Prof. Amador Martin-Pizarro
Michael Lösch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2020/2021

Lineare Algebra I

Typische Fehler in der Klausur

Aufgabe 1 (9 Punkte)**.**

(a) Definiere, wann ein kommutativer Ring ein Integritätsbereich ist.

- Falsche Definition (z.B. jedes Element hat ein Inverses, oder Verwechslung mit der Charakteristik).
- Nicht erklärt, was Nullteiler sind.

(b) Zeige, dass Körper Integritätsbereiche sind. Gilt die Rückrichtung?

- Falsche oder unvollständige Argumentation (z.B. wird mit $(a \cdot b)^{-1}$ multipliziert, obwohl $a \cdot b = 0$).
- Rückrichtung einfach nur behauptet ohne Beispiel oder falsche Beispiele (beispielsweise ist $\mathbb{N}$ kein Ring und $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist ein Körper für p eine Primzahl).
- Es wird behauptet, dass der Satz von Wedderburn impliziere, dass jeder Körper endlich sei.

(c) Zeige, dass jeder endliche (kommutative) Integritätsbereich ein Körper ist.

- Falsche Begründungen (zum Beispiel wird die Endlichkeit nicht benutzt; Spielereien mit Charakteristik, Kommutativität, Assoziativität ohne Substanz; ein richtiger Beweis steht im Skript, aber darauf konnte in dieser Aufgabe nicht verwiesen werden).

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**

Gegeben ein Polynom P über einem Körper $\mathbb{K}$ der Charakteristik 0, zeige, dass das Polynom P genau dann konstant ist, wenn die Menge $\{P(c)\}_{c\in\mathbb{K}}$ endlich ist.

- Es wird nur eine Richtung der Äquivalenz gezeigt.
- Verwechslung zwischen Polynom und der vom Polynom induzierten Abbildung.
- Es wird versucht Methoden aus der Analysis zu verwenden (zum Beispiel Stetigkeit und Zwischenwertsatz), obwohl diese nicht für jeden Körper funktionieren, zum Beispiel $\mathbb{Q}$.
- Dass ein nicht-triviales Polynom nur endlich viele Nullstellen besitzt, wird nicht verwendet, ist jedoch der Kern dieser Aufgabe.

Aufgabe 3 (8 Punkte). (a) Für welche Werte von x hat die von der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & 7+x & -3 \\ 0 & 4 & x \end{pmatrix}$ induzierte $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung F_A Rang mindestens 2?

- Inspektionsbeweise, die unvollständig sind, weil Fälle übersehen wurden. Nur für konkrete Werte von x wurde der Rang berechnet.
- Es wird benutzt, dass 3 Zeilen linear unabhängig sind, wenn je zwei Zeilen es sind. Das ist jedoch falsch.
- Es wird durch $7+x$ geteilt, ohne zu beachten, dass dieser Wert 0 sein könnte.

(b) Für welche Werte von x hat die von A induzierte $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung F_A trivialen Kern?

- Eine unvollständige und fehlerhafte Argumentation von (a) wurde fortgeführt, anstatt zum Beispiel die Determinante zu berechnen.
- Rechenfehler.

Aufgabe 4 (15 Punkte). Über einem Körper $\mathbb{K}$ der Charakteristik 0, sei V der $\mathbb{K}$-Vektorraum aller Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$ und Grad höchstens 3.

(a) Zeige, dass die Vektoren

$$\begin{array}{ll} v_1 = -2T^2 + T & v_3 = 2T^3 - T + 3 \\ v_2 = T^3 + T^2 - T + 1 & v_4 = T^3 - 2T^2 + T - 2 \end{array}$$

eine Basis von V bilden.

- Zeilenvektoren anstatt Spaltenvektoren für die Koordinaten.
- Bemerkung: 4 linear unabhängige Vektoren eines 4-dimensionalen Raumes bilden eine Basis, und es ist nicht nötig noch explizit zu zeigen, dass es ein Erzeugendensystem ist.

(b) Gib die Übergangsmatrix von der Basis $\{1, T, T^2, T^3\}$ nach $\{v_1, \ldots, v_4\}$ an.

- Die falsche Matrix (die Übergangsmatrix in die andere Richtung).
- Die Variable T kommt als Eintrag in den Matrizen vor.
- Rechenfehler.
- Zeilenvektoren anstatt Spaltenvektoren für die Koordinaten.
- Reihenfolge der Basisvektoren geändert.

(c) Gib die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $h: \begin{array}{rcl} V & \to & V \\ P & \mapsto & T \cdot \frac{\partial P}{\partial T} - 2P - P(1) \end{array}$

bezüglich der Basis $\{v_1, \ldots, v_4\}$ (sowohl im Definition- als auch im Bildbereich) an, wobei $\frac{\partial P}{\partial T} = \sum\limits_{1 \leq k \leq 3} a_k k T^{k-1}$ für $P = \sum\limits_{0 \leq k \leq 3} a_k T^k$.

- Falsche Vorgehensweise (zum Beispiel Transformationen in der falschen Richtung).
- Rechenfehler.
- Nur Schritte wurden beschrieben ohne zu rechnen.
- Bemerkung: Die (b) sollte verwendet werden.

Aufgabe 5 (8 Punkte)**.** Seien n und m aus $\mathbb{N}$ beide größer gleich 1. Gegeben eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ des endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraumes V sowie verschiedene Primzahlen $p_1, \ldots, p_m$, definiere den Vektor

$$w_i = v_1 + p_i v_2 + \cdots + p_i^{n-1} v_n, \text{ für } i \leq m.$$

Zeige, dass die Vektoren $\{w_1, \ldots, w_m\}$ genau dann linear unabhängig sind, wenn $m \leq n$.

Hinweis (für eine Richtung): Wie sieht die Matrix aus, deren Spalten die Koordinaten der Vektoren $w_1, \ldots, w_m$ bezüglich der Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sind?

- Es sind zwei Richtungen zu zeigen, auch wenn eine trivial ist: Wie groß kann eine linear unabhängige Familie in einem n-dimensionalen Vektorraum höchstens sein?
- Falsche Spielereien mit Primzahlen, anstatt die Vandermonde-Matrix zu benutzen. Die Aufgabe hat nichts mit Primzahlen zu tun!
- Fehlerhafte Argumentationen mit Pivoten.

Aufgabe 6 (15 Punkte)**.**

Seien $B = \{T^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ und $g: \begin{array}{rcl} B & \to & \mathbb{R}^6 \\ T^i & \mapsto & \begin{cases} 0_{\mathbb{R}^6}, & \text{falls } i \geq 4 \\ e_{i+1}, & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$

wobei $\{e_1, \ldots, e_6\}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^6$ ist.

(a) Berechne das Bild $G(P)$ jedes (beliebigen) Polynomes P über $\mathbb{R}$ bezüglich der von g bestimmten $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $G : \mathbb{R}[T] \to \mathbb{R}^6$.

- Es wird nicht zwischen g und G unterschieden.
- Die Abbildung G wird als Matrix angegeben, obwohl der Definitionsbereich unendlichdimensional ist!

- Es wird nur das Bild bestimmter Polynome berechnet, anstatt das eines festen, aber beliebigen Polynoms.
- Rechenfehler.

(b) Wie lautet der Noethersche Isomorphiesatz?

- Oft wurde ein anderer oder sogar falscher Satz angegeben.

(c) Schließe auf die Existenz eines Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}[T]/\mathrm{Ker}(G)$ und dem $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$W = \{(x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid \sum_{i=1}^{5} x_i = 0\}.$$

- Dimensionsformel wurde auf einen unendlich-dimensionalen Vektorraum angewendet.
- Es wurde behauptet, dass G Werte in W annimmt, obwohl W keine Teilmenge von $\mathbb{R}^6$ ist.
- Falsche Dimensionen der Vektorräume berechnet.

Allgemeine Bemerkungen

- Seien Sie kritisch mit Ihren eigenen Argumentationen. Wenn Sie sowieso wissen, dass die Argumentation so nicht stimmen kann, hilft es nicht, sie zu schreiben. Argumente raten funktioniert in der Mathematik leider nicht. Es werden keine Teilpunkte für falsche Begründungen vergeben, auch wenn diese sehr kreativ sind.
- Es ist eine Klausur. Die Abgabe soll lesbar und ordentlich aufgeschrieben sein.
- Vermeiden Sie in einer Klausur Wörter wie *klarerweise, offensichtlich, trivial,* usw.
- In Argumentationen sind Pfeile mit Vorsicht zu benutzen. Um Missverständnisse zu vermeiden, benutzen Sie besser *also* statt $\Longrightarrow$.
- Eine Aufgabe mit zwei verschiedenen (unvollständigen) Lösungsversuchen kann nicht bewertet werden.