Übungen zur Funktionentheorie — Blatt 8

Aufgabe 1 Berechnen Sie für folgende Zykel Γ die Umlaufzahlen $n(\Gamma, z)$ für alle $z \in \mathbf{C} \setminus |\Gamma|$:

a) $\Gamma = K(z_0, r)$.

b) $\Gamma = K(z_0, R) - K(z_1, r)$ mit $0 < r < R - |z_0 - z_1|$.

c) $\Gamma = \partial\Delta(z_0, z_1, z_2)$ mit Punkten $z_0, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, die nicht auf einer Geraden liegen.

d) $\Gamma = -K(0, 1) + K(1, \frac{1}{2}) + K(1, 1)$.

Aufgabe 2 *Die Schwarzsche Integralformel* Zeigen Sie: Ist $f : B_r(0) \to \mathbf{C}$ holomorph, so gilt für alle $z \in B_r(0)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K(0,r)} \frac{\mathrm{Re}(f(\zeta))}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\zeta + i\,\mathrm{Im}(f(0)).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion die durch die Rechte Seite gegeben ist und zeigen Sie dass deren Realteil mit dem von f übereinstimmt.

Aufgabe 3 Für eine offene Menge $D \subset \mathbf{C}$ bezeichne $\mathcal{O}(D)$ die Algebra der holomorphen Funktionen auf D. Für ein gegebenes D sei $B_r(z_0) \subset D$ und $R : \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(B_r(z_0))$ die Restriktionsabbildung $R(f) = f|_{B_r(z_0)}$. Wann ist R surjektiv bzw. injektiv?

Aufgabe 4 *Der Satz von Hurwitz* Sei $D \subset \mathbf{C}$ offen und $f_n : D \to \mathbf{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen eine nicht konstante Funktion $f : D \to \mathbf{C}$ konvergieren. Zeigen Sie: Für alle $z \in D$ existiert ein $N \in \mathbf{N}$, eine Folge $(z_n) \subset D$, so dass gilt $z_n \to z$ und $f_n(z_n) = f(z)$ für $n \geq N$.

Abgabe: Donnerstag, den 25.06.2009 vor der Vorlesung