Übungen zur Topologie — Blatt 4

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass $\mathbf{R}P^n$ eine kompakte, wegzusammenhängende Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass jeder metrische Raum (X, d) ein T_4-Raum ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass wenn $A \subset X$ abgeschlossen ist die Funktion $d_A(x) := \inf_{a \in A} d(a, x)$ stetig ist und $d_A(x) = 0$ genau dann wenn $x \in A$.

Aufgabe 3 Sei $H := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\}$ die offene obere Halbebene und $\mathcal{T}$ die Teilraumtopologie von $H \subset \mathbf{R}^2$. Dabei sei $\mathbf{R}^2$ mit der Standardtopologie versehen.

Sei $L := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = 0\}$ die x-Achse und $\mathcal{B}$ die Menge der Teilmengen von $X := H \cup L$ der Form

$$(B_r(z) \cap H) \cup \{z\}$$

mit $z \in L$, und $r \in \mathbf{R}^+$. Es bezeichne $\mathcal{T}'$ die von $\mathcal{T} \cup \mathcal{B}$ erzeugte Topologie auf X. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}'$ zwar T_2 aber nicht T_4 ist.

Aufgabe 4 Sei X kompakt. Aus Aufgabe 3a) vom letzten Blatt folgt, dass $C(X)$ ein Ring bezüglich punktweiser Addition und Multiplikation bildet.

Ein Ideal $I \subset C(X)$ ist eine unter Addition abgeschlossene Teilmenge mit der Eigenschaft, dass falls $f \in C(X)$ und $g \in I$ folgt, dass $fg \in I$. Ein Ideal I ist maximal, falls $I \neq C(X)$ und für jedes weitere Ideal $J \neq C(X)$ mit $I \subset J$ folgt, dass $I = J$.

a) Zeigen Sie: Ist $x \in X$, so ist $I_x := \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$ ein maximales Ideal in $C(X)$.

b) Zeigen Sie, dass alle maximalen Ideale $I \subset C(X)$ gleich einem I_x sind.

c) Sei Y die Menge der maximalen Ideale in $C(X)$. Wir definieren auf Y eine Topologie indem wir als Basis folgende Mengen verwenden:

$$U_f := \{I \in Y : f \notin I\}$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $x \mapsto I_x$ ein Homöomorphismus ist.

Hinweis: Enthält ein Ideal I eine Funktion ohne Nullstellen, so ist $I = C(X)$.

Abgabe: Donnerstag, den 20.11.2008 vor der Vorlesung