Proseminar über Fourieranalysis im Sommersemester 09

Motivation aus der Physik

Jan-Hendrik Treude*

Institut für Mathematik und Physik
Universität Freiburg

In diesem einführenden Vortrag wollen wir anhand von Beispielen aus der Physik das Problem der Fourierzerlegung einer Funktion motivieren. Nach einem kurzen, vorbereitenden Abschnitt über den harmonischen Oszillator werden wir anhand des Problems der schwingenden Saite auf die Frage nach der Fourierzerlegung einer Funktion stoßen.

1. Der Harmonische Oszillator

Zu Beginn wollen wir uns mit dem Beispiel des *harmonischen Oszillators* beschäftigen. Dieser ist das einfachste Beispiel für eine harmonische Schwingung und die Lösungen des harmonsichen Oszillators werden uns in den nachfolgenden Kapiteln ständig begleiten. Die Situation ist die folgende:

- Eine Masse $m > 0$ hängt an einer Feder und lässt sich in horizontaler Richtung bewegen.
- Es gibt eine Ruhelage, in der die Masse an einem festen Ort bleibt. In Bezug auf diesen Ort soll die zeitliche Auslenkung nach links oder rechts mit $x(t)$ bezeichnet werden.
- Bei kleinen Auslenkungen aus der Ruhelage erfährt die Masse eine *rücktreibende* Kraft F, die direkt proportional zur Auslenkung x ist, d.h. es gilt

$$F = -kx \tag{1.1}$$

  mit einer Konstanten $k > 0$, die auch Federkonstante genannt wird.
- Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz $F = m\ddot{x}$ lautet somit die Bewegungsgleichung für die Masse

$$m\ddot{x} = -kx \tag{1.2}$$

  oder in der üblichen Formulierung

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0} \tag{1.3}$$

  mit $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Die letzte Gleichung wird *Gleichung des harmonischen Oszillators* genannt.

Bemerkung 1.1 Die Gleichung des harmonischen Oszillators hat folgende Eigenschaften:

i.) Es ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert deshalb zu vorgegebenen Anfangsbedingungen $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ eine eindeutige (maximale) Lösung.

*E-mail: jhtreude@gmx.de

ii.) Die Gleichung ist *linear* in x.

Die zweite Eigenschaft erlaubt es, die allgemeine Lösung recht einfach zu konstruieren. Da wir diese später brauchen werden, wollen wir dies im folgenden Satz tun.

Satz 1.2 (Lösung des harmonischen Oszillators) *Die allgemeine Lösung der Gleichung $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$ ist gegeben durch*

$$x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t). \tag{1.4}$$

Hier sind $a, b \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten, die durch die Anfangsbedingungen *$x(0)$ und $\dot{x}(0)$ bestimmt sind.*

Beweis: Man überzeugt sich schnell, dass die Funktionen $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ beides Lösungen von (1.3) sind. Da die Gleichung *linear* ist, ist somit auch jede Linearkombination von Lösungen wieder eine Lösung. Insbesondere ist der Lösungsraum ein Vektorraum, da auch $x(t) = 0$ eine Lösung ist. Wir werden nun zeigen, dass die Dimension dieses Raumes gleich zwei ist, woraus der erste Teil der Behauptung folgt. Der zweite Teil folgt direkt aus

$$x(0) = a \qquad \dot{x}(0) = b\,\omega.$$

Für die Dimensionsaussage führt man zuerst die Gleichung zweiter Ordnung auf ein System von zwei Gleichungen erster Ordnung zurück: Sei $y(t) = \dot{x}(t)$, dann ist $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ gleichwertig mit den beiden Gleichungen

$$\dot{x} = y \qquad \dot{y} = -\omega^2 x,$$

die sich aufgrund der Linearität der Gleichung zusammenfassen lassen zu

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2 x \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

Wir suchen also eine Funktion $\mathbf{z} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}(t).$$

Jede solche Funktion ist allerdings von der Form

$$\mathbf{z}(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}} \cdot \mathbf{z}_0.$$

In der Tat prüft man leicht nach, dass dies wirklich eine differenzierbare Abbildung ist, die $(*)$ erfüllt. Ist weiter $\widetilde{\mathbf{z}}$ eine weiter Lösung von $(*)$, so betrachte die Abbildung

$$\mathbf{w}(t) = \mathrm{e}^{-t\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{z}}.$$

Man berechnet mit der Produktregel

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = -\mathbf{A} \cdot \mathrm{e}^{-t\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{z}}(t) + \mathrm{e}^{-t\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\dot{\widetilde{\mathbf{z}}}(t)}_{=\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{z}}(t)} = 0,$$

wo wir im letzten Schritt verwendet haben, dass wir die Matrix $\mathbf{A}$ and der Exponentialreihe $\mathrm{e}^{-t\mathbf{A}}$ vorbeiziehen dürfen, da $\mathbf{A}$ mit sich selbst kommutiert. Damit ist die Abbildung $\mathbf{w}(t)$ konstant und aus den bekannten Rechenregeln für die Exponentialfunktion von Matrizen folgt somit $\widetilde{\mathbf{w}}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{w}_0$. Dann bilden aber

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{e}^{\mathbf{A}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Lösungsraums, womit der Beweis fertig ist. $\square$

Eine schließende Bemerkung zu diesem Abschnitt: Der harmonische Oszillator wird beschrieben durch eine gewöhnliche Differentialgleichung. Diese kann gesehen werden als *Entwicklungsgleichung* für den Zustand des Systems "Masse". Wie wir gerade gesehen haben, ist die Lösung eindeutig festgelegt durch die beiden *Anfangsbedingungen* "Startpunkt" und "Startgeschwindigkeit". Dies ist ein typisches Feature: Gewöhnliche Differentialgleichung verlangen Anfangsbedingungen zur eindeutigen Lösbarkeit. Wir werden sehen, dass im Falle von partiellen Differentialgleichungen die Dinge anders stehen.

2. Die schwingende Saite und die Wellengleichung

In diesem Kapitel beginnt nun der eigentliche Teil des Vortrags. Wir werden uns mit dem Problem der schwingenden Saite beschäftigen und bei dem Versuch dieses zu lösen auf das Problem stoßen, eine Funktion als Fourrierreihe darzustellen. Zuerst wollen wir ein Modell für die schwingende Saite aufstellen.

2.1 Herleitung des Problems

Wir betrachten das folgende Problem: Finde eine Bewegungsgleichung für eine an beiden Enden fest eingespannte Saite, die sich vertikal bewegen kann. Zur Beschreibung des Systems führen wir die Funktion $u(x,t)$ ein, die die Auslenkung der Saite an der Stelle x zum Zeitpunkt t angibt. Wir wollen nun eine Gleichung für diese Funktion finden.

Zur Vereinfachung stellen wir uns zunächst die Saite als (diskretes) System von N gekoppelten Massepunkten in gleichen Abständen $\ell = \frac{L}{N}$ vor, die vertikal schwingen können. Anschließend wollen wir einen sogenannten *Kontinuumslimes* vornehmen, d.h. wir betrachten die Situation $\ell \to 0$ bzw. $N \to \infty$.

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichung $y_n(t) = u(x_n, t)$ mit $x_n = n\frac{L}{N}$ machen wir drei Annahmen:

i.) Es gibt nur eine Beeinflussung durch die beiden nächsten Nachbarn.

ii.) Die Kraft ist direkt proportional zur Differenz der (vertikalen) Auslenkung.

iii.) Die Kraft ist umgekehrt proportional zum Abstand ℓ des nächsten Nachbarn.

Aus diesen drei Annahmen folgt für die Kraft F_n, die auf den n-ten Massepunkt wirkt

$$F_n = k\frac{y_{n+1} - y_n}{\ell} + k\frac{y_{n-1} - y_n}{\ell} = \frac{k}{\ell}\left(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}\right). \tag{2.1}$$

Dabei ist $k > 0$ die Proportionalitätskonstante. Die Vorzeichen macht man sich leicht anhand der Skizze (??) plausibel. Bevor wir den Kontinuumslimes vollziehen, müssen wir eine weitere physikalische Annahmen machen. Wir nehmen an, die Saite habe konstante Massendichte $\rho = \frac{M}{L}$, womit jeder Massepunkt die Masse $m_n = \frac{M}{N} = \frac{M}{L}\ell = \rho\ell$ hat. Mit dem zweiten Newtonschen Gesezt lautet dann die Bewegungsgleichung für die n-te Masse

$$\rho\ell\ddot{y}_n(t) = \frac{k}{\ell}\left(y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) - 2y_n(t)\right).$$

Daraus formen wir mit $u(x_n, t) = y_n(t)$ und $x_{n\pm1} = x_n \pm \ell$ um

$$\begin{aligned}\ddot{u}(x_n, t) &= \frac{k}{\rho}\frac{u(x_n + \ell, t) + n(x_n - \ell, t) - 2u(x_n, t)}{\ell^2} \\ &= \frac{k}{\rho}\frac{1}{\ell^2}\end{aligned}$$

$$\left(u(x_n,t)+u'(x_n,t)\ell+\frac{1}{2}u''(x_n,t)\ell^2+\mathcal{O}(\ell^3)+u(x_n,t)+u(x_n,t)(-\ell)+\frac{1}{2}u''(x_n,t)(-\ell)^2+\mathcal{O}(\ell^3)-2u(x_n,t)\right)$$

$$=\frac{k}{\rho}\frac{u''(x_n,t)\ell^2+\mathcal{O}(\ell^3)}{\ell^2}\overset{(l\to 0)}{\longrightarrow}\frac{k}{\rho}u''(x_n,t).$$

Dabei haben wir angenommen, dass die Funktion $u(x,t)$ im ersten Argument differenzierbar genug ist, um sie als ein Taylorpolynom zweiten Grades mit Restglied schreiben zu können. Wir erhalten also im Kontinuumslimes die folgende Gleichung für $u(x,t)$:

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{2.2}$$

mit $c=\sqrt{\frac{k}{\rho}}$. Dies ist gerade die **(1+1)-dimensionale Wellengleichung**. Da wir nun "unendlich viele" Massenpunkte haben ($\ell\to 0$), ist $x\in[0,L]$.

Bemerkung 2.1 Wir bemerken kurz zwei Eigenschaften dieser Gleichung:

i.) Es ist eine *partielle* Differentialgleichung zweiter Ordnung.

ii.) Die Gleichung ist*linear* in u.

Der zweite Punkt wird wieder eine tragende Rolle in der Lösungstheorie spielen. In der Tat ist es genau aufgrund dieser Eigenschaft, dass die Techniken der Fourieranalysis hier überhaupt nützlich sind.

2.2 Skalierung

In diesem Abschnitt soll anhand der Wellengleichung illustriert werden, wie man oft geschickt zu anderen Variablen übergehen kann, in denen die Gleichungen strukturell etwas einfacher sind. Speziell im Fall der (1+1)-dimensionalen Wellengleichung betrachten wir die Abbildung

$$\phi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2,\qquad \phi(x,t)=(ax,bt)=:(y,\tau). \tag{2.3}$$

Diese ist ein Diffeomorphismus für alle $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Die Funktion $u(x,t)$ wird unter dieser Variablentransformation zu einer neuen Funktion

$$\widetilde{u}(y,\tau)=(\phi^*u)(y,\tau)=u(\phi^{-1}(y,\tau))=u(\frac{1}{a}y,\frac{1}{b}\tau). \tag{2.4}$$

Es gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial y^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad\text{und}\qquad\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial \tau^2}=\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

erfüllt also u die Wellengleichung (2.2), so erfüllt $\widetilde{u}$ die Gleichung

$$\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial y^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial \tau^2}. \tag{$*$}$$

Erfüllt andersherum $\widetilde{u}$ diese Gleichung, so erfüllt u die ursprüngliche Wellengleichung, da ϕ ein Diffeomorphismus ist. In diesem Sinne sind die beiden Funktionen "gleichwertig". Deswegen kann man genausogut in den neuen Variablen y und τ arbeiten. Da a und b beliebig waren, kann man zunächst a so wählen, dass gilt

$$x\in[0,L]\Leftrightarrow y\in[0,\pi]. \tag{2.5}$$

Den zweiten Parameter b kann man anschließend so wählen, dass gilt

$$\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{c^2} = 1, \tag{2.6}$$

dann lautet $(*)$ einfach

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \tau^2}. \tag{2.7}$$

Physikalisch gesprochen haben wir mit dieser Variablentransformation unsere Einheiten umskaliert, mathematisch ist dies natürlich nur ein geschickter Rechentrick. Da dies immer möglich ist, wollen wir im Folgenden stets davon ausgehen, dass die Variablen geeignet skaliert worden sind und zwecks einfacherer Notation wieder $u(x,t)$ anstelle $\widetilde{u}(y,\tau)$ schreiben.

2.3 Lösung der Wellengleichung durch laufende Wellen

Wir wollen nun zwei Methoden besprechen, um die Wellengleichung (2.7) zu lösen. Die erste Methode bedient sich sogenannter *laufender Wellen*. Die physikalische Idee dahinter ist die Folgende:

Eine ruhende Saite werde an einer Stelle x_0 kurz ausgelenkt (Zupfen einer Gitarrensaite). Als Folge breitet sich die Auslenkung nach rechts und links aus $\rightsquigarrow$ Nach links und rechts laufende Wellen. Diese werden an den Enden reflektiert und laufen wieder in die andere Richtung zurückt. Wenn sie sich treffen, "überlagern" sie sich und laufen durcheinander durch.
$\Rightarrow$ Es laufen stets zwei gegenläufige Wellen durch die Saite, die zusammen die gesamte Bewegung der Saite ergeben.

Die mathematische Übersetzung dieser Idee ist die wie folgt. Betrachte die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.8}$$

Sei $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige (geeignet differenzierbare) Funktion, dann lösen $u_1(x,t) = F(x+t)$ und $u_2(x,t) = F(x-t)$ die Wellengleichung, denn es gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = F'' = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = F'' = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}.$$

u_1 und u_2 können als nach links bzw. nach rechts laufende Wellen interpretiert werden. Betrachte dazu den Graphen der Funktion

$$x \mapsto u_2(x,t)$$

für verschiedene "Parameter" t.

$\rightsquigarrow$ Der Graph $F(x) = u_2(x,0)$ "wandert" für steigendes t nach rechts. Seien $x_0, x_1, t \in \mathbb{R}$ gegeben mit $x_0 = x_1 - t$ und somit $u_2(x_0,0) = F(x_0) = F(x_1 - t) = u_2(x_1,t)$, so kann man sagen, der Graph bewege sich mit Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lim_{t\to 0}\frac{x_1 - x_0}{t} = 1$$

nach rechts. Der Wert 1 kommt natürlich durch die spezielle Skalierung zustande. In diesem Sinne ist u_2 eine nach rechts laufende "Welle" und u_1 eine nach links laufende Welle. Man beachte, dass hier nichts über die Form der Welle gesagt wird. Weiter ist die Wellengleichung *linear* und somit ist mit u_1 und u_2 auch

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

eine Lösung. Dies entspricht gerade der *Überlagerung* der beiden Wellen. Da die nach links und die nach rechts laufenden Wellen nicht unbedingt die selben sein müssen, ist eine etwas allgemeiner Lösung der Wellengleichung gegeben durch

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)$$

für zwei "beliebige" Funktionen $F, G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Wir werden nun zeigen, dass jede Lösung der Wellengleichung in dieser Form geschrieben werden kann.

Satz 2.2 (Lösung der Wellengleichung durch laufende Wellen) *Jede Lösung der Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ist von der Form*

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t), \tag{2.9}$$

wo $F, G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei zweimal differenzierbare Funktionen sind.

Beweis: Sei $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Lösung der Wellengleichung, d.h. es gilt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u = 0.$$

Wechsle nun auf sogenannte "Lichtkegelkoordinaten", d.h. betrachte den Diffeomorphismus

$$\phi : \mathbb{R}^2 \ni (x,t) \mapsto (\xi, \eta) = (x+t, x-t) \in \mathbb{R}^2.$$

Der Name erklärt sich, wenn man sich die Transformation grafisch veranschaulicht. Unter dieser transformiert sich die Funktion u zu

$$v(\xi,\eta) = (\phi_* u)(\xi,\eta) = u(\phi^{-1}(\xi,\eta)).$$

Es ändern sich aber auch die Differentialoperatoren gemäß der Kettenregel und Produktregel zu

$$\frac{\partial}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial t}}_{=1} \frac{\partial}{\partial \xi} + \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial t}}_{=-1} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{=1} \frac{\partial}{\partial \xi} + \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{=1} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$

Also erfüllt $u(x,t)$ die Wellengleichung genau dann, wenn $v(\xi,\eta)$ die Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

erfüllt. Die allgemein Lösung dieser Gleichung ist aber gegeben durch

$$v(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

für zwei beliebige (geeignet differenzierbare) Funktionen $F, G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt aber

$$u(x,t) = v(\phi(x,t)) = F(x+t) + G(x-t),$$

was gerade die Behauptung war. □

Wir haben also gesehen, dass jede Lösung der Wellengleichung als eine Überlagerung zweier laufender Wellen geschrieben werden kann. Es ist allerdings zu beachten, dass zwar jede solche Überlagerung die Wellengleichung löst, aber nicht zwingend eine Lösung für die schwingende Saite darstellt. Dort haben wir die zusätzliche *Randbedingung*, dass die Saite an beiden Enden fest eingespannt ist, d.h.

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{für alle } t. \tag{2.10}$$

Diese Forderung schränkt die Wahl der Funktionen F und G ein, denn aus ihr folgen

$$\textit{i.)}\ \ 0 = u(0,t) = F(t) + G(-t) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{F(t) = -G(-t)}$$

$$\textit{ii.)}\ \ 0 = u(\pi,t) = F(\pi+t) + G(\pi-t) \quad \Rightarrow \quad F(\pi+t) = -G(\pi-t) \overset{i.)}{=} F(t-\pi)$$

$$\overset{(t=t'+\pi)}{\Rightarrow} \boxed{F(t'+2\pi) = F(t')}.$$

Diese Bedingungen schränken zwar die Wahl von F und G ein, es gibt aber immer noch viele verschiedene Lösungen. Beim harmonischen Oszillator haben wir gesehen, dass dort die Lösung eindeutig wurde, wenn man zwei zusätzliche *Anfangsbedingungen* gestellt hat, nämlich den Anfangsort und die Anfangsgeschwindigkeit. Etwas in dieser Art würde man auch von der schwingenden Saite erwarten, sollte unsere mathematische Modellierung dieses Modell zutreffend beschreiben. Da wir es auch hier mit einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zu tun haben, versuchen wir in Analogie zum harmonischen Oszillator die Anfangsauslenkung $u(x,0)$ und die Anfangsgeschwindigkeitsverteilung $\dot{u}(x,0)$ der Saite vorzugeben. Daraus folgen zwei weitere Bedingungen

$$\textit{iii.)}\ \ u(x,0) = F(x) + G(x)$$

$$\textit{iv.)}\ \ \dot{u}(x,0) = F'(x) - G'(x).$$

Diese beiden Bedingungen liefern nun wirklich eine eindeutige Lösung. Um dies einzusehen differenziert man *iii.)* nach x und addiert bzw. subtrahiert das Resultat zu bzw. von *iv.)*. Dies ergibt

$$2F'(x) = u'(x,0) + \dot{u}(x,0)$$

$$2G'(x) = u'(x,0) - \dot{u}(x,0).$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich aber durch einfache Integration lösen und man erhält

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(u(x,0) + \int_0^x \dot{u}(x',0)\,\mathrm{d}x'\right) + C_1$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\left(u(x,0) - \int_0^x \dot{u}(x',0)\,\mathrm{d}x'\right) + C_2.$$

Wegen $F(x) + G(x) = u(x,0)$ muss $C_1 + C_2 = 0$ gelten und man erhält letztendlich als eindeutige Lösung

$$\boxed{u(x,t) = F(x+t) + G(x-t) = \frac{1}{2}\left(u(x+t,0) + u(x-t,0)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \dot{u}(x',0)\,\mathrm{d}x'} \tag{2.11}$$

Bemerkung 2.3 Ein Problem mag hier ins Auge stechen: die Anfangsbedingungen $u(x,0)$ und $\dot{u}(x,0)$ der Saite sind zuerst einmal nur für $x \in [0,\pi]$ gegeben. In (2.11) werden für größer werdendes t aber auch ganz andere Werte relevant. Man kann sich plausibel machen, dass man dieses Problem so lösen kann, dass man die Anfangsbedingungen zuerst antisymmetrisch auf $[-\pi,\pi]$ fortsetzt und anschließend 2π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$. Außerdem überlegt man sich schnell, dass dann die Funktionen F und G automatisch die Bedingunge *i.)* und *ii.)* erfüllen. Bei dieser Fortsetzung der Anfangsbedingungen entsteht natürlich die Frage, wie sich die entstandene Funktion an den Punkten $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ verhält. Da bei den Überlegungen hier aber die Motivation im Vordergrund steht, wollen wir nicht auf solche Details eingehen.

2.4 Lösung der Wellengleichung durch stehende Wellen

Wir wollen nun einen zweiten Lösungsansatz machen, der uns dann auch endlich auf das Problem der Fourierentwicklung einer Funktion führen wird.

Die physikalische Motivation ist die Folgende: Bei einer schwingenden Saite gibt es spezielle Schwingungstypen, die die Saite ausführen kann, die sogenannten *Normalmoden* oder auch *stehenden Wellen*. Abbildung (??) zeigt eine solche. Charakteristische für eine stehende Welle ist, dass es ein Grundprofil gibt, dessen Amplitude zwar mit der Zeit variiert, dessen prinzipielle Form allerdings stabil bleibt. D.h. es gibt feste *Knoten*, an denen die Saite nie ausgelenkt ist und zwischen zwei Knoten schwingt die Saite (unterschiedlich stark) vertikal.

Die mathematische Beschreibung ist wie folgt: Das Grundprofil wird beschrieben durch eine Funktion $\varphi(x)$ und die Schwingung wird durch eine Verstärkungsfunktion $\psi(t)$ eingebaut. Man macht also den Ansatz

$$u(x,t) = \psi(t)\varphi(x). \tag{2.12}$$

Setzt man diesen Ansatz in die Wellengleichung ein, so erhält man die Gleichung

$$\ddot{\psi}(t)\varphi(x) = \psi(t)\varphi''(x). \tag{2.13}$$

Vergessen wir einmal kurz, dass φ und ψ Nullstellen haben können, so erhält man durch Division die Gleichung

$$\frac{\ddot{\psi}(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}. \tag{2.14}$$

Diese Gleichung muss für alle x und t (bis auf Nullstellen) gelten. Da die linke Seite nur von t abhängt und die rechte Seite nur von x, müssen deshalb beide Seiten gleich einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$ sein. Das heißt, wir erhalten die beiden Gleichungen

$$\ddot{\psi}(t) - \lambda\psi(t) = 0 \qquad \text{und} \qquad \varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0. \tag{2.15}$$

Für $\lambda < 0$, d.h. $\lambda = -k^2$ sind dies gerade die Gleichungen des harmonischen Oszillators, womit gilt

$$\psi(t) = A\cos(kt) + B\sin(kt) \qquad \text{und} \qquad \varphi(x) = C\cos(kx) + D\sin(kx).$$

Wir müssen noch die Randbedingungen $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ für alle t berücksichtigen, die gleichbedeutend sind mit $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Daraus folgen die Einschränkungen $C = 0$ und

$$\sin(k\pi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.16}$$

Damit lauten die auf diesem Wege erhaltenen Lösungen

$$\boxed{u_k(x,t) = (A_k\cos(kt) + B_k\sin(kt))\sin(kx)} \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.17}$$

Das Grundprofil ist also stets Sinus-förmig und mit höherem k treten mehr Knoten auf. In Abbildung (??) sind die ersten vier Grundprofile gezeichnet. Man nennt sie die *ersten, zweiten, ... Harmonischen* oder auch *Grundton, Erster Oberton, Zweiter Oberton, ...*. Für $\lambda > 0$ erhält man exponentiell ansteigende Lösungen, die die Randbedingungen nicht erfüllen können und somit zu verwerfen sind.

Die eben verwendete Lösungsmethode nennt man *Separation der Variablen*. Für den Erfolg der Methode war wesentlich, dass in der zu lösenden Gleichung keine gemischten Ableitungen vorkamen.

Wir haben also nun spezielle Lösungen konstruiert, die sogenannten *Normalmoden* der schwingenden Saite. Aufgrund der Linearität der Wellengleichung ("Superpositions-Prinzip") ist auch jede Linearkombination von Normalmoden wieder eine Lösung. Die Frage ist nun, ob wir mit Hilfe dieser speziellen Lösungen die allgemeinste Lösung konstruieren können. Da die allgemeine Lösung bei geeigneten Anfangsbedingungen jede der Normalmoden enthalten muss, ist es plausibel, dass wir bei der Konstruktion der allgemeinen Lösung alle Normalmoden verwenden müssten. Wir machen somit den Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt)) \sin(kx). \tag{2.18}$$

Bemerkung 2.4 Obwohl wir in dieser Motivation meist nur formal rechnen, so darauf hingewiesen, dass erstmal gar nicht klar ist, ob und wenn ja in welchem Sinne dieser Ansatz die Wellengleichung (mit Randbedingungen) löst. Zwar ist jede endliche Linearkombination von Lösungen wieder eine Lösung, bei unserem Reihenansatz müssten wir aber zuerst mehr über die eventuelle Konvergenz wissen, um überhaupt differenzieren zu können. Trotzdem ist der Ansatz auf einem rein formalen Level erstmal ziemlich plausibel.

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass die Anfangsauslenkung $f(x)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $g(x)$ die Lösung eindeutig festlegen. Man hat

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(kx) \tag{2.19}$$

$$g(x) = \dot{u}(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} kB_k \sin(kx), \tag{2.20}$$

wobei wir für die Anfangsgeschwindigkeit einfach mal so getan haben, als dürften wir gliedweise differenzieren. f und g können beliebige Funktionen auf $[0,\pi]$ sein, dei den Randbedingungen $f(0) = f(\pi) = 0$ und $g(0) = g(\pi) = 0$ genügen müssen. Die Frage, ob man die allgemeine Lösung der Wellengleichung durch Überlagerung von Normalmoden konstruieren kann ist also äquivalent zu folgendem Problem

Problem 2.5 (Fourier I) *Gegeben $f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(\pi) = 0$. Gibt es dann Koeffizienten $A_k \in \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(kx)? \tag{2.21}$$

Man beachte, dass das Problem in dieser Formulierung sehr vage ist. Man kann sich z.B. fragen

1.) In welchem Sinne ist die geforderte Konvergenz zu verstehen? Punktweise? Gleichmäßig? Lokal Gleichmäßig? Andere (geeignete) Konvergenzbegriffe?

2.) Muss man vielleicht an f irgendwelche Bedingungen wie Stetigkeit oder Differenzierbarkeit stellen?

3.) Hängen die möglichen Konvergenzforderungen vielleicht von der Klasse der betrachteten Funktionen ab? Ist f zum Beispiel nicht stetig, so kann es nicht Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen sein. Die Partialsummen einer Fourierentwicklung sind aber immer stetig.

Man kann das Problem der Fourierentwicklung noch etwas verallgemeinern. Lässt sich $f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ in einer Fourierreihe (2.21) darstellen, so kann man die antisymmetrisch fortgesetzte Funktion $\widetilde{f} : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, also

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ -f(-x) & x \leq 0 \end{cases}$$

sicherlich durch dieselbe Reiche darstellen, wenn man einfach Argumente $x \in [\pi, \pi]$ zulässt, da die einzelnen Partialsummen alle antisymmetrisch sind. Ist weiter $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine "beliebige" Funktion, dann kann man schreiben

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}(f(x) + f(-x))}_{f_s(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}(f(x) - f(-x))}_{f_a(x)}, \tag{2.22}$$

man kann also f in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil zerlegen. Für den antisymmetrischen Anteil kann man wie oben nach einer Entwicklung

$$f_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(kx)$$

suchen. Für den symmetrischen Anteil legt die Parität die Frage nach, ob man Koeffizienten $B_k \in \mathbb{R}$ finden kann mit

$$f_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos(kx).$$

Wir können also für $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ fragen, ob man Koeffizienten $A_k, B_k \in \mathbb{R}$ finden kann, sodass gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(kx) + B_k \cos(kx) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx) + B_k \cos(kx). \tag{2.23}$$

In einem letzten Schritt wollen wir unter Verwendung der Euler-Formel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos(kx) + \mathrm{i}\sin(kx) \tag{2.24}$$

eine etwas kompaktere Form der Fourierreihe finden. Zusätzlich erlauben wir, dass die Funktion f komplex-wertig ist. Die neue Formulierung unseres Problems lautet nun

Problem 2.6 (Fourier II) *Sei $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ "beliebig" gegeben. Gibt es dann Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$, sodass gilt*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}? \tag{2.25}$$

Bemerkung 2.7 Diese neue Formulierung beinhaltet wirklich unsere frühere, denn es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cos(kx) + \mathrm{i}a_k \sin(kx) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(a_k + a_{-k})}_{B_k} \cos(kx) + \underbrace{\mathrm{i}(a_k - a_{-k})}_{A_k} \sin(kx).\end{aligned}$$

Über die Komplex- oder Reellwertigkeit der Koeffizienten wollen wir uns hier nicht aufhalten.

Als nächstes wollen wir eine Formel für die gesuchten Koeffizienten a_k "erraten". Diese Raten wird plausibel, wenn man die Orthogonalitätsrelation

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{imx} \mathrm{e}^{-inx} \, \mathrm{d}x = \delta_{mn} \tag{2.26}$$

betrachtet. In einer formalen Rechnung multiplizieren wir also beide Seiten von (2.25) mit $\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}$ und integrieren anschließend von $-\pi$ bis π. Dann erhalten wir

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x. \tag{2.27}$$

Unter Verwendung dieser Gleichung geben wir eine Umformulierung unseres Problems

Problem 2.8 (Fourier III) *Für $f : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ seien Koeffizienten $a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x \in \mathbb{C}$ definiert. Gilt dann in irgendeinem noch zu spezifizierenden Sinne*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}? \tag{2.28}$$

Man beachte hier, dass dies erstmal wirklich eine Umformulierung ist und kein äquivalentes Problem, da in der Herleitung der Formel für die Koeffizienten Integration und Limesbilden der Reihe ohne Rechtfertigung vertauscht worden sind.

Bemerkung 2.9 Zu guter Letzt sein noch angemerkt, dass man an Stelle der Funktion $f : [\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ auch eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte 2π-periodische Funktion nehmen kann.