Übungen zur Funktionentheorie — Blatt 1

Aufgabe 1 Zeigen Sie Proposition 1.6 aus der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbf{C}$ gilt:

a) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ und $\overline{(\bar{z})} = z$.

b) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ und $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$.

c) $z\bar{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$, $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ und $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Aufgabe 2 Seien $(z_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{C}$ und $(w_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{C}$ konvergente Folgen. Zeigen Sie:

a) $\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n$.

b) $\lim_{n\to\infty}(z_n w_n) = \big(\lim_{n\to\infty} z_n\big)\big(\lim_{n\to\infty} w_n\big)$.

c) $\lim_{n\to\infty} \bar{z}_n = \overline{\lim_{n\to\infty} z_n}$

d) Sei $z_n \neq 0 \forall n$ und $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$, so ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} z_n}$.

Aufgabe 3 a) Führen Sie in $\mathbf{C}$ Polarkoordinaten ein, d.h. zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\rho : \mathbf{R}^+ \times (-\pi, \pi] \to \mathbf{C}^* : (r, \theta) \mapsto r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

bijektiv ist, und geben Sie die Umkehrabbildung an.

b) Stellen Sie die komplexe Multiplikation in Polarkoordinaten dar und erklären Sie diese geometrisch. *Hinweis:* Additionstheoreme.

Aufgabe 4 Sei $w \in \mathbf{C}$ fest. Die Abbildung

$$\phi_w : \mathbf{C} \to \mathbf{C} : z \mapsto wz$$

ist insbesodnere $\mathbf{R}$-linear, dh. für alle $z, z' \in \mathbf{C}$ und $a \in \mathbf{R}$ gilt $\phi_w(z+z') = \phi_w(z) + \phi_w(z')$ sowie $\phi_w(az) = a\phi_w(z)$. Da $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$ als Vektorraum, läßt sich ϕ_w bezüglich der Standardbasis von $\mathbf{R}^2$ als 2×2-Matrix darstellen.

a) Berechnen Sie diese Matrix, und folgern Sie, dass eine beliebige $\mathbf{R}$-lineare Abbildung $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ genau dann als ϕ_w dargestellt werden kann, wenn Sie bzgl. der Standardbasis durch eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ dargesetellt werden kann.

b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbf{R}) \right\}$$

bezüglich der Matrizenaddition und -multiplikation ein Körper ist.

c) Zeigen Sie, dass M als Körper isomorph zu $\mathbf{C}$ ist.

Abgabe: Donnerstag, den 30.04.2009 vor der Vorlesung