Klausur zur Vorlesung Funktionentheorie — SS 2009 Musterlösung

---

Aufgabe 1 Geben Sie drei Charakterisierungen holomorpher Funktionen an.

Sei etwa $f : D \to \mathbf{C}$. Folgende Eigenschaften charakterisieren holomorphe Funktionen:

a) f ist in jedem Punkt z_0 in D komplex differenzierbar, d.h. der Limes $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existiert für alle $z_0 \in D$.
b) f erfüllt die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen.
c) f besitzt eine lokale Stammfunktion.
d) $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ für alle Dreiecke Δ mit $\bar{\Delta} \subset D$.
e) f ist in jedem Punkt $z_0 \in D$ in eine Potenzreihe entwickelbar.

Aufgabe 2 Welche der folgenden Funktionen sind auf ihrem maximalen Definitionsgebiet holomorph? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$z \mapsto 2z^2 - 5z, \quad x + iy \mapsto x^2 + y^2 - 2ixy, \quad z \mapsto \bar{z}, \quad z \mapsto \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Die erste Funktion ist ihre eigene Potenzreihe, also holomorph. Die zweite und dritte erfüllen die Cauchy-Riemann Gleichungen nicht, sind also nicht holomorph, die vierte ist holomorph, da $\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$ und das ist als Kehrwert einer holomorphen Funktion abseits der Nullstellen holomorph.

Aufgabe 3 Betrachten Sie die Möbiustransformation

$$f : \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}} : z \mapsto \frac{z-i}{z-1}.$$

Bestimmen Sie das Bild der Einheitskreislinie und der Einheitskreisscheibe unter f. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

Wir wissen, dass Möbiustransformationen Geraden und Kreise auf Geraden und Kreise abbilden. Da $f(1) = \infty$ ist das Bild des Einheitskreises eine Gerade. Außerdem ist $f(i) = 0$ und $f(-1) = (1 + i)/2$. Die gesuchte Gerade geht also durch 0 und $(1 + i)/2$. Da $f(0) = i$ ist das Bild der Einheitskreisscheibe die Halbebene oberhalb dieser Geraden.

Aufgabe 4 Sei $D \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbf{C}$ holomorph. Erklären Sie, wie eine lokale Stammfunktion von f definiert werden kann. Wozu braucht man, dass f holomorph ist? Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass f nicht notwendig eine globale Stammfunktion besitzen muss.

Ist f holomorph, und $B_r(z_0) \subset D$, so ist eine lokale Stammfunktion von f gegeben durch $F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)d\zeta$. Aus der Holomorphie von f folgt, dass

$$F(z) - F(z') = \int_{[z',z]} f(\zeta)d\zeta$$

wegen des Lemma von Goursat, und damit $F'(z) = f(z)$. Das bekannteste Beispiel für eine holomorphe Funktion ohne globale Stammfunktion ist $z \mapsto \frac{1}{z}$. Die Nicht-Existenz der globalen Stammfunktion auf $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ folgt aus dem Integral

$$\int_{K(0,r)} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

Hätte $\frac{1}{z}$ eine globale Stammfunktion, so müsste dieses Integral verschwinden.

Aufgabe 5 Was sind isolierte Singularitäten einer holomorphen Funktion? Welche Typen gibt es? Geben Sie jeweils ein charakteristisches Beispiel an.

Ist $z_0 \in \hat{\mathbf{C}}$ und $U \subset \hat{\mathbf{C}}$ offen mit $z_0 \in U$. Ist dann $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbf{C}$ holomorph, so heißt z_0 isolierte Singularität von f. Es gibt folgende Typen:

a) *Hebbare Singularitäten.* Ist $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = 0$ so kann f wegen des Riemannschen Hebbarkeitssatzes zu einer holomorphen Funktion $f : U \to \mathbf{C}$ fortgesetzt werden. Bsp. $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$ hat in 0 eine hebbare Singularität.

b) *Pole.* Ist $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ so heißt z_0 ein Pol. Typische Beispiele sind die Funktionen $z \mapsto \frac{1}{(z-z_0)^m}$ mit Polen der Ordnung $m > 0$ bei z_0.

c) *Wesentliche Singularitäten.* Sind weder Pole noch hebbare Singularitäten. Beispiel $z \mapsto \exp\frac{1}{z}$.

Aufgabe 6 Bestimmen und klassifizieren Sie alle Singularitäten der Funktionen

$$\frac{1}{\sin(1/z)}, \qquad \text{und} \qquad \frac{\cos \pi z}{(z-\frac{1}{2})^2}.$$

- sin hat einfache Nullstellen auf $\pi\mathbf{Z}$. Also hat $z \mapsto \frac{1}{\sin(1/z)}$ Pole der Ordnung 1 auf der Menge $\{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$. Der Punkt 0 ist zwar eine Lücke im Definitionsbereich, aber keine isolierte Singularität, da sich die Pole dort häufen. Der Punkt ∞ ist ein Pol der Ordnung 1, da $\frac{1}{\sin(1/1/z)} = \frac{1}{\sin z}$.
- $\cos \pi z$ hat eine einfache Nullstelle bei $\frac{1}{2}$, und $(z-\frac{1}{2})^2$ eine doppelte. Daher ist $\frac{1}{2}$ ein Pol der Ordnung 1 der zweiten Funktion. ∞ ist eine wesentliche Singularität, da $\frac{\cos \pi k}{(k-\frac{1}{2})^2} \to 0$ für $\mathbf{Z} \ni k \to \infty$ aber $\frac{\cos \pi i k}{(ik-\frac{1}{2})^2} \to \infty$ für $\mathbf{Z} \ni k \to \infty$.

Aufgabe 7 Sei $U \subset \mathbf{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbf{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{res}(f', z_0) = 0.$$

f ist Stammfunktion von f', daher verschwinden alle Wegintegrale über geschlossene Integrationswege von f. Insbesondere gilt für $r > 0$ klein genug, dass

$$\operatorname{res}(f', z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K(z_0,r)} f'(z)dz = 0.$$

Aufgabe 8 Sei $U \subset \mathbf{C}$ offen und $f : U \to \mathbf{C}$ holomorph. Für ein $z_0 \in U$ gelte $|f(z)| \le |z-z_0|^\alpha$ mit $\alpha > 1$. Zeigen Sie, dass $f(z_0) = f'(z_0) = 0$.

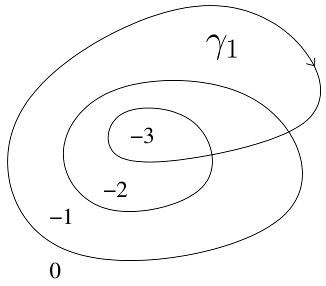
Da $\lim_{z\to z_0}|z-z_0|^\alpha = 0 = \lim_{z\to z_0}|z-z_0|^{\alpha-1}$ gilt wegen der Stetigkeit von f

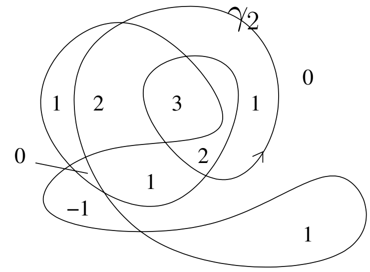
$$|f(z_0)| \le \lim_{z\to z_0}|z-z_0|^\alpha = 0$$

und

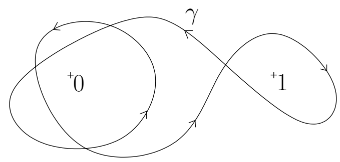
$$|f'(z_0)| = \lim_{z-z_0}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} \le \lim_{z\to z_0}|z-z_0|^{\alpha-1} = 0.$$

Aufgabe 9 Geben Sie für die unten skizzierten Wege γ_1 und γ_2 den Wert der Funktion $z \mapsto n(\gamma_k, z)$ auf $\mathbf{C} \setminus |\gamma_k|$, $k = 1, 2$ an.





Aufgabe 10 Betrachten Sie unten skizzierten Weg γ.



Geben Sie einen Zykel Γ an, der in $\mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$ homolog zu γ ist und aus einer Linearkombination von Kreislinien besteht. Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{1}{z(z-1)} dz.$$

γ ist homolog zu $\Gamma = 2K(0, \frac{1}{2}) - K(1, \frac{1}{2})$, denn dann stimmen die Umlaufzahlen von γ und Γ an den Punkten 0 und 1 überein. Es ist also

$$\int_\gamma \frac{1}{z(z-1)} dz = \int_\Gamma \frac{1}{z(z-1)} dz = 2 \int_{K(0,\frac{1}{2})} \frac{1}{z(z-1)} dz - \int_{K(1,\frac{1}{2})} \frac{1}{z(z-1)} dz$$
$$= 2 \operatorname{res}(\frac{1}{z(z-1)}, 0) - \operatorname{res}(\frac{1}{z(z-1)}, 1) = -4\pi i - 2\pi i = -6\pi i$$

Aufgabe 11 Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)}{1+x^2} dx\right) = \operatorname{Re}\left(2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{res}(\frac{\exp(i\zeta)}{1+\zeta^2}, z)\right).$$

Die Funktion $z \mapsto \exp i\zeta 1 + \zeta^2$ hat in der oberen Halbebene genau eine Singularität, nämlich i und dort das Residuum $\frac{1}{2ie}$. Einsetzen liefert die Behauptung.

Aufgabe 12 Zeigen Sie, dass die Funktion $f(z) = z^4 + z/8 - 1$ genau eine Nullstelle in $B_{1/2}(1)$ besitzt. Geben Sie eine ähnliche Abschätzung für die Lage der anderen Nullstellen an.

Sei $g(z) = z^4 - 1$. Dann hat $g(z)$ die Nullstellen $\{\pm 1, \pm i\}$, also liegt genau eine Nullstelle in $B_{\frac{1}{2}}(1)$. Es gilt weiter

$$|f(z) - g(z)| = |\frac{z}{8}| \leq \frac{3}{16}$$

für alle z mit $|z| \leq 3/2$ also insbesondere für $z \in \bar{B}_{\frac{1}{2}}(1)$.

Außerdem ist $|g(z)| = |z-1||z+1||z-i||z+i|$. Es gilt für $z \in \partial B_{\frac{1}{2}}(1)$, dass $|z-1| = \frac{1}{2}$, $|z+1| \geq \frac{3}{2}$ und $|z \pm i| \geq \sqrt{2} - \frac{1}{2}$. Insbesondere gilt $|z-i||z+i| \geq (\sqrt{2} - \frac{1}{2})^2 = 2 - \sqrt{2} - \frac{1}{4} > \frac{1}{4}$. Insgesamt also $|g(z)| > \frac{3}{16}$. Nach dem Satz von Rouché folgt, dass f und g in $B_{\frac{1}{2}}(1)$ gleich viele Nullstellen haben, nämlich genau eine.

Das obige Argument liefert aus Symmetriegründen, dass in jeder Kreisscheibe $B_{\frac{1}{2}}(z_k)$ genau eine Nullstelle liegt, wo z_k die Menge $\{\pm 1, \pm i\}$ durchläuft.

Aufgabe 13 Richtig oder Falsch? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Stichwort. Sei $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ eine ganze Funktion.

a) Ist $f(\mathbf{C}) \subset \mathbf{R}$, so ist f konstant.

Richtig, Satz von der Gebietstreue.

b) Ist f auf $\mathbf{R}$ beschränkt, so ist f konstant.

Falsch. Gegenbeispiel $\sin z$.

c) f kann in eine Potenzreihe der Form $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ entwickelt werden, die auf ganz $\mathbf{C}$ konvergiert.

Richtig. Potenzreihenentwicklungssatz.

d) Hat f unendlich viele Nullstellen, so ist f konstant.

Falsch. Gegenbeispiel $\sin z$.

Aufgabe 14 a) Formulieren Sie den Satz von der Gebietstreue für holomorphe Funktionen.

Ist $D \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbf{C}$ holomorph. Dann ist f konstant oder $f(D)$ ist ein Gebiet.

b) Formulieren Sie das Maximumprinzip für holomorphe Funktionen.

Ist $D \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbf{C}$ holomorph. Hat $|f|$ in D ein lokales Maximum, so ist f konstant.

c) Skizzieren Sie, warum der Satz von der Gebietstreue das Maximumprinzip impliziert.

Ist $f :\to \mathbf{C}$ holomorph, und z_0 ein lokales Maximum von $|f|$. Dann existiert ein $r > 0$ mit $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in B_r(z_0)$. Also ist $f(B_r(z_0)) \subset \bar{B}_{|f(z_0)|}(0)$. Die Menge $\bar{B}_{|f(z_0)|}(0)$ enthält keine Umgebung von $f(z_0)$ also ist $f(B_r(z_0))$ nicht offen. Aus dem Satz der Gebietstreue folgt, dass f konstant sein muss.

Aufgabe 15 Sei $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \setminus \{z : \mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$ holomorph. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Sei $D := \{z : \mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$. Da D einfach zusammenhängend ist, existiert wegen des Riemannschen Abbildungssatzes eine biholomorphe Abbildung $\phi : D \to \mathbf{E}$. Dann ist $\phi \circ f : \mathbf{C} \to \mathbf{E}$ eine ganze holomorphe Funktion, die durch 1 beschränkt ist. Nach dem Satz von Liouville ist $\phi \circ f$ konstant und da ϕ injektiv ist folgt, dass f selbst konstant sein muss.

Aufgabe 16 Sei $D \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet. Sei $M \subset \mathbf{N}$ eine unendliche Menge, und zu jedem $m \in M$ existiere eine m-te holomorphe Wurzelfunktion auf D, d.h eine holomorphe Funktion $w_m : D \to \mathbf{C}$ mit $w_m(z)^m = z$ für alle $z \in D$. Zeigen Sie, dass auf D ein holomorpher Zweig des Logarithmus existiert.

Hinweis: Sei $\Gamma \subset D$ ein Zykel. Berechnen Sie $n(w_m \circ \Gamma, 0)$ in Abhängigkeit von $n(\Gamma, 0)$.

Es gilt

$$2\pi i\, n(w_m \circ \Gamma, 0) = \int_{w_m \circ \Gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{\Gamma} \frac{w_m'(z)}{w_m(z)} dz$$

Da $(w_m(z)^m)' = 1$ folgt $m w_m(z)^{m-1} w_m'(z) = 1$ und damit $\frac{w_m'(z)}{w_m(z)} = \frac{1}{mz}$. Insgesamt folgt

$$2\pi i\, n(w_m \circ \Gamma, 0) = \frac{1}{m} \int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = \frac{2\pi i}{m} n(\Gamma, 0),$$

also $mn(w_m \circ \Gamma, 0) = n(\Gamma, 0)$. Wählt man nun $m > |n(\Gamma, 0)|$ folgt $n(w_m \circ \Gamma, 0) = 0$ und damit $n(\Gamma, 0) = 0$. Für jeden Zykel Γ in D folgt daher $n(\Gamma, 0) = 0$. Dies ist aber genau die Bedingung für die Existenz eines holomorphen Zweigs des Logarithmus.