et une sous-représentation de $W$ satisfaisant certaines propriétés techniques. Ces propriétés sont satisfaites en particulier quand $k = \mathbb{R}$, $V$ est une des représentations utilisées par Soergel dans sa théorie (une représentation RF) et $V'$ est la représentation géométrique. Le premier théorème (4.12) établit des relations entre les espaces de morphismes de $\mathbf{B}_k(V')$ et ceux de $\mathbf{B}_k(V)$. Le second (4.13) énonce une bijection entre les indécomposables de $\mathbf{B}_k(V)$ et ceux de $\mathbf{B}_k(V')$. Le troisième (4.14) nous donne un isomorphisme entre les groupes de Grothendieck scindés de $\mathbf{B}_k(V)$ et de $\mathbf{B}_k(V')$.

Ces deux derniers théorèmes impliquent que la conjecture de Soergel est équivalente pour $\mathbf{B}_k(V)$ et $\mathbf{B}_k(V')$. En particulier ceci montre que la conjecture de Soergel pour $k = \mathbb{R}$ et $V$ la représentation géométrique implique la conjecture de positivité des polynômes de Kazhdan-Lusztig.

Dans la section 4.3 nous donnons les outils principaux pour démontrer ces théorèmes : notamment nous travaillerons au niveau des corps de fractions des anneaux de polynômes pour montrer des isomorphismes entre les espaces de morphismes. Enfin, dans la section 4.4 nous achevons les démonstrations des théorèmes.

J'aimerais remercier Geordie Williamson pour ses remarques, et Raphaël Rouquier pour son encouragement et ses multiples idées et commentaires.

## 4.1 Définitions

### 4.1.1 Rappels

Donnons d'abord quelques définitions.

**Définition 4.1.** Un système de Coxeter est un couple $(W, \mathcal{S})$ où $W$ est un groupe et $\mathcal{S} \subseteq W$ une partie génératrice, tels que $W$ admet une présentation de générateurs $s \in \mathcal{S}$ et relations $(sr)^{m(s,r)} = 1$ pour $s, r \in \mathcal{S}$, avec $m(s,s) = 1$, $m(s,r) \geqslant 2$ et éventuellement $m(r,s) = \infty$ si $s \neq r$.

**Définition 4.2.** Soit $(W, \mathcal{S})$ un système de Coxeter. Nous définissons l'algèbre de Hecke $\mathcal{H} = \mathcal{H}(W, \mathcal{S})$ comme la $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-algèbre de générateurs $\{T_s\}_{s \in \mathcal{S}}$, ceux-ci satisfaisant les relations

$$T_s^2 = v^{-2} + (v^{-2} - 1)T_s$$

pour tout $s \in \mathcal{S}$ et

$$T_sT_rT_s... = T_rT_sT_r...$$

avec $m(s,r)$ termes de chaque côté, si $s, r \in \mathcal{S}$ et $sr$ est d'ordre $m(s,r)$.

Si $x = s_1 s_2 \cdots s_n$ est une expression réduite de $x$, on définit $T_x = T_{s_1} T_{s_2} \cdots T_{s_n}$ ($T_x$ ne dépend pas du choix de la décomposition réduite). Nous posons $q = v^{-2}$. Nous pouvons montrer que $\{T_x\}_{x \in W}$ est une base de $\mathcal{H}$ sur $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$.

Soit $\mathcal{T} \subseteq W$ le sous-ensemble des réflexions, c'est à dire, tous les éléments qui sont conjugués aux éléments de $\mathcal{S}$.

**Définition 4.3.** Soit $k$ un corps de caractéristique différente de 2. Une représentation de dimension finie de $W$ sur $k$ est appelée réflexion fidèle (RF) si elle est fidèle et si l'ensemble d'éléments de $W$ qui ont un espace de points fixes de codimension un coincide avec l'ensemble des réflexions.

**Définition 4.4.** Pour chaque objet gradué $M = \bigoplus_i M_i$, et chaque entier $n$, on définit l'objet décalé $M(n)$ par $(M(n))_i = M_{i+n}$.

**Définition 4.5.** Soit $\tau : \mathcal{H} \to \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ l'application définie par

$$\tau\left(\sum_{x \in W} p_x T_x\right) = p_1 \qquad (p_x \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]).$$

**Définition 4.6.** Pour toute petite catégorie additive $\mathcal{A}$, on définit le groupe de Grothendieck scindé $\langle \mathcal{A} \rangle$. C'est le groupe libre sur les objets de $\mathcal{A}$ modulo les relations $M = M' + M''$ chaque fois que $M \cong M' \oplus M''$. Chaque objet $A \in \mathcal{A}$ définit un élément $\langle A \rangle \in \langle \mathcal{A} \rangle$.

**Définition 4.7.** Soit $U$ une représentation de $W$ sur le corps $k$. Soit $R = S(U^*) = R(U)$ l'algèbre symétrique de $U^*$, c'est-à-dire l'algèbre des fonctions régulières sur $U$, sur laquelle $W$ agit par fonctorialité. L'algèbre $R$ est graduée de la manière suivante : $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ avec $R_2 = U^*$ et $R_i = 0$ pour $i$ impair. Nous notons $R^s$ le sous-anneau de $R$ des invariants pour l'action de $s \in W$. Pour $s \in \mathcal{S}$ nous définissons $\theta_s = R \otimes_{R^s} R$.

La catégorie de Soergel $\mathbf{B}_k(U)$ associée à $U$ est la catégorie des $(R, R)-$bimodules $\mathbb{Z}$-gradués, dont les objets sont les facteurs directs des sommes directes finies d'objets du type $\theta_{s_1} \otimes_R \cdots \otimes_R \theta_{s_n}(d)$, pour un $d \in \mathbb{Z}$ et $s_1, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$. Par la suite nous noterons $\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}(d)$ le $(R, R)$-bimodule $\theta_{s_1} \otimes_R \cdots \otimes_R \theta_{s_n}(d)$.

**Définition 4.8.** Nous disons qu'une paire $(U, U')$ dont $U$ est une représentation et $U'$ une sous-représentation de $W$ est une bonne paire, si $U'$ satisfait à la propriété que les réflexions simples agissent comme des réflexions, et $U$ satisfait aussi que le corollaire 2.6 est valable pour $R = R(U)$, c'est à dire :

**Propriété 4.9.** *Nous définissons les entiers $n_i$ par $\tau((1+T_{s_1})\dots(1+T_{s_n})) = \sum_i n_i q^i$. Alors, il existe un isomorphisme de $R-$modules à droite gradués*

$$\mathrm{Hom}(\theta_{s_1}\cdots\theta_{s_n}, R) \simeq \oplus_i n_i R(2i).$$

*Remarque* 4.10. Dans l'article [So4] Soergel montre que la propriété 4.9 est vraie si $U$ est RF. Dans le même article Soergel construit une représentation réelle RF $U_0$ pour chaque système de Coxeter $(W, \mathcal{S})$. Cette représentation admet une sous-représentation $U_0'$ isomorphe à la représentation géométrique. Donc $(U_0, U_0')$ est une bonne paire.

### 4.1.2 Les catégories de Soergel qu'on utilisera

Nous fixerons jusqu'à la fin de ce chapitre une bonne paire $(V, V')$. Soit $R' = R(V')$ l'algèbre des fonctions régulières sur $V'$. L'inclusion $V' \subset V$ induit une surjection $Q : R \to R'$ , ce qui permet de voir $R'$ comme $R$-module. Pour $s \in \mathcal{S}$ nous définissons $\theta_s' = R' \otimes_{R'^s} R'$ .

Soit $\mathbf{B} = \mathbf{B}_k(V)$, $\mathbf{B}' = \mathbf{B}_k(V')$ , $\mathbf{C}$ la catégorie de $(R, R)-$bimodules, $\mathbf{C}'$ la catégorie de $(R', R')-$bimodules et $\mathfrak{X} : \mathbf{B} \to \mathbf{C}'$ le foncteur additif qui envoie $M$ vers $R' \otimes_R M \otimes_R R'$.

## 4.2 Théorèmes principaux

Nous avons que $s \in \mathcal{S}$ agit comme une réflexion dans $V$ et dans $V'$, donc nous pouvons trouver $V''$ stable par $s$, avec $V = V' \oplus V''$. Comme $R(V) = R(V') \otimes R(V'')$, nous avons $R^s = R'^s \otimes R(V'')$. Cette dernière égalité nous permet d'obtenir les isomorphismes suivantes dans $\mathbf{C}'$ :

$$\mathfrak{X}(\theta_s) \simeq R' \otimes_{R^s} R' \simeq \theta_s' \tag{4.2.1}$$

**Lemme 4.11.** *Soit $M \in \mathbf{B}$. Alors $\mathfrak{X}(M) \simeq R' \otimes_R M$ comme $(R', R)-$bimodules.*

*Démonstration.* Il suffit de le prouver pour $M = \theta_{s_1} \cdots \theta_{s_k}$, avec $s_1, \dots, s_k \in \mathcal{S}$. Comme $\ker(Q) = V'^{\perp} \cdot R$ (ici $V'^{\perp}$ est l'ensemble des formes linéaires sur $V$ nulles sur $V'$), il suffit de montrer que $(R' \otimes_R M) \cdot V'^{\perp} = 0$. Mais si $s \in \mathcal{S}$, alors $s$ agit trivialement sur $V/V'$, alors $W$ agit trivialement sur $V/V'$, donc aussi sur $V'^{\perp} \simeq (V/V')^*$. Nous concluons que $V'^{\perp} \subset R^W$, alors $(R' \otimes_R M) \cdot V'^{\perp} = V'^{\perp} \cdot (R' \otimes_R M) = 0$ ce qui permet de conclure. □

Avec ce lemme nous voyons aisément les isomorphismes dans $\mathbf{C}'$ :

$$\mathfrak{X}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_k}) \simeq \theta'_{s_1} \cdots \theta'_{s_k} \simeq \mathfrak{X}(\theta_{s_1}) \cdots \mathfrak{X}(\theta_{s_k}) \tag{4.2.2}$$

Ces isomorphismes généralisent l'isomorphisme (4.2.1) et montrent qu'on peut regarder $\mathfrak{X}$ comme un foncteur (tensoriel) de $\mathbf{B}$ vers $\mathbf{B}'$. Les trois théorèmes suivants dissent que la représentation dans $V$ est équivalente à la représentation dans $V'$ dans la théorie de Soergel.

**Théorème 4.12.** *Pour tout $M, N \in \mathbf{B}$, le morphisme canonique :*

$$R' \otimes_R \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(N))$$

*est un isomorphisme de $R'$-modules gradués.*

**Théorème 4.13.** *$M$ est indécomposable dans $\boldsymbol{B}$ si et seulement si $\mathfrak{X}(M)$ est indécomposable dans $\mathbf{B}'$.*

**Théorème 4.14.** *$\mathfrak{X}$ induit un isomorphisme au niveau des groupes de Grothendieck scindés, qu'on appelle aussi $\mathfrak{X} : \langle \mathbf{B} \rangle \to \langle \mathbf{B}' \rangle$*

### 4.2.1 Reflection faithful

**Définition 4.15.** Une représentation est appelée "reflection vector faithful" (RVF) si elle satisfait que les réflexions agissent comme des réflexions et que les différentes réflexions ont des différents $(-1)$-espaces propres.

*Remarque* 4.16. L'ensemble des représentations RF est contenu dans l'ensemble des représentations RVF. La représentation géométrique d'un groupe de Coxeter $W$ est RVF mais non pas nécessairement RF, comme le montre l'exemple du groupe diédral infini.

### 4.2.2 Conjectures de Soergel

Soit $U$ une représentation RVF. Dans le théorème [So2, thm. 1.10], Soergel donne un isomorphisme d'anneaux entre l'algèbre de Hecke de $W$ et le groupe de Grothendieck scindé de $\mathbf{B}_k(U)$, $\mathcal{E} : \mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \langle \mathbf{B}_k(U) \rangle$. Nous posons la conjecture de Soergel sur $\mathbf{B}_{\mathbb{R}}(U)$ :

**Conjecture 4.17** (Soergel)**.** Soit $U$ une représentation RF de $W$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in W$, il existe un $R(U)$-bimodule indécomposable $\mathbb{Z}$-gradué $B_x \in \mathbf{B}_k(U)$ tel que $\mathcal{E}(C'_x) =< B_x >$, où $C'_x$ est l'élément de la base de Kazhdan-Lusztig associé à $x$.

*Remarque* 4.18. Dans [So4], Soergel montre que prouver la conjecture 4.17 pour un $U$ quelconque satisfaisant les hypothèses de la conjecture 4.17 implique la conjecture de positivité des polynômes de Kazhdan-Lusztig.

*Remarque* 4.19. La conjecture 4.17 peut se généraliser pour $k$ un corps infini. Dans ce cas c'est connu qu'elle n'est plus vraie en toute généralité. Cependant, dans [So3] Soergel montre que si la caractéristique de $k$ est plus grande que le nombre de Coxeter de $W$ et si $W$ est un groupe de Weyl fini, alors la conjecture 4.17 est équivalente à une partie de la conjecture de Lusztig portant sur les caractères des représentations irréductibles de groupes algébriques sur $k$ (par exemple $\mathrm{GL}_n(\bar{\mathbb{F}}_p)$).

*Remarque* 4.20. Si $V$ et $V'$ (les représentations qu'on a fixé dans la section 4.1.2) sont RVF, les théorèmes 4.13 et 4.14 impliquent que la conjecture de Soergel sur $\mathbf{B}$ est équivalente à la conjecture de Soergel sur $\mathbf{B'}$ .

En particulier, le remarques 4.10 et 4.18 impliquent que quand $k = \mathbb{R}$, si nous démontrons la conjecture 4.17 pour $U = U'_0$ (la représentation géométrique définie dans la remarque 4.10), alors nous démontrons la conjecture 4.17 pour $U = U_0$, et donc nous prouvons la conjecture de positivité de Kazhdan-Lusztig.

## 4.3 Travail sur les corps de fractions de $R$ et de $R'$

Pour démontrer ces théorèmes, nous commençons par un lemme important :

**Lemme 4.21.** *Soit $(s_1, \ldots, s_k) \in \mathcal{S}^k$ et $M = \theta_{s_1} \cdots \theta_{s_k}$. Ils existent un entier $n$ et une application surjective $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, R^n)$, tels que le morphisme $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(R^n, R) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, R)$ qui s'en déduit est un isomorphisme de $R$-modules à droite.*

*Remarque* 4.22. Ce morphisme peut être regardé comme la projection $\Gamma_{\geqslant 0}M \to \Gamma_{\geqslant 0}M/\Gamma_{>0}M$ (voir définition de $\mathcal{F}_\Delta$).

*Démonstration.* Étant donné que la propriété 4.9 est valable pour $R = R(V)$, dans le chapitre 3 nous montrons qu'il existe une base $f_1, \ldots, f_r \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, R)$ comme $R$-module, appelée base des feuilles légères, et qu'il existe un ensemble $\{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq M$ tel que $f_i(x_j) = 0$ si $i < j$ et $f_i(x_i) = 1$. Ceci permet de conclure que $n = r$ et $f = \sum_i f_i$ satisfont les propriétés du théorème. □

Nous continuons avec les notations du lemme 4.21. Le lemme 4.21 nous donne une suite exacte de $(R, R)-$bimodules

$$0 \to \ker f \to M \to R^n \to 0. \tag{4.3.3}$$

Cette suite est scindée comme suite de $R-$modules à gauche, $R^n$ étant projectif. Nous obtenons donc une suite exacte de $(R', R)-$bimodules

$$0 \to R' \otimes_R \ker f \to R' \otimes_R M \to R' \otimes_R R^n \to 0$$

Comme $M \in \mathbf{B}$, par le lemme 4.11, l'action à droite de $R$ sur $R' \otimes_R M$ se factorise par $R'$, et comme $R' \otimes_R \ker f$ s'injecte dans $R' \otimes_R M$, l'action à droite de $R$ sur $R' \otimes_R \ker f$ se factorise aussi par $R'$, donc nous pouvons considérer $R' \otimes_R \ker f$ comme un $(R', R')-$bimodule. Finalement nous obtenons une suite exacte de $R'-$modules

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(R'^n, R') \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(R' \otimes_R M, R') \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(R' \otimes_R \ker f, R') \tag{4.3.4}$$

**Proposition 4.23.** $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(R' \otimes_R \ker f, R') = 0$

*Démonstration.* Avant de prouver cette proposition il nous faut prouver deux lemmes

**Définition 4.24.** Nous définissons $K$ et $K'$ comme les corps de fractions de $R$ et $R'$ respectivement

**Lemme 4.25.** *Soit* $M \in \mathbf{B}$. *Nous avons un isomorphisme de* $(K', R)-$*bimodules :*

$K' \otimes_R M \simeq K' \otimes_R M \otimes_R K'$.

*Démonstration.* Il suffit de prouver l'isomorphisme pour $M = \theta_s$. Pour ceci il faut commencer par prouver l'isomorphisme de $(K', R)-$bimodules suivant :

$$K' \otimes_{R'^s} R' \simeq K' \otimes_{R'^s} K' \tag{4.3.5}$$

Soit $in : R' \hookrightarrow K'$ l'injection canonique, et soit $x'_s$ l'équation de l'hyperplan défini par $s$ dans $V'$. Alors le morphisme

$\mathrm{id} \otimes in : K' \otimes_{R'^s} R' \to K' \otimes_{R'^s} K'$ a pour inverse le morphisme

$$\frac{p_1}{q_1} \otimes \frac{p_2}{q_2} \mapsto \frac{p_1}{q_1 q_2 s(q_2)} \otimes s(q_2) p_2,$$

ce qui montre la formule (4.3.5).

Nous avons alors une suite d'isomorphismes de $(K', R)-$bimodules :

$$\begin{array}{rcll} K' \otimes_{R^s} R & \simeq & K' \otimes_{R'} (R' \otimes_R (R \otimes_{R^s} R)) & \\ & \simeq & K' \otimes_{R'} (R' \otimes_{R^s} R') & \text{(lemme 4.11)} \\ & \simeq & K' \otimes_{R'} (R' \otimes_{R'^s} R') & \text{(isomorphisme (4.2.1))} \\ & \simeq & K' \otimes_{R'^s} K' & \text{(isomorphisme (4.3.5))} \\ & \simeq & K' \otimes_{R^s} K'. & \end{array}$$

Donc nous avons montré le lemme pour $M = \theta_s$, ce qui complète la preuve du lemme. □

*Remarque* 4.26. Dans la suite nous allons considérer $K' \otimes_R M$, via l'isomorphisme du lemme 4.25 comme un $(K', K')-$bimodule.

**Définition 4.27.** Soit $A$ un anneau muni d'une action de $W$. Pour $w \in W$, nous notons $A_w$ le $(A, A)-$bimodule ayant $A$ comme ensemble sous-jacent, et dont l'action à gauche est l'action habituel mais l'action à droite est tordue par $w$, c'est-à-dire, $a \cdot a' = aw(a')$, pour tout $a, a' \in A$.

**Lemme 4.28.** *Nous utilisons les notations du lemme 4.21. Il existe un ensemble d'entiers naturels $\{n_w\}_{w \in W}$, et un isomorphisme de $(K', K')-$bimodules :*

$$K' \otimes_R M \simeq \bigoplus_{w \in W} (K'_w)^{n_w} \tag{4.3.6}$$

*avec $n_1 = n$, où 1 est l'identité de $W$.*

*Démonstration.* Nous avons une suite exacte de $(R, R)-$bimodules :

$$0 \to R_s \xrightarrow{\mu_s} \theta_s \xrightarrow{m_s} R \to 0$$

où $m_s$ est le morphisme multiplication et $\mu_s(1) = x_s \otimes 1 - 1 \otimes x_s$, où $x_s$ est l'équation dans $V$ de l'hyperplan de réflexion de $s$. Comme $R$ est un $R$-module projectif, en tensorisant par $K'$ sur $R$ nous retrouvons une suite exacte de $(K', K')-$bimodules par le lemme 4.25 :

$$0 \to K'_s \to K' \otimes_R \theta_s \to K' \to 0 \tag{4.3.7}$$

La suite 4.3.7 est scindée par le morphisme $\nu_s : K' \otimes_R \theta_s \to K'_s$ donné par $(K' \otimes_{R^s} R \ni a \otimes b \mapsto as(b)/2x'_s)$. Donc nous avons un isomorphisme de $(K', K')-$bimodules :

$$K' \otimes_{R'} \theta_s \simeq K' \oplus K'_s. \tag{4.3.8}$$

Nous avons les isomorphismes de $(K', K')-$bimodules :

$$\begin{array}{rcll} K' \otimes_R \theta_{s_1} \cdots \theta_{s_k} & \simeq & K' \otimes_{R^{s_1}} K' \otimes_{R^{s_2}} \cdots \otimes_{R^{s_k}} K' & \text{(lemme 4.25)} \\ & \simeq & (K' \otimes_{R^{s_1}} K') \otimes_{K'} \cdots \otimes_{K'} (K' \otimes_{R^{s_k}} K') & \\ & \simeq & (K' \oplus K'_{s_1}) \otimes_{K'} \cdots \otimes_{K'} (K' \oplus K'_{s_k}) & \text{( équation (4.3.8))}. \end{array}$$

Donc le fait que $K'_x \otimes_{K'} K'_y \simeq K'_{xy}$ permet de conclure la première partie du lemme.

Maintenant nous prouverons que $n_1 = n$. Par la construction de l'isomorphisme 4.3.8, si

$$l = \mathrm{card}\{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant k; s_{i_1} \cdots s_{i_p} = 1\},$$

alors $n_1 = l$.

En outre, la propriété 4.9 dit que si nous définissons les entiers $n'_i$ par $\tau((1 + T_{s_1}) \ldots (1 + T_{s_k})) = \sum_i n'_i q^i$, alors, il existe un isomorphisme de $R-$modules à droite gradués

$$\mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_k}, R) \simeq \oplus_i n'_i R(2i).$$

Mais par le lemme 4.21, ceci implique que $n = \sum_i n'_i$. La spécialisation de l'algèbre de Hecke en $q = 1$ est un morphisme $\rho$ d'algèbres de $\mathcal{H}$ vers $\mathbb{C}W = \oplus_{x \in W} \mathbb{C}x$, l'algèbre du groupe de $W$. Nous appliquons $\rho$ des deux cotés de l'équation

$$(1 + T_{s_1}) \ldots (1 + T_{s_k}) = \sum_i n'_i q^i + \sum_{w \neq 1} \lambda_w T_w$$

dont les $\lambda_w$ sont des polynômes en $q$, et nous obtenons

$$(1+s_1)\cdots(1+s_k)=\sum_i n_i'+\sum_{w\neq 1}\lambda_w(1)w$$

Ceci implique que $\sum_i n_i' = l$, et ceci finit la preuve du lemme. □

### 4.3.1 Preuve de la proposition 4.23

Dans la suite exacte (4.3.3), le fait que $R^n$ est projectif comme $R$-module à gauche nous permet de tensoriser par $K'$ et obtenir encore une suite exacte de $(K', K')-$bimodules, par le lemme 4.25 :

$$0\to K'\otimes_R \ker f\to K'\otimes_R M\to {K'}^n\to 0$$

de par le lemme 4.28 cette suite est isomorphe à :

$$0\to K'\otimes_R \ker f\to {K'}^n\oplus(\bigoplus_{w\neq 1}(K_w')^{n_w})\to {K'}^n\to 0$$

Il est facile de voir que

$$\mathrm{Hom}_{K',K'}(K_w',K')\simeq\begin{cases}0 & \text{si}\quad w\neq 1\\ K' & \text{si}\quad w=1\end{cases}\tag{4.3.9}$$

Donc nous pouvons conclure que

$$K'\otimes_R \ker f\simeq\bigoplus_{w\neq 1}(K_w')^{n_w}.$$

Cet isomorphisme et (4.3.9) permettent de conclure que $\mathrm{Hom}_{K',K'}(K'\otimes_R \ker f, K')=0$.

Supposons que $g\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(R'\otimes_R \ker f, R')$, et $g\neq 0$. Alors $0\neq \mathrm{id}\otimes g\in \mathrm{Hom}_{K',K'}(K'\otimes_R \ker f, K')$, ce qui est une contradiction et permet de finir la preuve de la proposition.

□

## 4.4 Preuves des théorèmes

**Preuve du théorème 4.12 :** Comme conséquence de la proposition 4.23 et de la suite exacte (4.3.4), nous concluons que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}({R'}^n,R')\simeq\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(R'\otimes_R M,R'),$$

ce qui démontre le théorème 4.12 pour $M = \theta_{s_1} \cdots \theta_{s_k}$ et $N = R$.

Par le lemme 3.3 du chapitre 3, nous savons que si $M, N \in \mathbf{B}$, le morphisme

$$\begin{array}{rcl} F_s(M,N) : \mathrm{Hom}(\theta_s M, N) & \to & \mathrm{Hom}(M, \theta_s N)(2) \\ f & \mapsto & (m \mapsto x_s \otimes f(1 \otimes m) + 1 \otimes f(1 \otimes x_s m)) \end{array}$$

est un isomorphisme de $R$-modules à droite gradués. Nous connaissons explicitement son inverse : si $g \in \mathrm{Hom}(M, \theta_s N)(2)$, on peut écrire de manière unique $g(m) = 1 \otimes g_1(m) + x_r \otimes g_2(m)$, avec $g_1(m), g_2(m) \in N$. Ceci définit les morphismes $g_1$ et $g_2$ associés à $g$. La fonction inverse de $F_s(M,N)$ est $G_s(M,N) : \mathrm{Hom}(M, \theta_s N)(2) \to \mathrm{Hom}(\theta_s M, N)$, le morphisme qui envoie $g$ vers le morphisme $\lambda \otimes m \mapsto \lambda g_2(m)$, avec $\lambda \in R$ et $m \in M$.

Nous avons de même un isomorphisme de $R'$-modules à droite gradués.

$$F'_s(M', N') : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(\theta'_s M', N') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(M', \theta'_s N')(2).$$

Le lemme suivante découle directement des définitions des morphismes impliqués.

**Lemme 4.29.** *Nous avons le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} R' \otimes_R \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, \theta_s N)(2) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(\mathfrak{X}(M), \theta'_s \mathfrak{X}(N))(2) \\ {\scriptstyle \mathrm{id}\otimes G_s(M,N)} \downarrow & & \uparrow {\scriptstyle \mathrm{id}\otimes F'_s(\mathfrak{X}(M),\mathfrak{X}(N))} \\ R' \otimes_R \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\theta_s M, N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(\theta'_s \mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(N)) \end{array}$$

*où les morphismes horizontaux sont les morphismes naturels.*

Ce lemme démontre le théorème 4.12 pour $M$ et $N$ des bimodules basiques (de la forme $\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_k}(d)$). Et ceci nous donne la preuve pour $M, N \in \mathbf{B}$. $\square$

**Preuve du théorème 4.13.**

Nous commençons par démontrer la partie "si" du théorème. Nous commencerons par montrer que si $M \in \mathbf{B}$ et $M \neq 0$, alors $\mathfrak{X}(M) \neq 0$. Nous savons que $\mathfrak{X}(M) \simeq (V'^{\perp} R \cdot M) \backslash M$ (on rappelle que $V'^{\perp}$ est l'ensemble des formes linéaires sur $V$ nulles sur $V'$), donc il suffit de montrer que $V'^{\perp} R \cdot M \neq M$. Soit $M = \oplus_{i \geqslant k} M_i \oplus \{0\}$ son écriture graduée, avec $M_k \neq 0$. Comme les éléments non nuls de $V'^{\perp}$ sont de degré 2 (voir la définition 4.7), alors les degrés des éléments non nuls de $V'^{\perp} R \cdot M$ sont supérieurs à $k$, ce qui nous permet de conclure que $V'^{\perp} R \cdot M \neq M$.

Si $M$ est décomposable, il existent $M_1, M_2 \neq 0$ avec $M \simeq M_1 \oplus M_2$. Ceci implique que $\mathfrak{X}(M) \simeq \mathfrak{X}(M_1) \oplus \mathfrak{X}(M_2)$, avec $\mathfrak{X}(M_1), \mathfrak{X}(M_2) \neq 0$ par ce qu'on vient de voir, donc $\mathfrak{X}(M)$ est décomposable. Ceci implique la partie "si" du théorème.

Donc nous nous intéressons à la partie “seulement si”. Soit $I$ un ensemble de représentants des classes d'isomorphismes des bimodules indécomposables de $\mathbf{B}$. Nous fixons $M \in I$ jusqu'à la fin de cette preuve. Par le théorème de Krull-Schmidt (voir remarque 1.6) il existe une suite $s_1, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$ et un $d \in \mathbb{Z}$ tels que $M$ est un facteur direct de $\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_k}(d)$.

Étant donné que $E = \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_k})(d)$ possède une base (finie) comme $R-$module (la base des feuilles légères), il est facile de voir que $E_0$, le $\mathbb{C}-$sous espace vectoriel de $E$ formé par les endomorphismes de degré zéro, est une $\mathbb{C}-$algèbre de dimension finie. Ceci implique que si $G = \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(M)$, alors $G_0$ (endomorphismes de degré zéro) est aussi une $\mathbb{C}-$algèbre de dimension finie.

Si $G' = \mathrm{End}_{\mathbf{C}'}(\mathfrak{X}(M))$ nous avons un morphisme entre des $\mathbb{C}-$algèbres de dimension finie $G_0 \to G'_0$ qui est surjectif comme conséquence du théorème 4.12. Donc nous pouvons relever les idempotents de $G'_0$ en des idempotents de $G_0$. Ceci implique que si $\mathfrak{X}(M)$ est décomposable, alors $G'_0$ a des idempotents non triviaux, et donc $G_0$ aussi, donc $M$ est décomposable ce qui est absurde.

□

**Preuve du théorème 4.14**. Nous savons que $\mathfrak{X}$ étant un foncteur additif, il définit bien par passage au quotient un morphisme de groupes entre les groupes de Grothendieck scindés.

**Lemme 4.30.** *Soient $M, M' \in I$. Alors $\mathfrak{X}(M) \simeq \mathfrak{X}(M') \Rightarrow M = M'$.*

*Démonstration.* Supposons $\mathfrak{X}(M) \simeq \mathfrak{X}(M')$. Soit $f : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M')$ un isomorphisme, et $g$ son inverse. Soient $F : M \to M'$ et $G : M' \to M$ des relevés respectifs, c'est-à-dire, tels que $\mathrm{id} \otimes F = f$ et $\mathrm{id} \otimes G = g$. Nous posons $E = \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(M)$, $E' = \mathrm{End}_{\mathbf{C}'}(\mathfrak{X}(M))$ et nous notons $E_0$, $E'_0$ leurs parties de degré zéro respectives.

Comme conséquence du théorème 4.12 nous avons un morphisme surjectif $E_0 \to E'_0$ de $\mathbb{C}-$algèbres de dimension finie. Comme $E_0$ est une algèbre locale de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et comme $E'_0$ est un quotient non nul de $E_0$, un élément de $E_0$ est inversible si et seulement si son image dans $E'_0$ est inversible. On en déduit que $G \circ F$ est inversible. De même, $F \circ G$ est inversible, donc $F$ et $G$ sont des isomorphismes. □

Par le théorème de Krull-Schmidt nous savons que $\langle N\rangle = \langle M\rangle \in \langle \mathbf{B}'\rangle \Leftrightarrow N \simeq M \in \mathbf{B}'$.

Soit $M \in I$. Par le théorème 4.13, le bimodule $\mathfrak{X}(M)$ est indécomposable, donc le théorème de Krull-Schmidt et le lemme 4.30 permettent de conclure que $\{\langle \mathfrak{X}(M)\rangle\}_{M\in I}$ est libre comme $\mathbb{Z}-$module dans $\langle \mathbf{B}'\rangle$. Le fait que $\{\langle M\rangle\}_{M\in I}$ est une base du $\mathbb{Z}-$module $\langle \mathbf{B}\rangle$ permet de conclure que $\mathfrak{X} : \langle \mathbf{B}\rangle \to \langle \mathbf{B}'\rangle$ est injectif.

La surjectivité de $\mathfrak{X}$ se déduit du lemme suivant :

**Lemme 4.31.** *Le foncteur $\mathfrak{X} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}'$ est essentiellement surjectif.*

*Démonstration.* Chaque objet indécomposable $\gamma'$ de $\mathbf{B}'$ est un facteur direct d'un objet $X' = \theta'_{s_1} \cdots \theta'_{s_p}(k)$. Soit $X = \theta_{s_1} \cdots \theta_{s_p}(k)$. Soit $E = \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(X)$, et $E_0$ sa partie gradué de degré zéro. Soit $E' = \mathrm{End}_{\mathbf{C}'}(X')$, et $E'_0$ sa partie gradué de degré zéro. Comme $E_0$ est une $\mathbb{C}-$algèbre de dimension finie et le morphisme $E_0 \to E'_0$ est surjectif comme conséquence du théorème 4.12, alors tout idempotent de $E'_0$ peut se relever à un idempotent de $E_0$. En particulier l'idempotent définissant $\gamma'$, ce qui permet de compléter les preuves du lemme 4.31 et du théorème 4.14. $\square$

# Chapitre 5

# Presentation of right angled Soergel categories by generators and relations

## 5.1 Introduction

In 1979 [KL1], Kazhdan and Lusztig defined the Kazhdan-Lusztig polynomials, and this gave rise to what now is known as the Kazhdan-Lusztig theory. They stated two major conjectures involving these polynomials in [KL1] and [KL2] : Kazhdan-Lusztig conjecture (in representation theory of Lie algebras) and Kazhdan-Lusztig positivity conjecture (in algebraic combinatorics). The first conjecture was proved for Weyl groups by Beilinson and Bernstein in [BB], by Brylinski and Kashiwara in [BK] and later by Soergel [So1]. The second conjecture has been proved for Weyl or affine Weyl groups in [KL2] and in other cases by Haddad [Had] and Dyer [Dy].

In 1980 [Lu1], Lusztig stated a central conjecture in representation theory, known as Lusztig conjecture. This conjecture is about the characters values of the irreducible representations of algebraic groups in positive characteristic. This conjecture is solved only for large characteristics.

Let us consider $(W, \mathcal{S})$ a Coxeter system and $\mathcal{H}$ its Hecke algebra. In 1992 [So2], Soergel categorified $\mathcal{H}$. This means that he defined a tensor category $\mathbf{B}$ (that depends on a field $k$ and on a representation of $W$) and an isomorphism of rings $\mathcal{E}$ from $\mathcal{H}$ to the split Grothendieck group of $\mathbf{B}$. He has then stated a conjecture that links, via $\mathcal{E}$, the Kazhdan-Lusztig basis elements in $\mathcal{H}$ with the indecomposable elements of **B**. This conjecture implies Kazhdan-Lusztig positivity conjecture, and when the characteristic of $k$ is larger that the coxeter number $h$ of $W$, it implies a part of Lusztig conjecture.

Soergel introduced this category in the case of Weyl groups to make a link between the BGG category $\mathcal{O}$ of a semisimple complex Lie algebra and the perverse sheaves over the grassmanians. This link with geometry allowed him to prove his conjecture in the Weyl group case. He deduced in [So1] the proof of Kazhdan-Lusztig conjecture we have mentioned.

The following diagram is a summery of the implications

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Soergel Conjecture} \arrow[dl, Rightarrow, "\text{Weyl group}"'] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow, "\text{Weyl group}", "\mathrm{char}(k)>h"'] & \\
\text{KL Conjecture} & \text{KL positivity conjecture} & \text{Part of Lusztig conjecture}
\end{tikzcd}$$

In this chapter, we are concerned with the case where $(W, \mathcal{S})$ is a right-angled Coxeter system. This means that $m(s,r) = 2$ or $\infty$ for all $s, r \in \mathcal{S}$. In this case, we find a presentation as tensor category of **B** (called right-angled Soergel category) by generators and relations. Our main motivation to do this is the following. If we can extend this result to any Coxeter system we expect to be able to do the following : to reprove Kazhdan-Lusztig conjecture in the spirit of [So1] but (from our perspective) in a more natural way and to reprove a part of Lusztig conjecture (comparison between quantum group and algebraic group) in an essentially different way that the proof in [AJS].

To extend the result of this paper to the symmetric group would be a step forward in the program of calculating Khovanov-Rozansky link homology (a categorification of the HOMFLYPT polynomial) defined in [Kh] via Soergel category **B**.

We should say that the right-angled case is very rich in topological and geometrical terms. For example, in the introduction of [Da] Davis remarks that the right-angled case is sufficient for the construction of most examples of interest in geometric group theory.

This chapter is divided as follows : in sections 5.2 and 5.3 we have the basic definitions and preliminaries. From section 5.4 to section 5.10 we prove the central theorem 5.15. At the beginning of section 5.4 we make a summary of the proof.

## 5.2 Notations and preliminaries

### 5.2.1 Basic definitions

Let $(W, \mathcal{S})$ be a not necessarily finite Coxeter system (with $\mathcal{S}$ a finite set) and $\mathcal{T} \subset W$ the set of reflections in $W$, *i.e.* the orbit of $\mathcal{S}$ under conjugation. Let $k$ be an infinite field of characteristic different from 2 and $V$ a finite dimensional $k$-representation of $W$. For $w \in W$, we denote by $V^w \subset V$ the set of $w-$fixed points. The following definition might be found in [So4] :

**Definition 5.1.** By a *reflection faithful representation* of $(W, \mathcal{S})$ we mean a faithful, finite dimensional representation $V$ of $W$ such that, for each $w \in W$, the subspace $V^w$ is an hyperplane of $V$ if and only if $w \in \mathcal{T}$.

From now on, we consider $V$ a reflection faithful representation of $W$. If $k = \mathbb{R}$, by the results of chapter 4, all the results in this chapter will stay true if we consider $V$ to be the geometric representation of $W$ (still if this representation in not always reflection faithful).

Let $\widehat{R} = R(V)$ be the algebra of regular functions on $V$. The action of $W$ on $V$ induces an action on $\widehat{R}$. For $s \in \mathcal{S}$ consider the $(\widehat{R}, \widehat{R})-$bimodule $\widehat{\theta}_s = \widehat{R} \otimes_{\widehat{R}^s} \widehat{R}$, where $\widehat{R}^s$ is the subspace of $\widehat{R}$ stabilized by $s$.

**Definition 5.2.** Soergel's category $\mathbf{B}(W, V) = \mathbf{B}$ is the full subcategory of all $(\widehat{R}, \widehat{R})-$bimodules with objects the finite direct sums of direct summands of bimodules of the type $\widehat{\theta}_{s_1} \otimes_{\widehat{R}} \widehat{\theta}_{s_2} \otimes_{\widehat{R}} \cdots \otimes_{\widehat{R}} \widehat{\theta}_{s_n}$ for $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathcal{S}^n$.

For simplicity, we will denote by $\widehat{\theta}_{s_1}\widehat{\theta}_{s_2} \cdots \widehat{\theta}_{s_n}$ the $(\widehat{R}, \widehat{R})-$bimodule $\widehat{\theta}_{s_1} \otimes_{\widehat{R}} \widehat{\theta}_{s_2} \otimes_{\widehat{R}} \cdots \otimes_{\widehat{R}} \widehat{\theta}_{s_n} \cong \widehat{R} \otimes_{\widehat{R}^{s_1}} \widehat{R} \otimes_{\widehat{R}^{s_2}} \cdots \otimes_{\widehat{R}^{s_n}} \widehat{R}$

We will use an auxiliary subcategory of $\mathbf{B}$, where we do not consider the direct summands :

**Definition 5.3.** $\widehat{\mathbf{B}}$ is the full subcategory of $\mathbf{B}$ with objects the finite direct sums of bimodules of the type $\widehat{\theta}_{s_1}\widehat{\theta}_{s_2} \cdots \widehat{\theta}_{s_n}$ for $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathcal{S}^n$.

### 5.2.2 Stability of $V'$

Let $\widehat{x}_s \in V^*$ be an equation of the hyperplane $H_s$ fixed by $s \in \mathcal{S}$. We have a decomposition $\widehat{R} \simeq \widehat{R}^s \oplus \widehat{x}_s \widehat{R}^s$, corresponding to

$$\widehat{R} \ni p = \frac{p + s\cdot p}{2} + \frac{p - s \cdot p}{2}.$$

We define $\widehat{P}_s(p) = (p + s\cdot p)/2$, $\widehat{I}_s(p) = (p - s\cdot p)/2$ and $\widehat{\partial}_s(p) = (p - s\cdot p)/2\widehat{x}_s$.

As $W$ acts trivially over

$$(\sum_{s\in\mathcal{S}} k\widehat{x}_s)^{\perp} = \bigcap_{s\in\mathcal{S}} H_s,$$

we have that $V' = \sum_{s\in\mathcal{S}} k\widehat{x}_s$ is stabilized by $W$, so we deduce the important fact that $\widehat{P}_t(\widehat{x}_s), \widehat{I}_t(\widehat{x}_s) \in V'$.

### 5.2.3 Some morphisms

We define four morphisms in $\widehat{\mathbf{B}}$ :

$$\begin{array}{rcl} \widehat{j}_r : \widehat{\theta}_r\widehat{\theta}_r & \to & \widehat{\theta}_r \\ \widehat{R} \otimes_{\widehat{R}^r} \widehat{R} \otimes_{\widehat{R}^r} \widehat{R} \ni p_1 \otimes p_2 \otimes p_3 & \mapsto & p_1 \widehat{\partial}_r(p_2) \otimes p_3; \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \widehat{m}_r : \widehat{\theta}_r & \to & \widehat{R} \\ \widehat{R} \otimes_{\widehat{R}^r} \widehat{R} \ni p_1 \otimes p_2 & \mapsto & p_1 p_2; \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\alpha}_r : \widehat{R} & \to & \widehat{\theta}_r\widehat{\theta}_r \\ 1 & \mapsto & \widehat{x}_r \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \widehat{x}_r. \end{array}$$

And finally for $m(s,r) = 2$ we have

$$\begin{array}{lcl} \widehat{f}_{s,r} : \quad \widehat{\theta}_s\widehat{\theta}_r & \to & \widehat{\theta}_r\widehat{\theta}_s \\ \widehat{R} \otimes_{\widehat{R}^s} \widehat{R} \otimes_{\widehat{R}^r} \widehat{R} \ni p_1 \otimes p_2 \otimes p_3 & \mapsto & p_1 \widehat{\partial}_s(p_2) \otimes 1 \otimes \widehat{x}_s p_3 + p_1 \widehat{P}_s(p_2) \otimes 1 \otimes p_3. \end{array}$$

We define the following morphisms from compositions of the previous ones :

- $\widehat{p}_r = (\mathrm{id} \otimes \widehat{j}_r) \circ (\widehat{\alpha}_r \otimes \mathrm{id}) : \widehat{\theta}_r \to \widehat{\theta}_r\widehat{\theta}_r$;
- $\widehat{\epsilon}_r = (\mathrm{id} \otimes \widehat{m}_r) \circ \widehat{\alpha}_r : \widehat{R} \to \widehat{\theta}_r$;
- $\widehat{x}_r = (m_r \circ \epsilon_r)/2 : \widehat{R} \to \widehat{R}$

By calculating with the explicit formulas we see that the morphism $\widehat{x}_r \in \mathrm{End}(\widehat{R})$ corresponds to the multiplication by $\widehat{x}_r \in \widehat{R}$.

### 5.2.4 Graphical notation

For sake of the clarity of the exposition, we will introduce a graphical notation for the morphisms. If we write $s_1\, s_2 \cdots s_n$ in a diagram, it means $\widehat{\theta}_{s_1}\, \widehat{\theta}_{s_2} \cdots \widehat{\theta}_{s_n}$. We identify $\widehat{R}$ with the blank space. Here we explain what symbol means what morphism :

$$\widehat{f}_{r,t} = \begin{array}{c} r\ t \\ \sqcup \\ t\ r \end{array}$$

$$\widehat{x}_s = \diamond$$

$$\widehat{\epsilon}_r = \ \widehat{r} \qquad\qquad \widehat{m}_r = \ x$$

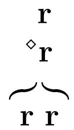
$$\widehat{p}_r = \begin{array}{c} r \\ \overbrace{r\ r} \end{array} \qquad\qquad \widehat{j}_r = \begin{array}{c} \underbrace{r\ r} \\ r \end{array}$$

$$\widehat{\alpha}_r = \overgroup{r\ r} \qquad\qquad \widehat{m}_r \circ \widehat{j}_r = \ \undergroup{r\ r}$$

Pictures are to be understood up to multiplication by non-zero scalars. If we write downwards a sequence of sequences of elements of $\mathcal{S}$, it means a chain of morphisms between the corresponding bimodules. For example if we write
$\begin{array}{c} r\ s\ t \\ t\ r\ s \\ r\ s \end{array}$ it means a chain of morphisms

$$\widehat{\theta}_r \widehat{\theta}_s \widehat{\theta}_t \to \widehat{\theta}_t \widehat{\theta}_r \widehat{\theta}_s \to \widehat{\theta}_r \widehat{\theta}_s.$$

As an example, $\begin{array}{c} r \\ \overbrace{r\ r} \\ \underbrace{\phantom{r\ r}} \\ r \end{array}$ means $\widehat{j}_r \circ \widehat{p}_r$. We lose some information when we look at the picture of $\widehat{x}_s$, because we do not know by which $\widehat{x}_s$ are we multiplying, but this will not be a problem for our purposes. So when we have a morphism we can draw its corresponding picture, but in general when we have a picture we cannot completely recover the morphism.

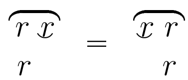
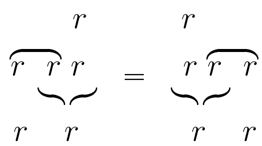
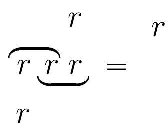
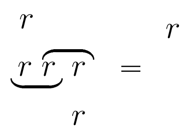
We will use bold letters when we mean a linear combination of this type of morphisms. For example  means $\sum_i \lambda_i \widehat{p}_r \circ (\widehat{x}_{s_i} \otimes \mathrm{id}_{\widehat{\theta}_r})$, with $\lambda_i \in \widehat{R}$ and $s_i \in \mathcal{S}$.

### 5.2.5 The tensor category $T_r$

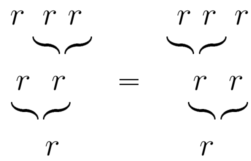
For an introduction to tensor categories and of strict tensor categories with a presentation by generators and relations, we refer the reader to [Ka, chapters XI and XII].

**Definition 5.4.** We define the strict tensor category $T_r$ by generators and relations. Its objects are generated by the unit $R$ and $\theta_r$ as tensor category. Its morphisms are generated by :
- $j_r : \theta_r \to \theta_r\theta_r$
- $m_r : \theta_r \to R$
- $\alpha_r : R \to \theta_r\theta_r$

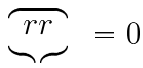
We define $p_r, \epsilon_r$ and $x_r$ by the same formulas as in section 5.2.3 without the hats. The relations defining $T_r$ are the following :

1. $\epsilon_r = (m_r \otimes \mathrm{id}) \circ \alpha_r$ 
2. $p_r = (j_r \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \alpha_r)$ 
3. $(\mathrm{id} \otimes (m_r \circ j_r)) \circ (\alpha_r \otimes \mathrm{id}) = \mathrm{id}$ 
4. $((m_r \circ j_r) \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \alpha_r) = \mathrm{id}$ 

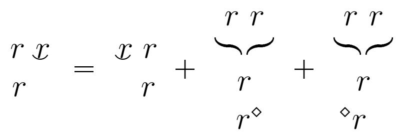
5. $j_r \circ (\mathrm{id} \otimes j_r) = j_r \circ (j_r \otimes \mathrm{id})$



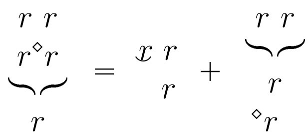
6. $j_r \circ \alpha_r = 0$



7. $\mathrm{id} \otimes m_r = m_r \otimes \mathrm{id} + j_r x_r - x_r j_r$



8. $j_r \circ (\mathrm{id} \otimes x_r \otimes \mathrm{id}) =$
   $= (m_r \otimes \mathrm{id}) - (x_r \otimes \mathrm{id}) \circ j_r$



The following definition is needed to state the proposition 5.6.

**Definition 5.5.** Let $A$ be a commutative ring and $\mathcal{C}$ an $A-$linear category. If $R$ is a commutative $A-$algebra, we define the category $\mathcal{C} \otimes_A R$ in the following way : it has the same objects as $\mathcal{C}$ and its morphisms are defined by the formula

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\otimes_A R}(M, N) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N) \otimes_A R$$

Let $\mathcal{A}$ be the subring of $\mathrm{End}_{T_r}(R)$ generated the set $\{x_s\}_{s\in\mathcal{S}}$.

**Proposition 5.6.** *Let $W$ be a Weyl group of type $A_1$ and let $\mathcal{A}$ be defined as above. The application $x_s \mapsto \widehat{x}_s$ extends to a morphism $\mathcal{A} \to \widehat{R}$ and there exists an equivalence of $\widehat{R}$-linear tensor categories between $\widehat{\mathbf{B}}(W)$ and $T_r \otimes_{\mathcal{A}} \widehat{R}$.*

This proposition is a special case of theorem 5.15 that will be proved in the sequel.

### 5.2.6 Some notation for the morphisms

Let $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathcal{S}^n$. In chapter 3 we constructed some basis (called BFL basis) as a right $\widehat{R}-$module of $\mathrm{Hom}_{(\widehat{R},\widehat{R})}(\widehat{\theta}_{s_1} \cdots \widehat{\theta}_{s_n}, \widehat{R})$. We will fix one such basis by taking (with the notations of chapter 3) $p(n, x, \bar{t})$ a $m-$tuple with $m$ minimal. To recall what is this basis, we start with a definition.

**Definition 5.7.** If they have a meaning, we define in $\mathrm{Hom}(\widehat{\theta}_{u_1} \cdots \widehat{\theta}_{u_l}, \widehat{\theta}_{t_1} \cdots \widehat{\theta}_{t_k})$ the following morphisms,

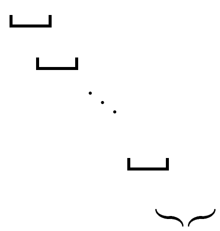
1. ${}^i\widehat{j} := \mathrm{id}^i \otimes \widehat{j}_{u_{i+1}} \otimes \mathrm{id}^{l-i-2}$
2. ${}^i\widehat{m} := \mathrm{id}^i \otimes \widehat{m}_{u_{i+1}} \otimes \mathrm{id}^{l-i-1}$
3. ${}^i\widehat{\alpha_s} := \mathrm{id}^i \otimes \widehat{\alpha}_r \otimes \mathrm{id}^{l-i}$
4. ${}^i\widehat{f} := \mathrm{id}^i \otimes \widehat{f}_{u_{i+1}, u_{i+2}} \otimes \mathrm{id}^{l-i-2}$
5. ${}^i\widehat{p} := \mathrm{id}^i \otimes \widehat{p}_r \otimes \mathrm{id}^{l-i-1}$
6. ${}^i\widehat{\epsilon_s} := \mathrm{id}^i \otimes \widehat{\epsilon}_r \otimes \mathrm{id}^{l-i-1}$
7. ${}^i\widehat{x_s} := \mathrm{id}^i \otimes \widehat{x}_r \otimes \mathrm{id}^{l-i-1}$

   Let $\mathrm{Mo} = \{j, m, \alpha_s, f, p, \epsilon_s, x_s\}$. For $d \in \mathrm{Mo}$ we define $\widehat{d}^i$ in almost the same way, the only difference is that we put $\mathrm{id}^i$ in the right. For example $\widehat{j}^i = \mathrm{id}^{l-i-2} \otimes \widehat{j}_{u_{i+1}} \otimes \mathrm{id}^i$.

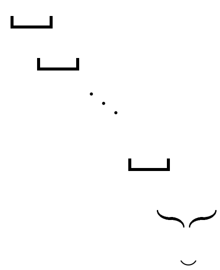
Now we are able to define $\widehat{m}(t), \widehat{\mathrm{ch}}(t)$ (chain) and $\widehat{\mathrm{cch}}(t)$ (complete chain) :

- $\widehat{m}(t) = \widehat{m}^t$

- $\widehat{\mathrm{ch}}(t) = \widehat{j}^t \circ \widehat{f}^{t+1} \circ \widehat{f}^{t+2} \circ \cdots \circ \widehat{f}^{t'}$



- $\widehat{\mathrm{cch}}(t) = \widehat{m}^t \circ \widehat{\mathrm{ch}}(t)$



**Definition 5.8.** Let No $= \{\widehat{m}, \widehat{\mathrm{ch}}, \widehat{\mathrm{cch}}\}$. We say that $(\widehat{g_q}(t_q), \cdots, \widehat{g_1}(t_1))$, with $\widehat{g_i} \in$ No, is a good $g$-expression of the morphism $\widehat{g_q}(t_q) \circ \cdots \circ \widehat{g_1}(t_1)$. If $t_{p+1} < t_p$ for all $1 \leqslant p \leqslant q$ then we say that the good $g$-expression is in the good order.

**Definition 5.9.** Let $\nu = (\widehat{g_q}(t_q), \cdots, \widehat{g_1}(t_1))$ be a good $g$-expression. If $m \leqslant q$ and $\widehat{g_m}(t_m) \circ \cdots \circ \widehat{g_1}(t_1) : \widehat{\theta}_{s_1} \cdots \widehat{\theta}_{s_n} \to \widehat{\theta}_{u_1} \cdots \widehat{\theta}_{u_l}$ we say that $\mathrm{Ima}(\nu, m) = (u_1, \ldots, u_l)$.

**Definition 5.10.** Let $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_p) \in \mathcal{S}^p$. We say that the $i^{th}$ element of $\bar{t}$ is of left type if there exists $j < i$, with $t_j = t_i$ and $m(t_r, t_i) = 2$ for all $j < r < i$.

### 5.2.7 A basis of the morphism spaces in the right-angled case

We start with a definition.

**Definition 5.11.** We say that a good $g$-expression in good order $(\widehat{g_q}(t_q), \cdots, \widehat{g_1}(t_1))$ satisfies property (P) if for all $1 \leqslant m \leqslant q$ such that the $t_m^{th}$ element of $\mathrm{Ima}(\nu, m)$ is of left type, we have $\widehat{g_{m+1}}(t_{m+1}) = \widehat{\mathrm{ch}}(t_m - 1)$ or $\widehat{\mathrm{cch}}(t_m - 1)$.

The following is a corollary of theorem 3.3 :

**Proposition 5.12.** *Let $(W, \mathcal{S})$ be a right-angled Coxeter system. Let $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathcal{S}^n$. The set*

$$\widehat{FL}(s_1, \ldots, s_n) = \{ \text{ good } g\text{−expressions in good order of morphisms in } \mathrm{Hom}(\widehat{\theta}_{s_1} \cdots \widehat{\theta}_{s_n}, \widehat{R}) \text{ satisfying property } (P)\}.$$

*is an $\widehat{R}$-basis of* $\mathrm{Hom}_{(\widehat{R},\widehat{R})}(\widehat{\theta}_{s_1} \cdots \widehat{\theta}_{s_n}, \widehat{R})$ *called "Light leaves basis".*

For every $M, N \in \widehat{\mathbf{B}}(W)$, we define the two morphisms :
- $\widehat{F_s}(M, N) : \mathrm{Hom}(\widehat{\theta}_s M, N) \to \mathrm{Hom}(M, \widehat{\theta}_s N)$ that sends $f$ to $(\mathrm{id}_{\widehat{\theta}_s} \otimes f) \circ (\widehat{\alpha}_s \otimes \mathrm{id}_M)$
- $\widehat{G_s}(M, N) : \mathrm{Hom}(M, \widehat{\theta}_s N) \to \mathrm{Hom}(\widehat{\theta}_s M, N)$ that sends $g$ to $((\widehat{m}_s \circ \widehat{j}_s) \otimes \mathrm{id}_N) \circ (\mathrm{id}_{\widehat{\theta}_s} \otimes g)$

They are inverse to each other (see lemma 2.4), so we can define a basis of $\mathrm{Hom}(\widehat{\theta}_{s_1} \cdots \widehat{\theta}_{s_n}, \widehat{\theta}_{t_1} \cdots \widehat{\theta}_{t_k})$ :

$$\widehat{FL}(s_1, \cdots, s_n; t_1, \cdots, t_k) := \widehat{F_{t_1}} \circ \cdots \circ \widehat{F_{t_{k-1}}} \circ \widehat{F_{t_k}} \circ \widehat{FL}(s_1, \cdots, s_n).$$

## 5.3 The tensor category T

### 5.3.1

**Definition 5.13.** Let $(W, \mathcal{S})$ be a right-angled Coxeter system and $V$ a reflection faithful representation of $W$. We will define the tensor category $\mathbf{T}(W, V)$ by generators and relations. Its objects are generated as tensor category by the unit $R$ and $\theta_r$ for all $r \in \mathcal{S}$. Its morphisms are generated by

- $j_r : \theta_r \to \theta_r\theta_r$
- $m_r : \theta_r \to R$
- $\alpha_r : R \to \theta_r\theta_r$
- $f_{sr} : \theta_s\theta_r \to \theta_r\theta_s$

We define $p_r, \epsilon_r$ and $x_r$ by the the same formulas as in section 5.2.3 without the hat. For $s, r \in \mathcal{S}$, let us write (see section 5.2.2)

$$\widehat{P}_t(\widehat{x}_s) = \sum_{r \in \mathcal{S}} \lambda^r_{t,s}\widehat{x}_r \quad , \quad \widehat{I}_t(\widehat{x}_s) = \mu_{t,s}\widehat{x}_t \quad \text{and} \quad \widehat{\partial}_t(\widehat{x}_s) = \frac{\widehat{I}_t(\widehat{x}_s)}{\widehat{x}_t}$$

We define in the same way

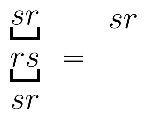
$$P_t(x_s) = \sum_{r \in \mathcal{S}} \lambda^r_{t,s}x_r \quad , \quad I_t(x_s) = \mu_{t,s}x_t \quad \text{and} \quad \partial_t(x_s) = \frac{I_t(x_s)}{x_t},$$

where $\lambda^r_{t,s}$ and $\mu_{t,s}$ are elements of the field $k$.

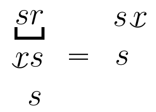
We define a monomial as a product of $x_s'$s, and a polynomial $\lambda \in \mathrm{End}(R)$ as a linear combination of monomials with coefficients in $k$. We will note $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{End}(R)$ the subring of polynomials.

The relations defining $T$ are the first 7 relations of definition 5.4 and the following new relations (from **a** to **e** we assume that $m(s,r) = m(r,t) = m(s,t) = 2$) :

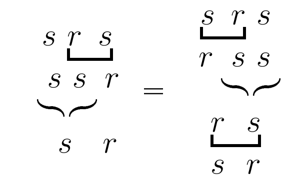
**a)** $f_{sr} \circ f_{r,s} = \mathrm{id}$




**b)** $(m_r \otimes \mathrm{id}) \circ f_{sr} = \mathrm{id} \otimes m_r$

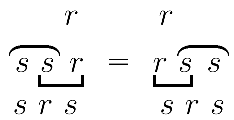


**c)** $(j_s \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes f_{r,s}) = f_{r,s} \circ (\mathrm{id} \otimes j_s) \circ (f_{sr} \otimes \mathrm{id})$



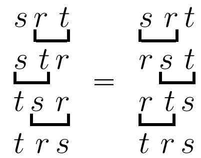
**d)** $(\mathrm{id} \otimes f_{sr}) \circ (\alpha_s \otimes \mathrm{id}) =$

$= (f_{r,s} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \alpha_s)$



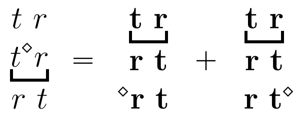
**e)** $(\mathrm{id} \otimes f_{sr}) \circ (f_{s,t} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes f_{r,t}) =$

$(f_{r,t} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes f_{s,t}) \circ (f_{sr} \otimes \mathrm{id})$



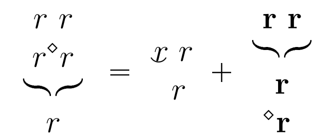
**f)** $f_{t,r} \circ (\mathrm{id}_{\theta_r} \otimes x_r \otimes \mathrm{id}_{\theta_r}) =$

$(P_t(x_s) \otimes \mathrm{id}_{\theta_r\theta_t}) \circ f_{t,r} + (\mathrm{id}_{\theta_r\theta_t} \otimes I_t(x_s)) \circ f_{t,r}$



**g)** $j_r \circ (\mathrm{id}_{\theta_r} \otimes x_r \otimes \mathrm{id}_{\theta_r}) = \partial_r(x_s) m_r \otimes \mathrm{id} +$

$+ (P_r(x_s) \otimes \mathrm{id} - x_s \partial_r(x_s) \otimes \mathrm{id}) \circ j_r$



*Remark* 5.14. We can say heuristically that **a**, **b**, **c** and **d** say that the $f_{sr}$ "commute" with everything, **e** is the hexagon relation typical in the symmetric monoidal categories. The last two relations tells us how to "take down" the $x_s'$s.

The ring $\mathrm{End}(R)$ is commutative because of general results in tensor categories (see [Ka, prop. X1.2.4]). As before, for $s \in \mathcal{S}$, we make $x_s \in \mathrm{Arr}(\mathbf{T}(W, V))$ to act in $\widehat{R}$ in the same way as $\widehat{x_s} \in \widehat{R}$ does. We deduce an action of $\mathcal{A}$ in $\widehat{R}$.

The following is the central result of this chapter :

**Theorem 5.15.** *Let $(W, \mathcal{S})$ be a right-angled Coxeter group. The functor that sends $\theta_s$ to $\widehat{\theta}_s$, $j_s \otimes 1$ to $\widehat{j}_s$, etc. is an equivalence of $\widehat{R}$-linear tensor categories between $\mathbf{T}(W, V) \otimes_{\mathcal{A}} \widehat{R}$ and $\widehat{\mathbf{B}}(W, V)$.*

**Proof.** We repeat all definitions in sections 5.2.6 and 5.2.7 taking out the hat, so we define ${}^i d$ and $d^i$, for $d \in$Mo, $m(t), \mathrm{ch}(t), \mathrm{cch}(t)$, we define a good $g$-expression and to be of left type, $FL$, $F_s(M,N)$ and $G_s(M,N)$

We will put $\mathbf{T} = \mathbf{T}(W,V) \otimes_{\mathcal{A}} R$ and $\widehat{\mathbf{B}} = \widehat{\mathbf{B}}(W,V)$. We define a functor $\mathfrak{Fu}$ from $\mathbf{T}$ to $\widehat{\mathbf{B}}$. We define $\mathfrak{Fu}(R) = \widehat{R}$, and for all $s \in \mathcal{S}$, $\mathfrak{Fu}(\theta_s) = \widehat{\theta}_s$. If $M$ and $M'$ are objects of $\mathbf{T}$, we define $\mathfrak{Fu}(M \otimes M') = \mathfrak{Fu}(M) \otimes \mathfrak{Fu}(M')$.

For all $s \in \mathcal{S}$ we define $\mathfrak{Fu}(j_s \otimes \lambda) = \widehat{j}_s\lambda$, $\mathfrak{Fu}(m_s \otimes \lambda) = \widehat{m}_s\lambda$, etc. As we know explicitly all the morphisms in $\widehat{\mathbf{B}}$, we can easily verify that all the relations are satisfied in $\widehat{\mathbf{B}}$, so by [Ka, proposition XII.1.4] we have that $\mathfrak{Fu}$ defines a tensor functor. By chapter 3 we know that the set of morphisms $\{\widehat{j}_r, \widehat{m}_r, \widehat{\alpha}_r, \widehat{f}_{s,r}\}$ generates (as tensor category) all the morphisms in $\widehat{\mathbf{B}}$. So we only need to prove that for all $M, N \in \mathbf{T}$, the map $\mathfrak{Fu} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(M,N) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbf{B}}}(\mathfrak{Fu}(M), \mathfrak{Fu}(N))$ is injective.

We start by proving the following
**Lemma 5.16.** *The applications $F_s(M,N)$ and $G_s(M,N)$ are inverse to each other*

**Proof.**

$$\begin{aligned}
F_s(M,N) \circ G_s(M,N)(g) &= F_s(M,N)(((m_s \circ j_s) \otimes \mathrm{id}_N) \circ (\mathrm{id}_{\theta_s} \otimes g)) \\
&= \{\mathrm{id}_{\theta_s} \otimes [((m_s \circ j_s) \otimes \mathrm{id}_N) \circ (\mathrm{id}_{\theta_s} \otimes g)]\} \circ (\alpha_s \otimes \mathrm{id}_M) \\
&= \left[(\mathrm{id}_{\theta_s} \otimes (m_s \circ j_s) \otimes \mathrm{id}_N) \circ (\mathrm{id}^2_{\theta_s} \otimes g)\right] \circ (\alpha_s \otimes \mathrm{id}_M) \\
&= (\mathrm{id}_{\theta_s} \otimes (m_s \circ j_s) \otimes \mathrm{id}_N) \circ (\alpha_s \otimes g) \\
&= (\mathrm{id}_{\theta_s} \otimes (m_s \circ j_s) \otimes \mathrm{id}_N) \circ (\alpha_s \otimes \mathrm{id}_{\theta_s} \otimes \mathrm{id}_N) \circ g \\
&= (\{[\mathrm{id}_{\theta_s} \otimes (m_s \circ j_s)] \circ (\alpha_s \otimes \mathrm{id}_{\theta_s})\} \otimes \mathrm{id}_N) \circ g \\
&= (\mathrm{id}_{\theta_s} \otimes \mathrm{id}_N) \circ g \\
&= g
\end{aligned}$$

If (0) is the relation $(f_1 \otimes g_1) \circ (f_2 \otimes g_2) = (f_1 \circ f_2) \otimes (g_1 \circ g_2)$ (relation satisfied in all tensor categories), then all but the next to last equality are derived from (0). The next to last equality is derived from relation 3 (see definition 5.4). In a similar way we prove that $G_s(M,N) \circ F_s(M,N)(f) = f$ using relation 4. □

**Definition 5.17.** Consider two morphisms $g : M_1 \to N_1$ and $f : M_2 \to N_2$. The relation $(f \otimes \mathrm{id}_{N_1}) \circ (\mathrm{id}_{M_2} \otimes g) = (\mathrm{id}_{N_2} \otimes g) \circ (f \otimes \mathrm{id}_{m_1})$, satisfied in all tensor categories, will be called commutation relation.

### 5.3.2

**Lemma 5.18.** *Let us suppose that for every sequence* $(s_1, \cdots, s_n)$*,* $f \in \mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}, R)$ *implies that* $f = \sum_i a_i \lambda_i$*, where* $a_i \in FL(s_1, \cdots, s_n)$ *and the* $\lambda_i$ *are polynomials. Then for every couple of sequences* $(s_1, \cdots, s_n)$ *and* $(t_1, \cdots, t_k)$*,* $f' \in \mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}, \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k})$ *implies that* $f' = \sum_i a'_i \lambda'_i$*, where* $a'_i \in FL(s_1, \cdots, s_n; t_1 \cdots t_k)$ *and the* $\lambda'_i$ *are polynomials.*

**Proof.** By hypothesis, $G_{t_k} \circ \cdots \circ G_{t_1}(f') = \sum_i a_i \lambda_i$, where $a_i \in FL(t_k, \cdots, t_1, s_1, \cdots, s_n)$ and the $\lambda_i$ are polynomials. Then

$$\begin{array}{rcl} f' & = & F_{t_1} \circ \cdots \circ F_{t_k} \circ G_{t_k} \circ \cdots \circ G_{t_1}(f') \\ & = & \sum_i F_{t_1} \circ \cdots \circ F_{t_k}(a_i \lambda_i) \\ & = & \{\sum_i F_{t_1} \circ \cdots \circ F_{t_k}(a_i)\} \lambda_i \end{array}$$

and by definition $\sum_i F_{t_1} \circ \cdots \circ F_{t_k}(a_i) \in FL(s_1, \cdots, s_n; t_1 \cdots t_k)$. □

### 5.3.3

From this lemma we can conclude that to complete the proof of theorem 5.15, it suffices to prove that for every sequence $(s_1, \cdots, s_n)$, $f \in \mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}, R)$ implies that $f = \sum_i a_i \lambda_i$, where $a_i \in FL(s_1, \cdots, s_n)$ and the $\lambda_i$ are polynomials.

**Definition 5.19.** For a sequence $s_1, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$, we will say that $\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}$ is a basic bimodule.

Every morphism between basic bimodules can be written as a sum of terms of the following type : ${}^{i_\omega}d_\omega \circ \cdots \circ {}^{i_1}d_1$, with $d_i \in \mathrm{Lo} = \{j_s, m_s, f_{sr}, \alpha_s \mid s, r \in \mathcal{S}\}$.

**Definition 5.20.** In the sequel an *expression* of a morphism $g$ between basic bimodules means a sequence $({}^{i_\omega}d_\omega, \ldots, {}^{i_1}d_1)$, with $d_i \in \mathrm{Lo}$, such that ${}^{i_\omega}d_\omega \circ \cdots \circ {}^{i_1}d_1 = g$. If $\nu$ is an expression of $g$, we define $\overline{\nu} = g$, and we say that $\nu$ is representing $g$. An *R-expression* is an expression representing a morphism from a basic bimodule to $R$. Sometimes we will consider a good $g$-expression simply like an expression in the obvious way. Finally, if we consider a formal $\mathcal{A}$-linear combination of expressions $\nu = \sum_{i \in I} \lambda_i \nu_i$, with $\lambda_i \in \mathcal{A}$, we define $\overline{\nu} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overline{\nu_i}$

**Definition 5.21.** If $({}^{i_\omega}d_\omega, \dots, {}^{i_1}d_1)$ is an expression of $g$, we say that the $k^{th}$ term of this expression is the morphism ${}^{i_k}d_k$. We say that ${}^{i_\omega}d_\omega$ is the last term of this expression, ${}^{i_1}d_1$ is the first term, and $\omega$ is the length of the expression.

When $i$ is not important, we will write $d$ instead of ${}^{i}d$, and when the $s$ is not important we will write for example $x$ for $x_s$ and $f$ for $f_{sr}$.

**Definition 5.22.** We define $G$ as the set of all $R$-expressions $({}^{i_\omega}d_\omega, \cdots, {}^{i_1}d_1)$ with $d_i \neq \alpha_s$ for all $i$ and for all $s \in \mathcal{S}$.

**Definition 5.23.** We will say that $\nu = ({}^{i_\omega}h_\omega, \dots, {}^{i_1}h_1)$ with $h_i \in \mathrm{Mo}$ for all $1 \leqslant i \leqslant \omega$ is a generalized expression of ${}^{i_\omega}h_\omega \circ \cdots \circ {}^{i_1}h_1$.

Let

$$ {}^{i_\omega}h_\omega \circ \cdots \circ {}^{i_1}h_1 = \sum_z {}^{p_{u,z}}h'_{u,z} \circ \cdots \circ {}^{p_{1,z}}h'_{1,z} $$

be one of the relations 1-8 or a-g defining the tensorial category $\mathbf{T}$, where all $h_i$ and $h'_{i,z}$ are elements of Mo. For all natural numbers $b \geqslant 0$ we say that $X = ({}^{i_\omega+b}h_\omega, \dots, {}^{i_1+b}h_1)$ is a left generalized expression and $\sum_z ({}^{p_{u,z}+b}h'_{u,z}, \dots, {}^{p_{1,z}+b}h'_{1,z})$ is a right generalized expression correspondig to $X$.

**Definition 5.24.** Let us consider $\nu$ a generalized expression. We will say that we *apply* to $\nu$ one of the relations 1-8 or a-g, defining the tensorial category $\mathbf{T}$, and we obtain a finite sum $\sum_i \nu'_i$ of generalized expressions if $\sum_i \nu'_i$ is the result of changing in $\nu$ a substring $X$ that is a left generalized expression by a right generalized expression corresponding to $X$.

## 5.4 A brief summary of what we will do

If we have an expression $\nu \in G$, we will start by defining $\nu\{\#m - \mathrm{bad}\}$ and $\nu\{\#j - \mathrm{bad}\} \in \mathbb{N}$, that are measures of how far is $\nu$ from being in the light leaves basis. We will see that an expression $\nu$ is in $FL(s_1, \dots, s_n)$ if and only if $\nu$ is a good $g$-expression in the good order, and $\nu\{\#m - \mathrm{bad}\} = \nu\{\#j - \mathrm{bad}\} = 0$.

In each section we start with an expression satisfying some properties. Then we apply some relations to this expression and we arrive to another expression (eventually an $\mathcal{A}$-linear combination of expressions) which represents the same morphism, but satisfying new properties. In the following list, we show what properties satisfies the expression with which we start in each section, and what properties satisfies the expression to which we arrive :

– *Section 4* : $\nu \in G \rightsquigarrow \nu \in G,\ \nu\{\#m - \text{bad}\} = 0$

– *Section 5* : $\nu \in G \rightsquigarrow \nu \in G,\ \nu$ a good $g$-expression

– *Section 6* : $\nu \rightsquigarrow \nu \in G$

– *Section 7* : $\nu$ a good $g$-expression $\rightsquigarrow$ $\nu$ a good $g$-expression in the good order

– *Section 8.1* : $\nu \in G \rightsquigarrow \nu$ a good $g$-expression in the good order with $\nu\{\#m - \text{bad}\} = 0$

– *Section 8.2* : $\nu$ a good $g$-expression in the good order with $\nu\{\#m - \text{bad}\} = 0 \rightsquigarrow \nu$ a good $g$-expression in the good order with $\nu\{\#m - \text{bad}\} = \nu\{\#j - \text{bad}\} = 0$

## 5.5 Some numbers associated to an expression

**Definition 5.25.** Let $\nu = ({}^{i_k}d_k, \cdots, {}^{i_1}d_1)$ be an expression for $g$, and let the sequence of integers $(i'_1, i'_2, \ldots, i'_k)$ be such that $\overline{\nu} = d_k^{i'_k} \circ \cdots \circ d_1^{i'_1}$. We define $\nu_r = ({}^{i_r}d_r, \cdots, {}^{i_1}d_1)$ the truncation of $\nu$ at $r$.

If $\overline{\nu_r} : \theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n} \to \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_p}$, we define $\widehat{\nu_r} = (t_1, \ldots, t_p) \in \mathcal{S}^p$.
For $b \in \{j, m, \alpha, f\}$ we define $\nu[b] = \{p; 1 \leqslant p \leqslant k, d_p = b\}$.

We say that $r$ is $m$-bad (resp. $j$-bad) for $\nu$ if $d_r = m$ (resp. $d_r = j$) and the $(i_r + 1)^{th}$ element of $\widehat{\nu_r}$ is of left type.

We define the following sets associated to $\nu$ :

– $A_m(\nu) = \{r\ ;\ r \text{ is } m\text{−bad for } \nu\}$

– $A_j(\nu) = \{r\ ;\ r \text{ is } j\text{−bad for } \nu\}$

We define the following elements associated with $\nu$ :

– $\nu\{\#m\text{−bad}\} = \text{card}(A_m(\nu)) \in \mathbb{N}$

– $\nu\{\#j - \text{bad}\} = \text{card}(A_j(\nu)) \in \mathbb{N}$

Let $\nu[j] = \{a_1, \ldots, a_p\}$ with $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$.

– $\nu\{\text{positions of } j'\text{s}\} = (a_1 + i'_{a_1}, \ldots, a_k + i'_{a_k}) \in \mathbb{N}^k$

– $\nu\{\#f\}$ =card$(\nu[f]) \in \mathbb{N}$

– $\nu\{f \text{ to the right}\} = \sum_{p\in\nu[f]}(i_p) \in \mathbb{N}$

– $\nu\{\text{depth } m \text{ and } j\} = \sum_{p\in\nu[m]\cup\nu[j]}(p) \in \mathbb{N}$

– $\nu\{m \text{ far from bottom}\} = \sum_{p\in\nu[m]}(k-p) \in \mathbb{N}$

– $\nu\{\min\ m - \text{bad}\} = \begin{cases} \min A_m(\nu) & \text{if } A_m(\nu) \neq \varnothing \\ 0 & \text{if } A_m(\nu) = \varnothing \end{cases}$

– $\nu\{\#m, j \text{ after min. } m-\text{bad}\} = \text{card}(\{p > \nu\{\min\ m-\text{bad}\} \mid i_p = 1 \text{ or } i_p = 2\}) \in \mathbb{N}$

– $\nu\{\text{function of } m - \text{bads}\} = (\nu\{\#m, j \text{ after min. } m - \text{bad}\}, i_{\nu\{\min\ m-\text{bad}\}}) \in \mathbb{N}^2$

– $\nu\{\max.\ j - \text{bad}\} = \begin{cases} \max A_j(\nu) & \text{if } A_j(\nu) \neq \varnothing \\ 0 & \text{if } A_j(\nu) = \varnothing \end{cases}$

If $p \in \nu[1]$ (resp. $p \in \nu[2]$) $\hat{\nu_p} = (t_1, \ldots, t_k)$ then we define $\pi_1(p)$ (resp. $\pi_2(p)$) $= \text{card}\{m \leqslant i_p \mid t_m = t_{i_{p+1}}\}$. Finally we define

$$\nu\{m, j \text{ equal to left}\} = \sum_{p\in\nu[1]\cup\nu[2]} (\pi_1(p) + \pi_2(p)) \in \mathbb{N}$$

## 5.6 Restriction to the case $\nu\{\#m-\text{bad}\} = 0$

**Proposition 5.26.** *For every $\nu \in G$ there exists a set $\Delta$, polynomials $\lambda_\delta$ and elements $\nu_\delta \in G$ such that $\overline{\nu} = \overline{\sum_{\delta\in\Delta} \lambda_\delta \nu_\delta}$ and such that $\nu_\delta\{\#m - \text{bad}\} = 0$ for all $\delta \in \Delta$.*

**Proof.**

We will start by constructing $\mathcal{F}_1(\nu), \mathcal{F}_2(\nu)$, linear combinations of expressions such that $\overline{\mathcal{F}_i(\nu)} = \overline{\nu}$ for $1 \leqslant i \leqslant 2$.

$\mathcal{F}_1(\nu)$ **: "Taking out the $x_r$'s"**

**Definition 5.27.** If $\nu = ({}^{i_p}d_p, \cdots, {}^{i_{r+1}}d_{r+1}, {}^{i}x_s, {}^{i_r}d_r, \cdots, {}^{i_1}d_1)$ is a generalized expression, with $d_l \in \mathrm{Lo} - \{\alpha_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ for all $1 \leqslant l \leqslant p$, we say that $\nu \in G_r^p$.

Let $\nu \in G_r^p$. We take $x_s$ as far to the left as possible (or down in the picture) with commutation relations. If it does not arrive to the last term, we obtain a string of the form $\begin{array}{c} s\ s \\ \underbrace{s^{\diamond} s}_{s} \end{array}$ or $\begin{array}{c} t\ r \\ \underline{t^{\diamond} r} \\ r\ t \end{array}$. If we are in the first case we apply relation **g** and if we are in the second case, we apply relation **f** and we obtain

$$\mathcal{F}_1^1(\nu) = \sum_{i\in I_1} w_i^1 + \sum_{b\in B_1} g_b^1,$$

with $\overline{\nu} = \overline{\mathcal{F}_1^1(\nu)}$, and where $I_1$ and $B_1$ are finite sets, $g_b^1 \in G$ (corresponding to $\begin{array}{c} x\ r \\ \ \ r \end{array}$ in relation **g**) and

$$w_i^1 \in G^p_{r_i^1}, \text{ with } r_i^1 \geqslant r+1 \tag{5.6.1}$$

We define $\mathcal{F}_1^n$ inductively : let $\mathcal{F}_1^n(\nu) = \sum_{i\in I_n} w_i^n + \sum_{b\in B_n} g_b^n$. We define $\mathcal{F}_1^{n+1}(\nu) = \sum_{i\in I_n} \mathcal{F}_1^1(w_i^n) + \sum_{b\in B_n} g_b^n$. By induction and inequality (5.6.1) we deduce that $w_i^N \in G^p_{r_i^N}$, with $r_i^N \geqslant r+N$. We conclude that for $N \gg 0$, $\mathcal{F}_1^N(\nu) = \mathcal{F}_1^{N+1}(\nu)$. We define $\mathcal{F}_1(\nu) = \mathcal{F}_1^N(\nu)$.

As $\mathcal{F}_1(\nu) = \sum_{i\in I_N} w_i^N + \sum_{b\in B_N} g_b^N$ with $w_i^N \in G^p_{p+1}$, and as $w \in G^p_{p+1} \Rightarrow w = \lambda g$ with $\lambda$ a polynomial and $g \in G$, we have :

**Lemma 5.28.** *There exists polynomials $\lambda_i$ and elements $g_i \in G$ such that $\mathcal{F}_1(\nu) = \sum_{i\in I} \lambda_i g_i$,*

*Remark* 5.29. Essentially when we take the $x_r'$s out of $\nu$ the only thing we change in the picture of $\nu$ is eventually changing some $j'$s by $m'$s.

### 5.6.1 $\mathcal{F}_2(\nu)$

Let $\nu \in G$. If $\nu\{\min m - \text{bad}\} = 0$ we define $\mathcal{F}_2(\nu) = \nu$. Now let us suppose $\nu\{\min m - \text{bad}\} \neq 0$. By definition, in the $\nu\{\min m - \text{bad}\}^{th}$ position of $\nu$

we have a picture like this one : $\cdots r \cdots x$, where $r$ commutes with all the elements between the two $r'$s. By relation **a.** applied several times we obtain

$$\cdots r \cdots x = \begin{array}{l} \cdots\ \underline{r}\ \cdots \qquad r\cdots \\ \quad \cdots\ \underline{r}\ \cdots \quad r\cdots \\ \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\quad \underline{r}\quad r \\ \qquad\qquad\qquad r\ \ x\ \cdots \\ \qquad\qquad \cdots\ \underline{r}\ \cdots \\ \qquad\qquad \therefore \\ \qquad \cdots\ \underline{r}\ \cdots \\ \ \cdots\ \underline{r}\ \cdots \end{array}$$

Or in formulas : ${}^y m = {}^x f \circ {}^x f \circ {}^{x+1} f \circ \cdots \circ {}^{y-2} f \circ {}^y m \circ {}^{y-2} f \circ \cdots \circ {}^{x+1} f \circ {}^x f$. In the right hand side of the picture we apply relation 7. We obtain $\overline{\nu} = \overline{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}$, where $\nu_1 \in G$ and $\nu_2, \nu_3 \in G_r^p$ for some $r$. We define $\mathcal{F}_2^1(\nu) = \nu_1 + \mathcal{F}_1(\nu_2) + \mathcal{F}_1(\nu_3)$.

If we write $\mathcal{F}_2^1(\nu) = \sum_i \lambda_i^1 g_i^1$, as

$$\begin{aligned} &\text{card}(\{1 \leqslant p \leqslant \nu\{\min m - \text{bad}\} \mid i_p = 1 \text{ or } i_p = 2\})+ \\ &\qquad + \nu\{\#m, j \text{ after min. } m - \text{bad}\} = \text{card}(\{p \mid i_p = 1 \text{ or } i_p = 2\}) \end{aligned}$$

is a constant for all the expressions of $\overline{\nu}$, by construction we have

$$\mathcal{F}_2^1(g_i)\{\text{function of } m - \text{bads}\} < \nu\{\text{function of } m - \text{bads}\}. \tag{5.6.2}$$

If $\mathcal{F}_2^N(\nu) = \sum_i \lambda_i^N g_i^N$, we define $\mathcal{F}_2^{N+1}(\nu) = \sum_i \lambda_i^N \mathcal{F}_2^1(g_i^N)$, and by equation 5.6.2 and the fact that $\nu\{\text{function of } m - \text{bads}\} \geqslant (0,0)$ we conclude that there exists $N \gg 0$ such that $\mathcal{F}_2^N(\nu) = \mathcal{F}_2^{N+1}(\nu)$. We then define $\mathcal{F}_2^N(\nu) = \mathcal{F}_2(\nu)$. This means in particular that if $\mathcal{F}_2(\nu) = \sum_{\delta \in \Delta} \lambda_\delta \nu_\delta$, then $\nu_\delta\{\#m - \text{bad}\} = 0$, which proves proposition 5.26 □

# 5.7

**Proposition 5.30.** *For every $\nu \in G$ there exists a set $\Delta$, polynomials $\lambda_\delta$ and elements $\nu_\delta \in G$ such that $\overline{\nu} = \overline{\sum_{\delta \in \Delta} \lambda_\delta \nu_\delta}$ and such that*
– $\nu_\delta\{\#m - \text{bad}\} = 0$ *for all $\delta \in \Delta$.*

– *If the $k^{th}$ term of $\nu_\delta$ is ${}^{i}f$ then the $(k+1)^{th}$ term is ${}^{i+1}f$ or ${}^{i+1}j$.*

*Remark* 5.31. The second condition means that $\nu_\delta$ is a good $g$-expression.

### 5.7.1

**Proof.**

We start with some definitions.

**Definition 5.32.** – Relation $\begin{array}{c} s\ \underbracket{s\ r} \\ \underbracket{s\ r}\ s \\ r\ \underbrace{s\ s} \\ r\quad s \end{array} = \begin{array}{c} \underbrace{s\ s}\ r \\ \underbracket{s\ r} \\ r\ s \end{array}$ can be deduced from **a.** and **c.** and will be called **c'.**

– Relation $\begin{array}{c} \underbracket{r\ s} \\ s\ x \\ s \end{array} = \begin{array}{c} x\ s \\ s \end{array}$ can be deduced from **a.** and **b.** and will be called **b'.**

– A commutation relation of type $\begin{array}{c} f \\ j \end{array} = \begin{array}{c} j \\ f \end{array}$ or $\begin{array}{c} f \\ m \end{array} = \begin{array}{c} m \\ f \end{array}$ will be called a relation **x.**

– A commutation relation of type $\begin{array}{c} {}^{i}f \\ {}^{j}f \end{array} = \begin{array}{c} {}^{j}f \\ {}^{i}f \end{array}$ will be called relation **y.**

### 5.7.2

**Definition 5.33.** For $\nu \in G$ we define $Y_\nu$ to be the set of $\nu' \in G$ such that there exists a natural number $n$ and a sequence $(\nu_n, \ldots, \nu_2, \nu_1)$ satisfying that $\nu_1 = \nu$, $\nu_n = \nu'$ and $\nu_{i+1}$ is obtained by applying a relation **y.** to $\nu_i$ for all $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

We say that $\nu$ satisfies property (Q) if for all $\nu' \in Y_\nu$ the relations **a.**, **b.**, **b'.**, **c.**, **c'.**, **d.** or **x.** cannot be applied to $\nu'$. In other words, if $\nu' \in Y_\nu$, there is no generalized left expression in $\nu'$ corresponding to relations **a.**, **b.**, **b'.**, **c.**, **c'.**, **d.** or **x.**.

For $\nu \in G$ we will define $\mathcal{F}_3(\nu)$.

**Lemma 5.34.** *Let $\nu \in G$. There exists an expression $\mathcal{F}_3(\nu)$, with $\overline{\mathcal{F}_3(\nu)} = \overline{\nu}$, satisfying property (Q).*

**Proof.**

We start with a definition.

**Definition 5.35.** Let $\nu \in G$. If with **y.** relations applied to $\nu$ it is possible to apply one of the relations **a.**, **b.**, **b'.**, **c.**, **c'.**, **d.** or **x.**, we say $\nu \in L$.

If with **y.** relations applied to $\nu$ it is possible to apply one of the relations **a.**, **b.**, **b'.**, **c.**, **c'.**, **d.** or **x.**, we do it and we call $\mathcal{F}_3^1(\nu)$ the resulting expression. This is not well defined because there might be many ways of doing this, but we choose one of these ways arbitrarily. We define recursively $\mathcal{F}_3^n(\nu) = \mathcal{F}_3^1(\mathcal{F}_3^{n-1}(\nu))$.

In the following table the symbol $-$ means that the corresponding relation decreases the corresponding $\nu\{-\}$, the symbol $-0$ means that sometimes it decreases it and sometimes it maintains it equal and the symbol 0 means it always maintains it equal. By definition $\nu\{\text{positions of } j'\text{s}\} \in \mathbb{N}^k$, $\nu\{\#f\}, \nu\{f \text{ to the right}\}, \nu\{\text{depth } m \text{ and } j\} \in \mathbb{N}$.

| | $\nu\{$positions of $j's\}$ | $\nu\{\#f\}$ | $\nu\{f$ to the right$\}$ | $\nu\{$depth $m$ and $j\}$ |
|---|---|---|---|---|
| **c'.** $\begin{matrix} s\ s\ r \\ s\ r\ s \\ r\ s\ s \\ r\ \ s \end{matrix} = \begin{matrix} s\ s\ r \\ s\ \ r \\ r\ \ s \end{matrix}$ | — | | | |
| **c.** $\begin{matrix} s\ r\ s \\ s\ s\ r \\ s\ \ r \end{matrix} = \begin{matrix} s\ r\ s \\ r\ s\ s \\ r\ \ s \\ s\ \ r \end{matrix}$ | — | | | |
| **a.** $\begin{matrix} sr \\ rs \\ sr \end{matrix} = \begin{matrix} sr \end{matrix}$ | —0 | — | | |
| **b.** $\begin{matrix} sr \\ xs \\ s \end{matrix} = \begin{matrix} sx \\ s \end{matrix}$ | —0 | — | | |
| **b'.** $\begin{matrix} r\ s \\ s\ x \\ s \end{matrix} = \begin{matrix} x\ s \\ s \end{matrix}$ | —0 | — | | |
| **d.** $\begin{matrix} s\,r\,t \\ s\,t\,r \\ t\,s\,r \\ t\,r\,s \end{matrix} = \begin{matrix} s\,r\,t \\ r\,s\,t \\ r\,t\,s \\ t\,r\,s \end{matrix}$ | 0 | 0 | — | |
| **x.** $\begin{matrix} f \\ m \text{ or } j \end{matrix} = \begin{matrix} m \text{ or } j \\ f \end{matrix}$ | —0 | 0 | —0 | — |
| **y.** $\begin{matrix} {}^{i}f \\ {}^{j}f \end{matrix} = \begin{matrix} {}^{j}f \\ {}^{i}f \end{matrix}$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

This table shows that there exists some $N \in \mathbb{N}$ such that $\mathcal{F}_3^N(\nu) \notin L$. We put $\mathcal{F}_3(\nu) = \mathcal{F}_3^N(\nu)$, and this proves lemma 5.34 $\square$

### 5.7.3

**Lemma 5.36.** *Let $\nu \in G$. If the $k^{th}$ term of $\mathcal{F}_3(\nu)$ is ${}^{i}f$ then the $(k+1)^{th}$ term is ${}^{i+1}f$ or ${}^{i+1}j$.*

**Proof.** Let $\mathcal{F}_3(\nu) = ({}^{\omega_k}d_k, \cdots, {}^{\omega_1}d_1)$. We use the following notation : if $a < b$ are two natural numbers, then $[a, b] = \{a, a+1, a+2, \ldots, b\}$.

Let $a(1) < b(1) < a(2) < b(2) < \ldots < a(r) < b(r)$ be such that

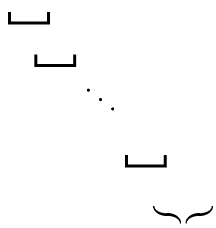
$$\mathcal{F}_3(\nu)[4] = \bigcup_{i=1}^{r} [a(i), b(i)]$$

Let us fix $1 \leqslant l \leqslant r$. We only need to prove

**A** $d_{b(l)+1} = j, \omega_{b(l)+1} = \omega_{b(l)} + 1$

**B** For $a_l \leqslant b(l) - m \leqslant b_l$ we have $\omega_{b(l)-m} = \omega_{b(l)} - m$.

This means that between the $a(l)^{th}$ term and the $(b(l)+1)^{th}$ term, the picture looks like this :



We start by proving **A**. Because of the definition of $b(l)$, the $b(l+1)^{th}$ term is a $j$ or $m$ (it can not be an $\alpha$ because $\nu \in G$). Because of the relation **y.** the $b(l)^{th}$ term does not commute with the $b(l+1)^{th}$ term, so we have four possibilities for the $b(l+1)^{th}$ term :

(1) ${}^{\omega_{b(l)}}m$ (2) ${}^{\omega_{b(l)}+1}m$ (3) ${}^{\omega_{b(l)}-1}j$ (4) ${}^{\omega_{b(l)}+1}j$

The cases (1), (2) and (3) are impossible respectively by relations **b.**, **b'.** and **c.**, so we have proved **A**.

Now we prove **B** by induction on $m$. We suppose we have proved it for $m$, we will prove it for $m+1$. We will use the following picture.

$a_l \rightarrow$

$$\cdots \mathbf{x} \quad \mathbf{x} \quad \blacksquare \quad \mathbf{a} \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{e} \quad \cdots \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{c}' \quad \mathbf{c} \quad \mathbf{x} \quad \mathbf{x} \quad \mathbf{x} \cdots$$

$b_l - m \rightarrow$

$$\ddots$$

$b_l + 1 \rightarrow$

In this picture we have drawn from the $(b_l - m)^{th}$ term to the $(b_l + 1)^{th}$ term. In the $(b_l - m - 1)^{th}$ term we have put some letters, and we will explain what they mean. We put $e = b_l - m - 2$. Let ${}^{\omega_e}d_e \circ \cdots \circ {}^{\omega_1}d_1 : \theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n} \rightarrow \theta_{u_1} \cdots \theta_{u_q}$.

Let us say that a letter $\mathbf{n} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{c}', \mathbf{c}\}$ is in the place that corresponds to $\theta_{u_p}$. Then if the $(b_l - m - 1)^{th}$ term is ${}^{p-1}f$, by taking this term down in the picture (using relation $\mathbf{y}$ all the times we are allowed), we can use relation $\mathbf{n}$, and by definition of $\mathcal{F}_3(\nu)$, this is not allowed. We conclude that if $\blacksquare$ is in the place that corresponds to $\theta_{u_i}$, then the $(b_l - m - 1)^{th}$ term of $\mathcal{F}_3(\nu)$ is ${}^{i-1}f$, and so we prove $\mathbf{B}$ and lemma 5.36. $\square$

Lemma 5.36 joint with the properties of $\mathcal{F}_2$ allows us to finish the proof of proposition 5.30. $\square$

## 5.8 Elimination of the $\alpha'$s

We start this section by introducing some relations that will be useful for proving proposition 5.38 :

**Proposition 5.37.** *We have the following equalities :*

**N1** $(\mathrm{id} \otimes f_{r,s}) \circ (f_{r,s} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \alpha_s) = (\alpha_s \otimes \mathrm{id}) : \theta_r \rightarrow \theta_s\theta_s\theta_r$

**N2** $(\mathrm{id} \otimes j_s) \circ (f_{sr} \otimes \mathrm{id}) = f_{sr} \circ (j_s \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes f_{r,s}) : \theta_s\theta_r\theta_s \rightarrow \theta_r\theta_s$

**N3** $(\mathrm{id} \otimes f_{r,s}) \circ (f_{r,s} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes p_s) = (p_s \otimes \mathrm{id}) \circ f_{r,s} : \theta_r\theta_s \rightarrow \theta_s\theta_s\theta_r$

**N4** $f_{r,s} \circ (\mathrm{id} \otimes \epsilon_s) = \epsilon_s \otimes \mathrm{id} : \theta_r \rightarrow \theta_s\theta_r$

**N5** $(m_r \otimes \mathrm{id}) \circ p_r = (\mathrm{id} \otimes m_r) \circ p_r = \mathrm{id}$

$$\begin{array}{c} r \\ \overbrace{x\ r} \\ r \end{array} = \begin{array}{c} r \\ \overbrace{r\ x} \\ r \end{array} = r$$

**N6** $j_r \circ (\mathrm{id} \otimes \epsilon_r) = j_r \circ (\epsilon_r \otimes \mathrm{id}) = \mathrm{id}$

$$\begin{array}{c} r \\ \underbrace{r\ \widehat{r}} \\ r \end{array} = \begin{array}{c} r \\ \underbrace{\widehat{r}\ r} \\ r \end{array} = r$$

**N7** $(\mathrm{id} \otimes j_r) \circ (p_r \otimes \mathrm{id}) =$

$= (j_r \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes p_r) = p_r \circ j_r$

$$\begin{array}{c} r\ r\ \phantom{r} \\ \overbrace{r\ r}\ r \\ \phantom{r}\ \underbrace{r\ r} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \\ \\ \\ r \quad r \end{array} = \begin{array}{c} \phantom{r}\ r\ r \\ r\ \overbrace{r\ r} \\ \underbrace{r\ r}\ \phantom{r} \\ r \quad r \end{array} = \begin{array}{c} \underbrace{r\ r} \\ r \\ \overbrace{r\ r} \end{array}$$

**Proof.** We will give in order the relations needed to prove each one of this equations (CR means commutation relations) :

– **N1** : **e**, **a**
– **N2** : **c′**, **a**
– **N3** : **e**, **N2**, CR, **a**
– **N4** : CR, **e**, **a′**
– **N5** : 2, 3
– **N6** : CR, 2, 3
– **N7** : 2, CR, 2, 5, CR

□

**Proposition 5.38.** *Let $\tau = \overline{g \circ \xi}$ with $g \in G$, $\xi =^i \alpha_s$. There exists a set $\Pi$ and for each $\pi \in \Pi$ a polynomial $\lambda_\pi$ and $g_\pi \in G$ such that*

$$\tau = \overline{\sum_{\pi \in \Pi} \lambda_\pi g_\pi}$$

**Proof.**

We start with a lemma

**Lemma 5.39.** *For proving proposition 5.38 it suffices to prove it for $\xi =^i p_s$ and $\xi =^i \epsilon_s$.*

**Proof.** We have that $\mu_1 = (\mathcal{F}_3(g), {}^i\alpha_s)$ is an expression of the morphism $\tau$. With commutation relations we change $\mu_1$ in $\mu_2$, an expression where the $\alpha$ is as far as possible to the left (in the picture is in the lowest place possible). Let us say that in $\mu_2$ we have that ${}^p\alpha_s$ is the $k^{th}$ term. We have seven possibilities for the $(k+1)^{th}$ term : (1) ${}^{p-1}j$, (2) ${}^{p}j$, (3) ${}^{p+1}j$, (4) ${}^{p}m$, (5) ${}^{p+1}m$, (6) ${}^{p+1}f$ and (7) ${}^{p-1}f$.

- In the case (1), by relation 2 we are in the case $\xi =^p p_s$.
- In the case (2), by relation 6 we find that $\tau = 0$.
- In the case (3) by definition of $p_s$ we are in the case $\xi =^p p_s$.
- In the case (4) by relation 1 we are in the case $\xi =^p \epsilon_s$.
- In the case (5) by definition of $\epsilon_s$ we are in the case $\xi =^p \epsilon_s$.
- In the case (6), by remark 5.31 we have that there exists $c$ such that the $(k+r)^{th}$ term is ${}^{p+r}f$ for every $0 \leqslant r < c$ and ${}^{p+c}j$ for $r = c$. But with the relation **N2** we can easily verify the following equality by induction :

  $${}^{p+c}j \circ {}^{p+c-1}f \circ \ldots \circ {}^{p+1}f = ({}^{p+c-1}f \circ {}^{p+c-2}f \circ \cdots \circ {}^{p+1}f) \circ {}^{p+1}j \circ ({}^{p+2}f \circ {}^{p+2}f \circ \cdots \circ {}^{p+c}f)$$

  So if we replace the left hand side of this equation by it is right hand side we can take the $\alpha$ more to the left, and we find a new expression of $\tau$ : $(g_1, {}^{p+1}j, {}^{p}\alpha, g_2)$, with $g_1, g_2 \in G$ and by the definition of $p_s$ we get to the case $\xi =^p p_s$.
- In the case (7), by the remark 5.31 we have that the $(k+2)^{th}$ term is ${}^{p}f$. So if we apply relation **N1** we arrive to a new expression $\mu_3$ of $\tau$ : $\mu_3 = (g_1, {}^{p-1}\alpha_s, g_2)$, $g_1, g_2 \in G$, where $g_1$ is a good $g$-expression, the $\alpha$ is still in the $k^{th}$ term and $\mu_3$ has strictly less terms than $\mu_2$. Now we repeat the process of taking in $\mu_3$ the $\alpha$ as far to the left as possible and if we arrive another time to the case (7), we find a corresponding $\mu_4$. If we repeat this process enough times, finally we will arrive to one of the other 6 cases. This finishes the proof of the lemma.

$\square$

**Proof of the proposition 5.38 for $\xi =^i p_s$.** The proof of this case is very similar to the proof of lemma 5.39, but we use different relations. We have that $\mu_1 = (\mathcal{F}_3(g), {}^{i}p_s)$ is an expression of the morphism $\tau$. With commutation relations we change $\mu_1$ in $\mu_2$, an expression where the $p$ is as far to the left as possible. Let us say that in $\mu_2$ we have that the $k^{th}$ term is ${}^{p}p_s$. We have seven possibilities for the $(k+1)^{th}$ term : (1) ${}^{p-1}j$, (2) ${}^{p}j$, (3) ${}^{p+1}j$, (4) ${}^{p}m$, (5) ${}^{p+1}m$, (6) ${}^{p+1}f$ and (7) ${}^{p-1}f$.

- In the cases (1) and (3) we use relation **N7**, and we have that the $p$ is more to the left than before.

- In the case (2) we have that $\tau = 0$ because the relations 5 and 6 tells us that $j_s \circ p_s = 0$.
- In the cases (4) and (5) we use relation **N5** and we find an expression of $\tau$ that is in $G$.
- In the case (6), by a similar argument to that of case (6) of lemma 5.39, we go back to case (3).
- In the case (7) by a similar argument to that of case (7) of lemma 5.39, but using the relation **N3** instead of relation **N1** we see that, as in the cases (1), (3) and (6), the $p$ is more to the left than before. So if we repeat enough times we will go back to one of the cases that are left, this means, cases (2), (4) or (5).

**Proof of the proposition 5.38 for $\xi =^i \epsilon_s$.** We have that $\mu_1 = \mathcal{F}_3(g) \circ^i \epsilon_s$ is an expression of morphism $\tau$. With commutation relations we change $\mu_1$ in $\mu_2$, an expression where the $\epsilon$ is as far to the left as possible. Let us say that in $\mu_2$ we have that the $k^{th}$ term is ${}^p\epsilon_s$. We have five possibilities for the $(k+1)^{th}$ term : (1) ${}^{p-1}j$, (2) ${}^pj$, (3) ${}^pm$, (4) ${}^pf$ and (5) ${}^{p-1}f$.

- In the cases (1) and (2), using relation **N6** we find an expression of $\tau$ that is in $G$.
- In the case (4), by a similar argument to that of the case (6) in lemma 5.39, we go back to case (2).
- In the case (5), by a similar argument to that of the case (7) in lemma 5.39, but using relation **N4** instead of relation **N1** we see that the $\epsilon$ is more to the left than before. So, if we repeat enough times we will go back to one of the cases that are left.
- Case (3) is treated in section 5.6.

□

By using proposition 5.38 repeatedly we have the following

**Corollary 5.40.** *Let $\nu$ be an R-expression. There exists a set $\Pi$ and for each $\pi \in \Pi$ a polynomial $\lambda_\pi$ and $g_\pi \in G$ such that*

$$\overline{\nu} = \overline{\sum_{\pi \in \Pi} \lambda_\pi g_\pi}$$

## 5.9 Good order

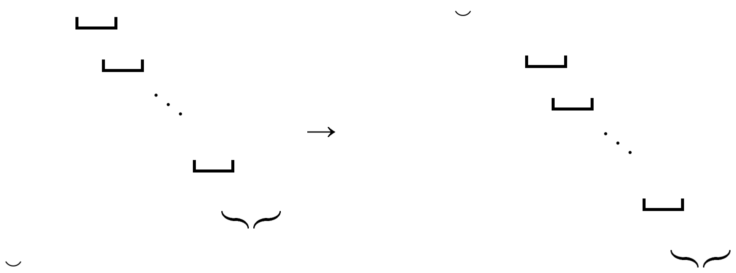
The purpose of this section is to change a good $g$-expression into a good $g$-expression in good order.

**Proposition 5.41.** *Let $t > t'$ and $\alpha, \beta \in \{m, ch, cch\}$. There exists $u$ and $u'$ such that $\alpha(t) \circ \beta(t') = \beta(u') \circ \alpha(u)$.*

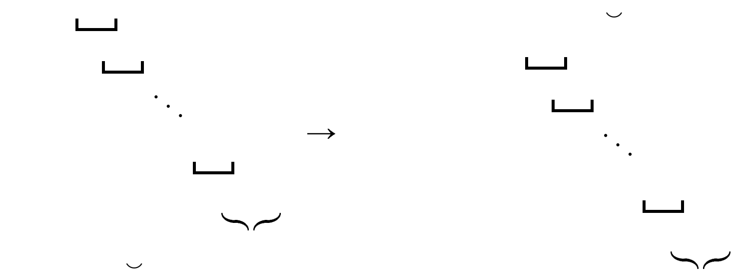
**Proof.**

• Let us consider the case $\beta = \text{ch}$ or cch and $\alpha = m$. We have two possible cases. In the first one $m(t)$ commutes with $\beta(t')$, and in the second one they do not commute, so we use commutation relations and relation **b.**

– $m(t) \circ \beta(t') = \beta(t') \circ m(t+1)$



– $m(t) \circ \beta(t') = \beta(t') \circ m(t)$



• The case $i = 1, 2$ or 3 and $k = 1$ is easy because $\alpha(t)$ commutes with $m(t')$.

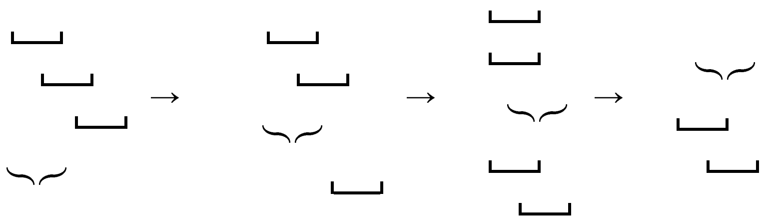
• The last case is $i = 2$ or 3 and $k = 2$ or 3. We will only treat the case $i = 2, k = 2$, the other ones are similar. We will prove that $\text{ch}(t) \circ \text{ch}(t') = \text{ch}(t') \circ \text{ch}(t)$. For this we need two preliminary lemmas.

**Lemma 5.42.** *If $f = {}^{i_q} f \circ \cdots \circ^{i_1} f$, $g = {}^{k_p} f \circ \cdots \circ^{i_1} f \in \mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}, \theta_{u_1} \cdots \theta_{u_l})$, then $f = g$.*

**Proof.** Relations **a.** and **d.** are exactly the relations defining the symmetric group. $\square$

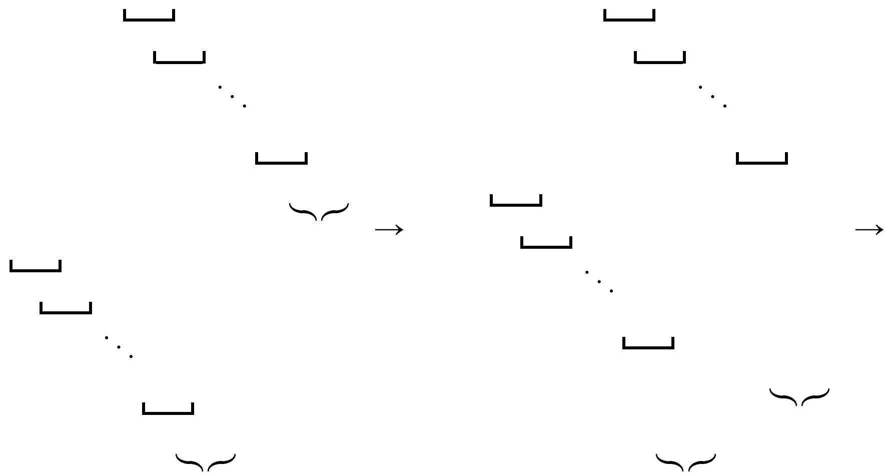
**Lemma 5.43.** *The following expressions represent the same morphism :* $(j^i, f^{i-2}, f^{i-1}, f^i)$ *and* $(f^i, f^{i+1}, j^{i+1})$.

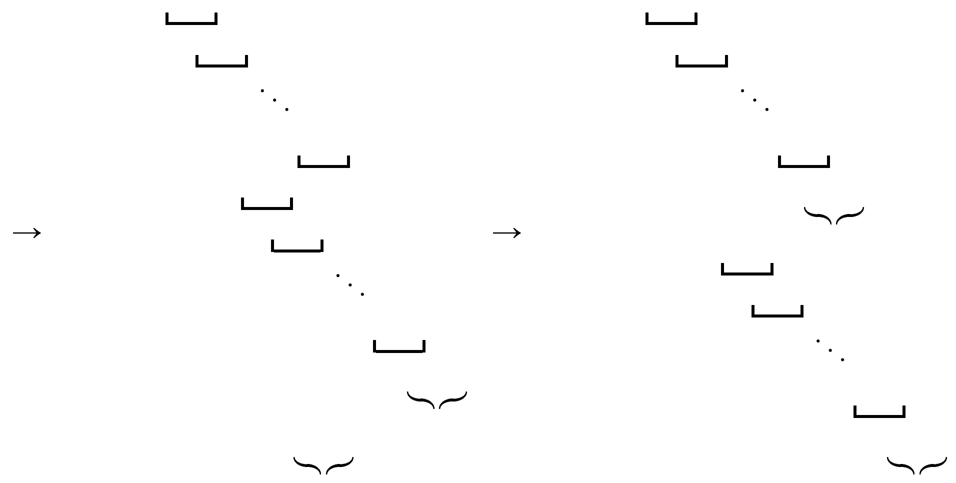
**Proof.** In the following chain of relations we apply respectively commutation relations, relation **c.** and relation **a.** :



$\square$

Now we are able to finish the case $i = k = 2$. In the following chain of equalities we apply respectively commutation relations to take an $j$ down, then lemma 5.42 for reordering a composition of $f'$s, and finally with commutation relations we take up an $j$ and apply lemma 5.43 :





$\square$

**Definition 5.44.** If $\nu$ is a good $g$-expression we will name $\mathcal{F}_4(\nu)$ the good $g$-expression in the good order such that $\overline{\mathcal{F}_4(\nu)} = \overline{\nu}$

## 5.10 Conclusion of the proof of theorem 5.15

### 5.10.1

**Definition 5.45.** If $\tau = \sum_i g_i \lambda_i$, with $I$ a finite set, $\lambda_i$ polynomials and $g_i \in G$, we define $\mathcal{F}_3(\tau) = \sum_i \mathcal{F}_3(g_i)\lambda_i$ and $\mathcal{F}_4(\tau) = \sum_i \mathcal{F}_4(g_i)\lambda_i$.

**Definition 5.46.** Let $\nu \in G$. We define $\mathcal{F}_5^1(\nu) = \mathcal{F}_4\mathcal{F}_3\mathcal{F}_2(\nu)$. This is well defined, because $\mathcal{F}_2(\nu)$ is a linear combination of elements of $G$ and $\mathcal{F}_3(\nu')$ is a good $g$-expression.

We define inductively $\mathcal{F}_5^n(\nu)$ : If $\mathcal{F}_5^n(\nu)\{\#m - \text{bad}\} \neq 0$ we define $\mathcal{F}_5^{n+1}(\nu) = \mathcal{F}_5^1\mathcal{F}_5^n(\nu)$ and if $\mathcal{F}_5^n(\nu)\{\#m - \text{bad}\} = 0$, we define $\mathcal{F}_5^{n+1}(\nu) = \mathcal{F}_5^n(\nu)$.

**Proposition 5.47.** $\mathcal{F}_5^n(\nu)$ *stabilizes for* $n$ *large.*

**Proof.** Let us suppose it doesn't stabilize. This means that for all $n \in \mathbb{N}$, we have $\mathcal{F}_5^n(\nu)\{\#m - \text{bad}\} \neq 0$. So we apply infinitely many times relation 7 in this process. When we apply relation 7 to an expression we obtain a sum of three expressions, the first one is $\begin{smallmatrix} x & r \\ & r \end{smallmatrix}$, the second one $\begin{smallmatrix} \underbrace{r\ r} \\ r \\ r^{\diamond} \end{smallmatrix}$, and the third one is $\begin{smallmatrix} \underbrace{r\ r} \\ r \\ {}^{\diamond}r \end{smallmatrix}$. In this three expressions relation 7 always decreases strictly $\nu\{m, j \text{ equal to left}\} \in \mathbb{N}$ and the other relations used in $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ and $\mathcal{F}_4$ don't change $\nu\{m, j \text{ equal to left}\}$. To see this, we make a brief review of all relations used in defining $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ and $\mathcal{F}_4$ :

– $\mathcal{F}_2$ : commutation relations, **a.** in the opposite sense, 7, **g**, **f**
– $\mathcal{F}_3$ : **a.**, **b.**, **b'.**, **c.**, **c'.**, **d.**, **x.**, **y.**
– $\mathcal{F}_4$ : commutation relations, **a.**,**b.**, **c.**, **d.**

So we have a contradiction, which allows us to conclude the proof. $\square$

*Remark* 5.48. As $\mathcal{F}_4(\nu)$ is a good $g$-expression in the good order, $\mathcal{F}_5(\nu)$ is a good $g$-expression in the good order satisfying $\mathcal{F}_5(\nu)\{\#m - \text{bad}\} = 0$.

## 5.10.2

We start by a useful reformulation of proposition 5.12 in our terminology :

**Corollary 5.49.** *Let $(W, \mathcal{S})$ be a right-angled Coxeter system. Let $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathcal{S}^n$. We have the equality of sets :*

$$FL(s_1, \ldots, s_n) = \{\nu \textit{ good g-expressions in } \mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}, R) \textit{ in good order, with } \nu\{\#m{-}\text{bad}\} = \nu\{\#j - \text{bad}\} = 0\}$$

In section 5.3.3 we showed that in order to prove Theorem 5.15 we only need to prove the following proposition :

**Proposition 5.50.** *Let $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathcal{S}^n$. If $f \in \mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}, R)$ then there exists $I$ a finite set and for $i \in I$, $a_i \in FL(s_1, \ldots, s_n)$ and $\lambda_i$ polynomials such that $f = \sum_i a_i \lambda_i$.*

As $f$ is a linear combination over $A$ of $R$-expressions, we can restrict our attention to the case where $f$ is an $R$-expression. By corollary 5.40 we can restrict to the case $f \in G$. By proposition 5.47 and remark 5.48 we can restrict to the case where $f$ is a good $g$-expression in the good order and with $\nu\{\#m{-}\text{bad}\} = 0$. So, the following lemma allows us to conclude the proof of Theorem 5.15 :

**Lemma 5.51.** *If $\nu$ is a good $R$-expression in the good order and $\nu\{\#m-\text{bad}\} = 0$, then $\nu\{\#j - \text{bad}\} = 0$.*

**Proof.** Suppose $\nu\{\#j - \text{bad}\} \neq 0$. Let us put $k = \nu\{\text{max. } j - \text{bad}\}$. Let ${}^{z}j_s$ be the $k^{\text{th}}$ term of $\nu$. The $(k+1)^{\text{th}}$ term of $\nu$ can not be ${}^{z}m_s$, because $\nu\{\#m-\text{bad}\} = 0$.

Let us define by induction the natural number $N_p$ for $r \geqslant p \geqslant 1$ (where $r$ will be defined in the process). We define $N_1 = z + 1$. Let us suppose that we have defined $N_p$.

- If the $(k+p)^{\text{th}}$ term of $\nu$ is ${}^{i}m$, then $N_{p+1} = N_p$.
- Suppose that the $(k+p)^{\text{th}}$ term of $\nu$ is ${}^{i}j$. If $i > N_p - 1$ then $N_{p+1} = N_p$ and if $i = N_p - 1$ then $r = p$.
- Suppose that the $(k+p)^{\text{th}}$ term of $\nu$ is ${}^{i}f$. If $i \notin \{N_p - 1, N_p - 2\}$ then $N_{p+1} = N_p$. If $i = N_{p-1}$ then $N_{p+1} = N_p + 1$ and if $i = N_{p-2}$ then $N_{p+1} = N_p - 1$.

The fact that $\nu$ is a good $R$-expression in the good order allows us to conclude that $N_p$ is well defined. By construction, the $N_p^{\text{th}}$ element of $\widehat{\nu}_{k+p}$ is always the same element of $\mathcal{S}$, it is of left type, and it is evident that $r$ is a finite number. This contradicts the definition of $\nu\{\text{max. } j - \text{bad}\}$, so we have a contradiction. We conclude that $\nu\{\#j - \text{bad}\} = 0$. $\square$

# Chapitre 6

# A new basis for some Hecke algebras

All the Coxeter groups considered in this chapter are extra large type Coxeter groups (*i.e.* $m(s,r) > 3$ pour tout $s, r \in \mathcal{S}$). In this chapter we will construct, for a reduced expression $\bar{s}$ of $x \in W$, a morphism $f_{\bar{s}} \in \mathrm{End}(\theta_{\bar{s}})$, and we will prove that the image $f_{\bar{s}}(\theta_{\bar{s}})$ is (modulo isomorphism) independent of the reduced expression we have chosen, and that it is an element of Soergel's category that we call $A_x$. We consider the image by $\eta$ of the set $\{A_x\}_{x\in W}$ and we obtain a basis of the Hecke algebra.

## 6.1

Until the end of this chapter we will fix a reduced expression $\bar{s} = (s_1, \cdots, s_n) \in \mathcal{S}^n$ of an element of $W$. Every morphism will be assumed to be of $f$-type (see definition 2.16). We define

$$\mathrm{cores}(\bar{s}) := \left\{ \begin{array}{c|l} & \bullet\ \text{if } i, i+2 \in I, \text{then } s_i = s_{i+2} \\ \text{interval} & \bullet\ b-a+1 = m(s_a, s_{a+1}) - 2 \\ I = (a, a+1, \dots, b) & \bullet\ l(s_1 s_2 \cdots s_{a-1} s_{a+1}) < l(s_1 s_2 \cdots s_{a-1}) \\ & \bullet\ l(s_{b-1} s_{b+1} s_{b+2} \cdots s_n) < l(s_{b+1} s_{b+2} \cdots s_n) \end{array} \right\}$$

If $C = (a, \dots, b), C' = (a', \dots, b') \in \mathrm{cores}(\bar{s})$ we say that $C < C'$ if and only if $a < a'$, and we say that the distance from $C$ to $C'$ is $D(C, C') = a' - b$. As $\bar{s}$ is a reduced expression, if $C < C'$, $D(C, C') \geqslant 1$.

*Remark* 6.1. If $\bar{s}$ and $\bar{t}$ are two different reduced expressions of the same element in $W$ then $\mathrm{cores}(\bar{s}) = \mathrm{cores}(\bar{t})$. As we can go from $\bar{s}$ to $\bar{t}$ with a composition of braid relations it is enough to verify this when they differ in one braid relation and this is trivial.

**Definition 6.2.** If $C = (a, \ldots, b) \in \mathrm{cores}(\bar{s})$ we define first($C$)=$a$ and last($C$)=$b$. The core $C$ is called right (resp. left) core if $s_{b-1} \neq s_{b+1}$ and $s_{a-1} = s_{a+1}$ (resp. $s_{b-1} = s_{b+1}$ and $s_{a-1} \neq s_{a+1}$). It is called empty core if $s_{b-1} \neq s_{b+1}$ and $s_{a-1} \neq s_{a+1}$ and it is called filled core if it is none of the previous ones (*i.e.* $s_{b-1} = s_{b+1}, s_{a-1} = s_{a+1}$).

The following lemma is easy :

**Lemma 6.3.** *Let* $\mathrm{cores}(\bar{s}) = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ *with* $C_1 < C_2 < \ldots < C_k$*, and* $g \in \mathrm{End}(\theta_{\bar{s}})$ *of* $f$*-type. Suppose that* $D(C_i, C_{i+1}) \geqslant 2$ *for some* $1 \leqslant i \leqslant k$*. If last($C_i$)=$d-1$,* $\bar{s'} = s_1 \cdots s_d$*,* $\bar{s''} = s_{d+1} \cdots s_n$*, then there exists* $g' \in \mathrm{End}(\theta_{\bar{s'}})$*,* $g'' \in \mathrm{End}(\theta_{\bar{s''}})$ *such that* $g = g' \otimes g''$*.*

The following proposition is very important for the sequel.

**Proposition 6.4.** *Let us suppose that* $C', C'' \in \mathrm{cores}(\bar{s})$*,* $C' < C''$*,* $D(C', C'') = 1$ *and if last($C'$)=$d-1$ then* $s_{d-2} = s_d = s_{d+2}$*. Let us put* $\bar{s'} = s_1 \cdots s_d$*,* $\bar{s''} = s_d \cdots s_n$*. If* $g \in \mathrm{End}(\theta_{\bar{s}})$ *is of* $f$*-type, there exists* $g' \in \mathrm{End}(\theta_{\bar{s'}})$ *and* $g'' \in \mathrm{End}(\theta_{\bar{s''}})$ *of* $f$*-type such that*

$$g = (g' \otimes \mathrm{id}^{n-d+1}) \circ (\mathrm{id}^d \otimes g'') = (\mathrm{id}^d \otimes g'') \circ (g' \otimes \mathrm{id}^{n-d+1}) \qquad (6.1.1)$$

*Remark* 6.5. We remark that it is equivalent to say $s_{d-2} = s_d = s_{d+2}$ or to say that $C'$ is a left or a filled core and $C''$ is a right or a filled core.

*Proof.* Let $b+1$ =first($C'$) and $g = {}^{i_k}f \circ \cdots \circ {}^{i_2}f \circ {}^{i_1}f$. Consider the set $X = \{1 \leqslant p \leqslant k \mid i_p = b-1 \text{ or } i_p = d-1\}$ and let $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2t}\}$ with $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2t}$. As $s_{d-2} = s_d = s_{d+2}$, we can easily deduce by induction on $c$ that $i_{x_{2c}} = i_{x_{2c-1}}$, and that is why $X$ has an even number of elements. We define $x_0 = 0$ and $x_{2t+2} = k+1$. For $0 \leqslant c \leqslant t$ we define the sets

$$Y_c = \{x_{2c} < p \leqslant x_{2c+2} \mid i_p < d-1\}$$

and

$$Z_c = \{x_{2c} < p \leqslant x_{2c+2} \mid i_p \geqslant d-1\}.$$

For $1 \leqslant c \leqslant t$ we define $L_c = {}^{i_\alpha}f \circ {}^{i_\beta}f \circ \cdots \circ {}^{i_\gamma}f$ where the elements of $Y_c$ are $\alpha < \beta < \ldots < \gamma$, and $R_c = {}^{i_\delta}f \circ {}^{i_\epsilon}f \circ \cdots \circ {}^{i_\omega}f$ where the elements of $Z_c$ are

$\delta < \epsilon < \ldots < \omega$. We define $M = \theta_{s_1}\theta_{s_2}\cdots\theta_{s_{d-2}}$ and $N = \theta_{s_d}\theta_{s_{d+1}}\cdots\theta_{s_n}$. So we have $\theta_{\bar{s}} = M \otimes_{R^{s_{d-1}}} N$. By proposition 2.19 we have that for all $0 \leqslant c \leqslant t$ if $m \otimes n \in M \otimes_{R^{s_{d-1}}} N$, then $L_c(m \otimes n) \subseteq m \otimes N$ and $R_c(m \otimes n) \subseteq M \otimes n$, so if $0 \leqslant a \leqslant t$ we have

$$R_a \circ L_c = L_c \circ R_a. \tag{6.1.2}$$

If we define $g' = L_t \circ L_{t-1} \circ \cdots \circ L_0$ and $g'' = R_t \circ R_{t-1} \circ \cdots \circ R_0$ then equation (6.1.2) allows us to finish the proof □

Before we state the following theorem we have to make a definition.

**Definition 6.6.** Let $C \in \mathrm{cores}(\bar{s})$. We say that a tuple of elements $\bar{\alpha} = (i_k, \ldots, i_2, i_1)$, $k \in \mathbb{N}$ is $\bar{s}$-compatible if the morphism $g = {}^{i_k}f \circ \cdots \circ {}^{i_2}f \circ {}^{i_1}f \in \mathrm{End}(\theta_{\bar{s}})$ is well defined, and in this case we say that $g$ is the morphism associated to $\bar{\alpha}$. If $\bar{\alpha}$ is $\bar{s}$-compatible we define $N_{\bar{\alpha}}(C) = \mathrm{card}(\{p \mid i_p = \mathrm{first}(C) - 2\})$, where card stands for cardinality.

**Theorem 6.7.** *Let $\bar{\alpha}$ and $\bar{\beta}$ be two $\bar{s}$-compatible tuples, and $g$, $h$ the morphisms associated to $\bar{\alpha}$ and $\bar{\beta}$ respectively. We have that $g = h$ if and only if for all $C \in \mathrm{cores}(\bar{s})$ we have $N_{\bar{\alpha}}(C) = 0 \Leftrightarrow N_{\bar{\beta}}(C) = 0$.*

**Proof.** The "only if" part is evident. We will prove the "if" part. Let $\mathrm{cores}(\bar{s}) = \{C_1, \ldots, C_k\}$ with $C_1 < C_2 < \ldots < C_k$. We will prove the theorem by induction over $k$.

It is easy to see using the definition of $f_{sr}$ that $f_{sr} \circ f_{r,s} \circ f_{sr} = f_{sr}$ and this allows us to prove the theorem for $k = 1$.

Suppose the theorem is true for $k-1$ we will prove it for $k$. If there exists $1 \leqslant i \leqslant k-1$ such that $D(C_i, C_{i+1}) \geqslant 2$, then lemma 6.3 and the induction hypothesis allows us to conclude. So we suppose $D(C_i, C_{i+1}) = 1$ for all $1 \leqslant i \leqslant k-1$.

If there exists $1 \leqslant i \leqslant k$ such that $N_{\bar{\alpha}}(C_i) = 0$ we can conclude by induction, so we suppose $N_{\bar{\alpha}}(C_i) \neq 0$ for all $1 \leqslant i \leqslant k$.

Let $(j_i)_{1 \leqslant i \leqslant \gamma}$ be an ascending sequence of numbers such that the set of filled cores is exactly $\{C_{j_i}\}_{1 \leqslant j \leqslant \gamma}$. By proposition 6.4 and the fact that $D(C_i, C_{i+1}) = 1$ we see that if $C_i$ is a filled core, then $C_{i+1}$ can not be a filled core, so $j_{i+1} - j_i \geqslant 2$. We can conclude that the set $\mathcal{P}_i = \{j_i + 1, j_i + 2, \ldots, j_{i+1} - 1\}$ is non empty for all $1 \leqslant i \leqslant \gamma$.

Let us suppose that there exists an integer $p$ such that for all $i \in \mathcal{P}_i$ the core $C_i$ is not an empty core. So if $i \in \mathcal{P}_i$, then $C_i$ is either left or right core. It is not possible for $C_i$ to be a right core and $C_{i+1}$ to be a left core because as $D(C_i, C_{i+1}) = 1$ this would contradict the definition of a core. So if there are left and right cores in $\mathcal{P}_i$ then there exists an integer $v$ such that if $j_p + 1 \leqslant i \leqslant v$ then $C_i$ is a left core and if $v < i < j_{p+1}$ then $C_i$ is a right core. We are in the case of proposition 6.4 with $C' = C_v$ and $C'' = C_{v+1}$ (see remark 6.5), so we can conclude by induction hypothesis. If $\mathcal{P}_i$ has only left cores (resp. only right cores) we are once again in the case of proposition 6.4 with $C' = C_{j_{p+1}-1}$ and $C'' = C_{j_{p+1}}$ (resp. $C' = C_{j_p}$ and $C'' = C_{j_p+1}$).

So we suppose that for all integers $1 \leqslant p < \gamma$ there exists some $i_p \in \mathcal{P}_i$ such that the core $C_{i_p}$ is an empty core. There can not be two elements $i, i' \in \mathcal{P}_i$ with $C_i$ and $C_{i'}$ empty cores, because this would contradict the definition of $C_i$ and $C_{i'}$ being cores, so $i_p$ is well defined for $1 \leqslant p < \gamma$. It is clear that if $j_p < i < i_p$ then $C_i$ is a left core and if $i_p < i < j_{p+1}$ then $C_i$ is a right core.

Let $\bar{\alpha} = (\alpha_w, \ldots, \alpha_1)$, so $g = {}^{\alpha_w}f \circ \cdots \circ {}^{\alpha_2}f \circ {}^{\alpha_1}f$. If we consider the set of all $\bar{s}$-compatible tuples satisfying that $g$ is their associated morphism, with the partial order $\lessdot$ given by the length of the tuple, we can assume without loss of generality that $\bar{\alpha}$ and $\bar{\beta}$ are minimal for $\lessdot$ .

**Lemma 6.8.** *For all* $1 \leqslant p < \gamma$ *we have* $N_{\bar{\alpha}}(C_{j_p}) = 2$.

*Proof.* Let us suppose the contrary, this is $N_{\bar{\alpha}}(C_{j_p}) \geqslant 4$. By definition this means that the set $Z = \{1 \leqslant i \leqslant w \mid \alpha_i = \mathrm{first}(C_{j_p}) - 2\}$ has more than three elements. We name $a = \mathrm{first}(C_{j_p}) - 2$. Let $z_1 < z_2 < z_3$ be the first three elements of $Z$. As $C_{j_p}$ is a filled core, we have that $C_{j_p - 1}$ is either a right or an empty core and $C_{j_p+1}$ is either a left or an empty core, we conclude that ${}^{\alpha_{z_3}}f$ commutes with ${}^{\alpha_{z_3-1}}f \circ \cdots \circ {}^{\alpha_{z_2+2}}f \circ {}^{\alpha_{z_2+1}}f$, so by doing the corresponding commutation relations we can put the second and the third ${}^{a}f$ together. In formules this is :

$$g = {}^{\alpha_w}f \circ \cdots \circ \widehat{{}^{\alpha_{z_3}}f} \circ \cdots \circ {}^{\alpha_{z_2+2}}f \circ {}^{\alpha_{z_2+1}}f \circ \left({}^{a}f \circ {}^{a}f\right) \circ {}^{\alpha_{z_2-1}}f \circ \cdots \circ {}^{\alpha_2}f \circ {}^{\alpha_1}f$$

where $\widehat{{}^{\alpha_{z_3}}f}$ means that we skip this term. Because of proposition 2.19 we conclude that $({}^{a}f \circ {}^{a}f)$ commutes with ${}^{\alpha_{z_2-1}}f \circ \cdots \circ {}^{\alpha_{z_1+2}}f \circ {}^{\alpha_{z_1+1}}f$, so again with commutation relations we can put the first three ${}^{a}f$ together, but the fact that ${}^{a}f \circ {}^{a}f \circ {}^{a}f = {}^{a}f$ contradicts the minimality of $\bar{\alpha}$ in the $\lessdot$ order. So this proves lemma 6.8. $\square$

**Definition 6.9.** For $1 \leqslant i \leqslant k$ we define $f(C_i) = {}^{y}f$, where $y = \mathrm{first}(C_i) - 2$. We define $i_{k+1} = \gamma$. For $1 \leqslant p \leqslant \gamma + 1$, we consider the set

$$V_p^{\mathrm{left}} = \{1 \leqslant i \leqslant w \mid {}^{\alpha_i}f = f(C_q) \text{ for } j_p < q \leqslant i_p\},$$

and put $V_p^{\text{left}} = \{v_1, v_2, \dots, v_{u(p)}\}$ with $v_1 < v_2 < \dots < v_{u(p)}$. We define a sequence $\bar{\alpha}^{\text{left}}(p) = (n_1, n_2, \dots, n_{u(p)})$ in the following way : if ${}^{\alpha_{v_i}}f = f(C_q)$, we define $n_q = q - j_p$.

We will say that there is a $p$-inflection at $i$ if $n_i = n_{i+1}$.

**Lemma 6.10.** *Let $1 \leqslant p \leqslant \gamma$. If there is a $p$-inflection at $i$ and ${}^{\alpha_{v_i}}f = f(C_b)$, then $b = i_p$.*

*Proof.* As we assumed $\bar{\alpha}$ to be minimal in the $\lessdot$ order, we know that it is not possible to have $n_i = n_{i+1} = n_{i+2}$. As we assumed that $C_i$ is a left core for $j_p < i < i_p$, we deduce that if $n_{i-1} = n_i$, then $n_{i+1} = n_i - 1$, if $n_{i-1} < n_i$ then $n_{i+1}$ can be equal to $n_i$ or to $n_i + 1$ and finally, if $n_{i-1} > n_i$ then $n_{i+1}$ can be equal to $n_i$ or to $n_i - 1$.

Let us suppose that there is a $p$-inflection at $1 \leqslant i \leqslant u$, and let ${}^{\alpha_{v_i}}f = f(C_b)$ with $b < i_p$. As $N_{\bar{\alpha}}(C_{b+1}) > 0$, by the preceding paragraph we have that there will exist an $l > i + 1$ such that $n_l = n_i$ ; we suppose $l$ minimal with this property. Because of the proposition 2.19 we deduce that with commutation relations we can take the term ${}^{\alpha_{v_l}}f$ of $g$ to be immediately before the term ${}^{\alpha_{v_{i+1}}}f \circ {}^{\alpha_{v_i}}f$ of $g$, and this contradicts the minimality of $\bar{\alpha}$ in the $\lessdot$ order, thus proving the lemma. $\square$

From this lemma we conclude the important fact :

$$\bar{\alpha}^{\text{left}}(p) = (1, 2, \dots, u(p)/2, u(p)/2, \dots, 2, 1), \tag{6.1.3}$$

where $u(p)/2 = i_p - j_p$.

We now repeat definition 6.9 but from the right :

**Definition 6.11.** We define $i_0 = 1$. We now consider, for $0 \leqslant p \leqslant \gamma$

$$V_p^{\text{right}} = \{1 \leqslant i \leqslant w \mid {}^{\alpha_i}f = f(C_q) \text{ for } i_p \leqslant q < j_{p+1}\},$$

and put $V_p^{\text{right}} = \{d_1, d_2, \dots, d_{e(p)}\}$ with $d_1 < d_2 < \dots < d_{e(p)}$. We define a sequence $\bar{\alpha}^{\text{right}}(p) = (m_1, m_2, \dots, m_{e(p)})$ in the following way : if ${}^{\alpha_{d_i}}f = f(C_q)$, we define $m_q = j_{p+1} - q$.

By similar arguments as in lemma 6.10 we conclude that

$$\bar{\alpha}^{\text{right}}(p) = (1, 2, \dots, e(p)/2, e(p)/2, \dots, 2, 1), \tag{6.1.4}$$

where $e(p)/2 = j_{p+1} - i_p$.

The two equations (6.1.3) and (6.1.4) allows us to conclude that for all $1 \leqslant p \leqslant \gamma + 1$

$$\bar{\alpha}^{\text{left}}(p) = \bar{\beta}^{\text{left}}(p) = (1, 2, \ldots, u(p)/2, u(p)/2, \ldots, 2, 1) \tag{6.1.5}$$

and for all $0 \leqslant p \leqslant \gamma$

$$\bar{\alpha}^{\text{right}}(p) = \bar{\beta}^{\text{right}}(p) = (1, 2, \ldots, e(p)/2, e(p)/2, \ldots, 2, 1) \tag{6.1.6}$$

To finish the proof of Theorem 6.7, we will only need equations (6.1.5) and (6.1.6).

Before we can prove this fact we need some definitions.

**Definition 6.12.** We will say that a morphism $\delta \in \mathrm{Hom}(\theta_{t_1} \cdots \theta_{t_p}, \theta_{r_1} \cdots \theta_{r_p})$ is a $p$-morphism if there exists a sequence of natural numbers $(a_1, \ldots, a_p)$ such that $\delta = \mathrm{id}^{a_1} \otimes f \otimes \mathrm{id}^{a_2} \otimes f \otimes \cdots \mathrm{id}^{a_{p-1}} \otimes f \otimes \mathrm{id}^{a_p}$.

**Definition 6.13.** Let $g = (g_m, g_{m-1}, \ldots, g_1)$ and $g' = (g'_d, g'_{d-1}, \ldots, g'_1)$ be two expressions of the same morphism, such that $g_i$ is a $p_i$-morphism and $g'_i$ is a $p'_i$-morphism. We say that $g < g'$ if and only if the sequence $(p_1, \ldots, p_m) < (p'_1, \ldots, p'_d)$ in the lexicographical order. We will call this order the "morphism" order.

We choose $\bar{g} = (g_m, g_{m-1}, \ldots, g_0)$ an expression of $g$ and $\bar{h} = (h_d, h_{d-1}, \cdots, d_0)$ an expression of $h$, both maximal in the morphism order. We will prove that $d = m$ and that $g_i = h_i$ for all $0 \leqslant i \leqslant m$. In fact we will prove more, we will explicitly determine all the $g_i$.

We will say that $\omega$ acts on the cores $T = \{C_{n_1}, C_{n_2}, \ldots, C_{n_p}\}$ if $\omega$ does not act as the identity exactly in that set of cores, and evidently $\omega$ is determined by $T$.

We put $y_p = \max\{i_p - j_p, j_{p+1-i_p}\}$. For all $i \geqslant 0$ for which this definition is not empty we define the following sets :

$$T_i^{1,p} = C_{j_p+i<i_p} \cup C_{j_p-i>i_{p-1}}$$

$$T_i^{2,p} = \delta_{i,y_p} \cdot C_{i_p}$$

$$T_i^{3,p} = \delta_{i,y_p+1} \cdot C_{i_p}$$

$$T_i^{4,p} = C_{i_p+y_p-i>j_p} \cup C_{i_p+i-y_p<j_{p+1}}$$

and

$$T_i = \bigcup_{1 \leqslant p \leqslant \gamma} T_i^{1,p} \cup T_i^{2,p} \cup T_i^{3,p} \cup T_i^{4,p}.$$

It is easy to see that if $\omega_i$ acts on $T_i$, then the expression $\overline{\omega} = (\omega_m, \omega_{m-1}, \ldots, \omega_0)$ is maximal in the morphism order and satisfies equations (6.1.5) and (6.1.6). So to prove Theorem 6.7 we only need to prove that with commutation relations we can pass from $\bar{g}$ to $\overline{\omega}$. We will prove the following property by induction on $i$ :

Property $(*)$ : With commutation relations we can pass from $\bar{g}$ to an expression of the form $({}^{b_p}f, \ldots, {}^{b_1}f, \omega_i, \ldots, \omega_0)$

We have that $\omega_0$ is by definition the morphism that acts on the set $\{C_{j_p}\}_{1 \leqslant p \leqslant \gamma}$, so Property $(*)$ is clear for $i = 0$.

Let us suppose that Property $(*)$ is true for $i$, we will prove it for $i+1$. So we have an expression $({}^{b_p}f, \ldots, {}^{b_1}f, \omega_i, \ldots, \omega_0)$. Let us consider $1 \leqslant p \leqslant \gamma$. We have to consider four cases :

1. $i < y_p$
2. $i = y_p$
3. $i = y_p + 1$
4. $i > y_p$

Let $1 \leqslant a \leqslant 4$. By equations (6.1.5) and (6.1.6) we see that in case $a$ we can make commutation relations in the subexrpession $({}^{b_p}f, \ldots, {}^{b_1}f)$, and arrive to an expression $({}^{b'_u}f, \ldots, {}^{b'_1}f, \omega_{i+1}^p)$, where $\omega_{i+1}^p$ is a $p$-morphism that acts exactly on $T_{i+1}^{a,p}$. The fact that $\omega_{i+1}^p$ commutes with $\omega_{i+1}^{p'}$ for all pair of elements $(p, p')$ makes us possible to obtain $\omega_{i+1}$, starting from the set $\{\omega_{i+1}^p\}_{1 \leqslant p \leqslant \gamma}$. $\square$

# 6.2

We can now define a special morphism $f_{\bar{s}} = {}^{i_k}f \circ \cdots \circ {}^{i_2}f \circ {}^{i_1}f \in \mathrm{End}(\theta_{\bar{s}}) \in \mathrm{End}(\theta_{\bar{s}})$ : it is the morphism characterized by the fact that, if $\bar{i} = (i_k, \ldots, i_1)$, then $N_{\bar{i}}(C) \neq 0$ for all $C \in \mathrm{cores}(\bar{s})$. Theorem 6.7 shows that if this morphism exists, it is unique. Now we will show that it exists.

If $x \in W$ we know that we can pass from any reduced expression $\bar{s}$ of $x$ to any other $\bar{t}$, by a sequence of braid relations. This gives a morphism of $f$-type in $\mathrm{Hom}(\theta_{\bar{s}}, \theta_{\bar{t}})$. If we pass through all reduced expressions of $x$ in any way we want, we obtain a morphism that satisfies the requirements for $f_{\bar{s}}$. So we conclude that $f_{\bar{s}}$ is a well-defined morphism.

With theorem 6.7 we easily see that $f_{\bar{s}}^2 = f_{\bar{s}}$. This means that $f_{\bar{s}}$ is an idempotent and so we conclude that the bimodule $f_{\bar{s}}(\theta_{\bar{s}})$, that we denote by $A_{\bar{s}}$, is an element of Soergel's category.

**Theorem 6.14.** *If $\bar{s}$ and $\bar{t}$ are two reduced expressions of the same element in $W$ then $A_{\bar{s}}$ is isomorphic to $A_{\bar{t}}$.*

*Proof.* We need to find an isomorphism between $A_{\bar{s}}$ and $A_{\bar{t}}$ for any two reduced expressions $\bar{s}$ and $\bar{t}$ of the element $x \in W$. As we know that we can pass from one reduced expression of $x$ to any other by a sequence of braid relations, it suffices to find an isomorphism between $A_{\bar{s}}$ and $A_{\bar{t}}$ when $\bar{s}$ and $\bar{t}$ differ only by one braid relation ; we will call the associated morphism $F_{\bar{s},\bar{t}} : \theta_{\bar{s}} \to \theta_{\bar{t}}$. We define $i_{\bar{s}} : A_{\bar{s}} \to \theta_{\bar{s}}$ as the natural inclusion. The morphism $f'_{\bar{t}} : \theta_{\bar{t}} \to A_{\bar{t}}$ takes the same values as $f_{\bar{t}} : \theta_{\bar{t}} \to \theta_{\bar{t}}$, the difference is that we restrict the target. We define $a_{\bar{s},\bar{t}}$ as follows :

$$\begin{tikzcd} \theta_{\bar{s}} \arrow[r, "F_{\bar{s},\bar{t}}"] & \theta_{\bar{t}} \arrow[d, "f'_{\bar{t}}"] \\ A_{\bar{s}} \arrow[u, "i_{\bar{s}}"] \arrow[r, "a_{\bar{s},\bar{t}}"'] & A_{\bar{t}} \end{tikzcd}$$

To finish the proof of theorem 6.14 we only need to prove

$$a_{\bar{t},\bar{s}} \circ a_{\bar{s},\bar{t}} = \mathrm{id}_{A_{\bar{s}}},$$

so we only need to prove

$$f_{\bar{s}} \circ F_{\bar{t},\bar{s}} \circ f_{\bar{t}} \circ F_{\bar{s},\bar{t}} \circ f_{\bar{s}} = f_{\bar{s}}, \tag{6.2.7}$$

but this is a direct consequence of theorem 6.7 and the definition of $f_{\bar{s}}$. □

**Notation 6.15.** If $\bar{s}$ is a reduced expression of $w \in W$ we define $A_w = A_{\bar{s}}$, and this is a well defined bimodule modulo isomorphism.

**Lemma 6.16.** *Let $M$ be a Soergel bimodule and let the polynomials $p_w \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ be defined by $\eta(M) = \sum_{w \in W} p_w T_w$. We have the following formula :*

$$K \otimes_R M \cong \sum_{w \in W} p_w(1) K_w,$$

*where $K$ is the fraction field of $R$.*

**Proof.** As $(V, V)$ is a good couple (bonne paire), by formula 4.3.8 we have that $K \otimes_R \theta_s \cong K \oplus K_s$. If $(s_1, \dots, s_n)$ is a sequence of elements of $\mathcal{S}$ we have that $K \otimes_R \theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n} \cong (K \oplus K_{s_1}) \otimes_R \cdots \otimes_R (K \oplus K_{s_n})$.

We have that $\eta(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}) = (1 + T_{s_1}) \cdots (1 + T_{s_n})$. To specialise this element in $q = 1$ is equivalent to calculate $(1 + s_1) \cdots (1 + s_n)$ in the group algebra $k[W]$ (identifying $s_i$ with $T_{s_i}$), so the fact that $K_x \otimes_R K_y \cong K_{xy}$ for all $x, y \in W$, allows us to finish the proof of the lemma for $M = \theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}$.

It is trivial to extend this result to finite direct sums of bimodules of the form $\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}$, and for the direct summands it is enough to use lemma 1.10. $\square$

**Proposition 6.17.** *The indecomposable Soergel bimodule $B_w$ is a direct summand of $A_w$ and the set $\{\eta(A_w)\}_{w \in W}$ is a basis of the Hecke algebra.*

**Proof.** Let $K$ be the fraction field of $R$. Let $s, r \in \mathcal{S}$ and $x = srs \cdots$ $m(s, r)$ times. In this proof we will use the following notation : if $M$ is a Soergel bimodule, $\overline{M} = K \otimes_R M$ is the corresponding $(K, K)$-bimodule (see lemma 4.25). We can find a projection $\pi : X_{sr} \to B_x$ and an injection $in$ : $B_x \to X_{rs}$ such that $in \circ \pi = f_{sr} \in \mathrm{Hom}(X_{sr}, X_{rs})$.

By lemma 6.16 we know that $K_x$ is a direct summand of $\overline{X_{sr}}, \overline{X_{rs}}$ and of $\overline{B_x}$. So we have an injection $j : K_x \hookrightarrow \overline{X_{sr}}$. As $\mathrm{id} \otimes \pi : \overline{X_{sr}} \twoheadrightarrow \overline{B_x}$ is a surjection and the space

$$\mathrm{Hom}_{(K,K)}(K_u, K_v) \simeq \begin{cases} \{0\} \text{ si } u \neq v \\ K \text{ si } u = v \end{cases}$$

we deduce an injection $(\mathrm{id} \otimes \pi) \circ j : K_x \hookrightarrow \overline{B_x}$, and by composing with the injection $\mathrm{id} \otimes in$, we finally we obtain an injection $(\mathrm{id} \otimes f_{sr}) \circ j : K_x \hookrightarrow \overline{X_{rs}}$. This allow us to conclude that $K_x$ is a direct summand of $f_{sr}(\overline{X_{sr}})$. As $K_u \otimes_R K_v \cong K_{uv}$ for all $u, v \in W$, we conclude that $K_u$ is a direct summand of $\overline{A_u}$, for all $u \in W$.

Let $\bar{s}$ be a reduced expression of $w$. We have that $\theta_{\bar{s}} = A_w \oplus Y = B_w \oplus X$, for some Soergel's bimodules $X, Y$, so

$$\overline{\theta_{\bar{s}}} = \overline{A_w} \oplus \overline{Y} = \overline{B_w} \oplus \overline{X}$$

We have seen that $K_w$ is a direct summand of $\overline{A_w}$ and of $\overline{B_w}$, but it is only with multiplicity one in $\overline{\theta_{\bar{s}}}$ so $K_w$ is not a direct summand of $\overline{X}$. As $B_w$ is indecomposable, we conclude that

$$A_w \cong B_w \oplus X', \tag{6.2.8}$$

with $X'$ direct summand of $X$, thus proving the first part of the proposition.

Lemma 6.16 allows us to conclude that

$$\eta(A_w) = \sum_{v \leqslant w} p_v T_v,$$

where $p_v \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$. Because of Theorem 1.19 we have that $p_v$ has positive integer coefficients for all $v$. As $K_w$ appears with multiplicity one in $\overline{A_w}$ we conclude that $p_w = 1$, so $\eta(A_w) = T_w + \sum_{v<w} p_v T_v$. This triangularity condition allows us to conclude the second part of the proposition. □

### 6.2.1

If we choose for every element $x \in W$ a reduced expression $(s_1^x, \cdots, s_n^x)$ of $x$, then the following is a basis of the Hecke algebra :

$$\underline{B} = \{C'_{s_1^x} \cdots C'_{s_n^x}\}_{x \in W}$$

Proposition 6.17 makes precise the assertion that the basis $\underline{A} = \{\eta(A_w)\}_{w \in W}$ is in between the Kazhdan-Lusztig basis and the $\underline{B}$ basis. We finish this thesis with an example that shows that $\underline{A}$ is different from both basis.

**Example :** Let $m(s, r) = 4$. By definition $A_{srsr}$ is the image of $f_{rs} \circ f_{sr}$, and this is the indecomposable Soergel bimodule $B_{srsr}$, so we conclude that $\eta(A_{srsr}) = C'_{srsr}$.

On the other hand, $A_{srs}$ is by definition the bimodule $\theta_s \theta_r \theta_s$, and so $\eta(A_{srs}) = C'_s C'_r C'_s$.

# Bibliographie


[Al] **D. Alvis**, *The left cells of the Coxeter group of type H4*, J. Algebra **107** (1987) 160 168. 22

[AJS] **H. H. Andersen, J. C. Jantzen and W. Soergel**, *Representations of quantum groups at a p-th root of unity and of semisimple groupsin characteristic p : Independence of p*, Astérisque **220**, (1994), 1-321. 12, 19, 96

[BB] **A. Beilinson et J. Bernstein**, *Localisation de $\mathfrak{g}$-modules*, C.R. Acad. Sci. Paris (1) **292** (1981), 15-18. 11, 95

[BGG] **I.N. Bernstein, I.M. Gel'fand et S.I. Gel'fand**, A certain category of $\mathfrak{g}$-modules (en russe), Funkcional. Anal. i Prilozen.**10**, no 2 (1976), 1-8. MR0407097. 79

[Bo1] **N. Bourbaki**, *Éléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie : chapitres 4, 5 et 6*, Hermann, Paris, 1968.

[Bo2] **N. Bourbaki**, *Algèbre I*, Hermann, 1979 69

[Br] **M. Broué** *Higman criterion revisited*, preprint, à paraître dans Michigan Journal of Mathematics. 36

[BK] **J.L. Brylinski et M. Kashiwara**, *Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems*, Invent. Math. **64** (1981), 387-410. 53

[Cl] **F. du Cloux** *Positivity results for the Hecke algebras of noncrystallographic finite Coxeter groups*, J. of Algebra **303** (2006) 731-741 11, 95

[Da] **M. W. Davis** *The geometry and topology of Coxeter groups* London Mathematical Society Monographs Series, **32**. Princeton University Press, Princeton, NJ, (2008). 22

[De] **M. Demazure**, *Invariants symétriques entiers des groupes de Weyl et torsion*, Invent. Math. **21** (1973), 287-301. 96

[Dy] **M. Dyer**, *On some generalisations of the Kazhdan-Lusztig polynomials for « universal » Coxeter systems*, J. Algebra **116** (1988), no. 2, 353-371. 52

[Fi] **P. Fiebig**, *The combinatorics of Coxeter categories*, preprint `arXiv :math.RT/0512176`, à paraître dans Trans. Amer. Math. Soc. 11, 95

[GP] **M. Geck et G. Pfeiffer** *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras*, Oxford University Press, Oxford, 2000. 32

[Had] **Z. Haddad**, *A Coxeter group approach to Schubert varieties*, Infinite-dimensional groups with applications (Berkeley, California 1984), Math. Sci. Res. Inst. Publ. **4**, Springer, New York/Berlin, 1985, 157-165. 49

[Har] **R. Hartshorne**, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Volume **52** (Springer, 1977) 11, 95

[Hi] **H. Hiller**, *Geometry of Coxeter groups*, Research Notes in Mathematics, **No. 54**, Pitman, Boston, 1982. 34

[Il] **L. Illusie**, *Calculs de termes locaux, Cohomologie l-adique et fonctions L (SGA 5)*, Springer-Verlag L.N. **589**, Berlin, pp. 138-203, 1977. 50

[IM] **N. Iwahori, H. Matsumoto**, *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p-adic Chevalley groups*. Publications Mathématiques de l'IHÉS, **25** (1965), p. 5-48 40

[Iw] **N. Iwahori**, *On the structure of a Hecke ring of a Chevalley group over a finite field*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. **I 10**, 215–236 (1964).

[Ja1] **J.C. Jantzen** *Modulun mit einem höchsten Gewicht*, Springer, 1979. 9

[Ja2] **J.C. Jantzen** *Einh ullende Algebren halbeinfacher Lie-algebren*, Springer-Verlag 1983.

[Ka] **C. Kassel**, *Quantum groups* Graduate Texts in Mathematics, **155**. Springer-Verlag, New York, (1995) 80

[KL1] **D. Kazhdan and G. Lusztig** *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Inventiones Mathematicae **53** (1979), no. 2, 165–184. 100, 105, 106

[KL2] **D. Kazhdan et G. Lusztig**, *Schubert varieties and Poincaré duality*, Proc. Symp. Pure Math **36**, 1980. 10, 95

[KL3] **D. Kazhdan et G. Lusztig**, *Tensor structures arising from a ne Lie algebras. I–IV*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993) 905–947 ; J. Amer. Math. Soc. **6** (1993) 949–1011 ; J. Amer. Math. Soc. **7** (1994) 335–381 ; J. Amer. Math. Soc. **7** (1994) 383–453 (1993). 11, 95
12

[Kh] **M. Khovanov**, *Triply-graded link homology and Hochschild homology of Soergel bimodules*, preprint `arXiv :math.GT/0510265`, à paraître dans International Journal of Math. 13, 21, 96

[KR] **M. Khovanov et L. Rozansky**, *Matrix factorizations and link homology II*, preprint `arXiv :math.QA/0505056`, à paraître dans Geometry and Topology. 13, 21

[KT] **M. Kashiwara et T. Tanisaki**, *Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level*, Duke Math. J. **77** , no. 1, 21–62 (1995) 12

[Li1] **N. Libedinsky**, *Sur la catégorie des bimodules de Soergel*, preprint `arXiv :math.RT/0707.3603v2`, à paraître dans J. of Algebra. 67

[Li2] **N. Libedinsky** *Équivalences entre conjectures de Soergel*, preprint `arXiv :math.RT/0802.3031`, à paraître dans J. of Algebra. 81

[Lu1] **G. Lusztig**, *Hecke algebras and Jantzen's generic decomposition patterns*, Adv. in Math. **37** (1980), 121-164 95

[Lu2] **G. Lusztig**, Cells in affine Weyl groups, Algebraic groups and related topics : Adv. Stud. Pure Math. 6, North-Holland, 1985, pp. 255 287. 41

[Pi] **R. Pierce**, *Associative algebras*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, vol. **88** (1982). 30

[Ra] **J. Rasmussen** *Some differentials on Khovanov-Rozansky homology*, arXiv :math.GT/0607544 21

[Ro] **R. Rouquier** *Categorification of sl2 and braid groups*, "Trends in representation theory of algebras and related topics", **137-167**, Amer. Math. Soc., 2006. 15, 57, 58, 60

[Sh] **G. Shimura**, Sur le integrales attachées aux formes automorphes, J. Math. Soc. Japan, **11** (1959), 291-311. 9

[So1] **W. Soergel**, *Kategorie O, perverse Garben, und Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe*, Journal of the AMS **3**, (1990), 421-445. 13, 17, 79, 80, 95, 96

[So2] **W. Soergel**, *The combinatorics of Harish-Chandra bimodules.*, J. Reine Angew. Math. **429**, (1992), 49-74. 12, 17, 22, 31, 32, 50, 71, 80, 81, 85, 95

[So3] **W. Soergel**, *On the relation between intersection cohomology and representation theory in positive characteristic*, J. Pure Appl. Algebra **152** (2000), no. 1-3, 311-335. 13, 18, 32, 81, 86

[So4] **W. Soergel**, *Kazhdan-Lusztig polynomials and indecomposable bimodules over polynomial rings*, Journal of the Inst. of Math. Jussieu **6(3)**, (2007), 501-525. 13, 29, 30, 31, 32, 46, 50, 51, 56, 57, 59, 71, 81, 84, 86, 97

[Wi] **G. Williamson** *Singular Soergel bimodules*, Thèse de doctorat Albert-Ludwigs-Universität, 2008 22

[WW] **B. Webster, G. Williamson** *A geometric model for Hochschild homology of Soergel bimodules*, à paraître en " Geometry and Topology" 21