Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Anda Degeratu
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2013/2014
8. Januar, 2013

Übungsblatt 10

Abgabe: 14. Januar, 2014

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 37: Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, und es sei L das Längenfunktional auf der Menge der stetigen stückweise-$\mathcal{C}^1$-Kurven.

(a) Zeigen Sie, dass das Längenfuntional invariant unter Umparametrisierung ist, d.h. für $\gamma\colon [a, b] \to M$ eine Kurve und $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine glatte bijektive Abbildung gilt $L(\gamma \circ \varphi) = L(\gamma)$.

(b) Es sei $\gamma\colon [a, b] \to M$ eine stetige stückweise-$\mathcal{C}^1$-Kurve mit $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$, in denen $\dot{\gamma}(t)$ definiert ist. Zeigen Sie:

   (i) Es gibt eine Umparametrisierung $\hat{\gamma}\colon [0, L(\gamma)] \to M$ von γ mit $\|\dot{\hat{\gamma}}(\tau)\| = 1$ für alle $\tau \in [0, L(\gamma)]$, für die $\dot{\hat{\gamma}}(\tau)$ definiert ist.

   (ii) Es gilt $L(\hat{\gamma}|_{[0,\tau]}) = \tau$ für alle $\tau \in [0, L(\gamma)]$, falls $\hat{\gamma}$ die Umparametrisierung aus (i) ist.

   Bemerkung: Die Kurve $\hat{\gamma}$ ist nach der *Bogenlänge* parametrisiert. Diese Übung zeigt, dass jede stetige stückweise-$\mathcal{C}^1$-Kurve eine nach der Bogenlänge parametrisierte Umparametrisierung hat.

Aufgabe 38: Es sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für alle $x, y \in M$ definieren wir

$$d(x, y) := \inf \{L(\gamma) \mid \gamma \text{ ist eine stückweise-}\mathcal{C}^1\text{-Kurve von } x \text{ nach } y\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ ist wohldefiniert.

(b) d ist ein Abstand auf M, d.h. für alle $x, y, z \in M$ gilt

   (i) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0$ genau dann wenn $x = y$;

   (ii) $d(x, y) = d(y, x)$;

   (iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

(c) (Freiwillig) Die von d induzierten Topologie auf M ist genau die Mannigfaltigkeitstopologie.

Aufgabe 39: Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, und es sei E das Energiefunktional auf der Menge der stetigen stückweise-$\mathcal{C}^1$-Kurven.

(a) Zeigen Sie, dass das Energiefunktional nicht invariant unter Umparametrisierung ist.

(b) Es sei $\gamma\colon [a, b] \to M$ eine stückweise-$\mathcal{C}^1$-Kurve. Die Kurve γ heißt *minimal*, falls $L(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$, wobei $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ der Abstand aus Aufgabe 38 ist. Zeigen Sie:

(i) Falls γ eine minimale nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve ist, dann ist γ eine Geodätische.

Bemerkung: Aus der Vorlesung wissen Sie, dass die Geodätischen **lokal** die Länge minimieren. Diese Übung zeigt, dass die kürzeste Kurve zwischen zwei **beliebigen** Punkten eine Geodätische ist.

(ii) Falls für jede andere Kurve $c\colon [a, b] \to M$ von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ gilt, dass $E(\gamma) \leq E(c)$ ist, dann ist γ eine Geodätische.

Hinweis: 1. Es sei $c\colon [a, b] \to M$ eine stetige stückweise-$\mathcal{C}^1$-Kurve. Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Schwartz-Ungleichung, dass $L(c)^2 \leq (b - a)E(c)$ gilt, mit "=" genau dann wenn $\|\dot{c}(t)\|$ konstant ist.
2. Zeigen Sie: Falls γ die Energie für alle Kurven $c\colon [a, b] \to M$ von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ minimiert, dann ist $\|\dot{\gamma}(t)\|$ konstant.
3. Benutzen Sie Teil (i), um den Beweis zu beenden.

Aufgabe 40:

(a) Es seien $\gamma\colon [a, b] \to M$ eine glatte Kurve und Y ein Vektorfeld entlang γ. Zeigen Sie: Es gibt eine Variation H von γ mit Variationsvektorfeld Y. Falls $Y(a) = 0$ und $Y(b) = 0$, dann gibt es eine Variation mit festen Endpunkten.

(b) (Die erste Variations-Formel der Bogenlänge) Es sei $\gamma\colon [a, b] \to M$ eine glatte nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Es sei $H\colon [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine Variation von γ mit Variationsvektorfeld Y. Zeigen Sie:

$$\frac{d}{ds} L(\gamma_s)\big|_{s=0} = g(Y(t), \dot{\gamma}(t))\big|_a^b - \int_a^b g(Y(t), \nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t))\, dt.$$

(c) Falls in (b) γ eine Geodätische und H eine Variation mit festen Endpunkten ist, dann gilt

$$\frac{d}{ds} L(\gamma_s)\big|_{s=0} = 0.$$

(d) Es sei $\gamma\colon [a, b] \to M$ eine glatte nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit

$$\frac{d}{ds} L(\gamma_s)\big|_{s=0} = 0$$

für jede Variation H mit festen Endpunkten. Zeigen Sie, dass γ eine Geodätische ist.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.