Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch — Wintersemester 2019/2020

Logik für Studierende
der Informatik
Blatt 5
Abgabe: 4.12.2019, 14 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**

Eine lineare Ordnung $<$ auf der Menge X ist *dicht*, falls für je zwei Elemente $x < y$ aus X ein Element z aus X mit $x < z < y$ existiert. Die lineare Ordnung $(X, <)$ hat keine Randpunkte, falls es für jedes x Elemente y und z mit $z < x < y$ gibt. (Siehe Appendix A im Skript).

Sei $\mathcal{L}$ die Sprache mit einem 2-stelligen Relationszeichen $<$.

(a) Gib eine Theorie T an, deren Modelle genau alle dichte lineare Ordnungen sind.

(b) Ist T konsistent? Sind je zwei Modelle von T elementar äquivalent?

(c) Gib nun eine Theorie T_1 an, deren Modelle genau alle dichte lineare Ordnungen ohne Randpunkte sind. Zeige, dass für jede $\mathcal{L}$-Aussage χ entweder $T_1 \models \chi$ oder $T_1 \models \neg\chi$.

HINWEIS: Back-&-Forth.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{S}$ die Kollektion aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Die Menge $\mathcal{S}$ ist partiell geordnet bezüglich Inklusion (siehe Appendix A im Skript).

(a) Gibt es eine obere Schranke für $\Gamma = \{\emptyset, \{5\}, \{2, 5\}, \{1, 3\}\}$ in $\mathcal{S}$? Gibt es eine einzige obere Schranke?

(b) Zeige, dass die Kollektion $\Gamma = \{\{0, 1, \ldots, n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ linear geordnet ist. Besitzt Γ eine obere Schranke in $\mathcal{S}$?

(c) Gibt es maximale Elemente in $\mathcal{S}$?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**

Gegeben einen Vektor $v \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$, betrachte die Kollektion $\mathcal{S}$ aller zu v *orthogonalen* Unterräume W von $\mathbb{R}^n$, das heißt,

$$\langle v, w\rangle = 0 \text{ für jedes } w \in W,$$

wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^n$ ist. Durch Inklusion wird $\mathcal{S}$ partiell angeordnet.

(a) Zeige, dass jede Kette Γ in $\mathcal{S}$ eine obere Schranke besitzt.

Achtung: $\Gamma = \emptyset$ ist auch eine Kette!

(b) Besitzt $\mathcal{S}$ ein maximales Element? Gibt es ein größtes Element in $\mathcal{S}$?

(Bitte wenden!)

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

Forme folgende Formeln in pränexe Normalform um:

(a) $\Big(\forall x \forall y \big(f(x) \doteq f(y)\big) \rightarrow \exists z \forall u \big(z \doteq f(u)\big)\Big).$

(b) $\forall x \forall y \Bigg(\neg(x \doteq y) \longrightarrow \forall z \forall u \bigg(\Big(\neg(z \doteq x) \longrightarrow \big(\neg(z \doteq y) \vee (u \doteq y)\big)\Big) \longrightarrow \neg(z \doteq u)\bigg)\Bigg).$

Beschreibe für jede der obigen Aussagen die Strukturen, welche diese erfüllen.

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im EG des Gebäudes 51.