Übungen zur Topologie — Blatt 2

Aufgabe 1 Seien X und Y topologische Räume. Zeigen Sie:

a) Erfüllen X und Y das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so auch $X+Y$ und $X \times Y$.

b) Wenn X und Y Hausdorffsch sind, sind auch $X+Y$ und $X \times Y$ Hausdorffsch.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie die universelle Eigenschaft der Produkttopologie: Sind $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ topologische Räume und $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ versehen mit der Produkttopologie. Ist $f : Y \to X$ eine Abbildung, so ist f genau dann stetig, wenn $\pi_\alpha \circ f : Y \to X_\alpha$ stetig ist für alle $\alpha \in I$, wobei $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ die kanonischen Projektionen sind.

b) Zeigen Sie die universelle Eigenschaft der Quotiententopologie: Ist X ein topologischer Raum und R eine Äquivalenzrelation auf X. Eine Abbildung $f : X/R \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $f \circ \pi : X \to Y$ stetig ist. Hier ist $\pi : X \to X/R$ die kanonische Projektion.

Aufgabe 3 Zeigen Sie dass die Einhängung der n-Sphäre homöomorph zur $n+1$-Sphäre ist: $S(S^n) \cong S^{n+1}$.

Aufgabe 4 Betrachten Sie folgendenden Teilraum von $\mathbf{R}^2$:

$$X := \left\{ \left(t, \sin(\tfrac{1}{t})\right) \in \mathbf{R}^2 : t > 0 \right\} \cup \left\{ (0, y) : -1 \leq y \leq 1 \right\}$$

a) Zeigen Sie, dass X zusammenhängend ist.

b) Zeigen Sie, dass X nicht wegzusammenhängend ist.

Abgabe: Donnerstag, den 6.11.2008 vor der Vorlesung