Übungen zur Funktionentheorie — Blatt 9

Aufgabe 1 a) Untersuchen Sie, ob folgende Gebiete einfach zusammenhängend sind:

$$B_r(z), \mathbf{C} \setminus \{0\}, \mathbf{C} \setminus [0,1], \mathbf{C} \setminus \{x + iy : x \geq 0, y = \sin x\}.$$

b) Zeigen Sie, dass sternförmige Gebiete einfach zusammenhängend sind.

Aufgabe 2 Sei $D \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet.

a) Zeigen Sie, dass auf D genau dann eine holomorphe Logarithmusfunktion $l : D \to \mathbf{C}$ existiert (d.h. $\exp \circ l(z) = z$ für alle $z \in D$), falls für jeden Zykel Γ in D gilt, dass $n(\Gamma, 0) = 0$.

b) Konstruieren Sie aus der Logarithmusfunktion eine holomorphe Wurzelfunktion. D.h. geben Sie zu jedem $n \in \mathbf{N}$ eine Funktion $w_n : D \to \mathbf{C}$, so dass $w_n(z^n) = z$ für alle $z \in D$ gilt. Diskutieren Sie die Eindeutigkeit der Wurzelfunktion in Hinblick auf die Eindeutigkeit der Logarithmusfunktion.

Aufgabe 3 Sei $D \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet.

a) Sei $\gamma : [0,1] \to D$ ein stetiger Weg. Zeigen Sie, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Integrationsweg $\gamma_\varepsilon : [0,1] \to D$ existiert mit $\max_{t \in [0,1]} |\gamma(t) - \gamma_\varepsilon(t)| < \varepsilon$.

b) Sei nun $\gamma_1 : [0,1] \to D$ ein Integrationsweg und $f : D \to \mathbf{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jeden Integrationsweg $\gamma_2 : [0,1] \to D$ mit $\max_{t \in [0,1]} |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < \delta$ gilt, dass

$$\left| \int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_2} f(\zeta) d\zeta \right| < \varepsilon$$

c) Sei $\gamma : [0,1] \to D$ ein stetiger Weg. Benutzen Sie obige Resultate um $\int_\gamma f(\zeta) d\zeta$ zu definieren. Zeigen Sie, dass Ihre Definition nur von γ und f abhängt.

Aufgabe 4 Sei $D \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet und $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to D$ geschlossene Wege. Dann heißen γ_0 und γ_1 *homotop in* D, wenn es eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to D$ mit

$$H(0,t) = \gamma_0(t), H(1,t) = \gamma_1(t) \forall t \in [0,1] \quad \text{und} \quad H(s,0) = H(s,1) \forall s \in [0,1]$$

gibt. H ist also eine stetige Deformation von γ_0 entlang der Familie $\gamma_s := H(s, \cdot)$ geschlossener Wege nach γ_1.

a) Zeigen Sie: Sind γ_0, γ_1 homotop in D, dann sind sie auch homolog.
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3 um Umlaufzahlen stetiger Wege zu berechnen.

b) Folgern Sie die Homotopieversion des Cauchy-Integralsatzes:
Sind γ_0, γ_1 homotope stetige Wege in D und ist $f : D \to \mathbf{C}$ holomorph, so gilt:

$$\int_{\gamma_0} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta$$

Abgabe: Donnerstag, den 02.07.2009 vor der Vorlesung