Übungen zur Funktionentheorie — Blatt 4

Aufgabe 1 Seien D_1 und D_2 zwei sternförmige Gebiete und $f : D_1 \cup D_2 \to \mathbf{C}$ sei holomorph.

a) Zeigen Sie: Ist $D_1 \cap D_2$ zusammenhängend, so hat f auf $D_1 \cup D_2$ eine Stammfunktion.

b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels die Notwendigkeit der Annahme, dass $D_1 \cap D_2$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 2 Sei $D \subset \mathbf{C}^*$ ein Gebiet. Ist $l : D \to \mathbf{C}$ eine stetige Funktion mit $\exp(l(z)) = z$ für alle $z \in D$, so nennen wir l einen *stetigen Zweig des Logarithmus*. Zeigen Sie:

a) Sind $l_1, l_2 : D \to \mathbf{C}$ zwei stetige Zweige des Logarithmus, so ist $l_1 - l_2 = 2\pi i k$ mit $k \in \mathbf{Z}$.

b) Hat die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ eine Stammfunktion auf D, so existiert ein stetiger Zweig des Logarithmus auf D.

c) Ist l ein stetiger Zweig des Logarithmus auf D, so ist l holomorph mit $l'(z) = \frac{1}{z}$ auf D. *Hinweis:* Umkehrsatz.

Aufgabe 3 *Fundamentalsatz der Algebra*. Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein komplexes Polnom mit $n \geq 1$ und $a_k \in \mathbf{C}$. Zeigen Sie, dass P eine Nullstelle in $\mathbf{C}$ besitzt. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

a) Zeigen Sie, dass ein $R > 0$ existiert, so dass für alle $z \in \mathbf{C}$ mit $|z| \geq R$ gilt

$$\frac{1}{2}|a_n||z|^n \leq |P(z)| \leq \frac{3}{2}|a_n||z|^n.$$

b) Außerhalb der Nullstellenmenge von P gilt für $z \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{Q(z)}{P(z)} + \frac{a_0}{zP(z)} \tag{*}$$

mit $Q(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^{k-1}$.

c) Angenommen P besitzt keine Nullstellen in $\mathbf{C}$, ergibt die Integration von (*) über den Weg $K(0, r)$, dass

$$2\pi i = \int_{K(0,r)} \frac{a_0}{zP(z)} dz$$

gilt. Aus Aufgabenteil 3a folgt, dass die rechte Seite gegen Null geht.

Abgabe: Mittwoch, den 20.05.2009 bis 16:00 Uhr im Postfach von J. Metzger, Eckerstr. 1, 3. Etage oder im Zi 337