Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch — Sommersemester 2019

Mathematische Logik

Blatt 4

Abgabe: 28.05.2019 10 Uhr

Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur in der Sprache $\mathcal{L}$ und $c_1, \ldots, c_n$ neue Konstantenzeichen.

(a) Zeige, dass $\mathcal{A}$ sich zu einer Struktur in der Sprache $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$ erweitern läßt.

(b) Sind alle solche Erweiterungen isomorph als $\mathcal{L}'$-Strukturen?

(c) Zeige, dass die $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ genau dann allgemeingültig ist, wenn die $\mathcal{L}'$-Aussage $\varphi[c_1, \ldots, c_n]$ allgemeingültig ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{S}$ die Kollektion aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Die Menge $\mathcal{S}$ ist partiell geordnet bezüglich Inklusion (siehe Appendix A im Skript).

(a) Gibt es eine obere Schranke für $\Gamma = \{\emptyset, \{5\}, \{2, 5\}, \{1, 3\}\}$ in $\mathcal{S}$? Gibt es eine einzige obere Schranke?

(b) Zeige, dass die Kollektion $\Gamma = \{\{0, 1, \ldots, n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ linear geordnet ist. Besitzt Γ eine obere Schranke in $\mathcal{S}$?

(c) Gibt es maximale Elemente in $\mathcal{S}$?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**

Gegeben einen Vektor $v \neq 0$ in einem (möglicherweise unendlichdimensionalen) euklidischen Vektorraum V, betrachte die Kollektion $\mathcal{S}$ aller Unterräume W derart, dass W *orthogonal* zu v ist, das heißt,

$$\langle v, w\rangle = 0 \text{ für jedes } w \in W.$$

Durch Inklusion wird $\mathcal{S}$ partiell angeordnet.

(a) Zeige, dass jede Kette Γ in $\mathcal{S}$ eine obere Schranke besitzt.

Achtung: $\Gamma = \emptyset$ ist auch eine Kette!

(b) Besitzt $\mathcal{S}$ ein maximales Element? Gibt es ein größtes Element in $\mathcal{S}$?

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** Forme folgende Formeln in pränexe Normalform um:

(a) $\Big(\forall x \forall y \big(f(x) \doteq f(y)\big) \rightarrow \exists z \forall u \big(z \doteq f(u)\big)\Big)$.

(b) $\forall x \forall y \Bigg(\neg(x \doteq y) \longrightarrow \forall z \forall u \bigg(\Big(\neg(z \doteq x) \longrightarrow \big(\neg(z \doteq y) \vee (u \doteq y)\big)\Big) \longrightarrow \neg(z \doteq u)\bigg)\Bigg)$.

Beschreibe für jede der obigen Aussagen die Strukturen, welche diese erfüllen.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im Keller des mathematischen Instituts.