Übungen zur Funktionentheorie — Blatt 5

Aufgabe 1 Berechnen Sie folgende Wegintegrale:

a) $\int_{K(1,1)} \frac{z^3}{z^5+1} dz$

b) $\int_{\Delta(-3,3,3i)} \frac{\exp(z^2)}{z^2-2i} dz$

c) $\int_{K(0,r)} (z-a)^{-n} dz$ für $r \neq |a|$, $n \in \mathbf{N}$.

d) $\int_{K(0,r)} (z^2+a)^{-1} dz$ für $r \neq |a|$.

Aufgabe 2 Sei $\gamma \subset \mathbf{C}$ ein Integrationsweg, $D \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet und $\phi : |\gamma| \times D \to \mathbf{C}$ stetig. Definiere eine Funktion $f : D \to \mathbf{C}$ durch

$$f(z) = \int_\gamma \phi(\zeta, z) d\zeta.$$

für alle $z \in D$. Zeigen Sie:

a) f ist stetig.

b) Ist die Funktion $z \mapsto \phi(\zeta, z)$ für alle $\zeta \in \gamma$ holomorph auf D und ist $(\zeta, z) \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial z}(\zeta, z)$ stetig auf $|\gamma| \times D$, so ist f auf D holomorph und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \int_\gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}(\zeta, z) d\zeta.$$

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\infty \cos(t^2) dt = \int_0^\infty \sin(t^2) dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Hinweis:

a) Benutzen Sie, dass

$$\int_0^\infty \exp(-t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

b) Betrachten Sie das Dreieck $\Delta(0, r, r(i+1))$ und integrieren Sie $z \mapsto \exp(-z^2)$ über $\partial\Delta$.

c) Zerlegen Sie $\exp(-z^2)$ auf $[0, r(1+i)]$ in Real- und Imaginärteil.

Aufgabe 4 Sei $D \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet, $\overline{B_r(z_0)} \subset D$ und $f : D \to \mathbf{C}$ holomorph. Dann gilt für alle $z \in B_r(z_0)$, die Mittelwertungleichung, dh. dass

$$|f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial B_r(z_0)} |f(\zeta)|.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Cauchy-Integralformel für die Funktion $f^k : D \to \mathbf{C} : f^k(z) = f(z)^k$ und betrachten Sie den Grenzwert $k \to \infty$.

Abgabe: Donnerstag, den 28.05.2009 vor der Vorlesung