

Übungsblatt 9

Abgabe: 7. Januar, 2014

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 33: Zeigen Sie: Das Tangentialbündel jeder Liegruppe ist trivial. (Siehe Aufgabe 10.)

Aufgabe 34: Es sei $G = \mathrm{SU}(2)$ die Liegruppe definiert in Aufgabe 30.

- (a) Finden Sie die 1-Parameter-Untergruppen von G . Was sind deren Bilder in S^3 unter dem Diffeomorphismus $\Psi := \Phi^{-1} : \mathrm{SU}(2) \rightarrow S^3$ aus Aufgabe 30 (c)?
- (b) Bestimmen Sie die Vektorfelder $\{X_1, X_2, X_3\} \subset \mathcal{X}^G(G)$ mit $X_i(E) = \sigma_i$ für $i = 1, 2, 3$. (Die Matrizen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sind in Aufgabe 30 (b) definiert.)

Aufgabe 35:

- (a) Finden Sie eine biinvariante Metrik auf $\mathrm{SU}(2)$.
- (b) Finden Sie eine linksinvariante Metrik auf $\mathrm{SU}(2)$, die nicht biinvariant ist.

Aufgabe 36: Es sei

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

die Heisenberggruppe wie in Aufgabe 32.

- (a) Finden Sie die 1-Parameter-Untergruppen von H .
- (b) Es sei g die Riemannsche Metrik auf H aus Aufgabe 32 (c). Zeigen Sie, dass diese Metrik linksinvariant ist. Ist g biinvariant?
- (c) Finden Sie die Geodätischen bezüglich dieser Metrik g .
Hinweis: Zeigen Sie: Wegen Aufgabe 31 (d) genügt es die Geodätischen $\gamma(t)$ mit $\gamma(0) = E$ zu finden. Dann ist

$$\dot{\gamma}(0) = \begin{bmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Um diese Geodätische zu finden, drücken Sie $\dot{\gamma}(t) = \dot{x}(t)\partial_x + \dot{y}(t)\partial_y + \dot{z}(t)\partial_z$ bezüglich der Basis A, B, C aus Aufgabe 32 aus und nutzen Sie die Ergebnisse von Aufgabe 32 (c), d.h.

$$\begin{aligned}\nabla_A B = -\nabla_B A = \frac{1}{2}C & \quad \nabla_B C = \nabla_C B = \frac{1}{2}A & \quad \nabla_C A = \nabla_A C = -\frac{1}{2}B \\ \nabla_A A = \nabla_B B = \nabla_C C = 0.\end{aligned}$$

Zeigen Sie zunächst, dass $\dot{z}(t) - x(t)\dot{y}(t) = c$ für alle t .

- (d) Sind diese Geodätischen Verschiebungen der 1-Parameter-Untergruppen von H ?

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

**Wir wünschen Ihnen ein Frohes Weihnachtsfest
und einen guten Start ins Jahr 2014!**