Prof. Katrin Wendland
PD Emanuel Scheidegger, Dr. Santosh Kandel
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 6

25. Zweige des Logarithmus

    (a) (3 Punkte) Es sei $\widetilde{U}_0 = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Zeigen Sie, dass holomorphe Funktionen $g_k : \widetilde{U}_0 \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, existieren, so dass sie lokale Umkehrfunktionen von exp mit $g_k(1) = 2\pi i k$ sind, und dass gilt: $g_k(\widetilde{U}_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (2\pi k - \pi, 2\pi k + \pi)\}$.

    (b) (1 Punkt) Es seien g_0 wie in Teilaufgabe (a) und λ wie in Aufgabe 22(d) mit $\lambda(1) = 0$. Bestimmen Sie die maximale Teilmenge V der jeweiligen gemeinsamen Definitionsbereiche, so dass $\lambda|_V = g_0|_V$.

26. Holomorphe Fortsetzung längs Kreisketten

    Es seien $D_0, \ldots, D_n$, $D_i \subset \mathbb{C}$, eine Folge von offenen Kreisscheiben. Wir nennen $(D_0, \ldots, D_n)$ eine Kreiskette, falls die Mittelpunkte von D_{i-1} und D_i in $D_{i-1} \cap D_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ enthalten sind. Es sei $f_i : D_i \to \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen mit $f_{i-1}|_{D_{i-1} \cap D_i} = f_i|_{D_{i-1} \cap D_i}$ für alle i. Wir sagen, dass f_n durch holomorphe Fortsetzung längs der Kreiskette aus f_0 entsteht.

    (a) (2 Punkte) Es seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $(D_0, \ldots, D_n)$ eine Kreiskette in U und $f_0 : D_0 \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass sich f_0 genau dann entlang der Kreiskette holomorph fortsetzen lässt, wenn dies auch für f_0' gilt.

    (b) (1 Punkt) Es seien $U = \mathbb{C}^*$, $D_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| < 1\}$, $g_0 : D_0 \to \mathbb{C}$ die Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ mit $g_0(1) = 0$. Zeigen Sie, dass g_0 längs jeder Kreiskette in U holomorph fortsetzbar ist.

    (c) (1 Punkt) Es seien U und D_0 wie in Teilaufgabe (b). Wir setzen $f_0 := g_0$. Konstruieren Sie explizit eine Kreiskette $(D_0, \ldots, D_n)$ in U mit der Eigenschaft, dass $D_n = D_0$ für ein $n > 1$ und $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \bigcup_{i=0}^{n} D_i$. Drücken Sie die holomorphe Fortsetzung $f_n : D_n \to \mathbb{C}$ durch f_0 aus.

27. Nullstellenmengen holomorpher Funktionen

(a) (1 Punkt) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Es sei $N(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\}$ überabzählbar. Zeigen Sie, dass $f \equiv 0$.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass gilt: Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann ein Polynom, wenn es für jedes $z \in \mathbb{C}$ ein $n_z \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $f^{(n_z)}(z) = 0$.

(c) (2 Punkte) Es seien U ein Gebiet, $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei. Die Menge $\{z \in U \mid \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)}\}$ sei nicht diskret in U. Zeigen Sie, dass ein $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert, so dass $f = \lambda g$.

28. Lokale Normalform holomorpher Funktionen

(a) (2 Punkte) Es seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(0) = 0$ und $f'(0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass es für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine holomorphe Funktion $g_n : V_n \to \mathbb{C}$ in einer Umgebung V_n von 0 gibt, so dass $f(z^n) = (g_n(z))^n$ für alle $z \in V_n \cap U$.

(b) (2 Punkte) Geben Sie jeweils (mit Beweis) den maximalen Radius einer offenen Kreisscheibe um 0 an, auf der die Funktionen $z \mapsto z + z^2$ bzw. $z \mapsto \frac{z}{(1-z)^2}$ holomorph und injektiv sind.

Abgabetermin: Dienstag, 5. Juni 2017 um 12 Uhr