Übungen zur Topologie — Blatt 3

Aufgabe 1 Seien X und Y Hausdorffräume. Zeigen Sie, dass X und Y genau dann kompakt sind, wenn $X \times Y$ kompakt ist.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass folgende topologischen Räume paarweise nicht homöomorph sind:

$$[0,1], [0,1), (0,1), S^1, S^1 \vee S^1, \mathbf{R}^2, S^2, S^2 \vee S^2$$

Aufgabe 3 Sei X ein topologischer Raum.

a) Sei $C(X)$ der Raum der stetigen Funktionen $f : X \to \mathbf{R}$ auf X. Zeigen Sie, dass wenn $f, g \in C(X)$ gilt, dann sind auch folgende Funktionen in $C(X)$:
   (i) $f - g : X \to \mathbf{R} : x \mapsto f(x) - g(x)$, und
   (ii) $f \cdot g : X \to \mathbf{R} : x \mapsto f(x)g(x)$.

   Insbedondere bildet der Raum der stetigen reellwertigen Funktionen $C(X)$ auf X einen Ring bezüglich punktweiser Addition und Multiplikation.

b) Sei $C_b(X)$ der Raum der beschränkten Funktionen in $C(X)$, dh. aller Funktionen $f \in C(X)$ mit

$$\sup \big\{ |f(x)| : x \in X \big\} < \infty$$

   Auf $C_b(X)$ definieren wir $d : C_b(X) \times C_b(X) \to \mathbf{R}$ via

$$d(f,g) := \sup \big\{ |f(x) - g(x)| : x \in X \big\}$$

   Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $C_b(X)$ ist.

c) Wir sagen, dass eine Folge von Funktionen $(g_n)_n \in \mathbf{N} \subset C_b(X)$ *gleichmäßig* gegen eine Funktion $f : X \to \mathbf{R}$ konvergiert, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\bar{n} \in \mathbf{N}$ existiert, so dass

$$\sup \big\{ |f(x) - g_n(x)| : x \in X \big\} < \varepsilon$$

   für alle $n \geq \bar{n}$. Zeigen Sie, dass dann $f \in C_b(X)$.

Aufgabe 4 Sei M eine kompakte, n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass sich M in ein endliches Produkt von n-Sphären, und damit in einen $\mathbf{R}^N$ für großes $N \in \mathbf{N}$ einbetten läßt.

Hinweis: Zeigen Sie: Ist $U \subset M$ eine zu $\mathbf{R}^n$ homöomorphe Umgebung und $A := M \setminus U$, so ist M/A homöomorph zu S^n.

Abgabe: Donnerstag, den 13.11.2008 vor der Vorlesung