Übungen zur Topologie — Blatt 6

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass die Windungszahl $n(\alpha, p)$ einer geschlossenen Kurve $\alpha : S^1 \to \mathbf{R}^2$ um $p \in \mathbf{R}^2 \setminus \alpha(S^1)$ nur von der Wegekomponente von p in $\mathbf{R}^2 \setminus \alpha(S^1)$ abhängt.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass Homotopieäquivalenz eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass die dreifach punktierte Sphäre den Homotopietyp der Figur Acht hat: $S^2 \setminus \{p_1, p_2, p_3\} \simeq S^1 \vee S^1$.

b) Zeigen Sie, dass $T^2 \setminus \{p_1, p_2\} \simeq S^1 \vee S^1 \vee S^1$.

Aufgabe 4 Sei $g \geq 2$ und E_{2g} das reguläre $2g$-Eck mit Ecken $w_0, \ldots, w_{2g-1}$. Sei R die Äquivalenzrelation auf E_{2g}, die von folgender Identifikation erzeugt wird:

$$(1-t)w_{2j} + tw_{2j+1} \sim (1-t)w_{2j+1} + tw_{2j+2}$$

für $j = 0, \ldots, g-1$ und $t \in [0,1]$. Dann heißt $N_g := E_{2g}/R$ die *geschlossene, nicht orientierbare Fläche vom Geschlecht* g. Wir setzen $N_1 = \mathbf{R}P^2$.

a) Skizzieren Sie E_{2g} und die vorgenommenen Identifikationen.

b) Zeigen Sie, dass $N_g \setminus \{p\} \simeq \bigvee_{i=1}^{g} S^1$.

c) Entfernt man aus S^2 g Kreisscheiben und setzt dort g Möbiusbänder ein, so ist die entstandene Fläche homöomorph zu N_g.

Hinweis: Zu c). Zeigen Sie zunächst, dass wenn man aus S^2 eine Kreisscheibe entfernt und ein Möbiusband einklebt, die resultierende Fläche homöomorph zu $N_1 = \mathbf{R}P^2$ wird. Weiter ist N_2 die Verklebung von zwei Möbiusbändern. Gehen Sie dann induktiv vor.

Abgabe: Donnerstag, den 4.12.2008 vor der Vorlesung