Übungen zur Topologie — Blatt 5

Aufgabe 1 Sei $f : S^1 \to S^1$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass f homotop zu einer Abbildung $g : S^1 \to S^1$ ist mit $g(1) = 1$. Konstruieren Sie $H : f \simeq g$ explizit und zeigen Sie, dass $\deg H_t$ konstant ist, verwenden Sie dazu nicht Satz 6.21.

Aufgabe 2 Für zwei stetige Abbildungen $f, g : S^1 \to S^1$ definiere $f \cdot g : S^1 \to S^1$ als $f \cdot g(x) = f(x)g(x)$, wobei hier die Multiplikation komplexer Zahlen gemeint ist. Zeigen Sie:

a) $([S^1, S^1], \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe.

b) $\deg : ([S^1, S^1], \cdot) \to (\mathbf{Z}, +)$ ist ein Gruppenisomorphismus.

Aufgabe 3 *Fundamentalsatz der Algebra*. Sei $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ein Polynom mit $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass p eine Nullstelle in $\mathbf{C}$ besitzt.

Hinweis: Angenommen p hat keine Nullstelle. Zeigen Sie, dass $R > 0$ existiert, so dass $|p(Rz) - (Rz)^n| < |(Rz)^n|$ für alle $z \in S^1$. Konstruieren Sie damit eine Homotopie zwischen $z \mapsto p(Rz)/|p(Rz)|$ und $z \mapsto z^n$.

Aufgabe 4 Sei X ein beliebiger topologischer Raum. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : S^n \to X$ genau dann nullhomotop ist, wenn sie zu einer Abbildung $\bar{f} : \bar{B}^{n+1} \to X$ fortgesetzt werden kann mit $\bar{f}|_{S^n} = f$.

Abgabe: Donnerstag, den 27.11.2008 vor der Vorlesung