Topologie

Skript zur Vorlesung im Wintersemester 2008/09
an der Universität Freiburg

Jan Metzger

29. April 2009

Inhaltsverzeichnis

I. Mengentheoretische Topologie

1 Topologische Räume

Ziel dieses Kapitels ist die Axiomatisierung der Begriffe *Konvergenz* und *Stetigkeit*.

Definition 1.1. Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$ aus einer Menge X und einer Menge $\mathcal{T} \subset \mathbf{P}X$ von Teilmengen von X, so dass gilt:

(T1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$,

(T2) Ist I eine beliebige Indexmenge und $U_\alpha \in \mathcal{T}$ für alle $\alpha \in I$, so ist auch $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

(T3) Ist $n \in \mathbf{N}$ und sind $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$ so ist auch $\bigcap_{k=1}^n U_k \in \mathcal{T}$.

Dann heißt $\mathcal{T}$ *Topologie* auf X. Ist $U \in \mathcal{T}$ so nennen wir U *offen.*

Eine wichtige Klasse von Topologien ist auf metrischen Räumen definiert. Wir wiederholen kurz die Definition eines metrischen Raums und erläutern die zugehörige Topologie.

Definition 1.2. Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) aus einer Menge X und einer Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty)$, so dass gilt:

(M1) Sind $x, y \in X$ so ist $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(M2) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ und,

(M3) $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Dann nennt man d eine *Metrik* auf X.

Beispiel 1.3. Sei $|\cdot| : \mathbf{R}^n \to [0, \infty)$ mit $|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ die *Euklidische Norm* auf $\mathbf{R}^n$. Dann ist $d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to [0, \infty)$ mit $d(x, y) = |x - y|$ eine Metrik auf $\mathbf{R}^n$.

In einem metrischen Raum bezeichnen wir die *offene Kugel* vom Radius $r \in (0, \infty)$ um $x \in X$ mit

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Beispiel 1.4. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so können wir die *metrische Topologie* $\mathcal{T}_d$ auf X wie folgt definieren. Wir setzen $U \in \mathcal{T}_d$, also U offen, genau dann wenn zu jedem $x \in U$ ein $r_x > 0$ existiert, so dass $B_{r_x}(x) \subset U$.

Beweis. Wir überprüfen, dass $\mathcal{T}_d$ die Axiome einer Topologie erfüllt:

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}_d$ ist klar.

(T2) Sei I eine Indexmenge und $U_\alpha \in \mathcal{T}_d$ für alle $\alpha \in I$. Setze $U = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$. Ist nun $x \in U_\alpha$ so ist zu zeigen, dass ein ganzer offener Ball um x in U liegt. Da $x \in U$ ist $x \in U_{\bar\alpha}$ für ein $\bar\alpha \in I$. Da $U_{\bar\alpha} \in \mathcal{T}_d$ existiert ein $r > 0$ so dass $B_r(x) \subset U_{\bar\alpha} \subset U$. Also ist $U \in \mathcal{T}_d$.

(T3) Seien $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}_d$ und $x \in U = \bigcap_{k=1}^n U_k$. Für alle $k = 1, \ldots, n$ existiert ein r_k so dass $B_{r_k}(x) \subset U_k$, da $x \in U_k$ und $U_k \in \mathcal{T}_d$. Setze $r := \min\{r_k : k = 1, \ldots n\}$. Dann ist $B_r(x) \subset B_{r_k}(x) \subset U_k$ für alle k, also $B_r(x) \subset U$ und $U \in \mathcal{T}_d$.

□

Beispiel 1.5. Sei X eine beliebige Menge.

a) Dann ist $\{\emptyset, X\}$ eine Topologie auf X, die sogenannte *Klumpentopologie*.

b) Auch $\mathbf{P}X$, die volle Potenzmenge ist eine Topologie auf X, die sogenannte *diskrete Topologie*.

Im folgenden werden wir die Topologie $\mathcal{T}$ eines topologischen Raumes als implizit gegeben voraussetzen. Statt zu schreiben *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein topologischer Raum* ... schreiben wir nur noch *Sei* X *ein topologischer Raum* ..., wenn keine Verwechslungsgefahr besteht.

Definition 1.6. Sei X ein topologischer Raum.

a) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $\complement A := X \setminus A$ offen ist.

b) Eine Teilmenge $V \subset X$ heißt *Umgebung* von $x \in X$, falls eine offene Menge U existiert, so dass $x \in U \subset V$.

c) Ist B eine beliebige Teilmenge und $x \in X$.

   i) x heißt *innerer Punkt* von B, wenn B eine Umgebung von x ist.
   ii) x heißt *äußerer Punkt* von B, wenn $\complement B$ eine Umgebung von x ist.
   iii) x heißt *Randpunkt* von B, wenn x weder äußerer noch innerer Punkt von B ist.

d) Wir bezeichnen mit B° die Menge der inneren Punkte von B und mit $\bar B$, die Menge der Punkte in X, die nicht äußere Punkte sind. $\bar B$ heißt abgeschlossene Hülle von B.

Bemerkung 1.7. Wegen der Rechenregeln von $\complement : \mathbf{P}X \to \mathbf{P}X$ könnte man eine Topologie auf X auch durch ihr System von abgeschlossenen Mengen definieren. Folgende Axiome sind äquivalent zu (T2) und (T3):

(A1) Ist A_α für $\alpha \in I$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen, so ist auch $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ abgeschlossen.

(A2) Sind $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossen, so ist auch $\bigcup_{k=1}^n A_k$ abgeschlossen.

Definition 1.8. Seien X und Y topologische Räume.

a) Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *stetig*, wenn für jede offene Menge $U \subset Y$ ihr Urbild $f^{-1}(U)$ auch offen ist.

b) Eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ heißt *Homöomorphismus*, wenn sowohl f als auch f^{-1} stetig sind.

c) Existiert ein Homöomorphismus $f : X \to Y$,so nennen wir X und Y *homöomorph* uns schreiben $X \cong Y$.

Bemerkung 1.9. a) Sind X und Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann ist f genau dann stetig wenn für alle $x \in X$ und alle Umgebungen $U \subset Y$ von $f(x)$ das Urbild $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x ist.

b) Sind $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ und $(Z, \mathcal{T}_Z)$ topologische Räume und $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ und $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ stetige Abbildungen, so ist auch $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ stetig.

Bemerkung 1.10. Sei X eine Menge.

a) Sei $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine Familie von Topologien auf X. Dann ist ihr Durchschnitt $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{T}_\alpha \subset \mathbf{P}(X)$ wieder eine Topologie auf X.

b) Sind $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf X, so nennen wir $\mathcal{T}_1$ *gröber* als $\mathcal{T}_2$ oder $\mathcal{T}_2$ *feiner* als $\mathcal{T}_1$, wenn $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Dann ist die Identität $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$ stetig, aber kein Homöomorphismus falls $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$.

c) Für jede Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathbf{P}X$ existiert eine gröbste Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{A}$, die $\mathcal{A}$ enthält, nämlich

$$\mathcal{T}_\mathcal{A} := \bigcup \{\mathcal{T} : \mathcal{T} \text{ Topologie und } \mathcal{A} \subset \mathcal{T}\}.$$

$\mathcal{T}_\mathcal{A}$ heißt die von $\mathcal{A}$ *erzeugte* Topologie. In diesem Fall nennen wir $\mathcal{A}$ eine *Subbasis* von $\mathcal{T}_\mathcal{A}$.

d) Sind X und Y topologische Räume und sei $\mathcal{A}$ eine Subbasis für die Topologie auf Y. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn für alle $U \in \mathcal{A}$ die Menge $f^{-1}(U)$ offen in X ist.

Definition 1.11. Sei X ein topologischer Raum.

a) Für $x \in X$ sei $\mathcal{U}(x) \subset \mathbf{P}X$ die Menge aller Umgebungen von x. $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ heißt *Umgebungsbasis* von x, falls zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $B \in \mathcal{B}(x)$ existiert mit $B \subset U$.

b) Eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ heißt *Basis* von $\mathcal{T}$, wenn jedes Element von $\mathcal{T}$ Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ ist.

Definition 1.12. Sei X ein topologischer Raum.

a) X erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis hat.

b) X erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, wenn es eine abzählbare Basis für die Topologie gibt.

Beispiel 1.13. a) Ist (X,d) ein metrischer Raum und $x \in X$, so ist $\mathcal{B}(x) := \{B_{1/n}(x) : n \in \mathbf{N}\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis. Also erfüllt jeder metrische Raum das erste Abzählbarkeitsaxiom.

b) Ist $X = (\mathbf{R}^n, |\cdot|)$, so ist

$$\mathcal{B} := \left\{B_{1/n}(q) : n \in \mathbf{N}, q \in \mathbf{Q}^n\right\}$$

eine abzählbare Basis der Topologie.

Definition 1.14. Sei X ein topologischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset X$ *konvergiert* gegen $x \in X$, genau dann, wenn es zu jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $\bar{n} \in \mathbf{N}$ gibt mit $x_n \in U$ für alle $n \geq \bar{n}$. Dann schreiben wir $x_n \to x$ oder $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Wir nennen x dann den Grenzwert der Folge (x_n).

Proposition 1.15. *Seien X und Y topologische Räume. X erfülle das erste Abzählbarkeitsaxiom. Dann ist eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann stetig, wenn für alle konvergenten Folgen (x_n) mit $x_n \to x$ auch $f(x_n) \to f(x)$ konvergiert.*

Beweis. "$\Rightarrow$" Sei $x_n \to x$, $y = f(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$, also existiert $\bar{n} \in \mathbf{N}$, so dass $x_n \in f^{-1}(V)$ für alle $n \geq \bar{n}$. Damit ist $f(x_n) \in V$ für alle $n \geq N$, also $f(x_n) \to f(x)$.

Sei nun $(U_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{U}(x)$ eine abzählbare Umgebungsbasis von $x \in X$. Wir können annehmen, dass $U_n \subset U_m$ für $m \leq n$.

"$\Leftarrow$" Sei $V \in \mathcal{U}(y)$. Angenommen $U_n \not\subset f^{-1}(V)$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Also existiert zu jedem $n \in \mathbf{N}$ ein $x_n \in U_n \setminus f^{-1}(V)$. Da $x_n \in U_n$ und $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Umgebungsbasis von x ist, folgt $x_n \to x$. Da aber $x_n \notin f^{-1}(V)$ ist $f(x_n) \notin V$. Also $f(x_n) \not\to f(x)$. Dies ist ein Widerspruch. Unsere Annahme war also falsch und es existiert ein $\bar{n}$ so dass $U_{\bar{n}} \subset f^{-1}(V)$. Also $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$. $\square$

Bemerkung 1.16. Ist X ein beliebiger topologischer Raum, so kann eine Folge mehrere Grenzwerte haben, wenn die Topologie zu grob ist.

Definition 1.17. Ein topologischer Raum X ist *Hausdorffsch* oder *separiert* oder T_2, wenn zu allen $x \neq y \in X$ offene Mengen U_x und U_y existieren so dass $x \in U_x$, $y \in U_y$ und $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Beispiel 1.18. Ist (X,d) ein metrischer Raum, so ist $\mathcal{T}_d$ Hausdorffsch. Denn für $x \neq y \in X$ sind $U_x = B_{d(x,y)/2}(x)$ und $U_y = B_{d(x,y)/2}(y)$ wie oben.

Proposition 1.19. *Ein topologischer Raum X, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist genau dann Hausdorffsch, wenn jede Folge in X höchstens einen Grenzwert hat.*

Beweis. "$\Rightarrow$" Sei $x_n \to x$ und sei $x \neq y \in X$. Da X Hausdorffsch ist, existieren offene Umgebungen U_x von x und U_y von y mit $U_x \cap U_y = \emptyset$. Da $x_n \to x$, existiert $\bar{n} \in \mathbf{N}$, so dass $x_n \in U_x$ für alle $n \geq \bar{n}$. Insbesondere ist $x_n \notin U_y$ für alle $n \geq \bar{n}$, also $x_n \not\to y$.

"$\Leftarrow$" Seien $x \neq y$ und seien $(U_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{U}(x)$ und $(V_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{U}(y)$ abzählbare Umgebungsbasen von x bzw. y. Wir können annehmen, dass $U_n \subset U_m$ und $V_n \subset V_m$ für $m \leq n$. Außerdem können wir annehmen, dass U_n und V_n offen sind für alle n.

Angenommen $U_n \cap V_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Dann existiert $x_n \in U_n \cap V_n$, also $x_n \to x$ und $x_n \to y$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, also existiert ein $\bar{n}$ mit $U_{\bar{n}} \cap V_{\bar{n}} = \emptyset$ und X ist Hausdorffsch. $\square$

2 Konstruktion topologischer Räume

Definition 2.1. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist

$$\mathcal{T}_A := \{U \cap A : U \in \mathcal{T}\}$$

eine Topologie auf A, die sogenannte *Teilraumtopologie*.

In der Teilraumtopologie sind die offenen Mengen also gerade die Mengen von der Form $A \cap U$ wo $U \in \mathcal{T}$.

Beispiel 2.2. Wir betrachten $[0,1] \subset \mathbf{R}$ und versehen $[0,1]$ mit der Teilraumtopologie der Inklusion $[0,1] \subset \mathbf{R}$. Dann sind zum Beispiel folgende Mengen offen in $[0,1]$: (a,b) für $0 < a < b < 1$, I, $[0,a)$ mit $0 < a \leq 1$ und $(a,1]$ mit $0 \leq b < 1$.

Bemerkung 2.3. a) Ist $i_A : A \to X$ die Inklusion $i_A(x) = x$, so ist $i_A : (A, \mathcal{T}_A) \to (X, \mathcal{T})$ stetig.

b) Die Teilraumtopologie ist die gröbste Topologie auf A, für die i_A stetig ist.

c) Ist Z ein topologischer Raum, so ist eine Abbildung $f : Z \to A$ genau dann stetig, wenn $i_A \circ f : Z \to X$ stetig ist.

d) Wenn X das erste bzw. zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, dann auch A. Ist X Hausdorffsch, so auch A.

Beispiel 2.4. Ist $X = \mathbf{R}^n$ mit der Standardtopologie, so bezeichnen wir $B^n := \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\} \subset \mathbf{R}^n$ mit der Teilraumtopologie als den *n-dimensionalen Ball*, mit $\bar{B}^n := \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \leq 1\} \subset \mathbf{R}^n$ den *abgeschlossenen n-dimensionalen Ball*, und $S^n := \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ mit der Teilraumtopologie als die *n-dimensionale Sphäre*.

Definition 2.5. a) Seien X_α für $\alpha \in I$ Mengen. Die disjunkte Vereinigung $\sum_{\alpha\in I} X_\alpha$ ist gegeben durch

$$\sum_{\alpha\in I} X_\alpha := \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha \times \{\alpha\}.$$

Es existieren injektive Abbildungen

$$i_\beta : X_\beta \to \sum_{\alpha\in I} X_\alpha : x_\beta \mapsto (x_\beta, \beta),$$

so dass $i_\alpha(X_\alpha) \cap i_\beta(X_\beta) = \emptyset$ für $\alpha \neq \beta$ und

$$\sum_{\alpha \in I} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} i_\alpha(X_\alpha).$$

b) Sind alle X_α für $\alpha \in I$ topologische Räume, so wird $X = \sum_{\alpha \in I} X_\alpha$ auch ein topologischer Raum mit folgender Topologie. Wir definieren $U \subset X$ als offen, genau dann wenn $i_\alpha^{-1}(U)$ offen ist für alle $\alpha \in I$. Damit ist $i_\alpha : X_\alpha \to X$ stetig für alle $\alpha \in I$ und außerdem ein Homöomorphismus auf sein Bild (eine Einbettung).

Diese Topologie heißt *Summentopologie* und ist die feinste Topologie auf X für die alle i_α stetig sind.

Bemerkung 2.6. Ist Y ein topologischer Raum, dann ist eine Abbildung $f : \sum_{\alpha \in I} X_\alpha \to Y$ genau dann stetig, wenn die Komposition $f \circ i_\alpha : X_\alpha \to Y$ stetig ist für alle $\alpha \in I$.

Beispiel 2.7. Die topologische Summe $S^2 + S^2$ von zwei S^2 ist homöomorph zu

$$\{x \in \mathbf{R}^3 : |x - x_+| = 1\} \cup \{x \in \mathbf{R}^3 : |x - x_-| = 1\}$$

wo $x_\pm = (\pm 2, 0, 0) \in \mathbf{R}^3$. Für die nicht-disjunkte Vereinigung gilt $S^2 \cup S^2 = S^2$.

Definition 2.8. Seien $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ topologische Räume. Sei weiter $X := \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ ihr kartesisches Produkt und

$$\pi_\beta : X \to X_\beta : (x_\alpha)_{\alpha \in I} \mapsto x_\beta$$

die kanonische Projektion auf den Faktor X_β für alle $\beta \in I$.

Die *Produkttopologie* auf X ist die gröbste Topologie, so dass alle $\{\pi_\beta : \beta \in I\}$ stetig sind.

Bemerkung 2.9. a) Die Projektion $\pi_\beta : X \to X_\beta$ ist stetig, falls für alle offenen Mengen $U_\beta \subset X_\beta$ die Menge

$$\pi^{-1}(U_\beta) = \prod_{\alpha \in I} U_\alpha \qquad \text{mit } U_\alpha = X_\alpha \text{ falls } \alpha \neq \beta$$

offen in X ist. Endliche Schnitte von Mengen dieser Form sind die folgenden:

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{\alpha \in I} U_\alpha : U_\alpha \neq X_\alpha \text{ für nur endlich viele } \alpha \right\}.$$

Also ist $\mathcal{B}$ eine Basis der Produkttopologie auf X.

b) Ist $f : Y \to X$ eine Abbildung, so ist f genau dann stetig, wenn für alle $\alpha \in I$ die Abbildung $\pi_\beta \circ f : Y \to X_\beta$ stetig ist.

c) Ist I abzählbar und erfüllen alle X_α für $\alpha \in I$ das erste bzw. zweite Abzählbarkeitsaxiom, so erfüllt X es auch.

d) Ist X_α Hausdorffsch für alle $\alpha \in I$, so auch X.

Beispiel 2.10. a) Die Produkttopologie auf $\prod_{i=1}^n \mathbf{R}$ stimmt mit der Standardtopologie auf $\mathbf{R}^n$ überein.

b) Für $n \geq 1$ setzt man $T^n = \prod_{i=1}^n S^1$. Versehen mit der Produkttopologie heißt T^n der *n-dimensionale Torus.*

c) Sei X ein topologischer Raum. Dann definieren wir den Zylinder ZX über X als $ZX = X \times [0,1]$.

Definition 2.11. a) Sei X eine Menge und $R \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation. Für $x \in X$ sei $[x] = \{y \in X : (x,y) \in R\}$ die *Äquivalenzklasse* von x.

Sei $X/R := \{[x] : x \in X\}$ die *Quotientenmenge* sowie $\pi : X \to X/R : x \mapsto [x]$ die kanonische Projektion.

b) Ist X ein topologischer Raum, so definieren wir eine Topologie auf X/R indem wir $U \subset X/R$ als offen definieren, falls $\pi^{-1}(U)$ offen in X ist. Dies definiert die *Quotiententopologie* auf X/R.

Bemerkung 2.12. a) Die kanonische Projektion $\pi : X \to X/R$ ist stetig in der Quotiententopologie. Außerdem ist die Quotiententopologie die feinste Topologie auf X/R, für die π stetig ist.

b) Ist Y ein topologischer Raum. Dann ist eine Abbildung $f : X/R \to Y$ genau dann stetig, wenn $f \circ \pi : X \to Y$ stetig ist.

Beispiel 2.13. a) Sei $R \subset [0,1] \times [0,1]$ die Äquivalenzrelation auf $[0,1]$, die von $0 \sim 1$ erzeugt wird, dh.

$$R = \{(0,1),(1,0),(x,x) \text{ für } x \in [0,1]\}$$

Dann ist $[0,1]/R \cong S^1$ via

$$f : I/R \to S^1 : [t] \mapsto \exp(2\pi i t).$$

Hier fassen wir $S^1 \subset \mathbf{C}$ als die komplexen Zahlen vom Betrag 1 auf. f ist wohldefiniert und stetig, außerdem bijektiv. Wie wir unten sehen ist f sogar ein Homöomorphismus.

b) Sei $X = [0,1] \times [0,1]$ und R die von $(0,t) \sim (1,t)$ und $(s,0) \sim (s,1)$ erzeugte Äquivalenzrelation.

$$\bar{f} : [0,1] \times [0,1] \to T^2 = S^1 \times S^1 : (s,t) \mapsto \big(\exp(2\pi i s), \exp(2\pi i t)\big)$$

induziert einen Homöomorphismus

$$f : X/R \to T^2.$$

c) Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ abgeschlossen. Sei R die von $A \times A$ erzeugte Äquivalenzrelation $R = A \times A \cup \{(x,x) : x \in X\}$ auf X. Wir bezeichnen X/R auch mit X/A. Der Quotient X/A entsteht aus X durch Identifizieren von A zu einem Punkt. Es ist $X \setminus A \cong X/A \setminus \{[A]\}$ via der Projektion $\pi : X \to X/A$ eingeschränkt auf $X \setminus A$.

Satz 2.14. *Sind X und Y topologische Räume und R, S Relationen auf X bzw. Y. Ist $\bar{f} : X \to Y$ eine mit R und S verträgliche stetige Abbildung (dh. für alle x, x' impliziert $x \sim_R x'$, dass $\bar{f}(x) \sim_S \bar{f}(x')$ gilt), so induziert $\bar{f}$ eine stetige Abbildung*

$$f : X/R \to Y/S : [x]_R \mapsto [\bar{f}(x)]_S$$

Ist $\bar{f}$ ein Homöomorphismus und $\bar{f}^{-1} : Y \to X$ auch mit S und R verträglich, so ist auch f ein Homöomorphismus.

Beweis. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\bar{f}} & Y \\ {\scriptstyle \pi_R}\downarrow & & {\scriptstyle \pi_S}\downarrow \\ X/R & \xrightarrow{f} & Y/S \end{array}$$

Dann ist $f \circ \pi_R = \pi_S \circ \bar{f}$, das Diagramm kommutiert also. Nach Bemerkung 2.12 ist $f : X/R \to Y/S$ genau dann stetig, wenn $f \circ \pi_R : X \to Y/S$ stetig ist. Da $f \circ \pi_R = \pi_S \circ \bar{f}$ ist dies der Fall, da die rechte Seite als Verkettung stetiger Abbildungen stetig ist. □

Definition 2.15. Sei X ein topologischer Raum.

a) Der Quotient $ZX/X \times \{1\} = CX$ heißt *Kegel* über X, mit *Spitze* $[X \times \{1\}]$.

b) Der Quotient $ZX/X \times \{0,1\} = SX$ heißt *Einhängung* von X.

Beispiel 2.16. a) $CS^n \cong B^{n+1}$ via $[(x,t)] \mapsto (1-t)x$.

b) $S(S^n) \cong S^{n+1}$.

Beispiel 2.17. a) Sei $X = [0,1] \times [0,1]$ und R_1 die Relation, die von $(0,t) \sim (1,t)$ erzeugt wird. Dann ist $[0,1] \times [0,1]/R_1 \cong ZS^1$.

b) Sei $X = [0,1] \times [0,1]$ und R_2 die Relation, die von $(0,t) \sim (1,1-t)$ erzeugt wird. Dann nennt man $M := [0,1] \times [0,1]/R_2$ das *Möbiusband.*

c) Sei R_3 die Relation auf $X = [0,1] \times [0,1]$, die von $(0,t) \sim (1,t)$ und $(s,0) \sim (1-s,1)$ erzeugt wird. Dann nennt man $K := [0,1] \times [0,1]/R_3$ die *Kleinsche Flasche.*

Beispiel 2.18. Auf $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sei $x \sim y$ genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ gibt, so dass $x = \lambda y$. Der Quotient $\mathbf{R}P^n := \mathbf{R}^{n+1}/\sim$ heißt der n-dimensionale *reell projektive Raum.*

Für $[x] \in \mathbf{R}P^n$ schreibt man $[x_0 : \ldots : x_n]$. Es existiert eine *Einbettung* $i_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}P^n : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto [1 : x_1 : \ldots : x_n]$, dh. i_0 ist ein Homöomorphismus auf $i_0(\mathbf{R}^n)$. Die Menge $\mathbf{R}P^n \setminus i_0(\mathbf{R}^n)$ heißt die *unendlich ferne Hyperebene.*

Definiert man auf $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ die Relation, die Antipoden identifiziert, dh. $x \sim -x$, so ist $S^n/\sim \cong \mathbf{R}P^n$ via

$$[(x_0, \ldots, x_n)] \mapsto [x_0 : \ldots : x_n]$$

Definition 2.19. Seien $(X_\alpha, x_\alpha)_{\alpha\in I}$ punktierte topologische Räume, dh. $x_\alpha \in X_\alpha$ sind feste Basispunkte. Sei $\{x_\alpha\}$ abgeschlossen in X_α für alle $\alpha \in I$ (etwa weil X_α Hausdorffsch ist). Dann ist die Menge $A := \{x_\alpha : \alpha \in I\} \subset \sum_{\alpha\in I}$ auch abgeschlossen. Der Raum

$$\bigvee_{\alpha\in I} (X_\alpha, x_\alpha) := \sum_{\alpha\in I} X_\alpha/A$$

heißt *Einpunktvereinigung* von $(X_\alpha, x_\alpha)_{\alpha\in I}$. Ist $\pi : \sum_{\alpha\in I} X_\alpha \to \bigvee_{\alpha\in I} X_\alpha$ die kanonische Projektion so ist $\pi(x_\alpha) = [A] =: x_0$ für alle $\alpha \in I$.

Ist $i_\beta : X_\beta \to \sum_{\alpha\in I} X_\alpha$ die kanonische Inklusion, so ist $i'_\beta := \pi \circ i_\beta : X_\beta \to \bigvee_{\alpha\in I} X_\alpha$ eine Einbettung, und $i'_\alpha(X_\alpha) \cap i'_\beta(X_\beta) = x_0$ für alle $\alpha \neq \beta \in I$.

Beispiel 2.20. $S^1 \vee S^1 \cong$ Figur Acht.

Im folgenden Beispiel lernen wir eine der wichtigsten Konstruktionen topologischer Räume kennen, das Verkleben entlang einer Abbildung.

Beispiel 2.21 (Verkleben topologischer Räume). Seien X, Y topologische Räume und $X_0 \subset X$ ein Teilraum von X. Ist eine stetige Abbildung $f : X_0 \to Y$ gegeben, so definieren wir auf $X + Y$ die Relation $x_0 \sim f(x_0)$ für alle $x_0 \in X_0$.

Den Quotientenraum $X \cup_f Y := X + Y/\sim$ nennen wir die *Verklebung von* X *und* Y *entlang* f.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] & X + Y \arrow[d, "\pi"] & Y \arrow[l, "i_Y"'] \arrow[dl, "\pi\circ i_Y"] \\ & X \cup_f Y & \end{tikzcd}$$

Dann ist $\pi \circ i_Y : Y \to X \cup_f Y$ eine Einbettung, im Allgemeinen $\pi \circ i_X : X \to X \cup_f Y$ aber nicht (ist nicht injektiv, wenn f nicht injektiv ist.

Beispiel 2.22. a) Ist X ein topologischer Raum, $ZX = X \times [0,1]$ der Zylinder über X, $X_0 := X \times \{1\} \subset ZX$ und $f : X_0 \to \{\text{pt.}\}$ die konstante Abbildung. Dann ist $ZX \cup_f \{\text{pt.}\} \cong CX$.

b) Sind $X = Y = \bar{B}^n$, und

$$f : S^{n-1} \subset \bar{B}^n \to S^{n-1} \subset \bar{B}^n$$

die Identität, so ist $\bar{B}^n \cup_f \bar{B}^n \cong S^n$.

3 Zusammenhang

Zusammenhang ist eine erste topologische Eigenschaft, mit der sich gewisse topologische Räume unterscheiden lassen.

Definition 3.1. Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn folgendes gilt: Sind $U, V \subset X$ offen und ist $X = U \cup V$ (kurz $X = U \dot\cup V$) und $U \cap V = \emptyset$, so ist $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$.

Bemerkung 3.2. a) Ist X zusammenhängend, so ist X die einzige nichtleere Menge, die zugleich offen und abgeschlossen ist.

b) X ist zusammenhängend, genau dann wenn X nicht die topologische Summe zweier nichtleerer Teilmengen ist.

Beispiel 3.3. $[0, 1] \subset \mathbf{R}$ ist zusammenhängend.

Beweis. Sei $[0, 1] = U \dot\cup V$ und sei $U \neq \emptyset$. Sei $a := \sup U$. Da U abgeschlossen ist, ist $a \in U$. Da außerdem U offen ist, folgt $a = 1 \in U$. Ist $V \neq \emptyset$ erhalten wir mit der gleichen Argumentation, dass $1 = \sup V \in V$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass U und V disjunkt sind. □

Proposition 3.4. *Sind X und Y topologische Räume und X zusammenhängend. Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, so ist auch $f(X) \subset Y$ zusammenhängend.*

Beweis. Wir können annehmen, dass f surjektiv ist, sonst gehen wir zur Abbildung $f' : X \to f(X)$ über.

Sei also $Y = U \dot\cup V$ und U, V offen. Da f stetig ist, sind $U' := f^{-1}(U)$ und $V' := f^{-1}(V)$ auch offen. Da außerdem $X = U' \dot\cup V'$ und X zusammenhängend ist, folgt $U' = \emptyset$ oder $V' = \emptyset$, also $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$. □

Definition 3.5. Sei X ein topologischer Raum.

a) Ein *Weg* in X ist eine stetige Abbildung $\alpha : [0, 1] \to X$. $\alpha(0)$ heißt *Anfangspunkt* und $\alpha(1)$ Endpunkt von α.

b) X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu allen $x, y \in X$ einen Weg α mit Anfangspunkt x und Endpunkt y existiert.

Beispiel 3.6. $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ ist nicht wegzusammenhängend (auch nicht zusammenhängend). Jedes abgeschlossene, offene oder halboffene Intervall ist wegzusammenhängend.

Proposition 3.7. *Ist X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, so ist X zusammenhängend.*

Beweis. Sei $X = U \dot\cup V$. Angenommen $U \neq \emptyset$ und $V \neq \emptyset$. Dann existieren $x \in U$ und $y \in V$. Da X wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg $\alpha : [0, 1] \to X$ mit $\alpha(0) = x$ und $\alpha(1) = y$. Außerdem ist $[0, 1] = \alpha^{-1}(U) \dot\cup \alpha^{-1}(V)$, beide offen und nichtleer, ein Widerspruch zur Tatsache, dass $[0, 1]$ zusammenhängend ist. □

Beispiel 3.8. Der folgende Teilraum von $\mathbf{R}^2$:

$$\left\{\left(t, \sin(\tfrac{1}{t})\right) \in \mathbf{R}^2 : t > 0\right\} \cup \left\{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\right\}$$

ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

Definition 3.9. Ein topologischer Raum X heißt *lokal wegzusammenhängend*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis aus wegzusammenhängenden Mengen besitzt.

Bemerkung 3.10. a) Ein lokal wegzusammenhängender Raum braucht nicht wegzusammenhängend zu sein. Beispiel: $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

b) Ein wegzusammenhängender Raum braucht nicht lokal wegzusammenhängend sein:

$$X = \left\{(0, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\right\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Proposition 3.11. *Sei X ein lokal wegzusammenhängender Raum. Dann ist X wegzusammenhängend genau dann wenn X zusammenhängend ist.*

Beweis. "$\Rightarrow$" Proposition 3.7.
"$\Leftarrow$" Sei $x \in X$ und $U_x := \{y \in X : \exists \text{ Weg von } x \text{ nach } y\} \neq \emptyset$ die *Wegkomponente* von x, dh. U_x ist die größte wegzusammenhängende Teilmenge von X, die x enthält. Klar ist, dass für $y \in U_x$ gilt $U_x = U_y$ und für $y \notin U_x$ $U_y \cap U_x = \emptyset$. Außerdem ist $X = U_x \cup \bigcup_{y \neq x} U_y$.

Da X wegzusammenhängend ist, existiert zu jedem $y \in U_x$ eine offene, wegzusammenhängende Umgebung. Also ist U_x offen, außerdem ist $\bigcup_{y \neq x} U_y$ als Vereinigung offener Mengen auch offen. Da X zusammenhängend ist folgt $\bigcup_{y \neq x} U_y = \emptyset$ und $X = U_x$. Also ist X wegzusammenhängend. □

Bemerkung 3.12. Sind X und Y topologische Räume. Dann sind X und Y genau dann (weg-)zusammenhängend, wenn $X \times Y$ bzw. $X \vee Y$ (weg-)zusammenhängend sind.

Beispiel 3.13. $\mathbf{R} \not\cong \mathbf{R}^n$ für $n \geq 2$.

Beweis. Angenommen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ ist ein Homöomorphismus. Dann ist auch

$$f|_{\mathbf{R} \setminus \{0\}} : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}^n \setminus \{f(0)\}$$

ein Homöomorphismus. Aber $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ ist nicht zusammenhängend, obwohl $\mathbf{R}^n \setminus \{f(0)\}$ zusammenhängend ist. □

4 Kompaktheit

Definition 4.1. Sei X ein topologischer Raum.

a) Eine offene Überdeckung von X ist eine Familie $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ offener Mengen, so dass $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

b) X heißt kompakt, wenn X Hausdorffsch ist und jede offene Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Es existieren also $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$, so dass $X = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$.

Bemerkung 4.2. Seien X und Y Hausdorffräume. Ist $f : X \to Y$ eine Stetige Abbildung und X kompakt, so ist auch $f(X)$ kompakt.

Beweis. Wir können annehmen, dass f surjektiv ist, $f(X) = Y$. Sei $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine offene Überdeckung von Y. Dann ist $\left(f^{-1}(U_\alpha)\right)_{\alpha\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Also existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ so dass

$$X = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_{\alpha_i}).$$

Damit ist dann auch

$$Y = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}.$$

□

Proposition 4.3. *a) Ist X ein kompakter topologischer Raum und $A \subset X$ abgeschlossen, so ist A kompakt.*

b) Sei X ein Hausdorff-Raum. Ist $K \subset X$ kompakt, so ist K abgeschlossen.

Beweis. a) Sei $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine offene Überdeckung von A, dh. die U_α sind offen in der Teilraumtopologie von $A \subset X$. Also existieren offene Mengen V_α, so dass $U_\alpha = V_\alpha \cap A$. Die V_α überdecken A, also ist $(V_\alpha)_{\alpha\in I}$ zusammen mit $X \setminus A$ eine offene Überdeckung von X (hier haben wir benutzt, dass A abgeschlossen ist).

Da X kompakt ist, existieren also endlich viele $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ so dass

$$X = X \setminus A \cup \bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i}$$

Da $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$, ist $A \subset \bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i}$, also $A = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$.

b) Wir zeigen, dass $X \setminus K$ offen ist. Sei dazu $x \in X \setminus K$. Da X Hausdorffsch ist, existieren zu jedem $y \in K$ offene Umgebungen U_y von y und V_y von x so dass $U_y \cap V_y = \emptyset$. Da $y \in U_y$ ist $K = \bigcup_{y\in K} U_y$. Da K kompakt ist, existieren endlich viele $y_1, \dots, y_n$, so dass $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$. Die Menge $V := \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}$ ist als endlicher Schnitt offener Umgebungen von x eine offene Umgebung von x und da $U_y \cap V_y = \emptyset$ folgt $V \cap K = \emptyset$. Daraus folgt, dass $X \setminus K$ offen ist.

□

Proposition 4.4. *Sei X ein kompakter topologischer Raum und Y ein Hausdorffraum. Ist $f : X \to Y$ eine bijektive, stetige Abbildung, so ist f ein Homöomorphismus.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass f abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abbildet.

Sei also $A \subset X$ abgeschlossen. Dann ist wegen Proposition 4.3a, A kompakt. Wegen Bemerkung 4.2 ist $f(A)$ kompakt, daher nach Proposition 4.3b abgeschlossen. □

Definition 4.5. Ist X ein topologischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge in X. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* von (x_n) wenn in jeder Umgebung von x unendlich viele der x_n liegen.

Bemerkung 4.6. Erfüllt X das erste Abzählbarkeitsaxiom, so ist x ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ genau dann, wenn es eine gegen x konvergente Teilfolge gibt.

Proposition 4.7. *Sei X ein Hausdorffraum mit abzählbarer Topologie (das zweite Abzählbarkeitsaxiom gilt). Dann ist X genau dann kompakt, wenn jede Folge $(x_n) \subset X$ einen Häufungspunkt hat.*

Beweis. "$\Rightarrow$" Sei $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge. Angenommen x_n hat keinen Häufungspunkt. Dann existiert zu jedem $y \in X$ eine Umgebung U_y, die nur endlich viele Folgenglieder enthält. Da die U_y ganz X überdecken, und X kompakt ist, existieren endlich viele $y_1, \ldots y_n$, so dass $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$. Da aber $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$unendlich ist, muss eines der U_{y_i} unendlich viele Folgenglieder enthalten. Ein Widerspruch.

"$\Leftarrow$" Sei $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Sei $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Basis der Topologie auf X.

Sei

$$J := \{k \in \mathbf{N} : \exists \alpha_k \in I : B_k \subset U_{\alpha k}\} = \{n_1, n_2, \ldots\}$$

Setze $U_k := U_{\alpha_k}$. Da $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n_k}$ und $B_{n_k} \subset U_{n_k}$ ist auch U_{n_k} eine Überdeckung. Wir haben also gezeigt, dass jeder topologische Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, die Eigenschaft hat, dass jede offene Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt.

Setze $V_n := \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Angenommen $V_n \neq X$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbf{N}$ ein x_n in $X \setminus V_n$. Wegen unserer Annahme an X hat $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ einen Häufungspunkt $x \in X$. Da $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ ist $x \in U_{\bar{n}}$ für ein $\bar{n} \in \mathbf{N}$. Da $x_n \notin V_n \supset V_{\bar{n}}$ für alle $n \geq \bar{n}$ und $U_{\bar{n}}$ eine Umgebung von x ist kann x kein Häufungspunkt sein. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme dass $V_n \neq X$ für alle $n \in \mathbf{N}$, also existiert $n \in \mathbf{N}$ so dass $V_n = X$ also erhalten wir die endliche Teilüberdeckung $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. □

Proposition 4.8 (Spezialfall vom Satz von Tychonov)**.** *Seien für $n \in \mathbf{N}$ die topologischen Räume X_n Hausdorffsch mit abzählbarer Topologie. Dann ist das Produkt $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ kompakt, genau dann wenn alle X_n kompakt sind.*

Beweis. "$\Rightarrow$" Sei X kompakt, dann ist X_n kompakt, da die kanonische Projektion $\pi_n : X \to X_n$ stetig und surjektiv ist (vgl. Bemerkung 4.2).

"$\Leftarrow$" Da alle X_n Hausdorffsch sind, ist auch X Hausdorffsch. Da alle X_n abzählbare Topologie haben, hat auch X abzählbare Topologie. Insbesondere ist X kompakt, wenn jede Folge in X einen Häufungspunkt besitzt.

Sei also $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ eine Folge. Dann ist $(\pi_1(x_k))_{k\in\mathbf{N}}$ eine Folge in X_1. Da X_1 folgenkompakt ist, existiert eine Teilfolge x_k^1 so dass $(\pi_1(x_k^1))_{k\in\mathbf{N}}$ konvergiert.

Induktiv konstruieren wir Teilfolgen $(x_k^{l+1})_{k\in\mathbf{N}}$ von $(x_k^l)_{k\in\mathbf{N}}$ so dass alle $(\pi_n(x_k^l))$ in X_n konvergieren. Setzt man $y_k := x_k^k$, so konvergiert $\pi_n(y_k)$ für alle $n \in \mathbf{N}$ und damit (y_k) in X. Nach Konstruktion ist $(y_k) \subset (x_k)$ also ist X kompakt. □

Bemerkung 4.9. a) Der obige Beweis lässt sich ohne Probleme auch für endliche Produkte anpassen.

b) In der Tat gilt der Satz von Tychonov in der viel allgemeineren Form: Ist I eine *beliebige* Indexmenge und sind $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ Hausdorffräume, so ist $\prod_{\alpha\in I}$ genau dann kompakt, wenn alle X_α kompakt sind.

c) Ist die Indexmenge *endlich* ist dies sehr einfach zu beweisen.

Beispiel 4.10. a) Jedes abgeschlossene Intervall $[a,b] \subset \mathbf{R}$ ist kompakt, da nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß jede Folge in $[a,b]$ einen Häufungspunkt besitzt.

b) Nach Bemerkung 4.9 ist damit auch

$$[a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n] \subset \mathbf{R}^n$$

mit $a_k < b_k$ für $k = 1,\ldots,n$ eine kompakte Teilmenge.

c) $\bar{B}^n$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $[-1,1]^n$ also nach Proposition 4.3a kompakt.

Proposition 4.11. *Eine Teilmenge $K \subset \mathbf{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. "$\Rightarrow$" Ist $K \subset \mathbf{R}^n$ kompakt, so ist K abgeschlossen nach Proposition 4.3b, da $\mathbf{R}^n$ Hausdorffsch ist. Wir betrachten folgende offene Überdeckung von K:

$$K \subset \bigcup_{r\geq 0} \big(B_r(0) \cap K\big).$$

Da K kompakt ist existiert eine endliche Teilüberdeckung, also $r_1,\ldots,r_n$ mit $K \subset \bigcup_{i=1}^n B_{r_i}(0)$. Folglich ist $K \subset B_{\max r_i}(0)$ also beschränkt.

"$\Leftarrow$" Da K beschränkt ist existiert $R > 0$ mit $K \subset [-R,R]^n$. Da K abgeschlossen ist und $[-R,R]^n$ kompakt, ist K nach Proposition 4.3 a kompakt. □

Definition 4.12. a) Ein Hausdorffraum X heißt *lokal kompakt*, wenn jeder Punkt in X eine kompakte Umgebung besitzt.

b) Ein Hausdorffraum mit abzählbarer Topologie heißt *n-dimensionale Mannigfaltigkeit*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung besitzt, die homöomorph zu $\mathbf{R}^n$ ist.

c) Eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit heißt auch *Fläche*.

Bemerkung 4.13. a) Jede Mannigfaltigkeit ist lokal kompakt, da $\mathbf{R}^n$ lokal kompakt ist.

b) Ist $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ differenzierbar und $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ für alle $x \in M := \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : f(x) = 0\}$, so ist M eine Mannigfaltigkeit, wegen des impliziten Funktionensatzes. Denn ist $\frac{\partial f}{\partial x_0}(\bar{x}) \neq 0$ mit $\bar{x} = (\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_n)$, so existiert eine Umgebung U von $\bar{x}$ in $\mathbf{R}^{n+1}$, eine Umgebung V von $\bar{x}' = (\bar{x}_1, \ldots \bar{x}_n)$ in $\mathbf{R}^n$ und eine differenzierbare Abbildung $\phi : V \to \mathbf{R}$, so dass $M \cap U = \{\phi(x') : x' \in V\}$. Die Abbildung $(\phi(x'), x') : M \cap U \to V$ ist dann der gesuchte lokale Homöomorphismus.

c) Die Menge

$$S := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y^2 = x^3\}$$

ist eine topologische 1-Mannigfaltigkeit, da

$$\mathbf{R} \to S : t \mapsto (t^{3/2}, t)$$

ein Homöomorphismus ist.

d) Die folgende Teilmenge des $\mathbf{R}^2$:

$$T := \{x = 0\} \cup \{y = 0\}$$

ist lokal kompakt aber keine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit.

e) Ist X kompakt, so ist X lokal kompakt, da X Umgebung jedes seiner Punkte ist,

Proposition 4.14. *Sei X ein lokal kompakter Raum. Dann existiert ein kompakter Raum $\tilde{X}$, so dass X zu einem Unterraum von $\tilde{X}$ homöomorph ist, und dessen Komplement nur aus einem Punkt besteht. $\tilde{X}$ ist bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wir setzten $\tilde{X} = X + \{\omega\}$ als Menge.

Eindeutigkeit. Da $\tilde{X}$ Hausdorffsch ist, ist $\{\omega\} \subset \tilde{X}$ abgeschlossen, dh. $X = \tilde{X} \setminus \{\omega\}$ ist offen. Also ist $U \subset X$ offen in X genau dann wenn U offen in $\tilde{X}$ ist. Ist $\omega \in U \subset \tilde{X}$ und U offen, so ist $A := \tilde{X} \setminus U \subset X$ abgeschlossen. Da $\tilde{X}$ kompakt ist, ist A kompakt.

Umgekehrt, ist $A \subset X \subset \tilde{X}$ kompakt, so ist A abgeschlossen in $\tilde{X}$ und folglich $\tilde{X} \setminus A$ offen.

Der einzige Kandidat für eine Topologie auf $\tilde{X} = X \dot{\cup} \{\omega\}$ ist also die folgende: $U \subset \tilde{X}$ ist offen genau dann wenn

i) $\omega \notin U$ und $U \subset X$ offen.

ii) $\omega \in U$ und $X \setminus U$ kompakt.

Existenz. Zeige, dass die so definierten offenen Mengen tatsächlich eine kompakte, Hausdorffsche Topologie auf X definieren. □

Bemerkung 4.15. a) War X schon kompakt, so ist $\{\omega\}$ offen , also ist dann X homöomorph zu $X + \{\omega\}$ als topologischer Raum.

b) $\tilde{X}$ heißt *Einpunktkompaktifizierung* von X.

Beispiel 4.16. Die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbf{R}^n$ ist homöomorph zu S^n. Denn ist $\pi : S^n \to \mathbf{R}^n$ die stereographische Projektion, so ist die Fortsetzung $\tilde{\pi} : S^n \to \tilde{\mathbf{R}}^n, N \mapsto \omega$ stetig und bijektiv. S^n ist kompakt und $\tilde{\mathbf{R}}^n$ Hausdorffsch, also ist $\tilde{\pi}$ ein Homöomorphismus.

Definition 4.17. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt *eigentlich*, wenn Urbilder $f^{-1}(K)$ kompakter Mengen $K \subset Y$ kompakt sind.

Bemerkung 4.18. a) Ist X kompakt, so ist jede stetige Abbildung eigentlich.

b) Hat X abzählbare Topologie, so ist $f : X \to Y$ genau dann eigentlich, wenn gilt: Ist $(x_n) \subset X$ eine Folge ohne Häufungspunkt, so hat auch $f(x_n)$ keinen Häufungspunkt.

c) $f : X \to Y$ ist genau dann eigentlich, wenn die Fortsetzung auf die Einpunktkompaktifizierungen $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ mit

$$\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y} : \omega_X \mapsto \omega_Y$$

stetig ist.

Beweis. "$\Rightarrow$" Sei $V \subset \mathcal{U}(\omega_Y)$ offen. Dann ist $\tilde{X} \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(\tilde{Y} \setminus V)$ kompakt, da $\tilde{Y} \setminus V$ kompakt und f eigentlich ist. Also ist $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(\omega_X)$ offen. Folglich ist $\tilde{f}$ stetig.

"$\Leftarrow$" Sei $K \subset Y$ kompakt, und damit $\tilde{Y} \setminus K \in \mathcal{U}(\omega_Y)$ offen. Dann ist $\tilde{f}^{-1}(\tilde{Y} \setminus K) \in \mathcal{U}(\omega_X)$ offen, also $\tilde{X} \setminus \tilde{f}^{-1}(\tilde{Y} \setminus K) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus K)$ offen. Folglich ist $f^{-1}(K)$ kompakt und f eigentlich. $\square$

5 Konstruktion stetiger Funktionen

Definition 5.1. a) Ist X ein topologischer Raum, so nennen wir eine Abbildung $f : X \to \mathbf{R}$ eine *Funktion auf X*.

b) Die Menge der stetigen Funktionen auf X bezeichnen wir mit $C(X)$.

Frage: Gibt es viele stetige Funktionen auf einem gegebenen topologischen Raum?

a) Auf $\mathbf{R}^n$ können wir aus den Koordinatenfunktionen viele neue Funktionen konstruieren.

b) Auf Mannigfaltigkeiten können wir durch lokale Homöomorphismen viele lokal definierten Funktionen konstruieren, die bei geeigneter Wahl stetig durch eine Konstante auf die ganze Mannigfaltigkeit fortgesetzt werden können.

c) In metrischen Räumen können wir die Metrik selbst benutzen und diese in stetige Funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ einsetzen.

d) In allgemeinen topologischen Räumen sind nur noch die konstanten Funktionen sofort als stetig zu erkennen.

Konkretere Frage: Sind $A, B \subset X$ disjunkte abgeschlossene Teilmengen. Existiert dann eine stetige Funktion $f : X \to \mathbf{R}$ mit $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$?

Eine notwendige Bedingung ist ergibt sich aus folgender Beobachtung. Ist $f : X \to \mathbf{R}$ eine solche Funktion, so sind $U = f^{-1}((-\infty, \frac{1}{4}))$ und $V = f^{-1}((\frac{3}{4}, \infty))$ disjunkte offene Mengen mit $A \subset U$ und $B \subset V$. Also können dann A und B durch disjunkte offene Umgebungen getrennt werden.

Definition 5.2. Ein topologischer Raum X heißt T_4-Raum, wenn es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subset X$ disjunkte offene Umgebungen U, V gibt mit $A \subset U$ und $B \subset V$.

Bemerkung 5.3. a) Ist X ein T_4-Raum, in dem alle einpunktigen Mengen abgeschlossen sind, so ist X auch Hausdorffsch.

b) Jeder metrische Raum ist T_4.

c) Ist X ein kompakter Hausdorffraum, so ist X ein T_4-Raum.

Beweis. (Für Aussage c). Seien A, B disjunkte abgeschlossene Mengen. Da X Hausdorffsch ist, existieren für alle $a \in A$ und $b \in B$ disjunkte offene Umgebungen $U_{a,b} \ni a$ und $V_{a,b} \ni b$.

Fixiere $a \in A$. Dann ist $\{V_{a,b}\}_{b \in B}$ zusammen mit $X \setminus B$ eine offene Überdeckung von X. Also existieren $b_1, \ldots b_n$, so dass $B \subset \bigcup_{i=1}^n V_{a,b_i} =: V_a$.

Nach Konstruktion ist $U_a := \bigcap_{i=1}^n U_{a,b_i}$ disjunkt von V_a und als Durchschnitt endlich vieler offener Mengen wieder offen. Wir haben also $\{a\}$ und B durch disjunkte offene Umgebungen U_a und V_a getrennt.

Weiter ist $\{U_a\}_{a \in A}$ zusammen mit $X \setminus A$ eine offene Überdeckung von X. Also existieren endlich viele $a_1, \ldots, a_m$, so dass $A \subset \bigcup_{j=1}^m U_{a_j} =: U$. Setze $V := \bigcap_{j=1}^n V_{a_j}$. Dann ist wie oben U, V offen, disjunkt und $A \subset U$ bzw. $B \subset V$. $\square$

Lemma 5.4 (Lemma von Uryson)**.** *Ist X ein T_4-Raum und $A, B \subset X$ disjunkte, nichtleere und abgeschlossene Teilmengen, so existiert eine stetige Funktion $f : X \to \mathbf{R}$ mit $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$.*

Lemma 5.5. *Ist X ein T_4-Raum, $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge und U eine offene Menge mit $A \subset U$. Dann existiert eine offene Menge V, so dass*

$$A \subset V \subset \bar{V} \subset U$$

Beweis. Da $B := X \setminus U$ abgeschlossen und disjunkt von A ist, existieren nach Definition 5.2 disjunkte offene Umgebungen $U_A \supset A$ und $U_B \supset B$.

Nach Konstruktion ist

$$A \subset U_A \subset X \setminus U_B \subset X \setminus B = U$$

Da $X \setminus U_B$ abgeschlossen ist, und $\bar{U}_A$ die kleinste abgeschlossene Menge ist, die U_A enthält, ist $\bar{U}_A \subset X \setminus B$. Dann ist $V := U_A$ die gesuchte offene Menge mit

$$A \subset V \subset \bar{V} \subset U.$$

$\square$

Beweis (Lemma 5.4). Seien A, B disjunkte, nichtleere Teilmengen von X. Eine zulässige r-Kette sei ein $(r+1)$-Tupel von Mengen

$$\mathcal{A} = (A_0, \dots, A_r)$$

mit

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_r \subset X \setminus B$$

und $\bar{A}_{k-1} \subset A_k^\circ$ für $k = 1, \dots, r$.

Auf einer zulässigen r-Kette definieren wir die Treppenfunktion $g_{\mathcal{A}} : X \to \mathbf{R}$ via

$$g_{\mathcal{A}}(x) := \begin{cases} 0 & x \in A_0 \\ \frac{k}{r} & x \in A_k \setminus A_{k-1} \text{ für } k = 1, \dots, r \\ 1 & x \notin A_r \end{cases}$$

wir setzen $S_k^{\mathcal{A}} := A_{k+1}^\circ \setminus \bar{A}_{k-1}$ für $k = 0, \dots r$ mit $A_{-1} = \emptyset$ und $A_{r+1} = X$. Dann ist $\{S_k^{\mathcal{A}}\}$ eine offene Überdeckung von X. Für alle $x, y \in S_k^{\mathcal{A}}$ ist

$$\big|g_{\mathcal{A}}(x) - g_{\mathcal{A}}(y)\big| \leq \tfrac{1}{r}.$$

Eine Verfeinerung $\mathcal{A}'$ der zulässigen r-Kette ist die zulässige $2r$-Kette

$$\mathcal{A}' = (A_0, A_1', A_1, A_2', A_2, \dots, A_r', A_r)$$

mit

$$A_0 \subset \bar{A}_0 \subset (A_1')^\circ \subset \bar{A}_1' \subset A_1^\circ \subset \dots \subset \bar{A}_r' \subset A_r$$

Nach Lemma 5.5 existiert zu jeder zulässigen Kette eine zulässige Verfeinerung.

Wir starten nun mit $\mathcal{A}_0 := (A, X \setminus B)$ und setzen induktiv $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n'$ für $n \geq 0$. Außerdem setzen wir $g_n := g_{\mathcal{A}_n}$ und $S_k^n := S_k^{\mathcal{A}_n}$ für $k = 0, \dots, 2^n$.

Für alle $x \in X$ ist die Folge $g_n(x)$ monoton fallend und nach unten durch 0 beschränkt, also existiert für jedes $x \in X$ der punktweise Limes $f(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ mit $f(x) \in [0, 1]$. Die Funktion $f : X \to \mathbf{R}$ erfüllt $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$, da die g_n dort jeweils alle 0 oder 1 sind.

Wir müssen noch zeigen, dass f stetig ist. Zunächst ist für alle $x \in X$

$$\big|f(x) - g_n(x)\big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n}.$$

Ist $x, y \in S_k^n$ so ist außerdem

$$\big|g_n(x) - g_n(y)\big| \leq 2^{-n}$$

Also

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - g_n(x)| + |g_n(x) - g_n(y)| + |g_n(y) - f(y)| \leq 2^{2-n}$$

Sei also $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen dann n so groß, dass $2^{2-n} \leq \varepsilon$. Dann ist $x \in S_k^n$ für ein $k = 0, \dots 2^n$ und daher

$$S_k^n \subset f^{-1}\big((f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)\big).$$

S_k^n ist offen, also ist $f^{-1}((f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon))$ eine Umgebung von X und f daher stetig. □

Lemma 5.6 (Tietze Erweiterungslemma). *Ist X ein T_4-Raum, und $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge, so lässt sich jede stetige Abbildung $f : A \to \mathbf{R}$ zu einer stetigen Abbildung $\bar{f} : X \to \mathbf{R}$ fortsetzen.*

Beweis. Schritt 1. Wir zeigen zunächst, dass sich jede stetige Abbildung $f : A \to [-1, 1]$ zu einer stetigen Abbildung $\bar{f} : X \to [-1, 1]$ fortsetzen lässt.

Dazu definieren wir eine Folge von stetigen Funktionen $g_k : X \to [-1, 1]$ wie folgt. Wir setzen $g_0(x) = 0$ für alle $x \in X$.

Sei nun g_n gegeben, so definieren wir

$$\begin{aligned} B_n &:= \left\{x \in A : f(x) - g_n(x) \geq \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^n\right\}, \text{ und} \\ C_n &:= \left\{x \in A : f(x) - g_n(x) \leq -\tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^n\right\}. \end{aligned}$$

Diese Mengen sind abgeschlossen, da $f - g_n$ stetig ist. Nach Lemma 5.4 existiert eine stetige Funktion $v_n : X \to [-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n]$ mit $v_n|_{B_n} \equiv -\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$ und $v_n|_{C_n} \equiv \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$. Wir setzen nun $g_{n+1} = g_n - v_n$. Dann ist

a) $-1 + (\frac{2}{3})^n \leq g_n \leq 1 - (\frac{2}{3})^n$ für alle $x \in A$, da

$$g_{n+1} \geq g_n - \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^n \geq -1 + (\tfrac{2}{3})^n - \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^n \geq -1 + (\tfrac{2}{3})^{n+1}.$$

b) $|f(x) - g_n(x)| \leq (\frac{2}{3})^n$ für alle $x \in A$.

Sei dazu etwa $x \in B_n$ so ist $f(x) - g_n(x) \in [\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n, (\frac{2}{3})^n]$ also existiert ein $r \in [\frac{1}{3}, 1]$, so dass $f(x) - g_n(x) = r(\frac{2}{3})^n$. Dann ist

$$f(x) - g_{n+1}(x) = f(x) - g_n(x) + v_n(x) = (r - \tfrac{1}{3})(\tfrac{2}{3})^n \leq (\tfrac{2}{3})^{n+1}$$

analog verfährt man für $x \in C_n$. Ist $x \in A \setminus (B_n \cup C_n)$ so ist $|f(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$ und

$$|f(x) - g_{n+1}(x)| \leq |f(x) - g_n(x)| + |v_n(x)| \leq \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^n + \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^n \leq (\tfrac{2}{3})^{n+1}.$$

c) $|g_{n+1} - g_n(x)| \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$ für alle $x \in X$, und

d) $|g_n(x) - g_m(x)| \leq (\frac{2}{3})^{\min\{m,n\}}$, da

$$|g_{n+k}(x) - g_n(x)| \leq \sum_{i=0}^{k-1} |g_{n+i+1}(x) - g_{n+i}(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{2}{3}\right)^i \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Der letzte Punkt impliziert, dass die Folge der g_n gleichmäßig gegen die Funktion $\bar{f}(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$, konvergiert dh.

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left\{ |\bar{f}(x) - g_n(x)| : x \in X \right\} = 0$$

Insbesondere ist $\bar{f}$ stetig. Wegen Punkt b) gilt für alle $x \in A$, dass

$$|f(x) - \bar{f}(x)| = |f(x) - \lim_{n\to\infty} g_n(x)| = \lim_{n\to\infty} |f(x) - g_n(x)| = 0$$

also $\bar{f}|_A = f$. außerdem ist wegen a) $\bar{f} \in [-1, 1]$ für alle $x \in X$.

Schritt 2. Ist $f : A \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion, so ist $g : A \to [-1, 1]$ mit $g(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(f(x))$ auch stetig. Schritt 1 impliziert, dass eine stetige Fortsetzung von g auf den ganzen Raum, $\bar{g} : X \to [-1, 1]$, existiert. Die Menge $B := \bar{g}^{-1}(\{-1, 1\})$ ist abgeschlossen in X und disjunkt von A.

Nach Lemma 5.4 existiert eine Funktion $h : X \to [0, 1]$ mit $h|_A \equiv 1$ und $h|_B \equiv 0$. Dann ist

$$\bar{f} : X \to \mathbf{R} : x \mapsto \tan\left(\frac{\pi\{2}{h}(x)\bar{g}(x)\right)$$

die gesuchte Fortsetzung von f. □

Definition 5.7. Ein Hausdorffraum X heißt *parakompakt*, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ von X eine lokal endliche Verfeinerung $(V_\beta)_{\beta\in J}$ gibt. Das heißt

i) $(V_\beta)_{\beta\in J}$ ist eine offene Überdeckung von X,

ii) Für jedes $x \in X$ existiert eine offene Umgebung O_x, so dass die Menge $\{\beta \in J : V_\beta \cap O_x \neq \emptyset\}$ endlich ist.

iii) Zu jedem $\beta \in J$ existiert $\alpha \in I$ mit $V_\beta \subset U_\alpha$.

Bemerkung 5.8. a) Ist X ein lokal kompakter Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, so ist X parakompakt.

b) Damit sind alle Mannigfaltigkeiten parakompakt.

c) Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist X parakompakt.

Beweis. a) Für jedes $x \in X$ sei K_x eine kompakte Umgebung von x. Da X abzählbare Topologie hat und $x \in K_x^\circ$ für alle $x \in X$, existieren abzählbar viele $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, so dass mit $K_n = K_{x_n}$

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_n^\circ.$$

(vgl. der Beweis von Proposition 4.7). Sei nun $(U_\alpha)_\alpha$ eine beliebige Überdeckung. Da K_1 kompakt ist, reichen endlich viele der U_α um K_1 zu überdecken, etwa

$$U_{\alpha_1^1}, \ldots, U_{\alpha_{n_1}^1}.$$

Wir betrachten nun folgende offene Überdeckung von X

$$\{U_{i_k^1} : k = 1, \dots n_1\} \cup \{U_\alpha \setminus K_1 = U_\alpha^1, \text{ für} \alpha \neq \alpha_k^1 k = 1, \dots, n_1\}$$

Diese hat die Eigenschaft, nur endlich viele Mengen K_1° schneiden, außerdem ist sie eine Verfeinerung von $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$. Wir können nun mit K_2 analog verfahren und induktiv eine lokal endliche Verfeinerung konstruieren.

b) Klar wegen a).

c) vgl. [4].

□

Proposition 5.9. *Ist X parakompakt, so ist X auch T_4.*

Beweis. Seien A, B disjunkte abgeschlossene Mengen. Da X Hausdorffsch ist, existieren zu jedem Paar $a \in A$ und $b \in B$ offene disjunkte offene Mengen $U_{a,b} \ni a$ und $V_{a,b} \ni b$.

Fixiere a. Da $(V_{a,b})_{b\in B}$ zusammen mit $X \setminus B$ eine offene Überdeckung von X bildet, existiert eine lokal endliche Verfeinerung $(V'_{a,\beta})_{\beta\in J}$. Sei

$$J' := \{\beta \in J : \exists b \text{ mit} V'_{a,\beta} \subset V_{a,b}\}$$

und definiere $V_a := \bigcup_{\beta\in J'} V'_{a,\beta}$. Dann ist V_a offen und $B \subset V_a$. Da die Überdeckung $(V'_{a,\beta})_{\beta\in J}$ lokal endlich ist, existiert eine offen Umgebung O von a, so dass O nur endlich viele $V'_{a,\beta}$ schneidet, etwa $V'_{a,\beta_1}, \dots, V'_{a,\beta_n}$. Zu jedem β_i existiert b_i mit $V'_{a,\beta_i} \subset V_{a,b_i}$, für $i = 1, \dots, n$.

Setze $U_a := O \cap \bigcap_{i=1}^n U_{a,b_i}$. Dann ist U_a offen, $a \in U_a$ und $U_a \cap V_a = \emptyset$. Wir haben also $\{a\}$ und B durch disjunkte, offene Mengen U_a und V_a getrennt.

Weiter ist $(U_a)_{a\in A}$ zusammen mit $X \setminus A$ eine Überdeckung. Also existiert eine lokal endliche Verfeinerung $\{U'_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Sei wieder

$$I' := \{\alpha \in I : \exists a \in A \text{ mit } U'_\alpha \subset U_a\}$$

Setze $U := \bigcup_{\alpha\in I'} U'_\alpha$. Zu $b \in B$ existiert nun eine Umgebung O_b so dass O_b nur endlich viele der U'_α schneidet, etwa $U'_{\alpha_1^b}, \dots, U'_{\alpha_{m_b}^b}$. Sei a_i^b so dass $U'_{\alpha_i^b} \subset U_{a_i^b}$ mit $i = 1, \dots, m_b$.

Setze $V_b := O_b \cap \bigcap_{j=1}^{m_b} V_{a_j^b}$. Dann ist V_b offen und disjunkt von U und daher ist auch

$$V := \bigcup_{b\in B} V_b$$

offen und disjunkt von U. Außerdem ist $A \subset U$ und $B \subset V$. Es folgt, dass X ein T_4-Raum ist. □

Definition 5.10. Sei X ein topologischer Raum.

a) Eine Familie $(f_\beta)_{\beta\in J}$ stetiger Funktionen $f_\beta : X \to [0,1]$ heißt *Partition der Eins*, wenn $(f_\beta)_{\beta\in J}$ lokal endlich ist, dh. für alle $x \in X$ existiert eine Umgebung U von x, so dass $f_\beta|_U \not\equiv 0$ nur für endlich viele $\beta \in J$. Außerdem gelte

$$\sum_{\beta\in J} f_\beta(x) = 1 \quad \text{für alle} \quad x \in X.$$

b) Ist $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Überdeckung und $(f_\beta)_{\beta\in J}$ eine Partition der Eins, so nennen wir $(f_\beta)_{\beta\in J}$ der Überdeckung (U_α) *untergeordnet*, wenn zu jedem $\beta \in J$ ein $\alpha \in I$ existiert, so dass

$$\operatorname{supp} f_\beta := \overline{\{x \in X : f_\beta(x) \neq 0\}} \subset U_\alpha$$

Satz 5.11. *Ist X ein parakompakter Raum, so existiert zu jeder offenen Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine untergeordnete Partition der Eins $(f_\beta)_{\beta\in J}$.*

Beweis. Sei $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine offene Überdeckung. Da X parakompakt ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass (U_α) lokal endlich ist.

Schritt 1. Zeige: Es existiert eine offene Überdeckung $(V_\alpha)_{\alpha\in I}$ mit $\bar V_\alpha \subset U_\alpha$ für alle $\alpha \in I$.

Sei dazu $x \in X$. Da X Hausdorffsch ist, existiert eine offene Menge O_x, so dass $x \in O_x \subset \bar O_x \subset U_\alpha$ für ein $\alpha \in I$ mit $x \in U_\alpha$ (vgl. Hilfssatz 5.5 mit $A = \{x\}$ und $U = U_\alpha$). Sei $(O'_\beta)_{\beta\in J}$ eine lokal endliche Verfeinerung von $(O_x)_{x\in X}$. Setze

$$J'_\alpha := \{\beta \in J : \bar O'_\beta \subset U_\alpha\}$$

und $V_\alpha := \bigcup_{\beta\in J'_\alpha} O'_\beta$. Dann ist $(V_\alpha)_{\alpha\in I}$ wieder eine offene Überdeckung von X, da alle O_x in einem V_α enthalten sind. Außerdem ist $\bar V_\alpha \subset U_\alpha$, denn für $x \in \bar V_\alpha$ existiert zu jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $\beta \in J'_\alpha$ mit $U \cap O'_\beta \neq \emptyset$. Wegen der lokalen Endlichkeit von $(O'_\beta)_{\beta\in J}$ existiert eine Umgebung U von x, so dass U nur endlich viele der O'_β trifft, diese seien etwa $O'_{\beta_1}, \dots, O'_{\beta_n}$. Dann ist aber

$$x \in \overline{\bigcup_{i=1}^n O'_{\beta_i}}$$

und damit $x \in \bigcup_{i=1}^n \bar O'_{\beta_i} \subset U_\alpha$. Dies war die Behauptung von Schritt 1.

Schritt 2 Sei $(V_\alpha)_{\alpha\in I}$ die oben konstruierte Überdeckung mit $\bar V_\alpha \subset U_\alpha$ für alle $\alpha \in I$. Durch eine zweite Anwendung von Schritt 1 folgt die Existenz einer Überdeckung $(W_\alpha)_{\alpha\in I}$ mit

$$W_\alpha \subset \bar W_\alpha \subset V_\alpha \subset \bar V_\alpha \subset U_\alpha.$$

Nach dem Lemma von Uryson 5.4 existiert eine stetige Funktion

$$f'_\alpha : X \to [0,1] \quad \text{mit} \quad f'_\alpha|_{\bar W_\alpha} \equiv 1 \quad \text{und} \quad f'_\alpha|_{X\setminus V_\alpha} \equiv 0.$$

dann ist $(f'_\alpha)_{\alpha\in I}$ lokal endlich und $\operatorname{supp} f'_\alpha \subset \bar V_\alpha \subset U_\alpha$.

Außerdem ist $\sum_{\alpha\in I} f'_\alpha(x) \neq 0$ für alle $x \in X$. Wir setzen dann

$$f_\alpha(x) := \frac{f'_\alpha(x)}{\sum_{\alpha\in I} f'_\alpha(x)}.$$

Dies ist eine stetige Funktion mit den gesuchten Eigenschaften. □

II. Homotopie

Ziel der Vorlesung ist es, Invarianten topologischer Räume X zu betrachten, etwa die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ oder die Homologiegruppen $H_i(X)$. Diese sind aber nicht nur invariant unter Homöomorphismen, sondern sogar unter Homotopieäquivalenzen. Die Invarianten für X und Y sind also schon dann isomorph, wenn X in Y deformierbar ist, wie etwa $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \simeq S^1$.

Die Fundamentalgruppe ist die erste Homotopiegruppe und definiert als die Menge der geschlossenen Wege $\alpha : S^1 \to X$ mit festem Basispunkt $x_0 \in X$, dh. $\alpha(1) = x_0$ modulo Homotopie, also modulo stetiger Deformationen.

Dieser Abschnitt dient nun der Formalisierung des Begriffs der stetigen Deformation in Form der Homotopie.

6 Homotope Abbildungen

Definition 6.1. Seien X und Y topologische Räume.

a) Eine *Homotopie* ist eine stetige Abbildung $H : X \times [0,1] \to Y$. Manchmal schreiben wir auch $H_t : X \to Y$ und meinen $H(\cdot, t) : X \to Y$ für $t \in [0,1]$.

b) Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen *homotop*, wenn es eine Homotopie $H : X \times [0,1] \to Y$ gibt, mit $H_0 = f$ und $H_1 = g$. Wir schreiben dann $H : f \simeq g$ oder $f \simeq_H g$

Bemerkung 6.2. Man stelle sich $t \in [0,1]$ als Zeitparameter vor. Dann wird für jedes $x \in X$ der Punkt $f(x) \in Y$ entlang des Weges $t \mapsto H_t(x)$ in $g(x)$ überführt.

Bemerkung 6.3. Die Homotopierelation $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation auf $C(X,Y)$, dem Raum der stetigen Abbildungen von X nach Y.

Beweis. a) $f \simeq f$ via $H_t = f$ für $t \in [0,1]$.

b) Ist $H : f \simeq g$, so ist $g \simeq f$ vermöge

$$G : X \times [0,1] \to Y : G(x,t) = H(x, 1-t).$$

c) Sei $f \simeq_F g$ und $g \simeq_G h$. Setze

$$H : X \times [0,1] \to Y : (x,t) \mapsto \begin{cases} F(x,2t) & t \in [0, 1\frac{1}{2}] \\ G(x, 2t-1) & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Dann ist $H : f \simeq h$.

□

Bemerkung 6.4. a) Wir bezeichnen die Homotopieklasse einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ mit $[f]$.

b) Der Raum aller Homotopieklassen von Abbildungen zwischen X und Y wird mit

$$[X, Y] := C(X, Y)/ \simeq$$

bezeichnet.

Bemerkung 6.5. Diese Äquivalenzrelation ist mit der Komposition von Abbildungen verträglich. Seien $f, f' : X \to Y$ stetig und $g, g' : Y \to Z$ stetig mit $f \simeq f'$ und $g \simeq g'$. Dann ist $g \circ f \simeq g' \circ f'$.

Beweis. Sei $F : f \simeq f'$ und $G : g \simeq g'$. Setze

$$H_1 : X \times [0,1] \to Z, \quad H_1 = g' \circ F \quad \Rightarrow \quad H_1 : g' \circ f \simeq g' \circ f'$$

und

$$H_2 : X \times I \to Z, \quad H_2(x,t) = G(f(x), t) \quad \Rightarrow \quad H_2 : g \circ f \simeq g' \circ f$$

Daraus folgt $g \circ f \simeq g' \circ f \simeq g' \circ f'$. □

Bemerkung 6.6. Für $f \in C(X, Y)$ und $g \in C(Y, Z)$ setzt man

$$[g][f] := [g \circ f]$$

Dies definiert ein assoziatives Produkt auf $[X, X]$.

Definition 6.7. a) Eine Abbildung $c : X \to Y$ heißt *konstant*, wenn $c(X) = \{y\} \subset Y$ einpunktig ist. Die Abbildung, die den konstanten Wert $y \in Y$ annimmt,nennen wir c_y.

b) Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *nullhomotop*, wenn f homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

c) Ein Raum X heißt *zusammenziehbar*, wenn $\mathrm{id} : X \to X$ nullhomotop ist.

Bemerkung 6.8. a) Ist X zusammenziehbar, so ist X auch wegzusammenhängend.

b) Ist Y wegzusammenhängend, so sind zwei konstante Abbildungen $c_1, c_2 : X \to Y$ homotop. (ist $\alpha(t)$ ein Weg von $c_1(X)$ nach $c_2(X)$ so ist $H(t, x) = \alpha(t)$ die gesuchte Homotopie.

c) Die Klasse der konstanten Abbildungen wird dann mit “0” bezeichnet: $0 = [c_y]$. Sind X, Y, Z wegzusammenhängend, $f : X \to Y$ stetig und $c_x : W \to X$, $c_z : Y \to Z$ konstante Abbildungen, so gilt

$$[f] \cdot 0 = [f][c_x] = [f \circ c_x] = [c_{f(x)}] = 0$$
$$0 \cdot [f] = [c_z][f] = [c_z \circ f] = [c_z] = 0$$

Beispiel 6.9. a) $\mathbf{R}^n$ ist zusammenziehbar vermöge $H(x,t) = (1-t)x$, denn $H : \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n} \simeq c_0$. Allgemeiner sind alle sternförmigen Teilmengen von $\mathbf{R}^n$ zusammenziehbar.

M ist sternförmig, wenn ein $x \in M$ existiert, so dass für alle $y \in M$ die Verbindungslinie $\overline{xy}$ ganz in M liegt.

b) Ist X zusammenziehbar und Y wegzusammenhängend, so ist $[X,Y] = 0$, also einpunktig, denn

$$[f] = [f \circ \mathrm{id}_X] = [f][\mathrm{id}_X] = [f] \cdot 0 = 0$$

Ebenso ist für zusammenziehbares Y:

$$[f] = [\mathrm{id}_Y \circ f] = [id_Y][f] = 0 \cdot [f] = 0$$

c) Ist $\{p\}$ der einpunktige Raum, so ist $\#[\{p\}, X]$ gleich der Anzahl der Wegekomponenten von X.

Definition 6.10. Seien X, Y topologische Räume und $A \subset X$ ein Teilraum. Seien $f, g : X \to Y$ Abbildungen mit $f(a) = g(a)$ für alle $a \in A$.

Dann heißen f, g *homotop relativ* A oder $f \simeq g$ rel A, wenn es eine Homotopie $H : X \times [0,1] \to Y$ gibt mit $H_0 = f$, $H_1 = g$ und $H(a,t) = f(a) = g(a)$ für alle $a \in A$. Das heißt die Homotopie verändert die Abbildungen in A nicht.

Die Relation *homotop relativ* A ist auch eine Äquivalenzrelation.

Frage: Oben haben wir viele Beispiele für nullhomotope Abbildungen gesehen. Gibt es auch nicht-nullhomotope Abbildungen? Gibt es nichttriviale $[X,Y]$, also solche, die mehr als die uns schon bekannten Konzepte ausdrücken? **Idee:** Suche einen nicht zusammenziehbaren aber wegzusammenhängenden Raum X und betrachte id_X. Ein guter Kandidat ist S^1.

Suche dann eine algebraische Größe für $f : S^1 \to S^1$ die invariant unter Homotopie ist und die für id_{S^1} und c_1 verschieden ist. Dies wird die *Windungszahl* sein.

Lemma 6.11. *Sei* $\mathrm{ex} : \mathbf{R} \to S^1 : t \mapsto \exp(2\pi i t)$. *Für jede stetige Abbildung* $f : S^1 \to S^1$ *existiert genau eine stetige Abbildung* $\phi : [0,1] \to \mathbf{R}$ *mit* $\phi(0) = 0$ *und* $f(\mathrm{ex}(t)) = f(1)\,\mathrm{ex}(\phi(t))$, *dh.* $f \circ \mathrm{ex} = f(1)(\mathrm{ex} \circ \phi)$. *Hier ist jeweils die Multiplikation komplexer Zahlen gemeint und* S^1 *wird als* $\{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ *aufgefasst.*

Beweis. Wir benutzen den Hauptzweig des Logarithmus

$$\log : \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_- \to \mathbf{C}$$

Ist $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ mit $z = r\exp(i\omega)$ für $\omega \in (-\pi, \pi)$, so ist $\log z = \ln r + i\omega$. Dann gilt $\exp \circ \log = \mathrm{id}_{\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-}$. Außerdem gilt $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$.

Eindeutigkeit: Seien $\phi, \psi : [0,1] \to \mathbf{R}$ zwei Abbildungen $f(1)(\mathrm{ex} \circ \phi) = f(1)(\mathrm{ex} \circ \psi)$ und $\phi(0) = \psi(0) = 0$. Dann ist

$$\exp\left(2\pi i(\phi(t) - \psi(t))\right) = \frac{\mathrm{ex} \circ \phi(t)}{\mathrm{ex} \circ \psi(t)} = 1.$$

Das heißt $\phi(t) - \psi(t) \in \mathbf{Z}$ für alle $t \in [0,1]$. Da $\phi - \psi$ stetig ist, ist $\phi - \psi$ konstant also $\phi(t) - \psi(t) = \phi(0) - \psi(0) = 0$.

Existenz: Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $f(1) = 1$, oder wir gehen zu $g(z) = f(1)^{-1} f(z)$ über. Da f stetig ist und $[0,1]$ kompakt, existiert eine Unterteilung

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1,$$

so dass für $h = f \circ \mathrm{ex}$ gilt, dass

$$|h(t) - h(t_j)| < 2 \quad \text{für} \quad t \in [t_j, t_{j+1}] \quad j = 0, \ldots, k.$$

Da $h(t), h(t_j) \in S^1$ folgt damit $h(t) \neq -h(t_j)$ für $t \in [t_j, t_{j+1}]$. Dann ist $\log(h(t)/h(t_j))$ definiert.

Setze $\phi : [0,1] \to \mathbf{R}$ für $t \in [t_j, t_{j+1}]$ wie folgt:

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\log\left(\frac{h(t_1)}{h(t_0)}\right) + \log\left(\frac{h(t_2)}{h(t_1)}\right) + \ldots + \log\left(\frac{h(t_j)}{h(t_{j-1})}\right) + \log\left(\frac{h(t)}{h(t_j)}\right)\right).$$

Dann ist ϕ stetig, da log stetig ist. Es ist $\phi(0) = 0$ und

$$\begin{aligned}
\mathrm{ex} \circ \phi(t) &= \exp\left(\log\left(\frac{h(t_1)}{h(t_0)}\right) + \ldots + \log\left(\frac{h(t)}{h(t_j)}\right)\right) \\
&= \exp\left(\log\left(\frac{h(t_1)}{h(t_0)}\right)\right) \cdots \left(\log\left(\frac{h(t)}{h(t_j)}\right)\right) \\
&= \frac{h(t_1)}{h(t_0)} \cdots \frac{h(t)}{h(t_j)} \\
&= \frac{h(t)}{h(t_0)} = h(t) = f \circ \mathrm{ex}(t).
\end{aligned}$$

□

Definition 6.12. Ist $f : S^1 \to S^1$ stetig und $\phi : [0,1] \to \mathbf{R}$ die eindeutig bestimmte stetige Abbildung mit $f \circ \mathrm{ex} = f(1)\,\mathrm{ex} \circ \phi$, so nennen wir

$$\deg(f) := \phi(1)$$

den *Abbildungsgrad* von f.

Bemerkung 6.13. a) Wegen $\mathrm{ex}(\phi(1)) = f(1)^{-1} f \circ \mathrm{ex}(1) = f(1)^{-1} f(1) = 1$ ist $\phi(1) \in \mathbf{Z}$. Der Abbildungsgrad beschreibt die Windungszahl von f um $p = 0$.

b) Ist $\alpha : S^1 \to \mathbf{R}^2$ ein geschlossener Weg, so können wir die Windungszahl von α um einen Punkt $p \in \mathbf{R}^2 \setminus \alpha(S^1)$ mittels

$$n(\alpha, p) := \deg f_{\alpha,p}$$

definieren, wobei

$$f_{\alpha,p} : S^1 \to S^1 : z \mapsto \frac{\alpha(z) - p}{|\alpha(z) - p|}.$$

Beispiel 6.14. a) Die konstante Abbildung $f : S^1 \to S^1 : z \mapsto 1$ hat Abbildungsgrad 0, denn $f \circ \mathrm{ex} = f(1)\,\mathrm{ex} \circ \phi$ mit $\phi(t) = 0$ für alle $t \in [0,1]$, also insbesondere $\phi(1) = 0$.

b) Die Identität $f : S^1 \to S^1 : z \mapsto z$ hat Abbildungsgrad $\deg f = 1$. Denn $f \circ \mathrm{ex} = f(1)\,\mathrm{ex} \circ \phi$ mit $\phi(t) = t$. Also $\deg(f) = \phi(1) = 1$.

c) Die Abbildung $f : S^1 \to S^1 : z \mapsto z^n$, mit $n \in \mathbf{Z}$ hat den Abbildungsgrad $\deg f = n$, denn $f \circ \mathrm{ex} = f(1)\,\mathrm{ex} \circ \phi$ mit $\phi(t) = nt$.

Satz 6.15. *Sind $f_0, f_1 : S^1 \to S^1$ homotop, so ist* $\deg(f_0) = \deg(f_1)$.

Beweis. Sei (f_s) eine Homotopie zwischen f_0 und f_1. Dann können wir auch $f_s(1) = 1$ annehmen, sonst gehe zu $g_s(t) = f_s(1)^{-1} f_s(t)$ über.

Setze $h_s := f_s \circ \mathrm{ex} : [0,1] \to S^1$. Nun liften wir alle h_s wie oben zu $\phi_s : [0,1] \to \mathbf{R}$ mit $\phi_s(0) = 0$ und $h_s = \mathrm{ex} \circ \phi_s$. Da die Abbildung $(s,t) \mapsto h_s(t)$ gleichmäßig stetig ist, existiert eine Unterteilung

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$$

so, dass

$$|h_s(t) - h_s(t_j)| < 2 \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad \forall s \in [0,1].$$

Setze für $t \in [t_j, t_{j+1}]$

$$\phi_s(t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\log\left(\frac{h_s(t_1)}{h_s(t_0)}\right) + \ldots + \log\left(\frac{h_s(t)}{h_s(t_j)}\right)\right).$$

Daraus folgt $\phi_s(0) = 0$, $\mathrm{ex} \circ \phi_s = h_s$ und $\phi_s(t)$ ist stetig in s und t. Damit ist auch $s \mapsto \phi_s(1) = \deg(f_s) \in \mathbf{Z}$ stetig in s, und damit konstant. Also ist $\deg(f_0) = \phi_0(1) = \phi_1(1) = \deg(f_1)$. □

Korollar 6.16. *S^1 ist nicht zusammenziehbar.*

Beweis. $\deg \mathrm{id}_{S^1} = 1 \neq 0 = \deg(c_1)$. Also $\mathrm{id}_{S^1} \not\simeq c_1$. □

Korollar 6.17 (Retraktionssatz)**.** *Es gibt keine stetige Abbildung $r : \bar{B}^2 \to S^1$ mit $r(z) = z$ für alle $z \in S^1 \subset \bar{B}^2$.*

Beweis. Angenommen $r : \bar{B}^2 \to S^1$ ist stetig mit $r|_{S^1} = \mathrm{id}_{S^1}$. Dann wäre

$$H : S^1 \times [0,1] \to S^1 : (z,t) \mapsto r(tz)$$

eine Homotopie zwischen $h_0 = c_{r(0)}$ und id_{S^1}. Ein Widerspruch. □

Korollar 6.18 (Browerscher Fixpunktsatz)**.** *Jede stetige Abbildung $f : \bar{B}^2 \to \bar{B}^2$ besitzt einen Fixpunkt, dh. es existiert $x \in \bar{B}^2$ mit $f(x) = x$.*

Beweis. Angenommen $f : \bar{B}^2 \to \bar{B}^2$ hat keinen Fixpunkt. Dann gilt für jeden Punkt $x \in \bar{B}^2$, dass $f(x) \neq x$. Wir betrachten den Strahl

$$L_x := \{f(x) + t(x - f(x))\}$$

und setzen $r : \bar{B}^2 \to S^1 : x \mapsto L_x \cap S^1$. Dann ist r stetig mit $r|_{S^1} = \mathrm{id}_{S^1}$. Ein Widerspruch. □

Satz 6.19 (Borsuk-Ulam)**.** *Ist $f : S^2 \to \mathbf{R}^2$ stetig, so existiert ein $x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$. Insbesondere ist S^2 nicht homöomorph zu einem Teilraum von R^2.*

Beweis. Angenommen $f : S^2 \to \mathbf{R}^2$ ist stetig und $f(x) \neq f(-x)$ für alle $x \in S^2$. Setze

$$\tilde{f} : S^2 \to S^1 : x \mapsto \tilde{f}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$$

und $g : S^1 \to S^1$ mit $g = \tilde{f}|_{S^1}$.

Dann ist g nullhomotop, denn

$$G : S^1 \times [0,1] \to S^1 : (z,t) \mapsto \tilde{f}(tz, \sqrt{1-t^2})$$

ist eine Homotopie zwischen $c_{\tilde{f}(0,1)}$ und g.

Andererseits ist $-g(z) = g(-z)$ für alle $z \in S^1$. Sei $\phi : [0,1] \to \mathbf{R}$ stetig mit $g \circ \mathrm{ex} = g(1)\,\mathrm{ex} \circ \phi$. Es ist

$$\begin{aligned} g(1)\,\mathrm{ex} \circ \phi(t + \tfrac{1}{2}) &= g \circ \mathrm{ex}(t + \tfrac{1}{2}) = g(\mathrm{ex}(t)\,\mathrm{ex}(\tfrac{1}{2})) = g(-\mathrm{ex}(t)) \\ &= -g(\mathrm{ex}(t)) = -g(1)\,\mathrm{ex} \circ \phi(t) = g(1)\,\mathrm{ex}(\phi(t))\,\mathrm{ex}(\tfrac{1}{2}) = g(1)\,\mathrm{ex}(\phi(t) + \tfrac{1}{2}) \end{aligned}$$

Also gilt, dass $\phi(t + \frac{1}{2}) - \phi(t) - \frac{1}{2} = k \in \mathbf{Z}$ unabhängig von t ist. Insbesondere ist $\phi(\frac{1}{2}) = \phi(0) + \frac{1}{2} + k = k + \frac{1}{2}$. Damit ist

$$\deg g = \phi(1) = k + \phi(\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2} = 2k + 1 \neq 0$$

□

Korollar 6.20. *Ist S^2 die Vereinigung dreier abgeschlossener Mengen A_1, A_2, A_3, dann enthält mindestens eine dieser drei Mengen ein Paar von Antipodenpunkten $\{\pm x\}$.*

Beweis. Sei $d_i : S^2 \to \mathbf{R}$ die Abstandsfunktion von A_i, dh. $d_i(x) = \inf_{a \in A_i} d(a,x)$ für $x \in S^2$ und $i = 1,2$. Dies sind stetige Funktionen. Mit dem Satz von Borsuk-Ulam, angewandt auf die Abbildung

$$S^2 \to \mathbf{R}^2 : x \mapsto (d_1(x), d_2(x))$$

folgt, dass ein $x \in S^2$ existiert mit $(d_1(x), d_2(x)) = (d_1(-x), d_2(-x))$. Ist eines der $d_i(x) = 0$, $i = 1,2$, so ist $\{x, -x\} \subset A_i$. Andernfalls ist $\{\pm x\} \subset A_3$. □

Satz 6.21. *Sind $f_0, f_1 : S^1 \to S^1$ zwei stetige Abbildungen, so gilt $f_0 \simeq f_1$ genau dann wenn $\deg(f_0) = \deg(f_1)$.*

Beweis. "⇒" Satz 6.15.

"⇐" Ohne Einschränkung sei $f_0(1) = f_1(1) = 1$. Sei $\deg(f_0) = \deg(f_1)$ und seien $\phi_0, \phi_1 : [0,1] \to \mathbf{R}$ die Abbildungen mit

$$f_i \circ \mathrm{ex} = \mathrm{ex} \circ \phi_i \quad \text{und} \quad \phi_i(0) = 0 \quad i = 0,1$$

Da $\deg(f_0) = \deg(f_1)$ folgt $\phi_0(1) = \phi_1(1)$. Setze

$$\phi_s : [0,1] \to \mathbf{R} : (s,t) \mapsto \phi_s(t) = (1-s)\phi_0(t) + s\phi_1(t)$$

Dann ist $\phi_s(1) = \phi_0(1) = \phi_1(1) \in \mathbf{Z}$ und folglich $\operatorname{ex} \circ \phi_s(1) = 1 = \operatorname{ex} \circ \phi_s(0)$. Die Abbildung ϕ_s ist also mit der Identifikation der Endpunkte von $[0,1]$ zu S^1 verträglich. Nach Satz 2.14 existiert eine stetige Abbildung

$$H : S^1 \times [0,1] \to S^1$$

so dass $H(\operatorname{ex}(t), s) = \operatorname{ex} \circ \phi_s(t)$. Dann ist H die gesuchte Homotopie.

$$\begin{tikzcd}
{[0,1] \times [0,1]} \arrow[r, "\phi_s"] \arrow[d, "\operatorname{ex} \times \operatorname{id}"] \arrow[dr, "\operatorname{ex} \circ \phi_s"] & \mathbf{R} \arrow[d, "\operatorname{ex}"] \\
S^1 \times [0,1] \arrow[r, "H"] & S^1
\end{tikzcd}$$

□

Bemerkung 6.22. Wir haben gesehen, dass $\deg : [S^1, S^1] \to \mathbf{Z}$ eine bijektive Abbildung ist, dh. die Mengen $[S^1, S^1]$ und $\mathbf{Z}$ sind gleich. In diesem Fall ist $(\mathbf{Z}, +)$ aber auch noch eine additive Gruppe. Mit Hilfe von deg lässt sich dann auch auf $[S^1, S^1]$ eine Gruppenstruktur definieren. Es stellt sich dann die Frage, ob dieses Produkt eine geometrische Bedeutung hat.

Definition 6.23. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge.

a) A heißt *Retrakt* von X, wenn es eine stetige Abbildung $r : X \to A$ gibt, so dass $r|_A = \operatorname{id}_A$. Dann heißt r *Retraktion*.

b) A heißt *Deformationsretrakt*, wenn es eine Retraktion $r : X \to A$ gibt, so dass mit der Inklusion $i_A : A \to X$ gilt, dass $i_A \circ r \simeq \operatorname{id}_X$.

Bemerkung 6.24. a) Ein Retrakt braucht kein Deformationsretrakt zu sein. Zum Beispiel ist die konstante Abbildung $c_x : X \to \{x\}$ eine Retraktion, aber $\{x\}$ ist nur dann Deformationsretrakt, wenn X auf $\{x\}$ zusammenziehbar ist.

b) Eine Retraktion $r : X \to A$ ist links-Inverses für die Inklusion $i_A : A \to X$, dh. $r \circ i_A = \operatorname{id}_A$.

Für ein Deformationsretrakt gilt, außerdem, dass r auch rechts-Inverses ist, wenn man zu Homotopieklassen von Abbildungen übergeht

$$[i_A][r] = [i \circ r] = [\operatorname{id}_X]$$

Beispiel 6.25. $S^1 \subset \mathbf{R}^2 \backslash \{0\}$ ist Deformationsretrakt vermöge $r(x) = x/|x|$ und $H(x,t) = (1-t)x + tx/|x|$.

Proposition 6.26. *Sei $A \subset X$ abgeschlossen und $f : A \to Y$ stetig. Dann existiert genau dann eine Fortsetzung $\bar{f} : X \to Y$ mit $\bar{f}|_A = f$, wenn Y Retrakt von $X \cup_f Y$ ist.*

Beweis. "⇒" Sei $\pi : X + Y \to X \cup_f Y$ die kanonische Projektion. Ist $\bar{f} : X \to Y$ eine Fortsetzung von f, so ist $(\bar{f} + \mathrm{id}_Y) : X + Y \to Y$ eine stetige Abbildung, die mit der Relation $a \sim f(a)$ verträglich ist. Also induziert $(\bar{f} + \mathrm{id}_Y)$ eine Retraktion

"⇐" Ist $r : X \cup_f Y \to Y$ eine Retraktion, so ist $\bar{f} = r \circ (\pi|_X)$ die gesuchte Fortsetzung. □

Definition 6.27. Ist $A \subset X$ abgeschlossen, so sagen wir, dass (X, A) die *allgemeine Homotopieerweiterungseigenschaft (AHE)* hat, falls zu jedem topologischen Raum Y, zu jeder Homotopie $H_t : A \to Y$, und zu jeder stetigen Abbildung $f : X \to Y$ mit $f|_A = H_0$ eine Homotopie $\bar{H}_t$ existiert mit $\bar{H}_t|_A = H_t$ und $\bar{H}_0 = f$.

Diese Homotopie $\bar{H}$ ist also insbesondere eine Fortsetzung der Abbildung

$$f \cup H : X \times \{0\} \cup A \times [0,1] \to Y$$

auf den Raum $X \times [0,1]$.

Satz 6.28. *Das Paar (X, A) hat die AHE genau dann wenn $X \times \{0\} \cup A \times [0,1]$ Retrakt von $X \times [0,1]$ ist.*

Beweis. "⇒" Hat (X, A) die AHE. Betrachte die Daten

$$H_t : A \to X \times \{0\} \cup A \times [0,1] : a \mapsto (a, t),$$

mit $f : X \to X \times \{0\} \cup A \times [0,1] : x \mapsto (x, 0)$. Dann existiert wegen der AHE eine Homotopie

$$\bar{H}_t : X \times [0,1] \to X \times \{0\} \cup A \times [0,1],$$

mit $\bar{H}_t|_{X\times\{0\}\cup A\times[0,1]} = f \cup H_t = \mathrm{id}_{X\times\{0\}\cup A\times[0,1]}$. Dies ist die gesuchte Retraktion.

"⇐" Sind Y, $f : X \to Y$ und $H : A \times [0,1] \to Y$ gegeben mit $f|_A = H_0$, so ist die Abbildung $g := f \cup H : X \times \{0\} \cup A \times [0,1] \to Y$ stetig. Ist außerdem $r : X \times [0,1] \to X \times \{0\} \cup A \times [0,1]$ eine Retraktion, so ist $g \circ r : X \times [0,1] \to Y$ die gesuchte Fortsetzung. □

Beispiel 6.29. a) $(\bar{B}^n, S^{n-1})$ hat die AHE, da $\bar{B}^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0,1]$ Retrakt von $\bar{B}^n \times [0,1]$ ist.

b) Hat (X, A) die AHE und ist $f : A \to Y$ eine stetige Abbildung, so hat $(X \cup_f Y, A)$ die AHE.

c) Hat (X, A) die AHE, so hat $(X \times Z, A \times Z)$ die AHE.

Bemerkung 6.30. Das Paar (X, A) habe die AHE.

a) Sind $f, g : A \to Y$ stetige Abbildungen mit $f \simeq g$ und f ist auf X fortsetzbar, so ist auch g auf X fortsetzbar.

b) Ist $\bar{f} : X \to Y$ stetig und $f|_A$ nullhomotop, so ist $\bar{f}$ homotop zu einer Abbildung, die auf A konstant ist.

Definition 6.31. a) Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt *Homotopieäquivalenz*, wenn es eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ gibt mit $[g \circ f] = [\mathrm{id}_X]$ und $[f \circ g] = [\mathrm{id}_Y]$. g heißt *Homotopieinverses* von f. Wir schreiben $f : X \simeq Y$.

b) Existiert eine Homotopieäquivalenz $f : X \to Y$, so sagen wir, dass X und Y den gleichen *Homotopietyp* haben.

Bemerkung 6.32. a) Ist $A \subset X$ Deformationsretrakt, so ist $i_A : A \simeq X$.

b) Hat (X, A) die AHE, so ist $i : A \simeq X$, genau dann wenn $A \subset X$ ein Deformationsretrakt ist.

Beweis. a) Klar.

b) Hat (X, A) die AHE und ist $i : A \simeq X$. Sei dann $f : X \to A$ das Homotopieinverse von i. Nun ist f eine Fortsetzung von $f \circ i : A \to A$ auf X und $f \circ i \simeq \mathrm{id}_A$. Da (X, A) die AHE hat, ist id_A auf X zu $r : X \to A$ fortsetzbar (vgl. Bemerkung 6.30). Also ist A Retrakt von X. Sei $H_t : \mathrm{id}_X \simeq i \circ f : X \to X$. Setze

$$G_t : X \to X : (x,t) \mapsto \begin{cases} H_{2t} & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ r \circ H_{2-2t}(x) & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Dies ist die gesuchte Homotopie $G_t : \mathrm{id}_X \simeq i \circ r$.

□

Beispiel 6.33. a) X hat genau dann den Homotopietyp eines Punktes, wenn X zusammenziehbar ist.

b) $X \times \{0\}$ ist Deformationsretrakt von $X \times [0,1]$.

c) Die Spitze des Kegels $[X \times \{1\}] \in CX$ ist Deformationsretrakt von CX.

d) Ist Y zusammenziehbar auf $y \in Y$, so ist $X \times \{y\}$ Deformationsretrakt von $X \times Y$.

Beispiel 6.34. Sei $T^2 = S^1 \times S^1$ und $p \in T^2$. Dann hat $T^2 \setminus \{p\}$ den Homotopietyp von $S^1 \vee S^1$.

Definition 6.35. Sei $g \geq 2$ und $E_{4g} \subset \mathbf{R}^2$ das reguläre $4g$-Eck mit den Ecken $w_j = \exp(2\pi i j/4g)$ mit $j = 0, \ldots, 4g-1$. Sei R die Äquivalenzrelation auf E_{4g}, die von folgenden Identifikationen erzeugt wird:

$$\begin{aligned} a_j &: (1-t)w_{4j} + tw_{4j+1} \sim tw_{4j+2} + (1-t)w_{4j+3} \\ b_j &: (1-t)w_{4j+1} + tw_{4j+2} \sim tw_{4j+3} + (1-t)w_{4j+4} \end{aligned}$$

für $j = 0, \ldots, g-1$. Dann heißt $F_g := E_{4g}/R$ die *geschlossene, orientierbare Fläche vom Geschlecht* g. Wir setzen $F_0 = S^2$ und $F_1 = T^2$.

Bemerkung 6.36. Die F_g können als Verklebung von g Tori realisiert werden.

Sei $\phi : \bar{B}^2 \to T^2$ eine Einbettung. Setze $B := \phi(B^2)$, $S := \phi(S^1)$ und $T' := T^2 \setminus B$. Wir können eine Abbildung $f : S \to S$ definieren mittels $f(\phi(z)) = \phi(z^{-1})$. Dann ist $F_2 = T' \cup_f T'$. Vergleiche mit der Zerschneidung des regulären 8-Ecks an der x-Achse.

Entsprechend kann F_k als Verklebung von $F_{k-1} \setminus B$ mit T' realisiert werden.

Bemerkung 6.37. $F_g \setminus \{p\}$ ist homotopieäquivalent zu $\bigvee_{i=1}^{2g} S^1$.

7 Die Fundamentalgruppe

Definition 7.1. Sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum.

a) Ein Weg $\alpha : [0,1] \to X$ heißt *geschlossen mit Stützpunkt* x_0, wenn $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$.

b) Wir nennen zwei geschlossene Wege mit Stützpunkt x_0 *homotop*, wenn sie homotop relativ $\{0,1\}$ sind. Sind also $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ homotop, existiert also eine Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to X$, so dass $H_0 = \alpha$, $H_1 = \beta$ und $H(0,s) = H(1,s) = x_0$ für alle $s \in [0,1]$.

c) Homotopie geschlossener Wege ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklasse eines geschlossenen Weges α bezeichnen wir mit $[\alpha]$ und die Menge der Äquivalenzklassen mit $\pi_1(X, x_0)$.

Bemerkung 7.2. Da $[0,1]$ zusammenziehbar ist, ist jeder Weg $\alpha : [0,1] \to X$ nullhomotop. Hier verlangen wir jedoch, dass die Homotopie von α nach β aus geschlossenen Wegen besteht und den Stützpunkt fest lässt.

Definition 7.3. Sei $\mathcal{C}(x_0)$ die Menge der geschlossenen Wege in (X, x_0). Auf $\mathcal{C}(x_0)$ definieren wir eine Verknüpfung $*$ durch Aneinanderfügen von Wegen $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(c_0)$ wie folgt:

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1) & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Bemerkung 7.4. a) Ist (α_s) eine Homotopie geschlossener Wege von α_0 nach α_1 und (β_s) eine Homotopie geschlossener Wege von β_0 nach β_1, so ist $(\alpha_s * \beta_s)$ eine Homotopie von $\alpha_0 * \beta_0$ nach $\alpha_1 * \beta_1$. Daher definiert $*$ auch ein Produkt auf Homotopieklassen geschlossener Wege:

$$\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0) : ([\alpha], [\beta]) \mapsto [\alpha][\beta] = [\alpha * \beta].$$

b) In $\mathcal{C}(x_0)$ ist $*$ nicht assoziativ, denn $(\alpha * \beta) * \gamma$ und $\alpha * (\beta * \gamma)$ haben zwar das gleiche Bild, sind aber i.a. verschieden parametrisiert.

c) Ist $c_0 = c_{x_0} : [0,1] \to X$ der konstante Weg $c_0(t) = x_0$ für alle $t \in [0,1]$, so haben $\alpha * c_0$ und $c_0 * \alpha$ das gleiche Bild wie α, aber die Parametrisierung ist i.a. verschieden: $c_0 * \alpha \neq \alpha \neq \alpha * c_0$.

Lemma 7.5. *Sei $\alpha \in C(x_0)$ und $\phi : [0,1] \to [0,1]$ stetig mit $\phi(0) = 0$ und $\phi(1) = 1$. Dann sind α und $\alpha \circ \phi$ homotop: $\alpha \simeq \alpha \circ \phi$.*

Beweis. Definiere $\alpha_s(t) = \alpha((1-s)t + s\phi(t))$ Dann ist $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1 = \alpha \circ \phi$ und $\alpha_s(0) = \alpha_s(1) = \alpha(0) = \alpha(1)$. □

Definition 7.6. Ist $\alpha \in \mathcal{C}(x_0)$, so definieren wir den *inversen Weg* α^{-1} als $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$.

Proposition 7.7. *Sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum und $\mathcal{C}(x_0)$ die Menge der geschlossenen Wege in X mit Stützpunkt x_0. Dann gilt:*

a) Sind $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}(x_0)$, so ist $([\alpha][\beta])[\gamma] = [\alpha]([\beta][\gamma])$.

b) Für alle $\alpha \in \mathcal{C}(x_0)$ gilt $[\alpha][c_0] = [\alpha] = [c_0][\alpha]$.

c) Für alle $\alpha \in \mathcal{C}(x_0)$ gilt $[\alpha][\alpha^{-1}] = [c_0] = [\alpha^{-1}][\alpha]$.

Beweis. a) Zeige $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$. Es ist

$$(\alpha * \beta) * \gamma(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \beta(4t-1) & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

und

$$\alpha * (\beta * \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(4t-2) & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \gamma(4t-3) & t \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

Setzen wir nun $\phi : [0,1] \to [0,1]$ als

$$\phi(\tau) = \begin{cases} 2\tau & \tau \in [0, \frac{1}{4}] \\ \tau + \frac{1}{4} & \tau \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2} & \tau \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Dann ist $(\alpha * (\beta * \gamma)) \circ \phi = \alpha * \beta) * \gamma$ und Lemma 7.5 impliziert dann $[\alpha]([\beta][\gamma]) = ([\alpha][\beta])[\gamma]$.

b) Setze $\phi : [0,1] \to [0,1]$ als

$$\phi(\tau) = \begin{cases} 2\tau & \tau \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \tau \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Dann ist $(\alpha * c_0) \circ \phi = \alpha$ und wegen Lemma 7.5 daher $[\alpha][c_0] = [\alpha]$. Genauso sieht man $[c_0][\alpha] = [\alpha]$.

c) Setze $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ als

$$H(t,s) = \begin{cases} \alpha(2st) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \alpha(2s(1-t)) & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Dann ist $H_0 = c_0$, $H_1 = \alpha * \alpha^{-1}$ und $H(0,s) = H(1,s) = x_0$. Also ist $c_0 \simeq \alpha * \alpha^{-1}$. Wegen $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$ ist auch $c_0 \simeq \alpha^{-1} * \alpha$. Also $[\alpha][\alpha^{-1}] = [c_0] = [\alpha^{-1}][\alpha]$.

□

Bemerkung 7.8. Wegen Proposition 7.7 ist $\pi_1(X, x_0) = \mathcal{C}(x_0)/\simeq$ mit der von $*$ auf $\mathcal{C}(x_0)$ induzierten Verknüpfung eine Gruppe mit Einselement $[c_0]$. Sie heißt *Fundamentalgruppe* von (X, x_0).

Bemerkung 7.9. Sind $x_0, y_0 \in X$ und $\gamma : [0,1] \to X$ ein Weg von x_0 nach y_0. Setze $\gamma^{-1} : [0,1] \to X : t \mapsto \gamma(1-t)$. Dann ist

$$\Phi_\gamma : \pi_1(X, y_0) \to \pi_1(X, x_0) : [\alpha] \mapsto [\gamma * \alpha * \gamma^{-1}]$$

ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Ist $\alpha_s : \alpha_0 \simeq \alpha_1$, so ist $(\gamma * \alpha_s * \gamma^{-1})$ eine Homotopie zwischen $\gamma * \alpha_0 * \gamma^{-1}$ und $\gamma * \alpha_1 * \gamma^{-1}$, also ist Φ_γ wohldefiniert. Es ist

$$\begin{aligned}[]
[\gamma * \alpha * \gamma^{-1}][\gamma * \beta * \gamma^{-1}] &= [(\gamma * \alpha * \gamma^{-1}) * (\gamma * \beta * \gamma^{-1})] \\
&= [\gamma * \alpha * (\gamma^{-1} * \gamma) * \beta * \gamma^{-1}] = [\gamma * \alpha * \beta * \gamma^{-1}]
\end{aligned}$$

also ist Φ_γ ein Homomorphismus. Andererseits ist

$$\Phi_{\gamma^{-1}} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, y_0) : [\alpha] \mapsto [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]$$

mit der gleichen Argumentation auch ein Homomorphismus und

$$\Phi_{\gamma^{-1}} \circ \Phi_\gamma([\alpha]) = [\gamma^{-1} * \gamma * \alpha * \gamma^{-1} * \gamma] = [\alpha].$$

Daher ist $\Phi_{\gamma^{-1}} \circ \Phi_\gamma = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$ und entsprechend $\Phi_\gamma \circ \Phi_{\gamma^{-1}} = \mathrm{id}_{\pi_1(X,y_0)}$. Also ist Φ_γ ein Isomorphismus. □

Bemerkung 7.10. a) Ist X wegzusammenhängend, so ist $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X, y_0)$ für alle $x_0, y_0 \in X$. Wir schreiben dann einfach $\pi_1(X)$, da es auf den Stützpunkt nicht ankommt.

b) Ein wegzusammenhängender Raum mit $\pi_1(X) = 1$ heißt *einfach zusammenhängend.*

c) $(\mathbf{R}^n, 0)$ (bzw. jede sternförmige Teilmenge $A \subset \mathbf{R}^n$ ist einfach zusammenhängend, da für $\alpha : [0,1] \to \mathbf{R}^n$ die Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}^n : (s,t) \mapsto t\alpha(s)$ eine Homotopie zwischen c_0 und α ist.

d) Die Fundamentalgruppe eines wegzusammenhängenden Raumes X ist im Allgemeinen nicht abelsch. Wir werden später sehen, dass in $S^1 \vee S^1$ für die beiden S^1-Schlaufen α und β gilt, dass $[\alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1}] \neq [c_0]$.

Bemerkung 7.11. $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbf{Z}$.

Beweis. Ist $\alpha : [0,1] \to S^1$ ein geschlossener Weg mit $\alpha(0) = \alpha(1) = 1$, so existiert wegen Satz 2.14 eine stetige Abbildung $\bar{\alpha} : S^1 \to S^1$ mit $\bar{\alpha} \circ \mathrm{ex} = \alpha$. Setze

$$\Phi : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbf{Z} : \alpha \mapsto \deg(\bar{\alpha}).$$

Dies ist wohldefiniert, da die Homotopie $H : \alpha \simeq \beta$ geschlossener Wege wegen Satz 2.14 eine Homotopie $\bar{H} : \bar{\alpha} \simeq \bar{\beta}$ induziert mit $\bar{H} \circ (\mathrm{ex} \times \mathrm{id}) = H$.

Seien $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(1)$. Dann existieren $\phi, \psi : [0,1] \to \mathbf{R}$ mit $\phi(0) = \psi(0) = 0$, $\alpha = \bar{\alpha} \circ \mathrm{ex} = \mathrm{ex} \circ \phi$ und $\beta = \bar{\beta} \circ \mathrm{ex} = \mathrm{ex} \circ \psi$. Dann ist $\alpha * \beta = \mathrm{ex} \circ \chi$ mit

$$\chi(t) = \begin{cases} \phi(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \phi(1) + \psi(2t) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

also ist $\deg(\overline{\alpha * \beta}) = \chi(1) = \phi(1) + \psi(1) = \deg(\bar{\alpha}) + \deg(\bar{\beta})$. Das bedeutet $\Phi([\alpha][\beta]) = \Phi([\alpha]) + \Phi([\beta])$. Damit haben wir gezeigt, dass Φ ein Homomorphismus ist.

Ist $\deg(\bar{\alpha}) = 0$, also $\Phi([\alpha]) = 0$, so ist $\bar{\alpha}$ homotop zu c_1 etwa via $\bar{H} : \bar{\alpha} \simeq c_1$ relativ $\{1\}$ (vgl. Satz 6.21). Dann ist $H = \bar{H} \circ (\mathrm{ex} \times \mathrm{id})$ eine Homotopie von α zu c_1 relativ $\{0, 1\}$. Damit impliziert $\Phi([\alpha]) = 0$ dass $[\alpha] = [c_1]$ und Φ ist injektiv.

Φ ist außerdem surjektiv, da für $\alpha_k = \mathrm{ex}(kt)$ gilt, dass $\Phi([\alpha_k]) = k \in \mathbf{Z}$. □

Bemerkung 7.12. a) Bisher haben wir jedem punktierten topologischen Raum (X, x_0) eine Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ zugeordnet. Ist nun $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ stetig (also u.a. $f(x_0) = y_0$), so induziert f einen Homomorphismus $\pi_1(f) = f_*$

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0) : [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha].$$

Das ist wohldefiniert, da $H : \alpha \simeq \beta$ impliziert $f \circ H : f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$. Außerdem ist f_* ein Homomorphismus, da $f \circ (a * b) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$ und daher

$$f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha]) f_*([\beta]).$$

f_* heißt der von f *induzierte* Homomorphismus.

b) Ist $f = \mathrm{id}_X$, so ist f_* die Identität auf $\pi_1(X, x_0)$.

c) Sind $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ und $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ stetige Abbildungen, so gilt

$$(g \circ f)_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Z, z_0) : [\alpha] \mapsto [(g \circ f) \circ \alpha]$$

ist gleich der Abbildung $g_* \circ f_*$. Denn

$$(g_* \circ f_*)([\alpha]) = g_*([f \circ \alpha]) = [g \circ (f \circ \alpha)] = [(g \circ f) \circ \alpha] = (g \circ f)_*([\alpha]).$$

Also ist die induzierte Abbildung mit der Komposition stetiger Abbildungen verträglich.

d) Ist $f \simeq g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, so ist $f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$. Denn ist $\alpha : [0, 1] \to (X, x_0)$ ein geschlossener Weg, so ist $f \circ \alpha \simeq g \circ \alpha$ vermöge $(s, t) \mapsto H(\alpha(s), t)$, wenn $H : f \simeq g$ eine Homotopie relativ $\{x_0\}$ ist.

Satz 7.13. *Seien $f \simeq g : X \to Y$ homotope Abbildungen und $x_0 \in X$. Ist $H : f \simeq g$ und $\gamma : [0, 1] \to Y : t \mapsto H(x_0, t)$, so gilt für alle $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, dass*

$$f_*([\alpha]) = \Phi_\gamma(g_*([\alpha]))$$

wo

$$\Phi_\gamma : \pi_1(Y, g(x_0)) \to \pi_1(Y, f(x_0)) : [\beta] \mapsto [\gamma * \beta * \gamma^{-1}]$$

der Homomorphismus aus Bemerkung 7.9 ist.

Beweis. Zu zeigen ist, dass $f \circ \alpha \simeq \gamma * (g \circ \alpha) * \gamma^{-1}$ ist. Dies folgt aus der Behauptung, dass $f \circ \alpha * \gamma \simeq \gamma * (g \circ \alpha)$ relativ $\{0,1\}$.

Betrachte dazu die Abbildung

$$G : [0,1] \times [0,1] \mapsto Y : (s,t) \mapsto H(\alpha(s), t).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \bar{H} &: [0,1] \times [0,1] \to Y \\ (s,t) &\mapsto \begin{cases} G(2s(1-t), 2st) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2(1-s)(1-t) + (2s-1), 2(1-s)t + (2s-1)) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

die gesuchte Homotopie $\bar{H} : f \circ \alpha * \gamma \simeq \gamma * (g \circ \alpha)$. Folglich ist $[f \circ \alpha] = [\gamma * (g \circ \alpha) * \gamma^{-1}]$. □

Satz 7.14. *Ist $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz und $x_0 \in X$, so ist $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Sei $g : Y \to X$ Homotopieinverses von f. Dann ist $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Daher ist im Diagramm

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, g \circ f(x_0)) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f \circ g \circ f(x_0))$$

wegen Satz 7.13 die Kombination der beiden linken Abbildungen ein Isomorphismus, und g_* folglich surjektiv. Außerdem ist die Kombination der beiden rechten Abbildungen ein Isomorphismus, also g_* injektiv. Damit ist g_* ein Isomorphismus und folglich f_* auch. □

Bemerkung 7.15. Sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum.

a) Ist X auf x_0 zusammenziehbar, so ist $\pi_1(X) = 1$.

b) Ist $x_0 \in A \subset X$, so induziert die Injektion $i : A \to X$ einen Homomorphismus $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$. Ist $A \subset X$ ein Deformationsretrakt, so ist diese Abbildung auch ein Isomorphismus.

c) Ist X_0 die Wegekomponente von X, die x_0 enthält, so induziert $i : X_0 \to X$ einen Isomorphismus $i_* : \pi_1(X_0, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

Bemerkung 7.16. Sind G und H Gruppen, so ist das direkte Produkt $G \times H$ bezüglich komponentenweiser Multiplikation

$$(g,h) \cdot (g', h') = (gg', hh') \qquad g, g' \in G, hh' \in H$$

auch eine Gruppe mit Einselement (e_g, e_h), wo e_g und e_h die Einselemente der Gruppen G bzw. H sind. Das Inverse von $(g,h) \in G \times H$ ist $(g,h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$.

Satz 7.17. *Sind (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte topologische Räume, so ist*

$$\big((\pi_X)_*, (\pi_Y)_*\big) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Wegen Bemerkung 7.12 ist klar, dass $\big((\pi_X)_*, (\pi_Y)_*\big)$ ein Homomorphismus ist, wir müssen nur zeigen, dass diese Abbildung auch bijektiv ist.

Surjektivität: Sind $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ und $[\beta] \in \pi_1(Y, y_0)$, so ist

$$\alpha \times \beta : [0,1] \to X \times Y : t \mapsto (\alpha(t), \beta(t))$$

ein Weg mit $\pi_X \circ (\alpha \times \beta) = \alpha$ und $\pi_Y \circ (\alpha \times \beta) = \beta$. Also ist $(\pi_X)_*[\alpha \times \beta] = [\alpha]$ und $(\pi_Y)_*[\alpha \times \beta] = [\beta]$.

Injektivität: Ist $[\gamma] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ mit $\big((\pi_X)_*, (\pi_Y)_*\big)([\gamma]) = (1,1)$, so sind $\alpha = \pi_X \circ \gamma \simeq c_{x_0}$ und $\beta = \pi_Y \circ \gamma \simeq c_{y_0}$ jeweils nullhomotop. Also existieren $H_1 : \alpha \simeq c_{x_0}$ und $H_2 : \beta \simeq c_{y_0}$. Dann ist

$$H_1 \times H_2 : [0,1] \times [0,1] \to X \times Y : (s,t) \mapsto (H_1(s,t), H_2(s,t))$$

eine Homotopie von $\gamma = [\alpha \times \beta] \simeq c_{(x_0,y_0)}$. □

Beispiel 7.18. a) Da $(T^2, (1,1)) = (S^1, 1) \times (S^1, 1)$ ist $\pi_1(T^2, (1,1)) \cong \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ vermöge

$$[\alpha] \mapsto \big(\deg(\pi^1 \circ \alpha), \deg(\pi^2 \circ \alpha)\big)$$

wo π^i die Projektion auf den i-ten Faktor ist.

Folglich ist jede Homotopieklasse geschlossener Wege in T^2 durch ein Umlaufzahlenpaar (m,n) charakterisiert.

Sei $a : [0,1] \to T^2 : t \mapsto (\mathrm{ex}(t), 1)$ und $b : [0,1] \to T^2 : t \mapsto (1, \mathrm{ex}(t))$. Dann ist also jeder geschlossene Weg homotop zu

$$a^m b^n = \underbrace{a * \ldots * a}_{n-\mathrm{mal}} * \underbrace{b * \ldots * b}_{m-\mathrm{mal}}.$$

Insbesondere ist $[a * b] = [b * a]$, da $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ abelsch ist. Dies folgt auch daraus, dass $a * b * a^{-1} * b^{-1}$ nullhomotop ist.

b) Induktiv folgt dass $\pi_1(T^n) \cong \mathbf{Z}^n$.

Wir wollen nun die Zuordnung $(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ formalisieren und in einem breiteren Zusammenhang betrachten. Dazu führen wir die Sprache der *Kategorien* und *Funktoren* ein.

Definition 7.19. Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus folgenden drei Daten:

a) Eine Klasse von *Objekten* $X, Y, Z, \ldots$ die wir mit $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ bezeichnen.

b) Für je zwei Objekte X, Y aus einer Menge von *Morphismen*, die wir mit $\mathrm{Mor}(X,Y) = \{f, g, h, \ldots\}$ bezeichnen.

c) Für je drei Objekte X, Y, Z in $\mathcal{C}$ aus einer Abbildung

$$\mathrm{Mor}(X,Y) \times \mathrm{Mor}(Y,Z) \to \mathrm{Mor}(X,Z) : (f,g) \mapsto gf$$

die wir die *Komposition* in dieser Kategorie nennen.

Wir fordern folgende Axiome:

(K1) Ist $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$, $g \in \mathrm{Mor}(Y,Z)$ und $h \in \mathrm{Mor}(Z,W)$ so gilt

$$h(gf) = (hg)f.$$

(K2) Für jedes Objekt X existiert ein Element $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Mor}(X,X)$, so dass für alle weiteren Objekte Y und für alle $g \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ und $h \in \mathrm{Mor}(Y,X)$ gilt

$$g\,\mathrm{id}_X = g \quad \text{und} \quad \mathrm{id}_X\, h = h.$$

Bemerkung 7.20. a) Die Identität $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Mor}(X,X)$ ist eindeutig bestimmt.

b) Ist $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ und existiert ein Morphismus $g \in \mathrm{Mor}(Y,Z)$, so dass $gf = \mathrm{id}_X$ und $fg = \mathrm{id}_Y$, so heißt f *Isomorphismus* der Kategorie. In diesem Fall ist g eindeutig bestimmt.

Beispiel 7.21. a) Die Kategorie <u>Mengen</u> der Mengen mit den Abbildungen als Morphismen $\mathrm{Mor}(X,Y) = \{f : X \to Y\}$ und der Komposition als Komposition von Abbildungen. Isomorphismen sind hier bijektive Abbildungen.

b) Die Kategorie <u>Top</u> der topologischen Räume mit den stetigen Abbildungen als Morphismen $\mathrm{Mor}(X,Y) = C(X,Y)$ und der Komposition von Abbildungen. In dieser Kategorie sind die Isomorphismen gerade die Homöomorphismen.

c) Die Kategorie <u>H-Top</u> der topologischen Räume mit den Homotopieklassen stetiger Abbildungen als Morphismen. Isomorphismen sind Homotopieäquivalenzen.

d) Die Kategorie $\underline{\mathrm{Top}_0}$ der punktierten topologischen Räume mit basispunkterhaltenden stetigen Abbildungen als Morphismen.

e) Die Kategorie <u>Grp</u> der Gruppen mit ihren Homomorphismen.

f) Die Kategorie <u>Ab</u> der abelschen Gruppen mit ihren Homomorphismen.

g) Die Kategorie <u>Vect</u> der Vektorräume mit linearen Abbildungen.

h) Die Kategorie der topologischen Mannigfaltigkeiten mit stetigen Abbildungen.

i) Beliebig viele weitere Beispiele mathematischer Objekte mit strukturerhaltenden Abbildungen.

Definition 7.22. a) Seien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ Kategorien. Ein (covarianter) Funktor T ordnet jedem Objekt X_1 in $\mathcal{C}_1$ ein Objekt $X_2 = T(X_1)$ in $\mathcal{C}_2$ zu und jedem Morphismus $f \in \mathrm{Mor}(X_1, Y_1)$ einen Morphismus $Tf = f_* \in \mathrm{Mor}(T(X_1), T(Y_1))$ in $\mathcal{C}_2$ zu, so dass gilt

(F1) Für jedes Objekt X_1 in $\mathcal{C}_1$ ist $T(\mathrm{id}_{X_1}) = \mathrm{id}_{T(X_1)}$.

(F2) Für $f \in \mathrm{Mor}(X_1, Y_1)$ und $g \in \mathrm{Mor}(Y_1, Z_1)$ gilt

$$T(gf) = T(g)T(f).$$

b) Seien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ Kategorien. Ein contravarianter Funktor ordnet jedem Objekt X_1 in $\mathcal{C}_1$ ein Objekt $X_2 = T(X_2)$ in $\mathcal{C}_2$ zu und jedem Morphismus $f \in \mathrm{Mor}(X_1, Y_1)$ einen Morphismus $Tf = f_* \in \mathrm{Mor}(T(Y_1), T(X_1))$ in $\mathcal{C}_2$ zu, so dass gilt

(F1) Für jedes Objekt X_1 in $\mathcal{C}_1$ ist $T(\mathrm{id}_{X_1}) = \mathrm{id}_{T(X_1)}$.

(F2) Für $f \in \mathrm{Mor}(X_1, Y_1)$ und $g \in \mathrm{Mor}(Y_1, Z_1)$ gilt

$$T(gf) = T(f)T(g).$$

Beispiel 7.23. a) Der Vergiss-Funktor. Top ist eine Kategorie, deren Objekte Mengen sind. Daher ist

$$\underline{\text{Vergiss}} : \underline{\text{Top}} \to \underline{\text{Mengen}},$$

der Funktor, der einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ die unterliegende Menge X zuordnet und jeder stetigen Abbildung $f : X \to Y$ die Abbildung von Mengen $f : X \to Y$, ein covarianter Funktor. Der Vergiss-Funktor vergisst also die Zusatzstruktur eines topologischen Raumes.

Es gibt auch Vergiss- Funktoren $\underline{\text{Top}_0} \to \underline{\text{Top}}$ oder $\underline{\text{Top}} \to \underline{\text{H-Top}}$.

b) $\pi_1 : \underline{\text{Top}_0} \to \underline{\text{Grp}}$ ist ein covarianter Funktor (vgl. Bemerkung 7.12).

c) $\pi_1 : \underline{\text{H-Top}_0} \to \underline{\text{Grp}}$ ist auch ein Funktor (vgl. Satz 7.13). Hier ist H-Top$_0$ die Kategorie der punktierten topologischen Räume mit Homotopieklassen (relativ zum Basispunkt) von Abbildungen als Morphismen.

d) Ist X ein topologischer Raum und sei $\pi_0(X) \subset \mathbf{P}X$ die Teilmenge der Wegekomponenten von X. Dabei ist für $x \in X$ die Wegekomponente von x gegeben als

$$U(x) = \big\{y \in X : \exists \text{ Weg von } x \text{ nach } y\big\}$$

Sei $I \subset X$ ein vollständiges Repräsentantensystem, so dass

$$X = \dot{\bigcup}_{x_\alpha \in I} U(x_\alpha).$$

Dann ist $\pi_0(X) = \{U(x_\alpha) : \alpha \in I\}$.

Ist $f : X \to Y$ stetig, und $Y = \bigcup_{\beta \in J} V(y_\beta)$ so existiert für jedes $\alpha \in I$ genau ein $\beta \in J$ mit $f(U_\alpha) \subset V_\beta$. Setze dann

$$\pi_0(f) = f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y) : U_\alpha \mapsto V_\beta.$$

So wird π_0 zu einem covarianten Funktor $\underline{\text{Top}} \to \underline{\text{Grp}}$.

e) $C : \underline{\text{Top}} \to \underline{\text{Top}}$ mit $C(X) = CX$, der Kegel über X ist ein covarianter Funktor, wenn wir für eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ definieren

$$Cf = f_* : CX \to CY : [(x,t)] \mapsto [(f(x),t)].$$

f) In der Kategorie der $\mathbf{K}$-Vektorräume ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{K} = \mathbf{C}$) ist die Dualbildung

$$* : \mathbf{K} - \underline{\text{Vect}} \to \mathbf{K} - \underline{\text{Vect}}$$

ein contravarianter Funktor. Seien V, W Vektorräume und $f : V \to W$ eine $\mathbf{K}$-lineare Abbildung, so ist

$$*f = f^* : W^* \to V^* : w^* \mapsto w^* \circ f.$$

Lemma 7.24. *Sei $T : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ ein Funktor und $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ ein Isomorphismus in $\mathcal{C}_1$, so ist auch $Tf \in \mathrm{Mor}(TX,TY)$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Sei $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ ein Isomorphismus und sei $g \in \mathrm{Mor}(Y,X)$ mit $gf = \mathrm{id}_X$ und $fg = \mathrm{id}_Y$. Dann gilt:

$$TgTf = T(gf) = T(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{TX}$$

und

$$TfTg = T(fg) = T(\mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_{TY}\,.$$

Also ist $Tf \in \mathrm{Mor}(TX,TY)$ ein Isomorphismus. $\square$

Bemerkung 7.25. a) Vergleichen Sie die Argumentation mit der aus Satz 7.14.

b) Haben zwei topologische Räume X und Y Mengen $\pi_0(X)$ und $\pi_0(Y)$ mit unterschiedlicher Kardinalität, so können sie nicht homöomorph sein.

Definition 7.26. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Familie von Objekten in $\mathcal{C}$.

a) Eine Familie $(X, \pi_\alpha)_{\alpha\in I}$, wo X ein Objekt von $\mathcal{C}$ und $\pi_\alpha \in \mathrm{Mor}(X, X_\alpha)$ Morphismen sind, heißt *Produkt* von (X_α) in $\mathcal{C}$, wenn es zu jeder anderen solchen Familie $(Y, \pi'_\alpha)_{\alpha\in I}$ genau einen Morphismus $\Phi \in \mathrm{Mor}(Y,X)$ gibt, so dass $\pi_\alpha\Phi = \pi'_\alpha$ für alle $\alpha \in I$ gilt.

b) Eine Familie $(X, i_\alpha)_{\alpha\in I}$ wo X ein Objekt von $\mathcal{C}$ ist und $i_\alpha \in \mathrm{Mor}(X_\alpha, X)$ Morphismen sind, heißt *Summe* oder *Coprodukt* in $\mathcal{C}$, wenn es zu jeder anderen solchen Familie $(Y, j_\alpha)_{\alpha\in I}$ genau einen Morphismus $\Phi \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ gibt, mit $\Phi i_\alpha = j_\alpha$ für alle $\alpha \in I$.

Bemerkung 7.27. Produkte und Summen sind bis auf Isomorphie eindeutig, sofern sie existieren.

Beispiel 7.28. a) In $\underline{\text{Mengen}}$ existieren allgemeine Produkte und Summen. Diese sind $\Pi_{\alpha\in I} X_\alpha$ mit den kanonischen Projektionen $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ bzw. $\sum_{\alpha\in I} X_\alpha$ mit den kanonischen Injektionen $i_\alpha : X_\alpha \to \sum_{\alpha\in I} X_\alpha$ (vgl. Definition 2.5a).

b) In $\underline{\text{Top}}$ existieren Produkte und Summen, nämlich gerade $\Pi_{\alpha\in I} X_\alpha$ mit der Produkttopologie und $\sum_{\alpha\in I} X_\alpha$ mit der Summentopologie (vgl. Definition 2.8, Bemerkung 2.9, Definition 2.5).

c) In $\underline{\text{Top}_0}$ existieren Produkte und Summen. Ist $(X_\alpha, x_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Familie punktierter topologischer Räume, so ist $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ mit $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I}$ als Basispunkt das Produkt in $\underline{\text{Top}_0}$.

   Außerdem ist $(\bigvee_{\alpha\in I}(X_\alpha, x_\alpha), \tilde{x})$ mit $\tilde{x} = [x_\alpha]$ die Summe in $\underline{\text{Top}_0}$.

d) In $\underline{\text{Grp}}$ existieren Produkte und Summen. Das kartesische Produkt $\prod_{\alpha\in I} G_\alpha$ mit komponentenweiser Multiplikation ist Produkt. Das freie Produkt von Gruppen $*_{\alpha\in I} G_\alpha$ ist die Summe in dieser Kategorie.

Beweis. a) Ist $(Y, \pi'_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine weitere Familie $\pi'_\alpha : Y \to X_\alpha$. Setze $\Phi : Y \to \prod_{\alpha\in I} X_\alpha : y \mapsto (\pi'_\alpha(y))$. Dies erfüllt $\pi_\alpha \circ \Phi(y) = \pi_\alpha(\Phi(y)) = \pi'_\alpha(y)$. Außerdem ist Φ die einzige solche Abbildung.

   Ist andererseits $(Y, j_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Familie mit $j_\alpha : X_\alpha \to Y$, so setze $\Phi : \sum_{\alpha\in I} X_\alpha \to Y : \Phi(x) = j_\alpha(y_\alpha)$, falls $x = i_\alpha(y_\alpha) \in i_\alpha(X_\alpha)$. Dann ist $\Phi i_\alpha = j_\alpha$.

b) Wie a), da in der Kategorie der Topologischen Räume alle der beteiligten Abbildungen stetig sind.

c) Produkt ist klar.

   Summe: Ist $((Y, y_0), j_\alpha)$ eine Familie mit $j_\alpha : (X_\alpha, x_\alpha) \to (Y, Y_0)$ so setze $\Phi(x) = j_\alpha(y_\alpha)$, falls $x = i_\alpha(y_\alpha) \in i_\alpha(X_\alpha)$. Dies ist wohldefiniert, da falls $x \in i_\alpha(X_\alpha) \cap i_\beta(X_\beta)$ für $\alpha \neq \beta$, so ist $x = \tilde{x} = i_\alpha(x_\alpha) = i_\beta(x_\beta)$ und daher $j_\alpha(x_\alpha) = j_\beta(x_\beta) = y_0$.

d) Produkt ist klar. Summe später.

□

Bemerkung 7.29. Satz 7.17 impliziert, dass der Funktor $\pi_1 : \underline{\text{Top}_0} \to \underline{\text{Grp}}$ Produkte in den jeweiligen Kategorien respektiert. Der gleiche Beweis liefert dies auch für beliebige (nicht nur endliche) Produkte.

Definition 7.30. Seien G_1, G_2 Gruppen. Das *freie Produkt* von G_1 und G_2 besteht aus allen Worten (bzw. formalen Ausdrücken) der Form

$$g = \text{"}g_1 g_2 g_3 \cdots g_k\text{"}.$$

Hierbei gilt $k \in \mathbf{N}_0$ und $g_j \neq 1$ für alle $j = 1, \dots, k$ und

$$(g_j \in G_1 \text{ und } g_{j+1} \in G_2) \qquad \text{oder} \qquad (g_j \in G_2 \text{ und } g_{j+1} \in G_1).$$

k ist die Länge des Wortes g. Das leere Wort hat die Länge $k = 0$.

Die Multiplikation zweier Worte $g = \text{"}g_1 \cdots g_k\text{"}$ und $h = \text{"}h_1 \cdots h_l\text{"}$ ist definiert als

$$gh = \text{"}g_1 \cdots g_k h_1 \cdots h_l\text{"},$$

wobei ausmultipliziert wird in G_1 bzw. G_2, wenn zwei Buchstaben aus dem gleichen Alphabet G_1 bzw. G_2 aufeinandertreffen. Die Einselemente werden gestrichen.

Bemerkung 7.31. a) $G_1 * G_2$ ist mit dieser Verknüpfung tatsächlich eine Gruppe. Einselement ist das leere Wort, Inversenbildung ist wie folgt:

$$(\text{"}g_1 \cdots g_k\text{"})^{-1} = \text{"}g_k^{-1} \cdots g_1^{-1}\text{"}.$$

b) Die natürlichen Inklusionen $i_a : G_a \to G_1 * G_2$, $a = 1, 2$ sind gegeben durch $i_a(g) = \text{"}g\text{"}$. Dh. $i_a(g)$ besteht aus dem Wort, welches nur einen Buchstaben hat, nämlich g.

c) $(G_1 * G_2, i_1, i_2)$ ist eine Summe von G_1 und G_2 in der Kategorie <u>Grp</u>, denn sind $j_a : G_a \to H$, $a = 1, 2$ Gruppenhomomorphismen, so existiert genau ein $\Phi : G_1 * G_2 \to H$ mit $\Phi \circ i_a = j_a$, nämlich

$$\Phi(\text{"}g_1 \cdots g_k\text{"}) = j_{a_1}(g_1) \cdots j_{a_k}(g_k)$$

wobei $a_l = 1$ falls $g_l \in G_1$ oder $a_l = 2$ falls $g_l \in G_2$ für $l = 1, \ldots, k$.

d) Analog zur Definition von $G_1 * G_2$ kann man das freie Produkt $*_{\alpha \in I} G_\alpha$ für eine beliebige Indexmenge definieren. Die Worte hier haben dann die Form

$$g = \text{"}g_1 \cdots g_k\text{"}$$

mit $g_j \in G_\alpha \setminus \{e_\alpha\}$ für ein $\alpha \in I$ und $g_j \in G_\alpha \Rightarrow g_{j+1} \in G_\beta$ für $\beta \in I \setminus \{\alpha\}$.

e) Ist A eine Menge, so bezeichnet man mit $F(A) = *_{a \in A}\mathbf{Z}$ die von A *frei erzeugte Gruppe*. Ihre Elemente sind Worte der Form

$$g = \text{"}a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}\text{"}$$

mit $a_j \in A$ und $a_j \neq a_{j+1}$, sowie $n_j \in \mathbf{Z}$.

Sie hat die folgende universelle Eigenschaft: Ist G eine beliebige Gruppe und $A \subset G$ eine Teilmenge von G, so gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\Phi : F(A) \to G$ mit $\Phi(\text{"}a\text{"}) = a$ für alle $a \in A$, nämlich

$$\Phi(\text{"}a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}\text{"}) = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k},$$

wobei rechts in der Gruppe ausmultipliziert wird.

f) Ist Φ surjektiv, so sagen wir dass G von A erzeugt wird.

g) $G_1 * G_2$ wird von $G_1 \cup G_2$ erzeugt.

Definition 7.32. Sei G eine Gruppe und A eine Teilmenge $A \subset G$.

a) $\langle A \rangle := \bigcap \big\{H \subset G : A \subset H \text{ und } H \text{ Untergruppe von } G\big\}$ heißt die von A *erzeugte Untergruppe*.

b) $N(A) := \bigcap \big\{H \subset G : A \subset H \text{ und } H \text{ Normalteiler von } G\big\}$ heißt der von A *erzeugte Normalteiler*.

Bemerkung 7.33. a)

$$\langle A\rangle = \{a_1^{n_1}\cdots a_k^{n_k} : a_j \in A, n_j \in \mathbf{Z}\} = \Phi(F(A))$$
$$N(A) = \{b_1^{n_1}\cdots b_k^{n_k} : \exists a_j \in A, s_j \in G \text{ so dass } b_j = s_j a_j s_j^{-1}, n_j \in \mathbf{Z}\}$$

b) Ist G von A erzeugt, also $\langle A\rangle = G$ bzw. $\Phi : F(A) \to G$ surjektiv und $R \subset \ker\Phi$ ein Erzeugendensystem von $\ker\Phi$ als Normalteiler, so sagt man, dass G durch die Erzeuger A und die Relationen R gegeben ist. Dann ist

$$G \cong F(A)/N(R)$$

wir schreiben dann $G = \langle A|R\rangle$.

Bemerkung 7.34. Sind G_1, G_2 Gruppen und $j_a : G_a \to H$ Homomorphismen, so existiert wegen der universellen Eigenschaft genau ein Homomorphismus $\Phi : G_1 * G_2 \to H$ mit $\Phi \circ i_a = j_a$. Diesen Homomorphismus bezeichnen wir mit $j_1 * j_2$.

Satz 7.35. *Ist X ein topologischer Raum, $U, V \subset X$ offen, so dass $X = U \cup V$ und $U, V, U\cup V$ wegzusammenhängend sind. Sei $x_0 \in U\cap V$ und $i_U : U \to X$ bzw. $i_V : V \to X$ die jeweiligen Inklusionen. Dann ist der induzierte Homomorphismus*

$$\Phi = (i_U)_* * (i_V)_* : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

surjektiv.

Bemerkung 7.36. a) Im Allgemeinen ist schon $(i_U)_* : \pi_1(U, x_0) \to \Pi_1(X, x_0)$ nicht injektiv, da ein geschlossener Weg in U über X zusammenziehbar sein kann, aber nicht in U. (Etwa $U = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \subset \mathbf{R}^2 = X$).

b) Ist α ein Weg in U, so schreiben wir $[\alpha]_U$ für die Äquivalenzklasse in $\pi_1(U, x_0)$. Für die Äquivalenzklasse von α in $\pi_1(X, x_0)$ schreiben wir $[\alpha]_X$ oder auch nur $[\alpha]$. Also $(i_U)_*([\alpha]_U) = [\alpha]_X$.

Beweis. Sei α ein geschlossener Weg in X mit $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Dann ist das Paar $(\alpha^{-1}(U), \alpha^{-1}(V))$ eine offene Überdeckung von $[0, 1]$. Wegen der Kompaktheit von $[0, 1]$ existiert daher eine Zerlegung

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$$

derart, dass

$$[t_i, t_{i+1}] \subset \alpha^{-1}(U) \text{ und } [t_{i+1}, t_{i+2}] \subset \alpha^{-1}(V).$$

oder

$$[t_i, t_{i+1}] \subset \alpha^{-1}(V) \text{ und } [t_{i+1}, t_{i+2}] \subset \alpha^{-1}(U).$$

für $i = 0, \ldots k-1$. Setze weiter $x_i = \alpha(t_i) \in U \cap V$ und $\alpha_i : [0, 1] \to U/V$ als $\alpha_i(t) = \alpha((1-t)t_i + t_{i+1})$.

Wähle Hilfswege γ_i in $U \cap V$ von x_0 nach x_i wobei $\gamma_0 = \gamma_k = c_{x_0}$. Setzte schließlich $\beta_i = \gamma_i * \alpha_i * \gamma_{i+1}^{-1}$. Dann ist

$$[\alpha]_X = [\beta_1]_X \cdots [\beta_k]_X.$$

Andererseits ist $[\beta_i] = (i_U)_*([\beta_i]_U)$, wenn β_i ein Weg in U ist, oder $[\beta_i] = (i_V)_*([\beta_i]_V)$, wenn β_i ein Weg in V ist. Damit ist

$$[\alpha]_X = \Phi(\text{"}[\beta_1]_{U/V}[\beta_2]_{U/V}\cdots[\beta_k]_{U/V}\text{"}).$$

□

Korollar 7.37. *Ist X die Vereinigung zweier offener, einfach zusammenhängender Mengen U und V, deren Durchschnitt wegzusammenhängend ist, so ist X auch einfach zusammenhängend.*

Beweis. $\pi_1(U) = \pi_1(V) = 1 \Rightarrow \pi_1(U) * \pi_1(V) = 1 \Rightarrow \pi_1(X) = 1$. □

Beispiel 7.38. a) $\pi_1(S^n) = 1$ für $n \geq 2$. Denn $U = S^n \setminus \{\text{Nordpol}\}$ und $V = S^n \setminus \{\text{Südpol}\}$ erfüllen die Bedingungen von Korollar 7.37.

b) $\mathbf{R}^n \not\cong \mathbf{R}^2$ für $n \geq 3$. Denn wäre $\mathbf{R}^n \cong \mathbf{R}^2$, so wäre auch $\mathbf{R}^n \setminus \{p\} \cong \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$. Dann gälte

$$S^{n-1} \simeq \mathbf{R}^n \setminus \{p\} \cong \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \simeq S^1.$$

Aber $\pi_1(S^{n-1}) = 1 \not\cong \mathbf{Z} \cong \pi_1(S^1)$. Ein Widerspruch.

Bemerkung 7.39. Nach Satz 7.35 ist

$$\Phi = (i_U)_* * (i_V)_* : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

surjektiv. Damit ist also nach dem Hauptsatz der Gruppentheorie

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \Big/ \ker \Phi$$

Wenn wir also $\ker \Phi$ bestimmen können, haben wir die Fundamentalgruppe von $X = U \cup V$ berechnet.

Bezeichne $j_U : U \cap V \to U$ und $j_V : U \cap V \to V$ die Inklusionen, so kommutiert offensichtlich das erste der folgenden Diagramme

$$\begin{tikzcd} U \cap V \arrow[r, "j_U"] \arrow[d, "j_V"'] & U \arrow[d, "i_U"] \\ V \arrow[r, "i_V"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V, x_0) \arrow[r, "(j_U)_*"] \arrow[d, "(j_V)_*"'] & \pi_1(U, x_0) \arrow[d, "(i_U)_*"] \\ \pi_1(V, x_0) \arrow[r, "(i_V)_*"] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd}$$

und damit auch das zweite. Es ist daher $(i_U)_*(j_U)_*([\alpha]_{U\cap V}) = (i_V)_*(j_V)_*([\alpha]_{U\cap V})$ für alle $[\alpha]_{U\cap V} \in \pi_1(U \cap V, x_0)$. Setzt man daher

$$\begin{aligned} N &= N\Big(\{\text{"}(j_U)_*([\alpha]_{U\cap V})(j_V)_*([\alpha]_{U\cap V})^{-1}\text{"} \in \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \\ &\qquad\qquad : [\alpha]_{U\cap V} \in \pi_1(U \cap V, x_0)\}\Big) \\ &= N\left(\{\text{"}[\alpha]_U[\alpha]_V^{-1}\text{"} : [\alpha]_{U\cap V} \in \pi_1(U \cap V, x_0)\}\right). \end{aligned}$$

so gilt für alle $\gamma \in N$, dass $\Phi(\gamma) = 0$. Denn für $\gamma = (j_U)_*([\alpha]_{U\cap V})(j_V)_*([\alpha]_{U\cap V})^{-1}$ gilt

$$\Phi(\gamma) = (i_U)_*(j_U)_*([\alpha]_{U\cap V})(i_V)_*(j_V)_*([\alpha]_{U\cap V}^{-1}]) = [\alpha]_X[\alpha]_X^{-1} = 1.$$

Da $\ker \Phi \subset \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ Normalteiler ist, gilt $N \subset \ker \Phi$.

Satz 7.40 (Seifert-van Kampen). *Sei X ein topologischer Raum, $U, V \subset X$ offen, U, V und $U \cap V$ wegzusammenhängend und $x_0 \in U \cap V$. Sei*

$$\Phi : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

der Homomorphismus aus Satz 7.35 und $N \subset \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ der von Elementen der Form $(j_U)_*([\alpha]_{U\cap V})(j_V)_*([\alpha]^{-1}_{U\cap V})$ erzeugte Normalteiler. Dann ist der induzierte Homomorphismus

$$\hat{\Phi} : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N \to \pi_1(X, x_0)$$

ein Isomorphismus, dh. $\ker \Phi = N$.

Korollar 7.41. *Ist X die Vereinigung wegzusammenhängender offener Mengen U und V, deren Durchschnitt einfach zusammenhängend ist, so ist $\pi_1(X) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V)$.*

Beweis. Wegen $\pi_1(U \cap V) = 1$ ist $N = 1$. □

Bemerkung 7.42. Damit respektiert π_1 also auch (endliche) Summen, zumindest auf der Unterkategorie $\mathcal{C} \subset \underline{\mathrm{Top}_0}$ der punktierten, lokal zusammenziehbaren topologischen Räume.

$$\pi_1(X \vee Y) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y)$$

Beispiel 7.43. a) $\pi_1(S^1 \vee \ldots \vee S^1) = \mathbf{Z} * \ldots * \mathbf{Z}$ (gleich oft). Insbesondere ist $\pi_1(S^1 \vee S^1) = \mathbf{Z} * \mathbf{Z} = F(a, b)$.

b) $\pi_1(F_g) = F(a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g)/\langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}\rangle$. Denn mit $U = F_g \setminus \{p\}$ und $V = B^2$ ist $F_g = U \cup V$. Außerdem ist $U \cap V \simeq S^1$. Dann ist $\pi_1(V) = 1$ und $\pi_1(U) = F(a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g)$.

Ist γ ein Erzeuger von $\pi_1(U \cap V) \cong \mathbf{Z}$, so ist

$$(j_U)_*([\gamma]) = [a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}]$$

und $(j_V)_*([\gamma]) = 1$. Folglich ist

$$N = N(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1})$$

Beweis. (von Satz 7.40) Sei $G_1 = \pi_1(U, x_0)$ und $G_2 = \pi_1(V, x_0)$. Sei $\gamma \in G_1 * G_2$, etwa

$$\gamma = \text{"}[\beta_1]_{U/V}[\beta_2]_{U/V} \cdots [\beta_k]_{U/V}\text{"}$$

so dass $\Phi(\gamma) = 1$ ist. Wir müssen zeigen, dass $\gamma \in N$ ist. Wegen $\Phi(\gamma) = 1$ existiert eine Homotopie $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ von $\beta_1 * \ldots \beta_k$ zu c_{x_0}.

Zerlege $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ in Rechtecke $Q_{ij} = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]$, so dass für alle $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$ entweder $H(Q_{ij}) \subset U$ oder $H(Q_{ij}) \subset V$.

Ist nun $\alpha : [0, 1] \to Q$ ein Weg, so ist $H \circ \alpha : [0, 1] \to X$ ein Weg in X. Wir wählen für jedes $q \in Q$ einen Hilfsweg $\gamma_q : [0, 1] \to X$ mit $\gamma_q(0) = x_0$ und $\gamma_q(1) = H(q)$. Ist $H(q) \in U \cap V$, so verlangen wir, dass $\gamma_q \subset U \cap V$, ist $H(q) \in U \setminus V$, so verlangen wir $\gamma_q \subset U$ und ist $H(q) \in V \setminus U$, so verlangen wir $\gamma_q \subset V$.

Ist α wie oben, so setze
$$\tilde{\alpha} = \gamma_{\alpha(0)} * H \circ \alpha * \gamma_{\alpha(1)}^{-1}.$$
Dies ist ein geschlossener Weg in X mit Stützpunkt x_0. Liegt $H \circ \alpha$ in $U \cap V$, U bzw. V, so liegt auch $\tilde{\alpha}$ in $U \cap V$, U bzw. V.

Sei nun Q_{ij} ein Rechteck im Gitter. Wir bezeichnen die Kanten mit $u_{ij}, r_{ij}, o_{ij}, l_{ij} : [0,1] \to Q$, aufgefasst als Wege in Q. (l_{ij} ist der Weg von der oberen linken Ecke zur unteren linken Ecke, u_{ij} geht von der unteren linken Ecke zur unteren rechten Ecke, r_{ij} von der oberen rechten Ecke zur unteren rechten Ecke und o_{ij} von der oberen linken Ecke zur oberen rechten.)

In Q_{ij} ist $l_{ij} * u_{ij} \simeq o_{ij} * r_{ij}$ rel $\{0,1\}$. Daher ist auch
$$\widetilde{l_{ij} * u_{ij}} \simeq \widetilde{o_{ij} * r_{ij}} \text{ rel}\,\{0,1\}$$
und zwar in U bzw. V je nachdem ob $H(Q_{ij}) \subset U$ oder $H(Q_{ij}) \subset V$.

Betrachte die Unterkante von Q, sie ist $u_{11} * \ldots * u_{n1}$. In $G_1 * G_2$ gilt
$$\text{"}[\beta_1]_{U/V}[\beta_2]_{U/V} \cdots [\beta_k]_{U/V}\text{"} = \text{"}[\tilde{u}_{11}]_{U/V}\text{"} \cdots \text{"}[\tilde{u}_{n1}]_{U/V}\text{"}$$
die rechte Seite ist wegen der eingefügten Wege $\gamma_{(0,\frac{j}{m})}$ eine eventuell nicht reduzierte Darstellung des Elements auf der linken Seite.

Wir gehen nun wie folgt vor:

Schritt 1: o.E. können wir annehmen, dass $H(Q_{11}) \subset U$. Dann ist $\tilde{u}_{11} \simeq \widetilde{l_{11} * u_{11}}$, da H entlang l_{11} den konstanten Wert x_0 annimmt. Also ist
$$[\tilde{u}_{11}]_U = [\widetilde{l_{11} * u_{11}}] = [\tilde{o}_{11}]_U[\tilde{r}_{11}]_U$$
und folglich
$$\gamma = [\tilde{u}_{11}]_U[\tilde{u}_{21}]_{U/V} \cdots [\tilde{u}_{n1}]_{U/V} = [\tilde{o}_{11}]_U[\tilde{r}_{11}]_U[\tilde{u}_{21}]_{U/V} \cdots [\tilde{u}_{n1}]_{U/V}.$$
Fall 1: $H(Q_{21}) \subset U$: Dann ist
$$\gamma = [\tilde{o}_{11}]_U[\tilde{r}_{11}]_U[\tilde{u}_{21}]_U \cdots [\tilde{u}_{n1}]_{U/V}.$$
und
$$[\tilde{r}_{11}]_U[\tilde{u}_{21}]_U = [\tilde{l}_{21}]_U[\tilde{u}_{21}]_U = [\widetilde{l_{21} * u_{21}}]_U = [\widetilde{o_{21} * r_{21}}]_U = [\tilde{o}_{21}]_U[\tilde{r}_{21}]$$
Daher ist
$$\gamma = [\tilde{o}_{11}]_U[\tilde{o}_{21}]_U[\tilde{r}_{21}]_U[\tilde{u}_{31}]_{U/V} \cdots [\tilde{u}_{n1}]_{U/V}.$$
Fall 2: $H(Q_{21}) \subset V$. Dann ist $\tilde{r}_{11} = \tilde{l}_{21} \subset U \cap V$, also
$$[\tilde{r}_{11}]_U = [\tilde{l}_{21}]_U = [\tilde{l}_{21}]_V \underbrace{[\tilde{l}_{21}]_V^{-1}[\tilde{l}_{21}]_U}_{=:n_{21} \in N}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\gamma &= [\tilde{o}_{11}]_U[\tilde{l}_{21}]_V n_{21}[\tilde{u}_{21}]_V[\tilde{u}_{31}]_{U/V}\cdots[\tilde{u}_{n1}]_{U/V}\\ &= [\tilde{o}_{11}]_U[\tilde{l}_{21}]_V[\tilde{u}_{21}]_V[\tilde{u}_{31}]_{U/V}\cdots[\tilde{u}_{n1}]_{U/V}\\ &\qquad\underbrace{([\tilde{u}_{21}]_V\cdots[\tilde{u}_{n1}]_{U/V})^{-1}n_{21}[\tilde{u}_{21}]_V\cdots[\tilde{u}_{n1}]_{U/V}}_{=:\tilde{n}_{21}\in N}\\ &= [\tilde{o}_{11}]_U[\tilde{l}_{21}]_V[\tilde{u}_{21}]_V[\tilde{u}_{31}]_{U/V}\cdots[\tilde{u}_{n1}]_{U/V}\,\tilde{n}_{21}\\ &= [\tilde{o}_{11}]_U[\tilde{o}_{21}]_V[\tilde{r}_{21}]_V[\tilde{u}_{31}]_{U/V}\cdots[\tilde{u}_{n1}]_{U/V}\,\tilde{n}_{21}\end{aligned}$$

Entsprechend verfahren wir mit den Rechtecken Q_{i1} für $i = 3, \ldots, n$ und erhalten:

$$\gamma = [\tilde{o}_{11}]_{U/V}[\tilde{o}_{21}]_{U/V}\cdots[\tilde{o}_{n1}]_{U/V}\tilde{n}_1$$

mit $n_1 \in N$. Dabei wenden wir die Prozedur aus Fall 1 immer an wenn wir benachbarte Quadrate betrachten, deren Bild in der gleichen Menge U oder V liegt und Fall 2 wenn die entsprechenden Bilder in verschieden Mengen U oder V liegen.

Wäre nun $m = 1$, dh. es existiert nur eine Reihe, so wäre $[\tilde{o}_{i1}] = [c_{x_0}]$ und damit $\gamma = n_1 \in N$, und wir sind fertig. Andernfalls brauchen wir:

Schritt 2: Wir müssen zeigen, dass

$$\gamma = [\tilde{u}_{12}]_{U/V}[\tilde{u}_{22}]_{U/V}\cdots[\tilde{u}_{n2}]_{U/V}\tilde{n}_1'$$

und können dann die Prozedur aus Schritt 1 für die zweite Reihe wiederholen.

Dies funktioniert analog zu obiger Reinterpretation von $[r_{i1}]_{U/V}$ zu $[l_{i+1,1}]$: Wir hatten angenommen, dass $H(Q_1 1) \subset U$.

Fall 1: $H(Q_{12}) \subset U$. Dann ist $[\tilde{o}_{11}]_U = [\tilde{u}_{12}]_U$.

Fall 2: $H(Q_{12}) \subset V$. Dann ist $\tilde{o}_{11} = \tilde{u}_{12} \subset U \cap V$ und

$$[\tilde{o}_{11}]_U = [\tilde{u}_{12}]_U = [\tilde{u}_{12}]_V[\tilde{u}_{12}]_V^{-1}[\tilde{u}_{12}]_U = [\tilde{u}_{12}]_V n_{12}$$

mit $n_{12} \in N$. Entsprechend für Q_{i2}. Wir bekommen also immer Gleichheit wenn benachbarte Quadrate Q_{i1} und Q_{i2} in dieselbe Menge U oder V abgebildet werden, ansonsten bekommen wir noch einen Korrekturfaktor aus dem Normalteiler.

Als Endergebnis folgt

$$\gamma = [\tilde{u}_{12}]_{U/V}[\tilde{u}_{22}]_{U/V}\cdots[\tilde{u}_{n2}]_{U/V}n_2'$$

mit $n_2' \in N$. Wir wiederholen Schritt 1 in der zweiten Zeile und erhalten

$$\gamma = [\tilde{o}_{12}]_{U/V}[\tilde{o}_{22}]_{U/V}\cdots[\tilde{o}_{n2}]_{U/V}n_2$$

mit $n_2 \in N$. Ist $m = 2$, so sind wir fertig, ansonsten wiederholen wir Schritt 2 so lange nötig. □

8 Überlagerungen

Definition 8.1. Sei X ein zusammenhängender topologischer Raum. Ein Paar $(\tilde{X}, \pi)$ heißt (zusammenhängende) *Überlagerung*, wenn $\tilde{X}$ zusammenhängend und $\pi : \tilde{X} \to X$ eine stetige und surjektive Abbildung ist, so dass folgendes gilt:

Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung $U \subset X$, so dass $\pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{\alpha \in I} \tilde{U}_\alpha$ mit offenen Mengen $\tilde{U}_\alpha \subset \tilde{X}$, und

$$\pi|_{\tilde{U}_\alpha} : U_\alpha \to U$$

ist ein Homöomorphismus.

X heißt *Basisraum*, $\tilde{X}$ heißt *Totalraum* und π heißt *Projektion.*

Bemerkung 8.2. a) Ist U eine Umgebung von $x \in X$ wie in Definition 8.1, so sagen wir, dass U *gleichmäßig überlagert* ist.

b) Das Urbild $F_x := \pi^{-1}(\{x\})$ eines Punktes $x \in X$ heißt *Faser* von x. Im Falle einer Überlagerung $\pi : \tilde{X} \to X$ ist ihre Teilraumtopologie diskret.

c) Die Kardinalität $|I|$ der Faser über x ist unabhängig von x. Denn ist U eine gleichmäßig überlagerte Umgebung, so ist für alle $y \in U$ offenbar $|\pi^{-1}(\{y\})| = |I| = |\pi^{-1}(\{x\})|$. Definiert man nun $V_x := \{y \in X : |\pi^{-1}(\{y\})| = |I|\}$, so ist V_x offen. Da X zusammenhängend ist, folgt $V_x = X$.

Die Anzahl $|I|$ nennt man die *Blätterzahl* der Überlagerung $\pi : \tilde{X} \to X$ und nennt π dann auch eine $|I|$*-blättrige* Überlagerung.

d) Ist U gleichmäßig überlagert und $\pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{\alpha \in I} \tilde{U}_\alpha$, so heißen die $\tilde{U}_\alpha$ die *Blätter* von π über U.

Beispiel 8.3. a) $\pi = \mathrm{ex} : \mathbf{R} \to S^1 : t \mapsto \exp(2\pi i t)$ ist eine ∞-blättrige Überlagerung von S^1, da für $U = S^1 \setminus \{-1\}$ und $V = S^1 \setminus \{1\}$ gilt:

$$\pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbf{Z}} (n - \tfrac{1}{2}, n + \tfrac{1}{2}) \qquad \text{und} \qquad \pi^{-1}(V) = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbf{Z}} (n, n+1)$$

und $\mathrm{ex}|_{(n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2})}$ bzw. $\mathrm{ex}|_{(n,n+1)}$ sind Homöomorphismen. Die Umkehrabbildungen sind $\phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \log(z) + n$ bzw. $\psi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \log(-z) + n + \frac{1}{2}$ wo log der Hauptzweig des komplexen Logarithmus ist.

b) $\pi = \mathrm{id}_X : X \to X$ ist eine 1-blättrige Überlagerung.

c) $\phi_n : S^1 \to S^1 : z \mapsto z^n$ ist eine n-blättrige Überlagerung ($n \in \mathbf{N}$).

d) $\pi : S^n \to \mathbf{R}P^n$ ist eine zweiblättrige Überlagerung. Dabei ist $\mathbf{R}P^n \cong S^n/\{\pm\}$ und $\pi : S^n \to S^n/\{\pm\}$ die Quotientenabbildung die Antipoden identifiziert.

Bemerkung 8.4. a) Die Überlagerungsabbildung π ist surjektiv und ein lokaler Homöomorphismus.

b) Die Umkehrung braucht aber nicht zu gelten. Etwa

$$\mathrm{ex}|_{(0,2)} : (0,2) \to S^1$$

ist surjektiv und lokaler Homöomorphismus, aber keine Überlagerung, da $\pi^{-1}(\{1\})$ einpunktig ist, aber $\pi^{-1}(\{z\})$ zweipunktig für alle $z \in S^1 \setminus \{1\}$.

Definition 8.5. a) Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe G, die außerdem eine Topologie trägt, so dass die Gruppenmultiplikation

$$G \times G \to G : (g,h) \mapsto gh$$

und die Inversenbildung

$$G \to G : g \mapsto g^{-1}$$

stetig sind. Dabei trägt $G \times G$ die Produkttopologie.

b) Eine topologische Gruppe heißt *diskret*, wenn sie die diskrete Topologie trägt.

Beispiel 8.6. a) Die Gruppen $Gl(n, \mathbf{R})$ und $Gl(n, \mathbf{C})$ mit der vom Raum der $n \times n$ Matrizen $Mat(n,n,\mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{n^2}$ bzw. $Mat(n,n,\mathbf{C}) \cong \mathbf{C}^{n^2} \cong \mathbf{R}^{(2n)^2}$ induzierten Teilraumtopologie ist eine topologische Gruppe. Das gleiche gilt für jede abgeschlossene Untergruppe $G \subset Gl(n,\mathbf{R})$, zB. $Sl(n,\mathbf{R})$, $O(n,\mathbf{R}) \subset Gl(n,\mathbf{R})$ bzw. $G \subset Gl(n,\mathbf{C})$ zB. $U(n) \subset Gl(n,\mathbf{C})$.

b) Jede endliche Gruppe, bzw. $\mathbf{Z}$ mit der diskreten Topologie ist eine diskrete Gruppe.

Definition 8.7. Eine *(Gruppen-)Operation* oder *Wirkung* einer topologischen Gruppe G auf einem topologischen Raum X ist gegeben durch eine stetige Abbildung

$$\Phi : G \times X \to X : (g,x) \mapsto g.x,$$

so dass gilt: $1.x = x$ für alle $x \in X$ und $(gh).x = g.(h.x)$ für alle $x \in X$ und $g,h \in G$. In diesem Fall nennen wir X einen *G-Raum*.

Beispiel 8.8. a) Ist $G \subset Gl(n,\mathbf{R})$, so operiert G auf natürliche Weise auf $\mathbf{R}^n$: $(g,x) \mapsto gx$ wobei rechts die Multiplikation einer $n \times n$-Matrix mit einem Vektor gemeint ist.

b) Ist $O(n) \subset Gl(n,\mathbf{R})$, so operiert $O(n)$ auf $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$, da Elemente $g \in O(n)$ die Länge von Vektoren im $\mathbf{R}^n$ nicht ändert. Also ist für $y \in S^{n-1}$ auch $gy \in S^{n-1}$ wobei $g \in O(n)$ und wiederum die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor gemeint ist.

Bemerkung 8.9. G operiere auf X.

a) Ist $g \in G$, so ist die Abbildung $\rho(g) : X \to X : x \mapsto g.x$ ein Homöomorphismus auf X, da $\rho(g)$ stetig ist und $\rho(g^{-1})$ das Inverse von $\rho(g)$ ist:

$$\rho(g^{-1}) \circ \rho(g)(x) = g^{-1}.(g.x) = (g^{-1}.g)x = 1.x = x$$

für alle $x \in X$. Daher ist $\rho(g^{-1}) \circ \rho(g) = \mathrm{id}_X$ und ebenso $\rho(g) \circ \rho(g^{-1}) = \mathrm{id}_X$.

Also ist $\rho : G \to \mathrm{Aut}(X)$ ein Gruppenhomomorphismus. Dabei bezeichnet $\mathrm{Aut}(X)$ die Gruppe der Homöomorphismen von X in sich. ρ heißt dann *Darstellung* von G auf X.

b) Hält man $x \in X$ fest, so nennt man die Menge

$$Gx := \{g.x : g \in G\} \subset X$$

die *Bahn* von x unter G. Gilt für jedes $g \neq 1$, dass $g.x \neq x$ ist, für alle $x \in X$, so sagt man, dass G *(fixpunkt-)frei* auf X operiert. Besteht X nur aus einer Bahn, sagt man, dass G *transitiv* auf X operiert.

c) Definiert man $x \sim y$ wenn $y \in Gx$, also folglich $Gy = Gx$, so ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Der Quotientenraum $X/\sim$ wird mit X/G bezeichnet und heißt *Bahnenraum* von X unter G.

Definition 8.10. Sei G eine topologische Gruppe und X ein topologischer Raum. Eine Wirkung von G auf X heißt *eigentlich diskontinuierlich*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so dass für alle $g_1, g_2 \in G$ mit $g_1 \neq g_2$ gilt, dass $g_1U \cap g_2U = \emptyset$. Hierbei ist $gU = \{g.u : u \in U\}$.

Bemerkung 8.11. Operiert G eigentlich diskontinuierlich auf X, so operiert G auch frei, und G trägt die diskrete Topologie.

Beweis. Sei $x \in X$ und U eine Umgebung von x wie in Definition8.10, so ist $gU \cap U = \emptyset$ für alle $g \in G$, also insbesondere $gx \neq x$ für alle $g \in G$.

Außerdem trägt jede Bahn Gx die diskrete Topologie, da gU eine offene Umgebung von $g.x$ ist, mit $Gx \cap gU = g.x$. G ist homöomorph zu Gx, der Homöomorphismus ist $g \mapsto g.x$, das ist stetig und bijektiv, da die Wirkung frei ist, die Umkehrabbildung ist stetig, da Gx diskret ist. □

Bemerkung 8.12. Ist $\tilde{X}$ ein zusammenhängender Raum, G eine diskrete Gruppe, die eigentlich diskontinuierlich auf X operiert. Dann ist der Bahnenraum $X = \tilde{X}/G$ zusammenhängend und die natürliche Projektion $\pi : \tilde{X} \to \tilde{X}/G$ eine Überlagerung.

Beweis. Sei $x \in X$ und $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x) = F_x \subset \tilde{X}$. Wähle eine Umgebung $\tilde{U}$ von $\tilde{x}$, so dass $g_1U \cap g_2U = \emptyset$ für alle $g_1 \neq g_2 \in G$. Dann gilt für $U = \pi(\tilde{U})$, dass U offen ist, denn

$$\pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{g\in G} g\tilde{U}$$

und alle $g\tilde{U}$ sind offen, da $\rho(g) : \tilde{X} \to \tilde{X}$ ein Homöomorphismus ist.

Es ist auch $\pi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to U$ stetig, bijektiv und offen (dh. für $\tilde{V} \subset \tilde{U}$ offen ist $\pi(\tilde{V}) \subset U$ offen), da

$$\pi^{-1}(\pi(\tilde{V})) = \dot{\bigcup}_{g\in G} g\tilde{V}.$$

Folglich ist $\pi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to U$ ein Homöomorphismus. Außerdem ist $\pi|_{g\tilde{U}} : g\tilde{U} \to U$ ein Homöomorphismus, denn

$$\pi|_{g\tilde{U}} = \left(\pi|_{\tilde{U}}\right) \circ \rho(g^{-1}).$$

Also ist π eine Überlagerung. □

Beispiel 8.13. a) $\mathbf{Z}$ operiert auf $\mathbf{R}$ durch Translationen $n.x = x + n$ mit $x \in \mathbf{R}$ und $n \in \mathbf{Z}$. Diese Operation ist eigentlich diskontinuierlich, da für $n \neq 0$ gilt

$$(x - \tfrac{1}{2}, x + \tfrac{1}{2}) \cap (x + n - \tfrac{1}{2}, x + n + \tfrac{1}{2}) = \emptyset.$$

Der Bahnenraum $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ ist homöomorph zu S^1 vermöge $\overline{\mathrm{ex}} : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to S^1$ und $\overline{\mathrm{ex}} \circ \pi = \mathrm{ex}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R} \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\mathrm{ex}"] & \\ \mathbf{R}/\mathbf{Z} \arrow[r, "\overline{\mathrm{ex}}"] & S^1 \end{tikzcd}$$

b) $\mathbf{Z}^n$ operiert eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbf{R}^n$ durch Translationen $n.x = x + n$ mit $x \in \mathbf{R}^n$ und $n \in \mathbf{Z}^n$. Es ist $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n \cong T^n$.

c) $\mathbf{Z}$ operiert auf $\mathbf{R}^2$ vermöge $n.(x, y) = (x + n, (-1)^n y)$ eigentlich diskontinuierlich. Der Quotient $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}$ ist homöomorph zum offenen Möbiusband, dh. dem Möbiusband ohne Rand.

d) $\mathbf{Z}_2$ operiert auf S^n durch $\pm 1.x = \pm x$ eigentlich diskontinuierlich. Der Bahnenraum ist $\mathbf{R}P^n = S^n/\mathbf{Z}_2$.

Außerdem ist $\mathbf{R}P^n \cong \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathbf{R}^*$, wo $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ durch Homothetien operiert $\lambda.x = \lambda x$ für $\lambda \in \mathbf{R}^*$ und $x \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Diese Wirkung ist aber *nicht* eigentlich diskontinuierlich.

e) $\mathbf{Z}_p = \{\omega \in \mathbf{C} : \omega^p = 1\}$ operiert für q teilerfremd zu p mit $1 \leq q \leq p$ auf $S^3 \subset \mathbf{C}^2$ frei und eigentlich diskontinuierlich vermöge $\omega.(z_1, z_2) = (\omega z_1, \omega^q z_2)$. Der Quotient $L(p, q) := S^3/\mathbf{Z}_p$ heißt der *Linsenraum* für (p, q).

Definition 8.14. Sei $\pi : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Ist Y ein topologischer Raum und $f : X \to Y$ stetig, so nennt man eine stetige Abbildung $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ einen *Lift* von f, wenn $\pi \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Bemerkung 8.15. a) Ist $Y = [0, 1]$ und $f = \alpha : [0, 1] \to X$ ein Weg, so spricht man bei $\tilde{\alpha} : [0, 1] \to \tilde{X}$ mit $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ von einem *gelifteten Weg.*

b) Ist $f : S^1 \to S^1$ stetig und $\alpha = f \circ \mathrm{ex}$, so existiert nach Lemma 6.11 ein Lift $\phi = \tilde{\alpha}$ von α der durch $\tilde{\alpha}(0)$ eindeutig festgelegt ist.

Hier zeigt sich schon, dass $\tilde{\alpha}$ nicht geschlossen zu sein braucht, obwohl α geschlossen ist. In der Tat ist $\tilde{\alpha}$ genau dann geschlossen, wenn $\deg \alpha = 0$.

Lemma 8.16 (Eindeutigkeit von Lifts)**.** *Sei $\pi : \tilde{X} \to X$ ein Überlagerung, Y zusammenhängend und $f : Y \to X$ stetig.*

Sind $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \to \tilde{X}$ Lifts von f mit $\tilde{f}_1(y_0) = \tilde{f}_2(y_0)$ für ein $y_0 \in Y$, so ist $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.

Beweis. Sei $y \in Y$, $x = f(y) \in X$ und U eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von x. Seien $\tilde{U}_1$ und $\tilde{U}_2$ die Blätter über U, die $\tilde{f}_1(y)$ bzw. $\tilde{f}_2(y)$ enthalten.

Setze $V = \tilde{f}_1^{-1}(\tilde{U}_1) \cap \tilde{f}_2^{-1}(\tilde{U}_2)$, dann ist V eine offene Umgebung von y. Damit ist $\tilde{f}_1|_V = (\pi|_{\tilde{U}_1})^{-1} \circ f$ und $\tilde{f}_2|_V = (\pi|_{\tilde{U}_2})^{-1} \circ f$ auf V.

Fall 1 $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2$. Dann ist

$$\tilde{f}_1(z) = (\pi|_{\tilde{U}_1})^{-1}(f(z)) = \tilde{f}_2(z).$$

für alle $z \in V$.

Fall 2 $\tilde{U}_1 \neq \tilde{U}_2$. Dann ist $f_1(z) \neq f_2(z)$ für alle $z \in V$.

Daraus folgt, dass die Menge

$$M := \{y \in Y : \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)\}$$

offen, abgeschlossen und nicht leer ist, da $y_0 \in M$. Da Y zusammenhängend ist, folgt $M = Y$ und daher $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$. □

Lemma 8.17 (Liftung von Wegen). *Sei $\pi : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$ und $\alpha : [0,1] \to X$ ein Weg mit $\alpha(0) = x_0$. Zu jedem $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(\{x_0\})$ existiert genau ein Lift $\tilde{\alpha}$ von α mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$.*

Beweis. Eindeutigkeit folgt aus Lemma 8.16.

Existenz. Sei $0 = t_0 < \ldots < t_k = 1$ eine Unterteilung von $[0,1]$, so dass $\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i \subset X$, wo U_i eine gleichmäßig überlagerte offene Menge in X ist.

Setze $\tilde{\alpha}_1 : [t_0, t_1] \to \tilde{X}$, $\tilde{\alpha}_1 = (\pi|_{\tilde{U}_1})^{-1} \circ \alpha|_{[t_0,t_1]}$, wobei $\tilde{U}_1$ das Blatt über U_1 ist, das x_0 enthält.

Setze induktiv den Weg $\tilde{\alpha}_i : [t_{i-1}, t_i] \to \tilde{X}$ als $\tilde{\alpha}_i := (\pi|_{\tilde{U}_i})^{-1} \circ \alpha|_{[t_i,t_{i+1}]}$, wobei $\tilde{U}_i$ das Blatt über U_i ist, das $\tilde{\alpha}_{i-1}(t_{i-1})$ enthält.

Wir erhalten einen Weg $\tilde{\alpha} : [0,1] \to \tilde{X}$ als $\tilde{\alpha}|_{[t_{i-1},t_i]} = \tilde{\alpha}_i$. Dann ist $\tilde{\alpha}$ stetig und außerdem ein Lift von α, da $\pi \circ \alpha_i = \alpha|_{[t_{i-1},t_i]}$. Nach Wahl von $\tilde{\alpha}_1$ ist $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$. □

Lemma 8.18. *Sei $\pi : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ Wege mit $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ und $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$, so dass $\alpha \simeq \beta \operatorname{rel} \{0,1\}$ gilt. Sind $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : [0,1] \to \tilde{X}$ die Lifts von α und β mit Anfang $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(\{x_0\})$, so ist $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta} \operatorname{rel} \{0,1\}$. Insbesondere ist $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$.*

Beweis. Sei $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ eine Homotopie zwischen α und β relativ $\{0,1\}$.

Wir konstruieren einen Lift $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{X}$ von H mit $\pi \circ \tilde{H} = H$, so dass $\tilde{H}(0,0) = \tilde{x}_0$. Dann ist für alle $s \in [0,1]$

$$\pi \circ \tilde{H}(0,s) = H(0,s) = x_0 \qquad \text{und} \qquad \pi \circ \tilde{H}(1,s) = H(1,s) = x_1.$$

Da $\pi^{-1}(\{x_0\})$ diskret ist, gilt daher $\tilde{H}(0,s) = \text{const} = \tilde{x}_0$ und $\tilde{H}(1,s) = \text{const} = \tilde{x}_1$. Damit ist $\tilde{H}$ eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ zwischen $t \mapsto \tilde{H}(t,0)$ und $t \mapsto \tilde{H}(t,1)$. Wegen des Eindeutigkeitslemma sind dies genau die Lifts $\tilde{\alpha}$ bzw. $\tilde{\beta}$ von α und β mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

Wir zeigen jetzt die Existenz von $\tilde{H}$:

Wähle eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ und $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_l = 1$, so dass $H(Q_{ij}) \subset U_{ij}$, wo $Q_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$ und U_{ij} eine gleichmäßig überlagerte offene Menge in X ist.

Sei $\tilde{U}_{11}$ das Blatt über U_{11}, das $\tilde{x}_0$ enthält. Setze

$$\tilde{H}_{11} : Q_{11} \to \tilde{X} : \tilde{H}_{11} = (\pi|_{\tilde{U}_{11}})^{-1} \circ (H|_{Q_{11}}).$$

Sei nun $\tilde{x}_{21} = \tilde{H}_{11}(t_1, s_0)$ und $\tilde{U}_{21}$ das Blatt über U_{21}, das $\tilde{x}_{21}$ enthält. Setze

$$\tilde{H}_{21} : Q_{21} \to \tilde{X} : \tilde{H}_{21} = (\pi|_{\tilde{U}_{21}})^{-1} \circ (H|_{Q_{21}}).$$

Dann gilt $\tilde{H}_{11} = \tilde{H}_{21}$ auf $\{t_1\} \times [s_0, s_1]$, was aus der Eindeutigkeit der Liftung von Wegen folgt. Also ist $\tilde{H} : Q_{11} \cup Q_{22} \to X$ mit $\tilde{H}|_{Q_{ij}} = \tilde{H}_{ij}$ wohldefiniert und stetig.

Induktiv konstruieren wir so $\tilde{H}$ auf $Q_{31}, \ldots, Q_{k1}$ und entsprechend auf ganz H. □

Bemerkung 8.19. a) Wir können jetzt Lifts von Abbildungen $f : Y \to X$ konstruieren, falls $Y = [0,1]$ oder $Y = [0,1]^2$. Wir wollen die allgemeine Frage stellen, wann sich Abbildungen $f : X \to Y$ liften lassen.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[ur, "\exists \tilde{f}\,?"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

b) Sei (Y, y_0) wegzusammenhängend, $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ stetig und $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(\{x_0\})$. Existiert ein Lift $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{X}_0)$ mit $\pi \circ \tilde{f} = f$, so ist auch

$$\pi_1(\pi)\pi_1(\tilde{f}) = \pi_1(f), \qquad \text{oder} \qquad \pi_* \circ \tilde{f}_* = f_*.$$

Also ist $\mathrm{Bild}(f_*) \subset \mathrm{Bild}(\pi_*)$ in $\pi_1(X, x_0)$. Dies ist also eine notwendige Bedingung für die Existenz von Lifts.

c) Ist $Y = [0,1]$ oder $Y = [0,1]^2$, so ist diese Bedingung trivialerweise erfüllt, da $\pi_1(Y)$ trivial ist.

d) Es existiert kein Lift von $f = \mathrm{id} : S^1 \to S^1$ über $\pi = \mathrm{ex} : \mathbf{R} \to S^1$.

Satz 8.20 (Liftungssatz)**.** *Sei $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung und Y zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann hat eine stetige Abbildung $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ genau dann einen Lift $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, wenn* $\mathrm{Bild}(f_*) \subset \mathrm{Bild}(\pi_*)$.

Beweis. "⇒" Bemerkung 8.19.

"⇐" Sei $y \in Y$ beliebig. Wähle einen Weg w von y_0 nach y, setze $\alpha = f \circ w$ und lifte α zu $\tilde{\alpha}$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$. Definiere jetzt $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ als $\tilde{f}(y) = \tilde{\alpha}(1)$. Zu zeigen ist Wohldefiniertheit und Stetigkeit.

Wohldefiniertheit. Ist v ein weiterer Weg von y_0 nach y, so ist $v * w^{-1}$ ein geschlossener Weg in Y mit Stützpunkt y_0. Wegen

$$f_*([v * w^{-1}]) \subset \mathrm{Bild}(\pi_*)$$

existiert ein geschlossener Weg $\tilde{u}$ in $\tilde{X}$ mit Stützpunkt $\tilde{x}_0$, so dass

$$f_*([v * w^{-1}]) = \pi_*([\tilde{u}]).$$

Also ist

$$(f \circ v) * (f \circ w^{-1}) \simeq \pi \circ \tilde{u} \operatorname{rel} \{0,1\}$$

beziehungsweise

$$f \circ v \simeq (\pi \circ \tilde{u}) * (f \circ w) \operatorname{rel} \{0,1\}.$$

Ist $\tilde{\alpha}$ der Lift von α und $\tilde{\beta}$ der Lift von $\beta = f \circ v$, beide mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$, so ist $\tilde{u} * \tilde{\alpha}$ der Lift von $(\pi \circ \tilde{u}) * (f \circ w)$. Damit gilt nach Lemma 8.18, dass $\tilde{\beta} \simeq \tilde{u} * \tilde{\alpha} \operatorname{rel} \{0,1\}$. Insbesondere ist $\tilde{\beta}(1) = \tilde{\alpha}(1)$. Also hängt die Definition von $\tilde{f}$ nicht von der Wahl von w ab.

Stetigkeit. Sei $y \in Y$ beliebig, $x = f(y)$ und $\tilde{x} = \tilde{f}(y)$. Sei U eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von x und $\tilde{U}$ das Blatt über U das $\tilde{x}$ enthält. Wir suchen jetzt eine offene Umgebung V von y mit $\tilde{f}(V) \subset \tilde{U}$. Da $f^{-1}(U)$ eine offene Umgebung von y ist und Y lokal wegzusammenhängend ist, existiert eine Umgebung $V \subset f^{-1}(U)$ von y, die wegzusammenhängend ist.

Behauptung: $\tilde{f}(V) \subset \tilde{U}$. Sei also $z \in V$ beliebig und w ein Weg von y noch z. Dann ist

$$\tilde{\beta} := (\pi|_{\tilde{U}})^{-1} \circ (f \circ w)$$

ein Lift von $\beta = f \circ w$ mit Anfang $\tilde{x}$. Ist nun v ein Weg von y_0 nach y, so ist $v * w$ ein Weg von y_0 nach z. Für $\alpha = (f \circ v) * (f \circ w)$ ist dann

$$\tilde{\alpha} = \widetilde{(f \circ v)} * \widetilde{(f \circ w)} = \widetilde{(f \circ v)} * \tilde{\beta}.$$

Also ist $\tilde{f}(z) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) \in \tilde{U}$. Damit folgt die Stetigkeit von $\tilde{f}$ in y. □

Bemerkung 8.21. a) Wir wollen im Folgenden den Liftungssatz für $Y = \tilde{X}$ anwenden. Daher nehmen wir ab jetzt an, dass $\tilde{X}$ zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist. Nach Proposition 3.11 ist $\tilde{X}$ dann wegzusammenhängend. Auch X ist dann wegzusammenhängend.

b) Der Liftungssatz zeigt, dass für das Liftungsverhalten von Abbildungen die Untergruppe $H := \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ von $\pi_1(X, x_0)$ eine entscheidende Rolle spielt. Wir nennen H die *charakteristische Untergruppe* von π.

Proposition 8.22. *Sei* $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ *eine Überlagerung. Dann ist die Abbildung* $\pi_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ *injektiv.*

Beweis. Sei $\tilde{\alpha} \subset \tilde{X}$ geschlossen und $\alpha = \pi \circ \tilde{\alpha}$ nullhomotop, dh. $\alpha \simeq c_{x_0} \operatorname{rel} \{0,1\}$. Da $\tilde{\alpha}$ der Lift von α ist und $c_{\tilde{x}_0}$ der Lift von c_{x_0} mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$ ist, folgt mit Proposition 8.18, dass $\tilde{\alpha} \simeq c_{\tilde{x}_0} \operatorname{rel} \{0,1\}$. Folglich ist π_* injektiv. □

Proposition 8.23. *Ist $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung mit charakteristischer Untergruppe H, so ist die Blätterzahl n von π gerade der Index von H in $\pi_1(X, x_0)$, $n = [\pi_1(X, x_0) : H]$.*

Beweis. Sei $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ ein vollständiges Repräsentantensystem der Rechtsnebenklassen von H

$$\pi_1(X, x_0) = \dot{\bigcup}_{i \in I} H[\alpha_i]$$

also $[G : H] = |I|$. Setze nun

$$\Phi : I \to \pi^{-1}(x_0) : \Phi(i) = \tilde{\alpha}_i(1).$$

Φ *ist wohldefiniert:* Ist $\tilde{u}$ ein geschlossener Weg in $\tilde{X}$ mit $\tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = \tilde{x}_0$ und $u = \pi \circ \tilde{u}$. Ist dann $[\beta_i] = [u][\alpha_i]$ ein anderer Vertreter aus $H[\alpha_i]$ so ist $\tilde{\beta}_i(1) = (\tilde{u} * \tilde{\alpha}_i)(1) = \tilde{\alpha}_i(1)$.

Φ *ist surjektiv:* Ist $\tilde{x}' \in \pi^{-1}(x_0)$ beliebig, so wähle $\tilde{\beta}$ von $\tilde{x}_0$ nach $\tilde{x}'$. Folglich ist $\tilde{\beta}$ ein Lift von $\beta := \pi \circ \tilde{\beta}$. Also existiert ein $i \in I$ mit $H[\beta] = H[\alpha_i]$ und $\tilde{x}' = \tilde{\beta}(1) = \tilde{\alpha}_i(1) = \Phi(i)$.

Φ *ist injektiv:* Ist $\tilde{\alpha}_i(1) = \tilde{\alpha}_j(1)$, so ist $\tilde{u} := \tilde{\alpha}_i * \tilde{\alpha}_j^{-1}$ geschlossen. Folglich

$$[\alpha_i][\alpha_j^{-1}] = [(\pi \circ \tilde{\alpha}_i) * (\pi \circ \tilde{\alpha}_j^{-1})] = [\pi \circ (\tilde{\alpha}_i * \tilde{\alpha}_j^{-1})] = [u] \in H.$$

Also ist $H[\alpha_i] = H[\alpha_i][\alpha_j^{-1}][\alpha_j] = H[u][\alpha_j] = H[\alpha_j]$. □

Bemerkung 8.24. Ist also (X, x_0) einfach zusammenhängend, so existiert (im wesentlichen) nur eine Überlagerung, nämlich die Identität, da eine 1-blättrige Überlagerung notwendig ein Homöomorphismus ist.

Definition 8.25. a) Seien $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ und $\pi' : (\tilde{X}'_0, \tilde{x}'_0) \to (X, x_0)$ zwei Überlagerungen. Eine stetige Abbildung $f : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}', \tilde{x}'_0)$ heißt *Überlagerungsmorphismus*, wenn $\pi' \circ f = \pi$ ist.

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (\tilde{X}', \tilde{x}'_0) \arrow[dl, "\pi'"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

b) Ein Überlagerungsmorphismus $f : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}', \tilde{x}'_0)$ heißt *Überlagerungsisomorphismus*, wenn es einen Überlagerungsmorphismus $g : (\tilde{X}', x'_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ gibt, so dass $g \circ f = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{\tilde{X}'}$. Dann heißen π und π' *äquivalent.*

Bemerkung 8.26. a) Jeder Überlagerungsmorphismus ist selbst eine Überlagerung.

b) Ein Überlagerungsmorphismus ist ein Lift von π bzgl. π'. Da $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'_0$ gilt, gibt es wegen Lemma 8.16 höchstens einen solchen Überlagerungsmorphismus.

c) Der Liftungssatz impliziert, dass es einen Überlagerungsmorphismus $f : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}', \tilde{x}_0')$ genau dann gibt, wenn $\mathrm{Bild}(\pi_*) \subset \mathrm{Bild}(\pi'_*)$.

Satz 8.27. *Zwei Überlagerungen $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ und $\pi' : (\tilde{X}_0', \tilde{x}_0') \to (X, x_0)$ sind genau dann äquivalent, wenn ihre charakteristischen Untergruppen H und H' in $\pi_1(X, x_0)$ übereinstimmen.*

Beweis.

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (\tilde{X}', \tilde{x}_0') \arrow[ll, shift left, "g"] \arrow[dl, "\pi'"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

"$\Rightarrow$" Aus der Existenz von f folgt $H \subset H'$ und aus der Existenz von g folgt $H' \subset H$, folglich $H = H'$.

"$\Leftarrow$" Aus $H \subset H'$ folgt die Existenz von f und aus $H' \subset H$ die Existenz von g. Die Gleichungen $g \circ f = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$ bzw. $f \circ g = \mathrm{id}_{\tilde{X}'}$ folgen, da es jeweils nur einen Überlagerungsmorphismus $(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ bzw. $(\tilde{X}', \tilde{x}_0') \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0')$ gibt. □

Um die Existenz von Überlagerungen zu klären, müssen wir uns folgenden Fragen widmen:

a) Welche Untergruppen $H \subset \pi_1(X, x_0)$ treten als $\mathrm{Bild}(\pi_*)$ einer Überlagerung $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ auf?

b) Wie hängt $\mathrm{Bild}(\pi_*)$ vom Basispunkt $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ ab?

Proposition 8.28. *Sei $\pi : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $x_0 \in X$.*

a) Sind $\tilde{x}_0$ und $\tilde{x}_0' \in \pi^{-1}(x_0)$, so gilt für die charakteristischen Untergruppen H, H' von π bezüglich $\tilde{x}_0$ bzw. $\tilde{x}_0'$, dass $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ existiert mit

$$H' = [\alpha] H [\alpha^{-1}],$$

dh. H und H' sind konjugiert.

b) Ist $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ und H die charakteristische Untergruppe von $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$. Ist H' konjugiert zu H, dann existiert ein $\tilde{x}_0' \in \pi^{-1}(x_0)$ so, dass H' die charakteristische Untergruppe für $\pi' : (\tilde{X}, \tilde{x}_0') \to (X, x_0)$ ist.

Beweis. a) Sei $\tilde{\alpha}$ ein Weg von $\tilde{x}_0$ nach $\tilde{x}_0'$. Bach Bemerkung 7.9 ist die Abbildung

$$\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0') \to \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) : [\tilde{\beta}] \mapsto [\tilde{\alpha} * \tilde{\beta} * \tilde{\alpha}^{-1}]$$

ein Gruppenisomorphismus. Der Weg $\alpha := \pi \circ \tilde{\alpha}$ ist geschlossen, da $\tilde{x}_0$ und $\tilde{x}_0'$ auf x_0 abgebildet werden. Dann ist

$$H' = \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0')) = [\alpha] \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))[\alpha^{-1}] = [\alpha] H [\alpha]^{-1}.$$

b) Ist $H = \mathrm{Bild}(\pi_*)$ und $H' = [\alpha]H[\alpha]^{-1}$ für ein $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. Lifte α zu $\tilde{\alpha}$ mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$ und setze $\tilde{x}_0' := \tilde{\alpha}(1)$. Wegen Teil a) folgt dass
$$\mathrm{Bild}(\pi_*') = [\alpha]H[\alpha]^{-1} = H'.$$
□

Bemerkung 8.29. a) Betrachtet man eine Überlagerung $\pi : \tilde{X} \to X$ ohne Basispunkte zu fixieren, so bekommt man für jede Wahl von $x_0 \in X$ eine ganze Konjugationsklasse von Untergruppen in $\pi_1(X, x_0)$, nämlich
$$\left\{\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) : \tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)\right\},$$
sie heißt die *charakteristische Konjugationsklasse* von π.

b) Ist $H = \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ ein Normalteiler in $\pi_1(X, x_0)$ für ein $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, so sind alle Konjugierten von H gleich H. Solche Überlagerungen sollten besondere Betrachtung finden.

Definition 8.30. Eine Überlagerung heißt *regulär*, *normal* oder *galoisch*, wenn für jede Wahl von $x_0 \in X$ und $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(\{x_0\})$ gilt, dass die charakteristische Untergruppe H von $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Normalteiler in $\pi_1(X, x_0)$ ist.

Definition 8.31. Sei $\pi : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Eine *Decktransformation* $f : \tilde{X} \to \tilde{X}$ ist ein Überlagerungsmorphismus (also $\pi \circ f = \pi$), so dass es einen Überlagerungsmorphismus $g : \tilde{X} \to \tilde{X}$ gibt mit $g \circ f = f \circ g = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$.

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (\tilde{X}, \tilde{x}_0') \arrow[ll, shift left, "g"] \arrow[dl, "\pi"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 8.32. Die Menge aller Decktransformationen von $\pi : \tilde{X} \to X$ wird mit $\mathrm{Deck}(\tilde{X}, X)$ bezeichnet. $\mathrm{Deck}(\tilde{X}, X)$ ist eine Untergruppe der Homöomorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\tilde{X})$, sie heißt *Decktransformationsgruppe.*

Proposition 8.33. *Eine Überlagerung $\pi : \tilde{X} \to X$ ist genau dann regulär, wenn die Decktransformationsgruppe $\Gamma = \mathrm{Deck}(\tilde{X}, X)$ auf einer (und damit auf jeder) Faser $\pi^{-1}(\{x\})$ transitiv ist.*

Beweis. "⇒" Seien $\tilde{x}_0, \tilde{x}_0' \in \pi^{-1}(x_0)$. Sind H bzw. H' die charakteristischen Untergruppen von $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ bzw. $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0') \to (X, x_0)$, so folgt aus der Annahme, dass $H = H'$.

Nach dem Liftungssatz existiert ein Lift γ von $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ mit $\gamma : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0')$ mit $\pi \circ \gamma = \pi$ und $\gamma(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0'$.

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[rr, shift left, "\gamma"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (\tilde{X}, \tilde{x}_0') \arrow[ll, shift left, "\gamma^{-1}"] \arrow[dl, "\pi"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Außerdem existiert ein Lift γ^{-1} mit $\pi\circ\gamma^{-1} = \pi$ und $\gamma^{-1}(\tilde{x}_0') = \tilde{x}_0$. Dann sind $\gamma\circ\gamma^{-1}$ bzw. $\gamma^{-1}\circ\gamma$ Lifts von π mit $\gamma\circ\gamma^{-1}(\tilde{x}_0') = \tilde{x}_0'$ bzw. $\gamma^{-1}\circ\gamma(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$, also $\gamma\circ\gamma^{-1} = \gamma^{-1}\circ\gamma = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$, da Lifts eindeutig sind.

"$\Leftarrow$" Ist $H' = [\alpha]H[\alpha^{-1}]$ und H charakteristische Untergruppe von $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$, so gibt es wegen Proposition 8.28 ein $\tilde{x}_0' \in \pi^{-1}(x_0)$, so dass H' charakteristische Untergruppe von $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0') \to (X, x_0)$ ist. Da aber $\gamma \in \Gamma$ existiert mit $\gamma(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0'$ gilt $H \subset H'$ und ebenso $H \subset H'$, also $H = H'$. Daraus folgt, dass $H \subset \pi_1(X, x_0)$ Normalteiler ist. □

Bemerkung 8.34. Ist $\pi : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $\Gamma = \mathrm{Deck}(\tilde{X}, X)$, so operiert Γ eigentlich diskontinuierlich auf $\tilde{X}$.

Beweis. Sei $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ und $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ mit $\gamma_1 \neq \gamma_2$ also $\gamma_1(\tilde{x}_0) \neq \gamma_2(\tilde{x}_0)$.

Sei U eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von $x_0 = \pi(\tilde{x}_0)$, so gilt für die Blätter $\tilde{U}_0, \tilde{U}_1, \tilde{U}_2$ über U, die $\tilde{x}_0$, $\gamma_1(\tilde{x}_0)$ bzw. $\gamma_2(\tilde{x}_0)$ enthalten, dass $\tilde{U}_1 = \gamma_1(\tilde{U}_0)$, $\tilde{U}_2 = \gamma_2(\tilde{U}_0)$ und $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \emptyset$. Also operiert Γ eigentlich diskontinuierlich. □

Proposition 8.35. *a) Operiert $G \subset \mathrm{Aut}(\tilde{X})$ eigentlich diskontinuierlich auf $\tilde{X}$, so ist die Überlagerung $\pi : \tilde{X} \to \tilde{X}/G =: X$ regulär und* $\mathrm{Deck}(\tilde{X}, X) = G$.

b) Ist $\pi' : \tilde{X} \to X$ eine reguläre Überlagerung und $G = \mathrm{Deck}(\tilde{X}, X)$, so existiert ein Homöomorphismus $\Phi : \tilde{X}/G \to X$ mit $\Phi \circ \pi = \pi'$.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[dl, "\pi'"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ X & & \tilde{X}/G \arrow[ll, "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

Beweis. a) G operiert transitiv auf den Fasern der Überlagerung

$$\pi : \tilde{X} \to \tilde{X}/G,$$

(Fasern sind die $G\tilde{x}_0$ mit $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$) also ist π regulär. Klar ist auch, dass $G \subset \mathrm{Deck}(\tilde{X}, \tilde{X}/G)$. Da jedes Element $f \in \mathrm{Deck}(\tilde{X}, \tilde{X}/G)$ durch $f(\tilde{x}_0) \in \pi^{-1}(\{\pi(\tilde{x}_0)\})$ festgelegt ist, und G frei operiert, ist tatsächlich $G = \mathrm{Deck}(\tilde{X}, \tilde{X}/G)$.

b) Da $\pi' \circ \gamma = \pi'$ für alle $\gamma \in \mathrm{Deck}(\tilde{X}, X)$ und $\pi' : \tilde{X} \to X$ regulär ist, folgt, dass ein stetiges $\Phi : \tilde{X}/G \to X$ mit $\Phi \circ \pi = \pi'$ existiert.

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi'"] & \\ \tilde{X}/G \arrow[r, "\Phi"] & X \end{tikzcd}$$

Φ ist surjektiv, da π und π' surjektiv sind. Φ ist injektiv, da π' regulär ist. Da π, π' beides lokale Homöomorphismen sind, ist auch Φ ein lokaler Homöomorphismus.

□

Bemerkung 8.36. Ist $\pi : \tilde{X} \to X$ eine reguläre Überlagerung, G ihre Decktransformationsgruppe, $x_0 \in X$ und H die charakteristische Untergruppe in $\pi_1(X, x_0)$, so ist $G \cong \pi_1(X, x_0)/H$.

Beweis. Sei $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(\{x_0\})$ fest, $\gamma \in G$ und $\tilde{\alpha}_\gamma$ ein Weg von $\tilde{x}_0$ nach $\gamma(\tilde{x}_0)$. Wir setzen

$$\Phi : G \to \pi_1(X, x_0)/H : \gamma \mapsto [\alpha_\gamma]H = H[\alpha_\gamma],$$

wo $\alpha_\gamma = \pi \circ \tilde{\alpha}_\gamma$ ist.

Φ *ist wohldefiniert:* Ist $\tilde{\beta}_\gamma$ ein weiterer Weg von $\tilde{x}_0$ nach $\gamma(\tilde{x}_0)$, dann ist $\tilde{\alpha}_\gamma * \tilde{\beta}_\gamma^{-1} =: \tilde{u}$ geschlossen, also

$$[\alpha_\gamma] = \pi_*([\tilde{u}])[\beta_\gamma] \text{ in } \pi_1(X, x_0).$$

Also ist $[\alpha_\gamma] \in H[\beta_\gamma] = [\beta_\gamma]H$. Insbesondere stimmen die Linksnebenklassen überein.

Φ *ist Homomorphismus:* Sind $\gamma_1, \gamma_2 \in G$, $\tilde{\alpha}_i$ ein Weg von $\tilde{x}_0$ nach $\gamma_i(\tilde{x}_0)$ für $i = 1, 2$, so ist $\tilde{\alpha}_1 * (\gamma_1 \circ \tilde{\alpha}_2)$ ein Weg von $\tilde{x}_0$ nach $\gamma_1(\gamma_2(\tilde{x}_0))$. Also

$$\Phi(\gamma_1\gamma_2) = [\pi \circ (\tilde{\alpha}_1 * (\gamma_1 \circ \tilde{\alpha}_2))]H = [\alpha_1][\alpha_2]H = [\alpha_1]H[\alpha_2]H = \Phi(\gamma_1)\Phi(\gamma_2).$$

Φ *ist injektiv:* Sei $\gamma \in G$ und $\Phi(\gamma) = 1H$. Ist $\tilde{\alpha}_\gamma$ wie oben, so ist $[\alpha] = \pi_*([\tilde{u}])$ für einen geschlossenen Weg $\tilde{u}$ in X. Also ist $\alpha \simeq \pi \circ \tilde{u}$ bzw. $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{u}$. Daraus folgt $\gamma(\tilde{x}_0) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{u}(1) = \tilde{x}_0$ und damit $\gamma = \mathrm{id}$.

Φ *ist surjektiv:* Ist $[\alpha]H \in \pi_1(X, x_0)/H$ und $\tilde{\alpha}$ ein Lift von α mit Anfang $\tilde{x}_0$. Wegen der Regularität folgt aus Proposition 8.33 die Existenz von $\gamma \in G$ mit $\gamma(\tilde{x}_0) = \tilde{\alpha}(1)$. Dann ist $\Phi(\gamma) = [\alpha]H$. □

Bemerkung 8.37. Für nicht reguläre Überlagerungen ist Φ ein Isomorphismus nach $\operatorname{Norm} H/H$, wo $\operatorname{Norm} H$ der Normalisator von H in $\pi_1(X, x_0)$ ist.

Bemerkung 8.38. Bemerkung 8.36 erlaubt es die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ zu berechnen, wenn $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ und die Decktransformationen bekannt sind. Am einfachsten ist dies, wenn $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = 1$ ist, dann ist nämlich $\pi_1(X, x_0) = \operatorname{Deck}(\tilde{X}, X)$.

Korollar 8.39. *Operiert Γ eigentlich diskontinuierlich auf einem einfach zusammenhängenden Raum $\tilde{X}$, so gilt für die Fundamentalgruppe von $X = \tilde{X}/\Gamma$, dass $\pi_1(X) \cong \Gamma$.*

Beispiel 8.40. a) Da $S^1 \cong \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ und $\pi_1(\mathbf{R}) = 1$ ist, gilt $\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$.

b) $\mathbf{R}P^n \cong S^n/\mathbf{Z}_2$ und S^n ist einfach zusammenhängend für $n \geq 2$, also ist in diesem Fall $\pi_1(\mathbf{R}P^n) \cong \mathbf{Z}_2$.

c) Für die Linsenräume $L(p, q) = S^3/\mathbf{Z}_p$ ist aus dem gleichen Grund $\pi_1(L(p, q)) \cong \mathbf{Z}_p$.

Definition 8.41. Ist $\hat{\pi} : \hat{X} \to X$ eine Überlagerung und $\hat{X}$ einfach zusammenhängend, so heißt $\hat{\pi}$ die *universelle Überlagerung.*

Bemerkung 8.42. a) Ist $x_0 \in X$ und $\hat{x}_0 \in \hat{\pi}^{-1}(x_0)$, so ist $\hat{\pi} : (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (X, x_0)$ universell in folgendem Sinne: Ist $\tilde{\pi} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine weitere Überlagerung von X, so existiert genau ein Überlagerungsmorphismus $\Phi : (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, nämlich der Lift von $\hat{\pi}$ entlang $\tilde{\pi}$.

$$\begin{tikzcd}
(\hat{X}, \hat{x}_0) \arrow[rr, "\exists ! \Phi"] \arrow[dr, "\hat{\pi}"'] & & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[dl, "\tilde{\pi}"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

b) Daraus folgt, dass die universelle Überlagerung bis auf einen Überlagerungsisomorphismus eindeutig ist.

c) Offenbar sind $\mathrm{ex} : \mathbf{R} \to S^1$, $\pi : S^n \to \mathbf{R}P^n$, $\pi : S^3 \to L(p, q)$ und $\pi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n = T^n$ universelle Überlagerungen.

Theorem 8.43 (Hauptsatz der Überlagerungstheorie)**.** *Sei (X, x_0) ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender topologischer Raum, der eine universelle Überlagerung besitzt. Dann gibt es zu jeder Untergruppe H der Fundamentalgruppe von (X, x_0) bis auf Isomorphie genau eine Überlagerung $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$, deren charakteristische Untergruppe gerade H ist.*

Beweis. Eindeutigkeit folgt aus Satz 8.27.

Existenz: Sei $G = \pi_1(X, x_0)$. Wir fassen G als Decktransformationen von $\hat{\pi} : (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (X, x_0)$ vermöge des Isomorphismus

$$\Phi : G \to \mathrm{Deck}(\hat{X}, X) : [\alpha] \mapsto \gamma,$$

wo γ die Decktransformation von $\hat{X}$ ist, die $\hat{x}_0$ in $\hat{\alpha}(1)$ überführt. Dabei ist $\hat{\alpha}$ der Lift von α mit Startpunkt $\hat{x}_0$.

Idee: wenn es überhaupt ein $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ gibt, das charakteristische Untergruppe H hat, so existiert ein eindeutig bestimmtes $f : (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $\pi \circ f = \hat{\pi}$, und dieses f muss eine universelle Überlagerung von $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ sein. Da f regulär ist, ist damit $\tilde{X} = \hat{X}/H$ der einzige Kandidat.

Setze also $\tilde{X} := \hat{X}/H$. Weil $\hat{\pi}(\gamma(\hat{x})) = \hat{\pi}(\hat{x})$ für alle $\gamma \in H, \hat{x} \in \hat{X}$, existiert genau ein stetiges $\pi : \tilde{X} \to X$ mit $\pi \circ f = \hat{\pi}$.

$$\begin{tikzcd}
\hat{X} \arrow[r, "\hat{\pi}"] \arrow[d, "f"] & X \\
\tilde{X} = \hat{X}/H \arrow[ur, "\exists ! \pi"'] &
\end{tikzcd}$$

Ist $x \in X$ beliebig, so wähle eine Umgebung U von x, die bezüglich $\hat{\pi}$ gleichmäßig überlagert ist.

$$\hat{\pi}^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{\alpha \in I} \hat{U}_\alpha.$$

In der Indexmenge I setzte $\alpha \sim \beta$ wenn es ein $\gamma \in H$ gibt mit $\gamma \hat{U}_\alpha = \hat{U}_\beta$. Sei $J \subset I$ ein vollständiges Repräsentantensystem für diese Äquivalenzrelation, dann ist

$$\pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{\beta \in J} \tilde{U}_\beta$$

wo $\tilde{U}_\beta = f(\hat{U}_\beta)$ ist, und für jedes $\beta \in J$ gilt $\pi|_{\tilde{U}_\beta} : \tilde{U}_\beta \to U$ ist ein Homöomorphismus, denn $f \circ (\hat{\pi}|_{\tilde{U}_\beta}^{-1})$ ist das Inverse. Also ist π eine Überlagerung.

Schließlich gilt: $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ ist in $H \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Phi(H) \subset \mathrm{Deck}(\hat{X}, X)$ mit $\gamma\hat{x}_0 = \hat{\alpha}(1)$ $\Leftrightarrow [\alpha] \in \mathrm{Bild}(\pi_*)$. □

Beispiel 8.44. a) Zur Untergruppe $n\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}$ für $n \geq 1$ gehört die Überlagerung $\mathrm{pot}_n : S^1 \to S^1 : z \mapsto z^n$. Es gibt nur diese und die universelle $\hat{\pi} = \mathrm{ex} : \mathbf{R} \to S^1$.

b) Da $\pi_1(\mathbf{R}P^n) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ für $n \geq 2$, gibt es nur zwei Überlagerungen, nämlich $\mathrm{id} : \mathbf{R}P^n \to \mathbf{R}P^n$ und $\pi : S^n \to \mathbf{R}P^n$.

Frage: Wann existiert eine universelle Überlagerung?

Bemerkung 8.45. Sei X lokal wegzusammenhängend und zusammenhängend. Hat X eine universelle Überlagerung, so hat jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U \subset X$, so dass für die Inklusion $i : (U, x) \to (X, x)$ gilt, dass $i_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ trivial ist.

Beweis. Sei $\hat{\pi} : \hat{X} \to X$ universelle Überlagerung von X und $x \in X$. Wähle eine gleichmäßig überlagerte Umgebung $U \subset X$ von x und $\hat{x} \in \hat{\pi}^{-1}(x)$. Sei $\hat{U} \subset \hat{X}$ das Blatt über U, das $\hat{x}$ enthält. Ist $[\alpha]_U \in \pi_1(U, x)$, so ist $\hat{\alpha} := (\hat{\pi}|_{\hat{U}})^{-1} \circ \alpha$ ein geschlossener Lift von α, also $[\hat{\alpha}]_{\hat{X}} = 1$ und folglich $i_*([\alpha]_U) = [\alpha]_X = \hat{\pi}_*([\hat{\alpha}]_{\hat{X}}) = 1$. □

Definition 8.46. Ein lokal wegzusammenhängender, zusammenhängender topologischer Raum heißt *semilokal einfach zusammenhängend*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ besitzt, so dass für $i : (U, x) \to (X, x)$ die Abbildung $i_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ trivial ist.

Beispiel 8.47. a) Hat jedes $x \in X$ eine einfach zusammenhängende Umgebung U, also $\pi_1(U) = 1$, so ist X semilokal einfach zusammenhängend.

b) Insbesondere sind alle Mannigfaltigkeiten semilokal einfach zusammenhängend.

c) Ein unendliches Produkt von Kreislinien $S^1 \times S^1 \times \ldots$ ist nicht semilokal einfach zusammenhängend.

d) Ein unendliches Bukett von Kreislinien $X = \bigvee_{n=1}^{\infty} S^1$ ist semilokal einfach zusammenhängend.

e) Der Raum
$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x - \tfrac{1}{n})^2 + y^2 = \tfrac{1}{n^2}\right\}$$
ist nicht semilokal einfach zusammenhängend. Insbesondere ist $X \not\cong Y$.

Satz 8.48. *Ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender Raum X ist genau dann semilokal einfach zusammenhängend, wenn er eine universelle Überlagerung besitzt.*

Beweisidee: "$\Leftarrow$" Bemerkung 8.45.

"$\Rightarrow$" Ist $\hat{\pi} : (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (X, x_0)$ eine universelle Überlagerung, so ist $\hat{\pi}$ ein "Bündel" über X mit Faser $\Gamma = \pi_1(X, x_0)$, d.h. für alle $x \in X$ existiert eine offene, wegzusammenhängende, Umgebung U von x, so dass $\hat{\pi}^{-1}(U) \cong U \times \Gamma$, wobei Γ die diskrete Topologie trägt. Ein Homöomorphismus ist folgendermaßen gegeben. Wähle einen Weg γ von x_0 nach x und für jedes $y \in U$ einen Weg w von x nach y in U. Setze für $\alpha = \gamma * w$

$$\Phi_{U,\gamma} : U \times \Gamma \to \hat{\pi}^{-1}(U) : (y, [\beta]) \mapsto \hat{\alpha}(1),$$

wo $\hat{\alpha}$ der Lift von α ist mit $\hat{\alpha}(0) = \hat{\beta}(1)$ und $\hat{\beta}$ ist Lift von β mit Anfangspunkt $\hat{x}_0$.

$\Phi_{U,\gamma}$ *ist wohldefiniert*, falls $i_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ trivial ist, denn dann sind alle möglichen w homotop zueinander, und Endpunkte von Lifts hängen nur von der Homotopieklasse ab.

$\Phi_{U,\gamma}$ *ist surjektiv*, denn zu $\hat{y} \in \hat{\pi}^{-1}(U)$ wähle $\hat{U}$, das Blatt, das $\hat{y}$ enthält und $\hat{x} = \hat{\pi}^{-1}(x) \cap \hat{U}$. Wähle einen Weg $\hat{u}$ von $\hat{\gamma}(1)$ nach $\hat{x}$. Dann gilt mit $\beta := \gamma * \pi \circ \hat{u} * \gamma^{-1}$, dass $\Phi_{U,\gamma}(\hat{\pi}(\hat{y}), [\beta]) = \hat{y}$.

$\Phi_{U,\gamma}$ *ist injektiv*, denn $\Phi_{U,\gamma}(y_1, [\beta_1]) = \Phi_{U,\gamma}(y_2, [\beta_2])$, genau dann wenn $y_1 = y_2$ und $\hat{\beta}_1 * \hat{\beta}_2$ ein geschlossener Weg und damit nullhomotop ist. Dann ist $[\beta_1 * \beta_2^{-1}] = 1$ bzw. $[\beta_1] = [\beta_2]$.

$\Phi_{U,\gamma}$ *ist Homöomorphismus*, denn ist $\hat{U}_{[\beta]}$ das Blatt über U ist, das $\Phi_{U,\gamma}(x, [\beta])$, so ist $\Phi_{U,\gamma} : U \times \{[\beta]\} \to \hat{U}_{[\beta]}$, ist ein Homöomorphismus, da $\pi \circ \Phi_{U,\gamma} : U \times \{[\beta]\} \to U$ ein Homöomorphismus ist.

Ist $\hat{\pi} : \hat{X} \to X$ gegeben, so können wir X durch offene Mengen $\{U_j : j \in J\}$ überdecken, die wegzusammenhängend sind, und für die $i_* : \pi_1(U_j) \to \pi_1(X)$ trivial ist. Wähle $x_j \in U_j$ und Wege γ_j von x_0 nach x_j. Sind $i_j : \hat{\pi}^{-1}(U_j) \to \hat{X}$ die Inklusionen, so ist

$$F : \sum_{j \in J} U_j \times \Gamma \to \hat{X} \quad \text{mit} \quad F|_{U_j \times \Gamma} = i_j \circ \Phi_{U_j,\gamma_j}$$

eine surjektive Abbildung.

Setzen wir für $y_{j_i} \in U_{j_i} \times \Gamma$, $i = 1, 2$ dass $y_{j_1} \sim y_{j_2} \Leftrightarrow F(y_{j_1}) = F(y_{j_2})$, so folgt, dass $\hat{X} = \sum_{j \in J} U_j \times \Gamma / \sim$.

Um $\hat{X}$ zu konstruieren müssen wir also diese Relation berechnen. Dies tun wir indem wir *Klebeabbildungen* $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \Gamma$ bestimmen, so dass gilt

$$\Phi^{-1}_{U_j,\gamma_j} \circ \Phi_{U_i,\gamma_i}(x, [\alpha]) = (x, g_{ij}[\alpha]).$$

Ist $\hat{X}$ gegeben, so können wir die g_{ij} wie folgt berechnen. Setze $\Phi_i := \Phi_{U_i,\gamma_i}$ bzw. $\Phi_j = \Phi_{U_j,\gamma_j}$. Für $\Phi_j^{-1} \circ \Phi_i : (U_i \cap U_j) \times \Gamma \to (U_i \cap U_j) \times \Gamma$ gilt

$$(y, [\beta]) \mapsto (y, [\alpha * (\gamma_i * w_i * w_j^{-1} * \gamma_j^{-1})]),$$

wo w_i Weg von x_i nach y ist und w_j ist ein Weg von x_j nach y. Denn

$$\begin{aligned} \Phi_i(y, [\alpha]) = \Phi_j(y, [\beta]) &\Leftrightarrow \alpha \widehat{* \gamma_i *} w_i(1) = \beta \widehat{* \gamma_j * w_j}(1) \\ &\Leftrightarrow (\alpha * \gamma_i * w_i * w_j^{-1} * \gamma_j^{-1})\widehat{\ } = \hat{\beta}(1). \end{aligned}$$

Setzen wir $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \Gamma : y \mapsto [\gamma_i * w_i * w_j^{-1} * \gamma_j^{-1}]$, so gilt $\Phi_j^{-1} \circ \Phi_i(y, [\alpha]) = (y, [\alpha] g_{ij}(y))$.

Dann ist g_{ij} unabhängig von den Wahlen w_i, w_j und außerdem ist g_{ij} konstant auf den Zusammenhangskomponenten von $U_i \cap U_j$, also ist g_{ij} stetig. Damit können wir nun den Beweis beginnen.

Beweis (von Satz 8.48). Sei $x_0 \in X$. Wähle eine Überdeckung $\{U_i : i \in I\}$ von X und Punkte $x_i \in U_i$, so dass $i_* : \pi_1(U_i, x_i) \to \pi_1(X, x_i)$ trivial ist. Wähle nun feste Wege γ_i von x_0 nach x_i. Für jedes Paar $(i, j) \in I \times I$ setze

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to \Gamma : x \mapsto [\gamma_i * w_i * w_j^{-1} * \gamma_j^{-1}]$$

wobei w_i ein Weg in U_i von x_i nach x ist und w_j ist ein Weg in U_j von x_j nach x. Da $i_* : \pi_1(U_i, x_i) \to \pi_1(X, x_i)$ trivial ist, hängt g_{ij} nicht von der Wahl der Wege w_i und w_j ab und ist auf Zusammenhangskomponenten von $U_i \cap U_j$ konstant.

Setze schließlich für $(x, [\alpha]) \in U_i \times \Gamma$ und $(y, [\beta]) \in U_j \times \Gamma$ die Relation $(x, [\alpha]) \sim (y, [\beta]) :\Leftrightarrow x = y$ und $[\beta] = [\alpha] g_{ij}(x)$. Definiere $\hat{X} := (\sum_{i \in I} U_i \times \Gamma)/\sim$.

Bezeichne

$$q : \sum_{i \in I} U_i \times \Gamma \to \hat{X} : (x, [\alpha])_i \mapsto \{(x, [\alpha])_i\}$$

wobei $(x, [\alpha])_i \in U_i \times \Gamma$ und $\{(x, [\alpha])_i\}$ die Äquivalenzklasse davon in $\hat{X}$ ist. Setze

$$\hat{\pi} : \hat{X} \to X : \{(x, [\alpha])_i\} \mapsto x.$$

Ist $i_0 \in I$ und $x_0 \in U_{i_0}$, so setze $\hat{x}_0 := \{(x_0, 1)_{i_0}\}$.

Nach Konstruktion ist

$$q|_{U_i \times \{[\alpha]\}} : U_i \times \{[\alpha]\} \to \hat{U}^i_{[\alpha]} := q(U_i \times \{[\alpha]\})$$

ein Homöomorphismus, denn q ist bijektiv, da $\sim$ nur Punkte aus verschiedenen $U_i \times \{[\alpha]\}$ und $U_j \times \{[\beta]\}$ identifiziert, und damit ein Homöomorphismus nach Definition der Quotiententopologie. Außerdem ist

$$\hat{\pi}^{-1}(U_i) = \dot{\bigcup}_{[\alpha] \in \Gamma} \hat{U}^i_{[\alpha]}.$$

Also ist $\hat{\pi}$ eine eventuell nicht zusammenhängende Überlagerung, insbesondere ist $\hat{X}$ lokal wegzusammenhängend.

Für den Beweis benötigen wir weiterhin folgendes Lemma:

Lemma 8.49. *Sei $x_0 \in U_{i_0}$, $[\alpha] \in \Gamma = \pi_1(X, x_0)$. Dann gilt für alle $[\beta] \in \Gamma$, dass der Lift $\hat{\alpha}$ von α mit Anfang $\{x_0, [\beta])_{i_0}\}$ Endpunkt $\{(x_0, [\beta][\alpha])_{i_0}\}$ hat.*

Damit können wir den Beweis von Satz 8.48 nun fortsetzen.

$\hat{X}$ ist zusammenhängend. Sin $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \hat{X}$. Wähle einen Weg γ_1 von $x_1 = \hat{\pi}(\hat{x}_1)$ nach x_0 und einen Weg γ_2 von $x_2 = \hat{\pi}(\hat{x}_2)$ nach x_0. Lifte diese zu $\hat{\gamma}_1$ bzw. $\hat{\gamma}_2$ mit anfangspunkten $\hat{x}_1$ bzw. $\hat{x}_2$. Daher sind $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$ mit der Faser $\hat{\pi}^{-1}(x_0)$ verbindbar.

Wir können im Folgenden also ohne Einschränkung annehmen, dass $\hat{x}_1 = \{(x_0, 1)_{i_0}\}$ und $\hat{x}_2 = \{(x_0, [\alpha])_{i_0}\}$. Der Lift von α verbindet nach Lemma 8.49 aber gerade $\hat{x}_1$ mit $\hat{x}_2$.

$\hat{X}$ ist einfach zusammenhängend. Für $\hat{x}_0 = \{(x_0, 1)_{i_0}\}$ sei $[\hat{\alpha}] \in \pi_1(\hat{X}, \hat{x}_0)$. Dann ist $\hat{\alpha}$ Lift von $\alpha = \hat{\pi} \circ \hat{\alpha}$ mit Anfang $\hat{x}_0$. Aus Lemma 8.49 folgt, dass

$$\{(x_0, 1)_{i_0}\} = \hat{x}_0 = \hat{\alpha}(1) = \{(x_0, 1[\alpha])_{i_0}\}$$

und damit $[\alpha] = 1$. Aus Lemma 8.18 folgt $[\hat{\alpha}] = 1$. Also ist $\hat{\pi} : (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (X, x_0)$ universell. □

Beweis (Beweis von Lemma 8.49). Sei $\alpha : [0,1] \to X$, ein Weg mit $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Wähle eine Unterteilung

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1,$$

so dass $\alpha|_{[t_{k-1},t_k]}([t_{k-1}, t_k]) \subset U_{i_k}$ für $k = 1, \ldots, n$ und $i_n = i_0$.

Setze $y_k = \alpha(t_k)$ und $\alpha_k := \alpha|_{[t_{k-1},t_k]}$. Nach Konstruktion von g_{ij} gibt es einen Weg γ_{i_k} von x_0 nach x_{i_k} und einen Weg w_k in U_{ik} von x_k nach y_k, so dass $g_{i_{k-1}i_k}(y_k) = [u_k]$ mit

$$u_k = \gamma_{k-1} * w_{k-1} * \alpha_k * w_k^{-1} * \gamma_k^{-1}.$$

Ist $\hat{x}_k = \hat{\alpha}(t_k)$, so ist wenn $\hat{x}_{k-1} = \{(y_{k-1}, [\beta])_{i_k})$ auch $\hat{x} = \{(y_k, [\beta])_{i_k}\}$, da Γ diskret ist. Folglich ist

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}(1) &= \{(x_0, [\beta] g_{i_0 i_1}(y_0) g_{i_1 i_2}(y_1) \cdots g_{i_{n-1} i_n}(y_{n-1}))_{i_0}\} \\
&= \{(x_0, [\beta][u_1] \cdots [u_n])_{i_0}\} \\
&= \{(x_0, [\beta][\alpha_1 * \cdots * \alpha_n])_{i_0}\} \\
&= \{(x_0, [\beta][\alpha])_{i_0}\}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 8.50. In vielen mathematischen Disziplinen bzw. Kategorien kann man einfach zusammenhängende Objekte klassifizieren. Daher hat die Überlagerungstheorie häufig Anwendungen außerhalb der Topologie:

a) *Funktionentheorie.* Riemannsche Flächen. Uniformisierungssatz der Funktionentheorie: $\tilde{X}$ einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche $\Rightarrow \tilde{X} \cong D^2, \mathbf{C}, \mathbf{C}P^1$.

   Da $\mathrm{Aut}(D^2)$, $\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ und $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}P^1)$ einfach zu berechnen sind, kennen wir alle Riemannschen Flächen $X = \tilde{X}/\Gamma$ recht gut.

b) *Differentialgeometrie.* Einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit konstanter Krümmung: $S^n, \mathbf{R}^n, H^n$.

c) Lie-Gruppen.

d) M einfach zusammenhängende 3-dimensionale kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann ist $M^3 \cong S^3$.

III. Homologie

Motivation

- Der Funktor π_1 kann nur niederdimensionale Löcher finden, z.B. ist $\pi_1(S^n) = 1$ für $n \geq 2$. Wir wollen nun auch solche Löcher wie in der S^n finden.

- Dazu konstruieren wir einen Funktor $H_k : \underline{\text{Top}} \to \underline{\text{Ab}}$, der einem topologischen Raum X eine abelsche Gruppe $H_k(X)$ zuordnet, so dass $H_k(X)$ – grob gesprochen – für jedes k-dimensionale Loch einen Faktor $\mathbf{Z}$ hat.

- Der Hauptunterschied zur Fundamentalgruppe im Falle $H_k(X)$ ist folgender. Ein geschlossener Weg $\alpha : Sq \to X$ ist nullhomotop, wenn er Rand einer *Scheibe* $\bar{B}^2$ in X ist. Wir wollen nun Ränder allgemeinerer Objekte zulassen, und definieren einen Weg als nullhomolog, wenn er Rand einer Fläche $F \subset X$ ist.

- *Idee* Eine k-Kette in X ist eine Aneinanderreihung von Bildern von k-Simplizes. k-Ränder sind die Bilder der Ränder von $(k+1)$-Ketten. Ein k-Zykel ist eine k-Kette, die keinen Rand hat. Wir fragen dann welche Zykel keine Ränder sind. Algebraisch:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, dotted] & C_k(X) \arrow[r, "\partial_k"'] \arrow[rr, bend left, "\partial_{k-1}\circ\partial_k=0"] & C_{k-1}(X) \arrow[r, "\partial_{k-1}"'] & C_{k-2} \arrow[r, dotted] & \cdots \end{tikzcd}$$

9 Kettenkomplexe

Definition 9.1. a) Ein (nicht-negativer) *Kettenkomplex* $\mathcal{C}$ besteht aus einer Familie abelscher Gruppen $(C_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ mit $C_k = (0)$ für $k < 0$ und einer Familie von Homomorphismen $(\partial_k : C_k \to C_{k-1})_{k\in\mathbf{Z}}$ mit der Eigenschaft $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ für alle $k \in \mathbf{Z}$, kurz $\partial^2 = 0$. $\partial = \partial_k$ heißt *Randoperator* von $\mathcal{C}$ und die Elemente von C_k heißen *k-Ketten.*

b) Sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ zwei Kettenkomplexe, so ist eine *Kettenabbildung* $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ gegeben durch eine Familie von Homomorphismen $(f_k : C_k \to C'_k)_{k\in\mathbf{Z}}$, so dass für jedes $k \in \mathbf{Z}$ gilt $\partial'_k \circ f_k = f_{k-1} \circ \partial_k$.

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, dotted] & C_k \arrow[r, "\partial_k"] \arrow[d, "f_k"] & C_{k-1} \arrow[r, dotted] \arrow[d, "f_{k-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, dotted] & C'_k \arrow[r, "\partial'_k"] & C'_{k-1} \arrow[r, dotted] & \cdots \end{tikzcd}$$

Definition 9.2. Sei $\mathcal{C}$ ein Kettenkomplex. Für jedes $k \in \mathbf{N}$ nennen wir $Z_k(\mathcal{C}) := \ker(\partial_k)$ die *k-Zykeln* von $\mathcal{C}$ und $B_k(\mathcal{C}) = \mathrm{im}(\partial_{k+1})$ die *k-Ränder* von $\mathcal{C}$. Da $\partial^2 = 0$ gilt, ist $B_k(\mathcal{C}) \subset Z_k(\mathcal{C})$ eine Untergruppe. Die Faktorgruppe $H_k(\mathcal{C}) := Z_k(\mathcal{C})/B_k(\mathcal{C})$ heißt die k-te *Homologiegruppe* von $\mathcal{C}$. Ihre Elemente $[z] = z + B_k(\mathcal{C})$ für $z \in Z_k(\mathcal{C})$ heißen *Homologieklassen.*

Bemerkung 9.3. Ist $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ eine Kettenabbildung, so bildet f Zykel in Zykel und Ränder in Ränder ab, und induziert damit für jedes $k \in \mathbf{N}$ einen Homomorphismus

$$H_k(f) = f_* : H_k(\mathcal{C}) \to H_k(\mathcal{C}') : [z] \mapsto [f_k(z)].$$

Beweis. Ist $z \in Z_k(\mathcal{C})$, so ist $\partial'_k f_k(z) = f_{k-1}\partial_k(z) = 0$. Und ist $z = \partial_{k+1}(c) \in B_k(\mathcal{C})$, so gilt $f_k(z) = f_k\partial_{k+1}(c) = \partial'_{k+1} f_{k+1}(c)$. □

Bemerkung 9.4. a) Die Kettenkomplexe bilden mit den Kettenabbildungen eine Kategorie $\underline{\mathrm{KK}}$.

b) Für jedes $k \in \mathbf{N}$ ist H_k ein Funktor von $\underline{\mathrm{KK}}$ nach $\underline{\mathrm{Ab}}$, da $H_k(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$, $H_k(f \circ g) = H_k(f) \circ H_k(g)$.

c) H_k respektiert (endliche) Summen

$$H_k(\mathcal{C} \oplus \mathcal{C}') \cong H_k(\mathcal{C}) \oplus H_k(\mathcal{C}')$$

Definition 9.5. Eine Sequenz $(A_q)_{q \in I}$ (mit $I = \mathbf{Z}$ oder I endlich) von abelschen Gruppen mit Homomorphismen $f_q : A_q \to A_{q-1}$

$$\cdots \dashrightarrow A_{q+1} \xrightarrow{f_{q+1}} A_q \xrightarrow{f_q} A_{q-1} \dashrightarrow \cdots$$

heißt *exakt*, wenn für alle q gilt, dass $\mathrm{im} f_{q+1} = \ker f_q$.

Bemerkung 9.6. a) Ein Kettenkomplex ist also genau dann exakt, wenn alle Homologiegruppen trivial sind. Es gilt immer $\mathrm{im}\partial_{k+1} \subset \ker \partial_k$, und $H_k(\mathcal{C})$ ist ein Maß für die Nicht-Exaktheit.

b) Die Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$$

ist genau dann exakt, wenn f injektiv ist. Die Sequenz

$$B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

ist genau dann exakt, wenn g surjektiv ist.

c) Eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

heißt *kurze exakte Sequenz.* Hier ist f injektiv, g surjektiv, und es gilt $\mathrm{im} f = \ker g$.

Beispiel 9.7. a) Seien A, B abelsche Gruppen, $A \oplus B (\cong A \times B)$ ihre direkte Summe, sowie $i : A \to A \oplus B$ die Inklusion auf den ersten Summanden und $\pi : A \oplus B \to B$ die Projektion auf den zweiten Summanden. Dann ist

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} A \oplus B \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0$$

exakt.

b) Für eine kurze exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & C \arrow[r, "g"] & B \arrow[l, bend left, "h"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

braucht aber nicht zu gelten, dass $C \cong A \oplus B$. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn g ein Rechtsinverses $h : B \to C$ besitzt, d.h. es gilt $g \circ h = \mathrm{id}_B$.

In diesem Fall sagt man, dass die kurze exakte Sequenz *spaltet*. Folgende kurze exakte Sequenz spaltet zum Beispiel nicht:

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbf{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

c) Ist B eine freie abelsche Gruppe, so spaltet

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$$

immer.

Definition 9.8. a) Eine kurze Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}' \xrightarrow{f} \mathcal{C} \xrightarrow{g} \mathcal{C}'' \longrightarrow 0$$

mit Kettenabbildungen f, g heißt *exakt*, falls für jedes $k \in \mathbf{Z}$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow C'_k \xrightarrow{f_k} C_k \xrightarrow{g_k} C''_k \longrightarrow 0$$

exakt ist.

b) Wir definieren für jede kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}' \xrightarrow{f} \mathcal{C} \xrightarrow{g} \mathcal{C}'' \longrightarrow 0$$

den *verbindenden Homomorphismus* $\partial_* : H_k(\mathcal{C}'') \to H_{k-1}(\mathcal{C}')$ wie folgt:

$$\partial_*([z'']) = [f_{k-1}^{-1} \circ \partial_k \circ g_k^{-1}(z'')].$$

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, dotted] & {} \arrow[d, dotted] & {} \arrow[d, dotted] & \\
0 \arrow[r] & C'_k \arrow[r, "f_k"] \arrow[d, "\partial'_k"] & C_k \arrow[r, "g_k"] \arrow[d, "\partial_k"] \arrow[d, bend right] & C''_k \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_k"] \arrow[l, bend left] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{k-1} \arrow[r, "f_{k-1}"] \arrow[d, "\partial'_{k-1}"] & C_{k-1} \arrow[r, "g_{k-1}"] \arrow[d, "\partial_{k-1}"] \arrow[l, bend left] & C''_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{k-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{k-2} \arrow[r, "f_{k-2}"] \arrow[d, dotted] & C_{k-2} \arrow[r, "g_{k-2}"] \arrow[d, dotted] & C''_{k-2} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 9.9. ∂_* ist wohldefiniert, denn $\partial_*([z''])$ hängt nicht von der Wahl der Urbilder ab, und diese Urbilder existieren auch.

Beweis. a) *Existenz:* g_k ist surjektiv, also $\exists c \in C_k : g_k(c) = z''$.

Eindeutigkeit: Seien $c_1, c_2 \in C_k$ mit $g_k c_1 = g_k c_2$.

b) *Existenz:* $g_{k-1}\partial_k c = \partial''_k g_k c = \partial''_k z'' = 0$ also $\exists z' \in C'_{k-1}$ mit $f_{k-1} z' = \partial_k c$.

Eindeutigkeit: Seien $z'_1, z'_2 \in C'_k$ mit $f_{k-1} z'_1 = \partial_k c_1$ und $f_{k-1} z'_2 = \partial_k c_2$.

c) *Existenz:* $f_{k-2}\partial'_{k-1} z' = \partial_{k-1} f_{k-1} z' = \partial_{k-1}\partial_k c = 0$. Also ist $\partial'_{k-1} z' = 0$ wegen Exaktheit und folglich $z' \in Z'_{k-1}$.

Eindeutigkeit $g_k(c_2 - c_1) = z'' - z'' = 0$. Also existiert $c' \in C'_k$ mit $f_k c' = c_2 - c_1$. Dann ist

$$f_{k-1}\partial'_k c' = \partial_k f_k c' = \partial_k(c_2 - c_1) = f_{k-1} z'_2 - f_{k-1} z'_1 = f_{k-1}(z'_2 - z'_1).$$

Damit folgt $z'_2 - z'_1 = \partial'_k c'$ also $[z'_1] = [z'_2]$.

□

Satz 9.10 (Die lange exakte Homologiesequenz)**.** *Sei*

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}' \xrightarrow{f} \mathcal{C} \xrightarrow{g} \mathcal{C}'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Dann ist die (lange) Sequenz abelscher Gruppen

$$\cdots\to H_{k+1}(\mathcal{C}') \xrightarrow{f_*} H_{k+1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{g_*} H_{k+1}(\mathcal{C}'') \xrightarrow{\partial_*} H_k(\mathcal{C}') \xrightarrow{f_*} H_k(\mathcal{C}) \cdots\to$$

exakt.

Beweis. Insgesamt sind sechs Inklusionen zu zeigen. Exemplarisch zeigen wir hier die Exaktheit an der Stelle $H_k(\mathcal{C}')$.

a) Sei $z'' \in Z''_{k+1} := Z_{k+1}(\mathcal{C}'')$. Dann ist

$$f_* \partial_*([z'']) = f_*([f_k^{-1} \partial_{k+1} g_{k+1}^{-1}(z'')]) = [\partial_{k+1} g_{k+1}^{-1}(z'')] = 0$$

Also ist $\mathrm{im}\partial_* \subset \ker f_*$.

b) Ist $z' \in Z'_k$ mit $f_*([z']) = 0$, so ist $f_k z' \in B_k$. Folglich existiert $c \in C_{k+1}$ mit $\partial_{k+1} c = f_k z'$. Setze $z'' := g_{k+1} c$. Dann gilt

$$\partial''_{k+1} z'' = \partial''_{k+1} g_{k+1} c = g_k \partial_{k+1} c = g_k \circ f_k z' = 0$$

also ist $z'' \in Z''_{k+1}$. Schließlich ist

$$\partial_*([z'']) = [f_k^{-1} \partial_{k+1} g_{k+1}^{-1} z''] = [f_k^{-1} \partial_{k+1} c] = [f_k^{-1} f_k z'] = [z']$$

und damit $\ker f_* \subset \mathrm{im}\partial_*$.

□

Definition 9.11. Zwei Kettenabbildungen $f, g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ heißen *kettenhomotop*, wenn es eine Familie von Homomorphismen

$$\{D_k : C_k \to C'_{k+1}\}_{k \in \mathbf{Z}}$$

gibt, mit

$$\partial'_{k+1} D_k + D_{k-1} \partial_k = g_k - f_k.$$

Wir nennen D eine *Kettenhomotopie* zwischen f und g und schreiben $D : f \simeq g$.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, dotted] & {} \arrow[d, dotted] \\
C_{k+1} \arrow[r, shift left, "f_{k+1}"] \arrow[r, shift right, "g_{k+1}"'] \arrow[d] & C'_{k+1} \arrow[d] \\
C_k \arrow[r, shift left, "f_k"] \arrow[r, shift right, "g_k"'] \arrow[d] \arrow[ur, "D_k"] & C'_k \arrow[d] \\
C_{k-1} \arrow[r, shift left, "f_{k-1}"] \arrow[r, shift right, "g_{k-1}"'] \arrow[d, dotted] \arrow[ur, "D_{k-1}"] & C'_{k-1} \arrow[d, dotted] \\
{} & {}
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 9.12. Sind $f, g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ kettenhomotop, so stimmen die induzierten Homomorphismen $f_*, g_* : H(\mathcal{C}) \to H(\mathcal{C}')$ überein, also $f_* = g_*$.

Beweis. Sei $z \in Z_k(\mathcal{C})$ dann ist

$$g_k(z) - f_k(z) = \partial'_{k+1} D_k(z) + D_{k-1} \underbrace{\partial_k z}_{=0} \in B_k(\mathcal{C}')$$

und folglich

$$f_*([z]) = [f_k(z)] = [g_k(z)] = g_*([z]).$$

□

Bemerkung 9.13. a) Ist $\mathcal{C}$ ein Kettenkomplex, so nennt man $\mathcal{C}'$ einen *Teilkomplex* $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, wenn $C'_k \subset C_k$ für alle $k \in \mathbf{Z}$ eine Untergruppe ist, so dass $\partial_k(C'_k) \subset C'_{k-1}$. Dann ist $\{C'_k, \partial'_k|_{C'_k} = \partial'_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ selbst ein Kettenkomplex.

b) Sind $\mathcal{C}'$ und $\mathcal{C}''$ Teilkomplexe, so sind auch ihr *Durchschnitt* $\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'' \subset \mathcal{C}$ und ihre *Summe* $\mathcal{C}' + \mathcal{C}'' \subset \mathcal{C}$ wieder Teilkomplexe.

c) Für $\mathcal{C}', \mathcal{C}'' \subset \mathcal{C}$ induzieren die Inklusionen $j' : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}' + \mathcal{C}'' \subset \mathcal{C}$ und $j'' : \mathcal{C}'' \to \mathcal{C}' + \mathcal{C}''$ eine Kettenabbildung

$$\Phi = (j', j'') : \mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'' \to \mathcal{C}' + \mathcal{C}'' : (c', c'') \mapsto j'(c') + j''(c'')$$

denn die direkte Summe von $\mathcal{C}'$ und $\mathcal{C}''$ ist die Summe von $\mathcal{C}'$ und $\mathcal{C}''$ in der Kategorie $\underline{\text{KK}}$.

Definition 9.14. Sei $\mathcal{C}$ ein Kettenkomplex. Ein Paar $(\mathcal{C}', \mathcal{C}'')$ von Teilkomplexen heißt *Ausschneidungspaar*, wenn die Inklusion $i : \mathcal{C}' + \mathcal{C}'' \to \mathcal{C}$ einen Isomorphismus in der Homologie induziert:

$$i_* : H_k(\mathcal{C}' + \mathcal{C}'') \to H(\mathcal{C}).$$

Satz 9.15. *Sei $\mathcal{C}$ ein Kettenkomplex und $(\mathcal{C}', \mathcal{C}'')$ eine Ausschneidungspaar. Dann existiert eine lange exakte Sequenz von Homologiegruppen*

$$\ldots \xrightarrow{\nu} H_{k+1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\Delta} H_k(\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'') \xrightarrow{\mu} H_k(\mathcal{C}') \oplus H_k(\mathcal{C}'') \xrightarrow{\nu} H_k(\mathcal{C}) \xrightarrow{\Delta} \ldots$$

die sogenannte Mayer-Vietoris-Sequenz.

Beweis. Betrachte folgende Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'' \xrightarrow{i} \mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'' \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}' + \mathcal{C}'' \longrightarrow 0 \qquad \text{(III..1)}$$

mit $i(c) = (c, -c)$ und $\pi(c', c'') = c' + c''$. i ist injektiv, π ist surjektiv und $\pi(c', c'') = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathcal{C}' \cap \mathcal{C}''$ mit $(c', c'') = i(c)$, nämlich $c = c' = -c''$. Also ist die Sequenz (III..1) exakt.

Ist nun Φ der natürliche Isomorphismus von $H(\mathcal{C}') \oplus H(\mathcal{C}'') \to H(\mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'')$ mit $\Phi([z'], [z'']) = [(z', z'')]$ und

$$\Psi : H(\mathcal{C}' + \mathcal{C}'') \to H(\mathcal{C})$$

der von $\mathcal{C}' + \mathcal{C}'' \to \mathcal{C}$ induzierte Isomorphismus, so setze

$$\begin{aligned} \Delta &:= \partial_* \circ \Psi^{-1} : H_{k+1}(\mathcal{C}) \to H_k(\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'') \\ \mu &:= \Phi^{-1} \circ i_* : H(\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'') \to H(\mathcal{C}') \oplus H(\mathcal{C}'') \\ \nu &:= \Psi \circ \pi_* \circ \Phi : H(\mathcal{C}') \oplus H(\mathcal{C}'') \to H(\mathcal{C}). \end{aligned}$$

Dann folgt aus der Exaktheit der langen Homologiesequenz von (III..1) die Exaktheit der Mayer-Vietoris-Sequenz.

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & H_k(\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'') \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, bend right, "\mu"'] & H_k(\mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'') \arrow[r, "\pi_*"] & H_k(\mathcal{C}' + \mathcal{C}'') \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\Psi"] & H_{k-1}(\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'') \arrow[r] & {} \\ & & H_k(\mathcal{C}') \oplus H_k(\mathcal{C}'') \arrow[u, "\Phi"] \arrow[r, bend left, "\nu"] & H_k(\mathcal{C}) \arrow[ur, bend right, "\Delta"'] & & \end{tikzcd}$$

□

10 Die singulären Homologiegruppen

Definition 10.1. Sei $k \in \mathbf{N} = \{0, 1, \ldots\}$. Das *k-dimensionale Standardsimplex* ist

$$\Delta_k = \left\{ x \in \mathbf{R}^{k+1} : x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i e_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1 \right\},$$

wobei $e_0, \ldots, e_k$ die Standardbasis von $\mathbf{R}^{n+1}$ ist.

Bemerkung 10.2. a) Jeder Punkt $x \in \Delta_k$ hat eine eindeutige Darstellung $x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i e_i$ (baryzentrische Koordinaten).

b) Die der Ecke e_i gegenüberliegende Seite wird mit

$$\Delta_{k-1}^i = \left\{ x \in \Delta_k : x = \sum_{j=0, j \neq i}^{k} \lambda_j e_j \right\}$$

bezeichnet. Dabei ist $\Delta_{-1}^0 := \emptyset$.

Ist $\delta_{k-1}^i : \Delta_{k-1} \to \Delta_{k-1}^i$ die Einschränkung der linearen Abbildung von $\mathbf{R}^k$ nach $\mathbf{R}^{k+1}$, die $e_j \mapsto e_j$ für $j < i$ und $e_j \mapsto e_{j+1}$ für $j \geq i$ abbildet, so ist δ_{k-1}^i offenbar bijektiv.

Lemma 10.3. *Für $k \in \mathbf{N}$ und $0 \leq i < j \leq k$ gilt*

$$\delta_{k-1}^j \circ \delta_{k-2}^i = \delta_{k-1}^i \circ \delta_{k-2}^{j-1}.$$

Beweis. Die linke Seite bildet wie folgt ab:

$$\begin{aligned} l < i &: e_l \mapsto e_l \mapsto e_l \\ i \le l < j-1 &: e_l \mapsto e_{l+1} \mapsto e_{l+1} \\ l \ge j-1 &: e_l \mapsto e_{l+1} \mapsto e_{l+2} \end{aligned}$$

und die Rechte Seite:

$$\begin{aligned} l < i &: e_l \mapsto e_l \mapsto e_l \\ i \le l < j-1 &: e_l \mapsto e_l \mapsto e_{l+1} \\ l \ge j-1 &: e_l \mapsto e_{l+1} \mapsto e_{l+2}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 10.4. Ähnlich wie in der Kategorie der Gruppen ordnet man auch in der Kategorie $\underline{\text{Ab}}$ der abelschen Gruppen jeder Menge A die von A frei erzeugte freie abelsche Gruppe zu:

$$F(A) := \bigoplus_{a \in A} \mathbf{Z},$$

dh. ihre Elemente sind von der Form $g = \sum_{a \in A} n_a a$ wobei nur endlich viele der $n_a \in \mathbf{Z}$ von Null verschieden sind.

Ist $i : A \to F(A)$ mit $i(a) = a = 1a$, so ist die universelle Eigenschaft von $(F(A), i)$ diejenige, dass zu jedem anderen Paar (G, j), wo G eine abelsche Gruppe und $j : A \to G$ ist, genau ein Homomorphismus $\Phi : F(A) \to G$ mit $\Phi \circ i = j$ gibt, nämlich

$$\Phi : \sum n_a a \mapsto \sum n_a j(a) \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "j"'] & F(A) \arrow[d, "\exists! \Phi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Definition 10.5. Sei X ein topologischer Raum, $k \in \mathbf{N}$ und Δ_k das Standard k-Simplex mit der von $\mathbf{R}^{k+1}$ induzierten Topologie.

a) Ein *singuläres k-Simplex* in X ist eine stetige Abbildung $\sigma : \Delta_k \to X$.

b) Sei $S_k(X)$ die von *allen* singulären k-Simplizes erzeugte freie abelsche Gruppe

$$S_k(X) = F(\Sigma_k(X))$$

wo

$$\Sigma_k(X) := \{\sigma : \Delta_k \to X : \sigma \text{ stetig}\}.$$

Jedes Element $c = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} n_\sigma \sigma$ heißt *k-Kette* in X.

c) Für jedes $k \in \mathbf{N}$ definiert man den Randoperator

$$\partial_k : S_k(X) \to S_{k-1}(X)$$

auf den erzeugenden singulären k-Simplizes wie folgt:

$$\partial_k \sigma = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma \circ \delta_{k-1}^i \in S_{k-1}(X)$$

und setzen dann ∂_k auf eindeutige Weise zu einem Homomorphismus fort.

Bemerkung 10.6. Die Familie $S(X) = \{S_k(X), \partial_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ mit $S_k(X) = 0$ für $k < 0$ ist ein Kettenkomplex.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\partial_{k-1} \circ \partial_k(\sigma) &= \partial_{k-1}\left(\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \sigma \circ \delta_{k-1}^j\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_{k-1}^j \circ \delta_{k-2}^i \\
&= \sum_{0\le i<j\le k} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_{k-1}^j \circ \delta_{k-2}^i + \sum_{k-1\ge i\ge j\ge 0} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_{k-1}^j \circ \delta_{k-2}^i \\
&= \sum_{0\le i<j\le k} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_{k-1}^i \circ \delta_{k-2}^{j-1} + \sum_{k-1\ge i\ge j\ge 0} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_{k-1}^j \circ \delta_{k-2}^i \\
&= (-1) \sum_{0\le i\le j\le k-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_{k-1}^i \circ \delta_{k-2}^j + \sum_{0\le i\le j\le k-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_{k-1}^i \circ \delta_{k-2}^j \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt in der ersten Summe den Index j durch $j-1$ ersetzt und in der zweiten Summe i und j getauscht. □

Bemerkung 10.7. a) Wir nennen $\mathcal{C} = \{S(X), \partial\}$ den *singulären Kettenkomplex* von X. Entsprechend heißen die Elemente von $Z_k(X) = \ker \partial_k$ *singuläre Zyklen* und die Elemente aus $B_k(X) = \mathrm{im}\partial_{k+1}$ *singuläre Ränder* auf X. Schließlich heißt $H_k(X) = Z_k(X)/B_k(X)$ die *k-te singuläre Homologiegruppe* von X. Es ist für jedes $k \in \mathbf{N}$ eine abelsche Gruppe.

b) Während i.a. $S_k(X)$ und auch $Z_k(X)$ sehr große Gruppen sind, so ist die Hoffnung, dass auch $B_k(X)$ so groß ist, damit $H_k(X) = Z_k(X)/B_k(X)$ übersichtlich wird und gerade die k-dimensionalen Ränder von X findet.

c) Beachte, dass wir an die Erzeuger $\sigma \in \Sigma_k(X)$ keine Voraussetzung außer der Stetigkeit gemacht haben. Dies ist erstaunlich, da wir in intuitiven Bildern meist an eingebettete σ denken.

d) Wir machen $S : \underline{\mathrm{Top}} \to \underline{\mathrm{KK}}$ zu einem Funktor wir folgt. Ist $f : X \to Y$ stetig, so sei $Sf : S(X) \to S(Y)$ auf singulären k-Simplizes σ gegeben durch $S_k f(\sigma) = f \circ \sigma$. Dazu ist nachzuprüfen, dass $\partial_k S_k = S_{k-1}\partial_k$.

Damit ist $H_k \circ S : \underline{\mathrm{Top}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ ein Funktor. Insbesondere sind zwei topologische Räume X und Y nicht homöomorph, wenn $H_k(X)$ und $H_k(Y)$ nicht isomorph sind.

Bemerkung 10.8. Sei $X = \{\mathrm{pt}\}$ der einpunktige topologische Raum. Dann ist $H_0(X) = \mathbf{Z}$ und $H_k(X) = (0)$ für $k \geq 1$.

Beweis. Für jedes $k \in \mathbf{N}$ gibt es nur ein singuläres k-Simplex, das konstante, $\sigma_k : \Delta_k \to X$. Sein Rand ist

$$\partial\sigma_k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma \circ \delta^i_{k-1} = \left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\right)\sigma_{k-1} = \begin{cases} 0 & k \text{ ungerade, } k \geq 1 \\ 1 & k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Also ist $S_k(X) = \mathbf{Z}$ und $Z_k(X) = (0)$ für k gerade ($k \geq 2$) also $H_k(X) = (0)$ für k gerade und $k \geq 2$.

Für k ungerade ist $Z_k(X) = S_k(X) = \mathbf{Z}$, sowie $B_k(X) = S_k(X) = \mathbf{Z}$. Folglich ist $H_k(X) = \mathbf{Z}/\mathbf{Z} = (0)$.

Schließlich ist $Z_0(X) = S_0(X) = \mathbf{Z}$ und $B_0(X) = 0$ und damit $H_0(X) = \mathbf{Z}$. ☐

Bemerkung 10.9. Sei X ein topologischer Raum und $X = \dot{\bigcup}_{i\in I} X_i$ sei eine Zerlegung in Wegekomponenten. Dann gilt für jedes $k \in \mathbf{N}$, dass

$$H_k(X) = \bigoplus_{i\in I} H_k(X_i).$$

Beweis. Das Bild eines singulären k-Simplexes $\sigma : \Delta_k \to X$ liegt in einer Wegekomponente, denn Δ_k ist wegzusammenhängend. Also ist

$$S_k(X) = \bigoplus_{i\in I} S_k(X_i) \qquad\qquad Z_k(X) = \bigoplus_{i\in I} Z_k(X_i)$$

und jedes $S(X_i) \subset S(X)$ ist ein Teilkomplex, da $\partial(S(X_i)) \subset S(X_i)$. Damit ist $S(X)$ die direkte Summe von $S(X_i)$ und folglich $H_k(X) = \bigoplus_{i\in I} H(X_i)$. ☐

Bemerkung 10.10. Ist X wegzusammenhängend, so ist $H_0(X) = \mathbf{Z}$.

Beweis. Eine 0-Kette ist ein Element $c = \sum_{i=1}^r n_i x_i$ mit Gewichten $n_i \in \mathbf{Z}$ und $x_i \in X$. Definiere $\varepsilon : S_0(X) \to \mathbf{Z}$, $\varepsilon(x) = 1$ bzw.

$$\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{r} n_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{r} n_i.$$

Ist σ ein singuläres 1-Simplex, so ist σ ein Weg von $\sigma(e_0)$ nach $\sigma(e_1)$ und $\varepsilon(\partial\sigma) = \varepsilon(\sigma(e_1) - \sigma(e_0)) = 0$. Also existiert eine Abbildung

$$\hat{\varepsilon} : H_0(X) \to \mathbf{Z} : \left[\sum_i n_i x_i\right] \mapsto \sum n_i.$$

Ist $x_0 \in X$ fest, so ist $\hat{\varepsilon}([nx_0]) = n$ für $n \in \mathbf{Z}$, also ist $\hat{\varepsilon}$ surjektiv.

Jeder 0-Simplex ist homolog zu $x_0 \in X$, da X wegzusammenhängend ist. Ist $z = \sum n_i x_i$ mit $\hat{\varepsilon}(z) = 0$, so ist $\sum n_i = 0$ und damit

$$[z] = \sum n_i[x_i] - \sum n_i[x_0] = 0.$$

Also ist $\hat{\varepsilon}$ injektiv und folglich ein Isomorphismus $H_0(X) \cong \mathbf{Z}$. ☐

Bemerkung 10.11. a) Nach Bemerkung 10.9 und 10.10 ist $H_0(X)$ also eine freie abelsche Gruppe. Ihr Rang ist die Anzahl der Wegekomponenten von X.

b) Ein topologischer Raum X heißt *azyklisch*, wenn $H_0(X) = \mathbf{Z}$ und $H_k(X) = 0$ für $k \geq 1$. Er hat dann keine "wesentlichen" Zykel.

Satz 10.12. *Für jedes $n \in \mathbf{N}$ ist $\mathbf{R}^n$ azyklisch.*

Beweis. Kegelkonstruktion. Sei $k \in \mathbf{N}$. Jeder Punkt $x \in \Delta_{k+1}$ hat eine eindeutige Darstellung

$$x = (1-t)e_0 + t\delta_k^0(y)$$

mit $y \in \Delta_k$ und $0 \leq t \leq 1$.

Ist $p \in \mathbf{R}^n$ ein beliebiger Punkt, so definiert man für jeden k-Simplex $\sigma : \Delta_k \to \mathbf{R}^n$ den *Kegel über* σ durch

$$C_p\sigma : \Delta_{k+1} \to \mathbf{R}^n : (1-t)e_0 + t\delta_k^0(y) \mapsto (1-t)p + t\sigma(y)$$

und setzt dann C_p zu einen Homomorphismus $C_p : S_k(\mathbf{R}^n) \to S_{k+1}(\mathbf{R}^n)$ auf allen k-Ketten fort.

Behauptung: Für alle $c \in S_k(\mathbf{R}^n)$ mit $k \geq 1$ gilt

$$\partial(C_pc) = c - C_p(\partial c)$$

Insbesondere ist also jeder Zykel Rand des Kegels über ihm, $z = \partial(C_pz)$ und damit $H_k(\mathbf{R}^n) = 0$ für $k \geq 1$.

Beweis der Behauptung: Es reicht zu zeigen, dass $\partial(C_p\sigma) = \sigma - C_p(\partial\sigma)$ für alle $\sigma \in \Sigma_k(\mathbf{R}^n)$. Es gilt

$$\partial(C_p\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i C_p\sigma \circ \delta_k^i.$$

Nach Definition von $C_p\sigma$ ist $C_p\sigma \circ \delta_k^0 = \sigma$. Für $y \in \Delta_{k-1}$ mit $y = (1-t)e_0 + t\delta_{k-1}^0(z)$ mit $z \in \Delta_{k-1}$ gilt für $i \geq 1$

$$\delta_k^i(y) = (1-t)e_0 + t\delta_k^i\delta_{k-1}^0(z) = (1-t)e_0 + t\delta_k^0\delta_{k-1}^{i-1}(z).$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i C_p\sigma \circ \delta_k^i(y) &= \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i((1-t)p + t\sigma\delta_{k-1}^{i-1}(z)) \\
&= (-1)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i((1-t)p + t\sigma\delta_{k-1}^{i}(z)) \\
&= -\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_p(\sigma \circ \delta_{k-1}^i)((1-t)e_0 + t\delta_{k-1}^0(z)) \\
&= -C_p\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma \circ \delta_{k-1}^i\right)(y) \\
&= -C_p(\partial\sigma)(y)
\end{aligned}$$

Folglich ist $\partial C_p = \sigma - C_p(\partial\sigma)$. □

Bemerkung 10.13. Satz 10.12 gilt für jede konvexe, bzw. sternförmige Teilmenge des $\mathbf{R}^n$.

Lemma 10.14. *Seien $i, j : \Delta_k \to \Delta_k \times [0,1]$ die Inklusionen mit $i(x) = (x, 0)$ und $j(x) = (x, 1)$, so sind $Si, Sj : S(\Delta_k) \to S(\Delta_k \times [0,1])$ kettenhomotop.*

Beweis. Wir konstruieren eine Kettenhomotopie $D : S_l(\Delta_k) \to S_{l+1}(\Delta_k \times [0,1])$ per Induktion.

Sei $l = 0$ und σ ein singulärer 0-Simplex $\sigma(e_0) = x \in \Delta_k$. Setze $D_0\sigma((1-t)e_0 + te_1) = (x, t)$, dann ist

$$\partial D_0\sigma = (x,1) - (x,0) = j(x) - i(x) = Sj(\sigma) - Si(\sigma).$$

und folglich $\partial D_0 + D_{-1}\partial = Sj - Si$.

Die Kettenhomotopie $D : S_m(\Delta_k) \to S_{m+1}(\Delta_k \times [0,1])$ sei für alle $m \leq l-1$ konstruiert. Sei $\sigma : \Delta_l \to \Delta_k$ ein singulärer l-Simplex. Betrachte die Kette

$$z = Sj(\sigma) - Si(\sigma) - D_{l-1}(\partial\sigma).$$

Dann ist

$$\partial z = \partial\big(Sj(\sigma) - Si(\sigma) - D_{l-1}(\partial\sigma)\big) = Sj(\partial\sigma) - Si(\partial\sigma) - \big(Sj(\partial\sigma) - Si(\partial\sigma) - D_{l-2}(\partial^2\sigma)\big)$$

da nach Voraussetzung $\partial D_{l-1} + D_{l-2}\partial = Sj - Si$ gilt. Folglich ist $\partial z = 0$. Da $\Delta_k \times [0,1]$ konvex und daher azyklisch ist, existiert eine Kette $c \in S_{l+1}(\Delta_k \times [0,1])$ mit $\partial c = z$, nämlich $c = C_p z$ für ein $p \in \Delta_k \times [0,1]$.

Setze $D_l\sigma = c = C_p(Sj(\sigma) - Si(\sigma) - D_{l-1}(\partial\sigma))$ und setze D_l homomorph auf $S_k(\Delta_k)$ fort. Dann ist nach Definition

$$(Sj - Si)\sigma = (\partial D_l - D_{l-1}\partial)(\sigma)$$

und D_l folglich eine Kettenhomotopie. □

Satz 10.15 (Homotopiesatz)**.** *Sind $f, g : X \to Y$ homotope stetige Abbildungen, so sind $f_*, g_* : H_k(X) \to H_k(Y)$ für alle $k \in \mathbf{N}$ gleich, $f_* = g_*$.*

Beweis. Seien $\phi, \psi : X \to X \times [0,1]$ die Inklusionen mit $\phi(x) = (x,0)$ und $\psi(x) = (x,1)$, und sei $H : X \times [0,1] \to Y$ die Homotopie zwischen f und g mit $H \circ \phi = f$ und $H \circ \psi = g$.

Behauptung 1: $S\phi, S\psi : S(X) \to S(X \times [0,1])$ sind kettenhomotop. Denn es gilt

$$\begin{aligned} S\phi(\sigma) &= S\phi \circ S\sigma(\mathrm{id}) = S(\phi \circ \sigma)(\mathrm{id}) \\ &= S((\sigma \times \mathrm{id}) \circ i)(\mathrm{id}) = S(\sigma \times \mathrm{id}) \circ Si(\mathrm{id}) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} \Delta_k \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \Delta_k \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "\phi"] \\ & \Delta_k \times [0,1] \arrow[r, "\sigma\times\mathrm{id}"] & X \times [0,1] \end{tikzcd}$$

Genauso erhält man
$$S\psi(\sigma) = S_{\sigma\times\mathrm{id}} \circ Sj(\mathrm{id})$$
Ist $Sj - Si = D_{\Delta_k}\partial + \partial D_{\Delta_k}$ mit der Kettenhomotopie
$$D_{\Delta_k} : S(\Delta_k) \to S(\Delta_k \times [0,1])$$
aus Lemma 10.14, so setze
$$D\sigma = S_{\sigma\times\mathrm{id}} D_{\Delta_k}(\mathrm{id})$$
dann ist $(S\psi - S\phi)(\sigma) = (D\partial + \partial D)(\sigma)$.

Behauptung 2: $Sf, Sg : S(X) \to S(Y)$ sind kettenhomotop, da
$$Sf = S(H \circ \phi) = SH \circ S\phi \simeq SH \circ S\psi = S(H \circ \psi) = Sg.$$
wegen Bemerkung 9.12 folgt damit $f_* = g_*$, da $f_* = H(Sf)$. □

Bemerkung 10.16. a) Jetzt wird die Bedeutung einer Kettenhomotopie D zwischen zwei Kettenabbildungen $Sf, Sg : S(X) \to S(Y)$ klar. Ist σ ein singuläres k-Simplex in X, so ist $D_k\sigma$ eine $(k+1)$-Kette in Y mit
$$\partial D_k\sigma = Sg(\sigma) - Sf(\sigma) - D_k(\partial\sigma).$$
Ist also $z \in H_k(X)$ ein Zykel, so ist $D_k(z)$ eine $(k+1)$-Kette mit Rand $Sg(z) - Sf(z)$, dh. die Zykel $Sf(z)$ und $Sg(z)$ sind homolog.

b) Nennt man zwei Zykel $z_Y, z'_Y \in Z_k(Y)$ *homotop*, wenn es einen topologischen Raum X gibt, zwei homotope Abbildungen $f, g : X \to Y$ und einen Zykel $z_X \in Z_k(X)$ so dass $z_Y = Sf(z_X)$ und $z'_Y = Sg(z_X)$ so sagt Satz 10.15, dass homotope Zykel homolog sind.

Bemerkung 10.17. a) Aus Satz 10.15 folgt, dass die Homologie auch als Funktor H_k : $\underline{\text{H-Top}} \to \underline{\text{Ab}}$ aufgefasst werden kann.

b) Insbesondere gilt für jeden zusammenziehbaren Raum X, dass $H_0(X) = \mathbf{Z}$ und $H_k(X) = 0$ für alle $k \geq 1$.

Definition 10.18. a) Für den Standard k-Simplex Δ_k definiert man
$$p_k = \frac{1}{k+1}(e_0 + \ldots + e_k) \in \Delta_k$$
den *Schwerpunkt* von Δ_k und setzt induktiv
$$u_0 := e_0 \in S_0(\Delta_0)$$
$$u_k := C_{p_k}\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(S\delta^i_{k-1}(u_{k-1}))\right) \in S_k(\Delta_k)$$

b) Für jeden Raum X definiert man den *baryzentrischen Unterteilungsoperator*

$$B : S(X) \to S(X)$$

durch $B_k(\sigma) = S\sigma(u_k)$ für alle $\sigma \in \Sigma_k(X)$ und setzt dies dann zu einem Homomorphismus fort.

Bemerkung 10.19. a) $u_k = C_{p_k}(B_{k-1}\partial \operatorname{id}_{\Delta_k})$, wobei $\operatorname{id}_{\Delta_k} : \Delta_k \to \Delta_k$ ein Simplex in Δ_k ist.

b) $B : S(X) \to S(X)$ ist eine Kettenabbildung, $B\partial\sigma = \partial B\sigma$.

c) Für jedes stetige $f : X \to Y$ ist $B_Y \circ Sf = Sf \circ B_X : S(X) \to S(Y)$, denn

$$B_Y \circ Sf(\sigma) = B(f \circ \sigma) = S(f \circ \sigma)(u) = Sf\, S\sigma(u) = Sf\, B\sigma.$$

Lemma 10.20. $B \simeq \operatorname{id} : S(X) \to S(X)$.

Beweis. Behauptung 1: $\bar{B} \simeq \operatorname{id} : S(\Delta_m) \to S(\Delta_m)$.

Wir definieren induktiv eine Kettenhomotopie $\bar{D}$. Setzte $\bar{D}_{-1} = \bar{D}_0 = 0$. Wegen $B_0 = \operatorname{id}_0$ ist

$$\partial\bar{D}_0 + \bar{D}_{-1}\partial = 0 = B_0 - \operatorname{id}_0 .$$

Sei die Kettenhomotopie $\bar{D}_l$ für $l \leq k-1$ schon konstruiert, so dass

$$\partial\bar{D}_l + \bar{D}_{l-1}\partial = B_l - \operatorname{id}_l . \tag{III..2}$$

Sei $c \in S_k(\Delta_m)$. Setze $z = (B_k - \operatorname{id}_k - \bar{D}_{k-1}\partial)c$. Dann gilt

$$\partial z = \partial B_k c - \partial c - \partial\bar{D}_{k-1}\partial c = B_{k-1}\partial c - \partial c + \bar{D}_{k-2}\partial^2 c - B_{k-1}\partial c + \partial c = 0,$$

da die Gleichung (III..2) für $k-1$ gilt und die B_k Kettenabbildungen sind. Setze $\bar{D}_k c = C_p z$. Dann ist $\partial\bar{D}_k c = z = -\bar{D}_{k-1}\partial c + (B_k - \operatorname{id}_k)c$ und die Behauptung folgt.

Behauptung 2: $B : S(X) \to S(X)$ ist kettenhomotop zu id.

Ist $\sigma \in \Sigma_k(X)$, so setze

$$D_k : S_k(X) \to S_{k+1}(X) : \sigma \mapsto S\sigma \circ \bar{D}_k(\operatorname{id}_{\Delta_k}).$$

Gilt $\bar{B}_k \operatorname{id}_{\Delta_k} - \operatorname{id}_{\Delta_k} = (\partial\bar{D}_k + \bar{D}_{k-1}\partial)(\operatorname{id}_{\Delta_k})$, so ist

$$B_k\sigma - \sigma = S\sigma(\bar{B}_k \operatorname{id}_{\Delta_k} - \operatorname{id}_{\Delta_k}) = S\sigma(\partial\bar{D}_k + \bar{D}_{k-1}\partial)(\operatorname{id}_{\Delta_k}) = (\partial D_k + D_{k-1}\partial)\sigma$$

□

Lemma 10.21. *Ist $B : S(X) \to S(X)$ die baryzentrische Unterteilung, so gilt für jeden k-Zykel z in X, dass $B_k z$ auch ein Zykel ist, der homolog zu z ist $B_k z - z \in B_k(X)$.*

Beweis. Sei $D_k : S_k(X) \to S_{k+1}(X)$ die Kettenhomotopie zwischen $B \simeq \operatorname{id} : S(X) \to S(X)$. Dann ist für $z \in Z_k(X)$

$$B_k z - z = \partial_{k+1}D_k z + D_{k-1}\partial_k z = \partial_{k+1}D_k z.$$

□

Lemma 10.22 (Kleine Ketten)**.** *Ist $X = U \cup V$, sind $U, V \subset X$ offen und ist c eine k-Kette in X. Dann existiert ein $r > 0$ und Ketten $x \in S_k(U)$, $y \in S_k(V)$, so dass $B^r c = x + y$.*

Beweis. Sei $k \in \mathbf{N}$ und $\sigma \in \Sigma_k(X)$. Dann ist $(\sigma^{-1}(U), \sigma^{-1}(V))$ eine offene Überdeckung von $\Delta_k \subset \mathbf{R}^{k+1}$.

Da Δ_k kompakt ist, existiert ein $\lambda > 0$, die Lebesgue-Zahl dieser Überdeckung, so dass falls $A \subset \Delta_k$ eine Teilmenge ist mit $\operatorname{diam}(A) \leq \lambda$ (bzgl. der Euklidischen Metrik), gilt: $A \subset \sigma^{-1}(U)$ oder $A \subset \sigma^{-1}(V)$.

Andererseits, ist $u_k^r := B^r(\mathrm{id}_{\Delta_k}) = \sum_{i=1}^{s(r)} n_i \sigma_i^{(r)}$, so gilt

$$\max_{i=1,\dots,s(r)} \operatorname{diam}(\sigma_i^{(r)}) \to 0 \qquad \text{für} \qquad r \to \infty.$$

Wir können daher $r \in \mathbf{N}$ so groß wählen, dass $\max_{i=1,\dots,s(r)} \operatorname{diam}(\sigma_i^{(r)}) < \lambda$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} B^r\sigma &= B^r S\sigma(\mathrm{id}_{\Delta_k}) = S\sigma B^r \,\mathrm{id}_{\Delta_k} \\ &= S\sigma u_k^r = S\sigma\left(\sum_{i=1}^{s(r)} n_i \sigma_i^{(r)}\right) = \underbrace{S\sigma\left(\sum_{i:\sigma_i^{(r)} \subset \sigma^{-1}(U)} n_i\sigma_i^{(r)}\right)}_{:=x} + \underbrace{S\sigma\left(\sum_{\substack{i:\sigma_i^{(r)} \subset \sigma^{-1}(V) \\ \sigma_i^{(r)} \not\subset \sigma^{-1}(U)}} n_i\sigma_i^{(r)}\right)}_{:=y}. \end{aligned}$$

□

Theorem 10.23 (Mayer-Vietoris)**.** *Sei X ein topologischer Raum $U, V \subset X$ offen mit $X = U \cup V$. Dann existiert eine lange exakte Sequenz abelscher Gruppen*

$$\cdots \xrightarrow{\nu} H_{k+1}(X) \xrightarrow{\Delta} H_k(U \cap V) \xrightarrow{\mu} H_k(U) \oplus H_k(V) \xrightarrow{\nu} H_k(X) \xrightarrow{\Delta} \cdots$$

die Mayer-Vietoris-Sequenz*.*

Beweis. Wegen Satz 9.15 reicht es zu zeigen, dass $(S(U), S(V))$ ein Ausschneidungspaar für $S(X)$ ist. Sei also $i : S(U) + S(V) \to S(X)$ die Inklusion und $i_* : H(S(U) + S(V)) \to H(X)$ der induzierte Homomorphismus. Zu zeigen ist, dass i_* ein Isomorphismus ist.

a) *i_* ist surjektiv.* Sei $z_k \in H_k(X)$ ein Zykel. Dann existiert $r > 0$, $x \in S_k(U), y \in S_k(V)$ mit $B^r z = x + y$. Es ist $0 = B^r\partial z = \partial B^r z = \partial(x + y)$, also ist $x + y \in Z_k(S(U) + S(V))$. Weiter gilt
$$i_*([x + y]_{S(U)+S(V)}) = [x + y]_{S(X)} = [B^r z] = [z],$$
also ist i_* surjektiv.

b) i_* *ist injektiv.* Sei $x + y \in S(U) + S(V)$ mit $i_*([x + y]_{S(U)+S(V)}) = 0$. Dann existiert ein $c \in S_{k+1}(X)$ mit $\partial c = x + y$. Sei $r > 0$ und $x' \in S_{k+1}(U)$, $Y \in S_{k+1}(V)$ mit $B^r c = x' + y'$. Dann ist

$$\partial(x' + y') = \partial B^r c = B^r \partial c = B^r(x + y)$$

also

$$[x + y]_{S(U)+S(V)} = [B^r(x + y)] = [\partial(x' + y')] = 0.$$

also ist i_* injektiv.

□

Korollar 10.24. *Für alle $n \geq 1$ gilt*

$$H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbf{Z} & \textit{für } k = 0 \textit{ oder } k = n \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Beweis. Wähle $U = S^n \setminus \{\text{Nordpol}\}$ und $V = S^n \setminus \{\text{Südpol}\}$. Dann ist $U \cap V \simeq S^{n-1}$. Da $U \cong V \cong \mathbf{R}^n$ und folglich azyklisch sind, folgt aus Satz 10.23, dass die Sequenz für $k \geq 2$

$$\begin{array}{ccccccc} H_k(\mathbf{R}^n) \oplus H_k(\mathbf{R}^n) & \longrightarrow & H_k(S^n) & \xrightarrow{\Delta} & H_{k-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & H_{k-1}(\mathbf{R}^n) \oplus H_{k-1}(\mathbf{R}^n) \\ \| & & & & & & \| \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}$$

exakt. Folglich ist $\Delta : H_k(S^n) \to H_{k-1}(S^{n-1})$ ein Isomorphismus. Induktiv sieht man, dass für $k \geq n+1$ gilt, dass $H_k(S^n) \cong H_{k-n}(S^0) = 0$, da $S^0 = \text{pt} + \text{pt}$. Für $k \leq n$ lautet das Ende der Sequenz

$$0 \longrightarrow H_1(S^{n-k+1}) \xrightarrow{\Delta} H_0(S^{n-k}) \xrightarrow{\mu} H_0(\mathbf{R}^n) \oplus H_0(\mathbf{R}^n) \xrightarrow{\nu} H_0(S^{n-k+1}) \longrightarrow 0$$

und für $k \leq n - 1$ im Besonderen

$$0 \longrightarrow H_1(S^{n-k+1}) \xrightarrow{\Delta_1} \mathbf{Z} \xrightarrow{\mu_0} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{\nu_0} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

$$m \longmapsto (m, -m)$$

$$(m, n) \longmapsto m + n$$

also $\mathrm{im}\Delta_1 = \ker \mu_0 = 0$ und folglich $\Delta_1 = 0$ und damit $H_1(S^n) = 0$ für $n \geq 2$. Also gilt für $1 \leq k \leq n - 1$, dass $H_k(S^n) \cong H_1(S^{n-k+1}) = 0$.

Für $k = n$ haben wir die Sequenz

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_1(S^1) \arrow[r, "\Delta_1"] & H_0(S^0) \arrow[r, "\mu_0"] \arrow[d, equal] & H_0(\mathrm{pt}) \oplus H_0(\mathrm{pt}) \arrow[r, "\nu_0"] \arrow[d, equal] & H_0(S^1) \arrow[r] & 0 \\
& & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \arrow[r] & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \arrow[r] & \mathbf{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$(m,n) \longmapsto (m+n, -m-n)$$

$$(m,n) \longmapsto m+n$$

Damit ist $H_1(S^1) = \mathrm{im}\Delta_1 = \ker \mu_0 = \mathbf{Z}(1,-1) \cong \mathbf{Z}$ und folglich $H_n(S^n) \cong H_1(S^1) = \mathbf{Z}$. $\square$

Damit können wir nun endlich folgendes beweisen.

Satz 10.25. $\mathbf{R}^n \ncong \mathbf{R}^m$ *für* $n \neq m$.

Beweis. o.E. können wir annehmen, dass $2 \leq n \leq m$. Angenommen $\mathbf{R}^n \cong \mathbf{R}^m$. Dann ist

$$S^{n-1} \simeq \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \cong \mathbf{R}^m \setminus \{0\}.$$

Also folgt

$$\mathbf{Z} \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \cong H_{n-1}(S^{m-1})$$

und daher $m = n$. $\square$

Definition 10.26. a) Ein Paar (X, A) aus einem topologischen Raum X und einer Teilmenge $A \subset X$ heißt *Raumpaar*. Eine stetige Abbildung $f : (X, A) \to (Y, B)$ von Raumpaaren (X, A) und (Y, B) ist eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(A) \subset B$.

b) Für ein Raumpaar (X, A) ist trivialerweise $S(A)$ ein Teilkomplex von $S(X)$. Die Inklusion $i : A \to X$ induziert eine injektive Kettenabbildung $Si : S(A) \to S(X)$. Der Faktorkomplex

$$S(X, A) := S(X)/S(A)$$

heißt der *relative singuläre Kettenkomplex* des Raumpaares (X, A).

Bemerkung 10.27. Ist $f : (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung von Raumpaaren, so wird $S(A)$ unter $Sf : S(X) \to S(Y)$ in $S(B)$ abgebildet. Daher induziert Sf eine Kettenabbildung $Sf : S(X, A) \to S(Y, B)$. Man erhält also einen Funktor S von der Kategorie $\underline{(\mathrm{Top}, \mathrm{Top})}$ der Raumpaare mit Abbildungen von Raumpaaren als Morphismen in die Kategorie $\underline{\mathrm{KK}}$ der Kettenkomplexe.

Definition 10.28. Die *k-te relative singuläre Homologiegruppe* des Raumpaares (X, A) ist

$$H_k(X, A) := H_k(S(X, A)) = Z_k(S(X, A))/B_k(S(X, A)).$$

Dabei heißen die Elemente von $Z_k(S(X, A)$ die *k-Zykel relativ A* und die Elemente in $B_k(S(X, A))$ die *k-Ränder relativ A*.

Bemerkung 10.29. a) Ein Zykel $z \in Z_k(S(X,A))$ ist ein Element mit $\partial z \in S_{k-1}(A)$. Die Klassen $[z]$ und $[z']$ in $H_k(X,A)$ sind genau dann gleich, wenn $z - z' = \partial c + x$, wobei $c \in S_{k+1}(X)$ und $x \in S_k(A)$.

b) Ist $f : (X,A) \to (Y,B)$ eine Abbildung von Raumpaaren, so induziert f die Abbildung

$$f_* : H_k(X,A) \to H_k(Y,B) : [z]_{(X,A)} \mapsto [Sf(z)]_{(Y,B)}.$$

Damit wird $H_k : \underline{(\mathrm{Top},\mathrm{Top})} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ zu einem Funktor.

c) Es gilt $H_k(X,X) = 0$, $H_k(X,\emptyset) = H_k(X)$ für alle $k \in \mathbf{N}$. Ist X wegzusammenhängend und $A \neq \emptyset$, so ist $H_0(X,A) = 0$.

d) Der Homotopiesatz gilt auch für die relative Homologie. Sind $f, g : (X,A) \to (Y,B)$ homotop relativ A, dh. existiert eine Homotopie

$$H : X \times [0,1] \to Y$$

mit $H_0 = f$, $H_1 = g$ und $H(A \times [0,1]) \subset B$, so ist $f_* = g_* : H_k(X,A) \to H_k(Y,B)$ für alle $k \in \mathbf{N}$.

Satz 10.30. *Für jedes Raumpaar (X,A) existiert eine lange exakte Homologiesequenz*

$$\cdots \xrightarrow{\pi_*} H_{k+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_k(A) \xrightarrow{i_*} H_k(X) \xrightarrow{\pi_*} H_k(X,A) \xrightarrow{\partial_*} \cdots$$

Dabei ist i_* die von der Inklusion $i : S(A) \to S(B)$ und π_* die von der Projektion $\pi : S(X) \to S(X)/S(A)$ induzierte Abbildung.

Beweis. Betrachte die kurze Sequenz

$$0 \longrightarrow S(A) \xrightarrow{i} S(X) \xrightarrow{\pi} S(X,A) = S(X)/S(A) \longrightarrow 0$$

i ist injektiv, π die kanonische Projektion also surjektiv und $i(S(A))$ gerade der Kern von π, also ist diese Sequenz exakt. Die Behauptung folgt daher aus Satz 9.10. □

Beispiel 10.31. Für $n \geq 1$ ist $H_n(\bar{B}^n, S^{n-1}) \cong \mathbf{Z}$ und $H_k(\bar{B}^n, S^{n-1}) = 0$ für alle $k \neq n$.

Beweis. Wir betrachten die Homologiesequenz aus Satz 10.30

$$H_{k+1}(\bar{B}^n) \xrightarrow{\pi_*} H_{k+1}(\bar{B}^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_k(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_k(\bar{B}^n) \xrightarrow{\pi_*} H_k(\bar{B}^n, S^{n-1})$$

Ist $k \neq 0$, so ist $H_{k+1}(\bar{B}^n) = H_k(\bar{B}^n) = 0$ und wir erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H_{k+1}(\bar{B}^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_k(S^{n-1}) \longrightarrow 0$$

Also ist $\partial_* : H_{k+1}(\bar{B}^n, S^{n-1}) \to H_k(S^{n-1})$ ein Isomorphismus. Es folgt

$$H_n(\bar{B}^n, S^{n-1}) \cong \mathbf{Z} \qquad \text{und} \qquad H_k(\bar{B}^n, S^{n-1}) = 0 \quad \text{für} \quad k \geq 2, k \neq n$$

Für $k = 0$ und $n \neq 1$ lautet das Ende der Sequenz

$$0 \longrightarrow H_1(\bar{B}^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} \underset{=H_0(S^{n-1})}{\mathbf{Z}} \xrightarrow{i_*} \underset{=H_0(\bar{B}^n)}{\mathbf{Z}} \xrightarrow{\pi_*} H_0(\bar{B}_n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} 0$$

Daher ist π_* surjektiv und ∂_* injektiv. Weiter ist i_* ein Isomorphismus. Damit ist $0 = \ker i_* = \mathrm{im}\partial_* \cong H_1(\bar{B}^n, S^{n-1}) = 0$. Da $\mathrm{im} i_* = \ker \pi_*$ und i_* und π_* surjektiv sind, gilt $H_0(\bar{B}^n, S^{n-1}) = 0$.

Für $k = 0$ und $n = 1$ lautet das Ende der Sequenz

$$0 \longrightarrow H_1(\bar{B}^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} \underset{=H_0(S^{n-1})}{\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}} \xrightarrow{i_*} \underset{=H_0(\bar{B}^n)}{\mathbf{Z}} \xrightarrow{\pi_*} H_0(\bar{B}_n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} 0$$

Daher ist π_* surjektiv und ∂_* injektiv. Es ist

$$\mathbf{Z} \cong (1, -1)\mathbf{Z} = \ker i_* = \mathrm{im}\partial_* \cong H_1(\bar{B}^n, S^{n-1}).$$

Da $\mathrm{im} i_* = \ker \pi_*$ und i_* und π_* surjektiv sind, gilt $H_0(\bar{B}^n, S^{n-1}) = 0$. □

Satz 10.32 (Ausschneidungssatz)**.** *Seien $B \subset A \subset X$ topologische Räume mit $\bar{B} \subset A^\circ$. Dann induziert die Inklusion*

$$i : (X \setminus B, A \setminus B) \to (X, A)$$

einen Isomorphismus

$$i_* : H_k(X \setminus B, A \setminus B) \to H_k(X, A).$$

Beweis. Da $\bar{B} \subset A^\circ$ ist $X = A^\circ \cup (X \setminus B)^\circ = U \cup V$ wie in Lemma 10.22. Zu zeigen ist, dass i_* ein Isomorphismus ist.

a) *i_* ist surjektiv:* Sei $[z] \in H_k(X, A)$ mit $z \in S_k(X)$. Wähle $r > 0$ so groß, dass $B^r z = a + x$ wobei $a \in S_k(A^\circ)$ und $x \in S_k((X \setminus B)^\circ)$. Dann ist $[z]_{S(X,A)} = [B^r z]_{S(X,A)} = [x + a]_{S(X,A)} = [x]_{S(X,A)}$. Nun liegt $\partial x \in S_{k-1}((X \setminus B)^\circ)$, aber da

$$\partial x = \partial B^r z - \partial a = B^r \partial z - \partial a$$

und $\partial z \in S_{k-1}(A)$ gilt auch $\partial x \in S_{k-1}(A)$ also ist $\partial x \in S_{k-1}(A \setminus B)$. Damit ist $x \in S_k(X \setminus B)$ ein Zykel relativ $A \setminus B$, repräsentiert also $[x]_{S(X \setminus B, A \setminus B)} \in H_k(X \setminus B, A \setminus B)$. Dann gilt

$$i_*([x]_{S(X \setminus B, A \setminus B)}) = [x]_{S(X,A)} = [z]_{S(X,A)}.$$

Folglich ist i_* surjektiv.

b) *i_* ist injektiv.* Sei $[z]_{S(X \setminus B, A \setminus B)} \in H_k(X \setminus B, A \setminus B)$ mit $i_*([z]_{S(X \setminus B, A \setminus B)}) = [z]_{S(X,A)} = 0$. Dann existiert $c \in S_{k+1}(X)$ und $a \in S_k(A)$ mit $\partial c = z + a$. Wähle r so groß, dass $B^r c = a' + x$ mit $a' \in S_{k+1}(A^\circ)$ und $x \in S_{k+1}((X \setminus B)^\circ)$. Also ist $\partial a' + \partial x = \partial B^r c = B^r \partial c = B^r z + B^r a$.

Die Kette $y = B^r z - \partial x = \partial a' - B^r a$ liegt in $S_k(X \setminus B)$ wegen der ersten Gleichheit und in $S(A)$ wegen der zweiten Gleichheit. Folglich liegt $y \in S_k(A \setminus B)$. Da $B^r z = \partial x + y$ ist $B^r z$ ein Rand relativ $A \setminus B$, dh.

$$[z]_{S(X \setminus B, A \setminus B)} = [B^r z]_{S(X \setminus B, A \setminus B)} = [0].$$

Es folgt, dass i_* injektiv ist.

□

11 Anwendungen der Homologietheorie

Die erste Anwendung, nämlich zu zeigen, dass $\mathbf{R}^m \not\cong \mathbf{R}^n$ für $m \neq n$ haben wir schon in Satz 10.25 formuliert.

Satz 11.1. *Es gibt keine Retraktion* $r : \bar{B}^n \to S^{n-1}$ *mit* $r|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$.

Beweis. o.E. $n \geq 2$. Wäre $r : \bar{B}^n \to S^{n-1}$ eine solche Retraktion, so wäre

$$H : S^{n-1} \times [0,1] \to S^{n-1} : (x,t) \mapsto r(tx)$$

eine Homotopie zwischen der konstanten Abbildung $c_{r(0)}$ und $\mathrm{id}_{S^{n-1}}$ und S^{n-1} folglich zusammenziehbar, $S^{n-1} \simeq \mathrm{pt}$, aber S^{n-1} ist nicht azyklisch, da $H_{n-1}(S^{n-1}) \neq (0)$. Ein Widerspruch. □

Satz 11.2 (Browerscher Fixpunktsatz)**.** *Jede stetige Abbildung* $f : \bar{B}^n \to \bar{B}^n$ *hat einen Fixpunkt.*

Beweis. Genau wie Korollar 6.18. □

Bemerkung 11.3. Wir hatten jeder stetigen Abbildung $f : S^1 \to S^1$ ihren Abbildungsgrad $\deg(f) \in \mathbf{Z}$ zugeordnet. Wir verallgemeinern dies für Abbildungen $f : S^n \to S^n$ für $n \geq 1$ wie folgt. Ist $f : S^n \to S^n$ stetig, so ist

$$f_* : H_n(S^n) \cong \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \cong H_n(S^n)$$

ein Homomorphismus. Es gibt also ein $d \in \mathbf{Z}$, so dass für alle $[z] \in H_n(S^n)$ gilt $f_*([z]) = d[z]$.

Definition 11.4. Ist $f : S^n \to S^n$ stetig, so ist ihr *Abbildungsgrad* $d = \deg f$ die eindeutig bestimmte Zahl, so dass für alle $[z] \in H_n(S^n)$ gilt $f_*([z]) = d[z]$.

Bemerkung 11.5. a) Nach Definition, bzw. Satz 10.15 ist $\deg f$ eine Homotopieinvariante

$$\deg : [S^n, S^n] \to \mathbf{Z}.$$

b) Für $n = 1$ und $f = \mathrm{pot}_d : S^1 \to S^1 : \xi \mapsto \xi^d$ ist $\deg f = d$. Deshalb stimmt diese Definition für $n = 1$ wegen Satz 6.21 mit Definition 6.12 überein, da jedes $f : S^1 \to S^1$ homotop zu $\mathrm{pot}_{\deg f}$ ist.

c) In der Tat ist $\deg : [S^n, S^n] \to \mathbf{Z}$ bijektiv.

d) Es gilt für $f, g : S^n \to S^n$, dass $\deg f \circ g = \deg f \deg g$.

Lemma 11.6. *Ist* $F : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^{n+1}$ *die Spiegelung an einem Unterraum* $E \subset \mathbf{R}^{n+1}$ *mit* $\dim E = n$, *und* $S := F|_{S^n} : S^n \to S^n$, *so ist* $\deg S = -1$.

Beweis. Eine Rotation $r : S^n \to S^n$, $r \in SO(n+1)$ ist homotop zur Identität. Daher dürfen wir annehmen, dass

$$E = \{(x', x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} : x' \in \mathbf{R}^n, x_{n+1} = 0\}$$

und $S(x', x_{n+1}) = (x', -x_{n+1})$. Betrachte nun $U = S^n \setminus \{\text{Nordpol}\}$, $V = S^n \setminus \{\text{Südpol}\}$ und den Äquator $S^{n-1} = S^n \cap E \simeq U \cap V$. Weil S gerade U und V vertauscht, erhält man einen Homomorphismus zwischen den Mayer-Vietoris-Sequenzen von $S^n = U \cup V$ bzw. $S^n = V \cup U$:

$$\begin{tikzcd}
0 = H_n(U) \oplus H_n(V) \arrow[r] & H_n(S^n) \arrow[r, "\Delta_{U,V}"] \arrow[d, "S_*"] & H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "S_*"] & H_{n-1}(U) \oplus H_{n-1}(V) = 0 \\
0 = H_n(V) \oplus H_n(U) \arrow[r] & H_n(S^n) \arrow[r, "\Delta_{V,U}"] & H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r] & H_{n-1}(V) \oplus H_{n-1}(U) = 0
\end{tikzcd}$$

da $S|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ und $\Delta_{V,U} = -\Delta_{U,V}$ (nach Konstruktion der Abbildung Δ in Satz 9.15) ist

$$\Delta_{V,U} \circ S_* = \Delta_{U,V} = -\Delta_{V,U}$$

und folglich

$$\Delta_{V,U} \circ S_*([z]) = \Delta_{V,U}([-z])$$

Da $\Delta_{V,U}$ injektiv ist (wegen obiger Sequenz), folgt $S_*([z]) = -[z]$. □

Bemerkung 11.7. Die Antipodenabbildung $A : S^n \to S^n$ hat Grad $\deg A = (-1)^{n+1}$, da sie Verkettung der $n+1$ Spiegelungen an den Koordinatenebenen ist.

Lemma 11.8. $\deg : [S^n, S^n] \to \mathbf{Z}$ *ist surjektiv.*

Beweis. Induktiv. Für $n = 1$ ist die Behauptung schon gezeigt.

Sei $n \geq 2$ und $g : S^{n-1} \to S^{n-1}$ eine Abbildung vom Grad k, $k \in \mathbf{Z}$. Setze

$$f : (\bar{B}^n, S^{n-1}) \to (\bar{B}^n, S^{n-1}) : tx \mapsto tg(x) \qquad \text{für} \quad t \in [0,1], x \in S^{n-1}$$

Dann ist wegen $\partial f_* = f_* \partial d$ und $f|_{S^{n-1}} = g$ f_* die Multiplikation mit k. Diese Abbildung f induziert eine Abbildung

$$h : S^n \cong \bar{B}^n / S^{n-1} \to \bar{B}^n / S^{n-1} \cong S^n$$

vom Grad k. □

Satz 11.9. *Ist $f : S^n \to S^n$ eine stetige Abbildung ohne Fixpunkt, so ist f homotop zur Antipodenabbildung $A : S^n \to S^n$, also insbesondere* $\deg f = (-1)^{n+1}$.

Beweis. Die gesucht Homotopie ist

$$H : S^n \times [0,1] \to S^n : (x,t) \mapsto \frac{(1-t)f(x) - tx}{|(1-t)f(x) - tx|}.$$

Der Nenner kann nur verschwinden, wenn die Verbindungslinie von $f(x)$ und $-x$ durch den Ursprung geht. Dann ist $-x$ aber die Antipode von $f(x)$, $f(x) = -(-x) = x$, bzw. x ein Fixpunkt. □

Satz 11.10. *Ist $f : S^n \to S^n$ eine stetige Abbildung, so dass $f(x) \neq -x$ für alle $x \in S^n$. Dann ist $f \cong \mathrm{id}_{S^n}$ und damit* $\deg f = 1$.

Beweis. Ist $f(x) \neq -x$ für alle x, so ist $A \circ f(x) \neq x$ für alle x. Wir können also Satz 11.9 auf $A \circ f$ anwenden und erhalten $\deg A \circ f = (-1)^{n+1}$ und damit $\deg f = 1$. □

Korollar 11.11. *Ist n gerade, so hat jede Abbildung $f : S^n \to S^n$ einen Fixpunkt $f(x) = x$ oder es existiert ein x mit $f(x) = -x$.*

Beweis. Ansonsten hätte f Grad -1 wegen Satz 11.9 und Grad 1 wegen Satz 11.10. □

Definition 11.12. Ein *tangentiales Vektorfeld auf S^n* ist eine stetige Abbildung $v : S^n \to \mathbf{R}^{n+1}$, so dass für alle $x \in S^n$ der Vektor $v(x)$ orthogonal zu x ist.

Folgender Satz heißt in zwei Dimensionen $n = 2$ auch *Satz vom Igel*, denn er impliziert, dass "man einen Igel nicht ohne Scheitel kämmen kann".

Satz 11.13. *Ist $n \geq 2$ gerade, so hat jedes tangentiale Vektorfeld auf S^n eine Nullstelle. Ist $n \geq 1$ ungerade, so existieren tangentiale Vektorfelder ohne Nullstellen.*

Beweis. Ist $v : S^n \to \mathbf{R}^{n+1}$ ein tangentiales Vektorfeld ohne Nullstelle, so ist

$$f : x \mapsto \frac{v(x)}{|v(x)|}$$

eine stetige Abbildung $f : S^n \to S^n$ mit $f(x) \neq \pm x$ für alle $x \in S^n$, da $f(x)$ immer orthogonal zu x ist. Wegen Korollar 11.11 existiert für gerades n keine solche Abbildung.

Ist $n = 2m - 1$ ungerade, so ist

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{2m-1}, x_{2m}) \mapsto (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2m}, x_{2m-1})$$

ein tangentiales Vektorfeld ohne Nullstellen. □

Definition 11.14. Sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$ und $k \in \mathbf{N}$. Die Gruppe $H_k(X, X \setminus \{x_0\})$ heißt die *k-te lokale Homologiegruppe von X in x_0.*

Satz 11.15. *a) Ist x_0 abgeschlossen in X, so gilt für jede Umgebung U von x_0 in X, dass $H_k(X, X \setminus \{x_0\}) \cong H_k(U, U \setminus \{x_0\})$ für alle $k \in \mathbf{N}$.*

b) Seien X, Y topologische Räume, $x_0 \in X, y_0 \in Y$, U eine Umgebung von x_0 in X, V eine Umgebung von y_0 in Y und $f : U \to V$ ein Homöomorphismus. Dann gilt $H_k(X, X \setminus \{x_0\}) \cong H_k(Y, Y \setminus \{y_0\})$.

Beweis. a) Benutze den Ausschneidungssatz mit $A = X \setminus \{x_0\}$ (nach Voraussetzung ist dies eine offene Menge, also $A = A^\circ$) und $B = X \setminus U$. Da U eine Umgebung von x_0 ist ist $\bar{B} \subset A$. Dann liefert der Ausschneidungssatz:

$$H_k(U, U \setminus \{x_0\}) = H_k(X \setminus B, A \setminus B) \cong H_k(X, A) = H_k(X, X \setminus \{x_0\}).$$

b) Wegen Teil a) und Funktorialität gilt

$$H_k(X, X \setminus \{x_0\}) \cong H_k(U, U \setminus \{x_0\}) \cong H_k(V, V \setminus \{y_0\}) \cong H_k(Y, Y \setminus \{y_0\}).$$

□

Beispiel 11.16. a) Sei $x_0 \in B^n \subset \bar{B}^n$ ein innerer Punkt. Dann ist S^{n-1} Deformationsretrakt von $\bar{B}^n \setminus \{x_0\}$. Daher gilt

$$H_k(\bar{B}^n, \bar{B}^n \setminus \{x_0\}) \cong H_k(\bar{B}^n, S^{n-1}).$$

Insbesondere ist

$$H_k(\bar{B}^n, \bar{B}^n \setminus \{x_0\}) \cong \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{für } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

b) Ist $x_0 \in S^{n-1} \subset \bar{B}^n$, so ist $0 \in \bar{B}^n \setminus \{x_0\}$ ein Deformationsretrakt. Daher ist

$$H_k(\bar{B}^n, \bar{B}^n \setminus \{x_0\}) = 0 \qquad \text{für alle } k \in \mathbf{N}.$$

Dies zeigt, dass die lokale Homologie Punkte in $B^n \subset \bar{B}^n$ von Randpunkten in $S^{n-1} \subset \bar{B}^n$ unterscheiden kann.

c) Ist M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, so gilt für alle $x_0 \in M$, dass

$$H_k(M, M \setminus \{x_0\}) \cong \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{für } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Insbesondere sind Mannigfaltigkeiten mit unterschiedlicher Dimension nicht homöomorph. Sie sind sogar nicht lokal homöomorph. Die Dimension einer Mannigfaltigkeit ist daher eine wohldefinierte Zahl.

Korollar 11.17. *Sei $f : \bar{B}^n \to \bar{B}^n$ ein Homöomorphismus. Dann ist $f(S^{n-1}) \subset S^{n-1}$ und die Abbildung $f|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ ebenfalls ein Homöomorphismus.*

Die nächste Anwendung, die hier besprochen werden soll, ist der *Jordansche Kurvensatz.*

Theorem 11.18. *Ist $f : S^1 \to \mathbf{R}^2$ eine Einbettung, so besteht $\mathbf{R}^2 \setminus f(S^1)$ aus genau zwei Wegekomponenten.*

Wir haben genug Methoden zur Verfügung, um den folgenden, allgemeineren Satz zu beweisen.

Theorem 11.19 (Jordan-Browerscher Trennungssatz)**.** *Sei $X = \mathbf{R}^n$ oder $X = S^n$ mit $n \geq 2$. Ist $f : S^{n-1} \to X$ eine Einbettung, so besteht $X \setminus f(S^{n-1})$ aus genau zwei Wegekomponenten $X = U \cup V$.*

Bemerkung 11.20. Man kann zeigen, dass U und V offen sind, und dass $\bar{U} \setminus U = \bar{V} \setminus V = f(S^{n-1})$, wobei $\bar{U}$ und $\bar{V}$ den Abschluss von U und V in X bezeichnet.

Lemma 11.21. *Sei $f : \bar{B}^r \to S^n$ eine Einbettung. Dann ist $S^n \setminus f(\bar{B}^r)$ azyklisch und insbesondere wegzusammenhängend.*

Beweis. Induktion nach r. Setze $B := f(\bar{B}^r)$. Für $r = 0$ ist B ein Punkt und $S^n \setminus B \cong \mathbf{R}^n$ ist zusammenziehbar also azyklisch.

Sei nun $r \geq 1$ und der Satz gelte für $(r-1)$-Bälle $f : \bar{B}^{r-1} \to S^n$. Sei $z \in S_k(S^n \setminus B)$. Zu zeigen ist, dass $c \in S_{k+1}(S^n \setminus B)$ existiert mit $\partial c = z$.

Schritt 1: Ist $\bar{\phi} : [0,1]^{r-1} \times [0,1] \to \bar{B}^r$ ein Homöomorphismus, so ist $\phi := f \circ \bar{\phi} : [0,1]^{r-1} \times [0,1] \to B$ auch ein Homöomorphismus. Setze $B_t := \phi([0,1]^{r-1} \times \{t\})$. Dann ist B_t ein $(r-1)$-Ball in S^n. Da $z \in S_k(S^n \setminus B_t$ liegt, gilt nach Induktionsannahme, dass $c_t \in S_{k+1}(S^n \setminus B_t)$ existiert mit $\partial c_t = z$. Wäre $c_t \in S_{k+1}(S^n \setminus B)$, wäre der Satz schon bewiesen.

Ist $c_t = \sum_{i=1}^l n_i \sigma_i$ mit $\sigma_i \in \Sigma_{k+1}(S^n \setminus B_t)$, so ist der kompakte Teilraum $\bigcup_{i=1}^l \sigma_i(\Delta_{k+1})$ disjunkt von der ebenfalls kompakten Menge B_t. Daher existiert eine offene Umgebung U_t von B_T, die auch disjunkt von $\bigcup_{i=1}^l \sigma_i(\Delta_{k+1})$ ist. Insbesondere ist also $c_t \in S_{k+1}(S^n \setminus U_t)$. In $[0,1]^{r-1} \times [0,1]$ sind die Mengen $\phi^{-1}(B \cap U_t)$ offene Umgebungen von $[0,1]^{r-1} \times \{t\}$. Daher existiert eine Unterteilung

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$$

von $[0,1]$, so dass für alle t_j mit $j = 1, \ldots, m$ gilt, dass

$$[0,1]^{r-1} \times [t_{j-1}, t_j] \subset \phi^{-1}(B \cap U_{t_j})$$

und damit

$$V_j := \phi([0,1]^{r-1} \times [t_{j-1}, t_j]) \subset U_{t_j}.$$

Dann ist $c_j := c_{t_j}$ eine Kette in $S^n \setminus V_j$ und $\partial c_j = z$.

Schritt 2: Setze $X_1 := S^n \setminus V_1$ und $X_2 = S^n \setminus V_2$. Wir betrachten die Mayer-Vietoris Sequenz für $X_1 \cup X_2$:

$$H_{k+1}(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\Delta_k} H_k(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\mu} H_k(X_1) \oplus H_k(X_2)$$

Da $X_1 \cup X_2$ das Komplement des $(r-1)$-Balls $V_1 \cap V_2 = B_{t_1}$ in S^n ist, und da $k+1 \geq 1$ ist, gilt $H_{k+1}(X_1 \cup X_2) = 0$ und μ ist folglich injektiv.

Die Klasse $[z] \in H_k(X_1 \cap X_2)$ erfüllt $\mu([z]) = 0$, da $z = \partial c_1$ bzw. $z = \partial c_2$. Damit folgt $[z] = 0$, dh. $z = \partial \bar{c}_1$ für $\bar{c}_1 \in S_{k+1}(S^n \setminus (V_1 \cup V_2))$.

Wir wiederholen dieses Argument mit $X_1 = S^n \setminus (V_1 \cup V_2)$ und $X_2 = S^n \setminus V_3$ und erhalten als Ergebnis, dass $z = \partial \bar{c}_2$ mit $\bar{c}_2 \in S_{k+1}(S^n \setminus (v_1 \cup V_2 \cup V_3))$ ist. Induktiv folgt die Behauptung. □

Satz 11.22. *Ist $f : \bar{B}^r \to \mathbf{R}^n$ eine Einbettung mit $r \geq 0$ und $n \geq 2$. Dann ist*

$$H_k(\mathbf{R}^n \setminus f(\bar{B}^r)) = \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{für } k = 0, n-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Insbesondere ist $\mathbf{R}^n \setminus f(\bar{B}^r)$ wegzusammenhängend.

Beweis. Seien $n, s \in S^n$ Nordpol und Südpol der S^n, und $\psi : \mathbf{R}^n \to S^n \setminus \{n\}$ das Inverse der stereographischen Projektion. Dann ist $\psi \circ f : \bar{B}^r \to S^n$ ein Ball in $S^n \setminus \{n\}$. Setze $A := \psi \circ f(\bar{B}^r)$.

Aus der Homologiesequenz von Satz 10.30 folgt, dass die Sequenz

$$H_{k+1}(S^n \setminus A) \xrightarrow{\pi_*} H_{k+1}(S^n \setminus A, S^n \setminus (A \cup \{n\})) \xrightarrow{\partial_*} H_k(S^n \setminus (A \cup \{n\})) \xrightarrow{i_*}$$
$$\xrightarrow{i_*} H_k(S^n \setminus A) \xrightarrow{\pi_*} H_k(S^n \setminus A, S^n \setminus (A \cup \{n\}))$$

exakt ist. Für $k \neq 0$ ist ∂_* ein Isomorphismus, da die Gruppen $H_{k+1}(S^n \setminus A)$ und $H_k(S^n \setminus A)$ wegen Lemma 11.21 trivial sind. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} H_k(\mathbf{R}^n \setminus f(\bar{B}^r)) &\cong H_k(S^n \setminus (A \cup \{n\})) \cong H_{k+1}(S^n \setminus A, S^n \setminus (A \cup \{n\}) \\ &\cong H_{k+1}(S^n, S^n \setminus \{n\}) \cong H_{k+1}(S^n, \{s\}) \cong \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{für } k = n-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Ist $k = 0$, so ist $H_1(S^n \setminus A, S^n \setminus (A \cup \{n\})) = 0$, da $n \geq 2$. Es folgt, dass i_* injektiv ist. Da i_* auch surjektiv ist, wegen $H_0(S^n \setminus A, S^n \setminus (A \cup \{n\})) = 0$ ist i_* ein Isomorphismus und $H_0(S^n \setminus (A \cup \{n\})) \cong H_0(S^n \setminus A) \cong \mathbf{Z}$. □

Satz 11.23. *Sei $f : S^r \to S^n$ eine Einbettung mit $n \geq 2$ und $0 \leq r \leq n-1$. Dann ist*

$$H_k(S^n \setminus f(S^r)) \cong \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{falls } (k = 0 \text{ und } r < n-1) \text{ oder } k = n-r-1 \\ \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} & \text{falls } k = 0 \text{ und } r = n-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis. Induktion nach r. Setze $S := f(S^r)$. Für $r = 0$ ist S zweipunktig und wegen $S^n \setminus S \simeq S^{n-1}$ ist die Aussage richtig.

Sei also $0 < r \leq n-1$ und wir nehmen an, dass der Satz für eingebettete $(r-1)$-Sphären gilt.

Sei $D^{\pm} := \{x \in S^r : x = (x_0, \ldots, x_r), \pm x_r \geq 0\}$ und setze $B_{\pm} := f(D_{\pm})$. Dann sind $B_{\pm}$ eingebettete r-Bälle in S^n, so dass $S = B_+ \cup B_-$ und $T = B_+ \cap B_-$ eine eingebettete $r-1$-Sphäre ist. Betrachte die Mayer-Vietoris Sequenz von $S^n \setminus T = (S^n \setminus B_+) \cup (S^n \setminus B_-)$:

$$H_{k+1}(S^n \setminus B_+) \oplus H_{k+1}(S^n \setminus B_-) \xrightarrow{\nu} H_{k+1}(S^n \setminus T) \xrightarrow{\Delta}$$
$$\xrightarrow{\Delta} H_k(S^n \setminus S) \xrightarrow{\mu} H_k(S^n \setminus B_+) \oplus H_k(S^n \setminus B_-)$$

wobei $S^n \setminus S = (S^n \setminus B_+) \cap (S^n \setminus B_-)$. Ist $k \neq 0$, so sind die beiden äußeren Gruppen trivial, also $H_{k+1}(S^n \setminus T) \cong H_k(S^n \setminus S)$. Aus der Induktionsannahme folgt dann die Behauptung.

Ist $k = 0$, so lautet die Sequenz:

$$0 \xrightarrow{\nu} H_1(S^n \setminus T) \xrightarrow{\Delta} H_0(S^n \setminus S) \xrightarrow{\mu} \underset{=H_0(S^n \setminus B_+) \oplus H_0(S^n \setminus B_-)}{\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}} \xrightarrow{\nu} \underset{=H_0(S^n \setminus T)}{\mathbf{Z}} \longrightarrow 0$$

Ist $n \neq r-1$, so ist $H_1(S^n \setminus T) = 0$, μ damit injektiv und $H_0(S^n \setminus S) \cong \mathbf{Z}$.

Ist $n = r - 1$, so ist $H_1(S^n \setminus T) \cong \mathbf{Z}$. Da $\mathrm{im}\mu = \ker \nu = \mathbf{Z}(1,-1) \cong \mathbf{Z}$ existiert eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{\Delta} H_0(S^n \setminus S) \xrightarrow{\bar{\mu}} \underset{=\mathrm{im}\mu}{\mathbf{Z}} \longrightarrow 0$$

Diese Sequenz spaltet, daher ist $H_0(S^n \setminus S) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. □

Ähnlich wie im Beweis von Satz 11.22 folgt aus diesem Satz folgender:

Satz 11.24. *Sei $f : S^r \to \mathbf{R}^n$ eine Einbettung mit $n \geq 2$ und $0 \leq r \leq n-1$. Dann ist*

$$H_k(\mathbf{R}^n \setminus f(S^r)) \cong \begin{cases} \mathbf{Z} & \textit{falls } (k=0, k=n-r-1, k=n-1) \textit{ und } r < n-1 \\ \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} & \textit{falls } k=0 \textit{ und } r=n-1 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung 11.25. a) Ist $r < n-1$, so separiert eine eingebettete r-Sphäre weder S^n noch $\mathbf{R}^n$.

b) Eine eingebettete $(n-1)$-Sphäre zerlegt sowohl S^n als auch $\mathbf{R}^n$ in genau zwei Wegekomponenten, abzulesen an $H_0(S^n \setminus S)$ bzw. $H_0(\mathbf{R}^n \setminus S)$. Dies ist der Jordansche Kurvensatz im Fall $n = 2$ oder der Jordan-Browersche Trennungssatz. Theorem 11.19 ist daher bewiesen.

c) Im Fall $S \subset \mathbf{R}^n$ ist genau eine der beiden Komponenten beschränkt, sie heißt das *Innere* von S, die andere heißt das *Äußere* von S.

d) Im Fall einer Kreislinie $S \subset \mathbf{R}^2$, gilt der Satz von Schoenflies, der besagt, dass ein Homöomorphismus $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ mit $f(S) = S^1$. Daher ist das Innere von S homöomorph zu B^2, das Äußere zu $\mathbf{R}^2 \setminus \bar{B}^2$.

e) Im Falle höherer Dimensionen ist eine analoge Aussage noch nicht bekannt, sie ist Gegenstand der Schoenflies-Vermutung.

Literaturverzeichnis

[1] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[2] Klaus Jänich, *Topologie*, 2. ed., Springer Lehrbuch, 2008.

[3] Ralph Stöcker und Heiner Zieschang, *Algebraische Topologie*, B. G. Teubner Stuttgart, 1994.

[4] Horst Schubert, *Topologie*, 4. ed., B. G. Teubner Stuttgart, 1975.

[5] Boto von Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, 3. ed., Springer Lehrbuch, 2001.