# Übungen zur Topologie — Blatt 1

**Aufgabe 1**

a) Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, versehen mit der metrischen Topologie. Zeigen Sie, dass für $x \in X$ und $r > 0$ die Menge $B_r(x)$ offen ist.

b) Seien $(X, d_X)$ und $(Y, d_Y)$ metrische Räume, versehen mit der jeweiligen metrischen Topologie. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann stetig ist, wenn für alle $x \in X$ und alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$ für alle $x'$ mit $d_X(x, x') < \delta$.

**Aufgabe 2** Bestimmen Sie alle Topologien und deren Homöomorphietypen auf der dreielementigen Menge.

**Aufgabe 3** Sei $X$ ein topologischer Raum und $B \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie:

a) Die Menge $B^\circ$ der inneren Punkte von $B$ ist offen, außerdem ist

$$B^\circ = \bigcup\{U \subset X : U \text{ offen}, U \subset B\},$$

dh. $B^\circ$ ist die größte offene Menge, die in $B$ enthalten ist.

b) Die abgeschlossene Hülle $\bar{B}$ von $B$ ist abgeschlossen, außerdem ist

$$\bar{B} = \bigcap\{A \subset X : A \text{ abgeschlossen}, B \subset A\},$$

dh. $\bar{B}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die $B$ enthält.

**Aufgabe 4** Sei $X$ eine Menge. Für jedes $x \in X$ sei $\mathcal{U}(x) \subset \mathbf{P}X$ ein System von Teilmengen. $\mathcal{U} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{U}(x)$ erfüllt die *Hausdorffschen Umgebungsaxiome*, falls gilt:

(U1) $X \in \mathcal{U}(x)$ für alle $x \in X$. Ist $U \in \mathcal{U}(x)$ so ist $x \in U$.

(U2) Ist $U \in \mathcal{U}(x)$ und $U \subset V$ so ist $V \in \mathcal{U}(x)$.

(U3) Sind $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}(x)$, so ist $\bigcap_{k=1}^n U_k \in \mathcal{U}(x)$.

(U4) Ist $U \in \mathcal{U}(x)$, so existiert $V \in \mathcal{U}(x)$ so dass $U \in \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in V$.

Zeigen Sie:

a) Ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $X$, so erfüllt das System der Umgebungen $\mathcal{U}(\mathcal{T})$ bezüglich $\mathcal{T}$ die Hausdorffschen Umgebungsaxiome.

b) Sei $\mathcal{U}$ ein beliebiges System, das die Hausdorffschen Umgebungsaxiome erfüllt. Wir definieren $\mathcal{T}(\mathcal{U}) \subset \mathbf{P}X$ durch die Vorschrift $U \in \mathcal{T}(\mathcal{U})$ genau dann wenn $U \in \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in U$. Dann ist $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ eine Topologie auf $X$.

c) Ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $X$, $\mathcal{U}(\mathcal{T})$ das System der Umgebungen bezüglich $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}(\mathcal{U}(\mathcal{T}))$ die zugehörige Topologie. Dann ist $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{U}(\mathcal{T}))$.

---

*Abgabe: Donnerstag, den 30.10.2008 vor der Vorlesung*