Übungen zur Funktionentheorie — Blatt 11

Aufgabe 1 Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten und zugehörigen Residuen der folgenden Funktionen:

a) $\frac{\exp(z)}{(z-1)^2}$

b) $(z-1)\exp(\frac{1}{z-1})$

c) $\frac{1}{\sin(z)}$

d) $\frac{1}{Q(z)}$, wo Q eine holomorphe Funktion mit nur einfachen Nullstellen ist.

Aufgabe 2 Beweisen Sie Bemerkung 17.8. Zeigen Sie, dass:

a) $\operatorname{res}(\lambda f + \mu g, z_0) = \lambda \operatorname{res}(f, z_0) + \mu \operatorname{res}(g, z_0)$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$.

b) Ist z_0 ein Pol erster Ordnung von f so gilt $\operatorname{res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z)$.

c) Ist f holomorph und hat g bei z_0 eine Nullstelle erster Ordnung, so gilt $\operatorname{res}(\frac{f}{g}, z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$.

Aufgabe 3 a) Beweisen Sie Satz 18.4 für $z_0 = \infty$: Sei $U \subset \hat{\mathbf{C}}$ eine Umgebung von ∞, $f : U \to \mathbf{C}$ sei holomorph und ∞ sei eine w_0-Stelle der Vielfachheit $1 \leq m < \infty$. Dann gibt es eine Umgebung $V \subset U$ von ∞ und eine Umgebung W von w_0 mit $W \subset f(V)$ so dass zu jedem $w \in W \setminus \{w_0\}$ genau m verschiedene Punkte von V existieren, in denen f den Wert w mit Vielfachheit 1 annimmt.

b) Formulieren und beweisen Sie ein analoges Resultat, falls U eine Umgebung von z_0, $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbf{C}$ holomorph und z_0 ein Pol m-ter Ordnung ist.

Aufgabe 4 a) Zeigen Sie, dass jede bijektive, holomorphe Abbildung $f : \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$ eine Möbiustransformation ist.

b) Zeigen Sie, dass jede bijektive, holomorphe Abbildung $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ von der Form $f(z) = az + b$ mit $a, b \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$ ist.

Abgabe: Donnerstag, den 16.07.2009 vor der Vorlesung