Übungen zur Funktionentheorie — Blatt 3

Aufgabe 1 Berechnen Sie folgende Wegintegrale:

$$\int_{K(z_0,r)} (z-z_0)^n dz \text{ mit } n \in \mathbf{Z}, \quad \int_{[-i,i]} z \cos z dz, \quad \int_{[1,i]} |z|^2 dz, \quad \int_\gamma |z|^2 dz.$$

Dabei ist γ der Viertelkreis vom Radius 1 um 0, der 1 und i verbindet.

Aufgabe 2 Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ ein Weg und $f_n : |\gamma| \to \mathbf{C}$ eine Familie von stetigen Funktionen, $n \in \mathbf{N}$, die auf $|\gamma|$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f konvergieren. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z) dz = \int_\gamma f(z) dz.$$

Aufgabe 3 Beweisen Sie Satz 4.10 und 4.11 aus der Vorlesung.

a) Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ ein Integrationsweg und $\phi : [c,d] \to [a,b]$ stückweise stetig differenzierbar und surjektiv mit $\phi'(t) > 0$ für alle t. Dann ist $\gamma \circ \phi : [c,d] \to \mathbf{C}$ auch ein Integrationsweg und für alle stetigen Funktionen $f : |\gamma| \to \mathbf{C}$ gilt

$$\int_{\gamma\circ\phi} f(z) dz = \int_\gamma f(z) dz.$$

b) Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ ein Integrationsweg und γ^{-1} der entgegengesetzte Weg. Dann gilt für alle stetigen Funktionen $f : |\gamma| \to \mathbf{C}$, dass

$$\int_{\gamma^{-1}} f(z) dz = -\int_\gamma f(z) dz.$$

Aufgabe 4 Seien $D \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet, und $\alpha, \beta : [0,1] \to D$ stetig differenzierbare Kurven mit $\alpha'(t) \neq 0$ und $\beta'(t) \neq 0$ für alle $t \in [0,1]$.

a) Zeigen Sie, dass für festes $t \in (0,1)$ die Gerade $T_{\alpha,t} : s \mapsto \alpha(t) + s\alpha'(t)$ die Tangente und die Gerade $N_{\alpha,t} : s \mapsto \alpha(t) + is\alpha'(t)$ die Normale an α im Punkt $\alpha(t)$ ist.

b) Für ein $t \in (0,1)$ gelte, dass $z = \alpha(t) = \beta(t)$. Der Schnittwinkel θ von α mit β in z ist der Schnittwinkel der Geraden $T_{\alpha,t}$ mit $T_{\beta,t}$. Es gilt

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha'(t), \beta'(t) \rangle}{|\alpha'(t)||\beta'(t)|}$$

wobei $\langle z, w \rangle = \mathrm{Re}(z\bar{w})$ das Euklidische Skalarprodukt ist.

Sei $f : D \to \mathbf{C}$ holomorph. Dann sind auch $f \circ \alpha$ und $f \circ \beta$ Kurven, die sich im Punkt $f(z)$ schneiden. Zeigen Sie, dass der Schnittwinkel von $f \circ \alpha$ mit $f \circ \beta$ in $f(z)$ gleich dem Schnittwinkel von α mit β in z ist.

Abgabe: Donnerstag, den 14.05.2009 vor der Vorlesung