Übungen zur Funktionentheorie — Blatt 2

Aufgabe 1 a) Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ eine Potenzreihe. Zeigen Sie: Konvergiert $P(z)$ absolut, so konvergiert $P(z)$.

b) Der Konvergenzradius von $P(z)$ sei r_1, und $Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k$ sei eine weitere Potenzreihe mit Konvergenzradius r_2. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$(P+Q)(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)(z-z_0)^k$$

konvergenzradius $r_3 \geq \min\{r_1, r_2\}$ hat und dass der Grenzwert auf $B_{\min\{r_1,r_2\}}(z_0)$ gegeben ist durch $(P+Q)(z) = P(z) + Q(z)$.

Aufgabe 2 a) Zeigen Sie, dass die Potenzreihen

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k, \quad \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}, \quad \cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

auf ganz $\mathbf{C}$ konvergieren.

b) Benutzen Sie Aufgabe 1 ii) um zu zeigen, dass für alle $z \in \mathbf{C}$ gilt $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$ bzw. $\cos(z) = \frac{1}{2}\big(\exp(iz) + \exp(-iz)\big)$ und $\sin(z) = \frac{1}{2i}\big(\exp(iz) - \exp(-iz)\big)$.

c) Zeigen Sie das Additionstheorem, d.h. dass für alle $z, w \in \mathbf{C}$ gilt $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$. Damit läßt sich die komplexe Exponentialfunktion durch die reellen Funktionen $\exp, \sin, \cos$ wie folgt darstellen: $\exp(x+iy) = \exp(x)\big(\cos(y) + i\sin(y)\big)$.

d) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $\exp(z) = 1$, $\sin(z) = 0$ bzw. $\cos(z) = 0$.

Aufgabe 3 Sei $f : D \to \mathbf{C}$ holomorph, D ein Gebiet.

a) Sei $\mathrm{Re}(f(z))$ konstant. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

b) Sei $\mathrm{Im}(f(z))$ konstant. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

c) Sei $|f|$ konstant. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

d) Zeigen Sie, dass $Im(f)$ bis auf eine Konstante durch $\mathrm{Re}(f)$ festgelegt ist.

e) Geben Sie damit drei Beispiele nicht holomorpher Funktionen an.

Aufgabe 4 Sei $f : D \to \mathbf{C}$ holomorph mit $f(z) = u(z)+iv(z)$ mit $u(z), v(z) \in \mathbf{R}$. Nehmen Sie an, dass f zweimal stetig differenzierbar ist und zeigen Sie, dass u und v harmonische Funktionen auf D sind, dh. dass gilt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Abgabe: Donnerstag, den 07.05.2009 vor der Vorlesung