Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Michael Lösch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Sommersemester 2019

Mathematische Logik

Heimklausur II

Abgabe: 08.07.2019, am Anfang der Vorlesung

Die Heimklausur kann zu zweit eingereicht werden.

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.**

Eine Menge X heiße *Dedekind-endlich*, falls jede Injektion $f : X \to X$ surjektiv ist.

(a) Ist $\mathbb{N}$ Dedekind-endlich? und $\mathbb{R}$?

(b) Zeige mit Induktion, dass jede natürliche Zahl Dedekind-endlich ist.

HINWEIS: Beweis der Bemerkung 3.48 im Skript.

(c) Zeige, dass jede endliche Menge Dedekind-endlich ist (siehe Blatt 7, Aufgabe 3).

(d) Zeige in ZFC, dass eine Menge A genau dann Dedekind-endlich ist, wenn A keine Teilmenge enthält, welche gleichmächtig zu ω ist.

HINWEIS: Je zwei Ordinalzahlen sind immer vergleichbar.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**

Sei α eine Limeszahl. Zeige für jede Ordinalzahl $\beta < \alpha$, dass $\beta + \omega \leq \alpha$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{L}$ die Sprache, welche aus einem zweistelligen Relationssymbol E besteht. Betrachte die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{N}$ mit Universum $\mathbb{N}$ in welcher $E^{\mathcal{N}}(n, m)$ genau dann gilt, falls n ein Exponent in der Darstellung von m zur Basis 2 ist. Das heißt $m = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k}$ mit $n_1 > n_2 > \cdots > n_k$ und $n = n_i$ für ein $1 \leq i \leq k$.

(a) Zeige, dass **Extensionalität** in $\mathcal{N}$ gilt:

$$\mathcal{N} \models \forall x \forall y \Big(\forall z \, (zEx \leftrightarrow zEy) \longrightarrow (x \doteq y) \Big).$$

(b) Gibt es eine unendliche Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus $\mathbb{N}$ mit $x_{n+1} E^{\mathcal{N}} x_n$ für jedes n? Ist die Relation $E^{\mathcal{N}}$ auf $\mathbb{N}$ *fundiert*? (Siehe Korollar 3.42 im Skript).

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

Zeige unter der Annahme, dass ZFC konsistent ist, dass es ein abzählbares Modell $\mathcal{M}$ von ZFC mit einer *nichtstandard* natürlichen Zahl x aus M gibt. Das heißt, ein Element x aus ω (in $\mathcal{M}$) mit $x \neq \underline{n}$ für jedes n aus $\mathbb{N}$.

Besitzt $\mathcal{M}$ eine kleinste nichtstandard natürliche Zahl?