Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Michael Lösch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2019/2020

Logik für Studierende der Informatik

Blatt 10

Abgabe: 22.01.2020, 14 Uhr

Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**

Sei $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ eine (primitiv) rekursive Funktion. Zeige, dass folgende Funktionen auch (primitiv) rekursiv sind.

(a) $g(x_1, \ldots, x_k, y) = \sum_{z<y} f(x_1, \ldots, x_k, z)$, wobei die leere Summe den Wert 0 hat.

(b) $g(x_1, \ldots, x_k, y) = \begin{cases} \min\{z \leq y \mid f(x_1, \ldots, x_k, z) = 0\}, & \text{falls das Minimum existiert} \\ y+1, & \text{sonst} \end{cases}$

HINWEIS: Beweis von Lemma 3.10. im Skript.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.**

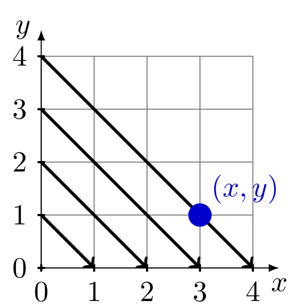
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine rekursive streng monoton steigende Funktion. Zeige, dass die Teilmenge $A = f(\mathbb{N})$ von $\mathbb{N}$ rekursiv ist.

Aufgabe 3 (12 Punkte)**.**

(a) Zeige induktiv über n die Identität

$$1 + 2 + \ldots + n = \binom{n+1}{2}.$$

Im folgenden Diagramm:



betrachte folgende Reihenfolge: das Element $(0, 0)$ ist das kleinste Element und sein Nachfolger ist $(0, 1)$. Auf jeder Diagonale ist der Nachfolger von $(x, y + 1)$ der Punkt $(x + 1, y)$. Der Nachfolger von $(x, 0)$ ist der Punkt $(0, x + 1)$.

(Bitte wenden!)

(b) Schließe aus der obigen Identität, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ & (x,y) & \mapsto & \binom{x+y+1}{2} + x \end{array}$$

injektiv ist und die obige Aufzählung von $\mathbb{N}^2$ beschreibt.

HINWEIS: Auf der Gerade im Diagramm, welche den Punkt (x, y) enthält, wie viele Vorgänger von (x, y) gibt es? Wie viele Punkte gibt es auf den vorigen Geraden?

(c) Zeige mit Induktion, dass jedes n aus $\mathbb{N}$ im Bildbereich von α liegt. Schließe daraus, dass α eine Bijektion ist.

(d) Zeige, dass α primitiv rekursiv ist.

(e) Zeige, dass die Funktionen β_1 und β_2 mit $\alpha^{-1} = (\beta_1, \beta_2)$ primitiv rekursiv sind.

HINWEIS: $\alpha(x, y) \geq \max\{x, y\}$.

Sei nun die Fibonacci Folge:

$$a_0 = a_1 = 1 \text{ und } a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ für } n \geq 2.$$

(f) Zeige mit Hilfe der Funktionen β_1 und β_2, dass die Funktion $h(n) = \alpha(a_n, a_{n+1})$ primitiv rekursiv ist. Insbesondere ist die Funktion $n \mapsto a_n = \beta_1(h(n))$ auch primitiv rekursiv.

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im EG des Gebäudes 51.