Funktionentheorie
Sommersemester 2020

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Severin Barmeier

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mathphys/lehre/SoSe20/Funktionentheorie.html

# Übungsblatt 6

Abgabetermin 24.06.2020

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt und schicken Sie Ihre Abgabe per Email an Ihren Tutor.*
*Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.*

**Aufgabe 21.** *Lokale Umkehrfunktionen und Biholomorphie.* Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei $g\colon \widetilde{U}_0 \to \mathbb{C}$ eine lokale Umkehrfunktion von $f$, das heißt $\widetilde{U}_0 \subset \mathbb{C}$ ist ein Gebiet, so dass $g(\widetilde{U}_0) \subset U$, $g$ ist holomorph und $f \circ g = \mathrm{id}_{\widetilde{U}_0}$. Es sei $U_0 := g(\widetilde{U}_0)$. Zeigen Sie:

(a) (1 Punkt) $g \circ f|_{U_0} = \mathrm{id}_{U_0}$ und $\widetilde{U}_0 = f(U_0)$.

(b) (2 Punkte) $U_0$ ist ein Gebiet, so dass die Einschränkung $f|_{U_0}\colon U_0 \to \widetilde{U}_0$ biholomorph ist.

(c) (1 Punkt) $(f|_{U_0})'(z) \neq 0$ für alle $z \in U_0$.

**Aufgabe 22.** *Hauptzweig des Logarithmus.* Es seien

$$\begin{aligned} \widetilde{U}_0 &:= \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \\ U_0 &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \in (-\pi, \pi)\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) (1 Punkt) Es existiert eine holomorphe Funktion $g\colon \widetilde{U}_0 \to U_0$ mit $g(1) = 0$, die eine Stammfunktion für $G\colon \widetilde{U}_0 \to \mathbb{C}$, $w \mapsto 1/w$ ist.

(b) (3 Punkte) Die Funktion $g$ ist biholomorph mit Umkehrfunktion $\exp\colon U_0 \to \widetilde{U}_0$.

Die Funktion $g$ wird *Hauptzweig des Logarithmus* genannt und mit ln bezeichnet.

**Aufgabe 23.** *Arcussinusfunktion.* Bestimmen Sie eine lokale Umkehrfunktion von der ganzen Funktion $\sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, indem Sie den Hauptzweig des Logarithmus aus Aufgabe 22 verwenden.

**Aufgabe 24.** *Häufungspunkte.* Es sei $N \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge. Ein *Häufungspunkt* von $N$ ist ein Punkt $c \in \mathbb{C}$, so dass für alle $R > 0$ die offene Kreisscheibe $\mathrm{D}_R(c)$ um $c$ mindestens einen Punkt in $N$ enthält, der von $c$ verschieden ist.

Bestimmen Sie die Häufungspunkte der folgenden Mengen $N \subset \mathbb{C}$:

(a) (1 Punkt) $N = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$

(b) (1 Punkt) $N = \mathbb{Z}$

(c) (2 Punkte) $N = \mathrm{D}_1(0) \cup \{-2, -1, 1, 2\}$.