Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Michael Lösch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Sommersemester 2019

Mathematische Logik
Blatt 7
Abgabe: 02.07.2019 10 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.** Sei I eine nicht-leere Menge von Ordinalzahlen.

(a) Zeige, dass die Menge $\bigcup I$ bezüglich $\in$ linear geordnet ist.

(b) Schließe daraus, dass $\alpha = \bigcup I$ wieder eine Ordinalzahl ist.

(c) Zeige, dass $\beta \leq \alpha$ für jedes β aus I. Insbesondere ist $\alpha = \sup I$ das Supremum aller Ordinalzahlen aus I.

(d) Sei $\emptyset \neq \sup I \notin I$. Zeige, dass $\sup I$ keine Nachfolgerzahl, sondern eine Limeszahl ist. Kann $\sup I$ in I liegen, wenn $\sup I$ eine Limeszahl ist?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Definiere rekursiv die Ordinalexponentiation zur Basis ω durch:

- $\omega^0 = \underline{1}$,
- $\omega^{\alpha+1} = \omega^\alpha \cdot \omega$,
- $\omega^\alpha = \sup\limits_{\beta<\alpha} \omega^\beta$, für α Limeszahl.

(a) Zeige, dass $\underline{1} \leq \omega^\alpha$ für jede Ordinalzahl α.

(b) Schließe daraus, dass $\alpha \leq \omega^\alpha$ für jede Ordinalzahl α.

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.**
Eine Menge A heißt *endlich*, falls sie in Bijektion mit einer natürlichen Zahl x aus ω ist. Bezeichne dies mit $A \sim x$.

(a) Zeige durch Induktion, dass

$$\omega = \{x \in \omega \mid \forall y \subset x \, \exists z \in \omega \text{ mit } y \sim z\}.$$

Schließe daraus, dass jede Teilmenge einer endlichen Menge wiederum endlich ist.

(b) Zeige, dass jede linear geordnete nicht-leere endliche Menge ein kleinstes und ein größtes Element besitzt.

(c) Sei $A \sim \omega$. Zeige mit Hilfe des Satzes von Cantor-Bernstein-Schröder, dass $\omega \sim (A \sqcup \underline{1})$.

(d) Schließe daraus, dass ω^+ keine Nachfolgerzahl ist.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im Keller des mathematischen Instituts.