Funktionentheorie SS09
Dr. Jan Metzger

LaTeX von Timo Rambaum

Stand: 14. Juli 2009

Vorwort

Dies ist eine inoffizielle Vorlesungsmitschrift der Vorlesung „Funktionentheorie“ bei Dr. Jan Metzger, gehalten im Sommersemester 2009 an der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg.
Diese Mitschrift kann Fehler enthalten. Wer welche findet oder sonstige Verbesserungsvorschläge hat, kann mir gerne eine Email an t.rambaum@googlemail.com schreiben. Ich werde dann so schnell wie möglich versuchen, den Vorschlag umzusetzen.

Timo Rambaum

Einleitung

$\rightarrow$ komplexe Zahlen als Lösung von Polynomialgleichungen

$$x^2 = -1$$

Definiere $i := \sqrt{-1}$
$\sim$ 16. Jhdt

$\rightarrow$ Funktionen von komplexen Argumenten

$$\exp(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

Euler, $\sim$ 18.Jhdt

$\rightarrow$ komplexe Differenzierbarkeit

$$f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

heißt komplex differenzierbar in $z_0 \in D$, falls der Limes $f'(z_0) := \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existiert.

$\rightarrow$ f holomorph, das heißt f komplex differenzierbar auf ganz D, offen.

Anwendungen

$\rightarrow$ Physik

$\rightarrow$ Geometrie, z.B Riemannsche Flächen, komplexe Differentialgeometrie

$\rightarrow$ z.B in analytischer Zahlentheorie

Literatur

- Fischer/Lieb
- Remmert/Schumacher
- Freitag/Busam
- Jänich (knapp)

Alle Bücher heißen „Funktionentheorie“ (Complex Analysis) oder ähnlich.

Teil I.
Komplexe Zahlen und holomorphe Funktionen

1. Komplexe Zahlenebene

Wir wollen Gleichungen der Form $x^2 = -1$ lösen, und erreichen dies durch Definition einer Lösung $i := \sqrt{-1}$ und fügen diese zu den reellen Zahlen hinzu.

Frage: Kommt man so zu einer widerspruchsfreien Theorie?

1.1. Definition

Mit $\mathbb{C}$ bezeichnen wir den Vektorraum $(\mathbb{R}^2, +)$ der reellen Zahlenpaare zusammen mit der Multiplikation:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad) \qquad \forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$$

1.2. Proposition

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Beweis:

i) $\mathbb{R}^2$ ist mit der Vektoraddition $(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d)$ eine kommutative Gruppe mit neutralem Element $(0, 0)$

ii) Die Multiplikation ist assoziativ

$$((a, b)\cdot(c, d))(e, f) = (a, b)((c, d)\cdot(e, f)) = (ace-adf-bcf-bde, acf+ade+bce+bdf)$$

iii) Die Multiplikation ist kommutativ

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad) = (c, d)(a, b)$$

iv) Das Einselement ist $(0, 1)$

v) Ist $(a, b) \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C}\backslash\{(0, 0)\}$ so ist das Inverse von (a, b) gegeben durch

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \; , \; \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

vi) Es gilt Distributivität

$$(a,b)((c,d)+(e,f)) = (a,b)(c,d)+(a,b)(e,f)$$

1.3. Bemerkung

i) Die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ ist $\{(1,0),(0,1)\}$. Folglich kann jede komplexe Zahl (a,b) dargestellt werden als $a\cdot(1,0)+b\cdot(0,1) \qquad a,b\in\mathbb{R}$

ii) Es existiert ein injektiver Körperhomomorphismus

$$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\quad a\mapsto(a,0)$$

$$\text{d.h. } \varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b) \text{ und } \varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$$

Wir identifizieren $\mathbb{R}$ mit $\varphi(\mathbb{R})\subset\mathbb{C}$, setzen also $a=(a,0)$.
Insbesondere ist dann $1_{\mathbb{R}}=(1,0)=1$
Weiter lässt sich jede komplexe Zahl schreiben als

$$(a,b)=\underbrace{\varphi(a)}_{a}\cdot\underbrace{(1,0)}_{1}+\underbrace{\varphi(b)}_{b}\cdot\underbrace{(0,1)}_{=:i}=a+ib$$

mit der **imaginären Einheit** $i:=(0,1)$

iii) Es ist $i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)$ also tatsächlich $i^2=-1$ und i damit eine Lösung von $z^2=-1$. Die Multiplikation ist dann nichts anderes als Ausmultiplizieren unter Zuhilfenahme dieser Beziehung:

$$\begin{aligned}(a,b)\cdot(c,d)&=(a+ib)(c+id)\\&=ac+iad+ibc+\underbrace{i^2}_{=-1}bd\\&=ac-bd+i(ad+bc)\end{aligned}$$

iv) Ist $z=a+ib$ eine komplexe Zahl, so nennen wir $a=\mathrm{Re}(z)$ den **Realteil** und $b=\mathrm{Im}(z)$ den **Imaginärteil** von z.
Dann ist $z=\mathrm{Re}(z)+i\cdot\mathrm{Im}(z)$, beachte $\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)\in\mathbb{R}$

v) Es gilt für $z,w\in\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z+w)&=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(w)\\\mathrm{Im}(z+w)&=\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(w)\end{aligned}$$

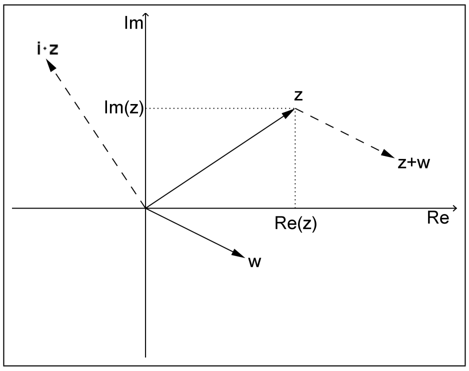
Für $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(a \cdot w) &= a \cdot \mathrm{Re}(w) \\ \mathrm{Im}(a \cdot w) &= a \cdot \mathrm{Im}(w) \end{aligned}$$

Insbesondere sind Re,Im: $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen

1.4. Bemerkung

Diese Konstruktion liefert $\mathbb{C}$ nicht nur als Menge von Zahlen, sondern als geometrisches Objekt, nämlich als 2-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum bzw. als Ebene.
Addition in $\mathbb{C}$ ist die Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$.
Re, Im: $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sind die Projektionen auf die Achsen in $\mathbb{R}^2$.
Die Veranschaulichung der Multiplikation kommt später (Übung).
Ist $(a, b) \in \mathbb{C}$ so ist $(a, b) \cdot (0, 1) = (-b, a)$ gerade der um 90° gedrehte Vektor.



1.5. Definition

Sei $z \in \mathbb{C}$

i) Es bezeichne $\overline{z}$ die konjungiert komplexe Zahl zu z, das ist die Spiegelung von z an der reellen Achse, nämlich für $z = a + ib$ ist $\overline{z} = a - ib$.

ii) Setze $|z| := \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$ die euklidische Länge des Vektors z.

1.6. Proposition

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

i) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
$\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
$\overline{(\overline{z})} = z$

ii) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
$\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

iii) $z \cdot \overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$
$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$
$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

Beweis: Übung

1.7. Proposition

i) $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ist eine Norm, das heißt es gilt $|z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ und $|z + w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

ii) $|w \cdot z| = |w| \cdot |z| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

Beweis:

ii) $|wz|^2 = wz \cdot \overline{wz} = wz \cdot \overline{w} \cdot \overline{z} = w\overline{w} \cdot z\overline{z} = |w|^2 \cdot |z|^2$

Diese Norm ist gerade die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$ und induziert eine Metrik

$$\begin{aligned} d(z,w) = |z-w| (&\text{dann ist } d(z,w) \geq 0 \\ &\text{und } d(z,w) = 0 \Leftrightarrow z = w \\ &\text{und } d(z,z') \leq d(z,w) + d(w,z') \quad \forall z, z', w \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

1.8. Definition

i) Ein (offener) Ball in $\mathbb{C}$ um $z_0 \in \mathbb{C}$ mit Radius $r > 0$ ist die Menge

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

ii) Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt **offen**, wenn es zu jedem $z_0 \in U$ ein $r > 0$ gibt, so dass $B_r(z_0) \subseteq U$

iii) Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt **abgeschlossen** falls $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist.

1.9. Proposition

i) $\emptyset, \mathbb{C}$ sind offen und abgeschlossen

ii) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen

iii) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen

iv) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen

v) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen

Beweis: Übung

1.10. Bemerkung

Offene Bälle $B_r(z_0)$ sind offen

Beweis:
Ist $z \in B_r(z_0)$ so gilt für alle $w \in B_{r-|z-z_0|}(z)$ dass

$|w - z_0| \leq \underbrace{|w - z|}_{<r-|z-z_0|} + |z - z_0| < r - |z - z_0| + |z - z_0| = r$

also $B_{r-|z-z_0|}(z) \subseteq B_r(z_0)$

1.11. Definition

Sei $B \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge

i) $\mathring{B} := \bigcup\{U : U \text{ offen }, U \subseteq B\}$
heißt das **Innere** von B, und ist die größte offene Menge, die in B enthalten ist.

ii) $\overline{B} := \bigcap\{A : A \text{ abgeschlossen und } B \subseteq A\}$
heißt **abgeschlossene Hülle** von B.

iii) $\partial B := \overline{B} \backslash \mathring{B}$ heißt **Rand** von B.

1.12. Definition

Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\forall n \geq n_0 : |z_n - z| < \varepsilon$.
Wir schreiben dann:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \text{ oder kurz } z_n \to z$$

1.13. Bemerkung

Seien $(z_n) \subseteq \mathbb{C}$ und $(w_n) \subseteq \mathbb{C}$ konvergente Folgen.
Dann gilt:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n + w_n) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n + \lim\limits_{n\to\infty} w_n$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n w_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} z_n)(\lim\limits_{n\to\infty} w_n)$

iii) Ist $z_n \neq 0 \quad \forall n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$. Dann gilt
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{z_n} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}$

Beweis: Übung

1.14. Bemerkung

i) Eine Folge $z_n \subseteq \mathbb{C}$ konvergiert genau dann, wenn die reellen Folgen $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{Re}(z_n)) + i \cdot \lim_{n\to\infty} (\mathrm{Im}(z_n))$$

ii) Eine Folge(z_n) konvergiert genau dann gegen z, wenn für jede offene Menge U mit $z \in U$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $z_n \in U \quad \forall n \geq n_0$.

iii) Ist $B \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige Menge, $(z_n) \subseteq B$ eine konvergente Folge, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \in \overline{B}$

iv) zu jedem $z \in \overline{B}$ existiert eine Folge $(z_n) \subseteq B$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

Insbesondere liefern iii) und iv), dass $\overline{B}$ genau die Menge der Grenzwerte von Folgen in B ist.

Beweis:

i) "$\Rightarrow$"
Sei $z_n \to z, \varepsilon > 0$ gegeben, und $|z_n - z| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$. Dann gilt:
$|\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(z)| = |\mathrm{Re}(z_n - z)| \leq |z_n - z| < \varepsilon$

"$\Leftarrow$"
Sei $\mathrm{Re}(z_n) \to x, \mathrm{Im}(z_n) \to y, \varepsilon > 0$ gegeben, und $|\mathrm{Re}(z_n) - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|\mathrm{Im}(z_n) - y| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0$. Dann ist:

$$|z_n - (x+iy)| = |\mathrm{Re}(z_n) - x + i(\mathrm{Im}(z_n) - y)| \leq |\mathrm{Re}(z_n) - x| + |i| \cdot |(\mathrm{Im}(z_n) - y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ii) "$\Rightarrow$"
Sei $z_n \to z$ eine konvergente Folge, U offen mit $z \in U$. Da U offen, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(z) \subseteq U$. Zu ε ex. ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|z_n - z| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$
$\Rightarrow z_n \in B_\varepsilon(z) \subseteq U, \quad \forall n \geq n_0$

"$\Leftarrow$"
Wähle $U = B_\varepsilon(z), \quad \forall \varepsilon > 0$

iii) Sei $z_n \to z$ mit $(z_n) \subseteq B$.
Ist $z \notin \overline{B}$, so ist $z \in \mathbb{C} \backslash \overline{B}$ offen, also ex. $\varepsilon > 0$ so dass $B_\varepsilon(z) \subseteq \mathbb{C} \backslash \overline{B}$
$\Rightarrow B_\varepsilon(z) \cap B = \emptyset \Rightarrow |z_n - z| > \varepsilon \quad \forall n$
$\Rightarrow$ ↯ zu $z \in \overline{B}$

iv) Sei $z \in \overline{B}$. Dann ist $B_r(z) \cap B \neq \emptyset, \quad \forall r > 0$
(ansonsten: $B_r(z) \cap B = \emptyset, \Rightarrow B \subseteq \underbrace{\mathbb{C} \backslash B_r(z)}_{abg.}$)
$\Rightarrow \overline{B} \subseteq \mathbb{C} \backslash B_r(z) \Rightarrow z \notin \overline{B}$
Also existiert zu jedem n ein $z_n \in B_{\frac{1}{n}}(z) \cap B$. Dieses (z_n) ist die gesuchte Folge

1.15. Definition

Eine Folge$(z_n) \subseteq \mathbb{C}$ heißt **Cauchy-Folge**, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|z_n - z_m| < \varepsilon, \quad \forall n, m > n_0$

1.16. Bemerkung

Aus Bemerkung 1.14 i) und der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ folgt die Vollständigkeit von $\mathbb{C}$, d.h. jede Cauchy-Folge konvergiert.

1.17. Definition

i) Ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ heißt **Häufungspunkt** einer Menge, wenn $z \in \overline{B \backslash \{z\}}$
Wegen 1.14 iii) existiert dann eine Folge $(z_n) \subseteq B\backslash\{z\}$ die gegen z konvergiert

ii) Eine Menge $K \subseteq \mathbb{C}$ heißt **kompakt**, wenn jede Folge $(z_n) \subseteq K$ eine konvergente Teilfolge besitzt deren Limes in K liegt.

1.18. Bemerkung

$K \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann kompakt, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist. Dabei heißt K **beschränkt** wenn ein $R > 0$ existiert, so dass $K \subseteq B_R(0)$

1.19. Definition

i) Ein (stetiger) **Weg** ist eine stetige Abbildung

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$$

Dabei ist γ genau dann stetig, wenn $\mathrm{Re}(\gamma)$ bzw. $\mathrm{Im}(\gamma) : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig sind.

ii) Eine Menge $B \subseteq \mathbb{C}$ heißt **(weg)zusammenhängend** wenn zu jedem Paar $p, q \in B$ ein Weg $\gamma : [0,1] \to B$ existiert mit $\gamma(0) = p, \quad \gamma(1) = q$

iii) Ein **Gebiet** ist eine offene und zusammenhängende Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$

1.20. Bemerkung

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, so hat U folgende Eigenschaft:
Sind $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}$ offene Mengen mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $U = U_1 \cup U_2$, dann folgt $U_1 = U$ und $U_2 = \emptyset$ oder $U_1 = \emptyset$ und $U_2 = U$

Beweis:
Sei U ein Gebiet. Angenommen es existieren U_1, U_2 offen mit $U = U_1 \cup U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ sowie $U_1 \neq \emptyset$ und $U_2 \neq \emptyset$.
Sei $p \in U_1, q \in U_2$. Sei $\gamma : [0,1] \to U$ ein Weg mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$
Sei $\bar{t} := \sup\{t : \gamma(s) \in U_1 \quad \forall s \in [0,t)\}$

Wegen Stetigkeit von γ ist $\bar{t} > 0$, da U_1 offen ist. (Da U_1 offen $\exists \delta > 0$ so dass $B_\delta(p) \subseteq U_1$. Wegen Stetigkeit von γ ex. $\varepsilon > 0$ so dass $\gamma(t) \subset B_\delta(\gamma(0)) \quad \forall t \in [0,\varepsilon)$.)
Setze $\overline{p} := \gamma(\bar{t}) \in U_1 \cap U_2$
Es gilt $\overline{p} \notin U_1$ und daher $\overline{p} \in U_2$

Andererseits ist U_2 offen, und damit $\mathbb{C}\backslash U_2$ abgeschlossen.
Da $U_1 \subseteq \mathbb{C}\backslash U_2 \Rightarrow \overline{U_1} \subseteq \mathbb{C}\backslash U_2$
$\Rightarrow \overline{U_1} \cap U_2 = \emptyset$ aber $\overline{p} \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \lightning$

Wir betrachten jetzt Abbildungen $f : D \to \mathbb{C}, \quad D \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Solche Abbildungen nennen wir **(komplexwertige) Funktionen**.

1.21. Definition

i) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt **stetig in** $z_0 \in D$ wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ falls $|z - z_0| < \delta$ und $z \in D$

ii) $f : D \to \mathbb{C}$ heißt **stetig** wenn f stetig in z_0 ist $\quad \forall z_0 \in D$

1.22. Bemerkung

i) Äquivalent zu 1.21 i) ist, dass für jede konvergente Folge $(z_n) \subseteq D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \in D$ gilt:
$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\lim_{n\to\infty} z_n)$$

ii) Ist D offen, so ist $f : D \to \mathbb{C}$ genau dann stetig, wenn für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ das Urbild $f^{-1}(U)$ offen ist. $(f^{-1}(U) := \{z \in D : f(z) \in U\})$

1.23. Bemerkung

i) Sind $f, g : D \to \mathbb{C}$ stetig in $z_0 \in D$ so sind $f + g, f \cdot g : D \to \mathbb{C}$ stetig in $z_0 \in D$ ist $g(z) \neq 0 \;\; \forall z \in D$, so ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in $z_0 \in D$

ii) Ist $f : D \to \mathbb{C}$ stetig in $z_0 \in D, f(D) \subseteq D', g : D' \to \mathbb{C}$ stetig in $f(z_0)$, so ist $g \circ f : D \to \mathbb{C}$ stetig in z_0.

iii) $f : D \to \mathbb{C}$ ist genau dann stetig, wenn $\mathrm{Re}(f)$,$\mathrm{Im}(f) : D \to \mathbb{R}$ stetig sind.

1.24. Beispiel

i) Alle Polynome sind stetig auf $\mathbb{C}$

ii) $z \mapsto \overline{z}$ ist stetig auf $\mathbb{C}$

iii) $z \mapsto |z|$ ist stetig auf $\mathbb{C}$

2. Holomorphe Funktionen

2.1. Definition

i) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann heißt f in $z_0 \in D$ **komplex differenzierbar**, wenn es eine komplexe Zahl $A \in \mathbb{C}$ und eine in z_0 stetige Funktion

$R : d \to \mathbb{C}$ mit $R(z_0) = 0$ gibt, so dass:

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + (z - z_0) \cdot R(z) \quad \forall z \in D$$

A heißt **Ableitung** von f in z_0. Wir schreiben $f'(z_0) = A$

ii) Ist f auf ganz D differenzierbar, so nennen wir die Funktion $z \mapsto f'(z)$ die **Ableitungsfunktion** von f auf D

iii) Ist f auf ganz D komplex differenzierbar, so nennen wir f **holomorph** auf D

2.2. Beispiel

i) Die konstanten Funktionen $z \mapsto c \in \mathbb{C}$ sind auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar, denn

$$c = c + 0(z - z_0)$$

Die Ableitungsfunktion ist daher die konstante Funktion 0.

ii) Die Funktion $id : z \mapsto z$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar, denn

$$z = z_0 + 1(z - z_0) \quad \forall z, z_0 \in \mathbb{C}$$

Die Ableitungsfunktion ist daher die konstante Funktion $z \mapsto 1$

iii) Die Funktion $z \mapsto \overline{z}$ ist nirgends komplex differenzierbar. Denn gilt für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ die Darstellung

$$\overline{z} = \overline{z_0} + A(z - z_0) + (z - z_0) \cdot R(z) \qquad (R(z) \text{ stetig mit } R(z_0) = 0)$$

Setze $z = t_0 + a \quad a \in \mathbb{R}$, also

$$\begin{aligned} z_0 + a &= \overline{z_0} + Aa + a \cdot R(z_0 + a) \\ \Rightarrow a(1 - A - R(z_0 + a)) &= 0 \quad \forall a \neq 0 \\ \Rightarrow 1 - A - R(z_0 + a) &= 0 \\ \Rightarrow A &= 1 \text{ für } a \to 0 \end{aligned}$$

Andererseits gilt auch für $z = z_0 + ia$

$$\begin{aligned} \overline{z_0} - ia &= \overline{z_0} + i \cdot A \cdot a + i \cdot a \cdot R(z) \\ \Rightarrow -ia(-1 - A - R(z_0 + ai)) &= 0 \quad \forall a \neq 0 \\ \Rightarrow -1 - A - R(z_0 + ai) &= 0 \\ \Rightarrow A &= -1 \text{ für } a \to 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lightning$

2.3. Bemerkung

Sei $f : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Funktion

i) Ist f in $z_0 \in D$ komplex differenzierbar, so ist f dort stetig

ii) Ist f in $z_0 \in D$ komplex differenzierbar, so existiert der Limes

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{A(z - z_0) + (z - z_0)R(z)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} A + R(z) = A$$

2.4. Bemerkung

Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ Funktionen und in $z_0 \in D$ komplex differenzierbar, dann gilt:

i) $f + g$ ist in $z_0 \in D$ komplex differenzierbar[1] mit

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

ii) fg ist in $z_0 \in D$ komplex differenzierbar[2] mit

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$$

iii) Ist $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in D$, so ist $\frac{1}{f}$ eine Funktion auf D und in $z_0 \in D$ komplex differenzierbar mit

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}$$

iv) Seien $f : D \to D', g : D' \to \mathbb{C}$ Funktionen mit $D, D' \subseteq \mathbb{C}$. Ist f in $z_0 \in D$ komplex differenzierbar, so ist $g \circ f : D \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in D$ komplex differenzierbar mit

$$(g \circ f)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g'(f(z_0))$$

Beweis: ANA I

2.5. Beispiel

i) Ist $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein Polynom mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$, so ist p auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar mit Ableitungsfunktion

$$p'(z) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k \cdot z^{k-1}$$

[1] $(f + g)(z) = f(z) + g(z)$
[2] $(fg)(z) = f(z) \cdot g(z)$

ii) Ist $q(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k$ ein weiteres Polynom und $D := \{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}$, so ist $z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)}$ auf D komplex differenzierbar.

Wir erinnern uns jetzt daran, dass als Menge bzw. als normierter Vektorraum $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Daher können wir Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ auch auffassen als Funktionen $\tilde{f} : \tilde{D} \to \mathbb{R}^2$ wie folgt:
Wir zerlegen $z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$ und ebenso $f(z) = u(z) + iv(z), \quad u(z), v(z) \in \mathbb{R}$.
Wir setzen $\tilde{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \tilde{u}(x, y) \\ \tilde{v}(x, y) \end{pmatrix} \quad \tilde{u}(x, y) = u(x + iy)$ für $(x, y) \in \tilde{D}$
$\tilde{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R} : x + iy \in D\}$

2.6. Definition

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt in $c_0 \in D$ **reell differenzierbar**, wenn die zugehörige Funktion $\tilde{f} : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ reell differenzierbar ist, mit $z_0 = x_0 + iy_0$

2.7. Bemerkung

i) Ist $\tilde{f} : \tilde{D} \to \mathbb{R}^2$ reell differenzierbar in $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, so ist die totale Ableitung $\tilde{f}'(x_0, y_0)$ gegeben durch die Jacobi-Matrix

$$\tilde{f}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\tilde{f}(x, y) = \tilde{f}(x_0, y_0) + \tilde{f}'(x, y) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \left| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right| \cdot R(x, y)$$

mit einer in (x_0, y_0) stetigen Funktion $R : D \to \mathbb{R}$ mit $R(x_0, y_0) = 0$.

ii) Sei $f : D \to \mathbb{C}$ in $z_0 = x_0 + iy_0$ reell differenzierbar. Wir unterscheiden nun nicht mehr zwischen f und $\tilde{f}$ und nennen die Matrix

$$\begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix}$$

die totale Ableitung von f in z_0.
Dabei ist $u_x(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0), u_y(z_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(z_0)$

2.8. Definition

Sei $f : D \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in D$ reell differenzierbar. Wir definieren
$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := f_z(z_0) := \frac{1}{2}(f_x(z_0) - i f_y(z_0))$

und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) := f_{\overline{z}}(z_0) := \frac{1}{2}(f_x(z_0) + i f_y(z_0))$
die sogenannten **Wirtinger-Ableitungen** von f.
$(f_x = \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix})$

2.9. Bemerkung

Es gilt:

$$\begin{aligned} f_z(z_0) &= \frac{1}{2}((u_x(z_0) + iv_x(z_0) - i(u_y(z_0) + iv_y(z_0))) \\ &= \frac{1}{2}((u_x(z_0) + v_y(z_0)) + \frac{i}{2}(v_x(z_0) - u_y(z_0)) \\ f_{\overline{z}}(z_0) &= \frac{1}{2}((u_x(z_0) + iv_x(z_0) + i(u_y(z_0) + iv_y(z_0))) \\ &= \frac{1}{2}((u_x(z_0) - v_y(z_0)) + \frac{1}{2}(v_x(z_0) + u_y(z_0)) \end{aligned}$$

2.10. Proposition

Sei $f : D \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar in z_0. Dann gilt

$$f(z) = f(z_0)(z - z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) + (z - z_0) \cdot R(z)$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion $R : D \to \mathbb{C}$ mit $R(z_0) = 0$.

Beweis:
Da $f : D \to \mathbb{C}$ in $z_=$ reell differenzierbar ist, gilt:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \left| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right| \cdot \tilde{R}(x, y)$$

wobei $\tilde{R} : D \to \mathbb{R}^2$ eine in (x_0, y_0) stetige Funktion ist mit $R(x_0, y_0) = 0$.
Wir berechnen:

$$f'(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x - x_0) + u_y(y - y_0) \\ v_x(x - x_0) + v_y(y - y_0) \end{pmatrix} \quad (*)$$

Andererseits ist:

$$\begin{aligned}
f_z(z_0)(z-z_0) &= \left(\frac{1}{2}(u_x+v_y)+\frac{1}{2}(v_x-u_y))((x-x_0)+i(y-y_0)\right) \\
&= \frac{1}{2}(u_x(x-x_0)+v_x(x-x_0)-v_x(y-y_0)+u_y(y-y_0) \\
&\quad + i(u_x(y-y_0)+v_y(y-y_0)+v_x(x-x_0)-u_y(x-x_0)))
\end{aligned}$$

Sowie:

$$\begin{aligned}
f_{\overline{z}}(z_0)(\overline{z}-\overline{z_0}) &= \left(\frac{1}{2}(u_x-v_y)+\frac{1}{2}(v_x+u_y))((x-x_0)-i(y-y_0)\right) \\
&= \frac{1}{2}(u_x(x-x_0)-v_y(x-x_0)+u_y(y-y_0)+v_x(y-y_0) \\
&\quad + i(v_x(x-x_0)+u_y(x-x_0)-u_x(y-y_0)+v_y(y-y_0)))
\end{aligned}$$

und daher

$$f_z(z_0)(z-z_0)+f_{\overline{z}}(z_0)(\overline{z}-\overline{z_0}) = u_x(x-x_0)+u_y(y-y_0)+i(v_x(x-x_0)+v_y(y-y_0)) \quad (**)$$

Identifizieren wir $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ist die rechte Seite von $(*)$ gleich der rechten Seite von $(**)$. Damit folgt die Behauptung mit $R(z) = \frac{\left|\binom{x-x_0}{y-y_0}\right|}{(z-z_0)} \cdot \tilde{R}(z) = \frac{|z-z_0|}{z-z_0} \cdot \tilde{R}(z)$.

2.11. Theorem

Ist $f : D \to \mathbb{C}$ ein Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

i) f ist in $z \in D$ komplex differenzierbar

ii) f ist in $z_0 \in D$ reell differenzierbar und es gilt $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$

Beweis:
ii)$\Rightarrow$i)
aus Prop 2.10 folgt dass $f(z) = f(z_0)(z-z_0) + (z-z_0)R(z)$ mit einer in z_0 stetigen Funktion $R : D \to \mathbb{C}$ mit $R(z) = 0$, d.h. f ist in z_0 komplex differenzierbar mit Ableitung $f'(z_0) = f_z(z_0)$.

i)$\Rightarrow$ii)
Zu zeigen ist insbesondere, dass komplex differenzierbar in $z_0 \Rightarrow$ reell differenzierbar in z_0
Sei f in z_0 komplex differenzierbar, dann gilt:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + (z-z_0)R(z) \quad (*)$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion $R : D \to \mathbb{C}$ mit $R(z_0) = 0$.
Identifiziert man wieder $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, so gilt für die Funktion

$$\tilde{f}(x,y) = \tilde{f}(x_0,y_0) + A\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \left|\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\right| \tilde{R}(x,y)$$

mit $z = x + iy$, $\quad z_0 = x_0 + iy_0$, $\quad \tilde{R}(x,y) = \frac{z-z_0}{|z-z_0|}R(z)$ und einer Matrix A wie in Aufgabe 4, Blatt 1.
$\tilde{R}$ ist stetig in (x_0, y_0) mit $\tilde{R}(x_0, y_0) = 0$
$\Rightarrow \tilde{f}$ ist reell differenzierbar in (x_0, y_0) mit Ableitung A
Aus Prop 2.10 folgt dann die Darstellung

$$f(z) = f(z_0) + f_z(z_0)(z - z_0) + f_{\overline{z}}(\overline{z} - \overline{z_0}) + (z - z_0)\overline{R}(z)$$

$\overline{R}$ ist stetig in z_0 mit $\overline{R}(z_0) = 0$.
Subtraktion von $(**)$ von $(*)$ ergibt

$$0 = (f'(z_0) - f(z_0))(z - z_0) - f_{\overline{z}}(\overline{z} - \overline{z_0}(R(z) - \overline{R}(z))$$

Für $z \neq z_0$ dividiere durch $z - z_0$

$$0 = f'(z_0) - f(z_0) - \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} f_{\overline{z}}(z_0) + \underbrace{R(z) - \overline{R}(z)}_{=Q(z)}$$

$$\frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \frac{\text{Re }(z - z_0) - i \cdot \text{Im }(z - z_0)}{\text{Re }(z - z_0) + i \cdot \text{Im }(z - z_0)}$$

Für z mit Im $(z - z_0) = 0$ ergibt sich
$0 = f'(z_0) - f_z(z_0) - f_{\overline{z}}(z_0) + Q(z) \quad (1)$
Für z mit Re $(z - z_0) = 0$
$0 = f'(z_0) - f_z(z_0) + f_{\overline{z}}(z_0) + Q(z) \quad (2)$
$(1) + (2) \Rightarrow f'(z) = f_z(z_0)$
$(1) - (2) \Rightarrow f_{\overline{z}}(z_0) = 0$

2.12. Bemerkung

i) Ist $f : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in z_0, so gilt:

$$f'(z_0) = f_z(z_0) = \frac{1}{2}(f_x(z_0) - if_y(z_0)) = \frac{1}{2}(u_x(z_0) + v_y(z_0)) + \frac{i}{2}(v_x(z_0) - u_y(z_0))$$

ii) Ist wieder $f : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in z_0 mit $f(z) = u(z) + iv(z)$, so gilt nach Theorem 2.11, dass $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$

Zerlegung in Real- und Imaginärteil liefert

$$\begin{aligned} u_x(z_0) - v_y(z_0) &= 0 \\ u_y(z_0) + v_x(z_0) &= 0 \\ \text{bzw. } u_x(z_0) &= v_y(z_0) \\ u_y(z_0) &= -v_x(z_0) \end{aligned}$$

Dieses System von partiellen Differentialgleichungen heißt die **Cauchy-Riemann-Gleichungen**

iii) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, die auf ganz D reell differenzierbar ist, mit $f_z = 0$ auf ganz D heißt **antiholomorph**. Dann ist $\overline{f} : D \to \mathbb{C} : z \mapsto \overline{f(z)}$ holomorph.

2.13. Bemerkung

Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, D ein Gebiet, und $f' \equiv 0$, dann ist f konstant.

Beweis:
Wegen $f' = f_z = 0$ und $f_{\overline{z}} = 0$ verschwindet die totale Ableitung von f in D identisch.

3. Durch Potenzreihen gegebene Funktionen

Jede holomorphe Funktion lässt sich in ihre Taylorreihe (lokal) entwickeln, daher spielen Potenzreihen eine zentrale Rolle beim Studium holomorpher Funktionen.

3.1. Definition

i) Eine Folge $f_k : D \to \mathbb{C}$ von Funktionen **konvergiert gleichmäßig** gegen eine Grenzfunktion f, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\sup_D |f_k - f| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$$

ii) (f_k) konvergiert **lokal gleichmäßig**, wenn zu jedem $z \in D$ eine offene Menge $U \subseteq D$ mit $z \in U$ existiert, so dass $(f_k|_U)_k$ gleichmäßig gegen f_k konvergiert.

3.2. Bemerkung

Sind alle f_k stetig und konvergiert (f_k) lokal gleichmäßig gegen f, so ist f auch stetig.

3.3. Definition

i) Eine **Potenzreihe** ist eine formale Reihe der Form

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

dabei ist $(a_k) \subseteq \mathbb{C}$ ein Folge komplexer Zahlen und z_0 der Entwicklungspunkt.

ii) Eine Potenzreihe $P(z)$ heißt **konvergent** für $z \in \mathbb{C}$, wenn die Folge $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k|z-z_0|^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen konvergiert.

iii) Eine Potenzreihe $P(z)$ heißt **absolut konvergent** für $z \in \mathbb{C}$, wenn die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k|z-z_0|^k$ konvergiert.
Wie in ANA I impliziert absolute Konvergenz Konvergenz.

3.4. Beispiel

Die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k$.
Wie in ANA I gilt für die Partialsummen $\sum\limits_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{k+1}}{1-z}$, d.h. für $|z| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe gegen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k = \frac{1}{1-z}$.
Für $|z| > 1$ ist die Folge$(z^k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, daher divergiert die Reihe für $|z| \geq 1$

3.5. Proposition

Sei $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ mit $(a_k) \subseteq \mathbb{C}$ eine komplexe Potenzreihe.
Dann konvergiert $P(z)$ entweder auf ganz $\mathbb{C}$ absolut und lokal gleichmäßig, oder es existiert ein $r \geq 0$, so dass $P(z)$ in $B_r(z_0)$ absolut und lokal gleichmäßig konvergiert, und in $\{z \in \mathbb{C}, |z-z_0| > r\}$ divergiert.
r heißt **Konvergenzradius** von P und ist gegeben durch $\frac{1}{r} = \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ bzw. $r = 0$ für $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty$

Beweis:

i) Sei $r = (\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1} > 0$
Sei $\delta > 0$ gegeben, o.E. $\delta > r$. Wegen Definition von r existiert ein k_0, so dass $\sqrt[k]{|a_k|} \leq (1+\delta)\frac{1}{r} \quad \forall k \geq k_0$.
Sei $z \in B_{(1-\delta)r}(z_0)$. Dann gilt für alle $k \geq k_0$, dass

$$|a_k||z-z_0|^k = (\sqrt[k]{|a_k|}|z-z_0|)^k \leq ((1+\delta)\frac{1}{r}(1-\delta)r)^k \leq (1-\delta^2)^k = q^k, \quad q = 1-\delta^2 < 1$$

das heißt die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ ist eine Majorante, und wir erhalten Konvergenz von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k||z-z_0|^k$, das heißt absolute Konvergenz.

Weiter gilt für $z \in B_{(1-\delta)r}(z_0)$ und $k \geq k_0$

$$\left|P(z) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(z-z_0)^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||z-z_0|^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} q^k$$

Da die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert für $q < 1$, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq n_0$

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^k\right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

das heißt, zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle n_0 wie oben
$\Rightarrow \left|P(z) - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k\right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall z \in B_{(1-\delta)r}(z_0)$
$\Rightarrow$ gleichmäßige Konvergenz in $B_{(1-\delta)r}(z_0) \quad \forall \delta > 0$

Da für jedes $z \in B_r(z_0)$ ein $\delta > 0$ existiert, mit $z \in B_{(1-\delta)r}(z_0)$ folgt die Behauptung, das heißt absolute und lokal gleichmäßige Konvergenz.

ii) Divergenz
Ist $|z-z_0|^{-1} < \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_n|}$, so existieren unendlich viele k,
so dass $\sqrt[k]{|a_n|} > |z-z_0|^{-1}$.
Für diese k gilt:

$$|a_k||z-z_0|^k = (\sqrt[k]{|a_n|}|z-z_0|)^k \geq 1$$

$\Rightarrow$ Die Folge $(|a_k||z-z_0|^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge
$\Rightarrow (a_k(z-z_0)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge $\Rightarrow$ Divergenz

3.6. Satz

Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius $r \in (0,\infty]$. Dann ist $P(z)$ auf $B_r(z_0)$ holomorph mit Ableitungsfunktion

$$P'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k(z-z_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot a_{k+1}(z-z_0)^k$$

Beweis:
Später. Der gleichmäßige Limes holomorpher Funktionen ist holomorph.

3.7. Beispiel

Die Potenzreihen

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \quad \text{(Exponentialfunktion)}$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

konvergieren absolut und lokal gleichmäßig auf ganz $\mathbb{C}$.

4. Die Riemannsche Zahlensphäre

In der Geometrie spielen längen- und winkelerhaltende Abbildungen eine große Rolle (Isometrien).
Wichtig sind aber auch Abbildungen, die nur winkelerhaltend sind (konforme Abbildungen).
Die komplexe Multiplikation ist eine Drehstreckung, also winkelerhaltend.
Eine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ wird lokal beliebig gut durch eine komplexe Multiplikation beschrieben, ist also auch konform.
Suchen wir konforme Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, bijektiv, so bleiben nur die linearen Abbildungen $z \mapsto az + b$.
Lässt man jedoch einen Punkt aus, und sucht konforme Abbildungen $\mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$, so existiert neben den linearen Abbildungen $z \mapsto az + b, \quad a \neq 0$ auch noch die Inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$.
Die von Multiplikation, Translation und Inversion erzeugte Gruppe besteht aus allen Abbildungen der Form $f : \mathbb{C}\backslash\{z_1\} \to \mathbb{C}\backslash\{z_2\}$

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0$$

mit $z_1 = -\frac{d}{c}$ und $z_2 = \frac{a}{c}$
Alle f dieser Form sind bijektiv und holomorph und folglich konform.
Ist $w = \frac{az+b}{cz+d}$ so gilt $z = \frac{dw-b}{-cw+a}$ also ist die Umkehrfunktion $f^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$ auch holomorph, und von derselben Form $f : \mathbb{C}\backslash\{\frac{a}{c}\} \to \mathbb{C}\backslash\{-\frac{d}{c}\}$
f hat also eine holomorphe Umkehrfunktion, wir nennen f **biholomorph**.

An der Definitionslücke von f gilt:

$$\lim_{z \to -\frac{d}{c}} |f(z)| = \infty$$

Wir setzen $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und definieren $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ sowie $f(\infty) = \frac{a}{c}$.
Dies macht f zu einer Funktion

$$f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$$

4.1. Definition

$\hat{\mathbb{C}}$ heißt **Riemannsche Zahlensphäre**. Wir erklären eine Topologie auf $\hat{\mathbb{C}}$ wie folgt:

4.2. Definition

i) Eine Menge $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ heißt offen, wenn entweder gilt:
$\infty \notin U$ und $U \subseteq \mathbb{C}$ ist offen oder $\infty \in U$ und $\hat{\mathbb{C}} \backslash U \subseteq \mathbb{C}$ ist kompakt.

ii) $A \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ heißt abgeschlossen, wenn $\hat{\mathbb{C}} \backslash A$ offen ist.

4.3. Bemerkung

i) Wir können jetzt alle topologischen Begriffe aus Kapitel 2 auf $\hat{\mathbb{C}}$ übertragen.
Insbesondere konvergiert eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ gegen ein $z \in \hat{\mathbb{C}}$, genau dann wenn zu jeder offenen Menge U mit $z \in U$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $z_n \in U, \quad \forall n \geq n_0$.
Ist $z = \infty$, so ist dies äquivalent zur Forderung, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert mit $z_n = \infty$ oder $|z_n| > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \forall n \geq n_0$

ii) Versehen mit dieser Topologie sind die Abbildungen

$$f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} : \quad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

mit $f(-\frac{d}{c}) = \infty, f(\infty) = \frac{a}{c}$ die eindeutigen stetigen Fortsetzungen der Abbildungen

$$f : \mathbb{C} \backslash \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \to \mathbb{C} \backslash \left\{ \frac{a}{c} \right\}, \quad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

4.4. Bemerkung

Der Begriff Riemannsche Zahlensphäre wird durch folgendes Modell erläutert:
Betrachte $S^2 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$, und identifiziere $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ mit der (x_1, x_2)-Ebene. $N := (0, 0, 1)$ sei der Nordpol.
Verbinde $z \in \mathbb{C}$ mit N. Die Verbindungslinie schneidet S^2 im Punkt $\varphi(z)$. Wir erhalten

eine Abbildung:

$$\varphi : \mathbb{C} \to S^2 \backslash \{N\} : \quad x + iy \mapsto \frac{1}{1 + x^2 + y^2}(2x, 2y, x^2 + y^2 - 1)$$

Die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : S^2 \backslash \{N\} \to \mathbb{C} : \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{1}{1 - x^3}(x_1 + ix_2)$$

ist auch stetig.
Wir können φ fortsetzen als Abbildung $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \to S^2$ mittels $\varphi(\infty) = N$, bzw. $\varphi^{-1}(N) = \infty$ und erhalten stetige Abbildungen $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \to S^2, \varphi^{-1} : S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$.
Denn für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|\varphi(z) - N| = \left| \frac{1}{1 + x^2 + y^2}(2x, 2y, x^2 + y^2 - 1 - (1 + x^2 + y^2)) \right| = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}} \to 0 \quad \text{für } z \to \infty$$

4.5. Satz

$\hat{\mathbb{C}}$ ist mit der Topologie aus Def 4.2 kompakt, in dem Sinne, das jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ eine kompakte Teilfolge besitzt.

Beweis:
Gegeben $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1.Fall
$z_n = \infty$ für endlich viele n
$\Rightarrow \exists$ Teilfolge (z_{n_k}) mit $z_{n_k} = \infty, \quad \forall k$
es gilt $z_{n_k} \to \infty$

2.Fall
$z_n = \infty$ nur für endlich viele n
Streiche die z_n mit $z_n = \infty$. Dies liefert eine Teilfolge (z_{n_k}) mit $z_{n_k} \neq \infty, \quad \forall k$
Daher o.E. $z_n \neq \infty \quad \forall n$

a) $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt. Wegen Bolzano-Weierstrass existiert eine konvergente Teilfolge.

b) $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist unbeschränkt, dann existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein n_k mit $|z_{n_k}| \geq k$ o.E. $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend. Dann ist $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ein Teilfolge mit $z_{n_k} \to \infty$

4.6. Bemerkung

i) Die Abbildung $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} : \quad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ mit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Gl}(2, \mathbb{C})$ heißen **Möbiustransformationen**

ii) Sind $f, g : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ Möbiustransformationen mit Matrizen $F, G \in \mathrm{Gl}(2, \mathbb{C})$ so ist $f \circ g : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ auch eine Möbiustransformation mit Matrix $F \cdot G$.

iii) Die Abbildung $F = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Gl}(2, \mathbb{C}) \mapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\right) \in \{\text{Möbiustransformationen}\}$ ist folglich ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, das heißt es gilt ii) und $F^{-1} \mapsto f^{-1} \quad \forall F \in \mathrm{Gl}(2, \mathbb{C})$. Der Kern ist gerade $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mathbb{C}^* = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right), a \in \mathbb{C}^*\}$

4.7. Satz

Sind (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) paarweise verschiedene Tupel von Punkten in $\mathbb{C}$, so existiert genau eine Möbiustransformation f mit $f(z_k) = w_k, \quad k = 1, 2, 3$

Beweis:

i) Ist $(w_1, w_2, w_3) = (0, 1, \infty)$, und $z_1, z_2, z_3 \neq \infty$. Dann ist

$$z \mapsto \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}\right)$$

ist $z_1 = \infty$ so ist es

$$z \mapsto \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}$$

ist $z_2 = \infty$ so ist es

$$z \mapsto \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

für $z_3 = \infty$

$$z \mapsto \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Zu jedem Tripel (z_1, z_2, z_3) existert also eine Möbiustransformation $f_{(z_1,z_2,z_3)}$ die (z_1, z_2, z_3) auf $(0, 1, \infty)$ abbildet. Die Transformation $f^{-1}_{(w_1,w_2,w_3)} \circ f_{(z_1,z_2,z_3)}$ leistet also das Gewünschte, bildet also (z_1, z_2, z_3) auf (w_1, w_2, w_3) ab.

ii) Gäbe es zwei solche Möbiustransformationen f_1, f_2 mit $f_i(z_k) = w_k, \quad i = 1, 2 \quad k = 1, 2, 3$ so ist $f := f_2^{-1} \circ f_1$ mit drei Fixpunkten z_1, z_2, z_3.
Ist $z_k = \infty$ für ein k, so ist $f(z) = az + b$ also linear. Da f zwei weitere Fixpunkte hat
$\Rightarrow f(z) = z \quad \Rightarrow f = \mathrm{id} \quad \Rightarrow f_2 = f_1$
Ist weiter $z_1, z_2, z_3 \neq \infty$, dann existieren drei verschiedene Lösungen der Fixpunktgleichung $\frac{az+b}{cz+d} = z$.
Ist $c = 0$, so hat diese Gleichung nur eine Lösung außer für $a = d$ und $b = 0$, dann ist $f = \mathrm{id}$ und $f_1 = f_2$.
Für $c \neq 0$ ist die Gleichung äquivalent zu $cz^2 + (a - d)z - b = 0$, und diese quadratische Gleichung hat nur 2 Lösungen
$\Rightarrow$ tritt nicht auf.

4.8. Bemerkung

Möbiustransformationen bilden Geraden und Kreise auf Geraden und Kreise ab.
(hier: ∞ ist ein Punkt jeder Geraden)

Beweis:
Die Gruppe der Möbiustransformationen wird erzeugt von Translation, Drehstreckung und der Inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$, etwa:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = (b-ad)(z+d)^{-1} + a$$

Für Translationen und Drehstreckungen ist die Behauptung klar.
Eine Gerade in $\mathbb{C}$ ist gegeben durch die Gleichung

$$\overline{n}z + n\overline{z} + b = 0 \Leftrightarrow 2\langle z, n\rangle + b = 0 \qquad b \in \mathbb{R}$$

(wegen $\overline{n}z + \overline{(\overline{n}z)} = \overline{n}z + n\overline{z} = 2\mathrm{Re}(z\overline{n}) = 2(\mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Re}(n) + \mathrm{Im}(z)\cdot\mathrm{Im}(n)) = 2\langle z, n\rangle$)

Ist $b \neq 0$, so ist $z \neq 0$ für alle Punkte auf der Gerade $\quad bz\overline{z}(\frac{\overline{n}}{b\overline{z}} + \frac{n}{bz} + \frac{1}{|z|^2}) = 0$ bzw. für $w = \frac{1}{z}$ folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{\overline{n}}{b}\overline{w} + \frac{n}{b}w + |w|^2 = 0 \\
\Leftrightarrow &\left|w + \frac{\overline{n}}{b}\right|^2 = (w + \frac{\overline{n}}{b})(\overline{w} + \frac{n}{b}) = \overline{w} + \frac{\overline{n}}{b}\overline{w} + \frac{n}{b}w + \frac{|n|^2}{b^2} \\
\Rightarrow &\left|w - \frac{\overline{n}}{b}\right|^2 = \frac{|n|^2}{b^2} \quad (\text{Kreis um } -\frac{\overline{n}}{b} \text{ mit Radius } \frac{|n|^2}{b^2})
\end{aligned}$$

Ist $b = 0$, Gleichung ist $\overline{n}z + n\overline{z} = 0$
$\forall z \neq 0 \Rightarrow \overline{nw} + nw = 0$ (die um 90° gedrehte Gerade).

Teil II.
Der Cauchy-Integralsatz und Konsequenzen

Die Cauchy-Integralformel: $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph:

$$f(z) = \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \forall \overline{B_r(z_0)} \subseteq D, \quad \forall z \in B_r(z_0)$$

5. Integration komplexer Funktionen, Wegintegrale

5.1. Definition

i) Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt **stückweise stetig** wenn es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ von $[a, b]$ gibt, so dass $f\big|_{(t_{k-1},t_k)}$ stetig auf $[t_{k-1}, t_k]$ fortsetzbar ist.

ii) Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt **stückweise stetig differenzierbar** wenn f stetig ist, und eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ von $[a, b]$ existiert, so dass $f\big|_{(t_{k-1},t_k)}$ stetig differenzierbar ist.

iii) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, so setzen wir

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt$$

5.2. Bemerkung

i) Für zwei stückweise stetige Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ und Konstanten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)dt = \lambda \cdot \int_a^b f(t)dt + \mu \cdot \int_a^b g(t)dt$$

und

$$\int_a^b \overline{f(t)}dt = \overline{\left(\int_a^b f(t)dt\right)}$$

d.h das Integral ist auf den stückweise stetigen Funktionen ein $\mathbb{C}$-linearer Operator, der mit der Konjugation vertauscht (d.h. ein reeller Operator).

ii) Ist $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, so gilt:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)dt$$

iii) Ist $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ stückweise stetig differenzierbar und bijektiv so gilt:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_c^d f(t)dt$$

für alle stückweise stetigen Funktionen $f : [c, d] \to \mathbb{R}$

Beweis:
Alle Aussagen folgen sofort aus den entsprechenden Aussagen für reellwertige Funktionen, angewandt auf Real- und Imaginärteil.

5.3. Lemma

Es gilt:

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

Beweis:
Für reelle Integrale bekannt. Es existiert ein $c = e^{i\varphi}$, so dass $c \cdot \int_a^b f(t)dt \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Dann gilt:

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \left|c \cdot \int_a^b f(t)dt\right| = c \cdot \int_a^b f(t)dt = \int_a^b c \cdot f(t)dt$$

$$= \int_a^b \mathrm{Re}(c \cdot f(t))dt \leq \int_a^b |\mathrm{Re}(c \cdot f(t))|dt \leq \int_a^b |c \cdot f(t)|dt \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

5.4. Definition

i) Eine stückweise stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt **Integrationsweg**.

ii) $\gamma([a, b])$ heißt **Spur** von γ, wir bezeichnen $|\gamma| := \gamma([a, b])$

iii) γ heißt **geschlossen** wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$

5.5. Beispiel

i) Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ ist die Abbildung

$$K(z_0, r) : \quad [0, 2\pi] \to \mathbb{C} : \quad t \mapsto z_0 + re^{it} = z_0 + r \cdot (\cos t + i \sin t)$$

ein Integrationsweg mit Spur $|K(z_0, r)| = \partial B_r(z_0)$.
$K(z_0, r)$ ist geschlossen.

$$K(z_0, r)'(t) = ire^{it}$$

Wir nennen $K(z_0, r)$ die **positiv orientierte Kreislinie**

ii) Sind $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, so ist

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C} : \quad t \mapsto (1 - t)z_0 + tz_1$$

ein Integrationsweg mit $\gamma'(t) = z_1 - z_0$.
Die Spur von γ ist die Verbindungsstrecke von z_0 und z_1.
Wir bezeichnen γ auch mit $[z_0, z_1]$

iii) Sind allgemeiner $(n+1)$ Punkte $z_0, ..., z_n \in \mathbb{C}$ gegeben, so ist $\gamma : [0, n] \to \mathbb{C} : \quad t \mapsto (1-t+k-1)z_{k+1}+(t-k+1)z_k$ falls $t \in [k-1, k]$ ein stückweise stetig differenzierbarer

Weg. Wir nennen diesen Weg den Streckenzug zwischen $z_0, z_1, ..., z_n$ und bezeichnen diesen Weg als $[z_0, z_1, ..., z_n]$

iv) Sind drei Punkte z_0, z_1, z_2 gegeben, so bezeichnen wir

$$[z_0, z_1, z_2, z_0] = \partial\Delta(z_0, z_1, z_2)$$

$\Delta(z_0, z_1, z_2)$ ist das abgeschlossene Dreieck mit Eckpunkten z_0, z_1, z_2

5.6. Bemerkung

i) Sind $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{C}$ Integrationswege mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, so ist der zusammengesetzte Weg

$$\gamma_1 * \gamma_2 : [a, b + d - c] \to \mathbb{C} : \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{falls } t \in [a, b] \\ \gamma_2(t - b + c) & \text{falls } t \in [b, b + d - c] \end{cases}$$

auch ein Integrationsweg mit Spur $|\gamma_1 * \gamma_2| = |\gamma_1| \cup |\gamma_2|$

ii) Für $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ist der **entgegengesetzte Weg**

$$\gamma^{-1} : [a, b] \to \mathbb{C} : \quad t \mapsto \gamma(a + b - t)$$

auch ein Integrationsweg mit Spur $|\gamma^{-1}| = |\gamma|$

iii) Aus ANA II wissen wir, dass die Länge von γ gegeben ist durch

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

5.7. Definition

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $f : |\gamma| \to \mathbb{C}$ stückweise stetig.
Dann ist das **Kurvenintegral** von f entlang γ definiert durch

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

5.8. Beispiel

i) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\int_{K(z_0,r)} (z - z_0) dz = \int_0^{2\pi} re^{it} \cdot ire^{it} dt = ir^2 \int_0^{2\pi} e^{2it} dt = \frac{ir^2}{2i} \left[e^{2it}\right]_{t=0}^{2\pi} = 0$$

ii)

$$\int_{K(z_0,r)} (z-z_0)^{-1}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} \cdot ire^{it}dt = 2\pi i$$

5.9. Bemerkung

Sei γ ein Integrationsweg, und $f : |\gamma| \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq L(\gamma) \cdot \max_{z\in|\gamma|} |f(z)|$$

Beweis:
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|dt$$

$$\leq \max_{z\in|\gamma|} |f(z)| \cdot \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \max_{z\in|\gamma|} |f(z)| \cdot L(\gamma)$$

5.10. Satz

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $\gamma : [c,d] \to [a,b]$ eine Parametertransformation, d.h. γ ist bijektiv und stückweise stetig differenzierbar, und $\gamma'(t) > 0 \quad \forall t \in [c,d]$ (Ist $\bar{t} \in [c,d]$ eine Stelle an der γ nicht differenzierbar ist, so existieren aber die einseitigen Ableitungen, die dann jeweils positiv sein müssen)
Dann ist $\gamma \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, und es gilt:

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz \qquad \forall \text{ stetigen Funktionen } f : |\gamma| \to \mathbb{C}$$

Beweis: Übung

5.11. Satz

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, und γ^{-1} der entgegengesetzte Weg
($\gamma^{-1} : [a,b] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \gamma(a+b-t)$). Dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)dz = -\int_{\gamma^{-1}} f(z)dz \qquad \forall f : |\gamma| \to \mathbb{C} \text{ stetig}$$

5.12. Satz

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg

i) Seien $f, g : |\gamma| \to \mathbb{C}$ stetig, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, dann gilt:

$$\int_\gamma \lambda f(z) + \mu g(z) dz = \lambda \int_\gamma f(z) dz + \mu \int_\gamma g(z) dz$$

ii) Seien $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{C}$ Integrationswege mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ so gilt:

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

Beweis:
Dies folgt aus den entsprechenden Eigenschaften reeller Integrale.

5.13. Bemerkung

In Teil ii) von Satz 5.12 benötigen wir die Voraussetzung $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ nur um zu zeigen, dass $\gamma_1 * \gamma_2$ ein Integrationsweg ist.
Wir wollen daher die Definition eines Integrationswegs etwas verallgemeinern.
Eine **Kette** Γ sei eine Abbildung

$$\Gamma : \{\gamma : \gamma \text{ Integrationsweg}\} \to \mathbb{Z}$$

so dass Γ nur auf endlich vielen Integrationswegen einen Wert $\neq 0$ annimmt, d.h. wir ordnen jedem Integrationsweg γ eine ganzzahlige Vielfachheit $\Gamma(\gamma) = n(\gamma)$ zu.
Die Menge der Ketten bildet eine kommutative Gruppe unter punktweiser Addition

$$(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\gamma) = \Gamma_1(\gamma) + \Gamma_2(\gamma) \qquad \forall \Gamma_1, \Gamma_2 \text{ Ketten}$$

Wir identifizieren jeden Integrationsweg γ mit der Kette

$$\Gamma_\gamma \text{ mit } \Gamma_\gamma(\tilde{\gamma}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \gamma = \tilde{\gamma} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann lässt sich jede Kette Γ schreiben als:

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{l} \underbrace{n(\gamma_k)}_{=\Gamma(\gamma_k)} \cdot \Gamma_{\gamma_k}$$

d.h. Ketten sind formale, endlich Linearkombinationen von Integrationswegen mit ganzzahligen Koeffizienten.
Wir definieren die Spur dieser Kette als

$$|\Gamma| = \bigcup_{k=1}^{l} |\gamma_k|$$

Das Integral einer stetigen Funktion $f : |\Gamma| \to \mathbb{C}$ ist definiert als

$$\int_\Gamma f(z)dz := \sum_{k=1}^{l} n(\gamma_k) \int_{\gamma_k} f(z)dz$$

Dann gilt für zwei beliebige Ketten Γ_1, Γ_2, dass

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz$$

Achtung:
$\Gamma_{\gamma_1 * \gamma_2} \neq \Gamma_{\gamma_1} + \Gamma_{\gamma_2}$

6. Stammfunktionen

6.1. Definition

i) $D \subseteq \mathbb{C}$ sei offen und $f : D \to \mathbb{C}$ sei stetig. Eine Funktion $F : D \to \mathbb{C}$ heißt **Stammfunktion** von f, wenn F holomorph ist und $F' = f$ gilt.

ii) Existiert zu jedem $z_0 \in D$ eine offene Menge U mit $z_0 \in U$, so dass $f|_U$ eine Stammfunktion besitzt, so sagen wir, dass f **lokale Stammfunktion** hat.

6.2. Satz

Sei $f : D \to \mathbb{C}$ stetig, und $F : D \to \mathbb{C}$ ein Stammfunktion von f. Sei $\gamma : [a, b] \to D$ ein Integrationsweg, dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Das Kurvenintegral hängt in diesem Fall nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges γ ab.

Beweis:
Sei $\gamma : [a, b] \to D$ ein Integrationsweg.
Wähle eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$, so dass $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ stetig differenzierbar ist für $k = 1, ..., n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (F \cdot \gamma)'(t)dt \\ &= \sum_{k=1}^{n} F(\gamma(t_k)) - F(\gamma(t_{k-1})) = F(\gamma(t_n)) - F(\gamma(t_0)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\end{aligned}$$

6.3. Bemerkung

i) Ist $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und sind F_1 und F_2 Stammfunktionen von f, so ist $(F_1 - F_2)' = f - f = 0$,
d.h. $F_1 - F_2$ ist lokal konstant.
Daher gilt auf zusammenhängenden Gebieten, dass sich zwei Stammfunktionen nur um eine Konstante unterscheiden.

ii) Ist $\gamma : [a, b] \to D$ ein geschlossener Weg, und hat $f : D \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion auf D, so gilt:
$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

6.4. Beispiel

i) Ist $f(z) = z^n$ mit $n \neq -1$, so ist $F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}$ eine Stammfunktion von f auf $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ falls $n < 0$.
Für einen Integrationsweg γ mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1 erfüllt daher
$$\int_\gamma z^n dz = \frac{1}{n+1}(z_1^{n+1} - z_0^{n+1})$$

ii) Das Polynom $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ hat Stammfunktion $Q(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} z^{k+1}$

iii) In Bsp. 5.8 ii) hatten wir gesehen, dass
$$\int_{K(0,r)} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i \neq 0, \quad \forall r > 0$$
Die Funktion $z \mapsto z^{-1}$ hat also keine Stammfunktion auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ bzw. auf keinem Anulus $B_R(0)\backslash\overline{B_r}(0) \quad \forall 0 < r < R$

6.5. Satz

Sei $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und D sei ein Gebiet, und gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für alle geschlossenen Wege in D, so besitzt f eine Stammfunktion in D.

Beweis:
Sei $z_0 \in D$ fest. Für jedes $z \in D$ existiert ein Integrationsweg γ_z in D von z_0 nach z (vgl. Bem. 6.7)
Wir setzen $F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta$
Wir zeigen: Es gilt $F'(z) = f(z) \quad \forall z \in D$
Sei $z_1 \in D$ fest. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $z \in B_\varepsilon(z_1)$ die Strecke $[z_1, z]$ ganz in D liegt.

Der Weg $\gamma_{z_1} * [z_1, z] * \gamma_z^{-1}$ ist ein geschlossener Weg in D, folglich gilt:

$$0 = \int_{\gamma_{z_1}} f(\zeta)d\zeta + \int_{[z_1,z]} f(\zeta)d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta = F(z_1) - F(z) + \int_{[z_1,z]} f(\zeta)d\zeta$$

also:

$$F(z)-F(z_1) = \int_{[z_1,z]} f(\zeta)d\zeta = \int_0^1 f(z_1+t(z-z_1))\cdot(z-z_1)dt = (z-z_1)f(z_1)+(z-z_1)R(z)$$

mit $R(z) = \int_0^1 f(z+t(z-z_1))dt - f(z_1)$
Es gilt $R(z_1) = 0$ und

$$\begin{aligned}
|R(z)| &= \left|\int_0^1 f(z+t(z-z_1))dt - f(z_1)\right| \\
&= \left|\int_0^1 f(z+t(z-z_1)) - f(z_1)dt\right| \\
&\leq \int_0^1 |f(z+t(z-z_1)) - f(z_1)|dt \\
&\leq \max_{0\leq t\leq 1} |f(z+t(z-z_1)) - f(z_1)|
\end{aligned}$$

Da f stetig ist, existiert zu jedem $\delta > 0$ ein $r > 0$ mit $|f(z')-f(z_1)| < \delta, \quad \forall |z'-z_1| < r$
Damit gilt für $z \in B_r(z_1)$ dass $|R(z)| < \delta$
$\Rightarrow R$ ist stetig in z_1
$\Rightarrow$ Behauptung

6.6. Bemerkung

Die Stammfunktion von $f : D \to \mathbb{C}$ ist also gegeben durch $F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta$ wobei γ_z ein beliebiger Weg von z_0 nach z ist.
Dabei hängt $F(z)$ nicht von der Wahl von γ_z, denn ist $\tilde{\gamma_z}$ ein anderer Weg in D, der z_0 mit z verbindet, so ist $\gamma_z * \gamma_z^{-1}$ ein geschlossener Weg und daher gilt:

$$0 = \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta$$

6.7. Bemerkung

Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, so existiert für alle $z_0, z_1 \in D$ ein stückweise linearer Weg γ, der z_0 mit z_1 verbindet.

Beweis:
Sei $\gamma : [0,1] \to D$ ein stetiger Weg der z_0 und z_1 verbindet.
Ist $A \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen, setze $\mathrm{dist}(z, A) := \inf\{|z-a|, a \in A\}$

Dann ist $\text{dist}(z, A) = 0 \Leftrightarrow z \in A$
(Ist $(a_n) \subseteq A$ eine Folge mit $|z - a_n| \to 0 \overset{\text{A abg.}}{\Rightarrow} z \in A$)
Die Funktion $z \mapsto \text{dist}(z, A)$ ist stetig. Dann ist $z_n \to z$ eine konvergente Folge. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so wähle n_0 so groß, dass $|z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall n \geq n_0$
Wähle $a \in A$ so dass $|z - a| < \text{dist}(z, A) + \frac{\varepsilon}{2}$
Wähle $a_n \in A$ so dass $|z_n - a_n| < \text{dist}(z_n, A) + \frac{\varepsilon}{2}$
Dann gilt:

$$\text{dist}(z_n, A) \leq |z_n - a| \leq |z_n - z| + |z - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \text{dist}(z, A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$\text{dist}(z, A) \leq |z - a_n| \leq |z - z_n| + |z_n - a_n| \leq \text{dist}(z_n, A) + \varepsilon$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \text{dist}(z_n, A) = \text{dist}(z, A)$

Damit ist auch die Funktion $t \mapsto \text{dist}(\gamma(t), \mathbb{C}\backslash D)$ definiert auf $[0, 1]$ mit Werten in $\mathbb{R}$. Diese Funktion ist positiv auf $[0, 1]$
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ so dass $\text{dist}(\gamma(t), \mathbb{C}\backslash D) > \varepsilon \quad \forall t \in [0, 1]$
Da γ gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass
$|\gamma(t') - \gamma(t)| < \varepsilon \quad \forall |t' - t| < \delta, t', t \in [0, 1]$

Wähle eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$ mit $|t_{k-1} - t_k| < \delta \quad \forall k = 1, ..., n$
Dann ist $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}([t_{k-1}, t_k]) \subseteq B_\varepsilon(\gamma(t_{k-1})) \subseteq D \quad \forall k = 1, ..., n$
Jetzt approximiere γ durch den Weg $[\gamma(t_0), \gamma(t_1), ..., \gamma(t_n)] \subseteq D$

6.8. Definition

i) Eine Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ heißt **konvex**, falls zu je zwei Punkten $z_0, z_1 \in M$ auch die Verbindungsstrecke $[z_0, z_1]$ ganz in M enthalten ist.

ii) Eine Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ heißt **sternförmig**, falls ein $z_0 \in M$ existiert, so dass zu jedem $z_1 \in M$ die Verbindungsstrecke $[z_0, z_1]$ ganz in M enthalten ist. z_0 heißt Sternpunkt.

6.9. Beispiel

i) $\forall z \in \mathbb{C}, \quad r > 0$ ist $B_r(z_0)$ konvex.
Die Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ ist konvex.
Das Innere des Dreiecks $\Delta(z_0, z_1, z_2)$ ist konvex.

ii) Jede konvexe Menge ist sternförmig, jeder Punkt in der Menge ist dann Sternpunkt.
Die geschlitzte Ebene $\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \leq 0, \text{Im}(z) = 0\}$ ist nicht konvex aber sternförmig mit Sternpunkten alle z_0 mit $\text{Re}(z_0) > 0$, $\text{Im}(z_0) = 0$

Für sternförmige Gebiete braucht man nicht zu fordern, dass $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für alle geschlossenen Integrationswege um eine Stammfunktion zu konstruieren, es reicht folgendes Kriterium:

6.10. Satz

Sei D ein sternförmiges Gebiet mit Sternpunkt z_0 und $f : D \to \mathbb{C}$ sei stetig mit $\int_{\partial\Delta(z_0,z_1,z_2)} f(z)dz = 0$ für alle Dreiecke $\Delta(z_0, z_1, z_2) \subseteq D$.

Dann besitzt f eine Stammfunktion auf D der Form

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)d\zeta$$

Insbesondere gilt dann $\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = 0$ für alle geschlossenen Integrationswege in D.

Beweis:
Genau wie in Satz 6.5, nur wird γ_z immer durch $[z_0, z_1]$ ersetzt.

6.11. Bemerkung

Ist D ein beliebiges Gebiet, so besitzt jeder Punkt $z_0 \in D$ eine konvexe, offene Umgebung die ganz in D liegt (etwa $B_\varepsilon(z_0)$ für kleines ε).
Es gilt daher für eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, dass $\int_{\partial\Delta(z_0,z_1,z_2)} f(\zeta)d\zeta = 0$ für alle Dreiecke $\Delta(z_0, z_1, z_2) \subseteq D$
Es existiert auf U eine Stammfunktion von f, dass heißt in diesem Fall hat f lokale Stammfunktion.

7. Der Cauchy-Integralsatz und die Cauchy-Integralformel

Wir werden jetzt voriges Kapitel anwenden, um zu zeigen, dass eine holomorphe Funktion eine lokale Stammfunktion besitzt. Das ergibt dann die Darstellungsformel:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

für holomorphe Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ mit $B_r(z_0) \subseteq D$

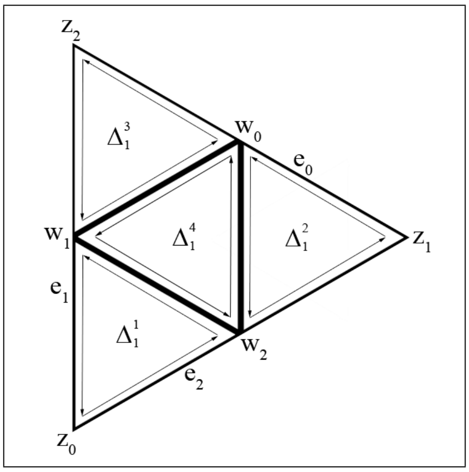
7.1. Lemma (Lemma von Goursat)

Sei $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ ein Dreieck. Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $\Delta \subseteq D$ und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt:

$$\int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta = 0$$

Beweis:

Wir unterteilen das Dreieck $\Delta = \Delta(z_0, z_1, z_2)$ wie folgt in vier Teilbereiche $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \Delta_1^3, \Delta_1^4$. Wir bezeichnen die Seite die z_k nicht enthält mit e_k:



$$\begin{aligned} e_0 &= [z_1, z_2] \\ e_1 &= [z_2, z_0] \\ e_2 &= [z_0, z_1] \end{aligned}$$

Sei w_k der Mittelpunkt von e_k. Dann ist:

$$\begin{aligned} \Delta_1^1 &:= \Delta(z_0, w_2, w_1) \\ \Delta_1^2 &:= \Delta(w_2, z_1, w_0) \\ \Delta_1^3 &:= \Delta(w_0, z_2, w_1) \\ \Delta_1^4 &:= \Delta(w_0, w_1, w_2) \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\int_\Delta f(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^4 \int_{\Delta_1^k} f(\zeta) d\zeta$$

da sich die Integrale über die Strecken $[w_i, w_j]$ jeweils wegheben. Sei Δ_1 das Dreieck unter den Δ_1^k für das gilt:

$$\left| \int_{\Delta_1} f(\zeta) d\zeta \right| = \max_{k=1,\ldots,4} \left| \int_{\Delta_1^k} f(\zeta) d\zeta \right| \qquad \Rightarrow \left| \int_\Delta f(\zeta) d\zeta \right| \leq 4 \left| \int_{\Delta_1} f(\zeta) d\zeta \right|$$

Induktiv wenden wir obige Unterteilung auf Δ_1 an, und konstruieren weitere Dreiecke $\Delta \supseteq \Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \Delta_3 \supseteq ...$ mit der Eigenschaft:

$$\left| \int_\Delta f(\zeta) d\zeta \right| \leq 4^k \cdot \left| \int_{\Delta_k} f(\zeta) d\zeta \right| \qquad \forall k = 1, 2, ...$$

Beachte, das nach Konstruktion die Seiten in jedem Schritt halbiert werden, d.h. $L(\partial\Delta_k) \leq 2^{-k} L(\partial\Delta)$. Ist $\operatorname{diam}(\Delta_k) := \max\{|z - w| : z, w \in \Delta_k\}$ so gilt ebenso $\operatorname{diam}(\Delta_k) \leq 2^{-k} \operatorname{diam}(\Delta)$ Folglich gilt für alle $w \in \Delta_l$, dass $|z - w| \leq 2^{-k} \operatorname{diam}(\Delta)$ falls $l \geq k$.
Daher bilden die Folgen der Eckpunkte der Δ_k Cauchyfolgen und konvergieren folglich gegen ein $z_0 \in \Delta$. Außerdem $z_0 \in \bigcap_{k \geq 1} \Delta_k$.

Wir haben daher eine Folge von Dreiecken konstruiert die in immer kleineren Umgebungen von z_0 liegen.

Da f holomorph ist, gilt:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot f'(z_0) + (z - z_0) \cdot R(z_0) = 0$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion $R(z)$ mit $R(z_0) = 0$.
Da die lineare Funktion $z \mapsto f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)$ eine Stammfunktion hat, gilt:

$$\int_{\partial\Delta_k} f(\zeta)d\zeta = \int_{\partial\Delta_k} (\zeta - z_0)R(\zeta)d\zeta$$

folglich:

$$\left|\int_{\partial\Delta_k} f(\zeta)d\zeta\right| \leq \int_{\partial\Delta_k} |\zeta - z_0||R(\zeta)|d\zeta \leq 2^{-k}L(\partial\Delta) \cdot 2^{-k}\operatorname{diam}(\Delta) \cdot \max_{\zeta\in\Delta_k}|R(\zeta)| \quad \leq C \cdot 4^{-k} \cdot \max_{\zeta\in\Delta_k}|R(\zeta)|$$

Da R in z_0 stetig ist, und zu jedem $\delta > 0$ ein k_0 existiert, so dass

$$\Delta_k \subseteq B_\delta(z_0) \qquad \forall k \geq k_0$$

existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein k_0, so dass

$$\max_{\zeta\in\Delta_k}|R(\zeta)| < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0$$

Für diese k gilt dann

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta\right| \leq 4^k \cdot \left|\int_{\partial\Delta_k} f(\zeta)d\zeta\right| \leq C\varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war folgt:

$$\int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta = 0$$

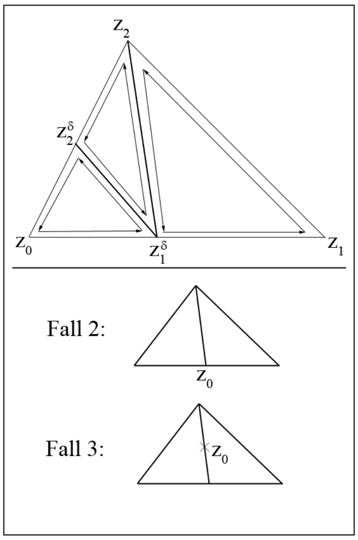
7.2. Bemerkung

Obiges Lemma bleibt gültig, wenn $f : D \to \mathbb{C}$ stetig ist, und auf $D\backslash\{z_0\}$ holomorph ist, wobei $\Delta \subseteq D, z_0 \in D$

Beweis:
Zerschneidung von Δ:

Fall 1: z_0 ist Eckpunkt von Δ.

Zerschneide wie in der Abbildung mit
$z_k^\delta := (1 - \delta)z_0 + \delta z_k$



Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta\right| \\
=&\left|\int_{\partial\Delta(z_1^\delta,z_1,z_2)} ... + \int_{\partial\Delta(z_1^\delta,z_2,z_2^\delta)} ... + \int_{\partial\Delta(z_1^\delta,z_2^\delta,z_0)} ...\right| \\
=&\left|\int_{\partial\Delta(z_1^\delta,z_2^\delta,z_0)} f(\zeta)d\zeta\right| \\
\le&\delta \cdot L(\Delta) \cdot \max_{\zeta\in\Delta} |f(\zeta)| \to 0 \text{ für } \delta \to 0
\end{aligned}$$

Fall 2: z_0 liegt auf einer Seite von Δ
Fall 3: z_0 liegt im Inneren von Δ

7.3. Satz (Cauchy-Integralsatz für sternförmige Gebiete)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf $D\backslash\{z_0\}$ für ein $z_0 \in D$. Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in D:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Beweis:
Wegen Lemma 7.1, Bem. 7.2 und Satz 6.10 folgt dass f eine Stammfunktion auf D hat. Bem. 6.3 liefert dann die Behauptung.

7.4. Bemerkung

Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, D aber nicht notwendig sternförmig so gilt immer noch, dass f lokale Stammfunktion besitzt. Daher verschwinden dann Integrale über „kleine“ geschlossene Wege.

7.5. Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $B_r(z_0) \subseteq D$. Dann gilt für alle $z \in B_r(z_0)$ dass:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

Beweis:
Da D offen ist, exisitert ein $\varepsilon > 0$ so dass $B_{r+\varepsilon}(z_0) \subseteq D$ gilt
(denn $\text{dist}(\overline{B_r(z_0)}, \mathbb{C}\backslash D) > 0$).

Da $B_{r+\varepsilon}(z_0)$ konvex ist, können wir den Cauchy-Integralsatz auf $B_{r+\varepsilon}(z_0)$ anwenden. Betrachte die Funktion:

$$g : B_{r+\varepsilon}(z_0) \to \mathbb{C}, \quad \zeta \mapsto \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}, & \text{wenn } \zeta \neq z \\ f'(z), & \text{wenn } \zeta = z \end{cases}$$

für $z \in B_r(z_0)$ fest.
Dann ist g stetig auf $B_{r+\varepsilon}(z_0)$ und holomorph auf $B_{r+\varepsilon}(z_0)\backslash\{z\}$.
Wegen des Cauchy-Integralsatzes gilt:

$$0 = \int_{K(z_0,r)} g(\zeta)d\zeta = \int_{K(z_0,r)} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{K(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{K(z_0,r)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

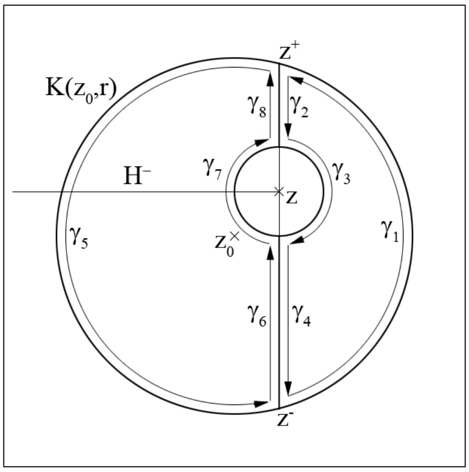
Um den Beweis zu beenden, berechnen wir $\int_{K(z_0,r)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$.

$$\begin{aligned} \text{Sei } H^- &:= \mathbb{C}\backslash\{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(w) \leq \mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(z)\} \\ H^+ &:= \mathbb{C}\backslash\{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(w) \geq \mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(z)\} \end{aligned}$$

Dann sind $H^{\pm}$ sternförmig mit Sternpunkten $z \pm 1$ also gilt dort der Cauchy-Integralsatz für die holomorphe Funktion $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$.
Wähle $\delta > 0$ so klein, dass $\overline{B_\delta(z)} \subseteq B_r(z_0)$
Setze

$$\begin{aligned} \{z^{\pm}\} = &\{w \in K(z_0,r) : \ \mathrm{Re}(w) = \ \mathrm{Re}(z), \text{ s.d.} \\ &\mathrm{Im}(z^+) > \ \mathrm{Im}(z), \ \mathrm{Im}(z^-) < \ \mathrm{Im}(z)\} \end{aligned}$$

und $\tilde{z}^{\pm} = z \pm i\delta$



Betrachte folgende Wege im H^-:

γ_1 : Das Stück von z^- nach z^+ entlang $K(z_0, r)$
γ_2 : $[z^+, \tilde{z}^+]$
γ_3 : Das Stück von $\tilde{z}^-$ nach $\tilde{z}^+$ entlang $K(z, \delta)$ in entgegengesetzter Richtung
γ_4 : $[\tilde{z}^-, z^-]$
$\alpha := \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4$ geschlossener Weg in H^-

Weiter betrachte die Wege in H^+:

$\gamma_5:$ Das Stück von z^+ nach z^- entlang $K(z_0, r)$
$\gamma_6:$ $[z^-, \tilde{z}^-]$
$\gamma_7:$ Das Stück von $\tilde{z}^-$ nach $\tilde{z}^+$ entlang $K(z, \delta)$ in entgegengesetzter Richtung
$\gamma_8:$ $[\tilde{z}^+, z^+]$
$\beta := \gamma_5 * \gamma_6 * \gamma_7 * \gamma_8$

Wegen des Cauchy-Integralsatzes gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\alpha \frac{1}{\zeta - z} d\zeta + \int_\beta \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \\
&= \int_{\gamma_1 * \gamma_5} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta + \underbrace{\int_{\gamma_2 * \gamma_8} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta}_{=0} + \int_{\gamma_3 * \gamma_7} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta + \underbrace{\int_{\gamma_4 * \gamma_6} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta}_{=0} \\
&= \int_{K(z_0,r)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta - \int_{K(z,\delta)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \\
&\Rightarrow \int_{K(z_0,r)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i \\
&\Rightarrow \text{ Behauptung}
\end{aligned}$$

7.6. Bemerkung

Sei $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ Integrationsweg, $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\varphi : |\gamma| \times D \to \mathbb{C}$ stetig.
Definiere $f : D \to \mathbb{C}: \quad f(z) = \int_\gamma \varphi(\zeta, z) d\zeta$.
Dann gilt:

i) f ist stetig

ii) Ist die Funktion $z \mapsto \varphi(\zeta, z)$ holomorph für alle $\zeta \in \mathbb{C}$ und ist $\frac{\partial \varphi}{\partial z} : |\gamma| \times D \to \mathbb{C}$ stetig, so ist f holomorph, und es gilt:

$$f'(z) = \int_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\zeta, z) d\zeta$$

Beweis: Übung 2
In der Cauchy-Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

ist $\varphi(\zeta, z) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ holomorph für alle $\zeta \neq z$. Damit gilt:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

Wir erhalten aus der Cauchy-Integralformel auch eine Darstellungformel für die Ableitung und weiter sehen wir aus der Darstellungsformel, das f' wieder holomorph sein muss.

7.7. Satz

Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, so ist f beliebig oft komplex differenzierbar. Jede Ableitung von f ist eine holomorphe Funktion.
Ist weiter $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$, so gilt für jedes $z \in B_r(z_0)$, dass

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{K(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

7.8. Korollar

Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f_n : D \to \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen, die in D lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f holomorph, und die Folge $f_n' : D \to \mathbb{C}$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen f'.

Beweis:
Sei $z_0 \in D, \overline{B_r(z_0)} \subseteq D$, so dass die f_n auf $\overline{B_r(z_0)}$ gleichmäßig gegen f konvergieren.
Wegen der Cauchy-Integralformel gilt:

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K(z_0,r)} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \qquad \forall z \in B_r(z_0)$$

Für $z \in B_{\frac{r}{2}}(z_0)$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
&\left| f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{K(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq |f(z) - f_n(z)| + \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{K(z_0,r)} \frac{f_(\zeta) - f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \\
&\leq \max_{z \in \overline{B_r(z_0)}} |f(z) - f_n(z)| + \frac{1}{2\pi i} L(K(z_0, r)) \cdot \frac{2}{r} \max_{\zeta \in B_r(z_0)} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \\
&\leq (1 + 2) \cdot \max_{z \in B_r(z_0)} |f(z) - f_n(z)| \to 0 \ \text{ für } n \to \infty
\end{aligned}$$

da die f_n gleichmäßig gegen f konvergieren:

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \qquad \forall z \in B_{\frac{r}{2}}(z_0)$$

daher ist f in $B_{\frac{r}{2}}(z_0)$ holomorph wegen Bem. 7.6 und damit auf ganz D.
Damit gilt die Cauchy-Integralformel für die Ableitung von f, d.h.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \qquad \forall z \in B_r(z_0)$$

und wir können abschätzen:

$$\begin{aligned} |f'(z) - f_n'(z)| &\leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{K(z_0,r)} \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{4}{r^2} \cdot \max_{z\in B_r(z_0)} |f(z) - f_n(z)| \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty \end{aligned}$$

Wir erhalten, dass $f_n' \to f'$ gleichmäßig in $B_{\frac{r}{2}}(z_0)$ bzw. lokal gleichmäßig in D.

7.9. Korollar

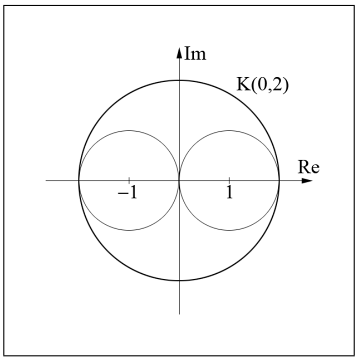
Ist $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $B_r(z_0)$. Dann ist $P(z)$ auf $B_r(z_0)$ holomorph und es gilt $P'(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}(z - z_0)^k$.

Beweis:
Die Partialsummen $f_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ konvergieren lokal gleichmäßig gegen P auf $B_r(z_0)$ und sind holomorph, daher ist wegen Korollar 7.8 auf $B_r(z_0)$ holomorph und

$$P'(z) = \lim_{n\to\infty} f_n'(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}(z - z_0)^k$$

7.10. Beispiel

Anwendung des Cauchy-Integralsatzes zur Berechnung von Wegintegralen:



Berechnung von

$$\int_{K(0,2)} \frac{\cos\pi}{\zeta^2 - 1} d\zeta$$

Es ist

$$\int_{K(0,2)} \frac{\cos\pi}{\zeta^2 - 1} d\zeta = \int_{K(1,1)} \frac{\cos\pi}{\zeta^2 - 1} d\zeta + \int_{K(-1,1)} \frac{\cos\pi}{\zeta^2 - 1} d\zeta$$

Es ist

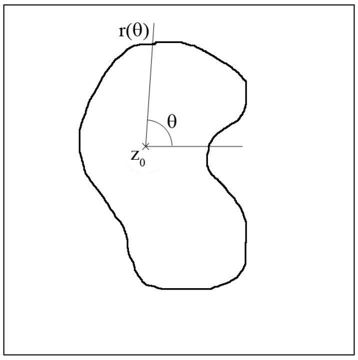
$$\int_{K(1,1)} \frac{\cos\pi}{\zeta^2-1} d\zeta = \int_{K(1,1)} \left(\frac{\cos\pi}{\zeta^2-1}\right) \frac{1}{\zeta-1} d\zeta = \int_{K(1,1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-1} d\zeta = 2\pi i \cdot f(1) = -\pi i$$

und weiter

$$\int_{K(-1,1)} \frac{\cos\pi}{\zeta^2-1} d\zeta = \int_{K(-1,1)} \frac{g(\zeta)}{\zeta+1} d\zeta = 2\pi i \cdot g(-1) = \pi i \text{ mit } g(\zeta) = \frac{\cos\pi\zeta}{\zeta-1}$$

$$\Rightarrow \int_{K(0,2)} \frac{\cos\pi\zeta}{\zeta^2-1} d\zeta = 0$$

7.11. Bemerkung



i) $D \subseteq \mathbb{C}$ sei offen, beschränkt und sternförmig mit Sternpunkt $z_0 \in D$.
Zu jedem $\theta \in [0, 2\pi]$ setze

$$r(\theta) = \sup\{r > 0 : z_0 + r \cdot e^{i\theta} \in D\}$$
$$\Rightarrow z_0 + r(\theta \cdot e^{i\theta}) \in \partial D$$

Wir sagen D hat stückweise stetig differenzierbaren Rand, wenn $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+$ stückweise stetig differenzierbar ist, und $r(0) = r(2\pi)$.
Dann ist $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \theta \mapsto z_0 + r(\theta) \cdot e^{i\theta}$ ein geschlossener Integrationsweg, der ∂D parametrisiert.

ii) Sei $D' \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D' \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist weiter $D \subseteq D'$ ein beschränkter sternförmiges Gebiet mit $\overline{D} \subseteq D'$ mit stückweise stetigem Rand, so gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \qquad \forall z \in D$$

wobei Integration über ∂D bedeutet, dass wir über den Integrationsweg γ integrieren.

Beweis:

ii) Wie im Beweis von Satz 7.5 folgt

$$0 = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\partial D} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

Wir müssen nur noch berechnen, dass $\int_{\partial D} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i$. Dies folgt ähnlich wie im Beweis von Satz 7.5.

8. Konsequenzen der Integralformel / des Integralsatzes

8.1. Bemerkung (Satz von Morera)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Gilt für jedes Dreieck $\Delta \subseteq D$, dass

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

so ist f holomorph auf D.

Beweis:
Wegen Satz 6.10 besitzt f lokale Stammfunktionen. Diese sind holomorph. Damit ist f lokal die Ableitung einer holomorphen Funktion und damit wieder holomorph.

8.2. Satz (Riemannscher Hebbarkeitssatz)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, und gilt $\lim\limits_{z \to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$ so existiert eine holomorphe Funktion $\tilde{f} : D \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{f}\Big|_{D\backslash\{z_0\}} = f$, d.h. eine holomorphe Fortsetzung von f über z_0 hinweg.

Beweis:
o.E. $z_0 = 0$. Betrachte die Funktion $g(z) = z \cdot f(z)$ für $z \in D\backslash\{0\}$. Diese Funktion ist durch $g(0) = 0$ stetig in den Ursprung fortsetzbar, und holomorph in $D\backslash\{0\}$. Wegen Bem 7.2 gilt für alle Dreiecke $\Delta \subseteq D$, dass

$$\int_{\partial\Delta} g(z)dz = 0$$

Aus Bem 8.1 folgt, dass g in ganz D holomorph ist.
Folglich gilt:

$$z \cdot f(z) = g(z) = \underbrace{g(0)}_{=0} + z \cdot g'(0) + z \cdot R(z)$$

mit einer in 0 stetigen Funktion R mit $R(0) = 0$.
$\Rightarrow f(z) = g'(0) + R(z)$ für $z \neq 0$
$\Rightarrow f$ ist stetig in den Ursprung fortsetzbar
$\Rightarrow$ Bem. 7.2 und 8.1 liefern dann die Behauptung

8.3. Bemerkung

i) Der Hebbarkeitssatz ist insbesondere dann anwendbar, wenn f in einer Umgebung von z_0 beschränkt ist, etwa wenn f stetig in z_0 fortsetzbar ist.

ii) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, und $A \subseteq D$ eine in D diskrete Menge (d.h. $\forall a \in A$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $A \cap D \cap B_\varepsilon(a) = \{a\}$).

Ist dann $f : D\setminus A \to \mathbb{C}$ holomorph, und gilt $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0 \quad \forall a \in A$, so existiert eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{f} : D \to \mathbb{C}$. Das folgt durch Anwendung von Satz 8.2 auf den Mengen $D \cap B_\varepsilon(a)$, ε wie oben.

8.4. Satz (Potenzreihenentwicklung)

Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in D$. Dann ist f um z_0 in eine Potenzreihe $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ entwickelbar, mit den durch f eindeutig bestimmten Koeffizienten

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist mindestens R, wobei $B_R(z_0)$ die größte Kreisscheibe ist, die in D enthalten ist ($R = \operatorname{dist}(z_0, \mathbb{C}\setminus D)$), dort konvergiert die Potenzreihe lokal gleichmäßig gegen f.

8.5. Bemerkung

Die Koeffizienten lassen sich auch mit der Cauchy-Integralformel berechnen, es gilt:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{K(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \qquad \forall r < R$$

Beweis:
Eindeutigkeit:
Lässt sich f um z_0 in eine Potenzreihe entwickeln so gilt $f^{(k)}(z_0) = k! \cdot a_k$ durch gliedweises Differenzieren, d.h. die Koeffizienten sind durch f eindeutig festgelegt.

Existenz:
Sei $r < R$, d.h. $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$ und wegen der Cauchy-Integralformel gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Wir beobachten, dass die Funktion $z \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ für festes ζ in eine Potenzreihe entwickelt werden kann:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} \cdot \frac{1}{\zeta - z_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$$

denn falls $z \in B_r(z_0)$ und $\zeta \in \partial B_r(z_0)$ ist $\frac{|z-z_0|}{|\zeta - z_0|} < 1$.
Eingesetzt in die Cauchy-Integralformel ergibt sich

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K(z_0,r)} f(\zeta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

Ist $z \in B_r(z_0)$ fest, so konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}}$ gleichmäßig in $\zeta \in \partial B_r(z_0)$.
Außerdem ist f auf $\partial b_r(z_0)$ beschränkt, also konvergiert der Integrand gleichmäßig auf $\partial b_r(z_0)$. Integration und Grenzwert dürfen daher vertauscht werden, es folgt:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{K(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^k$$

$$\text{mit } a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{K(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \quad \text{folgt} \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Die Potenzreihe hat also Konvergenzradius $\geq r \quad \forall r < R$
$\Rightarrow$ der Konvergenzradius ist $\geq R$
In $B_r(z_0)$ konvergiert die Potenzreihe lokal gleichmäßig gegen f.

8.6. Bemerkung

Es ist möglich, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe größer ist als R.
Ein Beispiel ist etwa $f : B_1(0) \to \mathbb{C} \quad z \mapsto z$
Es sind aber weitere Probleme möglich, insbesondere wenn der Konvergenzradius D in mehr als einer Komponente schneidet.
Beispiel: später, Logarithmen auf $\mathbb{C} \backslash \{z : \mathrm{Re}(z) \leq 0, \mathrm{Im}(z) = 0\}$

8.7. Korollar

Ist $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R, so kann P um jeden Punkt $z_1 \in B_R(z_0)$ in eine Potenzreihe entwickelt werden, deren Konvergenzradius mindestens $r = R - |z_1 - z_0|$ ist.

8.8. Korollar

Ist $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann existiert keine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subseteq D$ und $f|_{B_R(z_0)} = P$.

Beweis:
Wäre $f : D \to \mathbb{C}$ eine solche Funktion, so gäbe es ein $R' > R$ mit $B_{R'}(z_0) \subseteq D$ (denn $\mathrm{dist}(\overline{B_R(z_0)}, \mathbb{C} \backslash D) > 0$).
Auf $B_{R'}(z_0)$ ist f dann in seine Taylorreihe entwickelbar, die aber die gleichen Koeffizienten wie P haben muss.
$\Rightarrow$ Konvergenzradius von P ist $\geq R' > R \qquad \lightning$

8.9. Satz

Ist $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) f ist holomorph, d.h. komplex differenzierbar

ii) f besitzt lokale Stammfunktionen

iii) f ist um jeden Punkt $z_0 \in D$ in eine Potenzreihe entwickelbar.

iv) f ist reell differenzierbar, und erfüllt die Cauchy-Riemann Differentialgleichung.

8.10. Definition

Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in D$ und gilt:

$$f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{(n-1)}(z_0) = 0$$

aber $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, so sagen wir, dass f eine Nullstelle n-ter Ordnung besitzt.

8.11. Bemerkung

Eine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ hat genau dann in z_0 eine Nullstelle n-ter Ordnung, wenn folglich gilt:

i) Die Taylorentwicklung von f um z_0 lautet

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k(z - z_0) \qquad \text{mit } a_n \neq 0$$

ii) Es gibt eine Umgebung U von z_0 und eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$ so dass

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \qquad \forall z \in U$$
$$\left(g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n}(z - z_0)^k \text{ wo } f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \right)$$

8.12. Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) $f \equiv 0$

ii) f hat in D eine Nullstelle der Ordnung ∞

iii) Es gibt eine Menge $M \subseteq D$ und ein $z_0 \in D$, so dass $B_r(z_0) \cap (M \setminus \{z_0\}) \neq \emptyset \quad \forall r > 0$ und $f(z) = 0 \quad \forall z \in M$

Bem.:
So eine Menge heißt nicht-diskret in D.
Beweis:
i)$\Rightarrow$ ii), ii)$\Rightarrow$ iii) klar
iii)$\Rightarrow$ ii):
Nach Annahme existiert eine Folge $z_n \to z_0$ mit $z_n \neq z_0 \quad \forall n$ und $z_n \in M$ (z.B. $z_n \in B_{\frac{1}{n}}(z_0) \cap M \backslash \{z_0\}$)

Betrachte die Talorentwicklung von f um z_0

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Da f stetig ist gilt:

$$a_0 = f(z_0) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$$

Sei nun schon gezeigt, dass $a_k = 0$ für alle $k \leq l - 1$. Dann gilt:

$$f(z) = \sum_{k=l}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^l \sum_{k=l}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-l}$$

für $z = z_n$ folgt:

$$0 = (z_n - z_0)^l \sum_{k=l}^{\infty} a_k (z_n - z_0)^{k-l}$$

$\Rightarrow 0 = \sum\limits_{k=l}^{\infty} a_k (z_n - z_0)^{k-l}$ wegen $z_n \neq z_0$ (Vor.)
für $\lim_{n\to\infty}$ folgt $a_l = 0$
$\Rightarrow f$ hat eine Nullstelle der Ordnung ∞

ii)$\Rightarrow$ i):
Sei $A := \{z \in D : f^{(k)}(z) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
Dann gilt nach Voraussetzung $A \neq \emptyset$
$\to$ A ist offen. Denn ist $z_0 \in A$, dann kann f um z_0 in eine Potenzreihe entwickelt werden.
$\Rightarrow f \equiv 0$ in $B_r(z_0)$ für r klein genug, da alle Koeffizienten der Potenzreihe verschwinden.
$\to$ $D \backslash A$ ist auch offen. Denn ist $z_0 \in D \backslash A$, dann existiert $n \in \mathbb{N}$, so dass $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ auf $B_r(z_0)$ für r klein genug.
$\Rightarrow B_r(z_0) \subseteq D \backslash A$
Jetzt folgt $D = A \cup D \backslash A$, beide offen und disjunkt. Daher folgt weil D zusammenhängend ist
$\Rightarrow A = D$

8.13. Bemerkung

Wollen wir also nachweisen, dass zwei holomorphe Funktionen übereinstimmen, reicht es das auf einer Menge M zu tun, die nicht diskret im Definitionsbereich liegt, d.h. zeige $f = g$ auf M
$\Rightarrow f - g = 0$ auf M
$\Rightarrow f \equiv g$ auf D, wo $f, g : D \to \mathbb{C}, D$ ein Gebiet falls M nicht diskret in M ist.
Beispiele sind Kurvenstücke oder gewisse konvergente Folgen (wie im Beweis) etc.

8.14. Beispiel

i) Sei cos: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben
Dann gilt $\cos(t + 2\pi) = \cos(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$ ist nicht diskret in $\mathbb{C}$
$\Rightarrow$ Die Funktion $z \mapsto \cos(z + 2\pi) - \cos(z)$ muss auf ganz $\mathbb{C}$ verschwinden.
$\Rightarrow \cos(z + 2\pi) = \cos(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

ii) Die Funktionalgleichung für exp, die Additionstheoreme für sin,cos etc. folgen dann für komplexe Argumente aus den entsprechenden Aussagen für reelle Argumente.

Bem.:
Die Aussage iii)$\Rightarrow$ii) des Satzes 8.12 heißt **Identitätssatz**

9. Die Cauchyschen Ungleichungen

9.1. Satz (Cauchy-Ungleichungen)

Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$ dann gilt für jedes $\delta < r$ und $z \in B_{r-\delta}(z_0)$ die Abschätzung

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{r}{\delta} \cdot \frac{n!}{\delta^n} \max_{\zeta \in B_r(z_0)} |f(\zeta)|$$

Beweis:
Nach der Cauchy-Integralformel gilt für alle $z \in B_r(z_0)$

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi i} \int_{K(z_0,r)} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^{n+1}} d\zeta$$

ist nun $z \in B_{r-\delta}(z_0)$ so gilt:

$$\min_{\zeta \in \partial B_r(z_0)} |\zeta - z| = \delta$$
$$\Rightarrow |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \max_{\zeta \in B_r(z_0)} |f(\zeta)| \cdot \frac{1}{\delta^{n+1}}$$

9.2. Bemerkung

i) Für $\delta = r$

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{\zeta \in \partial B_r(z_0)} |f(\zeta)|$$

$$\Rightarrow \text{Ist } f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

$$\Rightarrow |a_k| \leq \frac{1}{r^k} \max_{\zeta \in \partial B_r(z_0)} |f(\zeta)|$$

ii) Ist $\delta = \frac{r}{2}$ und $z \in B_{\frac{r}{2}}(z_0)$, so gilt:

$$|f^{(n)}(z)| \leq C \cdot \frac{2^n n!}{r^n} \cdot \max_{\zeta \in \partial B_r(z_0)} |f(\zeta)|$$

C unabhängig von f, r, n

iii) Eine erste Anwendung haben wir schon gesehen, vgl. den Beweis des Weierstraßschen Konvergenzsatzes.

9.3. Lemma

Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$. Ist $|f(z_0)| < \min\limits_{\zeta \in \partial B_r(z_0)} |f(\zeta)|$, dann hat f in $B_r(z_0)$ eine Nullstelle.

Beweis:
Angenommen f hat in $B_r(z_0)$ keine Nullstelle, dann ist für alle $\zeta \in \partial B_r(z_0)$

$$|f(\zeta)| \geq \min_{\zeta \in \partial B_r(z_0)} |f(\zeta)| \geq |f(z_0)| > 0$$

also hat f auf $\partial B_r(z_0)$ auch keine Nullstelle, und daher folgt aus Stetigkeitsgründen, dass f auf einer offenen Umgebung $D \supseteq U \supseteq \overline{B_r(z_0)}$ auch keine Nullstelle hat.
Dann ist $g : U \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{f(z)}$ holomorph auf einer Umgebung von $\overline{B_r(z_0)}$.
Die erste Cauchysche Ungleichung (für $n = 0$) ergibt

$$\frac{1}{|f(z_0)|} = |g(z_0)| \leq \max_{\zeta \in \partial B_r(z_0)} |g(\zeta)| = \frac{1}{\min\limits_{\zeta \in \partial B_r(z_0)} f(\zeta)}$$

$$\Rightarrow \min_{\zeta \in \partial B_r(z_0)} |f(\zeta)| \leq |f(z_0)|$$

$$\Rightarrow \lightning$$

9.4. Satz (Satz von der Gebietstreue)

Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, so ist $f(D)$ auch ein Gebiet.

Beweis:

i) $f(D)$ zusammenhängend:
Ist $w_0, w_1 \in F(D)$, wähle $z_0, z_1 \in D$ mit $f(z_k) = w_k, \quad k = 0, 1$.
Weil D zusammenhängend ist, ex. ein stetiger Weg $\alpha : [0,1] \to f(D)$ mit $\alpha(k) = z_k \quad k = 0, 1$
Dann ist $f \circ \alpha : [0,1] \to f(D)$ ein stetiger Weg mit $f \circ \alpha(k) = f(z_k) = w_k, \quad k = 0, 1$

ii) $f(D)$ offen
Sei $w_0 \in f(D)$, wähle $z_0 \in D$ mit $f(z_0) = w_0$.
Da f nicht konstant ist, existiert ein $r > 0$, so dass in $\overline{B_r(z_0)}$ kein weiterer Punkt z existiert mit $f(z) = w_0$ (sonst gäbe es eine Folge $z_n \to z_0, z_n \neq z_0$ mit $f(z_n) = w_0 \quad \forall n$ und der Identitätssatz implizierte dann $f \equiv w_0$).
Dann ist

$$\min_{\zeta \in \partial B_r(z_0)} |f(\zeta) - w_0| \geq \varepsilon > 0$$

ist nun $w \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(w_0)$ so gilt für $z \in \partial B_r(z_0)$

$$|f(z) - w| \geq |f(z) - w_0| - |w_0 - w| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

aber für $z = z_0$ ist

$$|f(z_0) - w| = |w_0 - w| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Wegen Lemma 9.3 angewandt auf die Funktion $f - w$ hat $f - w$ eine Nullstelle auf $B_r(z_0)$, d.h. w liegt im Bild von f.
$\Rightarrow B_{\frac{\varepsilon}{2}}(w_0) \subseteq f(D)$
$\Rightarrow f(D)$ ist offen

9.5. Korollar

Ist $f : D \to D'$ holomorph und bijektiv (D, D' sind Gebiete). Dann ist $f^{-1} : D' \to D$ stetig.

9.6. Satz (Maximumsprinzip)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph.

i) Hat $|f|$ in D ein Maximum, so ist f konstant

ii) Ist D beschränkt, und hat f eine stetige Fortsetzung $\tilde{f} : \overline{D} \to \mathbb{C}$ so ist

$$\sup_{z \in D} |f(z)| \leq \max_{z \in \partial D} |\tilde{f}(z)|$$

Beweis:
Sei z_0 ein lokales Maximum von $|f|$ in D, d.h. es existiert ein $r > 0$, so dass $B_r(z_0) \subseteq D$ und $|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in B_r(z_0)$.
Dann ist:

$$f(B_r(z_0)) \subseteq \{w : |w| \leq |f(z_0)|\}$$

also $f(B_r(z_0))$ keine Umgebung von z_0.
Aus dem Satz der Gebietstreue folgt, dass f in $B_r(z_0)$ konstant sein muss. Wegen des Identitätssatzes folgt, dass f auf ganz D konstant ist.
$\Rightarrow$ i)
ii):
Nimmt $\tilde{f}$ sein Betragsmaximum im Inneren an, so folgt aus i), dass $\tilde{f}$ konstant ist, und damit gilt die behauptete Ungleichung trivialerweise.

9.7. Korollar

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph.

i) Hat $|f|$ in z_0 ein lokales Minimum, so ist $f(z_0) = 0$ oder f ist konstant.

ii) Ist D beschränkt, und $\tilde{f} : \overline{D} \to \mathbb{C}$ eine stetige Fortsetzung von f, so hat f entweder Nullstellen in D, oder

$$\inf_{z \in D} |f(z)| \geq \min_{z \in \partial D} |\tilde{f}(z)|$$

Beweis:
Wende Satz 9.6 auf die Funktion $z \mapsto \frac{1}{f(z)}$ an.

10. Mittelwertbedingung und Maximumsprinzip

$$\begin{array}{rcl} \text{Kap. 9: Satz von Gebietstreue} & \Rightarrow & \text{Maximumprinzip} \\ \text{tatsächlich} & \Leftrightarrow & \end{array}$$

Frage: Gilt das Maximumprinzip auch für andere als nur holomorphe Funktionen?

10.1. Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Wir sagen, dass f die **Mittelwerteigenschaft** hat, wenn zu jedem $z_0 \in D$ ein $R > 0$ existiert, so dass für alle $0 < r < R$ gilt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

Wir bezeichnen:
$$\mu(f, z_0, r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt$$

10.2. Bemerkung

Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt wegen des Cauchy-Integralsatzes, dass:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{K(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} \cdot ire^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt \qquad \forall r, \text{ so dass } \overline{B_r(z_0)} \subseteq D \end{aligned}$$

10.3. Beispiel

i) Die Funktion $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ hat die Mittelwerteigenschaft

ii) Haben $f, g : D \to \mathbb{C}$ die Mittelwerteigenschaft, so auch $f + g$, λf für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\overline{f}$. Damit haben auch $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ die Mittelwerteigenschaft

10.4. Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und f habe die Mittelwerteigenschaft. Hat $|f|$ in $z_0 \in D$ ein lokales Maximum, so ist f in einer Umgebung von z_0 konstant.

Beweis:
o.E. $f(z_0) \neq 0$ und $f(z_0) > 0$ ($\in \mathbb{R}$) sonst gehe zu $z \mapsto \frac{f(z)}{f(z_0)}$ über.
Wähle $R > 0$, so dass

$$\begin{aligned} &|f(z_0)| = f(z_0) > |f(z)| \qquad \forall z \in B_R(z_0) \\ &f(z_0) = \mu(f, z_0, r) \qquad \forall 0 < r < R \end{aligned}$$

Setze $g(z) = \mathrm{Re}(f(z)) - f(z)$
Dann hat g die Mittelwerteigenschaft. Außerdem gilt:

$$0 = g(z) = \mu(g, z_0, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{it})dt$$

Weiter ist $g(z) \leq |f(z)| - f(z_0) \leq 0$
Daher ist $g = 0$ auf $\partial B_r(z_0) \qquad \forall 0 < r < R$
$\Rightarrow g \equiv 0$ auf $B_R(z_0)$
$\Rightarrow \mathrm{Re}(f(z)) = f(z_0)$. Daher $|f(z)| \leq f(z_0) = |\mathrm{Re}(f(z))| = f(z_0)$
$\Rightarrow$ Behauptung

10.5. Korollar

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und f habe die Mittelwerteigenschaft

i) Hat $|f|$ in $z_0 \in D$ ein globales Maximum, so ist f konstant.

ii) Ist D beschränkt und $\tilde{f} : \overline{D} \to \mathbb{C}$ eine stetige Fortsetzung von f, so gilt:

$$\sup_{z \in D} |f(z)| \leq \max_{z \in \partial D} |\tilde{f}(z)|$$

Beweis:
Die Menge $M := \{z \in D : f(z) = f(z_0)\}$ ist offen (Satz 10.4) $\overset{\text{D Gebiet}}{\Longrightarrow}$ M=D

11. Ganze Funktionen

11.1. Definition

Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **ganze (holomorphe) Funktion**

11.2. Bemerkung

i) Eine ganze Funktion ist um jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ in eine Potenzreihe entwickelbar, die auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert

ii) Beispiele sind Polynome (mit endlicher Potenzreihe) sowie exp, sin, cos, ...
Ganze Funktionen die nicht Polynome sind, heißen **transzendente** Funktionen.

11.3. Bemerkung

Ist $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein Polynom vom Grad n, das heißt $a_n \neq 0$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $R(\varepsilon) > 0$ so dass:

$$(1 - \varepsilon)|a_n||z|^n \leq |P(z)| \leq (1 + \varepsilon)|a_n||z|^n$$

Beweis:
Sei $\tilde{P}(z) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k z^k$
Dann gilt für $|z| \geq 1$

$$|\tilde{P}(z)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k \leq |z|^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| = \frac{1}{|z|} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right) |z|^n$$

Für $R(\varepsilon) = \max\left\{1, \frac{1}{\varepsilon|a_n|}\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}|a_k|\right)\right\}$ gilt dann mit $|z| \geq R(\varepsilon)$

$$|\tilde{P}(z)| \leq \frac{1}{R(\varepsilon)}\left(\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\right)|z|^n \leq \varepsilon|a_n||z|^n$$

$\Rightarrow |P(z)| = |a_n z^n + \tilde{P}(z)| \leq |a_n||z|^n + \varepsilon|a_n||z|^n = (1+\varepsilon)|a_n||z|^n$
bzw. $|P(z)| \geq |a_n||z|^n - \varepsilon|a_n||z|^n = (1-\varepsilon)|a_n||z|^n$

11.4. Korollar

Ist $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$, so liegen alle Nullstellen von P in $B_{R(\varepsilon)}(0)$ für $0 < \varepsilon < 1$. Im Limes $\varepsilon \to 1$ folgt, dass alle Nullstellen von P in $\overline{B_R(0)}$ liegen mit $R = \max\left\{1, \frac{1}{|a_n|}\sum\limits_{k=0}^{n-1}|a_k|\right\}$

11.5. Satz

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein ganze Funktion. Existieren ein $n \in \mathbb{N}$, $\quad R > 0, \quad M > 0$ so dass

$$|f(z)| \leq M \cdot |z|^n \qquad \forall |z| > R$$

Dann ist f ein Polynom vom Grad $\leq n$

Beweis:
Wir entwickeln f in eine Potenzreihe um den Nullpunkt $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$
Die Cauchyschen Ungleichungen liefern:

$$|a_k| \leq C \cdot r^{-k} \cdot \max_{\partial B_r(0)} |f(z)| \leq CMr^{n-k}$$

für $r \to \infty$ folgt, dass $a_k = 0$ für $k \geq n+1$

11.6. Korollar (Satz von Liouville)

Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze beschränkte Funktion, so ist f konstant.

11.7. Satz (Fundamentalsatz der Algebra)

Sei $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein Polynom mit $a_n \neq 0, n \geq 1$, dann besitzt P eine Nullstelle.

i) Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$ in Bemerkung 11.3, so dass $P(z) \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n$ für $|z| \geq R = R(\frac{1}{2})$

Dann existiert ein $\overline{R}$ so dass

$$\min_{z \in B_{\max\{R,\overline{R}\}}(0)} |P(z)| \leq \frac{1}{2}|a_n| \cdot \overline{R}^n \leq |P(z)| \quad \text{für } |z| \geq \max\{R, \overline{R}\} = \tilde{R}$$

mit Korollar 9.7 (Minimumsprinzip) folgt, dass P in $B_{\tilde{R}}(0)$ eine Nullstelle besitzt.

ii) Angenommen P hat keine Nullstelle. Dann ist $z \mapsto \frac{1}{P}$ eine ganze Funktion mit $\left|\frac{1}{P(z)}\right| \leq \frac{1}{2}|a_n|R^{-n}$ für $|z| \geq R$ und $R = R\left(\frac{1}{2}\right)$ aus Bem. 11.3.
In $\overline{B_R(0)}$ ist $\left|\frac{1}{P(z)}\right|$ beschränkt, da $\overline{B_R(0)}$ kompakt ist, $\frac{1}{P(z)}$ ist also eine beschränkte Funktion, und wegen dem Satz von Liouville konstant. Dann war aber schon P konstant.

11.8. Satz

Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$ für $n \geq 1$. Dann besitzt P die Nullstellen $z_1, ..., z_l$ mit Vielfachheiten $n_1, ..., n_l$, und es gilt

$$P(z) = a_n \cdot \prod_{p=1}^{l} (z - z_p)^{n_p}$$

Beweis:
vgl. LA oder Algebra, Polynomdivision durch Linearfaktoren.

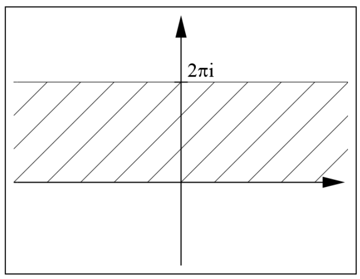
11.9. Korollar

Ist $P(z)$ ein Polynom vom Grad n. Dann nimmt P jeden Wert $w \in \mathbb{C}$ genau n-mal an (mit Vielfachheit gezählt)

Für transzendente Funktionen ist das Abbildungsverhalten viel unübersichtlicher, z.B. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat keine Nullstelle, bildet aber jeden Streifen

$$\mathbb{R} \times [2\pi k, 2\pi(k+1))$$

bijektiv auf $\mathbb{C}^*$ ab



11.10. Satz

Sei f eine transzendente Funktion. Dann gibt es zu jedem $w_0 \in \mathbb{C}$ eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ mit $\lim_{n \to \infty} z_n = \infty$ und $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = w_0$.
Anders formuliert: Für jedes $R > 0$ liegt $f(\mathbb{C} \backslash D_R(0))$ dicht in $\mathbb{C}$.

Beweis:
Angenommen das gilt nicht. Dann existiert $R \geq 0, \varepsilon > 0$ und $w_0 \in \mathbb{C}$, so dass für alle $|z| \geq R$ gilt:

$$|f(z) - w_0| \geq \varepsilon$$

o.E. $R \geq 1$. Da f nicht konstant ist, hat f in $\overline{D_R(0)}$ nur endlich viele w_0 Stellen $z_1, ..., z_r$ mit Vielfachheiten $n_1, ..., n_r$.
Setze

$$g(z) = \frac{f(z) - w_0}{\prod\limits_{i=1}^{r} (z - z_i)^{n_i}}$$

Da g keine Nullstelle hat, ist $\frac{1}{g}$ eine ganze Funktion ohne Nullstellen.
Da

$$\left| \prod_{i=1}^{r} (z - z_i)^{n_i} \right| = \left| \sum_{i=0}^{N} a_i z^i \right| \leq \left(\sum_{i=0}^{N} |a_i| \right) |z^n|$$

für $|z| \geq R \geq 1$, mit $N = \sum\limits_{i=0}^{N} n_i$, und $f(z) - w_0 \geq \varepsilon$ für $|z| \geq R$ ist

$$\left| \frac{1}{g}(z) \right| \leq C|z|^N, \quad \text{für } |z| \geq R$$

Satz 11.5 liefert, dass $\frac{1}{g}$ ein Polynom vom Grad $\leq N$ ist. Da $\frac{1}{g}$ keine Nullstellen hat, ist $\frac{1}{g}$, und damit auch g konstant, etwa $g = c$. Dann ist aber $f(z) = c \cdot \prod\limits_{i=1}^{r} (z - z_i)^{n_i} + w_0$ ein Polynom, also nicht transzendent. $\lightning$

11.11. Korollar

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Existieren $n \in \mathbb{N}, M, R > 0$, so dass

$$|f(z)| \geq M|z|^n \qquad \text{für } |z| \geq R \qquad\qquad (*)$$

Dann ist f ein Polynom vom Grad $\geq n$.

Beweis:
Mit Satz 11.10 folgt direkt, dass f nicht transzendent, also ein Polynom ist. Mit Bemerkung 11.3 folgt, dass falls f Grad m hat, folgendes gilt:

$$|f(z)| \leq C|z|^m$$

für eine Konstante C und $|z| \geq R_m$. Das ist nur mit $(*)$ konsistent falls $m \geq n$ ist.

11.12. Bemerkung

Wir werden später (vielleicht) noch sehen, dass für jede transzendente Funnktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Menge $f(\mathbb{C} \backslash D_R(0)) \supset \mathbb{C} \backslash \{w_0\}$ für ein $w_0 \in \mathbb{C}$ und für alle $R \geq 0$.
Es werden alle Werte angenommen bis auf höchstens ein Ausnahme.

12. Harmonische Funktionen

12.1. Definition

Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann ist

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Der Operator Δ heißt **Laplace-Operator**. Erfüllt eine zweimal stetig differenzierbare Funktion f die Gleichung $\Delta f = 0$, so heißt f **harmonisch**.

12.2. Bemerkung

i) Der Operator Δ taucht an vielen Stellen in der Physik auf. Etwa Wellengleichung, stationäre Wärmeverteilung, Elektrostatik.
$\Delta f = \rho$ liefert das Gravitationspotential f zu einer Dichte ρ (modulo Konstanten)

ii) Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt

$$\Delta f = 4 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 0 \qquad \text{(vgl. Blatt 2, Aufgabe 4)}$$

Wegen der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen sind auch Real- und Imaginärteil von holomorphen Funktionen harmonisch.

12.3. Satz

Jede reelle harmonische Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ auf einem sternförmigen Gebiet D ist Realteil einer holomorphen Funktion.

Beweis:
Idee: Löse die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen, Ansatz $f = u + iv$ mit $u : D \to \mathbb{R}$ die gegebene harmonische Funktion. Es muss gelten:

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

Anders gesagt: Löse $dv = \alpha = -u_y \, dx + u_x \, dy$.
Wir suchen also eine Stammfunktion von α. Also: Auf einem sternförmigen Gebiet

existiert eine Stammfunktion v, wenn α geschlossen ist, also wenn gilt

$$\begin{aligned} \text{Berechne: } \partial_1\alpha_2 - \partial_2\alpha_1 &= (u_x)_x - (-u_y)_y = \Delta u = 0 \\ \text{und } \partial_2\alpha_1 - \partial_1\alpha_2 &= ... = -\Delta u = 0 \end{aligned}$$

Damit folgt die Existenz einer Stammfunktion v (vgl. Poincaré-Lemma, Analysis)
Zuletzt müssen wir nur noch $v(z_0)$, für $z_0 \in D$ festlegen.

12.4. Korollar

Ist $f : D \to \mathbb{C}$ harmonisch, so ist f beliebig oft differenzierbar. Real- und Imaginärteil lassen sich entlang jeder Geraden in eine reelle Potenzreihe entwickeln, d.h. sind reell analytisch (d.h. die Funktion $t \mapsto \mathrm{Re}(f(z_0 + ta))$ lässt sich in Potenzreihe um $t_0 = 0$ entwickeln).

Beweis:
Durch Übergang zu Real- und Imaginärteil können wir ohne Einschränkung annehmen, dass f reell ist. Sei $z_0 \in D$ und $B_r(z_0) \subseteq D$. Dann ist $f|_{B_r(z_0)}$ Realteil einer holomorphen Funktion $F : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$. Damit folgt die erste Behauptung.
Betrachte nun die Gerade $t \mapsto z_0 + wt, \quad t \in \mathbb{R}, \quad w \in \mathbb{C}, \quad |w| = 1$. Da die Funktion $G : z \mapsto F(z_0 + wz)$ holomorph ist, ist G in $B_r(z_0)$ (o.E. $z_0 = 0$) in eine Potenzreihe entwickelbar.

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \qquad \text{für } z = t \in \mathbb{R}, \text{ also } G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

Insgesamt: $f(z_0 + wt) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{Re}(a_k) t^k$

12.5. Korollar

Harmonische Funktionen haben die Mittelwerteigenschaft, d.h. wenn $f : D \to \mathbb{C}$ harmonisch ist, ist

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \qquad \text{für alle } z_0 \in D \text{ und } \overline{B_r(z_0)} \subseteq D$$

12.6. Korollar (Maximum- und Minimumprinzip)

Für D beschränkt und $f : D \to \mathbb{R}$ harmonisch gilt:

i) Hat f in D ein lokales Extremum, so ist f konstant.

ii) Hat f eine stetige Fortsetzung $\tilde{f} : \overline{D} \to \mathbb{C}$, so nimmt f Minimum und Maximum auf ∂D an.

$$\exists z_{\min}, z_{\max} \in \partial D \quad \forall z \in \overline{D} : f(z_{\min}) \leq \tilde{f}(z) \leq \tilde{f}(z_{\max})$$

12.7. Satz

Für $\zeta \neq z$ definiere

$$P_r(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{r^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$$

P_r heißt **Poisson-Kern**

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ holomorph und $\overline{B_r(0)} \subseteq D$ dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{i} \int_{K(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta} P_r(\zeta, z) d\zeta = \int_0^{2\pi} f(r \cdot e^{i\theta}) \cdot P_r(r \cdot e^{i\theta}, z) d\theta$$

Beweis:

Ist $w \in B_r(0)$ so ist $z \mapsto \frac{f(z)}{r^2 - \overline{w}z}$ holomorph auf $B_{\tilde{r}}(0) \supseteq \overline{B_r(0)}$ mit $\tilde{r} = 2r - |w| > r$. Nac der Cauchy-Integralformel ist folglich

$$\frac{f(z)}{r^2 - \overline{w}z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{K(0,r)} \frac{f(\zeta)}{r^2 - \overline{w}z} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \quad \forall z \in B_r(0)$$

Setze jetzt $w = z$, dann ist $r^2 - \overline{z}\zeta = \zeta(\overline{\zeta} - \overline{z})$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{r^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} d\zeta$$

12.8. Satz

i) Ist $f : B_r(0) \to \mathbb{C}$ stetig und harmonisch in $B_r(0)$ so gilt:

$$f(z) = \int_0^{2\pi} f(r \cdot e^{i\theta}) \cdot P_r(r \cdot e^{i\theta}, z) d\theta \qquad \forall z \in B_r(0)$$

ii) Ist $g : \partial B_r(0) \to \mathbb{C}$ stetig, so ist die Funktion

$$f(z) = \int_0^{2\pi} g(r \cdot e^{i\theta}) \cdot P_r(r \cdot e^{i\theta}, z) d\theta$$

harmonisch in $B_r(0)$

Beweis:

ii) Ist ζ fest, so ist $\Delta_z P_r(\zeta, z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) P_r(\zeta, x + iy)$. Die Aussage folgt dann durch Differentation unter dem Integralzeichen

i) o.E. f reell, sonst betrachte Real- und Imaginärteil seperat. Dann existiert eine holomorphe Funktion $F : B_r(0) \to \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(F) = f$. Für alle $\rho < r$ und alle

$z \in B_\rho(0)$ gilt wegen Satz 12.7 die Darstellung

$$F(z) = \int_0^{2\pi} F(\rho \cdot e^{i\theta}) \cdot P_\rho(\rho \cdot e^{i\theta}, z) d\theta$$

Da P_ρ reell ist folgt

$$\begin{aligned} f(z) = \mathrm{Re}(F) &= \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(F(\rho \cdot e^{i\theta})) \cdot P_\rho(\rho \cdot e^{i\theta}, z) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} f(\rho \cdot e^{i\theta}) \cdot P_\rho(\rho \cdot e^{i\theta}, z) d\theta \end{aligned}$$

Für festes $z \in B_r(0)$ und $\rho \to r$ konvergiert der Integrand gleichmäßig in θ gegen $f(re^{i\theta}) \cdot P_r(re^{i\theta}, z)$ das heißt

$$f(z) = \lim_{\rho \to r} \int ... = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \cdot P_r(re^{i\theta}, z) d\theta$$

12.9. Satz

Sei $g : \partial B_r(0) \to \mathbb{C}$ stetig.
Setze dann $f(z) = \begin{cases} \int\limits_0^{2\pi} g(r \cdot e^{i\theta}) \cdot P_r(r \cdot e^{i\theta}, z) d\theta & \text{für } z \in B_r(0) \\ g(z) & \text{für } z \in \partial B_r(0) \end{cases}$
Dann ist $f : \overline{B_r(0)} \to \mathbb{C}$ stetig un harmonisch in $B_r(0)$

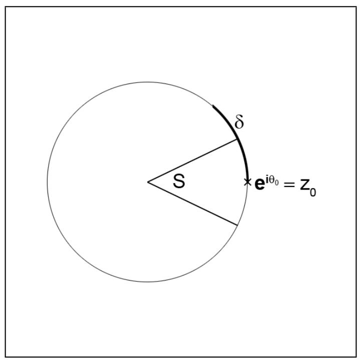
Beweis:
Zu zeigen ist nur die Stetigkeit am Rand, d.h. für $z_0 \in \partial B_r(0)$, o.E. $r = 1$. Sei also $z_0 = e^{i\theta_0}$, $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, o.E. $\theta_0 = 0$.
Wir müssen zeigen, dass zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{falls } |z - z_0| < \delta$$

Da $f(z) = g(z)$ für $z \in \partial B_1(0)$ und g stetig ist, existiert für $z \in \partial B_1(0)$ solch ein g.

Wähle $\delta_0 > 0$ so klein, dass $(\theta_0 - \delta_0, \theta_0 + \delta_0) \subseteq [0, 2\pi)$, und so dass

$$\begin{aligned} |g(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta_0})| < \varepsilon \quad &\forall |\theta - \theta_0| < \delta_0 \\ S := \{re^{i\theta} \in B_1(0) : |\theta - \theta_0| < &\frac{\delta}{2}\} \end{aligned}$$



Ist jetzt $z \in S$ und θ mit $|\theta - \theta_0| > \delta_0$ so gilt $|e^{i\theta} - z| \geq c$ für ein $c \geq 0$.

Damit gilt

$$\begin{aligned}
f(z) - f(z_0) &= \int_0^{2\pi} (g(e^{i\theta}) - g(z_0)) P_1(e^{i\theta}, z) d\theta \\
&= \underbrace{\int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta} (...) d\theta}_{=:I_1} + \underbrace{\int_{|\theta-\theta_0|\geq\delta} (...) d\theta}_{=:I_2}
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \int_0^{2\pi} (g(e^{i\theta}) - g(z_0)) P_1(e^{i\theta}, z) d\theta \\
&\leq \varepsilon \cdot \int_0^{2\pi} P_1(e^{i\theta}, z) d\theta \leq \varepsilon \\
|I_2| &\leq \int_{|\theta-\theta_0|\geq\delta} (|g(e^{i\theta})| + |g(e^{i\theta_0})|) \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2} d\theta, \quad \zeta = e^{i\theta} \\
&\leq 2\pi \cdot 2 \max_{\partial B_r(0)} |g| \cdot \frac{1-|z|^2}{c^2}
\end{aligned}$$

Insgesamt:

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon + \tilde{c} \cdot (1 - |z|^2), \quad \forall z \in S$$

Ist nun $\tilde{\varepsilon} > 0$ gegeben, wähle $\delta > 0$, so dass für alle z mit $|z - z_0| < \delta$ gilt, dass

i) $z \in S$

ii) $|1 - |z|^2| \leq \frac{\varepsilon}{\tilde{c}}$

$\Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < 2\varepsilon$
$\Rightarrow$ Stetigkeit

12.10. Korollar

Zu jeder stetigen Funktion $g : \partial B_r(0) \to \mathbb{C}$ gibt es genau eine Funktion $f : \overline{B_r(0)} \to \mathbb{C}$, so dass $f|_{\partial B_r(0)} = g$ und $\Delta f = 0$ in $B_r(0)$

12.11. Korollar

Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig, genügt f der Mittelwertbedingung so ist f harmonisch und insbesondere reell analytisch.

Beweis:
Ist $z_0 \in D$ und $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$. Dann existiert auf $B_r(z_0)$ eine harmonische Funktion $g : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$, g ist stetig auf $\overline{B_r(z_0)}$ mit $g|_{\partial B_r(z_0)} = f|_{\partial B_r(z_0)}$.
Dann erfüllt $g - f$ die Mittelwertbedingung auf $B_r(0)$.

Außerdem $|g - f| = 0$ auf $\partial B_r(z_0)$.
Wegen des Maximumprinzips folgt $g - f = 0$ auf $B_r(0)$
$\Rightarrow g = f$ in $B_r(0)$
$\Rightarrow$ Behauptung

Inhaltsverzeichnis

Stichwortverzeichnis