Übungen zur Funktionentheorie — Blatt 6

Aufgabe 1 Geben Sie für die folgenden Funktionen f_k eine Potenzreihenentwicklung um den Enzwicklungspunkt z_k an und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

a) $f_1(z) = \frac{1}{z-a}$, $z_1 \neq a$,

b) $f_2(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$, $z_2 \neq a$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

c) $f_3(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$, $z_3 \neq a, b$ und $a \neq b$,

d) $f_4(z) = \frac{1}{(z-a)^2(z-b)}$, $z_4 \neq a, b$.

Hinweis: Für b) und c) Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 2 Finden Sie eine holomorphe, auf ganz $\mathbf{C}$ definierte Lösung f für folgende Differentialgleichungen und zeigen Sie die Eindeutigkeit in der Klasse der holomorphen Funktionen. Begründen Sie, warum wir Lösungen in genau dieser Klasse suchen.

a) $f'(z) = z + f(z)$ mit $f(0) = 1$.

b) $f''(z) = f(z)$ mit $f(0) = a$ und $f'(0) = b$.

Anleitung: Nehmen Sie an, dass die Lösung f um 0 in eine Potenzreihe entwickelbar ist und leiten Sie aus den Differentialgleichungen Beziehungen zwischen den Koeffizienten der Potenzreihe ab. Bestimmen Sie daraus die Koeffizienten und berechnen Sie den Konvergenzradius der resultierenden Reihe.

Aufgabe 3 a) *Das Schwarzsche Lemma* Sei $E = B_1(0)$ die Einheitskreisscheibe und $f : E \to E$ holomorph mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass dann $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in E$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f(z)/z$.

b) Folgern Sie, dass jede bijektive holomorphe Abbildung $f : E \to E$ mit $f(0) = 0$ und holomorpher Umkehrfunktion die Form $f(z) = \omega z$ für ein $\omega \in \mathbf{C}$ mit $|\omega| = 1$ hat.

Aufgabe 4 *Konforme Selbstabbildungen des Kreises.*

a) Zeigen Sie, dass für alle $a \in E$ die Funktion

$$f_a(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$$

eine bijektive Abbildung des Einheitskreises auf sich selbst definiert. Berechnen Sie $f_a(0)$, $f_a(a)$ und die Umkehrfunktion f_a^{-1}.

b) Folgern Sie aus Aufgabe 3, dass jede bijektive, holomorphe Abbildung $f : E \to E$ von der Form

$$f(z) = \omega f_a(z)$$

ist, für ein $\omega \in \mathbf{C}$ mit $|\omega| = 1$ und $a \in E$.

Abgabe: Dienstag, den 09.06.2009 vor der Vorlesung