Konvergenz im quadratischen Mittel - Hilberträume

Contents

1 Ziel

Das Ziel dieses Abschnittes wird sein, die Konvergenz im quadratischen Mittel zu zeigen, dass heißt explizit:

1.1 Satz

Sei f integrierbar auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x) - S_N(f)(x)|^2 \, dx \to 0 \text{ wenn } \quad N \to \infty \tag{1}$$

wobei $S_N(f)(x)$ die Partialsumme der Fourierreihe darstellt.
Um dies zu zeigen, werden wir einige Hilfsmittel benötigen. So werden wir unendlich dimensionale Vektorräume mit bestimmten Eigenschaften kennen lernen und sie **Hilberträume** nennen. Außerdem werden wir sehen, was in diesem Kontext **Orthogonalität** bedeutet. Zusätzlich werden sich im Beweis die **Parseval Gleichung** und die **Besselsche Ungleichung** als willkommenes Nebenprodukt ergeben.

2 Endlich dimensionale Vektorräume

2.1 Defintion: Eigenschaften eines Vektorraum

Ein Vektorraum erfüllt per Defintion folgende Eigenschaften:

(i) Abgeschlossenheit unter Addition und skalarer Multiplikation, d.h
$A + B \in V \quad \forall A, B \in V$ und $\lambda \cdot A \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, A \in V$.

(ii) Addition und Multiplikation sind kommutativ und assoziativ.

(iii) Distributivität.

Außerdem wird auf einem Vektorraum das innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bzw. Skalarprodukt definiert.

2.2 Definition: Skalarprodukt

Ein <u>Skalarprodukt</u> oder <u>inneres Produkt</u> auf einem reellen Vektorraum V ist eine symmetrische positiv definite Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, d.h. für $x, y, z \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Bedingungen:

(i) bilinear:

$$\begin{aligned} \langle x+y,z\rangle &= \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle \\ \langle x,y+z\rangle &= \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle \\ \langle x,\lambda y\rangle &= \lambda \langle x,y\rangle \end{aligned}$$

(ii) symmetrisch:

$$\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$$

(iii) strikt positiv definit:

$$\langle x,x\rangle \geq 0, \text{ und } \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ein Skalarprodukt oder inneres Produkt auf einem komplexen Vektorraum V ist eine hermitsche positiv definite Sesquilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, d.h. für $x, y, z \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Bedingungen:

(i) sesquilinear:

$$\begin{aligned} \langle x+y,z\rangle &= \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle \\ \langle x,y+z\rangle &= \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle \\ \langle x,\lambda y\rangle &= \overline{\lambda} \langle x,y\rangle \end{aligned}$$

(ii) hermitesch:

$$\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$$

(iii) strikt positiv definit:

$$\langle x,x\rangle \geq 0, \text{ und } \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

2.3 Bemerkung

Das soeben definierte Skalarprodukt induziert eine Norm auf den Vektorräumen. Dabei ist die euklidische Norm $\| \cdot \|$ auf einem reelen Vektorraum gegeben durch:

$$\| X \| = \left(\sum_n x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

und über dem komplexen Vektorraum durch

$$\| Z \| = \left(\sum_n |z_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

2.4 Defintion: Orthogonalität

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Norm $\| \cdot \|$, dann heißen X,Y orthogonal, genau dann wenn $\langle X, Y \rangle = 0$. Schreibe $X \perp Y$.

2.5 Satz

Sei V ein endlicher $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Norm $\| \cdot \|$. Dann gilt

(i) Satz von Pythagoras: Sei $X, Y \in V$ mit $X \perp Y$.

$$\| X + Y \|^2 = \| X \|^2 + \| Y \|^2 \tag{2}$$

(ii) Cauchy-Schwarz-Ungleichung: Sei $X, Y \in V$.

$$| \langle X, Y \rangle | \leq \| X \| \cdot \| Y \| \tag{3}$$

(iii) Dreiecksungleichung: Sei $X, Y \in V$.

$$\| X + Y \| \leq \| X \| + \| Y \| \tag{4}$$

Beweis:

(i)

$$\begin{aligned} \| X + Y \|^2 &= \langle X + Y, X + Y \rangle \\ &= \langle X, X \rangle + \langle X, Y \rangle + \langle Y, X \rangle + \langle Y, Y \rangle \\ &= \| X \|^2 + \| Y \|^2 \end{aligned}$$

(ii) Unterscheide 2 Fälle: Sei zuerst $\| b \| = 0$. Dieser Fall ist trivial, da die Norm auf den betrachteten Räumen sofort impliziert, dass dann auch $b = 0$ gilt.

Sei nun $\| b \| \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
0 \leq \| a - \lambda b \|^2 &= \langle a - \lambda b, a - \lambda b \rangle \\
&= \langle a, a \rangle - \bar{\lambda} \langle a, b \rangle - \lambda \langle b, a \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle b, b \rangle \\
&= \langle a, a \rangle - \frac{\overline{\langle a, b \rangle}}{\| b \|^2} \langle a, b \rangle - \frac{\langle a, b \rangle}{\| b \|^2} \langle b, a \rangle + \frac{| \langle a, b \rangle |^2}{\langle b, b \rangle^2} \langle b, b \rangle \\
&= \langle a, a \rangle - \frac{| \langle a, b \rangle |^2}{\| b \|^2}
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
\| X + Y \|^2 &= \langle X + Y, X + Y \rangle \\
&= \langle X, X \rangle + \langle X, Y \rangle + \langle Y, X \rangle + \langle Y, Y \rangle \\
&\leq \| X \|^2 + | \langle X, Y \rangle | + | \langle Y, X \rangle | + \| X \|^2 \\
&\leq \| X \|^2 + 2 \| X \| \| Y \| + \| X \|^2 \\
&= (\| X \| + \| Y \|)^2
\end{aligned}
$$

$\square$

3 Hilberträume

Nach dieser Wiederholung wollen wir uns Vektorräumen unendlicher Dimension widmen.

3.1 Beispiel

Der Vektorraum $l^2(\mathbb{Z})$ ist der Raum aller Folgen in $\mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \infty \tag{5}$$

Elemente aus $l^2(\mathbb{Z})$ haben also die folgende Gestalt

$$A \in l^2(\mathbb{Z}) : A := (\ldots, a_{-n}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$$

Addition und skalare Multiplikation sind punktweise definiert. Das Skalarprodukt ist hermitsch

$$\langle A, B\rangle := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \overline{b_n}$$

und induziert eine Norm

$$\| A \|= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2\right)^{1/2}$$

Dies führt zu folgendem Satz.

3.2 Satz

$l^2(\mathbb{Z})$ ist ein unendlich dimensionaler Vektorraum, der die obigen Vektorraumaxiome erfüllt. Insbesondere gelten auch hier die genannten Ungleichungen.
Beweis:
Kommutativität, Assoziativität und Distributivität folgen direkt aus den entsprecheneden Eigenschaften im endlich dimensionalen Fall. Es bleibt also noch die Abgeschlossenheit zu zeigen. Dazu betrachten wir folgende Elemente A_N, B_N der Form

$$A_N := (\ldots, 0, a_{-n}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)$$

mit $a_n = 0$ für alle $|n|>N$. Dann folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \| A_N + B_N \| \leq \| A_N \| + \| B_N \| &\leq \| A \| + \| B \| \\ \Rightarrow \sum_{n\leq N} |a_n + b_n|^2 &\leq (\| A \| + \| B \|)^2 \\ \Rightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{n\leq N} |a_n + b_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n + b_n|^2 &\leq (\| A \| + \| B \|)^2 \leq \infty \end{aligned}$$

Dies ist die Dreiecksungleichung im unendlich dimensionalen Fall, sie liefert die Abgeschlossenheit unter Addition. Nahezu analog folgt dann

$$| \langle A_N, B_N\rangle | \leq \| A_N \| \cdot \| B_N \leq \| A \| \cdot \| B \|$$

Also konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \overline{b_n}$ absolut und es gilt Cauchy-Schwarz. Die Abgeschlossenheit unter skalarer Multiplikation folgt genauso durch

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda \cdot a_n|^2 = |\lambda|^2 \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \infty$$

Also ist $l^2(\mathbb{Z})$ ein Vektorraum und es gilt sowohl die Dreiecks- als auch die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

3.3 Bemerkung

(i) Das Skalarprodukt auf $l^2(\mathbb{Z})$ ist strikt positiv definit.

(ii) Der Vektorraum $l^2(\mathbb{Z})$ ist vollständig, d.h jede Cauchy Folge konvergiert.

3.4 Defintion: Hilbertraum

Ein Vektorraum mit Skalarprodukt und den Eigenschaften aus Bemerkung 3.3 heißt **Hilbertraum**. Wird eine der beiden obigen Eigenschaften nicht erfüllt so heißt er **Prä-Hilbertraum**.

3.5 Beispiel

(i) $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ sind endlich dimensionale Hilberträume.

(ii) $l^2(\mathbb{Z})$ ist demnach ein unendlich dimensionaler Hilbertraum.

(iii) Sei $\mathcal{R}$ der Vektorraum, der auf $[0, 2\pi]$ integrierbaren Funktionen über $\mathbb{C}$ mit Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx \tag{6}$$

und induzierter Norm

$$\| f \| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx \right)^{1/2} \tag{7}$$

Wir wollen nun sehen, dass auch hier die Dreiecksungleichung und die Cauchy-Schwarz-Ungleichung gelten. Dazu betrachten wir folgende einfache Umformung.

$$(a-b)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \quad \Leftrightarrow ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

Setze jetzt $a = \lambda^{1/2}|f(x)|$ und $b = \lambda^{-1/2}|g(x)|$. Dann gilt

$$|f(x) \cdot \overline{g(x)}| \leq \frac{1}{2} \left(\lambda |f(x)|^2 + \frac{1}{\lambda} |g(x)|^2 \right)$$

Integrieren liefert dann

$$\begin{aligned} |\langle f,g\rangle| &\leq \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lambda|f(x)|^2 + \frac{1}{\lambda}|g(x)|^2\,dx \leq \frac{1}{2}\left(\lambda \parallel f \parallel^2 + \frac{1}{\lambda} \parallel g \parallel^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\parallel g \parallel}{\parallel f \parallel} \parallel f \parallel^2 + \frac{\parallel f \parallel}{\parallel g \parallel} \parallel g \parallel^2\right) = \parallel g \parallel \cdot \parallel f \parallel \end{aligned}$$

wobei $\lambda = \frac{\|g\|}{\|f\|}$ gesetzt wurde mit $\parallel g \parallel, \parallel f \parallel \neq 0$. Also gilt die Cauchy-Schwarz Ungleichung und auch die Dreiecksungleichung kann auf diese Art und Weise gefolgert werden. (Dies wird aber an dieser Stelle nicht ausgeführt).

ABER:

$\mathcal{R}$ ist kein Hilbertraum. Denn $\parallel f \parallel = 0$ impliziert nicht, dass $f = 0$, sondern nur dass f an seinen Stetigkeitsstellen verschwindet. Man sagt in der Maßtheorie f ist μ-fast gleich 0, was bedeutet, dass f bis auf eine $\mu-$ Nullmenge gleich 0 ist.

Außerdem ist $\mathcal{R}$ nicht vollständig, was an dem folgendem Beispiel eingesehen werden kann.

Beispiel

Betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \log\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } 0 < x \leq 2\pi \end{cases}$$

Da f für $x \to 0$ gegen unendlich geht, ist f nicht beschränkt und damit auch nicht Riemann integrierbar, da man das Integral nicht durch Obersummen approximieren kann. Also ist $f \notin \mathcal{R}$. Aber die folgende Funktionenfolge

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0x \leq 1/n \\ \log\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } 1/n < x \leq 2\pi \end{cases}$$

ist eine Cauchy-Folge in $\mathcal{R}$ mit Grenzwert $f \notin \mathcal{R}$ (wenn dieser existiert). Also ist $\mathcal{R}$ nicht vollständig.

Beide Probleme können mithilfe der Lebesque Integrationstheorie behoben werden, indem man alle Funktionen, die bis auf eine Nullmenge miteinander übereinstimmen in einer Äquivalenzklasse zusammenfasst und anschließend den Quotientenraum von $\mathcal{R}$ betrachtet. (Siehe dazu zum Beispiel Goette Skript Analysis 3 L^p Räume).

Den Raum $\mathcal{R}/\sim := L^2$ nennt man dann den Raum der quadratintegrablen Funktionen. L^2 ist wieder ein Hilbertraum, während $\mathcal{R}$ nur ein Prä-Hilbertraum ist.

4 Konvergenz im l^2

Jetzt benötigen wir noch einige kleine Hilfsmittel und Abschätzungen, um den angestrebten Beweis vollenden zu können. Wie bereits zuvor erwähnt wird dabei Orthogonalität noch eine entscheidende Rolle spielen.

4.1 Bemerkung

Wir stellen fest, dass die Menge der Funktion $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $e_n = e^{inx}$ eine orthonormalbasis auf $\mathcal{R}$ bildet. Dass heißt

$$\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}$$

Wir können jetzt also jede auf $[0, 2\pi]$ integrierbare Funktion f in ihre Fourierdarstellung entwickeln mit Koeffizienten a_n:

$$\langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{inx} \, dx = a_n \tag{8}$$

sodass für die Partialsummenfolge gilt:

$$S_N(f) = \sum_{|n|\leq N} a_n e_n$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\langle f - \sum_{|n|\leq N} a_n e_n, \sum_{|n|\leq N} b_n e_n \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \cdot \overline{\sum_{|n|\leq N} b_n e_n} \, dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{|n|\leq N} a_n e_n \overline{b_n e_n} \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{|n|\leq N} \left(\int_0^{2\pi} f \cdot \overline{b_n e_n} \, dx - a_n \overline{b_n} \underbrace{\int_0^{2\pi} |e_n|^2 \, dx}_{=\delta_{nm}} \right) \\
&= \sum_{|n|\leq N} a_n \overline{b_n} - a_n \overline{b_n} = 0
\end{aligned}$$

Also sind $\left(f - \sum_{|n|\leq N} a_n e_n \right) \perp \sum_{|n|\leq N} b_n e_n$ und wir können des Satz von Phythagoras anwenden:

$$\| f \|^2 = \| f - \sum_{|n|\leq N} a_n e_n \|^2 + \| \sum_{|n|\leq N} a_n e_n \|^2 = \| f - S_N(f) \|^2 + \sum_{|n|\leq N} |a_n|^2 \tag{9}$$

Mit Hilfe von Gleichung (9) können wir jetzt das folgende Lemma formulieren und beweisen.

4.2 Lemma: Beste Approximation

Sei f eine auf $[0, 2\pi]$ integrierbare Funktion mit Fourierkoeffizienten a_n. Dann gilt

$$\| f - S_N(f) \| \leq \| f - \sum_{|n| \leq N} c_n e_n \| \qquad \forall c_n \in \mathbb{C} \tag{10}$$

Gleichheit gilt für $c_n = a_n$ für alle $|n| \leq N$.
Beweis:
Es gilt

$$f - \sum_{|n| \leq N} c_n e_n = f - \sum_{|n| \leq N} a_n e_n + \sum_{|n| \leq N} b_n e_n$$

mit $b_n = a_n - c_n$. Wende nun auf die Norm den Satz von Pythagoras an, da wie bewiesen die beiden Summen auf der linken Seite orthogonal sind.

$$\begin{aligned}
\| f - \sum_{|n| \leq N} c_n e_n \|^2 &= \| f - \sum_{|n| \leq N} a_n e_n + \sum_{|n| \leq N} b_n e_n \|^2 \\
&= \| f - \sum_{|n| \leq N} a_n e_n \|^2 + \| \sum_{|n| \leq N} b_n e_n \|^2 \\
&\leq \| f - \sum_{|n| \leq N} a_n e_n \|^2 \\
&= \| f - S_N(f) \|^2
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung und auch dass Gleichheit gilt für $b_n = 0$, also $a_n = c_n$.
Anschaulich sagt uns das Lemma, dass die Funktion f von der Partialsumme der Fourierreihe, am besten approximiert wird. Besser als von allen anderen trigonometrischen Polynomen vom Grad N.
Jetzt können wir zum eigentlichen Beweis vorschreiten:

4.3 Satz: Konvergenz in $\mathcal{R}$

Sei f integrierbar auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - S_N(f)(x)|^2 \, dx \to 0 \text{ wenn } \quad N \to \infty$$

wobei $S_N(f)(x)$ die Partialsumme der Fourierreihe darstellt.
Beweis:
Wir machen eine Fallunterscheidung.

(i) Zuerst betrachten wir den Fall das f stetig auf $[0, 2\pi]$ ist. Dann können wir, wie bereits gezeigt, ein trigonometrisches Polynom P von Grad M finden, sodass $|f(x) - P(x)| < \epsilon, \forall x \in [0, 2\pi]$. Dann folgt auch schon, dass

$$\| f - P \| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - P(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} < \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \epsilon^2 \, dx \right)^{1/2} = \epsilon$$

Mit Lemma (4.2) folgt dann schon

$$\| f - S_N(f) \| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - S_N(f)(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} < \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \epsilon^2 \, dx \right)^{1/2} = \epsilon$$

und damit die Behauptung im stetigen Fall.

(ii) Falls f nur integrierbar ist, approximieren wir f durch eine stetige Funktion g, die wir nach Lemma (4.2) aus einem der vorherigen Vorträge finden können, derart dass gilt.

$$\sup_{x \in [0,2\pi]} |g(x)| \leq \sup_{x \in [0,2\pi]} |f(x)| = B$$
$$\text{und außerdem } \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)| \, dx < \epsilon^2$$

Damit erhalten wir schließlich die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} \| f - g \|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)||f(x) - g(x)| \, dx \\ &\leq \frac{2B}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)| \, dx \\ &\leq C^2 \epsilon^2 \end{aligned}$$

Jetzt lässt sich g analog durch ein trigonometrisches Polynom approximieren, sodass $\| g - P \| < \epsilon$ und es gilt:

$$\| f - P \| = \| f - g + g - P \| \leq \underbrace{\| f - g \|}_{\leq C\epsilon} + \underbrace{\| g - P \|}_{\leq \epsilon} \leq (C + 1)\epsilon$$

Mit Lemma (4.2) folgt die Behauptung.

4.4 Korollar: Parseval Gleichung

Sei f eine integrierbare Funktion auf $[0, 2\pi]$ und a_n der n-te Fourierkoeffizient, dann gilt schon

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \| f \|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx \tag{11}$$

Beweis:
Dies folgt direkt aus (9) und Satz (4.3).

□

4.5 Bemerkung: Bessel Ungleichung

(i) Nimmt man anstelle der trigonometrischen Funktionen e^{-inx} ein beliebiges Set orthonormaler Funktionen,welche noch keine vollständige Basis bilden, mit der Eigenschaft $a_n = \langle f, e_n \rangle$ erhält man aus (9) die **Besselsche Ungleichung**, deren Spezialfall bei Gleichheit die **Parseval Gleichung** ist:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \leq \| f \|^2 \tag{12}$$

(ii) Da man jeder integrierbaren Funktion die Folge der Fourierkoeffizienten zuorden kann mit der Eigenschaft (11) bedeutet das, dass die $\{a_n\} \in l^2(\mathbb{Z})$. Da allerdings $l^2(\mathbb{Z})$ ein Hilbertraum ist und $\mathcal{R}$ nur ein Prä-Hilbertraum, also insbesondere nicht vollständig, gibt es Folgen $\{a_n\} \in l^2(\mathbb{Z})$ zu denen es keine integrierbare Funktion F gibt, sodass die Fourierkoeffizienten mit den a_n übereinstimmen.

4.6 Korollar:Riemann-Lebesque-Lemma

Ist f eine integrierbare Funktion, dann gilt

$$a_n \to 0 \Leftrightarrow |n| \to \infty \tag{13}$$

oder auch

$$a_N = \int_0^{2\pi} f(x) \sin(Nx) \, dx \to 0 \Leftrightarrow N \to \infty$$
$$a_N = \int_0^{2\pi} f(x) \cos(Nx) \, dx \to 0 \Leftrightarrow N \to \infty$$

Beweis:

Die Parseval Gleichung besagt, dass die Reihe der Fourierkoeffizienten konvergiert. Also müssen die Folgenglieder (Fourierkoeffizienten) eine Nullfolge bilden.

$\square$

4.7 Lemma: Verallgemeinerung der Parseval Gleichung

Seien F und G zwei integrierbare Funktionen mit $F \sim \sum a_n e^{inx}$ und $G \sim \sum b_n e^{inx}$. Dann gilt:

$$\langle F, G \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x)\overline{G(x)}\, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n} \tag{14}$$

wobei die obige Reihe nach Satz (3.2) absolut konvergiert.

Beweis:

Benutze die folgende Identität

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left[\| F+G \|^2 - \| F-G \|^2 + i \| F+iG \|^2 - i \| F-iG \|^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} |F+G|^2\, dx - \int_0^{2\pi} |F-G|^2\, dx + i\int_0^{2\pi} |F+iG|^2\, dx - i\int_0^{2\pi} |F-iG|^2\, dx\right] \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F+G|^2 - |F-G|^2 + i|F+iG|^2 - i|F-iG|^2\, dx \\
&= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} (F+G)\overline{(F+G)} - (F-G)\overline{(F-G)} + i(F+iG)\overline{(F+iG)} - i(F-iG)\overline{(F-iG)}\, dx \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 4F\overline{G}\, dx = \langle F, G \rangle
\end{aligned}$$

Daraus folgt dann mit der Parsevals Gleichung

$$\begin{aligned}
\langle F, G \rangle &= \frac{1}{4}\left[\| F+G \|^2 - \| F-G \|^2 + i \| F+iG \|^2 - i \| F-iG \|^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n+b_n|^2 - |a_n-b_n|^2 + i|a_n+ib_n|^2 - i|a_n-ib_n|^2\, dx \\
&= \ldots = \frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty} 4a_n\overline{b_n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\overline{b_n}
\end{aligned}$$